УДК 519.677

БАЛАКАЕВА Г.Т., САРКАБОЕВ А.К.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПРИ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследование процессов, протекающих при обтекании различных тел потоками реальных жидкостей и газов, обусловлено, прежде всего развитием таких областей, как ракетная техника и космонавтика, аэродинамика,летательных аппаратов и др.Уравнения теории пограничного слоя были выведены Л. Прандтлем. Эти уравнения составляют основу теории пограничного слоя, которая интенсивно развивается уже более полувека и составляет один из важных разделов современной гидромеханики.В данной статье рассматривается численное моделирование процессов переноса при обтекании твердой поверхности потоком вязкого газа. Постановка задачи включает в себя решение уравнений в приближении пограничного слоя, полученных на основании приближений теории пограничного слоя. В статье выясненыстационарное ламинарное течение в пограничном слое на пластине.В статье построены решения основных двумерных задач теории пограничного слоя для стационарных течений несжимаемой жидкости. Для этих решений доказываются соответствующие теоремы единственности и устойчивости.
Ключевые слова: *Прандтля, уравнение пограничного слоя, пластина*

Investigation of the processes occurring in the flow of various bodies of real flows of liquids and gases, primarily due to the development of fields such as rocketry and astronautics, aerodynamics, aircraft and others. The equations of the boundary layer theory were derived by Prandtl. These equations are the basis of the boundary layer theory, which is developing intensively for more than half a century and is one of the most important areas of modern fluid mechanics. This article discusses the numerical modeling of the transport processes in the flow around a solid surface flow of viscous gas. Statement of the problem involves the solution of equations in the boundary layer approximation, obtained on the basis of approximation of the boundary layer theory. The article has clarified the steady laminar flow in the boundary layer on a plate. The paper constructed the solution of basic problems of two-dimensional boundary-layer theory for the stationary flow of an incompressible fluid. For these solutions proved corresponding uniqueness theorems and stability.
Keywords: *Prandtl, boundary layer theory, plate*

Сұйықтықтар және газдардың әр түрлі денелердегі ағынуы кезіндегі ағуын зерттейтін процесстер ең алдымен ракеталық техника, ғарыштық аппаратар, аэродинамика, ұшу аппаратары және т.б. салаларда дамуына байланыты. Шекаралық теңдеуі теориясы Л. Прандтля тарапынан еңгізілген. Бұл теңдеу шекаралық қабаттеориясының негізі болып есептелініп, жарты ғасыр бойы дамып келеді және заманауи гидромеханиканың ең қажетті бөлімдерінің бірі болып табылады. Бұл мақалада қатты дененің бетінде тұтқыр газдың ағыны кезіндегі ағуын ауыстыру процесстерінің сандық моделдеуін қарастырылады. Қойылған мәселе шекаралық қабат теңдеуінің шешімі шекаралық қабат теориясы негізінде жуықтап алуды өз ішіне алады. Бұл мақалада пластина үстіндегі шекаралық қабаттың қозғалмайтын ламинарлық ағыны анықталды. Мақалада шекаралық қабаттың сығылмайтын сұйықтықтардың қозғалмайтын ағынын екі өлшемді есепті негізгі шешімі құрылды. Бұл шешімдер үшін бірегейлік және тұрақтылық теориясы сайкестігімен дәлелденді.
Түйін сөздер: *Прандтля, шекаралық қабаты теориясы, пластина*

1 Введение

Теория пограничного слоя получила широкое распространение и применение для расчета трения и теплопередачи на телах, движущихся в потоке жидкости и газа. Методы теория пограничного слоя нашли также применение для анализа течений в аэродинамических следах за телами, для исследования течений в струях и каналах. При определенных физических предположениях указанные течения описываются системами нелинейных уравнений параболического типа (имеющими много общего), которые в дальнейшем мы будем называть *уравнениями типа пограничного слоя*[1].

2 Понятие пограничного слоя. Уравнение Прандтля

Поганичный слой - область течения вязкой жидкости (газа) с малой по сравнению с продольными размерами поперечной толщиной, появляющаяся у поверхности обтекаемого твёрдого тела или у границы раздела двух потоков жидкости с различным скоростями, температурам или химическом составом. Возникновение Пограничного слоя связано с явлением переноса в жидкости количества движения, теплоты и массы, характеризуемых коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии.

Основное предположение теории пограничного слоя, сделанное Прандтлем, заключается в том, что при движении тела с достаточно большой скоростью в жидкости (или газе) весь поток может быть приближенно разделен на две области: 1) область малой толщины вблизи тела, называемой пограничным слоем, где влияние сил вязкости соизмеримо с влиянием инерционных сил, и 2) область так называемого «внешнего» (по отношению к пограничному слою) потока, где влияние сил вязкости пренебрежимо мало, а преобладают инерционные силы.

Если вновь перейти к размерным переменным и опустить индекс «0», то получим систему уравнений плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, имя Л. Прандтля[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Второе уравнение в (8) показывает, что давление поперек пограничного слоя в каждом поперечном сечении постоянно и является функцией координаты x и времени. Распределение давления на внешней границе пограничного слоя совпадает с тем, которое было бы на поверхности тела, если бы отсутствовал пограничный слой. Таким образом, предполагается, что распределение давление берется из решения соответствующий задачи об обтекании тела потоком идеальной жидкости непосредственно на его поверхности. Если обозначить через $U=U(x, y)$ величину продольной составляющей скорости при обтекании тела идеальной жидкостью и учесть условие не протекания через поверхность ($v=0$), то U и p на поверхности тела должны удовлетворять уравнению.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{9}$$

Таким образом, градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ на внешней границе пограничного слоя может быть получен из уравнения (5.1.9), если известно распределение скорости U вдоль поверхности при ее обтекании идеальной жидкостью.

Граничные условия для системы (8) обычно записываются следующим образом:

$u = v = 0$ при $y = 0$,

$$u \to U \text{ при } y \to \infty \tag{10}$$

Первое из этих условий принято называть «условием прилипания», а второе отражает асимптотическое стремление продольной составляющей скорости к скорости на внешней границе пограничного слоя.

Стационарные течения в пограничном слое характеризуются тем, что искомые функции продольная и поперечная составляющие скорости, а также давление во внешнем потоке не зависят от времени. Таким образом, стационарные течения в пограничном слое описываются уравнениями Прандтля (8), с граничными условиями (10), где скорость внешнего потока $U=U(x)$ также не зависит от времени.

3 Стационарное ламинарное течение в пограничном слое на пластине.

Пусть ось x направлена вдоль обтекаемой пластины, ось y перпендикулярна к ней, а начало координат совпадает с передней кромкой пластины. При продольном обтекании плоской пластины стационарным равномерным идеальным потоком скорость во всем потока не меняется, $U = const$. Таким образом, по отношению к пограничному слою во внешнем потоке скорость и, следовательно, давление не меняются по x. Уравнения Прандтля в этом случае будут иметь вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

А граничные условия останутся прежними:

$u = v = 0$ при $y = 0$,

$$u \to U \text{ при } y \to \infty \tag{12}$$

Если прейти к безразмерном переменным, то уравнения и граничные условия запишутся следующим образом:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0, \tag{13}$$

$u \to 1$ при $y \to \infty$

Разности схема для системы уравнений стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

4 Решение задач пограничного слоя с разностными методами

Решение задач пограничного слоя разностными методами получило в настоящее время широкое распространение [2,3]. Разработанные методы оказались легко применимыми к решению различных задач этого класса и достаточно эффективными с точки зрения скорости расчета и загрузки оперативной памяти персонального компьютера, что позволяет применять их и на машинах малой и средней мощности.

Описание наиболее распространенной и простой разностной схемы, которую в дальнейшем будем называть основной разностной схемой, приведем сначала для стационарной системы уравнений Прандтля в безразмерной форме [2]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

С граничными условиями

$u = v = 0$ при $y = 0$,

$u \to U$ при $y \to \infty$.

И начальными условиями

$u = \tilde{u}(x_0, y)$, $v = \tilde{v}(x_0, y)$.

Уравнения движения этой системы будем аппроксимировать с помощью двухслойной неявной шеститочечной схемы [2,3]. Заметим, что применение явных схем для решения задач пограничного слоя крайне нерационально в связи с существенным ограничением на соотношение шагов сетки по x и yв силу условной устойчивости таких схем.

Конечно-разностная аппроксимация уравнения движения. Для аппроксимации системы уравнений, приведенной в начале этого параграфа, на плоскости (x, y) введем прямоугольную сетку.

$$x = x_0 + n\Delta x, \qquad y = m\Delta y, \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

И вспомогательную «полуцелую» сетку

$x = x_0 + n\Delta x, \qquad y = \left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta y,$

$x = x_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \qquad y = m\Delta y.$

Конечно-разностную аппроксимацию уравнения движения запишем в следующем виде:

$$u_m^{n+1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + v_m^{n+1/2} \frac{s(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (1-s)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{1}{\Delta y^2}\left[s(u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}) + (1-s)(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n)\right], m = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Здесь s – параметр усреднения.

Если заморозить коэффициенты разностного уравнения (15), т. е. считать $u_m^{n+1/2}$ и$v_m^{n+1/2}$ постоянными величинами, равными некоторым их средним значениям, то исследование схемы (15) на устойчивость методом Фурье показывает, что эта схема абсолютно устойчива при ½≤s≤1 при s=1/2 можно показать аналогично, что разностная схема (15) имеет второй порядок точности относительно шагов сетки Δx и $\Delta y (O(\Delta x^2) + (\Delta y^2))$.

Численная реализация неявной схемы проводилось методом прогонки, для этого (15) приводится к виду[2,3]:

$$\alpha_m u_{m-1}^{n+1} + \beta_m u_m^{n+1} + \gamma_m u_{m+1}^{n+1} = \delta_m, \tag{16}$$

$$\alpha_m = -\frac{s\left(v_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta y}\right)}{2\Delta y},$$

$$\beta_m = \frac{v_m^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 2s/\Delta y^2,$$

$$\gamma_m = \frac{s\left(v_m^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2}{\Delta y}\right)}{2\Delta y},$$

$$\delta_m = \frac{1-s}{2\Delta y}\left(v_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta y}\right)u_{m-1}^n + \left(\frac{u_m^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{(1-s)2}{\Delta y^2}\right)u_m^n - \frac{1-s}{2\Delta y}\left(v_m^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2}{\Delta y}\right)u_{m+1}^n - \frac{p^{n+1}-p^n}{\Delta x}.$$

Система уравнений (16) совместно с граничными условиями

$u_0^{n+1} = 0$ при $y = 0$,

$$u_m^{n+1} = 1 \text{ при } y_M = M\Delta y \tag{17}$$

(y_M – значениеy, при котором уже выполняется с определенной точностью верхнее граничное асимптотическое условие при $y \to \infty$) является системой алгебраических уравнений относительно искомых u_m^{n+1} – значений скорости

u на $(n+1)$-м слое $(m = 0, 1, 2, \dots, M)$. При этом мы пока предполагаем, что значения коэффициентов $u_m^{n+1/2}$, $v_m^{n+1/2}$ известны во всех необходимых точках. Так как эти коэффициенты выражаются через искомые функции, то они должны также вычисляться в процессе расчета. К описанию процедуры их вычисления мы вернемся ниже.

Система алгебраических уравнений (15), (16) имеет трех диагональную матрицу, поэтому может быть решена с помощью прогонки. Для нахождения u на $(n+1)$-м слое сначала вычисляются прогоночные коэффициенты в рекуррентном соотношении

$$u_m^{n+1} = A_m u_{m+1}^{n+1} + B_m \tag{17}$$

По следующим формулам:

$$A_m = \frac{\gamma_m}{\alpha_m A_{m-1} + \beta_m},$$

$$B_m = \frac{\delta_m - \alpha_m B_{m-1}}{\alpha_m A_{m-1} + \beta_m}, \qquad m = 1, 2, \dots, M-1. \tag{18}$$

Значения A_0 и B_0 находятся из первого условия (15):

$A_0 = B_0 = 0$.

Алгоритм решениязадачи состоит в нахождении профиля продольной составляющей скорости и затем из уравнения неразрывности находится поперечная составляющая скорости. Решение проводится по итерационной схеме до выполнения условия сходимости.

5 Заключение

В данной статье представлены результаты численного моделирования процессов переноса при обтекании плоской пластины. Численный расчет для уравнения продольной скорости в частных производных проводится на неявной разностной схеме с целыми и полуцелыми узлами. Определены стационарное ламинарное течение в пограничном слое на пластине. Программа численного счета составлены на алгебраическом языке С++ получены предварительные результаты.

Литературы

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.-711с.
2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена М.:Наука,1984. – 285с.
3. Балакаева Г.Т. Численное моделирование сверхзвукового обтекания пластины. Вестник АН РК, № 6, 1992., с.76-80.