УДК.517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Хомпыш Х.
Казахский Национальный университет им. ал-Фараби (Казахстан, Алматы)
Konat_k@mail.ru

Abstract. В работе рассматриваются вопросы существования и единственности сильного обобщенного решения одной нелинейной обратной задачи теории неньютоновской жидкости.

Keywords: Обратная задача, неньютоновские жидкости.

В последнее время активно развивается теория обратных задач для различных неклассических уравнений математической физики. Исследование таких задач представляет интерес как с точки зрения развития общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, так и точки зрения приложения в математическом моделировании различных процессов.

К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения по времени а также по пространным переменным. Однако в подавляющем большинстве исследованы задачи для параболических уравнений.

Данная работа посвящена изучение одной нелинейной обратной задаче для уравнения Кельвина-Фойгта описывающие движение одной неньютоновской жидкости. Уравнения Кельвина-Фойгта входит в классу уравнения соболевского типа. Направлении, связанном с направлением настоящей работы, можно отметить статьи [1]-[6].

Обратная задача состоит в том, что находятся не только скорость и градиент давления, но и сами правой части уравнения. Поставленная обратная задача исследуется в ограниченном цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω- ограниченная область из $R^m, m = 2, 3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$. Введено определение сильного обобщенного решения обратной задачи. Существования и единственности в целом по времени сильного обобщенного решения обратной задачи доказывается методам последовательных приближений [7].

Постановка задачи. Рассмотрим в Q_T, следующую обратную задачу, которая надо определить тройку функций $\{\vec{v}, \nabla p, f\}$ удовлетворяющих системе уравнений

$$\vec{v}_t - \nu\Delta\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} - \chi\Delta\vec{v}_t + \nabla p = f\,(t)\,\vec{g}\,(x,t)\,, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$div\vec{v} = 0\ ,\ \ (x,t) \in Q_T\ , \tag{2}$$

начальному условию

$$\vec{v}\,(x,0) = \vec{v}_0\,(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

краевому условию прилипания

$$\vec{v}\,(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma \tag{4}$$

и дополнительному условию интегрального переопределения

$$\int\limits_{\Omega} \vec{v}\,(x,t)\,\vec{u}\,(x)\,dx = e\,(t)\,, \qquad\qquad t\in[0,T]\,. \tag{5}$$

Здесь функции $\vec{v}_0\,(x)$, $\vec{u}\,(x)$, $e\,(t)$, $\vec{g}\,(x,t)$ заданы, а вектор скорости жидкости $\vec{v}$, градиент давления ∇p и коэффициент правой части $f(t)$ неизвестные. Положительные константы ν и χ есть соответственно коэффициенты вязкости и релаксации.

Дополнительная информация в рассматриваемой обратной задаче задается в виде условия интегрального переопределения (5), что с физической точки зрения может, например, означать измерение функции v с помощью датчика, производящего усреднение по области пространственных переменных по Ω.

Существования и единственности в целом по времени слабого и тем более сильного решения прямой задачи (1)-(4) с правой частью $\vec{f_1}(x,t) = f(t)\vec{g}(x,t)$ хорошо изучены работах А.П. Осколкова [8-10]. Используя известные эти результаты по прямой задачи (1)-(4), методам последовательных приближений [5] докажем существования и единственности в целом по времени сильного обобщенного решения нелинейной обратной задачи (1)-(5).

В работе использованы обозначения функциональных пространств и нормы принятых в [11].

Сильное решение обратной задачи (1)-(5) понимается в следующем смысле.

Определение. Пара функций $(\vec{v}, f)$ называется обобщенным решением обратной задачи (1)-(5), если

$$\vec{v}\,(x,t)\in L_\infty\left(0,T;\overset{\circ}{J}{}^{1}(\Omega)\right)\cap W_2^1\left(0,T;\overset{\circ}{J}{}^{1}(\Omega)\right),\quad f\,(t)\in L^2\,(0,T)$$

и удовлетворяет условии (3), (5) и следующим интегральным тождествам:

$$\iint\limits_{Q_T} \left(\vec{v}_t\varphi + \nu\vec{v}_x\varphi_x + \vec{v}_k\cdot\vec{v}\varphi_x + \chi\vec{v}_{xt}\varphi_x\right)dxdt = \iint\limits_{Q_T} f\,(t)\,\vec{g}\vec{\varphi}dxdt \tag{6}$$

для любого $\varphi\,(x,t)\in L_\infty\left(0,T;\overset{\circ}{J}{}^{1}(\Omega)\right)\cap W_2^1\left(0,T;\overset{\circ}{J}{}^{1}(\Omega)\right)$.

Предположим, что данные задачи удовлетворяют условии:

$$\begin{gathered}\vec{v}_0(x),\,\vec{u}(x)\in \overset{\circ}{J}{}^{1}(\Omega)\,,\ \vec{g}\,(x,t)\in L_\infty\left(0,T;L_2\,(\Omega)\right),\\ e\,(t)\in W_2^1\,(0,T)\,,\ \int\limits_{\Omega}\vec{u}\,(x)\,\vec{g}\,(x,t)\,dx\geq g>0,\ \ \forall t\in[0,T]\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Замечание. В задаче (1)-(5) при условии (7) функцию можно выразить явно, т.е.

$$f\,(t) = \frac{1}{(u,\,g)_{2,\Omega}}\left[e'\,(t) + \int\limits_{\Omega}\left(\nu\vec{v}_x\vec{u}_x + \chi\vec{v}_{xt}\vec{u}_x - \vec{v}_k\vec{v}\vec{u}_{x_k}\right)dx\right].$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняется предположения (7). Тогда существует единственное сильное обобщенное решение обратной задачи (1)-(5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК, грант N1781/ГФ4.

Литература

1. *Аблабеков Б.С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений // - Бишкек: Илим, 2001. 183.

2. *Asanov, A., Atamanov E.R.* Nonclassical and invers problems for pseudo-parabolic equations, Tokyo, 1997. 152.

3. *Fedorov V. E., Urasaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equation// J. of Inverse and Ill-posed Problems. 12(4). (2004). 387–395.

4. *Федоров В. Г., Иванова Н. Д.* Нелинейная обратная задача для системы Осколкова//Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач, тез. докл. -Новосибирск, (2011) 72.

5. *Khompysh Kh* Inverse Problem with Integral Overdetermination for System of Equations of Kelvin-Voight Fluids//Advanced Materials Research, 705(2013). 15-20.

6. *Abylkairov U. U., Khompysh Kh* An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin-Voight equations//Applied Mathematical Sciences, Journal for Theory and applications, 9 no. 101-104.(2015) 5079-5089.

7. *Абылкаиров У.У.* Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения. Математический журнал. -Алматы, 4(10) (2003). 5-12.

8. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. - Зап.научн.семинаров ЛОМИ АН СССР, 38 (1973). 98-136.

9. *Осколков А.П.* Об одной нестационарной квазилинейной системе с малым параметром, регуляризующей систему уравнений Навье-Стокса. -В кн.: "Пробл.матем.анализа". Изд-во ЛГУ, В.4. (1973) 78-87.

10. *Oskolkov A. P.* Nonlocal problems for the equations of the Kelvin- Voight fluids and their $\varepsilon-$ approximations// Zap. Nauchn. Sem. POMI, 221(1995) 185-207.

11. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. 1970, 2-ое изд.