Математикалық физика теңдеулері

Оқу құралы

Хомпыш Хонатбек

khompysh.khonatbek@kaznu.kz

Алматы,
Қазақ университеті, 2016

ӘОЖ 517(111)
КБЖ 11.111.11 Х11

Баспаға әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті
механика-математика факультетінің ғылыми кеңесі және
Редакциялық -баспа кеңесі шешімімен ұсынылған

Пікір жазғандар:
Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Сахаев Ш.С.,
Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ақыш А.Ш.

Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері: оқу құралы. –Алматы, Қазақ университеті, 2016 -220 б.

ISBN 1111-11-111-6

Оқу құралы автордың "Математикалық физика теңдеулері" пәні бойынша математика, техникалық ғылымдар және технологиялар бағытындағы мамандықтарға Абай атындағы ҚазҰПУ, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ оқып келе жатқан дәрістері мен жүргізген семинарлық сабақтарының материалдары негізінде жазылды. Оқу құралында математикалық физиканың негізгі теңдеулері: толқын теңдеуі, жылуөткізгіш теңдеуі, Лаплас теңдеуі және оларға қойылатын негізгі есептер мен оларды шешудің әдістері қарастырылған.

"Математикалық физика теңдеулері" оқулығы жоғарғы оқу орындарының математика, техникалық ғылымдар және технологиялар бағытындағы мамандықтарға арналған.

ӘОЖ 517(111)
КБЖ 11.111.11

ISBN 1111-11-111-6

Мазмұны

Белгілеулер

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ –нүкте, кеңістіктік айнымалы;
t –уақыт, уақыттық айнымалы;
$u(x,t)$ –ауытқу;
Ω –кеңістіктік айнымалы бойынша облыс;
R^n – n өлшемді евклидтік кеңістік;
$Q_T \equiv \Omega \times [0,T]$ –цилиндрлік облыс;
R^n – n өлшемді евклидтік кеңістік;

0.1 Алғы сөз

Табиғаттағы көптеген механикалық, физикалық, химия-биологиялық және т.б. құбылыстарды математикалық тұрғыда зерттеу әдетте дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған есептерді шешуге келтіріледі. Мұндай есептерді әрі қарай шешу, яғни шешімінің бар болуы, жалғыз болуы және орнықты болу мәселелеріне жауап беру–осы математикалық физика теңдеулері пәнінің қарастыратын, үйрететін негізгі обьектілері болып табылады.

Сондықтан да математикалық физика теңдеулері пәні – еліміздегі ЖОО математика, механика, математикалық және компьютерлік моделдеу және т.б. техникалық мамандықтарының оқу бағдарламаларындағы міндетті түрде оқытылатын пәндердің бірі.

Ұсынылып отырған оқу құралы аталған мамандықтардың мемлекеттік стандарты шеңберінде, автордың Абай атындағы ҚазҰПУ, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ оқып келе жатқан дәрістері мен жүргізген семинарлық сабақтарының материалдары негізінде жазылды.

Оқу құралында математикалық физиканың негізгі теңдеулері: параболалық типті теңдеулерден жылуөткізгіш, гиперболалық типтен – толқын, эллиптикалық типтен – Лаплас теңдеулері және оларға қойылатын негізгі есептер: Коши есебі, шеттік есеп, бастапқы-шеттік есептері қарастырылады. Сонымен қатар Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісі, сипаттауыштар, жалғастыру, интегралдық түрлендірулер, Грин функциясын құру сынды негізгі классикалық әдістер түсіндіріліп, оларды қолданып жоғарыдағы аталған есептерді шешудің тиімді жолдары көрсетіледі.

"Жүз рет естігеннен бір рет көрген артық" деген қазақ халқының мақалында айтылғандай, қандай да пән болмасын студенттердің өз бетінше оқып үйренуінде том-том теорияны қанша түсіне оқығаннан (жаттағаннан), оны нақты мысалдар арқылы тексере оқу, нақты есептерді шығарып, нәтижелерді қолмен ұстап көру әлдеқайда түсінікті әрі ұзақ есте сақталатындығы – автор үшін сонау студенттік күннен келе жатқан тәжірибе әрі қағида. Осы қағидаға сүйеніп, оқу құралының құрылымы: әрбір тақырыптың мазмұны алдымен қажетті анықтамалар мен тұжырымдар, негізгі әдістер сынды қысқаша теориялық түсініктер беріп, соңынан бірнеше мысалдар арқылы нақты есептерді шешу және компьютерлік бағдарламалар (Maple) көмегімен шешімнің нақты графигін көруге дейін түсіндіру негізінде құрастырылды.

Оқырманның алған білімдерін қалыптастыруы үшін әрбір тақырып соңында жаттығу есептері мен олардың жауаптары ұсынылды. Оқу құралындағы есептер мен жаттығуларды құрастыруда біршама жаңа есептер құрастырылумен қатар пайдаланылған әдебиеттер тізімінде көрсетілген көптеген әдебиеттерден есептер алынып қолданылды.

Бөлім 1

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер

1.1 Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Типін анықтау және канондық түрге келтіру

1.1.1 Негізгі ұғымдар мен анықтамалар.

Айталық, Ω $-n$ өлшемді евклидтік R^n кеңістігіндегі облыс, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ $-$ Ω облысында жататын кез келген нүкте, ал $u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ осы Ω облысында анықталған функция болсын.

Анықтама 1.1.1 *$x_1,x_2,...,x_n$ тәуелсіз айнымалыларын, ізделінді $u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ функциясын және оның $\dfrac{\partial u}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial u}{\partial x_n},...,\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}},\ldots$ дербес туындыларын байланыстыратын теңдеуді дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп атайды және оны қысқаша*

$$F\left(x_1,...x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}},\ldots\right)=0 \tag{1.1.1}$$

теңдігі түрінде жазады. Мұнда $F\left(x_1,...,u,\,u_{x_1},...\right)$ белгілі функция және $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}$ бойынша туындыларының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес, $i_1+i_2+...+i_n=k$.

Анықтама 1.1.2 *Теңдеуге қатысатын $u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ функциясының дербес туындыларының ең үлкен реті сол* ***теңдеудің реті*** *деп аталады.*

Анықтама 1.1.3 *Егер $u=\varphi\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ функциясы (1.1.1) теңдеудің Ω – берілу облысында өзінің теңдеуге қатысатын* *барлық дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болса және теңдеуді тепе-теңдікке айналдырса, онда $u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясын (1.1.1) дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің* ***классикалық (регулярлық) шешімі*** *деп атайды.*

Анықтама 1.1.4 *Егер (1.1.1) теңдеудегі F функциясы $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}$, $0 \le k \le m$ түрдегі барлық туындыларына сызықты тәуелді болса, онда (1.1.1) теңдеу* ***сызықты теңдеу*** *деп аталады.*

Мәселен, m ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$F\left(x_1, ...x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u\left(x_1, ..., x_n\right)}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}\right) = 0, \quad i_1 + ... + i_n = m$$

немесе

$$Lu \equiv \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n}\left(x\right) \frac{\partial^k u\left(x\right)}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}} = f\left(x\right), \;\; x \in D, \;\; i_1 + ... + i_n = k \quad (1.1.2)$$

түрде болады.

Анықтама 1.1.5 *Егер (1.1.2) теңдеуде $f\left(x\right) \equiv 0$ болса, онда теңдеу біртекті, ал кері жағдайда біртекті емес деп аталады.*

Анықтама 1.1.6 *Егер (1.1.1) теңдеудегі F функциясы m – ретке дейінгі, яғни $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}$, $0 \le k < m$ түрдегі барлық туындыларына сызықты тәуелді болса, онда (1.1.1) теңдеу квазисызықты теңдеу деп аталады. Қалған жағдайларда теңдеу сызықты емес деп аталады.*

Мысал 1.1.1 *Келесі теңдеулердің ретін және түрін анықтаңыз:*

а) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3u_x - yu_y\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(yu_x - u\right) - u_y + 2yu = 0$ – теңдеуі екінші ретті, сызықты біртекті теңдеу. Себебі:

$$3u_{xx} - yu_{xy} + yu_{yx} - u_{yy} - u_y + 2yu = 3u_{xx} - u_{yy} - u_y + 2yu = 0.$$

ә) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3u_x - yu_y\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(yu_x - u\right) - xu_y - 4yu + \cos x = 0$ теңдеуі екінші ретті, сызықты біртекті емес теңдеу.

б) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}^2 + u_{yy}\right) - u_y \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_y - u_x\right) - u\left(u_y + u_x\right) + u = 0$ теңдеуі үшінші ретті квазисызықты теңдеу.

в) $u_x^2 + u_y^2 - \left(u_y - u_x\right)^2 + 2\left(u_y + u_x\right) + u = 0$ теңдеуі бірінші ретті сызықты емес теңдеу.

1.1.2 Екінші ретті көп айнымалылы дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеулер. Типін анықтау және канондық түрге келтіру

Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u(x) = f(x) \qquad (1.1.3)$$

түрде болады. Мұнда $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ және оң жақтағы $f(x)$ функциялары Ω облысында анықталған жатық, белгілі функциялар. Сонымен қатар $a_{ij}(x)$ коэффиценттері Ω облысында бір уақытта барлығы бірдей нөлге тең емес әрі $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Екінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеулердің типін анықтау

Жоғарыдағы (1.1.3) теңдеудің типін анықтау үшін төмендегідей қадамдар жасалынады:

1. (1.1.3) теңдеуге сәйкес, ондағы айнымалылардың санына қатысты λ_i айнымалылары бойынша

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \qquad (1.1.4)$$

квадраттық формасын құрамыз.

2. Әрбір бекітілген $x_0 = \left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \Omega$ нүктеде (1.1.4) квадраттық форманы алгебра курсынан белгілі[1] ерекше емес

$$\begin{cases} \mu_1 = b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + ... + b_{1n}\lambda_n \\ \mu_2 = b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + ... + b_{2n}\lambda_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_n = b_{n1}\lambda_1 + b_{n2}\lambda_2 + ... + b_{nn}\lambda_n \end{cases}$$

немесе матрицалық түрдегі

$$\mu = B\lambda, \qquad (1.1.5)$$

аффиндік түрлендіруі арқылы канондық түрге келтіруге болады, яғни

$$Q(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i^2, \quad q_i \in \{-1, 0, 1\}. \qquad (1.1.6)$$

Бұл (1.1.6) канондық түрдегі квадраттық форманың коэффициенттері арқылы (1.1.3) теңдеудің типін анықтайды.

[1] Сызықты алгебраның элементтері жайлы теорема

Анықтама 1.1.7 *Егер $q_i,\ i=\overline{1,n}$ коэффициентерінің барлығы бірдей нөлге тең емес және барлығы бір таңбалы болса, онда (1.1.3) дифференциалдық теңдеуі Ω облысының x_0 нүктесінде эллиптикалық типті теңдеу деп аталады.*

Егер $q_i,\ i=\overline{1,n}$ коэффициентерінің барлығы бірдей нөлге тең емес және біреуі немесе бірнешеуі оң, қалгандары теріс таңбалы болса, онда (1.1.3) дифференциалдық теңдеуі Ω облысының x_0 нүктесінде гиперболалық типті теңдеу деп аталады.

Егер $q_i,\ i=\overline{1,n}$ коэффициентерінің ең болмаганда біреуі нөлге тең болса, онда (1.1.3) дифференциалдық теңдеуі Ω облысының x_0 нүктесінде параболалық типті теңдеу деп аталады.

Анықтама 1.1.8 *Егер (1.1.3) теңдеу Ω облысының әрбір нүктесінде эллиптикалық немесе гиперболалық, немесе параболалық типті теңдеу болса, онда оны Ω облысында сәйкес эллиптикалық, гиперболалық немесе параболалық типті теңдеу деп атайды.*

Анықтама 1.1.9 *Егер (1.1.3) теңдеуі Ω облысының әр түрлі бөлігінде әр түрлі типке жататын болса, онда оны Ω облысында аралас типті теңдеу деп атайды.*

Мысал 1.1.2 *Келесі дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықтаңыз:*

$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}+u_x+u_y=0.$

Шешуі: Бұл теңдеудің квадраттық формасын құрып, оны канондық түріне келтіреміз:

$$Q\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2=\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2+\left(\lambda_2+2\lambda_3\right)^2+\lambda_3^2$$

Бұған $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2,\ \ \mu_2=\lambda_2+2\lambda_3,\ \ \mu_3=\lambda_3$ белгілеулерін енгізсек, онда канондық түрдегі квадраттық форманы аламыз:

$$Q\left(\mu_1,\mu_2,\mu_3\right)=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2.$$

Бұл нормалды түрдегі квадраттық формадағы қосылғыштардың саны берілген теңдеудегі айнымалылардың санына тең және олардың коэффициенттері $q_1=q_2=q_3=1$ бәрі бір таңбалы. Олай болса анықтама бойынша берілген теңдеу эллиптикалық типті болады.

Бұл мысалдағы түрлендіруші матрица

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Мысал 1.1.3 *Келесі дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықтайық:*

$2u_{xy}+2u_{yz}+4u_{xz}+u_{yy}-u_{zz}+3u_z+u_y+yu=0.$

Шешуі: Бұл теңдеудің квадраттық формасын құрып, канондық түрге келтерелік:

$$Q\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)=2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2\lambda_3+4\lambda_1\lambda_3+\lambda_2^2-\lambda_3^2=$$

$$2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2\lambda_3+2\lambda_1\lambda_3+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+2\lambda_1\lambda_3-\lambda_1^2-2\lambda_3^2=$$

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)^2-\left(\lambda_1-\lambda_3\right)^2-\lambda_3^2=\mu_1^2-\mu_2^2-\mu_3^2,$$

мұнда $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \ \mu_2=\lambda_1-\lambda_3,\ \ \mu_3=\lambda_3$. Демек, $q_1=1,\ q_2=q_3=-1$ болғандықтан теңдеу гиперболалық типті.

Жоғарыдағы (1.1.3) теңдеудің типін келесі әдіспен де анықтауға болады. Ол үшін

$$\det\left(\tilde{Q}-\lambda E\right)=0 \tag{1.1.7}$$

теңдеуінің түбірлерін табамыз. Мұндағы $\tilde{Q}=\|a_{ij}\|$ – теңдеудің коэффициенттерінен құрылған матрица, ал E бірлік матрица.

Егер (1.1.7) теңдеудің $\lambda_i,\ \ i=1,\dots n$, түбірлерінің барлығы нөлге тең емес және барлығы бірдей бір таңбалы болса, онда (1.1.3) теңдеу эллиптикалық типті, егерде түбірлерінің барлығы бірдей нөлге тең емес және әртүрлі таңбалы болса, онда теңдеу гиперболалық типті, ал егер түбірлерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең болса, онда параболалық типті болады.

Мысал 1.1.4 *Келесі дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықта:*

$u_{xx}-4u_{yy}+2u_{xz}+4u_{yz}+2u_x+3u_y-u=0.$

Шешуі. Мұнда $\tilde{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&2\\1&2&0\end{pmatrix}$

$$\det\left(\tilde{Q}-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&-4-\lambda&2\\1&2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(9-3\lambda-\lambda^2\right)=0.$$

Бұл теңдеудің түбірлері $\lambda_1=0,\ \ \lambda_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2}$, демек бір түбірі нөлге тең болғандықтан теңдеу параболалық типті.

Екінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеулерді канондық түрге келтіру

Екінші ретті, сызықты, тұрақты коэффициентті теңдеулер облыстың барлық нүктесінде бір типке ие болады. Екінші ретті, сызықты, тұрақты коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді канондық түрге келтіруге байланысты қолданылатын алмастыру сызықты түрлендіру түрінде болады. Сондықтан мұндай теңдеулерді канондық түрге келтіру жеңілірек.

Айталық B –(1.1.2) квадраттық форманы канондық түрге келтіретін сызықты ерекше емес ($\det |B| \neq 0$) түрлендіруші матрица болсын. Онда (1.1.3) теңдеу

$$\xi = B^T x \tag{1.1.8}$$

түрлендіруі арқылы $x = x_0$ нүктеде

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \Phi\left(\xi, u, ..., \frac{\partial u}{\partial \xi_j}, ...\right) = 0$$

канондық түрге келтіріледі, мұндағы B^T- B матрицасының транспонирленген матрицасы.

Мысал 1.1.5 *Келесі теңдеуді канондық түрге келтір:* $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$.

Шешуі. Теңдеуге сәйкес сипаттаушы квадраттық формасын құрып, оны канондық түріне келтірейік:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 =$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2.$$

Бұған

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \\ \mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3, \\ \mu_3 = \lambda_3 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

белгілеуін енгізсек, онда квадраттық форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = q_1\mu_1^2 + q_2\mu_2^2 + q_3\mu_3^2 \tag{1.1.10}$$

канондық түрге келеді. Мұнда $q_1 = q_2 = 1$, $q_3 = 0$ болғандықтан, теңдеу параболалық типті.

Ал, (1.1.9) түрлендіруден $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ тапсақ

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 \\ \lambda_2 = \mu_2 - \mu_3 \\ \lambda_3 = \mu_3 \end{cases}$$

болады. Демек, $Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ квадраттық формасын (1.1.10) канондық түрге келтіретін матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ал теңдеуді канондық түрге келтіретін транспонирленген матрица

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Олай болса, (1.1.8) бойынша, осы транспонирленген матрица арқылы келесі жаңа ауыстырулар енгіземіз:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

немесе $\xi = x,\ \eta = -x + y,\ \varsigma = 2x - y + z$. Бұлардың

$\xi'_x = 1,\ \eta'_x = -1,\ \varsigma'_x = 2;\quad \xi'_y = 0,\ \eta'_y = 1,\ \varsigma'_y = -1;\quad \xi'_z = 0,\ \eta'_z = 0,\ \varsigma'_z = 1$ туындаларын анықтап, теңдеудегі енген барлық туындыларды жаңа айнымалылар бойынша ауыстырамыз:

$$\begin{array}{r||lcl}
0 & u_x & = & u_\xi - u_\eta + 2u_\varsigma; \\
0 & u_y & = & u_\eta - u_\varsigma; \\
0 & u_z & = & u_\varsigma; \\
1 & u_{xx} & = & u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 4u_{\varsigma\varsigma} - 2u_{\xi\eta} + 4u_{\xi\varsigma} - 4u_{\varsigma\eta}; \\
2 & u_{xy} & = & -u_{\eta\eta} - 2u_{\varsigma\varsigma} + u_{\xi\eta} - u_{\xi\varsigma} + 3u_{\eta\varsigma}; \\
-2 & u_{xz} & = & u_{\xi\varsigma} - u_{\eta\varsigma} + 2u_{\varsigma\varsigma}; \\
2 & u_{yy} & = & u_{\eta\eta} + u_{\varsigma\varsigma} - 2u_{\varsigma\eta}; \\
2 & u_{zz} & = & u_{\varsigma\varsigma}
\end{array}$$

Бұларды сәйкес коэффициенттерге көбейтіп қоссақ, нәтижеде

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

канондық түрін аламыз. Жауабы: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.

1.1.3 Екі айнымалыдан тәуелді дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің типін анықтау және канондық түрге келтіру

Екінші ретті екі айнымалыдан тәуелді дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі

$$a_{11}u_{xx}(x, y) + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y) = 0 \tag{1.1.11}$$

түрде жазылады, мұндағы $a_{11}(x,y)$, $a_{12}(x,y)$, $a_{22}(x,y)$ – $\Omega \subset R^2$ облысында екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар, ал F – өзінің аргументтері бойынша анықталған функция,

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \ u_{xy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}, \ u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

.

1. Типін анықтау. Бұл (1.1.11) теңдеудің типін анықтау үшін жоғарыдағы жалпы жағдайда айтылғандай, алдымен оның квадраттық формасын құрамыз

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2.$$

Бұл квадраттық форманың канондық түрі

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

шамасына байланысты болады[2].

Егер $\Delta > 0$ болса, (1.1.11) теңдеу гиперболалық типті, $\Delta = 0$ болса, параболалық типті, ал $\Delta < 0$ болса, онда эллиптикалық типті болады.
Бұл $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ айырмасы (1.1.11) теңдеудің немесе квадраттық форманың *дискриминанты* деп аталады.

Мысал 1.1.6 *Теңдеудің типін анықтаңыз:*
$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + xy + 3u - u_x + 2u_y = 0.$

Шешуі. Мұнда $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 3$, ал оларға сәйкес дискриминант $\Delta = 2^2 - 1 \cdot 3 = 1 > 0$ оң. Демек, теңдеу гиперболалық типті.

Мысал 1.1.7 *Теңдеудің типін анықтаңыз:* $2u_{xx} - 5u_{xy} + 10u_{yy} + 3u_x + u_y - u = 0.$

Шешуі. $a_{11} = 2$, $a_{12} = \frac{5}{2}$, $a_{22} = 10$, ал $\Delta = \frac{25}{4} - 20 = -\frac{55}{4} < 0$. Теңдеу эллиптикалық типті.

Мысал 1.1.8 *Теңдеудің типін анықтаңыз:* $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + u = 0.$

Шешуі. Мұнда $a_{11} = x^2$, $a_{12} = xy$, $a_{22} = y^2$ және кез-келген x және y айнымалылары үшін $\Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$. Демек, теңдеу параболалық типті.

Мысал 1.1.9 *Берілген облыста теңдеудің типін анықтаңыз:*

$$xu_{xx} + 2(x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, \qquad \Omega = \{(x,y): \ x = 1, \ 1 \le y \le 2\}.$$

Шешуі. Алдымен берілген теңдеудің дискриминантын табайық:

$$\Delta = (x+y)^2 - xy = x^2 + xy + y^2.$$

[2] ([] қараңыз)

Берілген $\Omega = \{(x,y): \ x=1, \ 1 \leq y \leq 2\}$ облысында $\Delta = 1+y+y^2 > 0$ болғандықтан, теңдеу гиперболалық типті.

2. Канондық түрге келтіру. Теңдеуді канондық түрге келтіру үшін оның сипаттаушы теңдеуі деп аталатын келесі теңдеуді құрамыз

$$a_{11}\left(dy\right)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}\left(dx\right)^2 = 0.$$

Бұл теңдеудің екі жағын $(dx)^2$ бөлсек, онда

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$$

квадрат теңдеуге келеміз және ол өз кезегінде келесі екі жәй дифференциалдық теңдеуге жіктелінеді:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.1.12}$$

Егер $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, яғни теңдеу гиперболалық типті болса, онда (1.1.12) теңдеулердің $\varphi\left(x,y\right) = C_1$ және $\psi\left(x,y\right) = C_2$ екі әртүрлі нақты шешімі болады. Бұлар (1.1.11) теңдеудің екі әртүрлі нақты сипаттауыштар тобын анықтайды және бұл сипаттауыштар арқылы $\xi = \varphi\left(x,y\right), \ \ \eta = \psi\left(x,y\right)$ жаңа айнымалылар енгізсек, онда берілген теңдеу

$$u_{\xi\eta} + \Phi\left(\xi, \, \eta, \, u, \, u_{\xi}, \, u_{\eta}\right) = 0 \tag{1.1.13}$$

түріндегі канондық түрге келеді. Егер (1.1.13) теңдеуге әрі қарай $\xi_1 = \xi+\eta, \ \ \eta_1 = \xi - \eta$ жаңа алмастыруын енгізсек, онда ол

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\eta_1\eta_1} + \Phi_1\left(\xi_1, \, \eta_1, \, u, \, u_{\xi_1}, \, u_{\eta_1}\right) = 0 \tag{1.1.14}$$

түрдегі екінші канондық түрге келеді.

Егер $\Delta = 0$, яғни теңдеу параболалық типті болса, онда (1.1.12) теңдеулердің ортақ $\varphi\left(x,y\right) = C$ бір ғана нақты интегралы болады. Егер теңдеуге $\xi = \varphi\left(x,y\right)$ және Якобианы $\dfrac{D\left(\xi,\eta\right)}{D\left(x,y\right)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$ болатындай таңдап алынған кез-келген жатық $\psi\left(x,y\right)$ функциясы арқылы $\eta = \psi\left(x,y\right)$ алмастыруын енгізсек, онда (1.1.11) теңдеу

$$u_{\xi\xi} + \Phi_2\left(\xi, \, \eta, \, u, \, u_{\xi}, \, u_{\eta}\right) = 0 \tag{1.1.15}$$

түріндегі канондық түрге келеді.

Егер $\Delta < 0$, яғни теңдеу эллиптикалық типті болса, онда (1.1.12) теңдеулерінің өзара түйіндес комплекс $\varphi\left(x,y\right) \pm i\psi\left(x,y\right) = C$ жалпы шешімдері болады. Бұл жағдайда оның нақты бөлігі $\varphi\left(x,y\right)$ және жорамал бөлігі $\psi\left(x,y\right)$

функциялары арқылы $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ алмастыруларын енгізсек, онда (1.1.11) теңдеу

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Phi_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.1.16}$$

түріндегі канондық түрге келеді.

Теңдеуді жаңа айнымалылар арқылы өрнектеу үшін $u(x, y)$ функциясы мен оның теңдеуге енген барлық дербес туындыларын

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x;\\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y;\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx};\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy};\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

формулалары арқылы есептеуге болады.

Мысал 1.1.10 $u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$ *теңдеуін типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз.*

Шешуі. Бұл теңдеуде $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 0$ болғандықтан $\Delta = 4 > 0$. Демек, теңдеу гиперболалық типті. Теңдеудің сипаттаушы теңдеуі

$$(dy)^2 - 4dxdy = 0$$

болады. Бұл теңдеудің

$$dy - 4dx = 0,\; dy = 0 \;\Rightarrow\; y - 4x = C_1,\;\; y = C_2$$

екі нақты сипаттауыштары бар. Егер оған $\xi = y - 4x$, $\eta = y$ ауыстыруларын енгізсек, онда

$$\xi_x = -4,\;\; \eta_x = 0,\; \xi_y = 1,\;\; \eta_y = 1,$$

$$u_x = -4u_\xi;\quad u_y = u_\xi + u_\eta;\quad u_{xx} = 16u_{\xi\xi};\quad u_{xy} = -4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta}.$$

Бұларды берілген $u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$ теңдеуге қойсақ,

$$16u_{\xi\xi} + 4(-4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta}) - 4u_\xi = -16u_{\xi\eta} - 4u_\xi = 0$$

теңдігіне келеміз, яғни теңдеудің канондық түрі $-16u_{\xi\eta} - 4u_\xi = 0$ немесе $u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0$.

Жауабы $u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0$.

Мысал 1.1.11 $y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$ *теңдеуін канондық түрге келтіріңіз.*

Шешуі. Мұнда $a_{11} = y^2$, $a_{12} = -xy$, $a_{22} = x^2$ және $\Delta = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0$ болғандықтан теңдеу параболалық типті және (1.1.12) бойынша сипаттаушы теңдеуін шешсек:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} = \frac{-xy}{y^2} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy + xdx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1, \quad x^2 + y^2 = \bar{C}_1$$

бір ғана сипаттауышы болады және $\xi = x^2 + y^2$. Ал η айнымалысын $\eta = x$ түрде енгізуге болады, себебі $\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = -2y \neq 0, \;\; y \neq 0.$

Бұдан $\xi_x = 2x, \;\; \eta_x = 1, \;\; \xi_y = 2y, \;\; \eta_y = 0$ және (1.1.17) бойынша

$$\begin{aligned}
&u_x = 2xu_\xi + u_\eta;\\
&u_y = 2yu_\xi;\\
&u_{xx} = 2u_\xi + 2x\left(2xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\right) + 2xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 2u_\xi + 4x^2u_{\xi\xi} + 4xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};\\
&u_{xy} = 4xyu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta};\\
&u_{yy} = 2u_\xi + 4y^2u_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Бұларды берілген теңдеуге қойсақ

$$2\left(x^2 + y^2\right)u_\xi + y^2u_{\eta\eta} = 0$$

теңдігіне келеміз. Бұған $\xi = x^2 + y^2$ және $\eta = x$ ауыстыруларын қолданып теңдеудің канондық түрін аламыз

$$u_{\eta\eta} + \frac{2\xi}{\xi - \eta^2}u_\xi = 0.$$

Жауабы $u_{\eta\eta} + \dfrac{2\xi}{\xi - \eta^2}u_\xi = 0.$

Мысал 1.1.12 $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0$ *теңдеуін канондық түрге келтіріңіз.*

Шешуі. Мұнда $a_{11} = 1$, $a_{12} = -3$, $a_{22} = 13$, $\Delta = 9 - 13 = -4 < 0$ болғандықтан теңдеу эллиптикалық типті және

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = -3 \pm 2i, \;\Rightarrow$$

$$dy = (-3 \pm 2i)\,dx \quad \Rightarrow \quad y + 3x \pm 2ix = C.$$

Теңдеудің комплекс түйіндес сипаттауыштары болады. Сондықтан $\xi = y + 3x, \;\; \eta = 2x$ ауыстыруларын қолданамыз. Бұдан

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 3, \;\; \eta_x = 2, \;\; \xi_y = 1, \;\; \eta_y = 0;\\
&u_x = 3u_\xi + 2u_\eta; \qquad u_y = u_\xi;\\
&u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 12u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta};\\
&u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta};\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

туындыларын тауып, берілген теңдеуге қойсақ

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$

канондық түріне келеміз.

Жауабы $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.

Ескерту 1.1.1 *Егер (1.1.11) теңдеу сызықты әрі коэффициенттері тұрақты болса және оның келтірілген (1.1.13) немесе (1.1.14) және (1.1.15), (1.1.16) канондық түрдегі теңдеулері бірден интегралдап шешімін табуға мүмкін болмайтындай ықшамсыз түрде болса, онда оған*

$$u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\, e^{a\xi+b\eta}$$

алмастыруы көмегімен теңдеуді одан әрі ықшамды түрге келтіруге болады. Мұндағы a және b нәтижеде алынған теңдеу ықшамды болатындай таңдап алынатын еркін тұрақты сандар. Көбінде оларды, гиперболалық және эллиптикалық жағдайда бірінші ретті дербес туындыларының алдындағы коэффициенттері, ал параболалық типті жағдайда бірінші ретті дербес туындыларының алдындағы коэффициенттерінің біреуі мен $v(\xi,\eta)$ функциясының алдындағы коэффициенті нөлге тең болатындай таңдап алынады.

Мысал 1.1.13 $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$ *теңдеуін канондық түрге келтіріп әрі қарай ықшамда.*

Шешуі. Мұнда $a_{11} = 1,\ a_{12} = \dfrac{1}{2},\ \ a_{22} = -2$ болғандықтан $\Delta = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4} > 0$ теңдеу гиперболалық типті және сипаттаушы теңдеуінің

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

екі шешімі болады. Бұдан

$$dy = -dx, \quad dy = 2dx \ \Rightarrow\ y + x = C_1, \quad y - 2x = C_2$$

алғашқы интегралдарын анықтаймыз. Демек, $\xi = x + y$, $\eta = y - 2x$ ауыстыруларын енгіземіз. Бұдан

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 1,\ \ \eta_x = -2,\ \ \xi_y = 1,\ \ \eta_y = 1;\\
&u_x = u_\xi - 2u_\eta; \qquad u_y = u_\xi + u_\eta;\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta};\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta};\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

туындыларын тауып, берілген теңдеуге қойсақ, нәтижеде канондық түрін аламыз, яғни

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x =\\
&u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} - 2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})\\
&-3(u_\xi - 2u_\eta) - 153(u_\xi + u_\eta) + 27x = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad u_{\xi\eta} + 2u_\xi + u_\eta - \xi + \eta = 0.$

Бұған әрі қарай $u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\, e^{a\xi+b\eta}$ ауыстыруын енгізіп және

$$u_\xi = v_\xi e^{a\xi+b\eta} + ave^{a\xi+b\eta};$$
$$u_\eta = v_\eta e^{a\xi+b\eta} + bve^{a\xi+b\eta};$$
$$u_{\xi\eta} = v_{\xi\eta} e^{a\xi+b\eta} + bv_\xi e^{a\xi+b\eta} + av_\eta e^{a\xi+b\eta} + abve^{a\xi+b\eta};$$

туындыларын анықтап, орындарына қоямыз:

$$v_{\xi\eta} e^{a\xi+b\eta} + (b+2)\, u_\xi e^{a\xi+b\eta} + (a+1)\, u_\eta e^{a\xi+b\eta} + (ab+2a+b)\, ve^{a\xi+b\eta} - (\xi-\eta) = 0.$$

Теңдеу гиперболалық типті болғандықтан соңғы теңдіктен $a = -1$, $b = -2$ деп таңдап аламыз (Ескерту 1.1.1 қараңыз) және екі жағын $e^{a\xi+b\eta}$ қысқартсақ, нәтижеде ықшамдалған

$$v_{\xi\eta} - 2v - (\xi-\eta)\, e^{\xi+2\eta} = 0$$

түрін аламыз.

1.2 Жаттығулар

1.2.1 *Төмендегі теңдеулердің қайсысы дербес туындылы дифференциалдық теңдеу?*

1. $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{xx})^2 = 0;$
2. $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y + 1 = 0;$
3. $\sin(u_{xy} + u_x) - \sin u_{xy} \cos u_x - \cos u_{xy} \sin u_x + u - 2 = 0;$
4. $u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\partial}{\partial x}(u_y - u_x) - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_x + u_y) + u = 0;$
5. $u_{xy} + u_{yy} - \dfrac{\partial}{\partial x}(u_y - u_x) - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_y + u_x) + u = 0.$

1.2.2 *Төмендегі теңдеулердің ретін анықтаңыз.*

1. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u^3 = 0;$
2. $u_x u_{xy}^2 + \left(u_{xx}^2 - 2u_{xy} + u_y\right)^2 - 2xy = 0;$
3. $u_{xy} + 2u_x u_y + (u_x - u_y)^2 + \sin^2 u_{xx} + \cos^2 u_{yy} = 0;$
4. $u_{xx} - u_{yy} - \dfrac{\partial}{\partial x}(u_{yx} + u_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xy} + u_y) + u = 0.$

1.2.3 *Төмендегі теңдеулердің түрін (сызықты, сызықты емес, квазисызықты) анықтаңыз.*

1. $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$;
2. $a(u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, u_x, u_{xx})u_{xyy} + a(x, y, u)u_{yy} = 0$;
3. $2\sin(x + y)u_{xx} - x\cos y u_{xy} + xyu_x - 3u + 1 = 0$;
4. $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{yy} - 3xyu_y - u = 0$;
5. $2xu_{xy} - 6\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2 - xy\right) + u_{yy} = 0$.

1.2.4 *Төмендегі теңдеулердің типін анықтап, канондық түрге келтіріңз.*

1. $2u_{xx} + 3u_{xy} + 3u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$;
2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0$;
3. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0$;
4. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$ әрі қарай ықшамда;
5. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$ әрі қарай ықшамда.

1.2.5 *Төмендегі теңдеулердің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз.*

1. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$;
2. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$;
3. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$;
4. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$;
5. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0$ әрі қарай ықшамда.

1.3 Жауаптары

1.3.1 ***1.*** *дербес туындылы теңдеу.* ***2.*** *теңдеу емес.* ***3.*** *алгебралық теңдеу.* ***4.*** *алгебралық теңдеу.* ***5.*** *дербес туындылы теңдеу.*

1.3.2 ***1.*** *бірінші ретті.* ***2.*** *екінші ретті.* ***3.*** *екінші ретті.* ***4.*** *үшінші ретті.*

1.3.3 ***1.*** *сызықты емес.* ***2.*** *квазисызықты.* ***3.*** *сызықты.* ***4.*** *сызықты емес.* ***5.*** *квазисызықты.*

1.3.4 ***1.*** *гиперболалық,* $\xi = y - x, \eta = 2y - x,\ u_{\xi\eta} + 3u_\xi - u_\eta + 2u = 0$. ***2.*** *эллиптикалық,* $\xi = y - 2x, \eta = 3x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta - u + \xi + \eta = 0$. ***3.*** *параболалық,* $\xi = y^2 - x^2, \eta = x^2,\ u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$. ***4.*** *параболалық,* $\xi = x, \eta = 3x + y,\ u = ve^{\frac{\xi}{2}-\frac{\eta}{4}},\ v_{\xi\xi} - v_\eta = 0$. ***5.*** *гиперболалық,* $\xi = x, \eta = -2x + y,\ u = ve^{-6\xi+\eta},\ v_{\xi\eta} + 7v = 0$.

1.3.5 ***1.*** *гиперболалық,* $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{x}{2}+y$, $\zeta = -\frac{x}{2}-y+z$, $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}+u_\eta = 0$. ***2.*** *эллиптикалық,* $\xi = x$, $\eta = y-x$, $\zeta = x-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}$, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta} = 0$. ***3.*** *параболалық,* $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 2x - y + z$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. ***4.*** *ультрагиперболалық,* $\xi = x+y$, $\eta = x-y$, $\zeta = -2y+z+t$, $\tau = z+t$, $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}-u_{\tau\tau} = 0$. ***5.*** *гиперболалық,* $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\zeta = -x - y + z$, $u = ve^{-\eta}$, $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + v = 0$.

Бөлім 2

Математикалық физиканың негізгі есептері

2.1 Математикалық физиканың негізгі теңдеулері

Табиғаттағы көптеген механикалық, физикалық, химия-биологиялық және т.б. құбылыстарды зерттеу көп жағдайда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Мұндай құбылыстарды математикалық тұрғыда зерттеу үшін алдымен физикалық, химиялық, механикалық т.т. заңдылықтар негізінде олардың математикалық моделі (дифференциалдық теңдеуі) құрылады. Әдетте дифференциалдық теңдеулердің шешімдері көп болады. Солардың ішінен қажетті шешімді алу үшін негізгі заңдылықтарға және зерттеліп отырған құбылыстың табиғатына байланысты қосымша шарттар (бастапқы, шекарлық, түйіндес, шенелімдік, периодты, т.б.) қойылады. Теңдеу мен қосымша шарттар бірігіп есеп деп аталады. Одан кейін, қойылған есепті математикалық түрлі аппараттар арқылы зерттеп, қарастырылып отырған құбылысқа қажетті сұрақтарға математикалық тілде (мәселен шешімнің бар болуы, жалғыздығы, орнықты болуы және т.б.) жауап беріледі. Бұл курста жоғарыдағы айтылған үш типке жататын математикалық физиканың ең қарапайым үш теңдеуі қарастырылады. Атап айтқанда гиперболалық типті теңдеулерге жататын толқын теңдеуі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad \textbf{(бірөлшемді толқын теңдеуі)}$$

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \qquad \textbf{(көпөлшемді толқын теңдеуі)}$$

параболалық типті теңдеулерге жататын жылуөткізгіш теңдеуі

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \qquad \textbf{(бірөлшемді жылуөткізгіш теңдеуі)}$$

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \qquad \textbf{(көпөлшемді жылуөткізгіш теңдеуі)}$$

және эллиптикалық типті теңдеулерге тиісті Лаплас және Пуассон теңдеулері

$$\Delta u(x,y) := u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (\textbf{екі өлшемді Лаплас теңдеуі})$$

$$\Delta u(x,y) := u_{xx} + u_{yy} = f(x,y). \qquad (\textbf{екі өлшемді Пуассон теңдеуі})$$

Бұл теңдеулерден өзге бұл курс шеңберінде қарастырылмайтын, нақты үдерістерді сипаттайтын сызықты және сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін көптеп келтіруге болады. Мысалға

$$u_{tt} + bu_t + cu - a^2 u_{xx} = 0, \qquad (\textbf{Телеграф теңдеуі})$$

$$\Delta u + \lambda u = f(x,y), \qquad (\textbf{Гельмгольц теңдеуі})$$

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0, \qquad (\textbf{Тасымал теңдеуі})$$

$$iu_t + \Delta u = 0, \qquad (\textbf{Шрёдингер теңдеуі})$$

$$-\Delta u = f(u), \qquad (\textbf{Сызықты емес Пуассон теңдеуі})$$

$$\rho_t + div\,(\rho \cdot \vec{u}) = 0, \qquad (\textbf{сұйық ағысының үзіліссіздік теңдеуі})$$

$$div\left(|Du|^{p-2}\,Du\right) = 0, \qquad (p- \textbf{ Лаплас теңдеуі})$$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0, \qquad (\textbf{Бюргерс теңдеуі})$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad (\textbf{Кортевега де Фриз (KdV) теңдеуі})$$

$$u_t - \Delta\,(u^\gamma) = 0, \qquad (\textbf{Кеуек орта фильтрация теңдеуі})$$

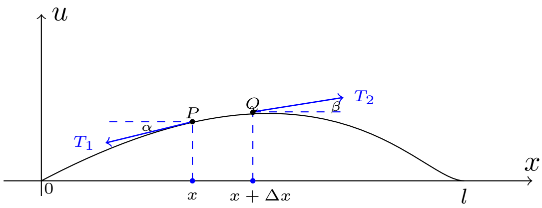
$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \nabla p = f, \quad div\vec{u} = 0, \qquad (\textbf{Эйлер теңдеуі})$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}(x,t), \quad div\vec{u} = 0. \qquad (\textbf{Навье-Стокс теңдеуі})$$

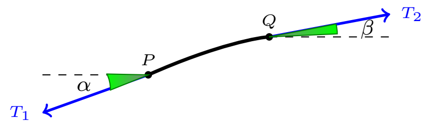
2.1.1 Толқын теңдеуі (шектің көлденең тербелісінің теңдеуі)

Ұзындығы l тең, екі ұшынан бекітіліп керілген шектің көлденең ауытқуы аз болатын, яғни ұзындығына қарағанда көлденең ауытқуы өте аз болатын тербелісін қарастырайық. Мұнда *шек* деп июге қарсы кедергісі жоқ, көлденең қимасының ауданы ұзындығымен салыстырғанда өте аз, солқылдақ жіңішке жіпті елестетуге болады. Шектің июге қарсы кедергі күші жоқ болғандықтан t уақыт мезеттегі x нүктесіндегі оның $T(x,t)$ керілу күші сол x нүктедегі жанама бағытымен бағыттас болады.

Айталық шек тепе-теңдік қалпында O_{xu} жазықтығында O_x өсінің бойында орналассын (сурет 2.1.1-1) және тығыздығы $\rho = const$ тұрақты болсын. Шек сыртқы $F(x,t)$ күштің әсерінен тепе-теңдік қалпынан көлденең ауытқысын, яғни шектің әрбір нүктесі O_u өсіне параллелль бағытталып қозғалсын.



сурет 2.1.1-1



сурет 2.1.1-2

Шектің x нүктелерінің t уақыт аралығындағы тыныштық күйден көлденең ауытқуын $u(x,t)$ деп белгілейік. Шектің көлденең ауытқуы $u(x,t)$ аз тербелісі қарастырылғандықтан $u(x,t)$ және $u_x(x,t)$-бірінші ретті туындыларының квадраттары және олардың көбейтінділері бұл шамалардың өздерімен салыстырғанда жоғарғы ретті аз шамалар болады. Сондықтан теңдеуді қорытып шығаруда оларды ескермеуге болады, яғни $u^2 \approx u_x^2 \approx uu_x \approx 0$ деп есептейміз.

Шектің кез келген $[x,\, x+\Delta x]$ бөлігіндегі тербелісті қарастырайық (сурет 2.1.1-2). Бұл аралықтағы шек бөлігінің ұзындығы[1]

$$l_{PQ} = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}dx \approx (x+\Delta x) - x = \Delta x.$$

Бұдан көлденең ауытқуы аз тербеліс кезінде шектің кез келген бөлігінің ұзындығы өзгермейтіндігін көреміз. Олай болса Гукь заңы бойынша $T(x,t)$ керіліс күші уақыт өзгерісінен тәуелсіз болады $T(x,t) = T(x)$.

Екіншіден, шектің тек көлденең тербелісі қарастырылғандықтан горизонталь ауытқуы болмайды. Сонымен қатар инерция және сыртқы күштер O_u өсіне параллелль болғандықтан олардың горизонталь компоненттері, яғни O_x өсіндегі проекциялары нөлге тең болады

$$|T_1|\cos\alpha = |T_2|\cos\beta = T_0 = const, \tag{2.1.1}$$

[1]Мат. анализ курсынан қисық доғаның ұзындығын табуды қараңыз.

мұндағы $T_1 = T(x)$, $T_2 = T(x+\Delta x)$.

Шындығында, Даламбер қағидасы бойынша барлық әсер етуші күштердің O_x өсіндегі проекцияларының қосындысы нөлге тең болуы тиісті:

$$-|T_1|\cos\alpha + |T_2|\cos\beta = 0. \tag{2.1.2}$$

Бұдан

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1$$

екендігін ескерсек, онда (2.1.2) теңдіктен

$$T(x) \approx T(x+\Delta x)$$

аламыз. Мұндағы x, Δx кез келген болғандықтан, $T(x)$ керіліс күші x айнымалыдан да тәуелсіз, яғни $T(x) = T_0 = const$ тұрақты болады.

Енді теңдеуді қорытып алу үшін *Ньютонның екінші заңын*[2] O_u өсі үшін жазайық

$$T_{1O_u} + T_{2O_u} + F\cdot\Delta x = \rho\cdot\Delta x\cdot u_{tt}$$

немесе

$$-|T_1|\sin\alpha + |T_2|\sin\beta + F\cdot\Delta x = \rho\cdot\Delta x\cdot u_{tt}. \tag{2.1.3}$$

Мұнда u_{tt} – үдеуді, ал $\rho\cdot\Delta x$ – массаны береді. Бұл (2.1.3) теңдіктің екі жағын (2.1.1) бойынша $|T_1|\cos\alpha = |T_2|\cos\beta = T_0$ бөлсек

$$tg\beta - tg\alpha + \frac{F}{T_0}\Delta x = \frac{\rho}{T_0}\Delta x\cdot u_{tt}$$

аламыз. Соңғы теңдікке

$$tg\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

және

$$tg\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

жанаманың бұрыштық коэффициенттері екендігін ескеріп және оның екі жағын Δx бөлейік

$$\frac{u_x(x+\Delta x) - u_x(x)}{\Delta x} + \frac{F}{T_0} = \frac{\rho}{T_0}u_{tt}. \tag{2.1.4}$$

[2] $ma = F_1 + F_2 + ...$

(2.1.4) теңдіктен $\Delta x \to 0$ ұмтылдырып шекке көшсек, нәтижеде

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{2.1.5}$$

шектің көлденең тербелісінің теңдеуін аламыз, мұндағы $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, $f(x,t) = \dfrac{1}{\rho} F(x,t)$, $\rho = const.$

(2.1.5) теңдеу *бір өлшемді біртекті емес толқын теңдеуі* деп аталады. Егер $F(x,t) = 0$ болса, яғни шек сыртқы күштің әсерінсіз тербелетін болса онда шектің еркін тербелісінің теңдеуін аламыз

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{2.1.6}$$

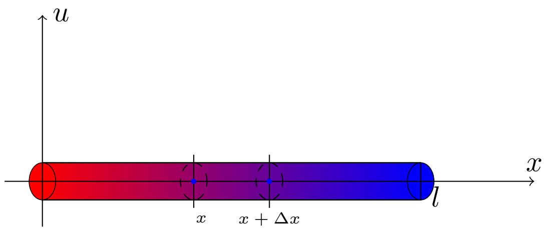
Бұл теңдеу *біртекті толқын теңдеуі* деп аталады.

Көп өлшемді жағдайда да (мысалға $n = 2$ өлшемді жағдайда жазық мембрана теңдеуін) осындай жолдармен толқын теңдеуін қорытып шығаруға болады

$$u_{tt} - a^2 \Delta u(x,t) = 0, \quad x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.7}$$

2.1.2 Жылуөткізгіш теңдеуі

Ұзындығы l тең, біртекті, бүйір бетінен жылу изолирленген жіңішке стержень ішіндегі жылудың таралу құбылысын қарастырайық (сурет 2.1.2-3). Айталық стержень O_x өсінің бойында орналассын және көлденең қимасының ауданы S – изотермиялық (яғни кез келген уақыт мезетінде көлденең қимасының әрбір нүктесіндегі температурасы бірдей) бет болсын. Сонымен қатар t уақыт мезетіндегі стерженнің x қимасындағы температурасы $u(x,t)$ болсын.



(сурет 2.1.2-3) - стержень ішіндегі жылудың таралуы.

Әуелі жылудың таралуына қатысты қажеті физикалық заңдылықтарды келтірейік:

- **Фурье заңы.** Егер дене температурасы бірқалыпты болмаса, онда оның ішінде жылу ағыны пайда болады және ол жылу ағыны жоғары температуралы ортадан төменгі температуралы ортаға бағытталып қозғалады. Δt уақыт аралығында S бетінен ағып өтетін жылу мөлшері

$$dQ = qS \cdot \Delta t \tag{2.1.8}$$

мұндағы

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}$$

бірлік уақыт ішіндегі бірлік ауданды қимадан өтетін жылу мөлшері, $k(x)$ жылуөткізгіштік коэффициент.

- Біртекті дененің температурасын Δu шамасына өсіру үшін қажетті жылу мөлшері

$$dQ = cm\Delta u = c\rho S\Delta u\Delta x \tag{2.1.9}$$

мұндағы c- үлесті жылу сыйымдылық, m-дене массасы, ρ-тығыздығы.

- Ішкі белгілі $F(x,t)$ жылу көзінің әсерінен (дене ішінде жылу пайда болуы немесе жұтылуы мүмкін) Δt уақыт ішінде бөлінетін жылу мөлшері

$$dQ = SF(x,t)\Delta x\Delta t. \tag{2.1.10}$$

- Энергияның сақталу заңы

$$Q = Q_1 + Q_3 + ... \tag{2.1.11}$$

Қарастырылып отырған құбылыстың теңдеуін қорытып шығару үшін стерженнің кез келген аз $[x, x+\Delta x]$ бөлігін қарастырайық. Фурье заңы, яғни (2.1.8) бойынша $[t, t+\Delta t]$ уақыт ішінде аралығында x қимасынан ағып кіретін жылу мөлшері

$$dQ_1 = -kS\ \Delta t\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x,$$

ал $x+\Delta x$ қимасынан ағып шығатын жылу мөлшері

$$dQ_2 = -\left(-kS\ \Delta t\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}\right) = kS\ \Delta t\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}.$$

Сонымен қатар $[t, t+\Delta t]$ уақыт ішінде ішкі $F(x,t)$ жылу көзінің әсерінен стерженнің $[x, x+\Delta x]$ бөлігіне бөлінетін жылу мөлшері (2.1.10) бойынша

$$dQ_3 = SF(x,t)\Delta x\Delta t.$$

Екінші жағынан, $[t, t+\Delta t]$ уақыт ішінде стерженнің $[x, x+\Delta x]$ бөлігінің температурасын $\Delta u = u(x, t+\Delta t) - u(x,t)$ шамасына өзгерту үшін жұмсалған жылу мөлшері (2.1.9) бойынша

$$dQ = c\rho S\left(u(x, t+\Delta t) - u(x,t)\right)\Delta x.$$

Олай болса энергияның сақталу заңы (2.1.11) бойынша

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 + dQ_3,$$

немесе

$$c\rho S\left(u(x, t+\Delta t) - u(x,t)\right)\Delta x = -kS\,\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + kS\,\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} + SF\Delta x\Delta t.$$

Мұндағы c, ρ, S, k тұрақты шамалар екендігін ескеріп, соңғы теңдіктің екі жағын $S\Delta x\Delta t$ бөлсек

$$\frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right) + \frac{1}{c\rho}F(x,t)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктен $\Delta x\Delta t \to 0$ ұмтылдырып шек алсақ, нәтижеде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.1.12}$$

жылуөткізгіш теңдеуін аламыз, мұндағы $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f(x,t) = \dfrac{1}{c\rho}F(x,t)$.

Егер жылу көзі болмаса, яғни $F(x,t) = 0$ болса, онда (2.1.12) теңдеуден біртекті жылуөткізгіш теңдеуі шығады

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0.$$

Жалпы жағдайда жылуөткізгіш теңдеуі

$$u_t - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t) \tag{2.1.13}$$

немесе

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(k\nabla u\right) + f(x,t), \qquad x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$$

дивергентті түрде жазылады, мұндағы $\Delta u(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – Лаплас операторы.

2.1.3 Лаплас теңдеуі (стационар жылу өрісі).

Біртекті материалды дене ішіндегі жылудың таралу процессі жоғарыда қорытылғандай

$$u_t - a^2 \Delta u\,(x,t) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

жылуөткізгіш теңдеуімен сипатталады. Егер процесс стационарлы, яғни жылудың таралуы уақыт өзгеруінен тәуелсіз болса, онда $u_t\,(x,t) = 0$ болғандықтан $u\,(x,t)$ температура

$$\Delta u\,(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1.14}$$

теңдеуімен сипатталады. Мұндағы Δ:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = u_{xx} + u_{yy},\ \ n = 2,\\
&\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},\ \ n = 3,\\
&\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + ... + u_{x_n x_n},\ \ x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Лаплас операторы ал, (2.1.14) теңдеу Лаплас[3] теңдеуі деп аталады.

Егер сыртқы жылу көзі орын алатын болса, онда процесс

$$\Delta u\,(x) = f(x),\ \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Пуассон теңдеуімен сипатталады.

2.2 Математикалық физика теңдеулеріне қойылатын негізгі есептер

Дифференциалдық теңдеулердің шешімдері әдетте көп болады. Олардың ішінен қажетті шешімді алу үшін оған зерттелініп отырған құбылыстың табиғатына байланысты қосымша шарттар қойылады. Математикалық физиканың негізгі теңдеулеріне уақыт бойынша бастапқы шарт (Коши шарты) және кеңістіктік айнымалы бойынша шекаралық (шеттік) шарттар қойылады.

2.2.1 Коши есебі

Егер қарастырылып отырған облыс шенелмеген болса, мәселен бір өлшемді жағдайда $x \in (-\infty, \infty)$, онда толқын және жылөткізгіш теңдеулерінің қажетті шенелген жалғыз шешімін алу үшін оларға бастапқы шарттар (немесе Коши

[3] PIERRE SIMON LAPLACE (Пьер-Симон Лаплас), (1749–1827)–әйгілі Французиялық математик, физик әрі астроном. Ол математикалық физикада әсіресе арнайы функциялар және потенциалдар теориясында елеулі еңбектер жасады. Оның атымен Лаплас теңдеуі және Лаплас түрлендіруі аталады. Сонымен қатар оның еңбектері аспан механикасы, ықтималдықтар теориясы, гидродинамика, анализ, дифференциалдық теңдеулер және т.б. салаларда маңызды орын алады.

шарты деп аталады) қойылады. (2.1.6) немесе (2.1.7) толқын теңдеуі үшін бастапқы шарт

$$u\,(x,\,0)=\varphi\,(x)\,,\ \ u_t\,(x,\,0)=\psi\,(x)\,,\ \ x\in\mathbb{R} \tag{2.2.15}$$

түрде қойылады. Себебі толқын теңдеуінде t айнымалы бойынша екінші ретті туынды бар. Ал (2.1.12) немесе (2.1.13) жылуөткізгіш теңдеуінде t айнымалы бойынша бірінші ретті туынды болғандықтан бастапқы шарт

$$u\,(x,0)=\varphi\,(x)\,,\ \ x\in\mathbb{R} \tag{2.2.16}$$

түрде қойылады. Сонымен, *толқын теңдеуі үшін Коши есебі* деп

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t\,(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2.17}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x,t)=C^2\,(Q)\cap C^{0,1}_{x,t}\,\left(\bar{Q}\right)$ функциясын табу есебін түсінеміз. Мұндағы $Q=\mathbb{R}\times(t>0)\,,\ \bar{Q}=\mathbb{R}\times(t\geq 0)\,.$
Ал *жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебі* деп

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2.18}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x,t)=C^{2,1}\,(Q)\cap C\,\left(\bar{Q}\right)$ функциясын табу есебін айтамыз. Мұндағы $\varphi(x),\ \psi(x)$ бастапқы немесе Коши берілгендері деп аталатын белгілі функциялар.

Ескерту 2.2.1 *Мұндай шенелмеген облыстарда берілген Коши есебіне* $x\to\infty$ *кезде* $\exists M\in\mathbb{R},\ \ |u(x,t)|<M$ *шарттарының орындалуы талап етіледі. Әдетте бұл шарт шенелімдік сөзінің ішіне сиятындытан жазылмайды.*

2.2.2 Шекаралық шарттар

Егер қарастырылып отырған Ω облысы шенелген болса, мәселен, бірөлшемді жағдайда $\Omega=[0,\,l]$ кесіндісі, онда шешімнің шекарасындағы мәндері туралы шекаралық шарттар қойылады. Шекаралық шарттар үш түрде қойылады.

Анықтама 2.2.1 ***Бірінші текті шекаралық шарт*** *немесе* ***Дирихле***[4] ***шарты*** *деп* $S=\partial\Omega$ *шекарада* $u(x,t)$ *функциясының мәні берілген*

$$u\,(x,t)|_{\partial\Omega}=\mu\,(t)\,,\quad t>0 \tag{2.2.19}$$

түрдегі шартты айтады.

[4] JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (Иоганн Петер Густав Лежён-Дирихле) (1805–1859)–Неміс математигі. Негізгі жұмыстары сандар теориясы мен математикалық анализ курсы. Сонымен қатар оның механикада, математикалық физикада маңызды еңбектері бар.

Анықтама 2.2.2 ***Екінші текті шекаралық шарт*** *немесе* ***Нейман***[5] ***шарты*** *деп шекарада* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *туындысының мәні берілген*

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \nu(t), \quad t > 0 \tag{2.2.20}$$

түрдегі шартты айтады.

Анықтама 2.2.3 ***Үшінші текті шекаралық шарт*** *деп шекарада* $u(x,t)$ *функциясы мен* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *туындысының мәндерін байланыстырып қойылған*

$$\left.\left(\alpha u(x,t) + \beta\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = \chi(t), \quad t > 0 \tag{2.2.21}$$

түрдегі шартты айтады. Мұндағы $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ *белгілі сандар.*

Егер шекарадағы мәндері ($\mu(t)$, $\nu(t)$, $\chi(t)$ функциялары) нөлге тең болса, онда шекаралық шарттар *біртекті*, ал кері жағдайды *біртекті емес* деп аталады. Жоғарыдағы (2.2.19)-(2.2.21) шарттар $n = 1$ болғанда сәйкес келесі түрде болады:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \;\; u(l,t) = \mu_2(t), \quad x \in [0,l];$$

$$u_x(0,t) = \nu_1(t), \;\; u_x(l,t) = \nu_2(t), \quad x \in [0,l];$$

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = \chi_1(t), \;\; \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = \chi_2(t), \;\; x \in [0,l].$$

Ескерту 2.2.2 *Үшінші шекаралық шарт жалпы түрдегі шекаралық шарт болып есептеледі, себебі* $\alpha = 0$ *болса екінші шекаралық шартты, ал* $\beta = 0$ *болса бірінші шекаралық шартты аламыз.*

Ескерту 2.2.3 *Шектің тербелісі үшін бірінші шекаралық шарттың мағынасы екі ұшы қатты бекітілген шектің, екінші шекаралық шарт екі ұшы бос, ал үшінші шекаралық шарт екі ұшы серпімді бекітілген шектің тербелісін белдіреді.*

Ескерту 2.2.4 *Жылуөткізгіш теңдеуі үшін бірінші шекаралық шарттың мағынасы дененің бүйір бетінің температурасы белгілі болған, екінші шекаралық шарт- шекарасы жылуизолирленген, ал үшінші шекаралық шарт шекарасында сыртқы ортамен жылу алмасу орын алатындыған білдіреді.*

[5] CARL NEUMANN (Карл Нейман) (1832–1925)–неміс математигі әрі физигі. Оның негізгі жұмыстары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (потенциялдар теориясы, екінші шеттік есеп), интегралдық теңдеулер және алгебралық функцияларды зерттеуге арналған. Сонымен қатар оның механика, электродинамика, гидродинамика саласында да маңызды еңбектері бар.

2.2.3 Бастапқы-шеттік есептер.

Лаплас және Пуассон теңдеулері стационар теңдеулер болғандықтан оларға тек жоғарыдағы үш шекаралық шарттардың біреуі қойылады. Мұндай шекаралық шартпен берілген есептер *шекаралық (шеттік) есептер* деп аталады. Ал жылуөткізгіш немесе толқын теңдеулерін шенелген облыстарда бірмәнді шешу үшін оларға сәйкес (2.2.15), (2.2.16) бастапқы шарттарға қоса (2.2.19)-(2.2.21) шекаралық шарттардың бірі қосылып қойылады. Мұндай есептер *бастапқы-шекаралық* немесе *аралас есеп* деп аталады.

1. Бірөлшемді толқын теңдеуі үшін бастапқы-шекаралық есептің қойылымы:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, \quad 0 < x < l,\ t > 0; \\ u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,,\ u_t\,(x, 0) = \psi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l, \\ u\,(0, t) = \mu\,(t)\,,\ \ u\,(l, t) = \nu\,(t)\ \ \ , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x, t) \in C^{2,2}_{x,t}\,(Q_t) \cap C^{0,1}(\overline{Q_t})$ шешімін табу керек. Мұндағы φ, ψ, μ, ν белгілі, үзіліссіз және

$$\varphi\,(0) = \mu\,(0)\,,\ \varphi\,(l) = \nu\,(0)\,,\ \psi\,(0) = \mu'\,(0)\,,\ \psi\,(l) = \nu'\,(0)$$

үйлесімділік шарттарын қанағаттандыратын функциялар.

2. Бірөлшемді жылуөткізгіш теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шекаралық есептің қойылымы:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0\,, \quad 0 < x < l,\ t > 0; \\ u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l, \\ u\,(0, t) = \mu\,(t)\,,\ \ u\,(l, t) = \nu\,(t)\ \ \ , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x, t) \in C^{2,1}_{x,t}\,(Q_t) \cap C(\overline{Q_t})$ шешімін табу керек. Мұндағы φ, μ, ν белгілі, үзіліссіз және

$$\varphi\,(0) = \mu\,(0)\,,\ \varphi\,(l) = \nu\,(0)$$

үйлесімділік шарттарын қанағаттандыратын функциялар.

3. Лаплас теңдеуі үшін бірінші шеттік немесе Дирихле есебінің қойылымы:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0\,,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u\,(x) = \varphi\,(x)\,, \quad x \in S = \partial\Omega \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x, t) \in C^2\,(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ шешімін табу керек.

Дәл осы сияқты толқын теңдеуі үшін (2.1.7), (2.2.15), (2.2.20) және (2.1.7), (2.2.15), (2.2.21), жылуөткізгіш теңдеуі үшін (2.1.13), (2.2.16), (2.2.20) және (2.1.13), (2.2.16), (2.2.21) екінші және үшінші бастапқы-шекаралық есептерінің, Лаплас теңдеуі үшін (2.1.14), (2.2.20) және (2.1.14), (2.2.21) екінші (Нейман) және үшінші шеттік есептерінің қойылымын алуға болады.

2.2.4 Математикалық физика есептерінің қисынды қойылуы

Математикалық физика есептері нақты құбылыстарды сипаттайтындықтан, физикалық мән мағынасына байланысты олардың қисынды және қисынсыз қойылу ұғымдары енгізіледі.

Анықтама 2.2.4 *Егер қарастырылып отырған кеңістікте қойылған математикалық есептің*

- *шешімі бар болса;*
- *шешімі жалғыз болса;*
- *шешімі орнықты болса, онда есеп қисынды қойылған деп аталады.*

Есептің шешімінің орнықты болуы дегеніміз- шешімінің есептің бастапқы берілгендерінен (шекаралық функциядан, бастапқы шарттағы функциядан, теңдеудің оң жағынан және т.б.) үздіксіз тәуелді болуы, яғни есептің берілгендерін аз өзгеріске енуінен шешімнің айтарлықтай үлкен өзгеріске ұшырамауын түсінеміз.

Егер жоғарыдағы үш шарттың біреуі орындалмаса, онда есеп қисынды емес деп аталады. Математикалық физика есептерінің (жоғарыдағы анықталған мағынада) қисынды қойылу ұғымын алғаш енгізген француздық ғалым-Жак Адамар[6].

Алайда, қисынды қойылған есептермен қатар қисынды емес есептер де жиі кездеседі. Сондай қисынды қойылмаған есептердің бірі-Адамар мысалы деп аталатын төмендегі Лаплас теңдеуіне қойлған Коши есебі:

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \ -\infty < y < \infty; \\
&u(0,y) = f(y), \quad u_x(0,y) = g(y), \quad -\infty < y < \infty.
\end{aligned}$$

Егер $f_1(y) = 0, \quad g_1(y) = 0$ деп алсақ, онда оларға сәйкес шешім $u_1(x,y) = 0$ функциясы, ал $f_2(y) = \dfrac{1}{n}\sin ny, \quad g_2(y) = 0$ деп алсақ, онда шешім $u_2(x,y) = \dfrac{1}{n}\sin ny \cosh nx,$ функциясы болатынын тексеру қиын емес.

Шешім үзіліссіз функциялар класынан (классикалық шеш3м) ізделінгендіктен, есептің бастапқы берілгендерінің өзгерісін C кеңістігінің метрикасы бойынша есептейміз:

$$\rho\left(g_1, g_2\right) = 0, \quad \rho\left(f_1, f_2\right) = \max\left|-\frac{1}{n}\sin ny\right| = \frac{|\sin ny|}{n},$$

[6] Hadamar

яғни жеткілікті үлкен n мәндері үшін $\rho\left(f_1, f_2\right)$ жеткілікті аз шама болады. Ал оларға сәйкес шешімдер өзгерісі

$$\rho\left(u_1, u_2\right) = \max\left|-\frac{1}{n}\sin ny\cosh nx\right| = \frac{|\sin ny|}{n}\cosh nx$$

жеткілікті үлкен n үшін шексіз үлкен шама болады, себебі $x > 0$ үшін

$$|\sin ny| \leq 1, \quad \frac{\cosh nx}{n} = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{n} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Демек, шешім орнықсыз. Қисындылықтың үшінші шарты орындалмағандықтан, есеп қисынды емес.

Міне осы тәрізді қисынды емес қойылған есептерге мысалдары көптеп келтіруге болады. Бұл оқу құралында қарастырылатын барлық есептер қисынды қойылған. қисынды қойылған деп аталады, егер

2.3 Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

2.3.1 *Ұзындығы l $(0 \leq x \leq l)$, тығыздығы $\rho = \rho(x)$ сызықты болатын шек $O_{x,u}$ жазықтығында көлденең тербеліс жасайды. Шектің көлденең тербелісі $u(x,t)$ деп алып, шектің*
а) ешбір бекітілген массалары болмаған жағдайдағы;
б) әрбір x_i нүктелерінде m_i, $i = 1, ..., n$ массалары бекітілген жағдайдағы;
K кинетикалық энергиясын анықтаңыз.

2.3.2 *Ұзындығы l $(0 \leq x \leq l)$ тең шек $O_{x,u}$ жазықтығында көлденең тербеліс жасайды. Шектің көлденең тербелісі $u(x,t)$ деп алып, шектің*
а) ұштары тербелмейтіндей бекітілген жағдайдағы;
б) ұштары тербелмейтіндей бекітілген және u_x-тің екінші дәрежесінен жоғарғыларын есептемеуге болатын жағдайдағы;
U потенциялдық энергиясын анықтаңыз.

2.3.3 *Бүйір беті изоляцияланған, ұзындығы l тең $(0 \leq x \leq l)$ біртекті стерженнің бастапқы температурасы $\varphi(x)$ $(t = 0)$. Стерженнің ұштары жылуизоляцияланған жағдайдағы стержін ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температураны анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.4 *Бүйір беті изоляцияланған, ұзындығы l тең $(0 \leq x \leq l)$ біртекті стержіннің бастапқы температурасы $\varphi(x)$ $(t = 0)$. Стержіннің $x = 0$ және $x = l$ ұштарында бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінен бастап сәйкес $q(t)$ және $p(t)$ жылу ағындары орын алатын болса, стержін ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температураны анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.5 *Көлденең қимасы тұрақты S, ұзындығы l тең іші газ өткізетін (кеуек) заттармен біртекті толтырылған түтік ішінде газ диффузиясы орын алады. Түтіктің бүйір беті газ өткізбейді және $t = 0$ уақыт мезеттегі газдың бастапқы концентрациясы $\varphi(x)$ тең. Түтіктің $t = 0$ уақыт мезетінен бастап $x = 0$ ұшындағы газ концентрациясы $\mu(t)$ тең, ал $x = l$ ұшы газ өткізбейтін болса, кез келген $t > 0$ уақыт мезетіндегі түтік ішіндегі $u(x, t)$ газ концентрацияны анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.6 *Біртекті изотропты стержін ішінде еркін жылу алмасуы орын алады. Бастапқы температурасы $\varphi(x)$ $(t = 0)$ және стержіннің $x = 0$ ұшындағы температура u_0 тұрақты, ал $x = l$ ұшында температурасы $q(t)$ заңы бойынша сыртқы ортамен жылу алмасатын жағдайдағы стержін ішіндегі жылудың таралуын анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.4 Жауаптары

2.4.1 а) $K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho(x)u_t^2(x,t)dx$; б) $K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho(x)u_t^2(x,t)dx + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i u_t^2(x_i,t)$.

2.4.2 а) $U = T\displaystyle\int_0^l \left(\sqrt{1+u_x^2(x,t)}-1\right)dx$; б) $U = \dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^l u_x^2(x,t)dx$.

2.4.3
$$\begin{aligned}
&su_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(s\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \ 0 < x < l,\ \ t > 0,\\
&u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 < x < l, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}.
\end{aligned}$$

2.4.4
$$\begin{aligned}
&su_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(s\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \ 0 < x < l,\ \ t > 0,\\
&u_x(0,t) = -\frac{1}{ks(0)}q(t), \quad u_x(l,t) = \frac{1}{ks(l)}p(t), \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 < x < l, \quad a^2 = \tfrac{k}{c\rho}.
\end{aligned}$$

2.4.5
$$\begin{aligned}
&u_t = a^2u_{xx},\ \ 0 < x < l,\ \ t > 0,\\
&u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 < x < l, \quad a^2 = \tfrac{\alpha D}{c},
\end{aligned}$$

мұндағы α қиманың кеуектік коэффициенті, яғни қимадағы кеуек ауданының осы қима ауданына қатынасы.

2.4.6
$$\begin{aligned}
&u_t = a^2u_{xx},\ \ 0 < x < l,\ \ t > 0,\\
&u(0,t) = u_0, \quad u_x(l,t) + \gamma\left[u(l,t) - q(t)\right] = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 < x < l, \quad a^2 = \tfrac{T}{\rho},
\end{aligned}$$

Бөлім 3

Математикалық физика теңдеулері үшін Коши есебі

3.1 Гиперболалық типті теңдеулер үшін жалпылама Коши және Гурса есептері. Сипаттауыштар әдісі.

Жәй дифференциалдық теңдеулер курсынан, егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі белгілі болса онда қандайда бір шарттармен қойылған есептерді, мәселен Коши есебін шешуге болатындығын білеміз. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін де теңдеудің жалпы шешімі белгілі болса онда қандайда бір қойылған қосымша шарттарды қанағаттандыратын есептерін шешуге болады.

Бұл бөлімде сипаттауыштар әдісі арқылы дербес туындылы теңдеулердің жалпы шешімін табуды, және гиперболалық типті теңдеулер үшін Коши[1] және Гурса есептерін қарастырамыз.

3.1.1 Жалпы шешім. Сипаттауыштар әдісі

Алдыңғы (I.2) бөлімде біз берілген дербес туындылы теңдеулерді олардың сипаттауыш қисықтары арқылы канондық түрге келтіруді қарастырдық. Канондық теңдеулерді әрі қарай түрліше әдістерімен интегралдап, олардың шешімдерін еркін функциялар арқылы өрнектеуге болады. Мұндай жолмен теңдеудің шешімін табуды сипаттауыштар әдісі деп, ал еркін түрдегі функциялар арқылы өрнектелген шешімді теңдеудің жалпы шешімі деп атайды.

[1]AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (Огюстен Луи Коши), (1789–1857)–француз математигі. Оның еңбектері математиканың әртүрлі саласына қатысты. Атап айтқанда математикалық анализ, комплекс айнымалы функциялар теориясы, жәй дифференциалдық және математкалық физика теңдеулері (бастапқы шартты шеттік есептер), геометрия, сандар теориясы, алгебра, астрономия, оптика және т.б. ғылым саласында маңызды зерттеулері бар. Ол сонымен қатар алғаш серпімділік теориясының математикалық негізін қалады.

Мысал 3.1.1 *Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:*

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0.$$

Шешуі. Теңдеудің типін анықтап канондық түрге келтіреміз.

$\Delta = 1 > 0$ гиперболалық типті теңдеу және сипаттауыш қисықтары:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad dy = \pm dx \quad \Rightarrow \quad y = x + c_1, \;\; y = x + c_2.$$

Бұл сипаттауыштар арқылы

$$\xi = y - x, \quad \eta = y + x$$

белгілеулерін енгіземіз. Теңдеудегі

$$u_x = -u_\xi + u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

дербес туындыларын жаңа айнымалылар бойынша өрнектеп, оларды берілген теңдеуге қойып, ықшамдасақ, нәтижеде

$$u_{\xi\eta} - u_\eta = 0$$

канондық теңдеуін аламыз. Бұған $u_\eta = v$ белгілеу енгізсек онда

$$v_\xi - v = 0$$

теңдеуін аламыз. Егер η айнымалысын параметр ретінде қарастырсақ, бұл теңдеу бірінші ретті біртекті сызықты жәй дифференциалдық теңдеу болады және оның жалпы шешімі

$$v = \varphi(\eta) e^\xi.$$

Мұндағы $\varphi(\eta)$ функциясы η айнымалыларынан тәуелді еркін функция. Демек,

$$u_\eta = \varphi(\eta) e^\xi.$$

Мұны ξ айнымалысын параметр ретінде қарастырып, η айнымалысы бойынша интегралдасақ

$$u(\xi, \eta) = e^\xi \int \varphi(\eta)\, d\eta + \psi(\xi) = e^\xi g(\eta) + \psi(\xi)$$

шешімін аламыз. Мұндағы $g(\eta) \equiv \int \varphi(\eta)\, d\eta$, $\psi(\xi)$ функциялары сәйкес η, ξ айнымалыларынан тәуелді еркін функциялар. Бұған жоғарыдағы белгілеуді пайдаланып, x, y айнымалылары бойынша теңдеудің жалпы шешімін анықтаймыз:

$$u(x, y) = e^{y-x} g(y + x) + \psi(y - x).$$

3.1.2 Жалпылама Коши есебі

Айталық $\Omega \in \mathbb{R}^2$ облысында гиперболалық типті

$$Lu \equiv a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu(x,y) = F(x,y) \quad (3.1.1)$$

теңдеуі берілсін. Мұндағы a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c коэффициенттері x және y айнымалылардан тәуелді берілген жатық функциялар және $\forall(x,y) \in \Omega$ үшін $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Сонымен қатар Ω облысында жататын немесе оның $\partial\Omega$ шекарасының бір бөлігі болатын әрі жанама бағыттауыштары (3.1.1) теңдеудің сипаттауыштарымен беттеспейтін қандайда бір $\Gamma \in \overline{\Omega}$ жатық қисығы берілсін. Осы Γ жатық қисығында $\varphi(x,y)$ және $\psi(x,y)$ функциялары және Γ қисығының жанама бағыттауыштары болмайтын l бағыттаушы берілсін.

Коши есебінің қойылымы: Ω облысында (3.1.1) теңдеуді, ал Γ қисығының бойында

$$u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y), \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial l}\right|_\Gamma = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma \qquad (3.1.2)$$

шарттарын қанағаттандыратын $u(x,y)$ функциясын табу керек.

Теорема 3.1.1 *Егер (3.1.1) теңдеудің коэффициенттері және $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $F(x,y)$ функциялары жеткілікті жатық болса онда Γ қисығының ұштарынан өтетін (3.1.1)-теңдеуінің сипаттауыштарымен шектелген Ω облысында (3.1.1)-(3.1.2) Коши есебінің шешімі бар және жалғыз болады.*

Мысал 3.1.2 *Коши есебінің шешімін табыңыз*

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \; u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

Шешуі. Берілген теңдеудің жалпы шешімі (мысал 3.1.1 қараңыз)

$$u\,(x,y) = e^{y-x} g\,(y+x) + \psi\,(y-x)$$

функциясы болады, мұндағы g және ψ функциялары бір айнымалылы кез-келген функциялар. Оларды анықтау үшін есептің шарттарын қолданамыз. y айнымалы бойынша дербес туындысы

$$u_y\,(x,y) = e^{y-x}\left(g\,(y+x) + g'\,(y+x)\right) + \psi'\,(y-x)\,.$$

Олай болса

$$\begin{cases} u\,(x,0) = e^{-x} g\,(x) + \psi\,(-x) = x, \\ u_y\,(x,0) = e^{-x}\,(g\,(x) + g'\,(x)) + \psi'\,(-x) = 0. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден туынды алып, екіншісіне мүшелеп қоссақ

$$2e^{-x} g'\,(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g\,(x) = \frac{1}{2}e^x + c.$$

Бірінші теңдеуден

$$\psi\left(-x\right)=x-e^{-x}g\left(x\right)=x-\frac{1}{2}+ce^{-x}$$

немесе

$$\psi\left(x\right)=-x-\frac{1}{2}+ce^{x}.$$

Бұларды жалпы шешімге қойып берілген Коши есебінің шешімін аламыз:

$$u\left(x,y\right)=e^{y-x}\left(\frac{1}{2}e^{y+x}-c\right)-\left(y-x\right)-\frac{1}{2}+ce^{y-x}=x-y+\frac{1}{2}e^{2y}-\frac{1}{2}.$$

Жауабы: $u\left(x,y\right)=x-y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2y}$.

3.1.3 Гурса есебі.

(3.1.1) теңдеу гиперболалық типті теңдеу болғандықтан алдыңғы бөлімдерде көрсетілгендей оны

$$Lu\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+cu(x,y)=f(x,y) \tag{3.1.3}$$

түрге (канондық түрге) келтіруге болады. Бұл (3.1.3) теңдеудің сипаттауыш теңдеуі

$$dx\cdot dy=0$$

болғандықтан оның сипаттауыштары координат өстеріне параллель болатын $x=const$, $y=const$ түзулері болады.

Гурса[2] есебінің қойылымы. Ω облысында (3.1.3) теңдеуді, $x=x_0$, $y=y_0$ сипаттауыштарының бойында

$$\begin{aligned}
&u(x,y)|_{x=x_0}=\psi(y), \quad y_0\leq y\leq b,\\
&u(x,y)|_{y=y_0}=\varphi(x), \quad x_0\leq x\leq a
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

шарттарын қанағаттандыратын $u(x,y)\in C^2\left(\Omega\right)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ функциясын анықтау керек. Мұнда $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ және $\overline{\Omega}=[x_0,a]\times[y_0,b]$.

Теорема 3.1.2 *Егер (3.1.3) теңдеудің коэффициенттері және $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $f(x,y)$ функциялары жеткілікті жатық және $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$ шарты орындалса (3.1.3)-(3.1.4) Гурса есебінің шешімі бар және жалғыз болады.*

[2] EDOUARD GOURSAT (Эдуар Гурса), (1858–1936)–француз математигі. Оның негізгі жұмыстары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (сипаттауыштарына байланысты ДТДТ классификациясы) мен аналитикалық функциялар теориясы саласына қатысты.

Мысал 3.1.3 *Гурса есебін шешіңіз:*

$$2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x|\,, \quad u|_{y=x} = 1, \quad u|_{y=-x} = (x+1)e^x.$$

Шешуі. Теңдеуді канондық түрге келтірейік. Сипаттаушы теңдеуі

$$2\,(dy)^2 - 2\,(dx)^2 = 0$$

болғандықтан

$$dy = \pm dx \quad \Rightarrow \quad y = x + c_1, \;\; y = x + c_2.$$

Олай болса $\xi = y - x, \quad \eta = y + x$ белгілеуін енгізіп, теңдеуді жаңа айнымалылар бойынша жазсақ

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4}u_\xi = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$u\,(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{4}\eta}\varphi\,(\xi) + \psi\,(\eta)\,.$$

Демек, берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$u\,(x, y) = e^{\frac{1}{4}(y-x)}\varphi\,(y+x) + \psi\,(y-x)\,. \tag{3.1.5}$$

Бұған есептің берілген шарттарын қолданып, φ және ψ функцияларын анықтаймыз

$$\begin{cases} u\,(x, x) = \varphi\,(2x) + \psi\,(0) = 1, \\ u\,(x, -x) = e^{-\frac{1}{2}x}\varphi\,(0) + \psi\,(-2x) = (x+1)\,e^x. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден $\varphi\,(2x) = 1 - \psi\,(0)$ немесе

$$\varphi\,(x) = 1 - \psi\,(0) \tag{3.1.6}$$

және $\varphi\,(0) = 1 - \psi\,(0)\,.$ Екінші теңдеуден

$$\psi\,(-2x) = (x+1)\,e^x - e^{-\frac{1}{2}x}\varphi(0).$$

Бұған $\varphi\,(0) = 1 - \psi\,(0)$ теңдігін қолдансақ

$$\psi\,(-2x) = (x+1)\,e^x - e^{-\frac{1}{2}x}\,(1 - \psi(0))$$

немесе

$$\psi\,(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{4}x}\,(1 - \psi(0)) \tag{3.1.7}$$

теңдігін аламыз. Бұл (3.1.6) және (3.1.7) функцияларды (3.1.5) қойып Гурса есебінің шешімін табамыз

$$u\,(x, y) = e^{\frac{1}{4}(y-x)}\varphi\,(y+x) + \psi\,(y-x) =$$

$$e^{\frac{y-x}{4}}\,(1 - \psi(0)) + \left(1 - \frac{y-x}{2}\right)e^{-\frac{y-x}{2}} - e^{\frac{y-x}{4}}\,(1 - \psi(0)) = \tfrac{1}{2}\,(2 + x - y)\,e^{\frac{x-y}{2}}.$$

Жауабы: $u\,(x, y) = \dfrac{1}{2}\,(2 + x - y)\,e^{\frac{x-y}{2}}\,.$

3.1.4 Жаттығулар.

Келесі теңдеулердің жалпы шешімін анықтаңыз:

3.1.1 $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

3.1.2 $u_{yy} = a^2 u_{xx}.$

3.1.3 $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$

3.1.4 $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ *(нұсқау: $v = (x-y)u$ белгілеуін енгізіңіз).*

3.1.5 $u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$ *(нұсқау: $v = u_{xx}$ белгілеуін енгізіңіз).*

Коши есебінің шешімін табыңыз:

3.1.6 $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty,$
$u|_{y=0} = 3x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty.$

3.1.7 $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - 2 = 0, \quad -\infty < x, y < \infty,$
$u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty.$

3.1.8 $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad -\infty < x, y < \infty,$
$u|_{y=0} = -\frac{1}{2}x^2, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x, \quad |x| < \infty.$

3.1.9 $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0,$
$u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty.$

3.1.10 $u_{xy} + u_x = 0, \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1, \quad |x| < \infty.$

3.1.11 *Айталық* $(-1, 1)$ *интервалында* $\varphi \in C^2, \ \psi \in C^1$ *функциялары берілсін. Төмендегі*

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=0} = \psi(x), \quad |x| < 1$$

Коши есебінің $K = \{|x-y| < 1, \ |x+y| < 1\}$ *квадратында бірғана шешімі бар болатындығын және бұл квадрат шешімнің жалғыз болуының ең үлкен облысы болатындығын дәлелдеңіз.*

Гурса есебін шешіңіз:

3.1.12 $3x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0, \ 1 < y < x, \ x > 1; \quad u|_{y=x} = 0, \ u|_{y=1} = \cos \frac{\pi x}{2}, \ x \geq 1.$

3.1.13 $u_{xy} = 0, \ x > 0, \ y > 0, \ u|_{y=0} = f(x), \ x \geq 0, \ u|_{x=0} = g(y), \ y \geq 0$ *мұндағы*
$f, \ g \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0), \ f(0) = g(0).$

3.1.14 *Қандай b параметрінің мәнінде*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < t < bx,\ \ x > 0; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=bx} = 0,\ x \geq 0$$

есебі тек нөлдік шешімге ғана ие болады?

3.1.15 *Егер $f,\ g \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ берілген функциялар және $f(0) = g(0)$ болса, онда*

$$u_{xy} = 0,\ \ 0 < y < ax,\ \ x > 0,\ y > 0; \ \ u|_{y=0} = f(x),\ \ x \geq 0,\ \ u|_{y=ax} = g(x),\ \ y \geq 0$$

Гурса есебінің бір ғана шешімі бар екендігін және ол $u = f(x) + g\left(\frac{y}{a}\right) - f\left(\frac{y}{a}\right)$ болатындығын дәлелдеңіз.

3.1.5 Жауаптары

3.1.1 $u = \varphi(x+y) + \psi(3x+2y)$.

3.1.2 $u = \varphi(x+ay) + \psi\left(x - ay\right)$.

3.1.3 $u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3.1.4 $u = \frac{1}{x-y}\left[\varphi(x) + \psi(y)\right]$.

3.1.5 $u = \cos y + x\varphi(y) + \varphi'(y) + \int\limits_0^x (x-s)e^{-ys}\psi(s)ds.$

3.1.6 $u = 3x^2 + y^2$

3.1.7 $u = xy + \frac{3}{2}\sin\frac{2y}{3}\cos\left(x + \frac{y}{3}\right)$.

3.1.8 $u = -\frac{1}{2}x^2 + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x.$

3.1.9 $u = 2x + y - x^2.$

3.1.10 $u = \sin y - 1 + e^{x-y}.$

3.1.11

3.1.12 $u = y\cos\frac{\pi x}{2y}.$

3.1.13 $u = f(x) + g(y) - f(0).$

3.1.14 $b \leq \frac{1}{a}$

3.1.15

3.2 Толқын теңдеуі үшін Коши есебі. Даламбер формуласы. Дюамель қағидасы

Гиперболалық типті теңдеулерге көбінде толқындық процесстерді сипаттайтын теңдеулер жатады. Мәселен, шектің, мембрананың, газдар мен электромагниттік толқындардың және т.б. тербеліс есептері келтіріледі. Бұл бөлімшеде осындай есептердің түпкі негізі әрі қарапайымы болатын шек тербелісінің теңдеуі зерттелінетін болады.

3.2.1 Толқын теңдеуі үшін Коши есебі

Біртекті емес толқын теңдеуін

$$U_{tt} = a^2 \Delta U + f(x,t), \ \ (x,t) \in Q_t \equiv \left\{(x,t): \ x \in R^n, \ t > 0\right\}, \tag{3.2.8}$$

және

$$U\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad U_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \quad x \in R^n \tag{3.2.9}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $u\left(x,t\right) \in C^{2,2}_{x,t}\left(Q_t\right) \cap C^{0,1}_{x,t}\left(\overline{Q}_t\right)$ шешімін табу есебін қарастырайық. Бұл (3.2.8)-(3.2.9) есебі ***толқын теңдеуі үшін Коши есебі*** деп, ал оның

$$u\left(x,t\right) \in C^{2,2}_{x,t}\left(Q_t\right) \cap C^{0,1}_{x,t}\left(\overline{Q}_t\right), \ \overline{Q}_t \equiv Q_t \cup \left\{t = 0\right\}$$

шешімі ***классикалық шешім*** деп аталады. Мұндағы a-жылдамдық, $f(x,t)$, $\varphi\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)$ берілген жатық функциялар, ал

$$\Delta U\left(x_1, \, x_2, ... x_n, t\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}$$

$x\left(x_1, \, x_2, ... x_n\right)$ кеңістіктік айнымалылары бойынша анықталған ***Лаплас операторы***.

Физикалық мағынасы. (3.2.8)-(3.2.9) есебі $n = 1$ жағдайда шексіз шектің тербелісін, $n = 2$ жағдайда жазық мембрананың, $n = 3$ болса газдың (дыбыстың) таралуын сипаттайды.

(3.2.8)-(3.2.9) есеп сызықты болғандықтан, оның шешімін төмендегі екі есепке жіктеу арқылы (редукция әдісі деп аталады) іздейміз, яғни шешімді

$$U\left(x,t\right) = u\left(x,t\right) + v\left(x,t\right).$$

түрде іздейміз.

Біріншісі $(u(x,t))$ – *біртекті емес теңдеу үшін біртекті бастапқы шарттармен берілген Коши есебі* :

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \ \ (x,t) \in Q_t, \tag{3.2.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^n \tag{3.2.11}$$

Бұл (3.2.10)-(3.2.11) есептің шешімі $n = 1$ өлшемді жағдайда

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{3.2.12}$$

Даламбер[3] ***формуласымен*** (қорытып шығаруды келесі пункттен қараңыз); $n = 2$ өлшемді жағдайда

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\pi}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |\xi - x|^2}} + \frac{1}{2a\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |\xi - x|^2}} \tag{3.2.13}$$

Пуассон[4] ***формуласымен***;
$n = 3$ өлшемді жағдайда

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi)\, d\xi\right] \tag{3.2.14}$$

Кирхгоф[5] ***формуласымен*** анықталынады.

Бұлармен қатар (3.2.10)-(3.2.11) есебінің шешімі көп өлшемді ($n \geq 1$) жағдайда келесі қатар арқылы да анықталады:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\varphi(x) + \frac{1}{a}\cdot\frac{(at)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x)\right]. \tag{3.2.15}$$

Екіншісі $(v(x,t))$ – *біртекті емес теңдеу үшін нөлдік бастапқы шарттарды қанағаттандыратын Коши есебі*:

$$v_{tt} = a^2\Delta v + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_t, \tag{3.2.16}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad x \in R^n. \tag{3.2.17}$$

[3] JEAN LE ROND D'ALEMBERT (Жан Лерон Даламбер), (1717-1783)–француз математигі жәрі философы. Оның математикалық зерттеулері жәй және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерде (толын теңдеу), қатарлар теориясында маңызды орын алады.

[4] 2 SIMEON DENIS POISSON (Симон Денис Пуассон), (1781–1840) –француз математигі әрі физигі. Оның негізгі жұмыстары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, потенциялдар теориясы және ықтималдықтар теориясын зерттеуге арналған.

[5] GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (Густав Роберт Кирхгоф), (1824–1887)–XIX ғасырдағы немістің әйгілі физигі. Ол физикадан өзге математикалық физика саласының да өзекті мәселелерін шешкен ғалым.

Бұл (3.2.16)-(3.2.17) есепті шешу үшін Дюамель қағидасын [] қолданамыз, яғни (3.2.16)-(3.2.17) есебіне сәйкес әуелі ***жолай есеп***[6] құрамыз

$$w_{tt} = a^2 \Delta w, \ \ x \in R^n, \ \ t > \tau, \tag{3.2.18}$$

$$w\left(x,0\right) = 0, \ \ w_t\left(x,0\right) = f\left(x,\tau\right), \ \ x \in R^n. \tag{3.2.19}$$

Бұған $t_1 = t - \tau$ алмастыруын енгізсек жоғарыдағы (3.2.10)-(3.2.11) есебіне келеміз және t_1 үшін (3.2.12)-(3.2.15) формулаларының біреуін қолданып $w\left(x,t,\tau\right)$ шешімін анықтаймыз.

Егер бұл жолай есептің шешімі белгілі болса, онда Дюамель[7] қағидасы бойынша (3.2.16)-(3.2.17) есебінің шешімі

$$v(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t,\tau)d\tau \tag{3.2.20}$$

интегралы арқылы анықталынады.
Бұл (3.2.10)-(3.2.11) және (3.2.16)-(3.2.17) екі есептің шешімінің қосындысы

$$U\left(x,t\right) = u\left(x,t\right) + v\left(x,t\right)$$

жоғарыдағы жалпы түрде қойылған (3.2.8)-(3.2.9) Коши есебінің шешімін береді.

Теорема 3.2.1 *Егер*

$$f(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}_t\right), \ \varphi \in C^2\left(\mathbb{R}\right), \ \psi \in C^1\left(\mathbb{R}\right), \ n = 1;$$
$$f(x,t) \in C^2\left(\overline{Q}_t\right), \ \varphi \in C^3\left(\mathbb{R}^n\right), \ \psi \in C^2\left(\mathbb{R}^n\right), \ n = 2,3$$

шарттары орындалса, онда (3.2.8)-(3.2.9) *Коши есебінің шешімі бар және жалғыз болады.*

3.2.2 Бір өлшемді біртекті емес толқын теңдеуі үшін Коши есебі. Даламбер формуласы.

Жоғарыдағы (3.2.8)-(3.2.9) толқын теңдеуі үшін Коши есебі $n = 1$ өлшемді жағдайда мына түрде жазылады:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t), \ \ x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \ t > 0, \tag{3.2.21}$$

[6] Теңдеудің оң жағындағы $f(x,t)$ функциясын (t айнымалысын τ алмастырып) бастапқы шартқа қоямыз.

[7] 4 JEAN–MARIE CONSTANT DUHAMEL (Жан-Мари Дюамель), (1797–1872)–француз математигі.

$$U\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\;\;U_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.2.22}$$

(3.2.21)-(3.2.22) есебі шексіз ұзын (ұштарындағы тербелісті ескермеуге болатындай) шектің көлденең тербелісін сипаттайды.

Есептің шешімін

$$U\left(x,t\right)=u\left(x,t\right)+v\left(x,t\right)$$

түрде іздейміз. Мұнда $u\left(x,t\right)$ біртекті теңдеу үшін Коши есебінің шешімі

$$u_{tt}=a^2u_{xx}(x,t),\;\;x\in\mathbb{R},\;\;t>0, \tag{3.2.23}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\;\;u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.2.24}$$

ал $v\left(x,t\right)$ – біртекті емес теңдеу мен нөлдік бастапқы шарттарды қанағаттандыратын Коши есебінің шешімі:

$$\begin{array}{l} v_{tt}=a^2v_{xx}+f\left(x,t\right),\;\;x\in\mathbb{R},\;\;t>0,\\ v\left(x,0\right)=0,\;\;v_t\left(x,0\right)=0,\quad x\in\mathbb{R}. \end{array} \tag{3.2.25}$$

Енді жоғарыда айтылғандай, (3.2.23)-(3.2.24) есебінің шешімі (3.2.12) Даламбер формуласымен анықталынатынын көрсетейік.

(3.2.23) теңдеудің сипаттауыш теңдеуі (17 беттегі 1.1.3 – бөлімді қараңыз)

$$(dx)^2-(adt)^2=0$$

және оның $x-at=C_1,\;\;x+at=C_2$ екі сипаттауышы болады. Бұл сипаттауыштар арқылы $\xi=x-at,\;\;\eta=x+at$ жаңа айнымалылар енгізсек, онда (3.2.23) теңдеу

$$u_{\xi\eta}=0$$

канондық түрге келеді.

Мұны ξ және η бойынша интегралдасақ

$$u_\eta=g_1(\eta),\;\;u=f(\xi)+\int g_1(\eta)d\eta=f(\xi)+g(\eta)\;\;\Rightarrow$$

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta),$$

мұндағы f, g- функциялары сәйкес ξ, η айнымалыларынан ғана тәуелді екі рет дифференциалданатын кез-келген функциялар.

Демек, (3.2.23) теңдеудің жалпы шешімі

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at). \tag{3.2.26}$$

Әдетте бұл жалпы шешімді Даламбер шешімі деп атайды.

Енді (3.2.24) бастапқы шарттарды қолданып, бұл f, g- функцияларын анықтаймыз:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy + C. \end{cases}$$

Соңғы жүйеден

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy - \frac{C}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy + \frac{C}{2}.$$

Бұларды (3.2.26) қойсақ, нәтижеде

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) =$$

$$\frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(y)dy - \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(y)dy + \frac{C}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy.$$

(3.2.23)-(3.2.24) есебінің шешімін, яғни (3.2.12) Даламбер формуласын аламыз

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi. \qquad \checkmark$$

Ал, (3.2.25) есебінің шешімі Дюамель қағидасы және Даламбер формуласы бойынша

$$v\,(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f\,(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{3.2.27}$$

Демек, бұл екі есепті шешімдерін қосып нәтижеде біртекті емес жалпы түрде қойылған Коши есебінің шешімін аламыз

$$U\,(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi\,(x+at) + \varphi\,(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi\,(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f\,(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{3.2.28}$$

Мысал 3.2.1 *Толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімін табыңыз:*

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xe^{-t}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Шешуі. Есептің шешімін жоғарыда көрсетілгендей

$$U(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$$

түрде іздейміз, мұндағы $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ &u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

біртекті Коши есебінің шешімі. Бұл есеп үшін $a = 2$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = x$ екендігін ескеріп, Даламбар формуласын қолданамыз

$$u(x,t) = \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} + \tfrac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} \xi d\xi = \sin x \cos 2t + \left.\frac{\xi^2}{8}\right|_{x+2t}^{x+2t} =$$

$$\sin x \cos 2t + \frac{1}{8}\left((x+2t)^2 - (x-2t)^2\right) = \sin x \cos 2t + xt.$$

$u(x,t) = \sin x \cos 2t + xt.$

Ал, $v(x,t)$ келесі бертекті емес Коши есебінің шешімі:

$$\begin{aligned} &v_{tt} = 4v_{xx} + xe^{-t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ &v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Бұған сәйкес жолай есеп

$$\begin{aligned} &w_{tt} = 4w_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > \tau, \\ &w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = xe^{-\tau}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

түрде құрылады және оның шешімі (3.2.27) формула бойынша

$$w(x,t,\tau) = \frac{1}{4}\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \xi e^{-\tau} d\xi = \left.\frac{1}{8}e^{-\tau}\xi^2\right|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} =$$
$$\frac{1}{8}e^{-\tau}\left((x+2(t-\tau))^2 - (x-2(t-\tau))^2\right) = x(t-\tau)e^{-\tau}.$$

Бұл табылған шешімді (3.2.20) формулаға қойып, $v(x,t)$ шешімді анықтаймыз

$$v(x,t) = \frac{1}{4}\int\limits_0^t x(t-\tau)e^{-\tau}d\tau = \left| \begin{array}{l} u = t-\tau, \ dv = e^{-\tau} \\ du = -d\tau, \ v = -e^{-\tau} \end{array} \right| =$$

$$-\frac{x}{4}(t-\tau)e^{-\tau}\Big|_0^t - \tfrac{x}{4}\int\limits_0^t e^{-\tau}d\tau = \frac{x}{4}t + \frac{x}{4}e^{-\tau}\Big|_0^t = \frac{x}{4}\left(t - 1 + e^{-t}\right).$$

Демек, берілген есептің шешімі

$$U(x,t) = u(x,t) + v(x,t) = \sin x \cos 2t + \frac{5}{4}xt + \frac{x}{4}\left(e^{-t} - 1\right).$$

Жауабы: $U(x,t) = \sin x \cos 2t + \frac{5}{4}xt + \frac{x}{4}\left(e^{-t} - 1\right).$

Мысал 3.2.2 *Біртекті емес толқын теңдеуі үшін Коши есебін шешіңіз*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + 4u_x - 3u = e^{2x-t}x\sin t, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\ \\ u(x,0) = e^{2x}\sin x, \;\; u_t(x,0) = e^{2x}(\cos x - \sin x), \;\;\; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Шешуі. Теңдеуді алдымен $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}v(x,t)$ алмастыруын енгізуі арқылы оны (3.2.8) түрге келтіреміз, яғни $\alpha, \;\beta$ белгісіз тұрақтыларын теңдеудің бірінші ретті туындылары болмайтындай таңдап аламыз.
Бұдан $u_x, \; u_t, \; u_{xx}, \; u_{tt}$ туындыларын есептеп теңдеуге қойсақ

$$e^{\alpha x+\beta t}\left(v_{tt} - v_{xx} + (2\beta+2)v_t + (4-2\alpha)v_x + (\beta^2 - \alpha^2 + 2\beta + 4\alpha)v\right) = e^{2x-t}x\sin t$$

теңдігін аламыз. Бірінші ретті туындыларының алдындағы коэффиценттерін нөлге теңестіріп, $\alpha, \;\beta$ тұрақтыларын табамыз:

$$\begin{cases} 4 - 2\alpha = 0 \\ 2\beta + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \;\beta = -1.$$

Демек, теңдеуге $u(x,t) = e^{2x+t}v(x,t)$ алмастыруын енгіземіз.
Мұны берілген есепке қойсақ, нәтижеде $v(x,t)$ функциясына қатысты

$$v_{tt} - v_{xx} = x\sin t, \;\; |x| < \infty, \;\; t > 0,$$

$$v(x,0) = \sin x, \;\; v_t(x,0) = \cos x, \;\;\; x \in \mathbb{R}$$

Коши есебін аламыз. Бұл есептің шешімі (3.2.28) бойынша

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) + \sin(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\cos\xi d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\xi\sin\tau d\xi d\tau =$$

$$= \sin x\cos t + \sin t\cos x + xt - x\sin t = \sin(x+t) + xt - x\sin t.$$

Жоғарыдағы енгізіген ауыстыру бойынша бастапқы есептің шешімі

$$u(x,t) = e^{2x+t}\left[\sin(x+t) + xt - x\sin t\right].$$

Мысал 3.2.3 *Толқын теңдеуі үшін Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} - 4\Delta u(x,y,z,t) = 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; t > 0;$$

$$u(x,y,z,0) = \frac{1}{y}, u_t(x,y,z,0) = x^2 + y^2 + z^2 + 2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Шешуі. Мұнда есеп үш өлшемді болғандықтан Кирхгоф формуласын қолдану, ондағы интегралдарды есептеу қиынға түседі. Сондықтан (3.2.15) формуланы қолдану жеңіл болады ($a = 2$)

$$u\left(x, y, z, t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2t\right)^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2t\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right).$$

Әуелі Δ^k, $k = 1, 2, ...$ – Лапласиандарды жеке-жеке есептейік

$$\begin{aligned}
k = 0: \ & \Delta^0 \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}; \\
& \Delta^0 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = x^2 + y^2 + z^2 + 2; \\
k = 1: \ & \Delta^1 \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{2!}{y^3}; \\
& \Delta^1 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = 2 + 2 + 2 = 6; \\
k = 2: \ & \Delta^2 \left(\frac{1}{y}\right) = \Delta\left(\Delta\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{4!}{y^5}; \\
& \Delta^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = \Delta(6) = 0; \\
.... \qquad & .... \qquad ....; \\
k = n: \ & \Delta^n \left(\frac{1}{y}\right) = \Delta\left(\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{(2n)!}{y^{2n+1}}; \\
& \Delta^n \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Бұларды орнына қойсақ:

$$\begin{gathered}
u\left(x, y, z, t\right) = \frac{1}{y} + \frac{\left(2t\right)^2}{(2)!} \frac{2!}{y^3} + ... + \frac{\left(2t\right)^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{y^{2n+1}} + ...+ \\
\frac{1}{2}\left[\frac{2t}{1!}\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + \frac{\left(2t\right)^3}{3!} \cdot 6\right] = \\
\frac{1}{y}\left[1 + \left(\frac{2t}{y}\right)^2 + \left(\frac{2t}{y}\right)^4 + ... + \left(\frac{2t}{y}\right)^{2n} + ...\right] + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3 = \\
\frac{1}{y}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{2t}{y}\right)^2}\right) + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3 = \frac{y}{y^2 - 4t^2} + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3.
\end{gathered}$$

Мұндағы шексіз қосындылар $\dfrac{1}{1 - x}$ функциясының қатарға жіктелуі болғандықтан, ол $2t < y$ болғанда жинақты болады.
Жауабы: $u\left(x, y, z, t\right) = \dfrac{y}{y^2 - 4t^2} + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3$.

Ескерту 3.2.1 *Кейбір біртекті емес есептерді есептің берілгендерінің түріне байланысты, кейде айнымалыларға жіктеу әдісінің жетілдіруі болып келетін* – дербес шешімдер әдісі *арқылы да шешуге болады.*

Мысал 3.2.4 *Толқын теңдеуі үшін Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} - \Delta u(x, y, z, t) = 6(x^2y - xy^2 + z^2(x - y))t, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0;$$

$$u\,(x, y, z, 0) = 0, u_t\,(x, y, z, 0) = \sin x \cos(y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Шешуі. Шешімді $u\,(x, t) = U\,(x, t) + V\,(x, t)$ түрде іздейміз, мұндағы $U\,(x, t)$

$$\begin{aligned} &U_{tt} - \Delta U(x, y, z, t) = 6(x^2y - xy^2 + z^2(x - y))t, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \ t > 0; \\ &U\,(x, y, z, 0) = 0, \ \ U_t\,(x, y, z, 0) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

есебінің, ал $V\,(x, t)$

$$\begin{aligned} &V_{tt} - \Delta V(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0; \\ &V\,(x, y, z, 0) = 0, \ \ V_t\,(x, y, z, 0) = \sin x \cos(y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

есебінің шешімі. (3.2.29) есепке Дьюамель қағидасын қолданып, (3.2.15) қатары арқылы шешсек:

$$\begin{aligned} U\,(x, t) = &\int\limits_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - \tau)^{2k+1}}{(2k + 1)!} \Delta^k \left[6(x^2y - xy^2 + z^2(x - y))\tau\right] d\tau = \\ &\int\limits_0^t 6(x^2y - xy^2 + z^2(x - y))(t - \tau)\tau d\tau = (x^2y - xy^2 + z^2(x - y))t^3. \end{aligned}$$

(3.2.30) есептің бастапқы берілгендері арнайы түрде болғандықтан, айнымалыларға жіктеп іздеу әдісін қолданамыз, яғни шешімді

$$V\,(x, t) = T(t)X(x)G(y, z) \neq 0$$

түрде іздейміз. Мұны екінші бастапқы шартқа қойсақ

$$V_t\,(x, y, z, 0) = T'(0)X(x)G(y, z) = \sin x \cos(y + 3z)$$

Бұдан $T'(0) = 1, \ \ X(x) = \sin x, \ \ \ G(y, z) = \cos(y + 3z)$. Сондықтан шешім

$$V\,(x, y, z, t) = T(t) \sin x \cos(y + 3z)$$

түрде болады. Мұны (3.2.30) есепке қойып, $T(t)$ функциясы үшін

$$T''(t) - 11T(t) = 0, \ \ T(0) = 0, \ \ T'(0) = 1$$

есебін аламыз және оның шешімі

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t.$$

Демек,

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t \sin x \cos(y + 3z).$$

Бұл (3.2.29) және (3.2.30) есептердің шешімдерін қосып, бастапқы есептің шешімін аламыз

$$u(x, y, z, t) = (x^2y - xy^2 + z^2(x - y))t^3 + \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t \sin x \cos(y + 3z).$$

3.2.3 Шешімнің физикалық интерпретациясы. Шешімнің тәуелділік облысы

1. Шешімнің физикалық интерпретациясы (Толқынның таралуы). Толқын теңдеуі үшін Коши есебі берілсін:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(x, t), \;\; x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \;\; t > 0, \tag{3.2.31}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \;\; u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.32}$$

Жоғарыда айтылғандай, (3.2.31)-(3.2.32) есебінің шешімі (Даламбер формуласы)

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at) \tag{3.2.33}$$

түрде болады, мұндағы $f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \Psi(x-at)$, $g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) - \Psi(x+at)$ және $\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy$.

Енді (3.2.33) шешімге физикалық интерпретация берейік. Ол үшін алдымен

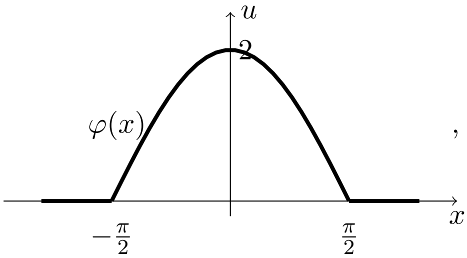
$$u(x, t) = f(x - at)$$

функциясын қарастырайық. Бұл функцияның графигі $f(x)$ функциясының графигінің бастапқы формасының өзгеріссіз O_x өсінің бойымен оңға қарай at шамаға жылжуын береді. Бұлар қума толқындар деп аталады. Дәл сол сияқты,

$$u(x, t) = g(x + at)$$

функциясы $g(x)$ функциясының профилінің өзгеріссіз солға қарай at шамаға жылжуын береді. Мұндай толқындар кері толқындар деп аталады. Демек, (3.2.33) шешімі a жылдамдықпен солға және оңға қарай таралатын толқындардың суперпозициясы екен.

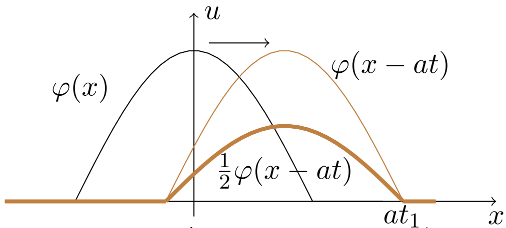
Мәселен, (3.2.31)-(3.2.32) есебі үшін $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ 2\cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$, $\psi(x) \equiv 0$, $a = 2$ болсын.



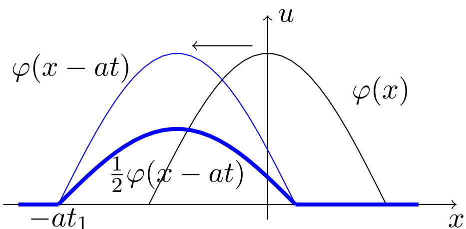
, $\psi(x) \equiv 0$,

φ − бастапқы профиль (сурет 3.2.3-1)

Онда $f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at)$ және $g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at)$ функцияларының графиктері сәйкес $\varphi(x)$ функциясының графигін өзгеріссіз солға және оңға қарай at шамаға жылжыту арқылы алынады:

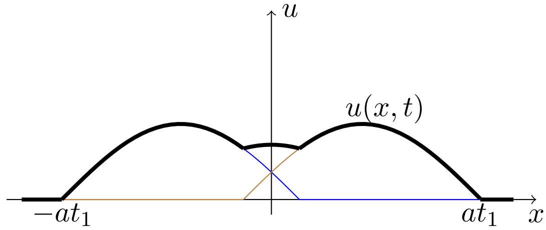


φ − профилінің өзгеріссіз оңға at_1 шамаға жылжуы (сурет 3.2.3-2)



φ − профилінің өзгеріссіз солға at_1 шамаға жылжуы (сурет 3.2.3-3)

Ал $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ шешімі бұл функциялардың қосындысы болады.



$u(x,t)$ – шешімнің t_1 уақыттағы мәні (сурет 3.2.3-4).

Бұл мысалдың Maple11 пакетінде жазылған бағдарлама коды:

```
> restart: with(plottools): with(plots):
> u:=(x,t)->(f(x-c*t)+f(x+a*t))/2+int(1/(2*a)*g(v),v=x-a*t..x+a*t);
> a:=2: nch:=3: T:=3: ntsteps:=25:
> shift:=transform((x,y)->[x,y,-0.1]):
> oddext0:=proc(expr,var)
      unapply(signum(var)*unapply(expr,var)(abs(var)),var);
  end proc:
> evenext0:=proc(expr,var)
      unapply(unapply(expr,var)(abs(var)),var);
  end proc:
> pext:=proc(expr,var,L)
      unapply(unapply(expr,var)(var - floor((var+L)/(2*L))*2*L),var)
  end proc:
  oddext:=proc(expr,var,L)
      local x;
      x:=var - floor((var+L)/(2*L))*2*L;
      unapply(signum(x)*unapply(expr,var)(abs(x)),var)
  end proc:
  evenext:=proc(expr,var,L)
      local x;
  x:=var - floor((var+L)/(2*L))*2*L;
      unapply(unapply(expr,var)(abs(x)),var)
  end proc:
> f:=x->piecewise(x<-0.5*Pi,0, x<0, 2*cos(x), x<0.5*Pi, 2*cos(x),0): g:=x->0:
  plot([f(x),g(x)], x=-3..5,color=[red,green],thickness=2,
  scaling=constrained,title="Бастапкы шарттар",legend=["f(x)","g(x)"]);
```

$u(x,t)$ функциясының графигінің уақыт бойынша қозғалуы:

```
> display([seq(plot(u(x,t/ntsteps),x=-3..5,color=red,thickness=2),
  t=0..T*ntsteps)],scaling=constrained,insequence=true,title="Pick");
```

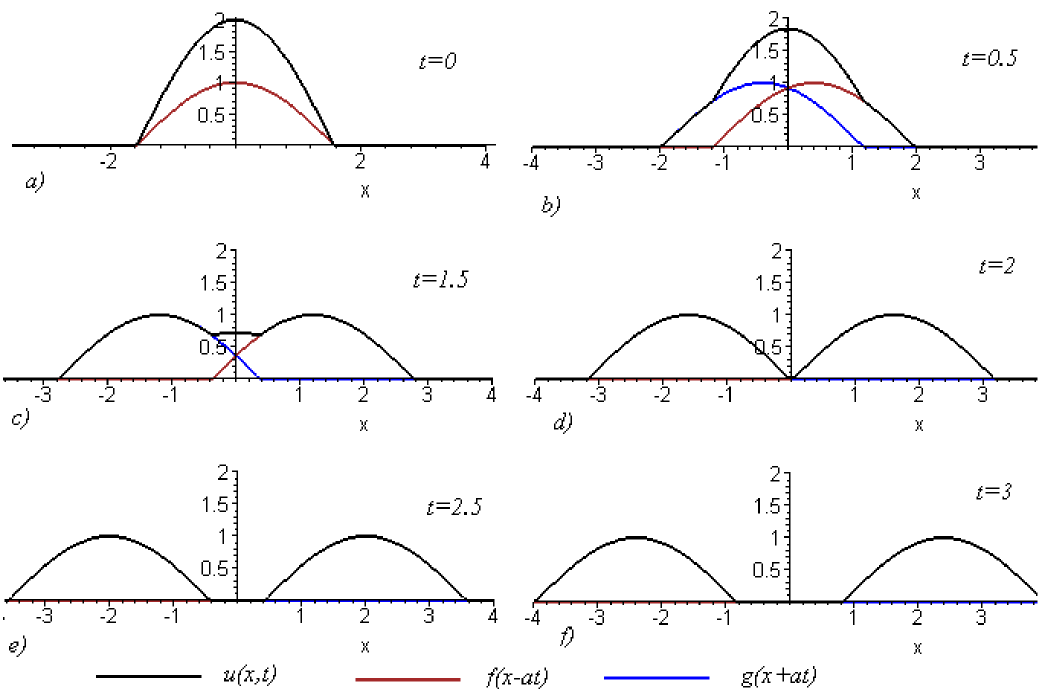
$u(x,t), f(x-at), g(x+at)$ функция графиктерінің уақыт бойынша қозғалуы:

```
> display([seq(plot([u(x,t/ntsteps),1/2*f(x-a*t/ntsteps),1/2*f(x+a*t/ntsteps)],
  x=-4..4, color=[black,brown,blue],thickness=2),
  t=0..T*ntsteps)],scaling=constrained,insequence=true);
```

$u(x,t)$ функциясының 3D графигін кеңістікте салу:

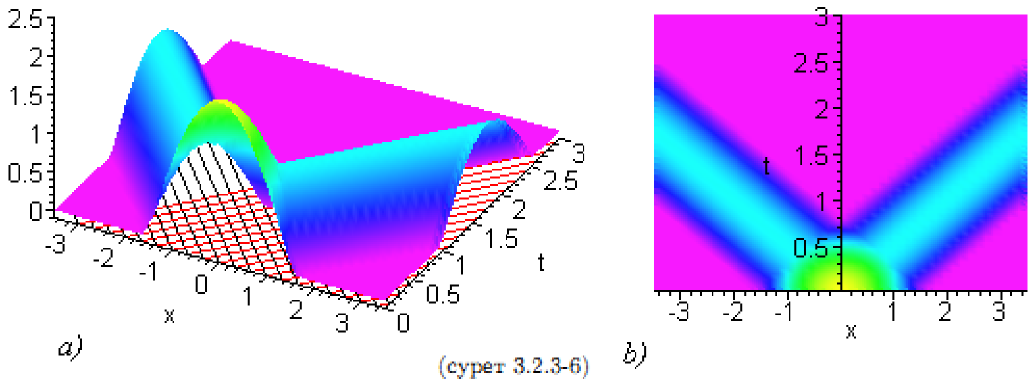
```
> charr:=display([seq(plot([a*t+1/nch*x,t,t=0..T],color=red,thickness=1),
  x=-3.5*nch..3.5*nch)]):
  charl:=display([seq(plot([-a*t+1/nch*x,t,t=0..T],color=black,thickness=1),
  x=-3.5*nch..3.5*nch)]):
> display([plot3d(u(x,t),x=-3.5..3.5,t=0..T,axes=boxed,scaling=constrained,
  numpoints=2000, style=patchnogrid,shading=zhue),
  shift(charr),shift(charl)],orientation=[-90,0],view=[-3.5..3.5,0..T,-0.1..2.5]);
```

$u(x,t)$, $f(x-at)$, $g(x+at)$ функцияларының графигінің уақыт бойынша қозғалуы:



(сурет 3.2.3-5)

$u(x,t)$–функциясының 3D графигі:



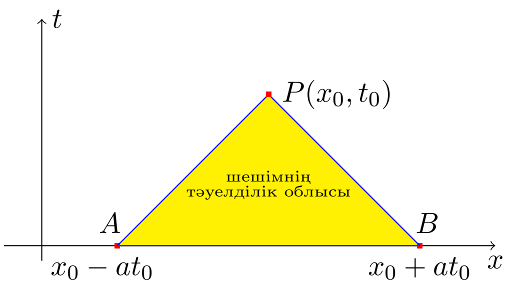
(сурет 3.2.3-6)

2. Шешімнің тәуелділік облысы. Енді, (3.2.31)-(3.2.32) есептің шешімінің $P(x_0, t_0)$ нүктедегі мәнін есептеу үшін нелерді білу жеткілікті? – деген сұраққа жауап іздейік. Ол үшін $P(x_0, t_0)$ нүктесінен (3.2.31) теңдеудің $x - at = x_0 - at_0$ және $x + at = x_0 - at_0$ сипаттауыштарын жүргізейік (сурет 3.2.3 - 7).

Даламбер формуласы бойынша (x_0, t_0) нүктесіндегі шешімнің мәні

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\xi)d\xi.$$

Бұл формуладан, $u(x, t)$ шешімнің (x_0, t_0) нүктесіндегі мәнін есептеу үшін φ – бастапқы ауытқудың $A = x_0 - at_0$ және $B = x_0 + at_0$ нүктелеріндегі мәндері мен ψ– бастапқы жылдамдықтың $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығындағы мәндерін ғана білу жеткілікті екендігін көреміз. Басқаша айтқанда, $u(x_0, t_0)$ мәні φ, ψ бастапқы берілгендердің $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығындағы мәндерінен ғана тәуелді болады. φ, ψ функцияларын $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығының сыртында өзгерткенмен $u(x_0, t_0)$ мәні өзгермейді. Сондықтан $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығы ***шешімнің тәуелділік аралығы*** деп, ал сипаттауыштармен шектелген ΔAPB үшбұрышы ***тәуелділік облысы***, кейде сипаттауыштар үшбұрышы деп аталады.



шешімнің тәуелділік облысы (сурет 3.2.3-7)

3.2.4 Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

3.2.1 $u_{tt} = 25u_{xx} + xt,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t \in (0, +\infty)\,,\ \ \ u\,(x, 0) = 0,\ \ u_t\,(x, 0) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.2.2 $u_{tt} = u_{xx} + 6,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0; \qquad u\,(x, 0) = x^2,\ \ u_t\,(x, 0) = 4x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.2.3 $u_{tt} = u_{xx} + 2x^2,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0; \qquad u\,(x, 0) = e^{-x},\ \ u_t\,(x, 0) = 2,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.2.4 $u_{tt} = u_{xx} + g\,(x)\,f\,(t)\,,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0; \qquad u\,(x, 0) = 0,\ \ u_t\,(x, 0) = 0,\ \ x \in \mathbb{R},$ *мұндағы* $g(x),\ f(t)$ *берілген функциялар және* $g^{(2m)}\,(x) \equiv 0.$

3.2.5 $u_{tt} = a^2\Delta u(x, y, t),\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ t > 0;$
$u\,(x, y, 0) = e^x \cos y,\ \ u_t\,(x, y, 0) = x^2y^2,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3.2.6 $u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t),\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ t > 0;$
$u\,(x, y, z, 0) = e^{-x},\ \ u_t\,(x, y, z, 0) = e^{-x},\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3.2.7 $u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t) + ax + bt,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ t > 0,\ \ a, b = const;$
$u\,(x, y, z, 0) = xyz,\ \ u_t\,(x, y, z, 0) = xy + z,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3.2.8 $u_{tt} = 4\Delta u(x, y, t) + (x^2 + y^2)t,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ t > 0;$
$u\,(x, y, 0) = e^{-y} \sin x,\ \ u_t\,(x, y, 0) = 0,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3.2.9 *Төмендегі функциялар толқынның таралуы бола ма? болса оның жылдамдығын анықтаңыз:*

1. $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + 9t^2;$
2. $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 4t.$

3.2.10 *Толқынның анықталу облысын анықтаңыздар, егер:*

1. шек теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары $a \le x \le b$ кесіндіде берілсе және толқынның жылдамдығы $a = 2$ болса;
2. мембрана теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары $4 \le x^2 + y^2 < 9$ сақинада берілсе және жылдамдығы $a = 3$ болса;

3.2.11 *Қандай* $k = const$ *тұрақтының мәнінде* $u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \dfrac{1}{(|x|^2 - t^2)^k},\ \ |x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ *түрдегі функция* $u_{tt} - \triangle u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0$ *теңдеуінің шешімі болады?*

3.2.12 *Берілген* $m_1, m_2, ...m_{n+1}$ *тұрақтыларының арасында қандай байланыс орындалғанда*

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \Phi\,(m_1x_1 + m_2x_2 + ...m_nx_n + m_{n+1}t)$$

функциясы $u_{tt} - \triangle u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0$ *теңдеуінің шешімі болады?*

3.2.13 *Жазық толқын* $u(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + mt)$ *болса, толқынның таралу жылдамдығын анықтаңыз.*

3.2.14 *Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0;$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

мұндағы φ, ψ *кез келген гармоникалық функциялар, яғни* $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$.

3.2.15 *Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t) + f(x, y, z), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0;$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

мұндағы φ, ψ *кез келген гармоникалық функциялар, яғни* $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$.

3.2.16 *Егер* $u(x, t)$ *функциясы*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \qquad u(x, 0) = \varphi(x), \ u_t(x, 0) = 0, \ x \in \mathbb{R}^n$$

Коши есебінің шешімі болса, онда $v(x, t) = \int\limits_0^t u(x, \tau) d\tau$ *функциясы*

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \qquad v(x, 0) = 0, \ v_t(x, 0) = \varphi(x)$$

есебінің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.2.17 *Егер* $u(x, t_0, t)$ *функциясы әрбір бекітілген* $t_0 \geq 0$ *үшін*

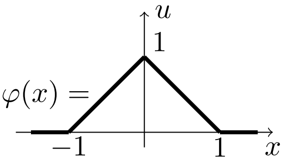
$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \qquad u\big|_{t=t_0} = 0, \ u_t\big|_{t=t_0} = f(x, t_0), \ x \in \mathbb{R}^n$$

Коши есебінің шешімі болса, онда $v(x, t_0, t) = \int\limits_{t_0}^t u(x, \tau, t) d\tau$ *функциясы*

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x, t), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \qquad v\big|_{t=t_0} = 0, \ v_t\big|_{t=t_0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n$$

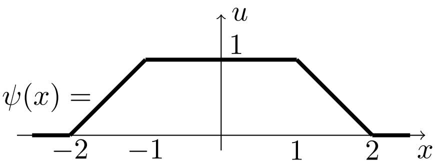
есебінің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.2.18 *Егер* $\varphi(x) = \begin{cases} 0, \ x < -1, \\ x + 1, \ -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0, \ x > 1 \end{cases}$ *және* $\psi(x) = 0$ *болса, шешімнің әр түрлі уақыттағы графигін салыңыз (Maple, Mathcad т.б. бағдарламалар көмегімен)*

3.2.19 *Егер* $\varphi(x) =$ 

$,\ \psi(x) \equiv 0$ *болса, шешімнің әр түрлі уақыттағы графигін салыңыз (Maple, Mathcad т.б. бағдарламалар көмегімен)*

3.2.20 *Егер*

$\varphi(x) \equiv 0, \qquad \psi(x) =$ 

болса, шешімнің әр түрлі уақыттағы графигін салыңыз (Maple, Mathcad т.б. бағдарламалар көмегімен)

3.2.5 Жауаптары

3.2.1 $u\left(x,t\right) = \dfrac{xt^3}{6}.$

3.2.2 $u\left(x,t\right) = \left(x+2t\right)^2.$

3.2.3 $u\left(x,t\right) = 2t + x^2t^2 + \frac{1}{6}t^4 + e^{-x}cht.$

3.2.4 $u\left(x,t\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(2k+1)!} g^{(2k)}\left(x\right) \int\limits_0^t \left(t-\tau\right)^{2k+1} f\left(\tau\right) d\tau.$

3.2.5 $u(x,y,t) = e^x \cos y + ax^2y^2t + \frac{(at)^3}{3}(x^2+y^2) + \frac{(at)^5}{15}.$

3.2.6 $u = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t.$

3.2.7 $u = xyz + (xy+z)t + \frac{1}{2}axt^2 + \frac{1}{6}bt^3.$

3.2.8 $u(x,y,t) = e^{-y} \sin x + \frac{t^3}{3}(x^2+y^2) + \frac{4t^5}{15}.$

3.2.9 ***1****. толқын таралуы болады,* $a = \sqrt{3}$*;* ***2****. толқын таралуы емес.*

3.2.10 ***1****.* $\{x-2t=a,\ x+2t=b,\ x+2t=a,\ x-2t=b\}$*-параллелограмы;*
2. $\left\{x - \frac{10}{3}t = 2,\ x + \frac{10}{3}t = 2,\ x - \frac{10}{3}t = 3,\ x + \frac{10}{3}t = 3\right\}$*-шаршы* t *өсін айналған дене-тор.*

3.2.11 $k = \frac{n-2}{2}.$

3.2.12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k^2 = m_{n+1}^2.$

3.2.13 $\dfrac{|m|}{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}$.

3.2.14 $u\left(x,y,z,t\right)=\varphi\left(x,y,z\right)+t\psi\left(x,y,z\right).$

3.2.15 $u\left(x,y,z,t\right)=\varphi\left(x,y,z\right)+t\psi\left(x,y,z\right)+\dfrac{t^2}{2}f\left(x,y,z\right).$

3.3 Параболалық типті теңдеулер үшін Коши есебі

Параболалық типті теңдеулердің ең қарапайымы – жылу өткізгіш теңдеуі. Жылу өткізгіш теңдеуі жылудың және диффузияның таралу процесстерін зерттеуде туындайды. Бұл бөлімде осы жылуөткізгіш теңдеуі үшін әртүрлі қойылымдардағы Коши есебінің шешілу мәселелері қарастырылады.

3.3.1 Жылу өткізгіш теңдеуі үшін Коши есебі

1) Біртекті теңдеу үшін Коши есебі.

Есептің қойылымы. $Q = \{(x,t): \ x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n, \ t > 0\}$ облысында

$$u_t\left(x,t\right) = a^2 \Delta u\left(x,t\right), \ (x,t) \in Q \tag{3.3.34}$$

жылуөткізгіш теңдеуін және

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \ \ x \in \mathbb{R}^n \tag{3.3.35}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $u\left(x,t\right) \in C^{2,1}_{x,t}\left(Q\right) \bigcap C\left(\bar{Q}\right)$ функциясын анықтау есебі *жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебі* деп аталады. Мұндағы $\varphi\left(x\right)$ белгілі функция, Δ-Лаплас операторы.

Бұл есептің шешімі **Пуассон формуласы** деп аталатын

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\xi\right) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{3.3.36}$$

формуламен анықталады, мұндағы $|x-\xi|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - \xi_k\right)^2$ және

$$G\left(x,\xi,t\right) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}$$

жылу өткізгіштік теңдеудің іргелі шешімі немесе жылу көзі деп аталады.

2) Біртекті емес теңдеу үшін Коши есебі. Айталық жылу сыртқы белгілі бір $f\left(x,t\right)$ күштің әсерінен таралсын, яғни келесі біртекті емес жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебін қарастырайық:

$$u_t\left(x,t\right) = a^2 \Delta u\left(x,t\right) + f(x,t), \ \ (x,t) \in Q, \tag{3.3.37}$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.38}$$

Біртекті емес жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебін шешу алдыңғы бөлімдегі қарастырылған біртекті емес толқын теңдеуі үшін Коши есебін шешу жолымен бірдей (46 беттегі 3.2.1 –бөлімді қараңыз). Сондықтан ондағы айтылғандарды қайталамауды жөн көрдік.

Сонымен, (3.3.37)-(3.3.38) есебіне Дюамель қағидасын қолдансақ, нәтижеде

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^{n}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{|x-\xi|^{2}}{4a^{2}t}}d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\frac{f\left(\xi,\tau\right)}{\left(2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}\right)^{n}}e^{-\frac{|x-\xi|^{2}}{4a^{2}(t-\tau)}}d\xi d\tau \tag{3.3.39}$$

шешімін анықтаймыз.
Бір өлшемді ($n=1$) жағдайда (3.3.36) және (3.3.39) формулалары сәйкес

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\, t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}t}}d\xi, \tag{3.3.40}$$

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\, t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}t}}d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\xi,\tau\right)}{2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}(t-\tau)}}d\xi d\tau \tag{3.3.41}$$

түрде өрнектеледі.

Мысал 3.3.1 *Коши есебін шешіңіз.*

$$\begin{cases} u_t=4u_{xx}, & -\infty<x<\infty, \quad 0<t<\infty, \\ u(0,x)=e^{-4x^2-3x}, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

Шешуі. Мұнда $n=1$, $a=2$ және $\varphi(x)=e^{-4x^2-3x}$ болғандықтан, (3.3.40)-Пуассон формуласы бойынша

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi\, t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4\xi^{2}-3\xi}e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{16t}}d\xi.$$

Бұған

$$\frac{\xi-x}{4\sqrt{t}}=y, \quad \frac{d\xi}{4\sqrt{t}}=dy, \quad \xi=4\sqrt{t}y+x$$

ауыстыруын енгізсек,

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4(4\sqrt{t}y+x)^{2}-3(4\sqrt{t}y+x)}e^{-y^{2}}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4(16ty^{2}+8\sqrt{t}yx+x^{2})-12\sqrt{t}y-3x}e^{-y^{2}}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^{2}-3x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-64ty^{2}-32\sqrt{t}yx-12\sqrt{t}y-y^{2}}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^{2}-3x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-y^{2}(64t+1)-y(32\sqrt{t}x+12\sqrt{t})}dy.$$

Мұнда дәрежесін төмендегіше түрлендіріп

$$-y^2(64t+1) - y(32\sqrt{t}x + 12\sqrt{t}) = -(64t+1)\left(y^2 + 2y\frac{16\sqrt{t}x + 6\sqrt{t}}{64t+1}\right) =$$

$$-(64t+1)\left(y + \frac{16\sqrt{t}x + 6\sqrt{t}}{64t+1}\right)^2 + \frac{\left(16\sqrt{t}x + 6\sqrt{t}\right)^2}{64t+1}$$

және Эйлера-Пуассон интегралын[8] қолдансақ, нәтижеде

$$u(t,x) = \frac{e^{-4x^2-3x+\frac{(16x+6)^2t}{64t+1}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(64t+1)\left(y+\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)^2} dy =$$
$$\frac{1}{\sqrt{64t+1}} e^{-4x^2-3x+\frac{4t(8x+3)^2t}{64t+1}}$$

шешімді аламыз.

3) Қатар арқылы шешу. Көп жағдайларда (3.3.34)-(3.3.35) есебінің шешімін (3.3.36) немесе (3.3.40) формулалары бойынша интегралды есептеу арқылы анықтау қиындық тудырады. Мұндай кездерде (3.3.34)-(3.3.35) есебінің шешімін келесі қатар арқылы анықтау ыңғайлы болады

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}t^k}{k!} \Delta^k \varphi(x). \tag{3.3.42}$$

Мысал 3.3.2 *Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; t > 0, \\ u(x,y,0) = 1 - x^2 - y^2, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Шешуі. (3.3.42) формула бойынша:

$$\begin{array}{l} u(x,y,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \Delta^k \left(1 - x^2 - y^2\right) = \\ \left|\Delta\left(1 - x^2 - y^2\right) = -4, \;\; \Delta^2\left(1 - x^2 - y^2\right) = 0, \ldots\right| = \\ 1 - x^2 - y^2 + \dfrac{t}{1!}(-4) = 1 - x^2 - y^2 - 4t. \end{array}$$

Мысал 3.3.3 *Біртекті емес теңдеу үшін Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{array}{l} u_t = 2u_{xx} + xt, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = x^2 + \cos 2x, \;\; x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

[8] Эйлера-Пуассон интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ($a > 0$).

Шешуі. Шешімді $u = v + \vartheta$ түрінде іздейміз, мұндағы $v\,(x,t)$ функциясы

$$\begin{aligned} & v_t = 2v_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ & v(x,0) = x^2 + \cos 2x,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

есептің шешімі, ал $w\,(x,t)$ функциясы

$$\begin{aligned} & \vartheta_t = 2\vartheta_{xx} + xt,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ & \vartheta(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.3.44}$$

есептің шешімі.

(3.3.43) есептің шешімі (3.3.42) бойынша:

$$u\,(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \Delta^k \left(x^2 + \cos 2x\right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\left(x^2 + \cos 2x\right) = 2 - 2^2 \cos 2x, \\ \Delta^2\left(x^2 + \cos 2x\right) = \Delta\left(2 - 2^2 \cos 2x\right) = -2^4 \cos 2x, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Delta^k\left(x^2 + \cos 2x\right) = (-1)^k 2^{2k} \cos 2x, \dots \end{array} \right| =$$

$$x^2 + \cos 2x + \frac{2t}{1!}\left(2 - 2^2 \cos 2x\right) + \ldots + \frac{2^k t^k}{k!}(-1)^k\left(2^{2k} \cos 2x\right) + \ldots =$$

$$x^2 + 4t + \left[1 - \frac{2^3 t}{1!} + \frac{\left(2 \cdot 2^2 t\right)^2}{2!} + \frac{\left(2 \cdot 2^2 t\right)^3}{3!} + \ldots + \frac{\left(-2 \cdot 2^2 t\right)^k}{k!} + \ldots\right] \cos 2x =$$
$$x^2 + 4t + e^{-8t} \cos 2x.$$

Ал (3.3.44) есепті Дюамель қағидасын пайдаланып шешеміз, яғни алдымен

$$\begin{aligned} & \omega_t = 2\omega_{xx},\ x \in R,\ t \geq \tau, \\ & \omega(x,0) = x\tau,\ x \in R. \end{aligned}$$

түрдегі жолай есеп құрамыз. Бұл есептің шешімі $t > \tau$ үшін (3.3.42) бойынша

$$\omega\,(x,t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (t-\tau)^k}{k!} \Delta^k (x\tau) = x\tau.$$

Ал, $\vartheta(x,t) = \int\limits_0^t x\tau d\tau = \dfrac{xt^2}{2}$. Демек, берілген есептің шешімі

$$u = v + w = x^2 + 4t + e^{-8t} \cos 2x + \frac{1}{2} xt^2.$$

4) Дербес шешімдер әдісі арқылы шешу. Кейбір біртекті емес теңдеулерді $f\,(x,t)\,,\varphi(x)$ функцияларының берілу түріне байланысты, кейде айнымалаларға жіктеу әдісінің жетілдіруі болып келетін – *дербес шешімдер әдісі* арқылы да шешуге болады.

Мысал 3.3.4 *Коши есебінің шешімін тап.*

$$u_t - a^2 u_{xx} = e^t chx, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = chx, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Шешуі. Шешімді $u(x,t) = T(t) \cdot X(x) \neq 0$ түрінде іздейік. Онда бастапқы шарт бойынша $u(x,0) = T(0) \cdot X(x) = chx$. Бұдан $X(x) = chx, \ \ T(0) = 1$ деп алуға болады.
Екінші жағынан теңдеуге қойсақ

$$T'(t) \cdot chx - a^2 T(t) \cdot chx = e^t chx \ \ \Rightarrow$$

нәтижеде

$$T'(t) - a^2 T(t) = e^t, \ \ T(0) = 1$$

Коши есебіне келеміз. Бұл есептің шешімі

$$T(t) = e^{a^2 t}\left[1 + \int_0^t e^{\tau} e^{-a^2\tau} d\tau\right] = e^{a^2 t}\left[1 + \frac{e^{\left(1-a^2\right)t} - 1}{1-a^2}\right] = \frac{e^t - a^2 e^{a^2 t}}{1-a^2}, \ a^2 \neq 1,$$

$$T(t) = e^t\left[1+t\right], \ \ a^2 = 1.$$

Демек, ізделінді шешім

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{chx}{1-a^2}\left[e^t - a^2 e^{a^2 t}\right], & a^2 \neq 1, \\ e^t\left[1+t\right] chx, \ \ a^2 = 1. \end{cases}$$

3.3.2 Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

3.3.1 $u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \qquad u(x,0) = e^x, \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.2 $u_t = u_{xx} + x^2 + 2xt - 2t, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \qquad u(x,0) = x + 2, \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.3 $u_t = u_{xx} + 3t^2, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \qquad u(x,0) = \sin x, \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.4 $u_t = u_{xx} + x\cos t - e^x, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \qquad u(x,0) = e^x - 1, \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.5 $u_t = \Delta u + e^t, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0; \qquad u(x,y,0) = \cos x \sin y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

3.3.6 $u_t = 4\Delta u + 1 + (8t+1)\sin x \cos y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0;$
$u(x,y,0) = x + y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

3.3.7 $u_t - \dfrac{1}{3}\Delta u + xyz, \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \ t > 0;$
$u\,(x,y,z,0) = e^{x+y+z}, \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

3.3.8 $u_t = \triangle u(x,t), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \ \ u|_{t=0} = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n$ *жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебін шешіңіз, егер:*
a) $u_0 = \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$; *b)* $u_0 = e^{-|x|^2}$; *c)* $u_0 = \exp\left[-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]$ *болса.*

3.3.9 $u(x,t) = e^{\alpha x}\cos(\beta x + \gamma t)$ *функциясы* $u_t = u_{xx}$ *жылуөткізгіш теңдеуінің шешімі болатындай* $\alpha > 0, \ \beta > 0, \ \gamma > 0$ *параметрлерінің арасындағы қатынасты анықтаңыз және сол шешімді жазыңыз.*

3.3.10 $u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t)$, *теңдеуі* $v(y,t) = e^{-ct}u(y-bt,t)$ *алмастыруы арқылы жылуөткізгіш теңдеуіне келетіндігін көрсетіңіз, мұндағы* a, b, c*-тұрақты сандар.*

3.3.11 *Жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебін шешіңіз:*
$u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t)$, $u|_{t=0} = u_0(x)$, *егер:*
a) $f = 1, \ u_0 = 1, \ c = 1;$
b) $f = e^t, \ u_0 = \cos x, \ a = c = 1, \ b = 0;$
c) $f = t\sin x, \ u_0 = 1, \ a = c = 1, \ b = 0;$
d) $f = 0, \ u_0 = e^{-x^2};$
e) $f = \omega(t) \in C^1(t \geq 0), \ u_0 \in C$ *шенелген функциялар болса.*

3.3.12 *Коши есебін шешіңіз және шешімді қателік интегралы арқылы өрнектеңіз:*

$$u_t = a^2u_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0,$$
$$u\,(x,0) = \begin{cases} u_0, & x < 0, \\ u_1, & x \geq 0, \ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.3.13 $u_t = a^2u_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \qquad u\,(x,0) = \begin{cases} u_0, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & x\overline{\in}(\alpha,\beta), \ \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$
Коши есебін шешіңіз және шешімді қателік интегралы арқылы -өрнектеңіз. Кез келген компьютерлік математикалық пакеттердің бірін (Maple, Matematica) қолданып, $t_0 = 0, \ t_1 = 0.004, \ t_2 = 4$ *уақыттардағы* ($a = 1$) *графигін көрсетіңіз.*

3.3.14 *Егер* $u(x,\tau,t)$ *функциясы*

$$u_t = a^2\Delta u, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > \tau; \qquad u\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \tau > 0$$

Коши есебінің шешімі болса, онда $v(x,t) = \int\limits_0^t u(x,\tau,t)d\tau$ *функциясы*

$$v_t = a^2\Delta v + f(x,t), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \qquad v\Big|_{t=0} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

есебінің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.3.15 *Егер $u(x,t)$ функциясы*

$$u_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0$$

теңдеудің шешімі болса, онда кез келген $\lambda \in \mathbb{R}$ саны үшін $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ функциясы да сол теңдеудің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.3.3 Жауаптары

3.3.1 $u\,(x,t) = e^{x+t}$.

3.3.2 $u\,(x,t) = 2 + x + x^2 t + x t^2$.

3.3.3 $u\,(x,t) = t^3 + \sin x e^{-t}$.

3.3.4 $u\,(x,t) = e^x + x \sin t - 1$.

3.3.5 $u\,(x,y,t) = e^t - 1 + e^{-2t} \sin y \cos x$.

3.3.6 $u\,(x,y,t) = x + y + t + t \sin x \cos y$.

3.3.7 $u\,(x,y,z,t) = e^{x+y+z+t} + xyzt$.

3.3.8 *a)* $u = e^{-nt} \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$;
b) $u = \dfrac{1}{\sqrt{(1+4t)^n}} \exp\left[-\dfrac{|x|^2}{1+4t}\right]$;
c) $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+4nt}} \exp\left[-\dfrac{1}{1+4nt}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]$.

3.3.9 $\beta = \alpha,\ \ \gamma = 2\alpha^2,\ \ u(x,t) = e^{\alpha x}\cos(\alpha x + 2\alpha^2 t),\ \ \alpha > 0$.

3.3.10 *Нұсқау: теңдеуге тікелей қойыңыз.*

3.3.11 *a)* $u = 2e^t - 1$; *b)* $u = te^t + \cos x$; *c)* $u = e^t + \frac{1}{2}t^2 \sin x$; *d)* $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+4a^2 t}} \exp\left[ct - \frac{(x+bt)^2}{1+4a^2 t}\right]$; *e)* $u = \int\limits_0^t \omega(t-\tau) e^{c\tau} d\tau + \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp\left[ct - \dfrac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2 t}\right] d\xi$.

3.3.12 $u(x,t) = \dfrac{u_0+u_1}{2} + \dfrac{u_1-u_0}{2}\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$

3.3.13 $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2}\left(\Phi\left(\dfrac{x-\alpha}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\dfrac{\beta-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)$, *мұндағы* $\Phi(z) = erfz = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\xi^2}d\xi.$

3.3.14 *Нұсқау:* $t-\tau=t_1$ *белгілеуін енгізіңіз.*

3.3.15 *Тікелей теңдеуге қойыңыз.*

3.4 Жарты өстегі Коши есебі. Жалғастыру әдісі

Егер жылуөткізгіш теңдеуі немесе толқын теңдеуі үшін Коши есебі жарты өсте берілсе, онда Пуассон немесе Даламбер формулаларын қолдана алмаймыз. Мұндай жағдайда есептің берілгендерін жарты өстен толық өске тақ және жұп жалғастыру арқылы Пуассон немесе Даламбер формулаларын қолданып, шешімді анықтаймыз. Мұндай әдіс жалғастыру әдісі деп аталады. Мұнда, әрине тақ, жұп жалғастырулары орынды болатын қосымша шарттары беріледі.

3.4.1 Толқын теңдеуі үшін жарты өстегі Коши есебі

1. Біртекті толқын теңдеуі үшін Коши есебі. Бір ұшы бекітілген шексіз ұзын шектің тербелісі үшін Коши есебін, яғни $Q^+ = \{(x,t)\,|,\ x \in (0,\infty)\,,\ t>0\}$ облысында

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{3.4.45}$$

теңдеуін,

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t\,(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,\infty) \tag{3.4.46}$$

бастапқы шарттарын және

$$u(0,t) = 0\ (\text{немесе}\, u_x(0,t) = 0) \tag{3.4.47}$$

шекаралық шартын[9] қанағаттандыратын $u\,(x,t) \in C^{2,2}_{x,t}\,(Q^+)$ классикалық шешімді табу есебін қарастырайық.

Бұл есепті шешуде келесі лемманы қолданамыз[10].

Лемма 3.4.1 *Айталық*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x \in (-\infty,+\infty),\, t>0, \\ &u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in (-\infty,+\infty) \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Коши есебі берілсін.

- *Егер $f\,(x,t) \equiv 0$, және φ, ψ функциялары қандайда бір x_0 нүктеге қатысты тақ функциялар болса, онда (3.4.48) есептің шешімі осы x_0 нүктеде нөлге тең, яғни*

$$u(x_0,t) = 0. \tag{3.4.49}$$

[9] бұл шарт есептің шешімі бірмәнді болу үшін қажет

[10] Дәлелдеуі Даламбер формуласынан тікелей шығады

- *Егер* $f(x,t) \equiv 0$, *және* φ, ψ *функциялары қандайда бір* x_0 *нүктеге қатысты жұп функциялар болса, шешімнің x бойынша дербес туындысы осы* x_0 *нүктеде нөлге тең*

$$u_x(x_0,t) = 0. \tag{3.4.50}$$

- *Егер* $\varphi \equiv 0$, $\quad \psi \equiv 0$, *және* $f(x,t)$ *функциясы қандайда бір* x_0 *нүктеге қатысты тақ функция болса,онда есептің шешімі осы* x_0 *нүктеде нөлге тең*

$$u(x_0,t) = 0. \tag{3.4.51}$$

- *Егер* $\varphi \equiv 0$, $\quad \psi \equiv 0$, *және* $f(x,t)$ *функциясы қандайда бір* x_0 *нүктеге қатысты жұп функция болса, онда шешімнің x бойынша дербес туындысы осы* x_0 *нүктеде нөлге тең*

$$u_x(x_0,t) = 0. \tag{3.4.52}$$

Бұл лемманы пайдаланып, (3.4.45)-(3.4.47) есебін шешейік. $(0,\infty)$ жарты өсте анықталған $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларын төмендегідей барлық $(-\infty,+\infty)$ өске тақ жалғастыра отырып,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x \geq 0, \\ -\varphi(-x), \ x < 0, \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), \ x \geq 0, \\ -\psi(-x), \ x < 0 \end{cases} \tag{3.4.53}$$

$\Phi(x)$, $\Psi(x)$ функцияларын анықтайық. Бұл анықталған $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ функциялары $(-\infty,+\infty)$ аралығында тақ функциялар болатындығы анық.

Енді осы $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ функциялары бастапқы берілгендері болып келетін Коши есебін құрайық

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0, \ x \in (-\infty,+\infty), \ t > 0, \tag{3.4.54}$$

$$U(x,0) = \Phi(x), \ U_t(x,0) = \Psi(x), \ x \in (-\infty,+\infty). \tag{3.4.55}$$

Бұл есепке Даламбер формуласын қолдана аламыз және оның шешімі

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(\ + at) + \Phi(x-at)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi. \tag{3.4.56}$$

Екінші жағынан $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ тақ функциялар болғандықтан 3.4.1 – Лемманың бірінші тұжырымы ((3.4.49)) бойынша

$$U(0,t) = 0 \tag{3.4.57}$$

шарты орындалады.

Сонымен, $U(x,t)$ функциясы $t>0$ және $x>0$ үшін (3.4.45) теңдеуді, ((3.4.45) мен (3.4.54) бір теңдеу) және (3.4.47) ((3.4.47) пен (3.4.57) бір шарт) шекаралық шартты және де

$$U(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x),\ x\geq 0,$$

$$U_t(x,0)=\Psi(x)=\psi(x),\ x\geq 0$$

(3.4.46) бастапқы шарттарды қанағаттандырады. Демек, $U(x,t)$ функциясы $(0,\infty)$ жарты өсте (3.4.45)-(3.4.47) есебінің де шешімі[11] болады. Олай болса (3.4.53) ескеріп, шешімді есептің берілгендері арқылы жазамыз:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\varphi\left(x+at\right)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi,\ x\geq at,\ t>0,\\ \frac{1}{2}\left(\varphi\left(x+at\right)-\varphi(at-x)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi,\ 0<x<at,\ t>0.\end{cases}\tag{3.4.58}$$

Егер есеп $u_x(0,t)=0$ шартымен берілсе, онда дәл осындай жолмен φ және ψ функцияларын

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi\left(x\right),\ x\geq 0,\\ \varphi\left(-x\right),\ x<0,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi\left(x\right),\ x\geq 0,\\ \psi\left(-x\right),\ x<0\end{cases}$$

түрде жұп жалғастырып, шешімді анықтаймыз

$$u\left(x,t\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(x-at\right)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi, \qquad x\geq at,\ t>0,\\ \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(at-x\right)\right]+\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{0}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi+\int\limits_{0}^{at-x}\psi\left(\xi\right)d\xi\right],\\ \qquad x<at,\ t>0.\end{cases}\tag{3.4.59}$$

Мысал 3.4.1 *Жарты өсте берілген Коши есебін шешіңіз*

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<\infty,\ t>0,\ u(0,t)=0,t>0,$$

$$u(x,0)=x+1,\ u_t\left(x,0\right)=x^2+x,\ x\in[0,\infty).$$

[11] Коши есебінің шешімінің жалғыздығы бойынша басқа шешімі жоқ

Шешуі. Есеп $u(0,t)=0$ шартымен берілгендіктен, (3.4.58) бойынша

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left((x+at)+1+(x-at)+1\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}(\xi^2+\xi)d\xi\ ,\ x\geq at,\ t>0,\\ \frac{1}{2}\left((x+at)+1-((at-x)+1)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\left(\xi^2+\xi\right)d\xi,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0<x<at,\ t>0.\end{cases}$$

1. $x\geq at$ болсын.

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[x+at+1+x-at+1\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left(\xi^2+\xi\right)d\xi=$$

$$x+1+\frac{1}{2a}\left(\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{\xi=x-at}^{\xi=x+at}=x+1+t(x+x^2)+\frac{a^2t^3}{3}$$

2. $0<x<at$ болсын.

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[x+at+1-at+x-1\right]+\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{at-x}^{x+at}\left(\xi^2+\xi\right)d\xi\right]=$$

$$t+1+\tfrac{1}{2a}\left(\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{\xi=at-x}^{\xi=x+at}=x+\frac{x^3}{3a}+x(at^2+t).$$

Демек, шешім

$$u\left(x,t\right)=\begin{cases}x+1+t\left(x+x^2\right)+\dfrac{a^2t^3}{3},\quad x\geq at,\quad t>0,\\ x+\dfrac{x^3}{3a}+x\left(at^2+t\right),\quad x<at,\qquad t>0.\end{cases}$$

Мысал 3.4.2 *Жарты өсте берілген Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0,\\ u_x\left(0,t\right)=0,\ t>0\\ u\left(x,0\right)=1+x^2,\quad u_t\left(x,0\right)=x+2,\quad x\geq 0.\end{cases}$$

Шешуі. Есеп $u_x(0,t)=0$ шартымен берілгендіктен, (3.4.59) бойынша

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1+(x+at)^2+1+(x-at)^2\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}(\xi+2)\,d\xi,\quad x\geq at,\\ \frac{1}{2}\left[1+(x+at)^2+1+(at-x)^2\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{at-x}(\xi+2)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}(\xi+2)d\xi,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x<at.\end{cases}$$

Бұл интегралдарды есептеп, шешімді аламыз

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 + 2t + xt + x^2 + a^2t^2, & x \geq at, \\ 1 + x^2 + a^2t^2 + \dfrac{1}{2a}\left(4at + x^2 + a^2t^2\right), & x < at. \end{cases}$$

2. Біртекті емес толқын теңдеуі үшін Коши есебі. Айталық, біртекті бастапқы және шекаралық шарттармен берілген біртекті емес толқын теңдеуі үшін жарты өстегі Коши есебін қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \;\; 0 < x < \infty, \;\;\; t > 0, \tag{3.4.60}$$

$$u\,(0,t) = 0, \;\;\; t > 0, \tag{3.4.61}$$

$$u\,(x,0) = 0, \;\; u_t\,(x,0) = 0, \;\;\; 0 \leq x < \infty. \tag{3.4.62}$$

Теңдеудегі $f(x,t)$ функциясын бүкіл $(-\infty,\infty)$ өске тақ жалғастыру арқылы анықтаған

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0, \; t > 0, \\ -f(-x,t), & x < 0, \; t > 0 \end{cases} \tag{3.4.63}$$

функциясы оң жағы болатын, бастапқы шарттары нөлге тең, барлық өсте қойылған келесі көмекші Коши есебін қарастырайық:

$$U_{tt} = a^2U_{xx} + F(x,t), \;\; -\infty < x < \infty, \;\; t > 0, \tag{3.4.64}$$

$$U\,(x,0) = 0, \;\; U_t\,(x,0) = 0, \;\;\; -\infty < x < \infty. \tag{3.4.65}$$

Мұның шешімі Даламбер формуласы бойынша

$$U(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F\,(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{3.4.66}$$

(3.4.63) түрдегі анықталған $F(x,t)$ функциясы тақ функция болғандықтан, 3.4.1 – Лемманың үшінші тұжырымы бойынша

$$U\,(0,t) = 0. \tag{3.4.67}$$

Демек, (3.4.64)-(3.4.67) теңдіктерден бұл есептің $U\,(x,t)$ шешімі $(0,\infty)$ жарты өсте (3.4.60)-(3.4.62) есептің де шешімі болатынын көреге болады. Себебі: $x > 0$ кезде $F(x,t) \equiv f(x,t)$ болғандықтан (3.4.64) теңдеуден

$$U_t = a^2U_{xx} + f(x,t), \;\; 0 < x < \infty, \;\;\; t > 0,$$

яғни $U(x,t)$ функциясы (3.4.60) теңдеуді қанағаттандырады. Ал (3.4.61) және (3.4.62) шарттардың орындалуы сәйкес (3.4.67) және (3.4.65) шарттардан шығады. Олай болса, (3.4.66) формуладан (3.4.63) ескеріп (3.4.60)-(3.4.62) есебінің шешімін аламыз

$$
u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \quad x\ge at, \quad t>0, \\ \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \quad x<at. \end{cases} \tag{3.4.68}
$$

Мысал 3.4.3 *Жарты өсте берілген біртекті емес Коши есебін шешіңіз:*

$$
\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+x+t, \ \ 0<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \ \ 0\le x<\infty, \\ u(0,t)=0, \quad t>0. \end{cases}
$$

Шешуі. Есеп $u(0,t)=0$ шартымен берілгендіктен, теңдеудің оң жағындағы $f(x,t)=x+t$ функциясын барлық $(-\infty,+\infty)$ өске

$$
F(x,t)=\begin{cases} x+t, \quad x\ge 0, \\ -(-x+t), \quad x<0 \end{cases}
$$

түрде тақ жалғастырып, Даламбер, яғни (3.4.68) формуласын қолданамыз:

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\tau.
$$

Енді осы интегралды есептейік:

1. Егер $x-at>0, \quad x>0$ болса, $x-a(t-\tau)=x-at+a\tau>0 \Rightarrow$

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} (\xi+t)d\xi d\tau=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\frac{\xi^2}{2}+\tau\xi\right)\Bigg|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\tau=
$$

$$
\frac{1}{4a}\int\limits_0^t \left[2ax(t-\tau)+2a\left(t\tau-\tau^2\right)\right]d\tau=\frac{xt^2}{2}+\frac{t^{\,3}}{6}, \quad x\ge at.
$$

2. Егер $x-at<0, x>0$ болса, онда

$$
u(x,t)=\frac{1}{2a}\left[\frac{3at^2}{3a^2}x^3+\frac{4at-3x}{a}xt\right], \quad x<at.
$$

Демек, (3.4.72) есептің шешімі

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{xt^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}, & x\geq at,\ t>0,\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{3at^2}{3a^2}x^3+\dfrac{4at-3x}{a}xt\right], & x<at.\end{cases}\qquad(3.4.69)$$

3. Жалпы түрдегі біртекті емес Коши есебі. Жарты өсте қойылған жалпы түрдегі біртекті емес Коши есебін қарастырайық:

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ &u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x),\ \ 0\leq x<\infty,\\ &u(0,t)=\mu(t),\ \ t>0.\end{aligned}$$

Бұл есептің шешімін $u(x,t)=U+V+W$ түрде іздейміз, мұндағы U, V және W функциялары сәйкес төмендегі есептердің шешімдері:

$$(U)\ \begin{cases}U_{tt}=a^2U_{xx},\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ U(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\leq x<\infty,\\ U_t(x,0)=\psi(x),\ \ 0\leq x<\infty,\\ U(0,t)=0,\ \ t>0.\end{cases}$$

$$(V)\ \begin{cases}V_{tt}=a^2V_{xx}+f(x,t),\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ V(x,0)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ V_t(x,0)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ V(0,t)=0,\ \ t>0.\end{cases}$$

$$(W)\ \begin{cases}W_{tt}=a^2W_{xx},\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ W(x,0)=0,\ \ W_t(x,0)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ W(0,t)=\mu(t),\ \ t>0.\end{cases}$$

(U) және (V) есептері жоғарыдағы қарастырылған (3.4.45)-(3.4.47) және (3.4.60)-(3.4.62) есептер. Олардың шешімдері сәйкес (3.4.58), (3.4.68) формулаларымен анықталады. Ал (W) есебінің "шешімін толқынды тарату" әдісі бойынша анықтаймыз, яғни шешімді

$$W(x,t)=g(x-at)$$

түрінде іздейміз, мұндағы $g(x)$ функциясын

$$W(0,t)=\mu(t)$$

шартынан анықтаймыз:

$$g(-at)=\mu(t)\ \ \Rightarrow\ \ g(t)=\mu(-\frac{t}{a})\ \ \Rightarrow g(x-at)=\mu(t-\frac{x}{a}).$$

Бірақ $\mu(t)$ функциясы $t>0$ аралықта анықталғандықтан $g(t)$ функциясы $t>\frac{x}{a}$ аралығында ғана анықталады. Ал, $W(x,0)=W_t(x,0)=0$ шарттары орындалуы үшін $g(x-at)$ функциясын $0 \le t \le \frac{x}{a}$ аралығында нөлмен жалғастырсақ жеткілікті. яғни:

$$W(x,t) = \begin{cases} \mu(t-\frac{x}{a}), & t > \frac{x}{a}, \\ 0, & 0 \le t \le \frac{x}{a}. \end{cases} \tag{3.4.70}$$

Ескерту жуп жалгастыру.

Мысал 3.4.4 *Жалғастыру әдісі бойынша шешімін тап.*

$$\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x + t, \;\; 0 < x < \infty, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \cos(x), \;\; u_t(x,0) = 0, \;\; 0 \le x < \infty, \\ u(0,t) = t^2, \;\; t > 0. \end{array}$$

Есеп $u(0,t) = t^2$ шартымен берілгендіктен, шешімді тақ жалғастыру арқылы шешеміз. Шешімді $u = U + V + W$ түрінде іздейміз, мұндағы $U, , V$ және W функциялары сәйкес төмендегі есептердің шешімдері:

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx}, \;\; 0 < x < \infty, \;\; t > 0, \\ U(x,0) = \cos(x), \;\; U_t(x,0) = 0, \;\; 0 \le x < \infty, \\ U(0,t) = 0, \;\; t > 0. \end{cases} \tag{3.4.71}$$

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx} + x + t, \;\; 0 < x < \infty, \;\; t > 0, \\ V(x,0) = 0, \;\; V_t(x,0) = 0, \;\; 0 \le x < \infty, \\ V(0,t) = 0, \;\; t > 0. \end{cases} \tag{3.4.72}$$

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2 W_{xx}, \;\; 0 < x < \infty, \;\; t > 0, \\ W(x,0) = 0, \;\; W_t(x,0) = 0, \;\; 0 \le x < \infty, \\ W(0,t) = t^2, \;\; t > 0. \end{cases} \tag{3.4.73}$$

(3.4.71) есептің шешімі (3.4.58) бойынша

$$U(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(cos\left(x+at\right) + cos\left(x-at\right)\right), & x \ge at, \;\; t > 0, \\ \\ \dfrac{1}{2}\left(cos\left(x+at\right) - cos\left(x-at\right)\right), & x < at, \;\; t > 0. \end{cases} \tag{3.4.74}$$

Ал, (3.4.72) есеп жоғарыдағы 3.4.3 – Мысалда қарастырылған есеп және оның шешімі ((3.4.69)):

$$V(x,t) = \begin{cases} \dfrac{xt^2}{2} + \dfrac{t^3}{6}, & x \ge at, \; t > 0, \\ \\ \dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{3at^2}{3a^2}x^3 + \dfrac{4at-3x}{a}xt\right], & x < at. \end{cases} \tag{3.4.75}$$

Ал, (3.4.73) есептің шешімі (3.4.70) бойынша

$$W(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ (t - \frac{x}{a})^2, & x < at. \end{cases} \tag{3.4.76}$$

Енді (3.4.74)-(3.4.76) теңдіктердерді біріктіріп, ізделінді шешімді аламыз

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(cos\left(x+at\right)+cos\left(x-at\right)\right)+\frac{xt^2}{2}+\frac{t^3}{6}, \quad x \geq at, \\ \frac{1}{2}\left(cos\left(x+at\right)-cos\left(x-at\right)\right)+\frac{1}{2a}\left[\frac{3a+2}{3a^2}x^3+\frac{4at-3x}{a}xt\right]+ \\ \qquad (t-\frac{x}{a})^2, \quad x < at. \end{cases}$$

3.4.2 Жылуөткізгіш теңдеуі үшін жарты өстегі Коши есебі

Жарты өсте берілген жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебін қарастырайық

$$\begin{array}{l} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,\infty), \\ u(0,t) = 0 \quad (\text{немесе } \; u_x(0,t) = 0), \quad t > 0. \end{array} \tag{3.4.77}$$

Мұнда $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q^+)$ шешімді табу керек. Бұл есеп үшін де келесі лемма орынды.

Лемма 3.4.2 *Айталық*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\; x \in (-\infty,+\infty),\, t > 0,\; u|_{t=0} = \varphi(x),\; x \in (-\infty,+\infty)$$

Коши есебі берілсін.

- *Егер $f(x,t) \equiv 0$ және φ функциясы қандайда бір x_0 нүктеге қатысты тақ (жұп) функция болса, онда осы x_0 нүктеде*

$$u(x_0,t) = 0 \;\; (u_x(x_0,t) = 0). \tag{3.4.78}$$

- *Егер $\varphi \equiv 0$ және $f(x,t)$ функциясы қандайда бір x_0 нүктеге қатысты тақ (жұп) функция болса, онда осы x_0 нүктеде*

$$u(x_0,t) = 0 \;\; (u_x(x_0,t) = 0). \tag{3.4.79}$$

Міне бұл лемма негізінде және Пуассон формуласы арқылы φ және $f(x,t)$ функцияларын тақ немесе жұп жалғастыра отырып, (3.4.77) есепті шешуге болады.

Мысал 3.4.5 *Келесі есепті барлық O_x өсіне қажетті түрде тақ немесе жұп жалғастыра отырып шеш.*

$$\left\{\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ \ t > 0 \\ u\left(0, t\right) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \ \ 0 < x < \infty \end{array}\right. \tag{3.4.80}$$

Есеп $u\left(0,t\right) = 0$ шартымен берілгендіктен, $\varphi\left(x,t\right)$ функциясын $(-\infty,\infty)$ аралығына тақ жалғастырамыз, яғни:

$$\Phi\left(x\right) = \left\{\begin{array}{l} \varphi\left(x\right), \ \ x > 0, \\ -\varphi\left(-x\right), \ \ x < 0. \end{array}\right.$$

Енді $\Phi\left(x\right)$ функциясы бастапқы шарты болатын есеп құрамыз

$$\begin{array}{l} U_t = a^2 U_{xx}, \ \ x \in \left(-\infty, \infty\right), \ t > 0, \\ U\left(x, 0\right) = \Phi\left(x\right), \ \ x \in \left(-\infty, \infty\right). \end{array}$$

Бұл есептің шешімі Пуассон формуласы бойынша

$$U\left(x,t\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(y\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$$

және 3.4.2 – Лемма бойынша $U(0,t) = 0$. Бұл теңдіктерден, $U\left(x,t\right)$ шешімі $(0,\infty)$ жарты өсте (3.4.80) есептің де шешімі болатынын көреміз $u(x,t) \equiv U(x,t)$, $x > 0$. Олай болса, соңғы интегралды жоғарыдағы енгізуді ескеріп есептейік:

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(y\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} \Phi\left(y\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy +$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \left| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{y = -z} \\ \multicolumn{2}{c}{dy = -dz} \\ y & z \\ -\infty & \infty \\ 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\infty}^{0} \Phi\left(-z\right) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(-z\right) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\infty}^{0} \varphi\left(z\right) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi\left(\xi\right) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$$

Жауабы: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$

Мысал 3.4.6 *Келесі есепті барлық O_x өсіне қажетті түрде тақ немесе жұп жалғастыра отырып шеш.*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Бұл есеп $u_x(0,t) = 0$ шартымен берілгендіктен $\varphi(x,t)$ функциясын

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ \ x \geq 0, \\ \varphi(-x), \ \ x < 0 \end{cases}$$

түрде жұп жалғастырып, жоғарыдағыдай шешімді анықтаймыз:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(y) \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}} \right] dy.$$

3.4.3 Жаттығулар

Жалғастыру әдісін қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

3.4.1 $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ x > 0, \ t > 0;$
$u(0,t) = 0, \ \ t > 0; \ \ u(x,0) = 1 - e^{-x}, \ u_t(x,0) = \sin x, \ \ x \geq 0.$

3.4.2 $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ x > 0, \ t > 0;$
$u_x(0,t) = 0, \ t > 0; \ \ u(x,0) = x^2 - x^3, \ u_t(x,0) = \cos x, \ \ x \geq 0.$

3.4.3 $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ 0 < x < \infty, \ t > 0;$
$u(0,t) = 0, \ t > 0; \ \ u(x,0) = 0, \ x \geq 0.$

3.4.4 $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ 0 < x < \infty, \ t > 0;$
$u_x(0,t) = 0, \ t > 0; \ \ u(x,0) = 0, \ x \geq 0.$

3.4.5 $u_{tt} = u_{xx}, x > \frac{\pi}{2}, \ t > 0; \ \ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 3t, \ \ t \geq 0;$
$u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 3 - 2\cos x, \ \ x \geq \frac{\pi}{2}.$

3.4.6 $u_{tt} = u_{xx}, \ \ x > 0, \ t > 0; \ \ u_x(0,t) - 2u(0,t) = te^{-3t}, \ \ t \geq 0;$
$u(x,0) = 2e^{-x}, \ \ u_t(x,0) = 0, \ \ x \geq 0.$

3.4.7 $u_{tt} = 4u_{xx}, \ \ x > 0, \ \ t > 0; \ \ (u_x - u)|_{x=0} = 2e^{-2t}, \ \ t \geq 0;$
$u(x,0) = 2\sin x, \ \ u_t(x,0) = 0, \ \ x \geq 0.$

3.4.8 $u_{tt}=4u_{xx},\ \ x>0,\ t>0;\ \ u_x(0,t)-u(0,t)=e^{-2t},\ t\geq 0;$
$u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=4e^{-x},\ \ x\geq 0.$

3.4.9 *Айталық,* $u(x,t)$ *функциясы* $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in R$ *Коши есебінің шешімі болсын. Даламбер формуласын қолдану арқылы*
1) егер- $\varphi(x)$ *және* $\psi(x)$ *тақ функциялар болса, онда* $u(0,t)\equiv 0$;
2) егер- $\varphi(x)$ *және* $\psi(x)$ *жұп функциялар болса, онда* $u_x(0,t)\equiv 0$ *екендігін дәлелдеңіз.*

3.4.10 *Айталық,* $u(x,t)$ *функциясы* $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}$ *Коши есебінің шешімі болсын. Даламбер формуласын қолдану арқылы*
1) егер- $\varphi(x),\ \psi(x)$ *тақ функциялар, және* $f(x,t)$ *функциясы бойынша тақ функция болса, онда* $u(0,t)\equiv 0$*;*
2) егер $\varphi(x),\ \psi(x)$ *жұп функциялар және* $f(x,t)$ *функциясы бойынша жұп функция болса, онда* $u_x(0,t)\equiv 0$ *екендігін дәлелдеңіз.*

3.4.4 Жауаптары

3.4.1 $u(x,t)=\begin{cases}1-e^{-x}chat+\frac{1}{2a}\left(\cos(x-at)-\cos(x+at)\right), & x>at\\ e^{-at}shx+\frac{1}{2a}\left(\cos(x-at)-\cos(x+at)\right) & x\leq at.\end{cases}$

3.4.2 $u(x,t)=\frac{1}{2}\left((x+at)^2-(x+at)^3+(x-at)^2-|x-at|^3\right)+$
$\frac{1}{2a}\left(\sin(x+at)-\sin(x-at)\right).$

3.4.3 $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{f(s,t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2\tau}}-e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2\tau}}\right]dsd\tau.$

3.4.4 $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dsd\tau.$

3.4.5 $v(x,t)=u\left(x+\frac{\pi}{2},t\right)-3t,\ \ v(x,t)=\cos(x-t)-\cos(x+t),$
$u(x,t)=v\left(x-\frac{\pi}{2},t\right)+3t=\sin(x-t)-\sin(x+t)+3t.$

3.4.6 $u(x,t)=\begin{cases}e^{-x-t}+e^{-x+t}, & 0<t\leq x;\\ e^{-x-t}+3e^{2(x-t)}+(1-x+t)e^{3(x-t)}-3e^{(x-t)}, & 0<x<t.\end{cases}$

3.4.7 $u(x,t)=\begin{cases}\sin(x+2t)+\sin(x-2t), & 0<2t\leq x;\\ \sin(x+2t)+(2x-4t-1)e^{x-2t}+\cos(x-2t), & 0<x<2t.\end{cases}$

3.4.8 $u(x,t)=\begin{cases}-e^{-x-2t}+e^{-x+2t}, & 0<2t\leq x;\\ -e^{-x-2t}+(1-x+2t)e^{x-2t}, & 0<x<2t.\end{cases}$

Лаплас түрлендіруінің кестесі
$sh\,(at) - \sin at$

Бөлім 4

Математикалық физика теңдеулеріне қойылған бастапқы-шеттік есептер. Фурье әдісі

4.1 Фурье әдісінің жалпы сұлбасы. Меншікті мән және меншікті функция туралы есеп

Математикалық физиканың есептерін шешуде жиі қолданатын қарапайым әдістердің бірі – Фурье әдісі. Ол сызықты біртекті шекаралық есептерді шығаруға қолданылады. Бұл әдістің негізгі идеясы, дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған шекаралық есептерді жәй дифференциалдық теңдеулер немесе тәуелсіз айнымалылар саны азырақ болатын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін қойылатын шекаралық есептерге ажырату. Фурье әдісін кейде *айнымалыларға жіктеу* әдісі деп те атайды.

Бұл бөлімде Фурье әдісін қолданып математикалық физиканың негізгі теңдеулеріне қойылатын бастапқы-шеттік есептерді шешуді қарастырамыз.

4.1.1 Фурье әдісінің жалпы сұлбасы

Операторлық түрде жазылған

$$\left(\rho\left(x\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}-L\right)u\left(x,t\right)=0,\ \ 0<x<l,\ t>0,\ \ k=0,1,2,\ldots \tag{4.1.1}$$

дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді,

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\bigg|_{x=0}=0,\quad \alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2 u\bigg|_{x=l}=0,\quad t>0, \alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0,\ i=1,2 \tag{4.1.2}$$

шекаралық шарттарды және

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{0, k-1}, \ \ 0 \le x \le l \tag{4.1.3}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын аралас есепті қарастырайық. Мұндағы

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u$$

түрде анықталған дифференциалдық оператор.

Жоғарыдағы (4.1.1) теңдеудегі барлық $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ коэффициенттерін $(0, l)$ аралығында анықталған, жеткілікті жатық функциялар, нақтырақ айтқанда мына шарттар орындалсын деп қабылдайық

$$p(x) \in C^1(0,l), \ q(x) \in C(0,l), \ \rho(x) \in C(0,l); \quad \rho(x) > 0, \ p(x) > 0, \ q(x) \ge 0. \tag{4.1.4}$$

Ескерту 4.1.1 *Егер (4.1.1) теңдеуде $k = 0$ болса, онда ол эллиптикалық типті теңдеу, $k = 1$ болса параболалық типті, ал $k = 2$ болса, гиперболалық типті теңдеу болады. Мәселен, $k = 0$ және $p(x) = 1$, $q(x) = \rho(x) = 1$ болса кәдуәлгі Лаплас теңдеуін, $k = 1$ және $p(x) = a^2 = const$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$ болса жылуөткізгіш теңдеуін, ал $k = 2$ және $p(x) = a^2 = const$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$ болса толқын теңдеуін аламыз.*

Ескерту 4.1.2 *Егер (4.1.2) шарттарда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ болса I-шекаралық есеп, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ болса II-шекаралық есеп, ал $\alpha_i \ne 0$, $\beta_i \ne 0$, $i = 1, 2$ болғанда III-шекаралық есепті аламыз.*

Фурье әдісінің жалпы сұлбасы. Фурье[1] әдісін тікелей қолдану үшін теңдеудің шекаралық шарттары біртекті (нөлдік) және кейбір аргументтердің өзгеру облысы шенелген болуы қажет. Бұл (4.1.1)-(4.1.3) аралас есебін Фурье әдісі (айнымалыларға жіктеу) бойынша шешу сұлбасы келесі қадамдардан тұрады:

1-қадам. Нөлдік емес шешімді әрбір аргументтеріне жекелей тәуелді функциялардың көбейтіндісі түрінде іздейміз

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \ne 0; \tag{4.1.5}$$

2-қадам. Бұл (4.1.5) шешімді берілген (4.1.1) теңдеуге қойып, айнымалыларға ажырата отырып оны жәй дифференциалдық теңдеулерге

[1] JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (Жан Батист Жозеф Фурье), (1768 –1830)– француздық математик әрі физик ғалым. Оның математикада оны ішінде математикалық анализ, интегралдық түрлендірулер, комплекстік анализ және математикалық физиканың көптеген бөлімдеріне қосқан маңызды еңбектері жетерлік.

ажыратамыз:

$$\frac{\dfrac{d^kT}{dt^k}}{T(t)} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}\right] - q(x)X}{\rho(x)X(x)} \equiv \frac{LX}{\rho(x)X(x)}.$$

Соңғы теңдіктіктің сол жағы тек t айнымалыдан, ал оң жағы тек x айнымалыдан тәуелді функциялар болғандықтан, бұл теңдік– екі жағы да қандайда бір, айталық $\lambda = const$ тұрақты санға тең болғанда ғана мағыналы болады. Сондықтан теңдіктің екі жағын жеке-жеке λ санына теңестіріп, келесі жәй дифференциалдық теңдеулерді аламыз:

$$\frac{d^kT(t)}{dt^k} = \lambda T(t) \tag{4.1.6}$$

$$LX \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] - q(x)X = \lambda\rho(x)X(x), \tag{4.1.7}$$

мұндағы λ әзірге белгісіз тұрақты.

3-қадам. (4.1.5) нөлдік емес шешімді (4.1.2) шекаралық шарттарға қойып, (4.1.7) теңдеуі үшін шекаралық шарттар аламыз, яғни:

$$\alpha_1X'(0) + \beta_1X(0) = 0, \quad \alpha_2X'(l) + \beta_2X(l) = 0. \tag{4.1.8}$$

Міне бұл (4.1.1)-(4.1.3) аралас есебін шешу мәселесі λ белгісіз параметрі бар, жәй дифференциалдық теңдеуі үшін (4.1.7)-(4.1.8) шекаралық есебін шешуге келтірілді. Бұл алынған (4.1.7)-(4.1.8) есебін шешу деп – әрбір белгісіз λ тұрақты санын, және оған сәйкес есептің нөлдік емес $X(x)$ шешімін анықтауды түсінеміз. Мұндай есеп меншікті мән және меншікті функция туралы есеп немесе Штурм[2]-Лиувилль[3] есебі деп аталады. Мұндай λ тұрақтылары Штурм-Лиувилль есебінің *меншікті сандары*, ал оларға сәйкес $X(x)$ нөлдік емес шешімдері *меншікті функциялар* деп аталады.

4-қадам. Бұл (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебінің λ_k меншікті сандары мен $X_k(x)$ меншікті функцияларын анықтап, және әрбір табылған λ_k меншікті сандарды (4.1.6) теңдеуге қойып (4.1.6) теңдеудің $T_k(t)$ шешімдерін анықтаймыз.

[2] JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM (Шарль Франсуа Штурм), (1803–1855)– Швейцарияда туылған француз математигі. Оның негізгі еңбектері сығылмайтын сұйықтар теориясы, математикалық физика теңдеулері, ЖДТ (Штурм-Лиувилль есебі), сонымен қатар алгебра саласын зерттеуге арналған.

[3] JOSEPH LIOUVILLE (Лиувилль Жозеф), (1809–1882)–француз математигі. Оның еңбектері математиканың әр саласында, атап айтқанда комплекстік анализде, арнайы функциялар, дифференциалдық геометрия және сандар теориясында маңызды орын алады. Сонымен қатар эллиптикалық функциялар теориясында, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясында да маңызды еңбектері бар.

5-қадам. Бұл анықталған $X_k(x)$ және $T_k(t)$ дербес шешімдерді (4.1.4) қойып және суперпозиция қағидасы бойынша берілген есептің шешімін аламыз

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(t) X_k(x) .$$

Мұндағы A_k белгісіз коэффициенттерді (4.1.3) бастапқы шарттарды қолданып анықтаймыз.

Бұл әдістің нақты есептерге қолданулары алдағы бөлімдерде қарастырылады.

4.1.2 Штурм-Лиувилль есебі. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың қасиеттері.

Жоғарда көрсетілгендей, көптеген математикалық физика теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептерді фурье әдісімен шешу – Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын анықтауды және олардың қасиеттерін білуді қажет етеді. Штурм-Лиувилль есебінің қойылымы бастапқы берілген есептің құрылымына тікелей байланысты болады. Жоғарыдағы алынған (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебі мұндай есептердің ең қарапайым түрдегі қойылымы. Алда (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебінің шешілу мәселесін және оның меншікті мәндері мен меншікті функцияларының қасиеттерін зерттейміз.

Штурм–Лиувилл есебі.

(4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебін қарастырайық:

$$LX \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] - q(x)X = \lambda\rho(x)X(x), \tag{4.1.9}$$

$$\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0, \delta_i^2 + h_i^2 \neq 0, \; i = 1, 2. \tag{4.1.10}$$

Штурм-Лиувилль есебі шекаралық шарттың түріне және $p(x)$ коэффициентінің өзгерісіне байланысты *регулярлы*, *периодты* және *сингулярлы* болып бөлінеді.

Егер (4.1.4) шарт орындалса онда (4.1.9)-(4.1.10) есебі регулярлы Штурм-Лиувилль есебі болады.

Егер (4.1.10) шекаралық шарт $p(a) = p(b)$, $X(a) = X(b)$, $X'(a) = X'(b)$ периодты шартпен берілсе, онда (4.1.9)-(4.1.10) есебі периодты Штурм-Лиувилль есебі болады.

Егер (4.1.9) теңдеудің $p(x)$ коэффициенті берілген $[a, b]$ аралығының шеткі нүктелерінің біреуінде немесе екеуінде де нөлге айналса, яғни $p(a) = 0$ немесе $p(b) = 0$ болса, онда (4.1.9)-(4.1.10) есебі сингулярлы Штурм-Лиувилль есебі болады. Мәселен,

1. Егер $p(x) = x,\ q(x) = \dfrac{\nu^2}{x},\ \ \rho(x) = x\ \ a = 0,\ b = l$ болса, онда

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Бессель теңдеуін аламыз және оның меншікті функциялары Бессель функциялары болады.
2. Егер $p(x) = 1 - x^2,\ q(x) = 0,\ \ \rho(x) = 1\ \ a = -1,\ b = 1$ болса, онда

$$\left[\left(1 - x^2\right) y'\right]' + \lambda y = 0$$

Лежандр теңдеуі үшін Штурм-Лиувилль есебіне келеміз және оның меншікті функциялары Лежандр полиномдары болады. Мұндай мысалдарды көптеп келтіруге болады. Сингулярлы Штурм-Лиувилль есебін зерттеу арнайы функциялар теориясында қарастырылады.[4] Бұл оқу құралында тек регулярлы немесе периодты жағдайлар қарастырылады.

Мысал 4.1.1 *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ X(0) = 0,\ \ X(l) = 0.$$

Шешуі. Бұл есеп (4.1.9)-(4.1.10) есебінің $p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1,$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1$ кездегі дербес жағдайы.

1. Айталық, $\lambda = 0$ болсын. Онда жалпы шешімі $X(x) = C_1x + C_2$ болады. Ал бұған шекаралық шарттарды қолдансақ, онда $C_1 = C_2 = 0$ болады да, $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімді аламыз.

2. $\lambda < 0$ теріс сан болсын. Онда оның жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

болады және шекаралық шарттарды қолдансақ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Бұл жағдайда да $C_1 = C_2 = 0$ болғандықтан $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз, яғни есептің меншікті функциялары болмайды.

3. $\lambda > 0$ оң сан болсын. Онда жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

түрде болады. Бұған шекаралық шарттарды қолдансақ

$$X(0) = C_1 = 0 \text{ және } X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

[4] Ш. Сахаев, Х. Хомпыш, Арнайы функциялар және олардың қолданулары, Алматы, Қазақ университеті, 2012. Оқу құралын қараңыз.

болады. Мұнда егер $C_2 = 0$ болса $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

және $C_2 \neq 0$ еркін тұрақты. Оны ыңғайылық үшін $C_2 = 1$ деп алуға болады. Соңғы теңдеуден λ тапсақ:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \ k = 1, 2, 3, ...$$

Демек, бұған сәйкес нөлдік емес шешімі (Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары)

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

болады.

Мысал 4.1.2 *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз:*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ X'(0) = 0, \ \ X'(l) = 0.$$

Шешуі. Бұл есеп (4.1.9)-(4.1.10) есебінің $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ кездегі дербес жағдайы. Алдыңғы мысалдағыдай талдай келе, бұл есептің меншікті сандары мен меншікті функциялары

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{l}x, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

болатынын көреміз. Бұл мысалда $\lambda_0 = 0$ саны да меншікті сан болады және оған сәйкес меншікті функция $X_0(x) = 1$ болады.

Дәл осы сияқты, алда жиі кездесетін бірнеше Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын кесте түрінде көрсетуге болады.

$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ есебінің меншікті мәндері мен меншікті функциялары. кесте-1.

Шекаралық шарттар	Меншікті сандар	Меншікті функциялар мен нормасы
$X(0) = 0,\ X(l) = 0$	$\lambda_k = \dfrac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, 3, \ldots$	$X_k(x) = \sin\dfrac{\pi k}{l}x,$ $\lVert X_k\rVert^2 = \dfrac{l}{2},\ k = 1, 2, 3, \ldots$
$X'(0) = 0,\ X(l) = 0$	$\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2l},$ $k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k(x) = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ $\lVert X_k\rVert^2 = \dfrac{l}{2},\ k = 0, 1, 2, \ldots$
$X(0) = 0,\ X'(l) = 0$	$\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2l},$ $k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k(x) = \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ $\lVert X_k\rVert^2 = \dfrac{l}{2},\ k = 0, 1, 2, \ldots$
$X'(0) = 0,\ X'(l) = 0$	$\lambda_k = \dfrac{\pi k}{l},\ k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k = \cos\dfrac{\pi k}{l}x,\ k = 0, 1, \ldots$ $\lVert X_0\rVert^2 = 1,$ $\lVert X_k\rVert^2 = \dfrac{l}{2},\ k = 1, 2, 3, \ldots$

Мысал 4.1.3 *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ X(0) = X(l),\ \ X'(0) = X'(l).$$

Шешуі. Бұл есептің де нөлдік емес шешімі тек $\lambda > 0$ жағдайда ғана бар болады және жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Бұған периодтық шарттарды қолдансақ

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l \\ C_2\sqrt{\lambda} = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}l\right) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l \\ C_2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}l\right) = -C_1 \sin\sqrt{\lambda}l. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден C_2 тауып, екінші теңдеуге қойсақ, нәтижеде

$$C_1\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}l\right) = 0$$

теңдеуін аламыз. Егер $C_1 = 0$ болса онда $C_2 = 0$ болады да $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан $C_i \neq 0,\ \ i = 1, 2$ және

$$1 - \cos\sqrt{\lambda}l = 0$$

теңдігінің орындалуы қажет. Ал бұл теңдеудің шешімдері тек $\sqrt{\lambda}l = \pm 2\pi k$ болса ғана бар болады, яғни меншікті сандары

$$\lambda_k = \left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Ал бұларға сәйкес меншікті функциялар

$$X_k(x) = C_1 \cos\frac{2\pi k}{l}x + C_2 \sin\frac{2\pi k}{l}x, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Мұндағы C_1 және C_2 еркін тұрақтылар болғандықтан, меншікті функциялар

$$X_{1k}(x) = \cos\frac{2\pi k}{l}x, \ \ X_{2k}(x) = \sin\frac{2\pi k}{l}x, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

жүйесі болады.

Мысал 4.1.4 *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз:*

$$\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ 0 < x < 1, \\ X(0) - X'(0) = 0, \ \ X(1) + X'(1) = 0. \end{array}$$

Шешуі. Бұл есептің де $\lambda \le 0$ жағдайда нөлдік шешімге ие болатынын оңай көруге болады. Айталық $\lambda > 0$ болсын. Жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Бұдан шекаралық шарттарды қолдансақ

$$\begin{cases} C_1 - C_2\sqrt{\lambda} = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Бірінші теңдеуден C_1 тауып, екіншісіне қойсақ:

$$C_2\left[2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + (1-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\right] = 0.$$

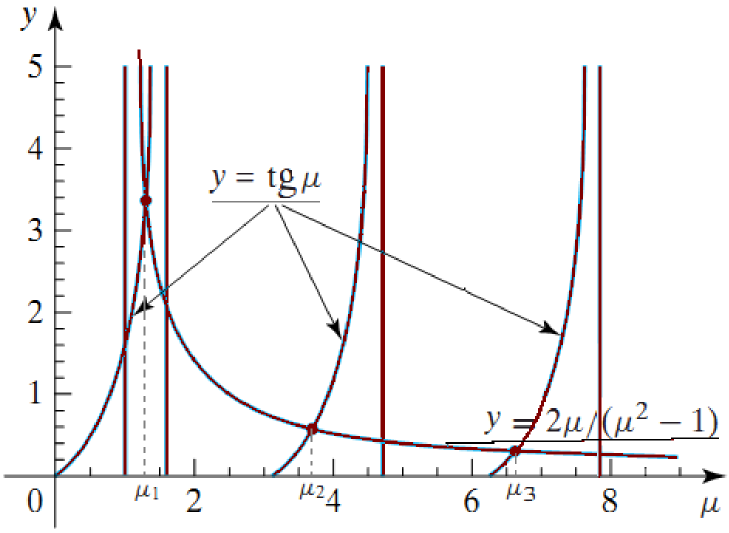
Бұдан $C_2 = 0$ болса нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан

$$2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + (1-\lambda)\sin\sqrt{\lambda} = 0$$

немесе $\mu = \sqrt{\lambda}$ белгілеу енгізсек, нәтижеде

$$tg\mu_k = \frac{2\mu_k}{\mu_k^2 - 1}$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешімдерін аналитикалық түрде таба алмаймыз. Алайда оның шексіз көп шешімдері болатындығын оның графигінен көреміз және оларды сандық шешу әдістері арқылы жуықтап табуға болады.



Графиктік тәсіл бойынша, $y = tg\mu$ және $y = \dfrac{2\mu}{\mu^2-1}$ функцияларының графиктерінің қиылысу нүктелері $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ ізделінді $tg\mu = \dfrac{2\mu}{\mu^2-1}$ теңдеуінің шешімдерін береді. Көріп тұрғанымыздай мұндай қиылысу нүктелері шексіз көп.

Меншікті сандар мен меншікті функциялардың негізгі қасиеттері.

Бұл бөлімде (4.1.9)-(4.1.10) Штурм-Лиувилль есебінің меншікті сандары мен меншікті функцияларының алда қолданатын негізгі қасиеттерін дәлелдеусіз келтіреміз. Дәлелдеулерін негізгі әдебиеттердің[5] кез-келгенінен табуға болады. Ал (4.1.9)-(4.1.10) есептің λ мәндерін сәйкес нөлге тең емес шешімдерінің бар екенін вариациялық немесе интегралдық теңдеулер әдістерімен дәлəлдеуге болады.

Қасиеттері:

1^0. Штурм-Лиувилль есебінің шексіз көп саналымды $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ меншікті сандары бар болады және оларды өсу ретімен орналастыруға болады

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots.$$

2^0. Меншікті сандар нақты және теріс емес

$$\lambda_k \geq 0, \quad \lambda_k \in R, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

3^0. Әрбір λ_k меншікті мәнге бір ғана (тұрақты санға көбейту дәлдігіне дейін) $X_k(x)$ меншікті функция сәйкес келеді. Басқаша айтқанда, егер λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функция $X_k(x)$ болса, онда $CX_k(x)$, $C = const$ функциясы

[5] .., .., .1972, ...?????

да сол λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функция болады. Егер λ_k меншікті мәнге сәйкес r сызықты тәуелсіз меншікті функциялар болса, онда олардың сызықты комбинациясы да меншікті функция болады.

4^0. Егер λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функция $X_k(x) = X_{1k}(x) + iX_{2k}(x)$ комплекс айнымалы функция болса, мұндағы i жорамал бірлік, онда оның нақты және жорамал бөліктері де сол λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функциялары болады.

5^0. Штурм-Лиувилль есебінің әртүрлі λ_k және λ_m меншікті мәндеріне сәйкес $X_k(x)$ және $X_m(x)$ меншікті функциялары $\rho(x)$ салмақ функциясына қатысты $[0, l]$ аралығында ортоганальды болады

$$\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \|X_k\|^2, & k = m. \end{cases}$$

6^0. В.А.Стеклов[6] теоремасы. (4.1.9) шекаралық шартты қанағаттандыратын кезкелген $f(x) \in C^2(0,l) \bigcap C^1[0,l]$ функциясы (4.1.9)-(4.1.10) есебінің $\{X_k\}$ меншікті функциялар жүйесі бойынша абсалютті және бірқалыпты жинақты Фурье қатарына жіктеледі, яғни

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \tag{4.1.11}$$

мұндағы

$$f_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \rho(x)f(x)X_k(x)dx$$

Фурье коэффициенті деп аталады және

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx.$$

4.1.3 Жаттығулар

Төмендегі Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын және нормасын анықтаңыз:

4.1.1 $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$
$X'(0) = X'(\pi) = 0.$

[6]Владимир Андреевич Стеклов, (1863–1926)–орыс математигі әрі механигі. Оның негізгі еңбектері математикалық физика теңдеулері, механика, жуықтау теориясы, асимптотикалық әдістер және ортогональ функциялар жүйесінің толықтығы теориясын зерттеуге арналған.

4.1.2 $\begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{array}$

4.1.3 $\begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(l) = 0, \quad \int\limits_0^l X(x)\,dx = 0. \end{array}$

4.1.4 $\begin{array}{l} X'' - 2X' + \left(\lambda^2 + 1\right) X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{array}$

Төмендегі меншікті мәндер және меншікті функцияларды табу есебін шешіңіз $(y(x) \neq 0, \quad \|y(x)\| = 1)$:

4.1.5 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{array} \right.$

4.1.6 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (-l,l) \\ y(-l) = 0, \quad y(l) = 0. \end{array} \right.$

4.1.7 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi) \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \end{array} \right.$

4.1.8 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y'(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{array} \right.$

4.1.9 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,l) \\ y(0) = 0, \quad \alpha y(l) + y'(l) = 0, \quad \alpha > 0. \end{array} \right.$

4.1.10 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,l) \\ y'(0) = 0, \quad y(l) + \beta y'(l) = 0, \quad \beta > 0. \end{array} \right.$

4.1.11 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \\ y(0) = \beta y'(0), \quad \beta > 0, \quad y(1) = 0. \end{array} \right.$

4.1.12 $\left\{ \begin{array}{l} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \\ y(0) = y'(0), \quad \beta > 0, \quad y(1) = y'(1). \end{array} \right.$

Лаплас операторы үшін $Q = \{(x,y) : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ тіктөртбұрышта берілген келесі есептің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табыңыз $(u(x,y) \neq 0, \quad \|u\| = 1)$:

4.1.13 $\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(x,y) = \lambda u(x,y), \quad (x,y) \in Q; \\ u(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ u_y(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 < x < a. \end{array} \right.$

4.1.14 $\begin{cases} -\Delta u\left(x,y\right)=\lambda u\left(x,y\right), & (x,y)\in Q; \\ u\left(0,y\right)=0, \quad u\left(a,y\right)=0, & 0<y<b, \\ u_y\left(x,0\right)=0, \quad u_y\left(x,b\right)=0, & 0<x<a. \end{cases}$

Лаплас операторы үшін $Q = \{(x,y,z) : 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c\}$ тіктөртбұрышты параллелепипедте берілген келесі есептің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табыңыз ($u(x,y,z)\neq 0,\quad \|u\|=1$):

4.1.15 $\begin{cases} -\Delta u\left(x,y,z\right)=\lambda u\left(x,y,z\right), & (x,y)\in Q; \\ u\left(x,y,z\right)=0, \quad (x,y,z)\in Q. \end{cases}$

4.1.16 $X_k\left(x\right) = \sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1,2,...,$ $0 \le x \le l$ *функциялар жүйесінің ортогоналдыгын дәлелдеңіз және* (X_k, X_k) *табыңыз.*

4.1.4 Жауаптары

4.1.1 $\lambda_0=0,\ \ X_0\left(x\right)=1,\ \left\|X_0\left(x\right)\right\|^2=\pi,$
$\lambda_k=k,\ \ X_k\left(x\right)=\cos kx,\ \left\|X_k\left(x\right)\right\|^2=\frac{\pi}{2},\ \ k=1,2,3,\ldots;$

4.1.2 $\lambda_0=0,\ \ X_0\left(x\right)=1,\ \left\|X_0\left(x\right)\right\|^2=2\pi,$
$\lambda_k=k,\ \ X_{1k}=\cos kx,\ \ X_{2k}=\sin kx,\ \ \left\|X_k\left(x\right)\right\|^2=\pi,\ \ k=1,2,3,\ldots;$

4.1.3 $\lambda_k=\frac{2\pi k}{l},\ \ X_k=\sin\frac{2\pi k}{l}x,\ \ \left\|X_k\left(x\right)\right\|^2=\frac{l}{2},\ \ k=1,2,3,\ldots;$

4.1.4 $\lambda_k=\pi k,\ \ X_k\left(x\right)=e^x\sin\pi kx,\ \ \left\|X_k\left(x\right)\right\|^2=\frac{e^2-1}{4},\ \ k=1,2,3,\ldots;$

4.1.5 $\lambda_k=\left(\pi k\right)^2,\ k=0,1,2,\ldots,\ y_0\left(x\right)=1,\ y_k\left(x\right)=\sqrt{2}\cos\pi kx,\ k=1,2,3,\ldots.$

4.1.6 $\lambda_k=\left(\dfrac{\pi k}{2l}\right)^2,\quad y_k\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{l}}\sin\dfrac{\pi k(x+l)}{2l},\ k=1,2,3,\ldots.$

4.1.7 $\lambda_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2,\quad y_k\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x,\ k=0,1,2,\ldots.$

4.1.8 $\lambda_k=\left(2k+1\right)^2,\quad y_k\left(x\right)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos\left(2k+1\right)x,\ k=0,1,2,\ldots.$

4.1.9 $\lambda_k = \left(\dfrac{\omega_k}{l}\right)^2,\quad y_k\left(x\right) = \sqrt{\dfrac{2\left(\alpha^2l^2+\omega_k^2\right)}{l\left(\alpha^2l^2+\alpha l+\omega_k^2\right)}}\sin\dfrac{\omega_k x}{l},\quad k = 1,2,3,\ldots,$
мұндағы $\omega_k>0$ *трансценденттік* $\tan\omega=-\dfrac{\omega}{\alpha l}$ *теңдеуінің* k*-шы түбірі.*
Үлкен k *мәндерінде:* $\lambda_k\approx\left[\dfrac{\pi}{l}\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\right]^2,\quad y_k\left(x\right)\approx\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi}{l}\left(k-\dfrac{1}{2}\right)x.$

4.1.10 $\lambda_k = \left(\frac{\omega_k}{l}\right)^2, \quad y_k(x) = \sqrt{\frac{2\left(l^2+\beta^2\omega_k^2\right)}{l\left(l^2+l\beta+\beta^2\omega_k^2\right)}} \cos\frac{\omega_k x}{l}, \quad k = 1,2,3,\ldots,$

мұндағы $\omega_k > 0$ *трансценденттік* $\tan\omega = \dfrac{l}{\beta\omega}$ *теңдеуінің* k*-шы түбірі.*

Үлкен k *мәндерінде:* $\lambda_k \approx \left(\dfrac{\pi(k-1)}{l}\right)^2, \quad y_k(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\dfrac{\pi(k-1)x}{l}.$

4.1.11 $\lambda_k = \omega_k^2, \quad y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{1+\beta^2\omega_k^2}}\left(\beta\omega_k\cos\omega_k x + \sin\omega_k x\right), \quad k = 1,2,3,\ldots,$

мұндағы $\omega_k > 0$ *трансценденттік* $\tan\omega = -\beta\omega$ *теңдеуінің* k*-шы түбірі.*

Үлкен k *мәндерінде:* $\lambda_k \approx \left[\pi\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\right]^2, \quad y_k(x) \approx \sqrt{2}\cos\pi\left(k-\dfrac{1}{2}\right)x.$

4.1.12 $\lambda_0 = -1, \quad y_0(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e\sinh 1}};$

$\lambda_k = (\pi k)^2, \quad y_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\pi^2k^2}}\left(\pi k\cos\pi kx + \sin\pi kx\right), \quad k = 1,2,3,\ldots.$

Үлкен k *мәндерінде:* $y_k(x) \approx \sqrt{2}\cos\pi kx.$

4.1.13 $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\pi(2m+1)}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2b}\right)^2, \quad m,n = 1,2,3,\ldots;$

$u_{mn}(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{2a}\cdot\cos\dfrac{\pi(2n+1)y}{2b}, \quad m,n = 1,2,3,\ldots.$

4.1.14 $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2, \quad m = 1,2,3,\ldots, \quad n = 0,1,2\ldots;$

$u_{m0}(x,y) = \sqrt{\dfrac{2}{ab}}\sin\dfrac{\pi mx}{a}, \quad u_{mn}(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}\sin\dfrac{\pi mx}{a}\cdot\cos\dfrac{\pi ny}{b}, \quad m,n = 1,2,3,\ldots.$

4.1.15 $\lambda_{klm} = \left(\dfrac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi l}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{c}\right)^2, \quad k,l,m = 1,2,3,\ldots;$

$u_{klm}(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{8}{abc}}\sin\dfrac{\pi kx}{a}\sin\dfrac{\pi ly}{b}\sin\dfrac{\pi mz}{c}, \quad k,l,m = 1,2,3,\ldots.$

4.1.16 $(X_k, X_k) = \|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots.$

4.2 Толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептер

Бұл бөлімде толқын теңдеуі үшін әртүрлі қойылымдағы бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісін қолданып шешу қарастырылады.

4.2.1 Біртекті толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептер

Біртекті толқын теңдеуі үшін нөлдік (біртекті) шекаралық шартпен берілген

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{4.2.12}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.2.13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l \tag{4.2.14}$$

аралас есепті шешуді қарастырайық.

Бұл (4.2.12)-(4.2.14) есебін Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісін қолданып шешеміз. Ол үшін келесі қадамдары жасаймыз:

1-қадам. *Жәй дифференциалдық теңдеулерге ажырату.* Бұл (4.2.12)-(4.2.14) есебінің нөлдік емес шешімін фурье әдісі бойынша

$$u(x,t) = X\,(x)\,T(t) \neq 0 \tag{4.2.15}$$

түрінде іздейміз. Бұдан x және t айнымалылары бойынша

$$u_{xx}(x,t) = X''\,(x)\,T(t),\ \ u_{tt}(x,t) = X\,(x)\,T''(t)$$

екінші ретті дербес туындыларын есептеп, (4.2.12) теңдеуге қоямыз

$$X\,(x)\,T''(t) = a^2 X''\,(x)\,T(t).$$

Бұл теңдеуді екі жағын (4.2.15) қабылдауымыз бойынша $a^2 X\,(x)\,T(t)$ бөлсек

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''\,(x)}{X\,(x)} \tag{4.2.16}$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктің оң жағы тек x айнымалысынан, ал сол жағы тек t айнымалысынан тәуелді. Егер бір айнымалысын тұрақтандырып екінші айнымалысын өзгертсек, мәселен x айнымалысын бекітіп қойып, t айнымалысын өзгертсек онда оның мәндері өзгеріссіз болар еді. Демек, (4.2.16) теңдік екі жағы қандайда бір тұрақты санға тең болған жағдайда ғана орындалады, яғни

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''\,(x)}{X\,(x)} = \mu. \tag{4.2.17}$$

Мұның екі жағын жеке-жеке μ -ға теңестіріп

$$T''(t) - \mu a^2 T(t) = 0 \qquad (4.2.18)$$

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \qquad (4.2.19)$$

екі жәй дифференциалдық теңдеулерге жіктейміз. Мұндағы μ кез-келген тұрақты сан.

2-қадам. Штурм-Лиувилль есебін шешу. Енді (4.2.15) түрдегі ізделінді шешімді (4.2.13) шекаралық шарттарға қоямыз

$$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0, \;\; u(l,t) = X(l)\,T(t) = 0.$$

Мұнда $T(t) \neq 0$ болатындықтан ((4.2.15)- қараңыз)

$$X(0) = 0, \;\; X(l) = 0 \qquad (4.2.20)$$

шекаралық шарттары алынады. Демек, $X(x)$ функциясы (4.2.19)-(4.2.20) есебінің нөлдік емес шешімі екен. Бұл алынған (4.2.19)-(4.2.20) есебінің μ тұрақтысына сәйкес нөлдік емес шешімін табу - *Штурм-Лиувилль есебі* деп аталады. Ал оның μ-ға сәйкес $X(x)$ нөлдік емес шешімі *меншікті функциялар*, ал сәйкес сол μ тұрақтылары *меншікті мәндері* деп аталады. Бұл есептің шешімдері μ тұрақтысына байланысты. Сол жағдайларды қарастырайық:

1. Айталық, $\mu = 0$ болсын. Онда (4.2.19) теңдеудің жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Бұған (4.2.20) шарттарды қолдансақ, онда $C_1 = C_2 = 0$ болады, демек $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімді аламыз.

2. $\mu = \lambda^2 > 0$ оң болсын. Онда (4.2.19) теңдеудің шешімі

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Егер бұған (4.2.20) шарттарды қолдансақ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұдан $C_1 = C_2 = 0$ болады, яғни бұл жағдайда да $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз.

3. $\mu = -\lambda^2 < 0$ теріс сан болсын. Бұл жағдайда (4.2.19) теңдеудің жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Бұған (4.2.20) шарттарды қолдансақ $X(0) = C_1 = 0$ және $X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0$ болады. Мұнда егер $C_2 = 0$ болса $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан

C_2 еркін тұрақты болғандықтан оны ыңғайылық үшін $C_2 = 1$ деп алып λ табамыз

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \; k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.21}$$

Демек, (4.2.19)-(4.2.20) есебінің нөлдік емес шешімі (Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары) тек $\mu = -\lambda^2 < 0$ теріс сан болған кезде ғана бар болады екен және олар

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.22}$$

тең болады.

Енді жоғарыдағы (4.2.18) жәй дифференциалдық теңдеудің $\mu = -\lambda_k^2$ меншікті мәндеріне сәйкес жалпы шешімін табамыз

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi k}{l}at + B_k \sin\frac{\pi k}{l}at, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2.23}$$

мұнда A_k, B_k еркін тұрақты сандар, ал индекс қойылу себебі әрбір λ_k үшін жеке шешімдер аламыз. Ал (4.2.15) келісім бойынша есептің әрбір λ_k сәйкес

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{\pi k}{l}at + B_k \sin\frac{\pi k}{l}at\right)\sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

дербес шешімдерін аламыз. (4.2.12)-(4.2.14) есебі сызықты болғандықтан, суперпозиция қағидасы бойынша жалпы шешімі

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{\pi k}{l}at + B_k \sin\frac{\pi k}{l}at\right)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.2.24}$$

Мұндағы A_k, B_k еркін тұрақтыларын анықтау үшін есептегі (4.2.14) бастапқы шарттарды қолданамыз, яғни (4.2.24) өрнекке $t = 0$ мәнін қойсақ

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

болады, ал екінші жағынан (4.2.14) бойынша $u(x,0) = \varphi(x)$. Демек, соңғы екі теңдіктен

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \varphi(x). \tag{4.2.25}$$

Енді (4.2.24) өрнектен t бойынша дербес туындысын

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi k a}{l}A_k \sin\frac{\pi k}{l}at + \frac{\pi k a}{l}B_k \cos\frac{\pi k}{l}at\right)\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{4.2.26}$$

анықтап, $t=0$ мәнін қойсақ

$$u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}B_k\sin\frac{\pi k}{l}x$$

теңдігіне келеміз. Ал (4.2.14) екінші шарты бойынша $u_t(x,0)=\psi(x)$. Демек,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}B_k\sin\frac{\pi k}{l}x=\psi(x). \tag{4.2.27}$$

Екінші жағынан бұл алынған (4.2.25), (4.2.27) теңдіктер сәйкес $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функцияларының синус бойынша Фурье қатарына жіктелулері. Олай болса, математикалық анализ курсынан белгілі[7] Фурье қатарына жіктеу теориясы бойынша, A_k, B_k Фурье коэффициенттерін сәйкес

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad B_k=\frac{2}{\pi ka}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \tag{4.2.28}$$

формулаларымен анықтаймыз.

Олай болса, (4.2.12)-(4.2.14) бастапқы-шеттік есептің шешімі әзірше формалды түрде (4.2.24) қатарымен өрнектеледі және ондағы A_k, B_k коэффициенттері (4.2.28) интегралдарымен есептелінеді. Енді осы формалдық қай кезде қисынды болатындығын тексерейік.

3-қадам. (4.2.24) **шешімді тексеру.**

1. Алдымен формалды түрде құрылған (4.2.24) функционалдық қатарды бірқалыпты жинақтылыққа зерттейік. Ол келесі түрдегі сандық қатарға мажорантталанады

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|A_k|+\frac{|B_k|}{k}\right). \tag{4.2.29}$$

Бұл қатардың жинақты болуы үшін

$$\varphi(x)\in C^1[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi(l)=0,\qquad \psi(x)\in C[0,l]. \tag{4.2.30}$$

орындалуы жеткілікті.

2. Бастапқы шарт орынды болуы үшін (4.2.25) қатардың бірқалыпты жинақтылығы қажет. Ол үшін оны мажоранттайтын

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k|A_k|+|B_k|)$$

---

[7] Мәселен, $\varphi(x)$ функциясының Фурье қатарына жіктелуі $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x$ болса, онда Фурье коэффициенті $\varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ k=1,2,\ldots$.

сандық қатары жинақты болуы жеткілікті. Ал бұл қатар жинақталуы үшін

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(x) \in C^1[0,l], \quad \psi(0) = \psi(l) = 0 \quad (4.2.31)$$

шартының орындалуы жеткілікті.

3. Енді (4.2.24) қатарының әрбір мүшесі x және t бойынша екі рет дифференциалданғаны керек. Ол үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 |A_k| + k |B_k|\right)$$

қатардың жинақталуы жеткілікті. Бұл қатардың жинақталуы үшін

$$\begin{gathered} \varphi(x) \in C^3[0,l], \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \\ \psi(x) \in C^2[0,l], \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{gathered} \quad (4.2.32)$$

орындалуы жеткілікті. Бұл (4.2.32) шарт жоғарыдағы (4.2.30)-(4.2.31) шарттарды жалпылайды.

Қорытынды. Жоғарыдағы формалды түрде құрылған (4.2.24) қатар (4.2.12)-(4.2.14) есебінің шешімі болуы үшін φ және ψ функциялары (4.2.32) шартын қанағаттандыруы қажетті.

Ескерту 4.2.1 *Егер жоғарыдағы (4.2.13) Дирихле шарттарының орнында Нейман шарты немесе үшінші шекаралық шарттар берілсе, онда меншікті мәндер мен меншікті функциялары өзгешелікте болады. Ал қалған қадамдар дәл осындай жолмен жүріледі.*

Мәселен, шекаралық шарттар

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) = 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \;\; u_x(l,t) = 0, \end{aligned}$$

түрдегі шарттардың бірімен берілсе, онда оларға сәйкес меншікті мәндер мен меншікті функциялар:

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \;\; X_k = \sin\frac{(2k+1)}{2l}\pi x, \;\; k = 0, 1, ... \\ &\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \;\; X_k = \cos\frac{(2k+1)}{2l}\pi x, \;\; k = 0, 1, ... \\ &\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad X_k = \cos\frac{\pi k}{l} x, \;\; k = 0, 1, ... \end{aligned}$$

Мысал 4.2.1 *Біртекті толқын теңдеуі үшін бастапқы–шеттік есебін шешіңіз.*

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = x - x^2, \;\; 0 \le x \le 1.$$

Шешуі. Мұнда шекаралық шарттар Дирихле шартымен берілгендіктен, сәйкес меншікті сандар мен меншікті функциялар

$$\lambda_k = \left.\frac{\pi k}{l}\right|_{l=1} = \pi k, \quad X_k\left(x\right) = \sin \pi k x, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

болады. Сондай ақ, $l = 1$, $a = 2$, $\varphi\left(x\right) = 0$, $\psi\left(x\right) = x(1-x)$ болғандықтан (4.2.28) формуладан $A_k = 0$, ал B_k коэффициенті келесі түрде есептелінеді:

$$B_k = \frac{1}{\pi k}\int\limits_0^1 (x - x^2)\sin k\pi x dx = \left| \begin{array}{c} u = (x - x^2), \;\; du = (1 - 2x)\,dx, \\ dv = \sin k\pi x dx, \;\; v = -\dfrac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{\pi k}\left(-\left.\frac{\cos k\pi x}{k\pi}(x - x^2)\right|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^1 (1 - 2x)\cos k\pi x dx \right) =$$

$$\left| \begin{array}{c} u = 1 - 2x, \;\; du = -2dx, \\ dv = \cos k\pi x dx, \;\; v = \dfrac{\sin k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| = (1 - 2x)\left.\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}\right|_0^1 + \frac{2}{k^3\pi^3}\int\limits_0^1 \sin k\pi x dx =$$

$$-\left.\frac{2\cos k\pi x}{(k\pi)^4}\right|_0^1 = -\frac{2}{k^4\pi^4}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{4}{(2n+1)^4\pi^4}, & k = 2n + 1. \end{cases}$$

Олай болса, (4.2.24) бойынша шешім:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\left(2n+1\right)^4 \pi^4} \sin 2\pi \left(2n+1\right) t \cdot \sin \pi \left(2n+1\right) x.$$

Мысал 4.2.2 *Біртекті толқын теңдеуі үшін бастапқы–шеттік есебін шешіңіз.*

$$u_{tt} = 81u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{5}{2}, \quad t > 0,$$

$$u\left(0,t\right) = 0, \;\; u'_x\left(\frac{5}{2}, t\right) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \pi \sin 3\pi x, \;\; u_t(x,0) = 9\pi \sin \pi x, \quad 0 \le x \le \frac{5}{2}.$$

Шешуі. Мұндай шекаралық шарттарға сәйкес меншікті сандар мен меншікті функциялар

$$\lambda_k = \left.\frac{\left(2k+1\right)\pi}{2l}\right|_{l=\frac{5}{2}} = \frac{\left(2k+1\right)\pi}{5}, \quad X_k = \sin\frac{\left(2k+1\right)\pi}{5}x, \quad k = 0, 1, ...$$

Ал (4.2.24) бойынша шешімді

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{9(2k+1)\pi}{5}t+B_k\sin\frac{9(2k+1)\pi}{5}t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x$$

түрде іздейміз. Мұндағы A_k, ал B_k коэффициенттерін табу үшін бастапқы шарттарды қолданамыз. $u(x,0)=\pi\sin 3\pi x$ шарты бойынша

$$u\left(x,0\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x=\pi\sin 3\pi x.$$

Бұдан, меншікті функциялардың ортогоналдық қасиетін ескеріп, фурье коэффициенттері ретінде A_k, коэффициенттерін есептейміз:

$$A_k=\frac{4}{5}\int\limits_0^{\frac{5}{2}}\pi\sin 3\pi x\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}xdx=\begin{cases}\pi, & k=7,\\ 0, & k\neq 7.\end{cases}$$

Ал $u_t(x,0)=9\pi\sin\pi x$ екінші бастапқы шарты бойынша

$$u_t\left(x,0\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9(2k+1)\pi}{5}B_k\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x=9\sin\pi x.$$

Бұдан

$$\frac{(2k+1)\pi}{5}B_k=\frac{4}{5}\int\limits_0^{\frac{5}{2}}\pi\sin\pi x\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}xdx=\begin{cases}\pi, & k=2,\\ 0, & k\neq 2.\end{cases}$$

немесе $B_k=\begin{cases}1, & k=2,\\ 0, & k\neq 2.\end{cases}$

Демек, шешім $u\left(x,t\right)=\sin 9\pi t\sin\pi x+\pi\cos 27\pi t\sin 3\pi x$.

4.2.2 Біртекті емес толқын теңдеуі үшін біртекті шекаралық шартты бастапқы-шеттік есептер

Біртекті шекаралық шарттармен берілген, біртекті емес толқын теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебін қарастыралық:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f\left(x,t\right),\ 0<x<l,\ t>0, \tag{4.2.33}$$

$$u\left(0,t\right)=u\left(l,t\right)=0,\ \ t>0, \tag{4.2.34}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ \ 0\leq x\leq l. \tag{4.2.35}$$

Бұл есептің шешімін (4.2.34) шекаралық шартына сәйкес Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциясы (біздің жағдайда олар $X_k = \sin \frac{\pi k}{l}x$, 91–беттегі №1–кестені қараңыз) бойынша Фурье қатары түрінде іздейміз:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{4.2.36}$$

мұндағы $T_k\left(t\right)$ белгісіз функциялар. Оларды анықтау үшін алдымен есептегі белгілі $f\left(x,t\right)$, $\varphi\left(x\right)$, $\psi(x)$ функцияларын меншікті функциялар бойынша Фурье қатарына жіктейміз, яғни:

$$f\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad f_k\left(t\right)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f\left(x,t\right)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ k=1,2,... \tag{4.2.37}$$

$$\varphi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad \varphi_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi\left(x\right)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ k=1,2,... \tag{4.2.38}$$

$$\psi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad \psi_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi\left(x\right)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ k=1,2,... \tag{4.2.39}$$

Енді (4.2.36) қатардың (әзірше формальды түрде) t және x айнымалылары бойынша екінші ретті дербес туындыларын тауып, (4.2.37) қатармен бірге (4.2.33) теңдеуге қойсақ:

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k''\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2T_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x=f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Бұдан

$$T_k''\left(t\right)+\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2T_k\left(t\right)=f_k\left(t\right),\ k=1,2,3,... \tag{4.2.40}$$

екінші ретті біртекті емес жай дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Енді (4.2.36) қатарды (4.2.35) бастапқы шарттарға қойсақ, онда (4.2.38), (4.2.39) жіктелулері бойынша

$$u\left(x,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(0\right)\sin\frac{\pi k}{l}x=\varphi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

$$u_t\left(x,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'\left(0\right)\sin\frac{\pi k}{l}x=\psi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x$$

теңдіктерін аламыз. Ал бұл теңдіктерден (4.2.40) теңдеу үшін

$$T_k(0) = \varphi_k, \;\; T_k'(0) = \psi_k, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.41}$$

бастапқы шарттарын аламыз. Бұл (4.2.40)-(4.2.41) Коши есебі жәй дифференциалдық теңдеулер теориясынан белгілі бірмәнді шешіледі. Олай болса $T_k(t)$ функцияларын анықтап, (4.2.36) қатарға қойсақ, ізделінді $u(x,t)$ шешімді бірмәнді анықтаймыз.

Мұнда байқағанымыз, фурье әдісінің қолдану мағынасы (4.2.34) шекаралық шарттарға тікелей байланысты. Егер (4.2.34) шарттың орнында Нейман, немесе аралас шекаралық шарттар болса, онда (4.2.36)-(4.2.39) өрнектер бұларға сәйкес меншікті функциялар бойынша өзгереді.
Кейде (4.2.33)-(4.2.35) есебін редукция әдісі арқылы біртекті бастапқы шарттармен қойылған біртекті емес теңдеу үшін аралас есеппен, теңдеуі біртекті, бірақ бастапқы шарттары біртекті емес есептерге жіктеп шешу кейбір есептеулерді ((4.2.40)-(4.2.41) есебін) жеңілдетеді.

Мысал 4.2.3 *Келесі біртекті емес толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есепті шеш.*

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2, t \in (0,\infty), x \in (0,\pi),$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t \in (0,\infty),$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \sin x, x \in [0,\pi].$$

Шешуі. Шекаралық шарттарға сәйкес меншікті функциялар $X_k = \sin kx$. Олай болса шешімді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx \tag{4.2.42}$$

түрінде іздейміз. Алдымен $f(x,t) = \frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \sin x$ функцияларын Фурье қатарына жіктеп, (4.2.37)-(4.2.39) формулалары бойынша Фурье коэффициенттерін есептейміз:

$$f(x,t) = \frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx,$$

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2\right) \sin kx = \frac{4}{\pi k}\left[3(-1)^k t - 1\right], \; k = 1, 2, ...,$$

$$\psi(x) = \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin kx,$$

$$\psi_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \sin kx = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_k = 0.$$

Бұларды берілген есепке қойсақ, нәтижеде

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = \frac{4}{\pi k}\left[3(-1)^k t - 1\right], \; T_k(0) = 0, \;\; T_k'(0) = 0, \;\; k = 2, 3, ..., \quad (4.2.43)$$

$$T_1''(t) + T_1(t) = -\frac{4}{\pi}[3t + 1], \; T_1(0) = 0, \;\; T_1'(0) = 1 \qquad (4.2.44)$$

Коши есептерін аламыз.
(4.2.43) есепті жеке қарастырайық. (4.2.43) теңдеудің жалпы шешімі

$$T_k(t) = T_k^0 + \tilde{T}_k(t)$$

болады, мұндағы T_k^0 оған сәйкес біртекті теңдеуінің жалпы шешімі

$$T_k^0(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

ал $\tilde{T}_k(t)$ бір дербес шешімі. Оны $\tilde{T}_k(t) = at + b$ түрінде іздейміз және оны теңдеуге қойып, a, b белгісіз тұрақтыларын анықтап, дербес шешімін табамыз, яғни

$$a = \frac{12(-1)^k}{\pi k^3}, \;\; b = \frac{4}{\pi k^3} \quad \Rightarrow \tilde{T}_k(t) = \frac{4}{\pi k^3}\left(3(-1)^k t - 1\right).$$

Демек, (4.2.43) теңдеудің жалпы шешімі

$$T_k(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{4}{\pi k^3}\left(3(-1)^k t - 1\right).$$

Бұған, бастапқы шарттарды қолданып, (4.2.43) Коши есебінің шешімін аламыз

$$T_k(t) = \frac{4}{\pi k^3}\left[\cos kt - \frac{3(-1)^k}{k}\sin kt + 3(-1)^k t - 1\right], \;\; k = 2, 3, ... \qquad (4.2.45)$$

Дәл осылайша, (4.2.44) есептің шешімін тапсақ

$$T_1(t) = \sin t + \frac{4}{\pi}[\cos t + 3\sin t - 3t - 1]. \qquad (4.2.46)$$

Бұл анықталған (4.2.45), (4.2.46) шешімдерді жоғарыдағы (4.2.42) қатарға қойып, k бойынша біріктіріп ықшамдасақ, ізделінді шешімді аламыз

$$u(x,t) = \sin t \sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[\cos kt - \frac{3(-1)^k}{k}\sin kt + 3(-1)^k t - 1\right]\sin kx.$$

4.2.3 Толқын теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған бастапқы шеттік есептер

Біртекті емес шекаралық шарттармен берілген, біртекті емес толқын теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған келесі бастапқы–шеттік есепті қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t), 0 < x < l,\ t > 0 \tag{4.2.47}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),\ t > 0 \tag{4.2.48}$$

$$u(x,0) = \Phi(x),\ u_t(x,0) = \Psi(x),\ 0 \le x \le l. \tag{4.2.49}$$

Бұл есепті шешу әдісінің басты мақсаты (4.2.48) шекаралық шарттарды біртекті түрге келтіру арқылы жоғарыдағы (4.2.33)-(4.2.35) тәрізді есебін алу. Ол үшін шешімді

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{4.2.50}$$

түрде іздейміз. Мұндағы $\omega(x,t)$ функциясы (4.2.48) бертекті емес

$$\omega(0,t) = \mu(t),\ \omega(l,t) = \nu(t),$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын еркін түрде таңдап алынған функция. Бұл (4.2.50) түрдегі шешімді берілген (4.2.47)-(4.2.48) есебіне қойсақ, нәтижеде белгісіз $v(x,t)$ функциясына қатысты біртекті шекаралық шартпен берілген

$$\begin{array}{l} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0,\ \ t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x),\ \ v_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le l, \end{array} \tag{4.2.51}$$

бастапқы-шеттік есебін аламыз. Мұндағы

$$f(x,t) = F(x,t) - [\omega_{tt} - a^2\omega_{xx}],\quad \varphi(x) = \Phi(x) - \omega(x,0),\quad \psi(x) = \Psi(x) - \omega_t(x,0).$$

Бұл (4.2.51) есеп алдыңғы пункте қарастырылған (4.2.33)-(4.2.35) есебі тәрізді. Олай болса, жоғарыда көрсетілген әдістер бойынша оның шешімін тауып, $\omega(x,t)$ функциясын қоссақ (4.2.47)-(4.2.49) есебінің шешімін аламыз.

Ескерту 4.2.2 *Жоғарыдағы (4.2.48) шарттар үшін $\omega(x,t)$ функциясын*

$$\omega(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}(\nu(t) - \mu(t))$$

түрде алуға болады.

Егер (4.2.48) шарттың орнында Нейман немесе басқада шекаралалық шарттар болса, онда басқа да жолмен $\omega(x,t)$ функциясын қалауымызша таңдап аламыз.

Мысал 4.2.4 *Келесі біртекті емес шарттармен берілген толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есепті шеш.*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \tag{4.2.52}$$

$$u\,(0, t) = t^2, \ u\,(l, t) = t^3, \ t > 0, \tag{4.2.53}$$

$$u\,(x, 0) = 0, \ u_t\,(x, 0) = \sin x, \ 0 \leq x \leq \pi. \tag{4.2.54}$$

Шешімді $u\,(x, t) = v\,(x, t) + \omega\,(x, t)$ түрде іздейміз. Мұнда $\omega\,(x, t)$ функциясын

$$\omega\,(x, t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) t^2 + \frac{x}{\pi} t^3$$

түрде таңдап алуға болады (4.2.2-Ескертуді қараңыз). Олай болса

$$u\,(x, t) = v\,(x, t) + \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) t^2 + \frac{x}{\pi} t^3$$

берілген есепке қойып, $v\,(x, t)$ функциясы үшін

$$v_{tt} = v_{xx} + \frac{2x}{\pi}\,(1 - 3t) - 2, t \in (0, \infty), x \in (0, \pi),$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, t \in (0, \infty),$$

$$v(x, 0) = 0, v_t\,(x, 0) = \sin x, x \in [0, \pi]\,.$$

есебін аламыз. Бұл есеп жоғарыдағы 4.2.3–мысалда қарастырылған және оның шешімі

$$v(x, t) = \sin t \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\cos kt - \frac{3(-1)^k}{k} \sin kt + 3(-1)^k t - 1\right] \sin kx.$$

Олай болса, ізделінді шешім

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) t^2 + \frac{x}{\pi} t^3 + \sin t \sin x +$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\cos kt - \frac{3(-1)^k}{k} \sin kt + 3(-1)^k t - 1\right] \sin kx.$$

4.2.4 Толқын теңдеуі үшін стационарлы біртекті емес бастапқы-шеттік есептер

Егер (4.2.47)-(4.2.49) есептің берілгендері уақыттан тәуелсіз функциялар болса, мұндай есеп стационарлы біртекті емес есеп деп талады және оны төмендегі түрде шешу жеңіл болады.

Есептің қойылымы:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), \; 0 < x < l, \; t > 0, \tag{4.2.55}$$

$$u(0,t) = u_1 = const, \;\; u(l,t) = u_2 = const, \;\; t > 0, \tag{4.2.56}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l. \tag{4.2.57}$$

Шешуі. Есептің шешімін

$$u(x,t) = v(x,t) + q(x) \tag{4.2.58}$$

түрінде іздейміз. Мұның қажетті $u_{tt} = v_{tt}, \;\; u_{xx} = v_{xx} + q''(x)$ туындыларын тауып, (4.2.55)-(4.2.57) есепке қойсақ

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 q'' + f(x), \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ &v(0,t) = u_1 - q(0), \;\; v(l,t) = u_2 - q(l), \;\; t > 0, \\ &v(x,0) = \varphi(x) - q(x), \;\; v_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l \end{aligned} \tag{4.2.59}$$

есебін аламыз. Бұл есеп сызықты болғандықтан, оны келесі екі есепке ажыратамыз, яғни $q(x)$ функциясы

$$a^2 q'' + f(x) = 0, \;\; q(0) = u_1, \;\; q(l) = u_2 \tag{4.2.60}$$

жәй дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің шешімі, ал $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 v_{xx}, \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ &v(0,t) = v(l,t) = 0, \;\; t > 0, \\ &v(x,0) = \varphi(x) - q(x), \;\; v_t(x,0) = \psi(x) - q(x), \;\; 0 \le x \le l, \end{aligned} \tag{4.2.61}$$

бастапқы–шеттік есептің шешімі. Алдымен (4.2.60) есептің $q(x)$ шешімін анықтап, оны (4.2.61) есептегі бастапқы шарттарға қойып, 4.2.1–бөлімдегідей $v(x,t)$ шешімін табамыз. Бұл екі есептің шешімін қосып, ізделінді есептің шешімін аламыз.

Мысал 4.2.5 *Келесі стацинорлы біртекті емес толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есепті шеш.*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 9\sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u\left(0,t\right) = 1,\ u_x\left(\pi,t\right) = 1, \quad t > 0, \\ u\left(x,0\right) = x+1,\ u_t\left(x,0\right) = 0,\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Жоғарыды айтылғандайын, шешімді $u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right) + q\left(x\right)$ түрінде іздейміз, мұнда

$$q\left(x\right): \quad q'' - 9\sin\frac{3x}{2} = 0,\ q\left(0\right) = 1,\ q'\left(\pi\right) = 1.$$

есептің шешімі және оны төмендегіше анықтаймыз:

$$q'' = 9\sin\frac{3x}{2} \quad \Rightarrow \quad q' = -6\cos\frac{3x}{2} + c_1 \ \Rightarrow$$

$$q\left(x\right) = -4\sin\frac{3x}{2} + c_1x + c_2 \quad \Rightarrow \quad q\left(0\right) = c_2 = 1,\ q'\left(\pi\right) = c_1 = 1$$

$$q\left(x\right) = -4\sin\frac{3x}{2} + x + 1.$$

Ал $v\left(x,t\right)$ функциясы

$$\begin{array}{l} v_t = v_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ v\left(0,t\right) = v_x\left(\pi,t\right) = 0, \ \ t > 0, \\ v\left(x,0\right) = x + 1 - q(x) = 4\sin\dfrac{3x}{2},\ \ v_t(x,0) = 0. \end{array}$$

есептің шешімі. Алдыңғы бөлімдегідей оның шешімін тапсақ

$$v\left(x,t\right) = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{3x}{2}.$$

Демек, берілген есептің шешімі

$$u\left(x,t\right) = 4\left(\cos\frac{3t}{2} - 1\right)\sin\frac{3x}{2} + x + 1.$$

4.2.5 Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі тербеліс теңдеуі үшін бастапқы–шеттік есептерді шешіңіздер.

4.2.1 $$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0, \ \ t > 0; \\ u\left(x,0\right) = 0, \ \ u_t\left(x,0\right) = \sin\frac{2\pi x}{l}, \ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

4.2.2 $$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \quad 0 < x < 8,\ t > 0; \\ u\left(0,t\right) = 0, \ \ u\left(8,t\right) = 0, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = 31\sin\pi x, \ \ u_t(x,0) = 4\pi\sin\pi x, \ \ 0 \le x \le 8. \end{cases}$$

4.2.3 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \sin \frac{5\pi x}{2l}, \ \ u_t(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.4 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x, \ \ u_t(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le l; \end{cases}$

4.2.5 $\begin{cases} u_{tt} = 36 u_{xx}, \ \ 0 < x < 4, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 4t, \ \ u(4,t) = 8t, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 24\pi \sin 4\pi x + 4 + x, \ \ 0 \le x \le 4; \end{cases}$

4.2.6 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = t, \ \ u_x(\pi,t) = 1, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \sin \frac{x}{2}, \ \ u_t(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le \pi; \end{cases}$

4.2.7 $\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} - u, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 4\sin^4 x, \ \ 0 \le x \le \pi; \end{cases}$

4.2.8 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t} \sin \frac{\pi x}{l}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.9 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ u_x(l,t) = \dfrac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t, \ \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = -2\cos \frac{2x}{a}, \ \ 0 \le x \le l; \end{cases}$

4.2.10 $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u(x,y,t), \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \ \ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 3\sin x \sin 2y, \ \ u_t(x,y,0) = 5\sin 3x \sin 4y, \ \ 0 \le x, y \le \pi. \end{cases}$

4.2.11 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \ \ h > 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le l; \end{cases}$

4.2.12 $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ 0 < x < 2, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = -8, \ \ u(2,t) = 2, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \sin 6\pi x - 8 + 5x, \ \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 2; \end{cases}$

4.2.13 *Ұштары мықтап бекітілген, ұзындығы l - шектің көлденең тербелісінің есебін шешіңіз, егер ол бастапқы мезетте тыныштық жағдайда болса ($u(x,0) = 0$) және бастапқы жылдамдығы*

$$u_t(x,0) = \begin{cases} v_0, \ \ \textit{егер} \ x \in [\alpha, \beta] \\ 0, \ \ \textit{егер} \ x \overline{\in} [\alpha, \beta] \end{cases}$$

формуламен берілсе, мұндағы $0 \le \alpha < \beta \le l$, $v_0 = const$.

4.2.14 *Шекарасында мықтап бекітілген* $(0 \le x \le p,\ 0 \le y \le p)$ *квадрат мембрананың еркін тербелісінің есебін шешіңіз, егер бастапқы жағдайы мен бастапқы жылдамдығы* $u(x,y,0) = A\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}$, $u_t(x,y,0) = 0$ *белгілі болса.*

4.2.15 $\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\left(\sin x - x\right), \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u\left(0,t\right) = 3, \ \ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + t, \ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 3, \ \ u_t\left(x,0\right) = x + \sin x, \ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

4.2.6 Жауаптары

4.2.1 $u\left(x,t\right) = \frac{l}{2a\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2a\pi t}{l}$.

4.2.2 $u(x,t) = 31\cos 4\pi t\sin\pi x + \sin 4\pi t\sin\pi x$.

4.2.3 $u\left(x,t\right) = \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}\sin\frac{a\pi t}{2l} + \sin\frac{5\pi x}{2l}\cos\frac{5a\pi t}{2l}$.

4.2.4 $u\left(x,t\right) = t + \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2k+1\right)^2}\cos\dfrac{a\left(2k+1\right)\pi t}{l}\cos\dfrac{\left(2k+1\right)\pi x}{l}$

4.2.5 $u\left(x,t\right) = 4t + xt + \sin 24\pi t\sin 4\pi x$.

4.2.6 $u\left(x,t\right) = x + t + \cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{\left(2k+1\right)^2}\cos\dfrac{\left(2k+1\right)t}{2}\sin\dfrac{\left(2k+1\right)x}{2}$.

4.2.7 $u\left(x,t\right) = \frac{3}{2}\sin t - \frac{2}{3}\sin 3t\cos 2x + \frac{1}{2\sqrt{33}}\sin\sqrt{33}t\cos 4x$.

4.2.8 $u\left(x,t\right) = \frac{A}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{l} + \frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}$.

4.2.9 $u\left(x,t\right) = \dfrac{t}{2} - \left(\dfrac{1}{4} + \cos\dfrac{2x}{a}\right)\sin 2t$

4.2.10 $u\left(x,t\right) = 3\cos\sqrt{5}t\sin x\sin 2y + \sin 5t\sin 3x\sin 4y$.

4.2.11 $u\left(x,t\right) = \dfrac{2h}{a}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+\lambda_k}}{\lambda_k\left(l\left(h^2+\lambda_k\right)+h\right)}\sin a\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_k}x$, *мұндағы* λ_k *сандары* $\sqrt{\lambda}tg\sqrt{\lambda}l = h$ *теңдеуінің оң түбірлері.*

4.2.12 $u\left(x,t\right) = 5x - 8 + \cos 18\pi t\sin 6\pi x$.

4.2.13 $u(x,t) = \dfrac{2lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}}{k^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}$.

4.2.14 $u(x,y,t) = A\cos\frac{a\pi\sqrt{2}}{p}t\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}$.

4.2.15 $u\left(x,t\right) = 3 + x\left(t + t^2\right) + \left(5te^t - 8e^t + 4t + 8\right)\sin x$.

4.3 Жылу өткізгіш теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептер

Бұл бөлімде Фурье әдісін қолданып жылу өткізгіш үшін әртүрлі қойылымдағы бастапқы-шеттік есептерді шешу қарастырылады.

4.3.1 Біртекті жылу өткізгіш теңдеуі үшін Фурье әдісі.

Бір өлшемді (1D) жылу өткізгіш теңдеуі үшін біртекті бірінші шекаралық (Дирихле) шартымен берілген

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\, t > 0, \tag{4.3.62}$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0, \quad t > 0 \tag{4.3.63}$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad 0 \le x \le l \tag{4.3.64}$$

бастапқы-шеттік есептің $u\left(x,t\right) \in C^{2,1}_{x,t}\left(Q_t\right) \cap C(\overline{Q_t})$ шешімін табу керек.

Бұл есепті шешу үшін Фурьенің айнымалылар бойынша жіктеу әдісін қолданамыз, яғни $u\left(x,t\right) \neq 0$ нөлдік емес шешімді

$$u\left(x,t\right) = T\left(t\right) X\left(x\right) \neq 0 \tag{4.3.65}$$

түрінде іздейміз. Бұдан

$$u_t = T^{'}\left(t\right) X\left(x\right), \; u_x = T\left(t\right) X^{'}\left(x\right), \, u_{xx} = TX^{''}\left(x\right)$$

туындыларын тауып, (4.3.62) теңдеуге қойсақ

$$T'\left(t\right) X\left(x\right) = a^2 T\left(t\right) X''\left(x\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T'\left(t\right)}{a^2 T\left(t\right)} = \frac{X''(x)}{X\left(x\right)} = -\lambda^2$$

немесе

$$T'\left(t\right) + \left(a\lambda\right)^2 T = 0 \tag{4.3.66}$$

және

$$X''\left(x\right) + \lambda^2 X\left(x\right) = 0 \tag{4.3.67}$$

екі жәй дифференциалдық (ЖДТ) теңдеуге ажыратамыз. (4.3.65)–шешімді (4.3.63) шекаралық шарттарға қойсақ:

$$u\left(0,t\right) = X\left(0\right) T\left(t\right) = 0, \quad u\left(l,t\right) = X\left(l\right) T\left(t\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$X(0) = 0, \ X(l) = 0 \tag{4.3.68}$$

шарттарын аламыз. Бұл (4.3.67)-(4.3.68) – Штурм-Лиувиль есебі. Оның меншікті мәндері мен меншікті функциялары

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \ X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x, \ k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.3.69}$$

Ал (4.3.66) бірінші ретті ЖДТ теңдеудің жалпы шешімі

$$T_k(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}$$

немесе $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{l}$ болғандықтан

$$T_k(t) = C_k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.3.70}$$

Мұндағы C_k–белгісіз еркін тұрақты сандар. Демек, дербес шешімдері

$$u_k(x,t) = C_k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x,$$

ал суперпозиция қағидасы бойынша есептің жалпы шешімі

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.3.71}$$

Мұндағы C_k тұрақтыларын (4.3.64) бастапқы шартты қолданып анықтаймыз

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \varphi(x).$$

Соңғы өрнек, екінші жағынан $\varphi(x)$ функциясының $\left\{\sin\dfrac{\pi k}{l}x\right\}$ бойынша Фурье қатарына жіктелуін береді. Олай болса C_k Фурье коэффиценттері:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx, \ k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.3.72}$$

Бұл C_k мәндерін анықтап, (4.3.71) өрнекке қойсақ (4.3.62)-(4.3.64) аралас есебінің шешімін аламыз.

Теорема 4.3.1 *Егер $\varphi(x) \in C[0,l]$, $\varphi'(x)$ – $\bar{Q}$ облысында бөлікті үзіліссіз, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ болса, онда* (4.3.71) *қатар $\overline{Q} = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$ облысында бірқалыпты және абсолютті жинақталады және* (4.3.62)-(4.3.64) *есепті қанағаттандырады ([]-қараңыз).*

Ескерту 4.3.1 *Жоғарыдағы (4.3.63) Дирихле шарттарының орнында Нейман шарты немесе үшінші шекаралық шарттар берілсе, онда да есеп дәл осындай жолмен шығарылады, тек меншікті мәндер мен меншікті функциялары өзгешелікте болады.*

Мысал 4.3.1 *Келесі есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 10\sin\pi x, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.3.73}$$

Шешуі. Мұнда $a = 1, l = 1$, $\varphi(x) = 10\sin\pi x$ болғандықтан (4.3.72) бойынша

$$C_k = 2\int\limits_0^1 10\sin\pi x\sin\pi kx dx = \begin{cases} 10, & k = 1 \\ 0, & k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Демек,

$$u(x,t) = 10e^{-\pi t}\sin\pi x.$$

Мысал 4.3.2 *Төмендегі Нейман шартымен берілген бастапқы-шеттік есепті арастырайық:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4.3.74}$$

Бұл жағдайда

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \ X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{l}x, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \ \ \|X_0\| = 1, \ \|X_k\| = \frac{l}{2}, \ k = 1, 2, ...$$

болғандықтан (91–беттегі №1–кестені қараңыз) Нейман есебінің шешімі:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi k}{l}x \tag{4.3.75}$$

болады, мұнда

$$C_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)xdx, \ C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi k}{l}xdx, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Мысал 4.3.3 *Төмендегі бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$u_t = 2u_{xx},\ 0 < x < 6,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0,\ \ t > 0$$
$$u(x,0) = 31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x,\ 0 \le x \le 6.$$

Шешуі. Бұл есепке сәйкес меншікті мәндер мен меншікті функциялар:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{6},\ \lambda_k(x) = \cos\frac{\pi k}{6}x,\ k = 0,1,2,\dots,$$

және

$$u(x,t) = \sum_{k=0} C_k e^{-2\left(\frac{\pi k}{6}\right)^2 t}\cos\frac{\pi k}{6}x,\ \ k = 0,1,2,\dots.$$

Бастапқы шарты бойынша

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{\pi k}{6}x = 31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x.$$

Бұдан

$$C_0 = \frac{1}{6}\int_0^6 (31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x)dx = 0,$$

$$C_k = \frac{2}{6}\int_0^6 (31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x)\cos\frac{\pi k}{6}x dx = \begin{cases} 31,\ k = 18 \\ 1,\ k = 24 \\ 0,\ k \ne 18, 24,\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Демек шешім:

$$u(x,t) = 18e^{-18\pi^2 t}\cos 3\pi x + e^{-32\pi^2 t}\cos 4\pi x.$$

Мысал 4.3.4 *Бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ t > 0,$$
$$u(x,0) = x - 1,\ \ 0 \le x \le 1$$

бастапқы-шеттік есебінің $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\overline{Q} = \{t \ge 0,\ 0 \le x \le 1\}\right)$ шешімін тап.

$u_x(0,t) = u(1,t) = 0$ шекаралық шарттарға сәйкес келетін Ш-Л есебінің меншікті мәндері мен меншікті функциялары 91–беттегі №1–кестені қараңыз)

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2},\ X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x,\ k = 0,1,2,\dots.$$

Демек, шешімді:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x$$

қатар түрінде іздейміз, мұндағы C_k- Фурье коэффиценттері:

$$C_k = 2\int\limits_0^1 (x-1)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}xdx =$$

$$2(x-1)\cdot\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}x\bigg|_0^1 - \frac{4}{(2k+1)\pi}\int\limits_0^1 \sin\frac{(2k+1)\pi}{2}xdx =$$

$$\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x\bigg|_0^1 = -\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Олай болса шешім

$$u(x,t) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x.$$

4.3.2 Біртекті емес шекаралық шарттармен берілген біртекті жылу өткізгіш теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп

Айталық, $x=0,\ x=l$ шекарасында

$$u(0,t) = \mu(t),\ \ u(l,t) = \nu(t) \tag{4.3.76}$$

біртекті емес шекаралық шарттарды және

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ t>0, \tag{4.3.77}$$

бастапқы шартты қанағаттандыратын

$$u_t = a^2u_{xx},\ \ 0\le x\le l,\ \ t>0 \tag{4.3.78}$$

жылу өткізгіш теңдеуінің шешімін табайық.

Егер шекаралық шарт біртекті болмаса, онда шешімге шекарада нөлге тең болатындай ауыстыру енгізу қажет. Көбінде шешімді

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{4.3.79}$$

түрде іздейміз. Мұндағы $\omega(x,t)$ функциясын (4.3.76) шекаралық шарт орындалатындай қалағанымызша таңдап аламыз. Мәселен

$$\omega(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}(\nu(t)-\mu(t))$$

түрінде алуға болады. Бұдан кейін (4.3.79) шешімді (4.3.76)-(4.3.78) есепке қойсақ, онда белгісіз $v(x,t)$ функциясы үшін біртекті шекаралық шартты , бірақ оң жағы біртекті емес аралас есеп аламыз:

$$\begin{cases} v_t = a^2v_{xx} + f(x,t),\ 0\le x\le l,\ \ t>0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0,\ \ t>0 \\ v(x,0) = \bar{\varphi}(x),\ \ 0\le x\le l. \end{cases}$$

Шындығында (4.3.79) бойынша

$$u(0,t) = v(0,t) + \mu(t) = \mu(t) \;\Rightarrow\; v(0,t) = 0;$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \nu(t) = \nu(t) \;\Rightarrow\; v(l,t) = 0;$$

$$u(x,0) = v(x,0) + \mu(0) + \frac{x}{l}(\mu(0) - \nu(0)) = \varphi(x) \;\Rightarrow$$

$$v(x,0) = \varphi - \mu(0) + \frac{x}{l}(v(0) - \mu(0)) = \bar{\varphi}$$

$$v_t + \omega_t = a^2 v_{xx} \;\Rightarrow\; v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t),$$

мұндағы $f(x,t) \equiv -\mu' + \dfrac{x}{l}(\mu' - \nu')$.

4.3.3 Біртекті шекаралық шартпен берілген біртекті емес жылу өткізгіш теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп.

$Q_t = \{(x,t)\,|\,0 < x < l,\, t > 0\}$ облысында

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{4.3.80}$$

біртекті емес жылу өткізгіш теңдеуін,

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\; 0 \le x \le l \tag{4.3.81}$$

бастапқы және

$$u(0,t) = 0,\; u(l,t) = 0, \quad t > 0 \tag{4.3.82}$$

біртекті шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_t)$ классикалық шешімін табу есебін қарастырайық.

(4.3.80)- (4.3.82) есебінің шешімін, оның біртекті жағдайына сәйкес келетін Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары бойынша Фурье қатары түрінде іздейміз. (4.3.82) шекаралық шарттар үшін меншікті функциялар жүйесі $\left\{\sin\dfrac{\pi k}{l}x\right\}$ болғандықтан (91–беттегі №1–кестені қараңыз) шешім

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{\pi k}{l}x \tag{4.3.83}$$

түрде ізделінеді. Мұндағы $T_k(t)$ белгісіз функциялар. Оларды анықтау үшін алдымен есептегі белгілі $f(x,t)$ және $\varphi(x)$ функцияларын меншікті функциялар бойынша Фурье қатарына жіктейміз, яғни:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x dx,\;\; k = 1,2,3,\ldots;$$

$$(4.3.84)$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x,\qquad \varphi_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ \ k=1,2,3,\ldots. \tag{4.3.85}$$

(4.3.83) қатардың t және x бойынша сәйкес қажетті дербес туындыларын тауып (4.3.84) қатармен бірге (4.3.80) теңдеуге қойсақ

$$T_k'(t)+\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2T_k(t)=f_k(t),\ \ k=1,2,3,\ldots \tag{4.3.86}$$

бірінші ретті біртекті емес жай дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Жоғарыдағы (4.3.81) бастапқы шартты және (4.3.85) жіктелуді ескеріп

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{\pi k}{l}x=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x$$

(4.3.86) теңдеулер үшін

$$T_k(0)=\varphi_k,\ \ k=1,2,3,\ldots \tag{4.3.87}$$

бастапқы шарттарын аламыз. Бұл (4.3.86)-(4.3.87) Коши есебінің $T_k(t)$ шешімін бірмәнді анықтап (4.3.83) –қатарға қойсақ, ізделінді $u(x,t)$ шешімді аламыз.

Мысал 4.3.5 *Төмендегі біртекті емес аралас есепті шешіңіз:*

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+\sin t\sin 4x,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0,\\&u(x,0)=0,\ \ 0\le x\le\pi,\\&u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ t\ge 0\end{aligned}$$

бастапқы-шеттік есебін шешу керек.

Шешуі. Шекаралық шарттарға сәйкес меншікті функциялар $X_k(x)=\sin kx$ болғандықтан шешімді

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin kx$$

түрде іздейміз.

Енді $f(x,t)=\sin t\sin 4x$ функциясын Фурье қатарына жіктейік

$$\sin t\sin 4x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin kx\ \ \Rightarrow$$

$$f_k(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin t\sin 4x\sin kxdx=\begin{cases}\sin t, & k=4,\\ 0, & k\neq 4.\end{cases}$$

Бұларды берілген есепке қойсақ, нәтижеде

$$T'_k(t) + k^2 T_k(t) = 0,\ T_k(0) = 0,\ k \neq 4,\ k \in \mathbf{N};$$

$$T'_4(t) + 16T_4(t) = \sin t,\ T_4(0) = 0$$

Коши есептерін аламыз. Бұдан

$$T_k(t) = 0,\ \ k \neq 4,\ k \in \mathbf{N};$$

$$T_4(t) = e^{-16t}\int_0^t \sin\tau e^{16\tau}d\tau = \frac{1}{257}\left(e^{-16t} + 16\sin t - \cos t\right).$$

Демек,

$$u(x,t) = \frac{1}{257}\left(e^{-16t} + 16\sin t - \cos t\right)\sin 4x.$$

4.3.4 Жалпы түрдегі біртекті емес жылу өткізгіш теңдеуі үшін аралас есеп.

Жылу өткізгіш теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған біртекті емес бастапқы шеттік есепті қарастырайық:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l,\ t > 0, \tag{4.3.88}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),\ t > 0, \tag{4.3.89}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l. \tag{4.3.90}$$

Есептің шешімін $\omega(0,t) = \mu(t),\ \omega(l,t) = \nu(t)$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын алдын-ала таңдап алынған белгілі $\omega(x,t)$ функциясы мен белгісіз $v(x,t)$ функциясының қосындысы түрінде іздейміз:

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{4.3.91}$$

Мұны астапқы (4.3.88)-(4.3.90) есепке қойып, $v(x,t)$ функциясы үшін біртекті шекаралық шартпен берілген бастапқы-шеттік есебін аламыз:

$$\begin{aligned} &v_t = a^2 v_{xx} + h(x,t),\ \ 0 < x < l,\ t > 0,\\ &v(0,t) = v(l,t) = 0,\ \ t > 0\\ &v(x,0) = g(x),\ \ 0 \le x \le l, \end{aligned}$$

Мұндағы

$$h(x,t) = f(x,t) - [\omega_t - a^2\omega_{xx}],\ \ g(x) = \varphi(x) - \omega(x,0).$$

Бұл аралас есеп 4.3.3–бөлімде қарастырылған есеп.

Мысал 4.3.6 *Төмендегі біртекті емес бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + x\left(3e^t + 1\right), \;\; 0 < x < \pi, \, t > 0 \\ u\left(x, 0\right) = 2 + 3\sin\dfrac{3x}{2}, \;\; 0 \leq x \leq \pi, \\ u\left(0, t\right) = 2, \;\; u_x\left(0, t\right) = t, \;\; t > 0. \end{cases}$$

Шешуі. Шешімді

$$u\left(x, t\right) = v\left(x, t\right) + \omega\left(x, t\right) \tag{4.3.92}$$

түрінде іздейміз, мұнда $\omega\left(x, t\right)$ функциясын

$$\omega\left(0, t\right) = 2, \;\; \omega_x\left(\pi, t\right) = t \tag{4.3.93}$$

шарттарын қанағаттандыратындай таңдап аламыз. Мәселен

$$\omega\left(x, t\right) = \left(ax + b\right)t + 2c$$

түрінде іздейік. Онда (4.3.93) бойынша

$$\begin{cases} \omega\left(0, t\right) = bt + 2c = 2 \\ \omega_x\left(\pi, t\right) = at = t \end{cases}$$

Бұл $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ десек орындалады және шешім

$$u\left(x, t\right) = v\left(x, t\right) + xt + 2 \tag{4.3.94}$$

түрде ізделінеді. Мұны берілген есепке қойсақ, $v\left(x, t\right)$ функциясына қатысты келесі есепті аламыз:

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx} + 3xe^t, \;\; 0 < x < \pi, \, t > 0, \\ v\left(0, t\right) = v_x\left(\pi, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ v\left(x, 0\right) = 3\sin\dfrac{3x}{2}, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{4.3.95}$$

Бұл есепке сәйкес Ш-Л есебін меншікті мәндері мен меншікті функциялары

$$\lambda_k = \frac{\left(2k + 1\right)}{2}, \; x_k = \sin\frac{2k + 1}{2}x, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Сондықтан $v\left(x, t\right)$ шешімді

$$v\left(x, t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(t\right)\sin\frac{2k + 1}{2}x$$

түрде іздейміз, мұнда $T_k\left(t\right)$ -белгісіз функция. Енді теңдеудің оң жағындағы $3xe^t$ және бастапқы шарттағы $3\sin\dfrac{3x}{2}$ функцияларын $\left\{\sin\dfrac{2k + 1}{2}x\right\}$ бойынша Фурье қатарына жіктейік:

$$3xe^t = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\left(t\right)\sin\frac{2k + 1}{2}x, \;\; 3\sin\frac{3x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\sin\frac{2k + 1}{2}x \;\; \Rightarrow \tag{4.3.96}$$

$$f_k(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 3xe^t\sin\frac{2k+1}{2}xdx=(-1)^k\frac{24e^t}{\pi(2k+1)^2},\quad k=0,1,2,..., \tag{4.3.97}$$

$$\alpha_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 3\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{2k+1}{2}xdx=\begin{cases}3, & k=1\\ 0, & k\neq 1.\end{cases} \tag{4.3.98}$$

Бұларды (4.3.95) қойсақ, $T_k(t)$ функциясы үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k'(t)+(2k+1)^2T_k(t)\right]\sin\frac{2k+1}{2}x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{24e^t}{\pi(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{2}x$$

немесе

$$T_k'(t)+(2k+1)^2=(-1)^k\frac{24e^t}{\pi(2k+1)^2},\ k=0,1,2,... \tag{4.3.99}$$

жәй дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Бастапқы шарт бойынша

$$T_1(0)=3,\ T_k(0)=0,\ k=0,2,3,\ldots. \tag{4.3.100}$$

Бұл (4.3.99), (4.3.100) бірінші ретті ЖДТ үшін Коши есебінің $k=1$ және $k=0,2,3,\ldots$ үшін сәйкес шешімдері:

$$T_1(t)=-\frac{24}{9\pi}\cdot\frac{1}{10}\left(e^t-e^{-9t}\right)+3e^{-9t},$$

$$T_k(t)=\frac{24\cdot(-1)^k}{\pi(2k+1)^2\left((2k+1)^2+1\right)}\left(e^t-e^{-(2k+1)^2t}\right),\ k\neq 1.$$

Демек,

$$v(x,t)=3e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}+\frac{24}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(e^t-e^{-9t}\right)}{(2k+1)^2\left((2k+1)^2+1\right)}\sin\frac{2k+1}{2}x,$$

ал бастапқы есептің шешімі

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)=2+xt+3e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}+$$

$$\frac{24}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(e^t-e^{-9t}\right)}{(2k+1)^2\left((2k+1)^2+1\right)}\sin\frac{2k+1}{2}x.$$

4.3.5 Стационарлы біртекті емес жылу өткізгіш теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп

Шекарасында температурасы u_0 және u_l тұрақты және оң жағы t уақыттан тәуелсіз функция болатын шектелген l ұзындықтағы стерженнің температурасын анықтау есебін қарастырайық.

Есептің қойылымы:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x), \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0,t) = u_0 = const, \ \ u(l,t) = u_l = const, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4.3.101}$$

Бұл жағдайда (4.3.101) есептің шешімін

$$u(x,t) = v(x,t) + q(x) \tag{4.3.102}$$

түрінде іздейміз. Мұндағы $q(x)$–стационар температура, ал $v(x,t)$–стационар температурадан ауытқуы.

(4.3.102) өрнектен $u_t = v_t, \ \ u_{xx} = v_{xx} + q''(x)$ туындыларын тауып, (4.3.101) есепке қойсақ

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + a^2 q'' + f(x), \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ v(0,t) = u_0 - q(0), \ v(l,t) = u_l - q(l), \ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - q(x), \ \ 0 \le x \le l \end{cases}$$

есепке келеміз.

Егер $q(x)$ функциясын

$$\begin{cases} a^2 q''(x) + f(x) = 0, \\ q(0) = u_0, \ q(l) = u_l \end{cases} \tag{4.3.103}$$

есептің шешімі түрінде таңдап алсақ, онда $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{aligned} & v_t = a^2 v_{xx}, \ 0 < x < l, t > 0, \\ & v(0,t) = v(l,t) = 0, \ t > 0, \\ & v(x,0) = \varphi(x) - q(x), \ \ 0 \le x \le l, \end{aligned} \tag{4.3.104}$$

бастапқы-шеттік есептің шешімі болар еді. Демек, (4.3.101) есептің шешімін (4.3.103) екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шекаралық есебі мен (4.3.104) біртекті бастапқы-шеттік есептің шешімінің қосындысы түрінде аламыз.

Мысал 4.3.7 *Келесі бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6x + 2, \ 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0,t) = 2, \ u(1,t) = 3, \ t > 0, \\ u(x,0) = x^3 - x^2 - 3x, \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Шешімді $u(x,t) = v(x,t) + q(x)$ түрінде іздейік. Мұнда $q(x)$

$$q'' - 6x + 2 = 0,\ q'(0) = 2,\ q(1) = 3$$

есептің шешімі. Бұдан

$$\begin{aligned}
&q'' = 6x - 2,\\
&q' = 3x^2 - 2x + c_1\\
&q(x) = x^3 - x^2 + c_1 x + c_2 \quad \Rightarrow\\
&q'(0) = c_1 = 2, \quad q(1) = c_1 + c_2 = 3 \ \Rightarrow \ c_2 = 1. \qquad \Rightarrow\\
&q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1.
\end{aligned}$$

Ал $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{aligned}
&v_t = v_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&v(0,t) = v(1,t) = 0, \ \ t > 0,\\
&v(x,0) = x^3 - x^2 + 3x - \left(x^3 - x^2 + 2x +\right) = x - 1,\ 0 \le x \le 1
\end{aligned}$$

есептің шешімі. Ол жоғарыдағы §2− бөлімдегі 4-мысал бойынша,

$$v(x,t) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x$$

болады. Олай болса, берілген бастапқы мысал есептің шешімі

$$u(x,t) = x^3 - x^2 + 2x + 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x.$$

4.3.6 Жаттығулар

4.3.1 *Ұзынды $l = \pi$ болатын жұқа біртекті стержіннің бастапқы температурасы $u(x,0) = 2\cos x + 3\cos 2x$ тең. Егер стержіннің ұштарында жылу ағыны нөлге тең болса, стержін ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температураны анықтаңыз.*

4.3.2 *Ұзынды $l = \pi$ болатын жұқа біртекті стержіннің бастапқы температурасы $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 8x$ тең. Егер стержіннің ұштарындағы температура мұз еритіндей болса стержін ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температурасын анықтаңыз.*

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

4.3.3 $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0,\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ \ t > 0,\\ u(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.3.4 $\begin{cases} u_t = u_{xx} - \beta u, \;\; 0 < x < \pi, \; t > 0, \\ u\,(0,t) \; = u_x\,(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = \sin\dfrac{x}{2}, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

4.3.5 $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < \pi, \; t > 0, \\ u_x\,(0,t) \; = u_x\,(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = cos^2 x, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

4.3.6 $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; 0 < x < 1, \; t > 0, \\ u\,(0,t) = 2, \;\; u\,(1,t) = 3, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = 1, \;\; 0 < x < 1. \end{cases}$

4.3.7 $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; 0 < x < \pi, \; t > 0, \\ u_x\,(0,t) \; = u_x\,(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = \begin{cases} x, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, \;\; \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \end{cases}$

4.3.8 $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t \sin 2x, \;\; 0 < x < \pi, \; t > 0, \\ u\,(0,t) \; = u\,(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

4.3.9 $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \; t > 0, \\ u_x\,(0,t) \; = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

4.3.10 $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \;\; 0 < x < 1, \; t > 0, \\ u\,(0,t) \; = u\,(1,t) = t, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = e^x \sin \pi x, \;\; 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

4.3.11 $\begin{cases} u_t = 9u_{xx} - 54x, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u\,(0,t) \; = 1, \quad u\,(4,t) = 61, \;\; t > 0 \\ u\,(x,0) = 2 - x + x^3, \;\; 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

4.3.12 *Өлшемі* $[0,\pi] \times [0,\pi]$ *болатын жұқа біртекті тіктөртбұрышты пластинканың бастапқы температурасы* $u(x,y,0) = 3\sin x \sin 5y$ *және шеттеріндегі температура нөлге тең. Пластинкадағы температураның* $u(x,y,t)$, $t > 0$ *таралуын анықтаңыз.*

4.3.13 *Айталық,* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\,(Q) \cap \left(\overline{Q}\right)$, $Q = (0,2) \times (0,\infty)$ *функциясы*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; 0 < x < 2, \; t > 0, \\ u_x\,(0,t) \; = u_x\,(2,t) = 3, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = x^3 - 3x^2 + 3x, \;\; 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

аралас есептің шешімі болсын. $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$ *шекті есептеңіз.*

4.3.14 *Айталық,* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap (\overline{Q})$, $Q = (-\pi, \pi) \times (0, \infty)$ *функциясы*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ -\pi < x < \pi, \ t > 0, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x, 0) = \sin^2 x, \ \ -\pi \le x \le \pi. \end{cases}$$

аралас есептің шешімі болсын. $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^\pi u(x,t)dx$ *шекті есептеңіз.*

4.3.15 $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ u_x(0,t) - h \cdot u(0,t) = 0, \ \ u(l,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 = const, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

4.3.7 Жауаптары

4.3.1 $u(x,t) = 2e^{-a^2 t} \cos x + 3e^{-4a^2 t} \cos 2x.$

4.3.2 $u(x,t) = 2e^{-9a^2 t} \sin 3x + 5e^{-64a^2 t} \sin 8x.$

4.3.3 $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k-1} e^{-9(2k-1)^2 t} \sin(2k-1)x.$

4.3.4 $u(x,t) = e^{-(\beta + \frac{1}{4})t} \sin \dfrac{x}{2}.$

4.3.5 $u(x,t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} e^{-4a^2 t} \cos 2x.$

4.3.6 $u(x,t) = 2 + x + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^k - 1}{k} e^{-(\pi k)^2 t} \sin \pi k x.$

4.3.7 $u(x,t) = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{\pi - 2}{2k} \sin \dfrac{\pi k}{2} + \dfrac{1}{k^2} \left(\cos \dfrac{\pi k}{2} - 1 \right) \right) e^{-k^2 t} \cos kx.$

4.3.8 $u(x,t) = \dfrac{1}{4a^2} \left[t + \dfrac{1}{4a^2} \left(e^{-4a^2 t} - 1 \right) \right] \sin 2x.$

4.3.9 $u(x,t) = t \cos x + \dfrac{1}{8} \left(e^{-8t} - 1 \right) \cos 3x.$

4.3.10 $u(x,t) = xt + \sin \pi x e^{x - t - \pi^2 t}.$

4.3.11 $u(x,t) = 1 - x + x^3 + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-9\pi^2 (2n-1)^2 t/16}}{(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{4}.$

4.3.12 $u\left(x,y,t\right)=3e^{-26a^2t}\sin x\sin 5y.$

4.3.13 $3x-2.$

4.3.14 $0.$

4.3.15 $u(x,t) \;=\; 2u_0\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+\mu_k^2}}{\mu_k\left(l\left(h^2+\mu_k^2\right)+h\right)}e^{-(a\mu_k)^2t}\left(\mu_k\cos(\mu_k x)+h\sin(\mu_k x)\right)$
мұндағы μ_k *сандары* $h\cdot tg(\mu l)=-\mu$ *теңдеуінің оң түбірлері.*

4.4 Тіктөртбұрышта қойылған Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін шеттік есептер.

4.4.1 Лаплас теңдеуі үшін шекаралық есеп.

$T = \{(x,y)\,,\, 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ тіктөртбұрышының ішінде

$$\Delta u\,(x,y) = 0 \tag{4.4.105}$$

Лаплас теңдеуін, ал шекарасында жалпы түрдегі

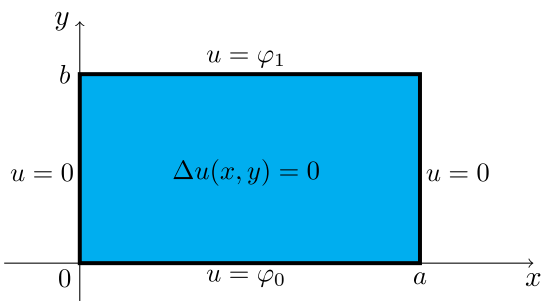
$$\begin{array}{l}(1-\alpha)\,u\,(x,0) + \alpha \cdot u_y\,(x,0) = \varphi_0\,(x)\,,\ 0 \le x \le a,\\ (1-\beta)\,u\,(x,b) + \beta \cdot u_y\,(x,b) = \varphi_1\,(x)\,,\ 0 \le x \le a,\\ (1-\gamma)\,u\,(0,y) + \gamma \cdot u_x\,(0,y) = \psi_0\,(y)\,,\ 0 \le y \le b,\\ (1-\delta)\,u\,(a,y) + \delta \cdot u_x\,(a,y) = \psi_1\,(y)\,,\ 0 \le y \le b,\end{array} \tag{4.4.106}$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $u\,(x,y) \in C^{2,2}_{x,y}\,(T) \bigcap C^{1,1}_{x,y}\left(\overline{T}\right)$ - функциясын табу есебін қарастырайық.

Егер $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ болса, онда *Дирихле есебі*, ал $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ болса, онда *Нейман есебі*, қалған жағдайлар үшін *аралас есеп* немесе *үшінші шеттік* есеп деп аталады. Мұндай тіктөртбұрышты облыста берілген есептерді Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісі арқылы шешу оңай болады. Мәселен, ең қарапайым жағдайы

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta u\,(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in T,\\ u\,(x,0) = \varphi_0\,(x)\,,\ u\,(x,b) = \varphi_1\,(x)\,,\ 0 \le x \le a,\\ u\,(0,y) = 0,\ u\,(a,y) = 0, \quad\ 0 \le y \le b\end{array}\right. \tag{4.4.107}$$

Дирихле есебін қарастырайық.



Фурье әдісі бойынша шешімді

$$u\,(x,y) = X\,(x)\,Y\,(y) \neq 0 \tag{4.4.108}$$

түрінде іздейміз. Мұны теңдеуге қойып, айнымалыларын ажыратсақ:

$$\frac{X''\,(x)}{X\,(x)} = -\frac{Y''\,(y)}{Y\,(y)} = -\lambda^2$$

теңдеуін немесе

$$Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0, \tag{4.4.109}$$

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \tag{4.4.110}$$

жәй дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Енді (4.4.108) шешімді (4.4.107)-тегі соңғы шекаралық шартқа қойып (мұнда Штурм-Лиувилль есебін алу үшін x және y айнымалыларының рөлі бірдей болғандықтан, олардың ішіндегі біртекті шекаралық шарт қойылғанын таңдаймыз), (4.4.110) теңдеуі үшін

$$X(0)=0,\ X(a)=0 \tag{4.4.111}$$

шекаралық шарттарын аламыз. Бұл (4.4.110)-(4.4.111) Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен сәйкес меншікті функциялары (91–беттегі №1–кестені қараңыз)

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{a},\quad X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{a}x,\quad k=1,2\ldots. \tag{4.4.112}$$

Ал мұндай λ_k меншікті мәндерге сәйкес (4.4.109) теңдеудің жалпы шешімі

$$Y_k(y)=A_k e^{\frac{\pi k}{a}y}+B_k e^{-\frac{\pi k}{a}y},\ k=1,2,3\ldots.$$

Демек, (4.4.105) есебінің жалпы шешімі

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{\pi k}{a}y}+B_k e^{-\frac{\pi k}{a}y}\right)\sin\frac{\pi k}{a}x \tag{4.4.113}$$

түрде болады. Мұндағы $A_k,\ B_k,\ k=1,2,3\ldots$ белгісіз коэффициенттері (4.4.107)-тегі бірінші шекаралық шарттардан анықталады, яғни:

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin\frac{\pi k}{a}x=\varphi_0(x),$$
$$u(x,a)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{\pi k}{a}b}+B_k e^{-\frac{\pi k}{a}b}\right)\sin\frac{\pi k}{a}x=\varphi_1(x)$$

Бұл теңдіктер екінші жағынан сәйкес φ_0,φ_1 функцияларының $\left\{\sin\frac{\pi k}{a}x\right\}$ жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктелуін береді. Олай болса, Фурье коэффициенттері бойынша

$$\begin{cases} A_k+B_k=\varphi_0^k \\ A_k e^{\frac{\pi k}{a}b}+B_k e^{-\frac{\pi k}{a}b}=\varphi_1^k,\quad k=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{4.4.114}$$

жүйесін аламыз, мұндағы

$$\varphi_0^k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_0(x)\sin\frac{\pi k}{a}xdx, \qquad \varphi_1^k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_1(x)\sin\frac{\pi k}{a}xdx, \tag{4.4.115}$$

Фурье коэффициенттері. (4.4.114) жүйенің шешімдері

$$A_k = \frac{1}{2sh\frac{\pi k}{a}b}\left(\varphi_1^k - \varphi_0^k e^{-\frac{\pi k}{a}b}\right), \quad B_k = \frac{1}{2sh\frac{\pi k}{a}b}\left(\varphi_0^k e^{\frac{\pi k}{a}b} - \varphi_1^k\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Бұл анықталған A_k, B_k коэффициенттерді (4.4.113) қатарға қойып, ықшамдасақ, нәтижеде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_1^k sh\frac{\pi k}{a}y + \varphi_0^k sh\frac{\pi k}{a}(b-y)\right]\frac{\sin\dfrac{\pi k}{a}x}{sh\frac{\pi k}{a}b}. \tag{4.4.116}$$

ізделінді шешімді аламыз.

Мысал 4.4.1 *Лаплас теңдеуі үшін қойылған келесі Дирихле есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \;\; 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1, \\ u(x,0) = x\sin x, \;\; u(x,1) = 0, \;\; 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = 0, \;\; u(\pi,y) = 0, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad\qquad u(x,y) = ? \end{cases}$$

Шешуі. Бұл мысал үшін $a = \pi$, $b = 1$, $\varphi_0(x) = x\sin x$, $\varphi_1(x) = 0$ болғандықтан (4.4.115) формула бойынша фурье коэффициенттері:

$$\varphi_1^k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\varphi_0^k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin x\cdot\sin kxdx = ?$$

Соңғы интегралды $k = 1$ және қалған мәндерін жеке-жеке есептейік.

1. $k = 1$. $\varphi_0^1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi x\sin^2 xdx = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \dfrac{x}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \dfrac{\pi}{2}.$

2. $k \neq 1 \quad \Rightarrow$

$$\varphi_0^k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin x\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\left[\cos\left(1-k\right)x - \cos\left(1+k\right)x\right]dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{1}{1-k}\sin\left(1-k\right)x \; - \; \frac{1}{1+k}\sin\left(1+k\right)x\right)\right]\Big|_0^{\pi} -$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{\left(1-k\right)^2}\cos\left(1-k\right)x + \frac{1}{\left(1+k\right)^2}\cos\left(1+k\right)x\right)\right]\Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\left(1-k\right)^2}\left(\cos\left(1-k\right)\pi - 1\right) - \frac{1}{\left(1+k\right)^2}\left(\cos\left(1+k\right)\pi - 1\right)\right] =$$

$$\begin{cases} 0, \quad k = 2n-1, \\ -\dfrac{8k}{\pi\left(k^2-1\right)^2}, \quad k = 2n. \end{cases}$$

Яғни

$$\varphi_0^{2k} = -\frac{16k}{\pi\left(4k^2-1\right)^2}, \; \varphi_0^{2k+1} = 0, \; k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Демек, (4.4.115) формула бойынша шешім:

$$u\left(x,y\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_0^k sh\left(1-y\right)k\frac{\sin kx}{shk} =$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{sh\left(1-y\right)}{sh1}\sin x - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot sh2k\left(1-y\right)}{\left(4k^2-1\right)^2 sh2k}\sin 2kx.$$

Ескерту 4.4.1 *Егер Нейман немесе аралас есебі берілсе де дәл осындай жолмен талданады. Мұнда тек шекаралық шарттарға қатысты меншікті мәндер мен меншікті функциялар өзгешелікте болады.*

Мысал 4.4.2 *Лаплас теңдеуі үшін қойылған аралас есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \;\; 0 < x < a, \;\;\; 0 < y < b, \\ u\left(x,0\right) = 0, \;\; u_y\left(x,b\right) = x \;, \;\; 0 \leq x \leq a \\ u_x\left(0,y\right) = 0, \;\; u_x\left(a,y\right) = 0, \qquad 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

Шешуі. Шешімді $u\left(x,y\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right) \neq 0$ түрде іздесек, онда шекаралық шарттарға байланысты

$$Y''\left(y\right) - \lambda^2 Y\left(y\right) = 0, \;\; Y\left(0\right) = 0$$

теңдеуін және

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X'(a) = 0$$

Штурм-Лиувилль есебін аламыз. Бұдан (91–беттегі №1–кестені қараңыз)

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{a},\ \ X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{a}x,\ \ k = 0, 1, 2, 3\ldots,$$

$$\|X_0\|^2 = a,\ \ \|X_k\|^2 = \frac{a}{2},\ \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Сондай-ақ, мұндай $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{a}, k = 1, 2, 3, \ldots$ меншікті мәндерге сәйкес $Y(y)$ шешімі

$$Y_k(y) = a_k e^{\frac{\pi k}{a}y} + b_k e^{-\frac{\pi k}{a}y},\ \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ал $\lambda_0 = 0$ мәніне сәйкес шешім

$$Y_0(y) = a_0 y + b_0$$

түрде болады. Бұларға $Y(0) = 0$ шартын қолдансақ,

$$a_k = -b_k,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots,\ \ \ b_0 = 0$$

немесе дербес шешімдері

$$Y_0(y) = a_0 \cdot y, \quad Y_k(y) = 2a_k \cdot sh\frac{\pi k}{a}y, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

болады. Демек есептің дербес шешімдері

$$u_0(x, y) = a_0 y, \quad u_k(x, y) = 2a_k sh\frac{\pi k}{a}y \cdot \cos\frac{\pi k}{a}x, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ал суперпозиция қағидасы бойынша $u(x, y)$ шешім

$$u(x, y) = a_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k sh\frac{\pi k}{a}y \cdot \cos\frac{\pi k}{a}x.$$

Енді $u_y(x, b) = x$ шартын пайдаланып a_k коэффициенттерін анықтаймыз:

$$u_y(x, b) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k \pi k}{a} ch\frac{\pi k}{a}b \cdot \cos\frac{\pi k}{a}x = x$$

Бұдан $a_0 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a x dx = \dfrac{a}{2}$,

$$a_k = \frac{a}{2\pi k \cdot ch\dfrac{\pi k}{a}b} \cdot \frac{2}{a}\int_0^a x\cos\frac{\pi k}{a}x dx = \begin{cases} 0, \quad k = 2n, \\ -\dfrac{2a^2}{(\pi k)^3\, ch\dfrac{\pi k}{a}b}, \quad k = 2n - 1 \end{cases}$$

немесе

$$a_{2k-1} = -\frac{2a^2}{\pi^3 (2k-1)^3 ch\dfrac{\pi(2k-1)}{a}b}, \quad a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Олай болса есептің шешімі

$$u(x,y) = \frac{a}{2}y - \frac{4a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sh\dfrac{\pi(2k-1)}{a}y}{(2k-1)^3 ch\dfrac{\pi(2k-1)}{a}b} \cdot \cos\frac{\pi(2k-1)}{a}x.$$

4.4.2 Біртекті емес шекаралық шартпен берілген Дирихле есебі.

Егер Дирихле есебі біртекті емес шекаралық шартпен берілсе, онда редукция әдісін қолданып есеп біртекті шекаралық шартты екі есепке жіктеп, шешіледі.

Мәселен

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ (x,y) \in T \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ u(x,b) = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le a \\ u(0,y) = \psi_0(y), \ u(a,y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.117}$$

есебі берілсін. Есеп сызықты болғандықтан шешімді

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

түрде іздейміз. Мұндағы $u_1(x,y)$ функциясы

$$\begin{cases} \Delta u_1(x,y) = 0, \ (x,y) \in T \\ u_1(x,0) = \varphi_0(x), \ u_1(x,b) = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le a \\ u_1(0,y) = 0, \ u_1(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.118}$$

есебінің, ал $u_2(x,y)$ функциясы

$$\begin{cases} \Delta u_2(x,y) = 0, \ (x,y) \in T \\ u_2(x,0) = 0, \ u_2(x,b) = 0, \ 0 \le x \le a \\ u_2(0,y) = \psi_0(y), \ u_2(a,y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.119}$$

есебінің шешімі. Бұл екі есеп жоғарыдағы (4.4.105) есебімен бірдей. (4.4.119) есепте y айнымалысы мен x айнымалысының орындары ауысып тұр. Сондықтан оларды жоғарыдағыдай шешіп, шешімдерін қоссақ болғаны.

Ескерту 4.4.2 (4.4.119) *есебінің* $u(x,y)$ *шешімі үзіліссіз болуы үшін*

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \ \varphi_1(0) = \psi_0(b), \ \varphi_0(a) = \psi_1(0), \ \varphi_1(a) = \psi_1(b)$$

үйлесімділік шарттары орындалуы қажет.

4.4.3 Тіктөртбұрышта қойылған Пуассон теңдеуі үшін шеттік есеп

Пуассон теңдеуі – біртекті емес Лаплас теңдеуі болғандықтан, оны алдыңғы бөлімдерде зерттелген біртекті емес толқын теңдеуі, жылуөткізгіш теңдеулері үшін шеттік есептердегідей әдіспен шешімін табамыз. Дәлірек айтқанда, шешімді y немесе x айнымалыларының біреуіне қатысты Штурм–Лиувилль есебінің меншікті функциялары арқылы қатар түрінде іздейміз.

Мысал 4.4.3 *Тіктөртбұрышта берілген біртекті шекаралық шартты Пуассон теңдеуі үшін келесі шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = x^2 y, \;\; 0 < x < a, \;\; 0 < y < b, \\ u\,(x,0) = 0, \;\; u_y\,(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ u\,(0,y) = 0, \;\; u\,(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

Шешуі. Барлық шекаралық шарттар біртекті болғандықтан, біртекті теңдеу үшін Штурм-Лиувилль есебін немесе айнымалысының кез келгені үшін жазуға болады. Мәселен y айнымалысы бойынша Штурм–Лиувилль есебі:

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \;\; Y\,(0) = Y'\,(b) = 0.$$

Ал мұның меншікті мәндер мен меншікті функциялары:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\,\pi}{2b}, \quad Y_k\,(y) = \sin\frac{(2k+1)\,\pi}{2b}y, \;\; k = 0,1,2,\ldots .$$

Олай болса, есептің шешімін

$$u\,(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k\,(x) \cdot \sin\frac{(2k+1)\,\pi}{2b}y.$$

түрде іздейміз. Әуелі $f\,(x,y) = x^2 y$ функциясын $\{Y_k\,(y)\}$ жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктейік:

$$x^2 y = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(x) \cdot \sin\frac{(2k+1)\,\pi y}{2b},$$

мұнда

$$f_k\,(x) = \frac{2}{b}x^2 \int\limits_0^b y \sin\frac{(2k+1)\,\pi}{2b} y dy = \frac{(-1)^k\,2}{b\lambda_k^2}x^2, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Бұларды берілген есепке қойсақ, онда келесі екінші ретті ЖДТ үшін шекаралық есепке келеміз:

$$X_k''\,(x) - \lambda_k^2 X_k\,(x) = \frac{(-1)^k\,2}{b\lambda_k^2}x^2 \quad X_k\,(0) = \; X_k\,(a) = 0, \quad k = 0,1,2...$$

ЖДТ теориясы бойынша

$$X_k''(x) - \lambda_k^2 X_k(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2...$$

біртекті теңдеуінің шешімі

$$X_k^0(x) = a_k e^{\lambda_k x} + b_k e^{-\lambda_k x}$$

ал $\bar{X}_k(x)$ дербес шешімі

$$\bar{X}_k(x) = Ax^2 + Bx + C$$

түрінде ізделінеді. Мұны теңдеуге қойып, A, A, A коэффициенттерін тапсақ, дербес шешім

$$\bar{X}_k(x) = (-1)^{k+1}\left(\frac{2}{b\lambda_k^4}x^2 + \frac{4}{b\lambda_k^6}\right) = \frac{(-1)^k 2}{b\lambda_k^6}\left(-2 - \lambda_k^2 x^2\right)$$

болады. Демек жалпы шешімі

$$X_k(x) = a_k e^{\lambda_k x} + b_k e^{-\lambda_k x} + \frac{(-1)^k 2}{b\lambda_k^6}\left(2 + \lambda_k^2 x^2\right).$$

Бұған $X_k(0) = X_k(a) = 0$ шарттарын қолданып, a_k, b_k белгісіздері үшін

$$\begin{cases} a_k + b_k + \frac{(-1)^{k+1}4}{b\lambda_k^6} = 0 \\ a_k e^{\lambda_k a} + b_k e^{-\lambda_k a} + \frac{(-1)^{k+1}4}{b\lambda_k^6} + \frac{(-1)^{k+1}2a^2}{b\lambda_k^4} = 0, \ k = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Ал бұл жүйенің шешімдері:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{b\lambda_k^6 sh\lambda_k a}\left(\lambda_k^2 a^2 + 2\left(1 - e^{-\lambda_k a}\right)\right),$$

$$b_k = \frac{(-1)^k}{b\lambda_k^6 sh\lambda_k a}\left[2\left(e^{-\lambda_k a} - 1\right) - \lambda_k^2 a^2\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Олай болса, есептің шешімі

$$u(x, y) = \frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\lambda_k^6 sh\lambda_k a}\left[\left(2 + a^2\lambda_k^2\right) sh\lambda_k x - 2sh(x - a)\lambda_k - 2 - \lambda_k^2 x^2\right]\sin\lambda_k y,$$

мұндағы $\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2b}$.

4.4.4 Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі шеттік есептерді шешіңіздер:

4.4.1 $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u_x(0,y) = 0, \ \ u_x(\pi,y) = 0, \\ u(x,0) = \pi, \ \ \ u(x,\pi) = x. \end{cases}$

4.4.2 $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < l, \\ u(0,y) = 0, \ \ u_x(\pi,y) = 0, \ \ \ 0 \le y \le l, \\ u_y(x,0) = A\sin\frac{x}{2}, \ \ \ u(x,l) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi, \ \ A = const. \end{cases}$

4.4.3 $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 4, \\ u(x,0) \ = 0, \ \ u(x,4) \ = 0, \ 0 < x < 1, \\ u_x(0,y) = 0, \ \ \ u_x(1,y) = \begin{cases} y, \ \ 0 \le y \le 2, \\ 4-y, \ \ 2 \le y \le 4 \end{cases} \ \ \ \ 0 < y < b \end{cases}$

4.4.4 $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ \ 0 < x < 2, \ 0 < y < \pi, \\ u_y(x,0) \ = 0, \ \ u_y(x,\pi) \ = 0, \ 0 < x < 2, \\ u_x(0,y) = y, \ \ \ u(2,y) = 0, \ \ 0 < y < \pi \end{cases}$

4.4.5 $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < \infty, \ \ 0 < y < l, \\ u(0,y) = f(y), \ u(\infty,y) = 0, \\ u_y(x,0) = 0, \ \ \ u_y(x,l) + hu(x,l) = 0, \ h > 0. \end{cases}$

4.4.6 $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u(0,y) = 0, \ u(\pi,y) = Ay, \\ u(x,0) = 0, \ \ \ u(x,\pi) = Ax. \end{cases}$

4.4.7 $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u_x(0,y) = \sin y, \ u_x(\pi,y) = \sin 5y, \\ u(x,0) = \cos x, \ \ \ u(x,\pi) = \cos 3x. \end{cases}$

4.4.8 $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 0 < x < p, \ \ 0 < y < s, \\ u(0,y) = \ u_x(p,y) = 0, \ \ \ 0 \le y \le s, \\ u(x,0) = 0, \ \ \ u(x,s) = f(x), \ \ 0 \le x \le p, \ f(0) = f'(p) = 0. \end{cases}$

4.4.9 $\begin{cases} \Delta u = -2, \ \ 0 < x < a, \ \ -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, \\ u(0,y) = 0, \ \ u(a,y) = 0, \ \ \ -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}, \\ u\left(x,-\frac{b}{2}\right) = 0, \ \ \ u\left(x,\frac{b}{2}\right) = 0, \ \ 0 \le x \le a. \end{cases}$

4.4.10 $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ [0,a] \times [0,\infty), \\ u(0,y) = 0, \ \ u(a,y) = 0, \ \ \ 0 \le y < \infty, \\ u(x,0) = A\left(1-\frac{x}{a}\right), \ \ \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \ \ 0 \le x \le a. \end{cases}$

4.4.11 $\begin{cases} \Delta u = 0, \;\; 0 < x < \infty, \;\; 0 < y < l, \\ u(x,0) = 0, \;\;\; u_y(x,l) = 0, \\ u(0,y) = f(y), \;\;\; \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0. \end{cases}$

4.4.5 Жауаптары

4.4.1 $u(x,y) = \pi - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x \cdot sh(2k+1)y}{(2k+1)^2\, sh(2k+1)\pi}.$

4.4.2 $u(x,y) = 2A\dfrac{sh\frac{y-l}{2}}{ch\frac{l}{2}}\sin\frac{x}{2}$, $\;\; sh\alpha \cdot ch\beta - sh\beta \cdot ch\alpha = sh(\alpha-\beta)$ *формуласын қолданыңыз.*

4.4.3 $u(x,y) = \dfrac{64}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cosh\frac{(2n-1)\pi x}{4}}{(2n-1)^3\sinh\frac{(2n-1)\pi}{4}}\sin\dfrac{(2n-1)\pi y}{4}.$

4.4.4 $u(x,y) = \dfrac{\pi(x-2)}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh(2n-1)(x-2)}{(2n-1)^3\cosh 2(2n-1)}\cos(2n-1)y.$

4.4.5 $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\lambda_k x}\cos\lambda_k y$, *мұндағы* λ_k *саныдары* $\lambda tg\lambda l = h$ *теңдеуінің оң түбірлері, ал* $f_k = \frac{(f,Y_k)}{(Y_k,Y_k)} = \frac{2\left(h^2+\lambda_k^2\right)}{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}\int\limits_0^l f(x)\cos\lambda_k y dy.$

4.4.6 $u(x,y) = 2A\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\left(\dfrac{\sin kx \cdot sh(ky) + \sin ky \cdot sh(kx)}{sh(k\pi)}\right).$

4.4.7 $u(x,y) = \dfrac{sh(\pi-y)}{sh\pi}\cos x + \dfrac{sh3y}{sh3\pi}\cos 3x - \dfrac{ch(\pi-x)}{sh\pi}\sin y + \dfrac{ch5x}{5sh5\pi}\sin 5y.$

4.4.8 $u(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\frac{(2k-1)\pi x}{2l}}\sin\dfrac{(2k-1)\pi y}{2l},$

$$f_k = \frac{(f,Y_k)}{(Y_k,Y_k)} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{(2k-1)\pi y}{2l}dy$$

4.4.9 $u(x,y) = x(a-x) - \dfrac{8a^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}ch\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2k+1)^3\, ch\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$

4.4.10 $u(x,y) = \dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}e^{-\frac{\pi k y}{a}}\sin\dfrac{\pi k x}{a}.$

4.4.11 $u\left(x,y\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{sh\frac{(2k-1)\pi s}{2p}}sh\frac{\left(2k-1\right)\pi y}{2p}\sin\frac{\left(2k-1\right)\pi x}{2p}$,

$$f_k=\frac{2}{p}\int\limits_0^p f\left(x\right)\sin\frac{\left(2k-1\right)\pi x}{2p}dx.$$

Бөлім 5

Эллиптикалық типті теңдеулер. Шеттік есептер

5.1 Негізгі эллиптикалық типті теңдеулер. Гармоникалық функциялар

5.1.1 Лаплас теңдеуі. Гармоникалық функциялар және олардың негізгі қасиеттері

Эллиптикалық типті теңдеулердің ең қарапайымы әрі маңыздысының бірі

$$\Delta u = 0 \tag{5.1.1}$$

Лаплас теңдеуі. Мұндағы Δ – Лаплас операторы деп аталады және ол Декарттық координата жүйесінде

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}; \tag{5.1.2}$$

түрде, $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ – полярлық координат жүйесінде

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}; \tag{5.1.3}$$

түрде, ал $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta$ – сфералық координат жүйесінде

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{5.1.4}$$

түрде анықталады.

Анықтама 5.1.1 *$C^m(\Omega)$ – функциялар класы (кеңістігі) деп, $\Omega \subset R^n$ облысында анықталған және өзінің m – ретке дейінгі дербес туындыларымен бірге үзіліссіз $u(x)$ функциялар класын түсінеміз. Егер m=0 болса, $C(\Omega)$ – Ω облысында үзіліссіз функциялар класын береді.*

Анықтама 5.1.2 *Шенелген Ω облысында екінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз $\left(u(x) \in C^2(\Omega)\right)$ және Ω облысының әрбір нүктесінде (5.1.1) Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын $u(x)$ функциясы* ***гармоникалық функция*** *деп аталады.*

Эллиптикалық типті теңдеулердің тағы да қарапайымы әрі маңыздылары

$$\Delta u = f(x) \tag{5.1.5}$$

Пуассон және

$$\Delta u + \lambda u = f(x)$$

Гельмгольц теңдеулері.

5.1.2 Лаплас теңдеуіне қойылатын негізгі шеттік есептер.

Гармоникалық функциялар теориясында Дирихле, Нейман немесе үшінші шеттік есептердің қойылымы өте маңызды.

1. Дирихле есебі. Лаплас теңдеуі үшін *Дирихле есебі* немесе *бірінші шеттік есеп* деп, $\overline{\Omega}$ облысында үзіліссіз $u(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ және

$$\begin{array}{l} u(x) = \varphi(x), \ \ x \in \partial\Omega \\ (u|_{\partial\Omega} = \varphi) \end{array} \tag{5.1.6}$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын, Ω облысында гармоникалық $u(x)$ функциясын табу есебін айтамыз. Мұндағы $\varphi(x)$ функциясы $\partial\Omega$ шекарада берілген үзіліссіз функция, $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$. Қысқаша жазсақ:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \ \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad u(x) \in C^2(\Omega) \cup C\left(\overline{\Omega}\right) -?$$

2. Нейман есебі. Лаплас теңдеуі үшін *Нейман есебі* немесе *екінші шеттік есеп* деп, $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ класында жататын және шекарада

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{5.1.7}$$

шартын қанағаттандыратын, Ω облысында гармоникалық $u(x)$ функциясын табу есебін түсінеміз. Мұндағы $\vec{n}$ – $\partial\Omega$ бетіне тұрғызылған сыртқы нормал,

$\dfrac{\partial u}{\partial n} - n$ нормал бойынша алынған туынды. Ал $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Нейман есебі бірмәнді шешілуі үшін

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi ds = 0 \tag{5.1.8}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті[1].

3. Үшінші шеттік есеп. Лаплас теңдеуі үшін *үшінші шеттік есеп* деп Ω облысында гармоникалық, $\partial\Omega$ шекарада

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{5.1.9}$$

шартын қанағаттандыратын және $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ класында жататын $u(x)$ функциясын анықтау есебін айтамыз.

Егер жоғарыдағы қойылған есептердің шешімдері $\partial\Omega$ шекараΩ облысының а қатысты Ω облысының ішінде немесе сыртында ізделінсе, онда сәйкес ішкі немесе сыртқы есеп деп аталады. Дқл осылайша, басқа да эллиптикалық теңдеулер үшін (5.1.6), (5.1.7) немесе (5.1.9) шекаралық шарттарымен берілген шеттік есептердің қойылымын келтіруге болады.

5.1.3 Лаплас теңдеуінің іргелі шешімдері

Лаплас теңдеуі көптеген түрлендірулерге қатысты инвариантты, сондықтан оның радиалдық, яғни $r = |x|$ тәуелді $u = u(r)$ шешімдерін іздейік.

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = u'_r \cdot \frac{x_k}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(u'_r \cdot \frac{x_k}{r}\right) = u''_{rr} \cdot \frac{x_k^2}{r^2} + u'_r \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x_k^2}{r^3}\right), \qquad k = 1, 2, ...n.$$

Лаплас операторы бойынша

$$\Delta u(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''_{rr} + u'_r \cdot \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right),$$

[1](дәлелдеуін төмендегі 5.1.3- - теоремадан қараңыз)

Демек,

$$\Delta u\left(r\right)=u''_{rr}+\frac{n-1}{r}u'_{r}=\frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}u_{r}\right)'_{r}=0. \tag{5.1.10}$$

1. n=2 жағдайда

$$r\cdot\Delta u=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0. \tag{5.1.11}$$

Екі жағын r – ге көбейтіп, интегралдасақ:

$$r\frac{du}{dr}=C_1\ \Rightarrow\ u\left(r\right)=C_1\ln r+C_2 \tag{5.1.12}$$

2. $n\geq 3$ жағдай. (5.1.10) екі жағын r^{n-1} – ге көбейтіп, интегралдасақ:

$$r^{n-1}\frac{du}{dr}=C_1\ \Rightarrow\ \frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r^{n-1}}$$

Бұдан

$$u\left(r\right)=-\frac{C_1}{\left(n-2\right)r^{n-2}}+C_2. \tag{5.1.13}$$

(5.1.12) және (5.1.13) шешімдерде негізгі рөл бірінші қосылғыш болып тұр, себебі тұрақты сан әрқашанда Лаплас теңдеуінің шешімі болады әрі ешқандай мәлімет бермейді. Сондықтан да, екі жағдайда да қолайлылық үшін $C_2=0$, ал $C_1=-\dfrac{1}{\omega_n}$ деп алайық[2]. Мұндағы $\omega_n=\dfrac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ – n өлшемді кеңістіктегі бірлік сфера ауданы, мәселен, $\omega_2=2\pi,\ \omega_3=4\pi,\dots$.

Анықтама 5.1.3 *Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі деп*

$$E\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & n=2,\\ \dfrac{1}{\omega_n\left(n-2\right)|x|^{n-2}}, & n\geq 3\end{cases}$$

функциясын айтамыз.

Жалпы жағдайда, $\vec{r}$ радиус векторы ретінде жоғарыдағыдай $O(0,0,...,0)$ координат басынан емес, кез келген $\xi\in\Omega$ нүктесінен x нүктесіне дейінгі $r=|\xi-x|$ арақашықтықты қарастырып, іргелі шешімді беруге болады.

[2] Кейбір оқулықтарда C_1 тұрақтысын оң таңбалы қылып та таңдайды.

Анықтама 5.1.4 *Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі деп*

$$E(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\xi-x|}, & n=2,\\ \dfrac{1}{4\pi|\xi-x|}, & n=3,\\ \dfrac{1}{\omega_n(n-2)|\xi-x|^{n-2}}, & n>3\end{cases} \tag{5.1.14}$$

функциясын айтамыз.

Мысал 5.1.1 *Төмендегі шарттарды қанағаттандыратын* $0<a<r<b$ *шар қабатында* $u=u(r)$ *гармоникалық функцияны анықтаңыз:*

$$\Delta u(r)=0,\ u(a)=A,\ u(b)=B;$$

Шешуі. а) n=2 өлшемді жағдайда Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі

$$u(r)=C_1\ln r+C_2$$

болғандықтан, шекаралық шарттарды қолдансақ

$$\left.\begin{array}{l}C_1\ln a+C_2=A\\ C_1\ln b+C_2=B\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$C_1=\frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}};\ C_2=A-C_1\ln a=A-\frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}}\cdot\ln a$$

$$u(r)=\frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}}\cdot\ln r+A-\frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}}\cdot\ln a=A+\frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}}\cdot\ln\frac{r}{a};$$

немесе

$$u(r)=\frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}}\cdot[2\pi\cdot E(x,y)-\ln a]+A.$$

б). n=3 жағдайда іргелі шешім $u=\dfrac{C_1}{r}+C_2$ болғандықтан

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{C_1}{a}+C_2=A\\ \dfrac{C_1}{b}+C_2=B\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$C_1=\frac{(A-B)ab}{b-a};\ C_2=A-\frac{C_1}{a}=A-\frac{(A-B)b}{b-a}=\frac{Bb-Aa}{b-a}$$

$$u(v)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{(A-B)ab}{r}+Bb-Aa\right]=$$

$$\frac{1}{b-a}\left[(A-B)ab\cdot4\pi\cdot E(x,y,z)+Bb-Aa\right].$$

Мысал 5.1.2 *$u(r)$ функциясы $K : a^2 < x^2 + y^2 = r^2 < b^2$ сақинада $\Delta u(r) = \frac{1}{2}$ Пуассон теңдеуінің K аймақта үзіліссіз шешімі болсын. Егер $u(b) = A,\ u(c) = B$ болса, $u(a)$ -қандай мәнге ие.*

5.1.4 Гармоникалық функциялардың негізгі қасиеттері. Грин формулалары

Гармоникалық функцияның қасиеттерін зерттеуде Гриннің бірінші және екінші формулалары жиі қолданылады.

Грин формулалары

Айталық, $\Omega \subset R^n$ – Евклид кеңістігіндегі жатық $\partial\Omega \in C^1$ шекаралы шенелген облыс болсын.

Теорема 5.1.1 *Айталық $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ және $v \in C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ болсын. Онда бұл u, v функциялары үшін Гриннің бірінші формуласы деп аталатын*

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds - \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad (5.1.15)$$

мына теңдігі орынды, мұндағы $\vec{n}$ сыртқы нормал вектор, $\nabla u = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Дәлелдеуі. Δ – операторы бойынша

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u dx = \int\limits_{\Omega} v \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx.$$

Бұдан $\int\limits_{\Omega} v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx$ интегралын жеке алып бөліктеп интегралдасақ:

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot n_k ds - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

Мұны k бойынша 1-ден n- ге дейін қосындыласақ, нәтижеде

$$\int\limits_{\Omega} v \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} n_k ds - \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

жоғарыдағы (5.1.15) – Гриннің[3] бірінші формуласын аламыз, яғни:

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx.$$

[3] GEORGE GREEN (Джордж Грин), (1793–1841)–ағылшын математигі. Ол математикалық физиканың көптеген бөлімдеріне елеулі үлесін қосқан ғалым.

Теорема 5.1.2 *Айталық* $u(x)$, $v(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ *болсын. Онда бұл* u *және* v *функциялары үшін*

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds \tag{5.1.16}$$

Гриннің екінші формуласы орынды.

Дәлелдеуі. Гриннің бірінші формуласы бойынша ((5.1.15) қараңыз)

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - \int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla u dx. \tag{5.1.17}$$

теңдігі орынды. Бұл (5.1.15) теңдіктен (5.1.17) мүшелеп алсақ бірден (5.1.16) аламыз.

Гармоникалық функциялардың негізгі қасиеттері.

1^0. *Гармоникалық функцияның нормал туындысы.*

Теорема 5.1.3 *Егер* $u(x)$ *функциясы жатық шекаралы* Ω *облысында гармоникалық және* $\overline{\Omega}$ *тұйық облысында үзіліссіз дифференциалданса, онда*

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{5.1.18}$$

Дәлелдеуі. Егер (5.1.15) Гриннің бірінші формуласын $v = 1$ және $u = u(x)$ гармоникалық функциясы үшін жазсақ, $\nabla v = 0$, $\Delta u = 0$ болғандықтан, бірден (5.1.18) теңдікті аламыз. Бұл (5.1.18) теңдік жоғарыдағы (5.1.7) Нейман есебінің шешілу шарты.

2^0. *Гармоникалық функцияның дифференциалдануы.*

Теорема 5.1.4 Ω *облысында гармоникалық* $u(x)$ *функциясы осы гармоникалық* Ω *облысының кез-келген* $x \in \Omega$ *нүктесінде шексіз дифференциалданады.*

3^0. *Арифметикалық орта мән туралы теорема.*

Айталық $B(x_0, r)$ – центрі x_0 нүктесіндегі, радиусы r-ге тең шар, ал $\partial B(x_0, r)$ оның беті, яғни сфера болсын.

Теорема 5.1.5 *Егер* $u(x)$ *функциясы* $B(x_0, r)$ *шар ішінде гармоникалық, ал* $\partial B(x_0, r)$ *сферасында үзіліссіз болса, онда оның* x_0 *центріндегі мәні бүкіл шардың (сфера) беті бойынша арифметикалық орта мәніне тең, яғни*

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x_0,r)} u ds \tag{5.1.19}$$

4^0. *Гармоникалық функцияның интеграл арқылы өрнектелуі*

Теорема 5.1.6 *Айталық* $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *болсын. Онда*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(x,\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right] ds_\xi - \int\limits_{\Omega} E(x,y) \Delta u(y)\, dy \qquad (5.1.20)$$

теңдігі орынды.

Бұл (5.1.20) өрнек Гриннің негізгі формуласы деп аталады.

Теорема 5.1.7 *Айталық* $u(x)$ *функциясы* Ω *облысында гармоникалық және* $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ *болсын. Онда*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(x,\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right] ds_\xi \qquad (5.1.21)$$

теңдігі орынды.

(5.1.21) теңдік *гармоникалық* $u(x)$ *функциясының интеграл арқылы өрнектелу формуласы* деп аталады. Мұндағы $E(x,\xi)$ – Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі.

5^0. *Максимум қағидасы.*

Теорема 5.1.8 *Ақырлы* Ω *облысында гармоникалық және* $\overline{\Omega}$ *тұйық облысында үзіліссіз* $u(x)$ *функциясы өзінің ең үлкен және ең кіші мәндеріне* Ω *облысының тек шекарасында ғана ие болады. Басқаша айтқанда,* $\forall x \in \Omega$ *үшін*

$$\min_{x\in\partial\Omega} u(x) < u(x) < \max_{x\in\partial\Omega} u(x) \qquad (5.1.22)$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Салдар 1. Ω облысында гармоникалық және $\overline{\Omega}$ облысында үзіліссіз $u(x)$ функциясы өзінің ең үлкен мәнін (ең кіші мәнін) Ω облысының ішкі нүктесінде қабылдайтын болса, онда ол бүкіл $\overline{\Omega}$ облысында тұрақты функция болады, яғни $u(x) = const$.

Салдар 2. Егер Ω облысында гармоникалық және $\overline{\Omega}$ тұйық облысында үзіліссіз $u(x)$ және $v(x)$ функциялары $\partial\Omega$ шекарада

$$u(x) \le v(x), \ x \in \partial\Omega$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда бүкіл $\overline{\Omega}$ тұйық облысында

$$u(x) \le v(x), \ x \in \overline{\Omega}$$

теңсіздігі орындалады.

6^0. *Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі шешімінің жалғыздығы және орнықтылығы.*

Теорема 5.1.9 *Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебінің шешімі жалғыз.*

Дәлелдеуі. Кері жорып, есептің әртүрлі $u_1(x) \neq u_2(x)$ екі шешімі бар болсын делік, яғни

$$\begin{array}{l} \Delta u_k = 0,\ x \in \Omega, \\ u_k|_{\partial\Omega} = \varphi,\ x \in \partial\Omega, \qquad u_k \in C\left(\overline{\Omega}\right),\quad k = 1,\, 2. \end{array}$$

Бұл u_1 және u_2 шешімдерінің айырымы $u = u_1 - u_2$ үшін

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0,\ x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \end{array}$$

есебін аламыз. Бұдан максимум қағидасы бойынша $\forall x \in \Omega$ үшін $u(x) \equiv 0$. Демек $u_1 \equiv u_2$, яғни қарама- қайшылыққа келеміз.

Теорема 5.1.10 *Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебінің шешімі орнықты.*

Дәлелдеуі. Айталық, $u_1(x), u_2(x)$ функциялары

$$\begin{array}{l} \Delta u_k = 0,\ x \in \Omega, \\ u_k\,|_{\partial\Omega} = \varphi_k(x),\quad x \in \partial\Omega, \quad u_k \in C\left(\overline{\Omega}\right),\quad k = 1,\ 2 \end{array}$$

Дирихле есептерінің шешімдері болсын. Егер $\forall\varepsilon > 0$ үшін $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ табылып, $|f_1 - f_2| < \delta \Rightarrow |u_1 - u_2| < \varepsilon$ болса, $u = u_1 - u_2$ үшін $\Delta u = 0$ – гармоникалық және $\partial\Omega$ шекарада $|u| = |f_1 - f_2| < \delta$ орындалады. Салдар 2 $\Rightarrow |u| < \delta < \varepsilon\ \forall x \in \Omega$

7^0. *Аналитикалық функция мен гармоникалық функция арасындағы байланыс.*

Теорема 5.1.11 *Егер комплекс айнымалылы $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциясы аналитикалық болса, онда оның $u(x)$, $v(x)$ нақты және жорамал бөліктері гармоникалық функциялар болады.*

Дәлелдеуі. Аналитикалық функция болудың қажетті және жеткілікті шарты- Коши-Риман шартын қолданамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Бұл Коши-Риман шартының біріншісін x бойынша, екіншісін y бойынша дифференциалдап, қоссақ, $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$ теңдігін аламыз. Дәл сол сияқты біріншісін y бойынша, екіншісін x бойынша дифференциалдап, алсақ, $v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0$ теңсіздігін аламыз.

Мұндай нақты және жорамал бөліктері болатын гармоникалық $u(x), v(x)$ функцияларын *түйіндес гармоникалық функциялар* деп атайды.

Мысал 5.1.3 $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$ *гармоникалық функциясы берілген. Оған түйіндес* $v(x,y)$ *гармоникалық функциясын анықтаңз.*

Шешуі. Коши-Риман шарты бойынша:

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 2x - 1 = v_y \\ u_y = -2y = -v_x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_y = 2x - 1 \\ v_x = 2y \end{array}\right.$$

Бірінші теңдікті y бойынша интегралдасақ: $v = 2xy - y + \varphi(x)$, мұндағы $\varphi(x)$ кез-келген еркін функция. Мұны екінші теңдікке қойсақ:

$$2y + \varphi'(x) = 2y \;\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \;\Rightarrow \varphi(x) = C$$

Демек $v(x,y) = 2xy - y + C$ – гармоникалық. Ал

$$f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C) = z^2 - z + iC$$

функциясы аналитикалық функция.

5.1.5 Жаттығулар

5.1.1 *$u(x)$ функциясы гармоникалық болатындай α параметрінің мәндерін табыңыздар:*
1. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + \alpha z^2$*;*
2. $u(x) = r^{-\alpha}$*, мұндағы* $r^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$*, (*$x = 0$ *нүктесі енбейтін облыста).*

5.1.2 *Айталық, $u(x)$ функциясы $D \subset \mathbb{R}^n$ облысында гармоникалық болсын.*
1. $v(x) = u(x+h)$, $h = const \in \mathbb{R}^n$ *функциясы* $D' \equiv D - h = \{x - h : x \in D\}$ *облысында гармоникалық функция бола ма?*
2. $v(x) = \sum\limits_{k=1}^{4} x_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ *функциясы D облысында гармоникалық функция бола ма?*
3. $v(x) = u(\lambda x)$, $\lambda = const \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ *функциясы гармоникалық функция бола ма? және қандай облыста гармоникалық?*

5.1.3 *Төменде $f(x,y)$ аналитикалық функциясының $Ref(z) = u(x,y)$ нақты бөлігі берілген. Оған түйіндес $Imf(z) = v(x,y)$ гармоникалық функцияны анықтап, $f(x,y)$ аналитикалық функциясын құрыңыз:*
1. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$;
2. $u(x,y) = e^x \sin y$;
3. $u_x(x,y) = y^3 - 3x^2 y$;

5.1.4 $\mathbb{R}^3$ *кеңістігінде үзіліссіз және* $\Delta u(r) = \ln r$ *теңдеуін қанағаттандыратын барлық* $u = u(r)$ *функцияларды анықтаңыз.*

5.1.5 $\mathbb{R}^2$ *жазықтығындағы* $a < r < b$ *сақинада гарманикалық (*$\Delta u = 0$*) және шекарада*

$$u|_{r=a} = T, \;\; (u_r + u)|_{r=b} = U, \;\; 0 < a < b < \infty, \;\; T, U = const$$

шарттарды қанағаттандыратын $u = u(r)$ *функциясын табыңыз.*

5.1.6 *Коши-Риман теңдеулер жүйесін пайдаланып,* $u(x,y)$ *гармоникалық функциясын табыңыз, егер* $u_y = e^x \cos y$ *болса.*

5.1.7 $\Delta u(r) = 0,\ u(a) = A,\ \ u_r(b) = B$ *шарттарды қанағаттандыратын* $0 < a < r < b$ *сақинада* $u = u(r)$ *гармоникалық функцияны анықтаңыз, мұндағы* $a, b, A, B = const$.

5.1.8 *Айталық,* $u(r)$ $K : a < r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < a < b < \infty$ *шар қабатында гармоникалық және* $\overline{K}$ *тұйық облыста үзіліссіз функция болсын.* $u(a)$ *мәнін қалай таңдау керек, егер:*
1. $u(c) = A,\ \ u(b) = B,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ (n = 2)$.
2. $u(c) = A,\ u_r(b) = B,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $(n = 3)$, *мұнда* $a < c < b$, $a, b, c, A, B = const$.

5.1.9 $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ *шеңбері ішінде Нейман есебі дұрыс қойылған ба? a және b тұрақтыларының қандай мәндерінде дұрыс қойылады?*

$$\triangle u(x,y) = 0,\ \ 0 \le r < R,\ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial r}\Big|_{r=R} = ax^2 - by^2 + y.$$

5.1.10 *Айталық,* $u(r)$ *функциясы* $K : x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ *шеңберінде* $\triangle u(x,y) = kr,\ k = const$ *Пуассон теңдеуінің шешімі және* $\overline{K}$ *тұйық облысында үзіліссіз болсын. Егер* $u(c) = A$ *белгілі болса* $u(R)$ *мәнін анықтаңыз, мұнда* $0 \le c < R,\ c, A, R = const$.

5.1.11 D *облысында гармоникалық болатын* $u(x,y) = xy$ *функциясының* $\overline{D} = \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$ *тұйық облысындағы экстремум нүктелерін табыңыздар.*

5.1.12 $u = x^2 - y^2$ *функциясының* $\overline{D} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ *облысындағы экстремум нүктелерінде* D *облысының* S *шекарасына тұрғызылған сыртқы* n *нормал бойынша* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *туындысының мәндерін табыңыз.*

5.1.6 Жауаптары

5.1.1 *1.* $\alpha = -2$; *2.* $\alpha = 0$ *және* $\alpha = n - 2$ *егер* $n > 2$ *болса;*

5.1.2 *1. гармоникалық; 2. гармоникалық; 3. гармоникалық.*

5.1.3 *1.* $v(x,y) = 2xy + 2y + C,\ f(z) = z^2 + 2z + iC,\ C = const \in \mathbb{R}$;
2. $v(x,y) = -e^x \cos y + C,\ f(z) = i\left(C - e^z\right),\ C = const \in \mathbb{R}$;
3. $v(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \frac{3}{2}x^2y^2 + C_1x + C_2,\ f(z) = u + iv,\ C_1, C_2 = const \in \mathbb{R}$.

5.1.4 $u(r) = \dfrac{r^2}{6}\left(\ln r - \dfrac{5}{6}\right) + C,\ \forall C = const.$

5.1.5 $u(r) = T + \dfrac{(U-T)b\ln\frac{r}{a}}{1+b\ln\frac{b}{a}}.$

5.1.6 $u = e^x \sin y + C_1 x + C_2$

5.1.7 $u(r) = A + bB\ln\frac{r}{a}$

5.1.8 *1*. $u(a) = \frac{A\ln\frac{b}{a} - B\ln\frac{c}{a}}{\ln\frac{b}{c}}$; *2*. $u(a) = A + \frac{b^2 B(a-c)}{ac}.$

5.1.9 $a = b$

5.1.10 $u(R) = A + \frac{k(R^3-c^3)}{9}.$

5.1.11 $(x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5.1.12 $(2,0)\,,\,(-2,0)$ *максимум нүктелерінде* $\frac{\partial u}{\partial n} = 4$, *ал* $(0,3)\,,\,(0,-3)$ *минимум нүктелерінде* $\frac{\partial u}{\partial n} = -6.$

5.2 Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін шеңбер типті облыстарда қойылған шеттік есептер

5.2.1 Шеңбер ішінде қойылған Лаплас теңдеуі үшін шеттік есептер

$\Omega = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ шеңбері ішінде

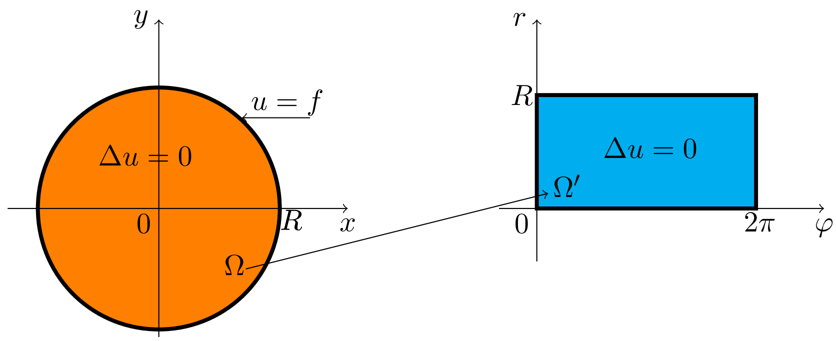
$$\Delta u\,(r, \varphi) = 0 \tag{5.2.23}$$

Лаплас теңдеуін, $\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = R^2\}$ шеңбері шекарасында (бойында)

$$u|_{\partial\Omega} = f \tag{5.2.24}$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ тұйық облысында үзіліссіз $u\,(x, y)$ шешімін анықтау есебін қарастырайық. Бұл есеп *шеңбер ішінде қойылған Дирихле есебі* деп аталады.

Егер декарттық координата жүйесінен $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ полярлық координата жүйесіне өтсек, $\overline{\Omega} = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ шеңбері $\overline{\Omega'} = \{0 \leq r \leq R,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ тіктөртбұрышына айналады (сурет 5.2.1.-1).



Сурет 5.2.1.-1.

Ал (5.2.23)-(5.2.24) есебі

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega' \tag{5.2.25}$$

$$u|_{r=R} = f\,(\varphi)\,, \ \ f\,(\varphi + 2\pi) = f\,(\varphi)\,, \ \ \varphi \in [0,\ 2\pi] \tag{5.2.26}$$

түрге келеді. Бұл жағдайда $u\,(r, \varphi)$ ізделінді шешімі периодты функция екендігі анық, яғни:

$$u\,(r, \varphi + 2\pi) = u\,(r, \varphi)\,. \tag{5.2.27}$$

Сонымен қатар, $r=0$ шеңбер центрінде $u(r,\varphi)$ функциясы r және φ бойынша үзіліссіз дифференциалданады. Сондықтан, $r=0$ нүктеде шешілген

$$|u(0,\varphi)| < const. \tag{5.2.28}$$

Фурье әдісі бойынша (5.2.25)-(5.2.26) есептің шешімін

$$u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi) \neq 0 \tag{5.2.29}$$

түрінде іздейміз. Мұны (5.2.27) және (5.2.28) шарттарға қойсақ, бірден

$$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi), \tag{5.2.30}$$

$$|R(0)| < const \tag{5.2.31}$$

шарттарын аламыз. Ал (5.2.25) теңдеуге қойсақ

$$R''(r)\,\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0.$$

Екі жағын $\dfrac{r^2}{R\Phi}$ көбейтіп

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda \tag{5.2.32}$$

теңдігін, ал бұдан келесі екі ЖДТ аламыз:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \tag{5.2.33}$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \tag{5.2.34}$$

(5.2.34), (5.2.30) Штурм-Лиувиль есебін қарастырайық:

а) Айталық $\lambda = 0$ болсын. Онда (5.2.34) теңдеудің жалпы шешімі

$$\Phi(\varphi) = c_1\varphi + c_2$$

Бұдан (5.2.30) шарты бойынша, $c_1 = 0$, ал C_2- кез келген тұрақты. Олай болса, $\lambda = 0$ үшін

$$\Phi_0(\varphi) = a_0, \;\; a_0 = const \tag{5.2.35}$$

б) Айталық $\lambda = -\mu^2 < 0$, $(\mu > 0)$ теріс сан болсын. Онда (5.2.34) теңдеу

$$\Phi''(\varphi) - \mu^2\Phi(\varphi) = 0$$

түрде, және оның жалпы шешімі:

$$\Phi(\varphi) = c_1 e^{\mu\varphi} + c_2 e^{-\mu\varphi}$$

болады. Бұл шешім периодты емес, яғни (5.2.30) шарт орындалмайды. Сондықтан $\lambda = -\mu^2$ меншікті сан бола алмайды.

в) Айталық $\lambda = \mu^2 > 0,\ \ \mu > 0$ оң сан болсын. Онда (5.2.34) теңдеу

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0$$

түрде жазылады, және оның жалпы шешімі:

$$\Phi(\varphi) = a\cos\mu\varphi + b\sin\mu\varphi \tag{5.2.36}$$

Бұл шешім (5.2.30) периодтылық шартын тек $\mu = n,\ n = 1, 2, 3, ...$ жағдайда ғана қанағаттандырады. Демек (5.2.34), (5.2.30) есебінің шешімдері

$$\begin{aligned}
&\lambda = 0 \text{ кезде } \Phi_0 = a_0, \\
&\lambda = n^2 \text{ кезде } \Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, 3, ...
\end{aligned}$$

болады. Енді бұл λ меншікті сандар үшін (5.2.33) теңдеуді шешейік.

1) Егер $\lambda = 0$ болса,

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0.$$

Екі жағын $r^2 R'(r)$ қысқартсақ:

$$\frac{R''(r)}{R''(r)} + \frac{1}{r} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \ln|R'| + \ln|r| = \ln c_1 \quad \Rightarrow$$

$$R'(r) = \frac{c_1}{r},\ \ R(r) = c_1 \ln r + c_2. \tag{5.2.37}$$

Бұдан (5.2.31) шенелгендік шарты бойынша $c_1 = 0$ ал c_2 кез-келген нөлден өзге тұрақты сан.

Егер $c_2 = 1$ деп алсақ, $R_0(r) = 1$. Демек,

$$u_0(r, \varphi) = \Phi_0 R_0 = a_0. \tag{5.2.38}$$

Енді $\lambda = n^2,\ \ n = 1, 2, 3, ...$ жағдайды қарастырайық. Бұған сәйкес (5.2.33) теңдеу

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \tag{5.2.39}$$

түрде жазылады. Бұл теңдеудің шешімін $R(r) = r^m$ түрінде іздейік. Мұндағы m санын r^m теңдеудің шешімі болатындай таңдап аламыз.

$$r^2 m(m-1) r^{m-2} + rmr^{m-1} - n^2 r^m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm n.$$

Олай болса, (5.2.39) теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес шешімдері $R_1(r) = r^n$, $R_2(r) = r^{-n}$ функциялары, ал жалпы шешімі

$$R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \tag{5.2.40}$$

функциясы болады. Шеңбер іші үшін, яғни жоғарыдағы (5.2.31) шарты орындалу үшін $c_2 = 0$ болуы қажет. Ал c_1 еркін тұрақты бола алады. Егер оны $c_1 = 1$ деп таңдап алсақ, онда шешім келесідей болады:

$$R_n(r) = r^n, \; n = 1, 2, 3, ... \tag{5.2.41}$$

Демек, (ізделінді $u(r,\varphi)$ шешім) (5.2.25)-(5.2.26) есебінің шенелген әрі периодты шешімдері:

$$\begin{aligned} & u_0(r,\varphi) = a_0 \\ & u_n(r,\varphi) = r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \;\; n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

болады. Ал жалпы шешім, суперпозиция қағидасы бойынша

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{5.2.42}$$

қатарымен анықталады. Мұндағы a_i, b_j, $i = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{1,\infty}$ белгісіз коэффиценттерін (5.2.26) шекаралық шарт орындалатындай таңдап аламыз.

Айталық $f(\varphi)$ функциясы $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ толық ортогонал жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктелінсін, яғни

$$f(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{5.2.43}$$

мұндағы A_n, B_n Фурье коэффиценттері:

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \; n = 1, 2, 3, ... \end{gathered} \tag{5.2.44}$$

(5.2.26) шекаралық шарт бойынша $r = R$ жағдайда (5.2.42) және (5.2.43) қатарларды салыстырып,

$$a_0 = A_0; \;\; a_n = \frac{A_n}{R^n}, \; b_n = \frac{B_n}{R^n} \tag{5.2.45}$$

белгісіз коэффиценттерін анықтаймыз. Бұл анықталған коэффициенттерді (5.2.42) қатарға қойсақ, Дирихленің шеңбер ішіндегі шешімін аламыз

$$u\left(r, \varphi\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right). \tag{5.2.46}$$

5.2.2 Шеңбер сыртында қойылған Лаплас теңдеуі үшін шеттік есептер

Есептің қойылымы. $\Omega = \{x^2 + y^2 = r^2 > R^2\}$ шеңбері сыртында келесі Дирихле есебінің шешімін анықтайық:

$$\Delta u\left(x, y\right) = 0, \Omega = \{x^2 + y^2 = r^2 > R^2\}, \tag{5.2.47}$$

$$u|_{\partial\Omega} = f, \; \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = R^2\}. \tag{5.2.48}$$

Бұл есеп жоғарыдағы ішкі есеп тәрізді шешіледі. Алайда, Ω облысы шенелмеген облыс болғандықтан, шешімнің шексіздікте шенелген болуы талап етіледі, яғни

$$|u\left(M\right)| < c, \quad M\left(x, y\right) \to \infty. \tag{5.2.49}$$

Сондықтан, (5.2.40) жалпы шешімде $c_1 = 0$ болуы талап етіледі. Олай болса, сыртқы есеп үшін (5.2.39) теңдеудің шешімі

$$R_n\left(r\right) = r^{-n}$$

түрде болады. Демек, Дирихленің сыртқы есебінің жалпы шешімі

$$u\left(r, \varphi\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-n} \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) \tag{5.2.50}$$

формуламен анықталады. Мұнда

$$a_0 = A_0, \quad a_n = A_n R^n, \quad b_n = B_n R^n, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{5.2.51}$$

ал, A_n, B_n сандары (5.2.44) формуламен есептелінеді.

Ескерту 5.2.1 *Жоғарыдағы табылған (5.2.46) және (5.2.50) қатарлары сәйкес Дирихленің ішкі және сыртқы есептерінің формалды шешімдері. Бірақ олардың сәйкес $r < R$ және $r > R$ облыстарында бірқалыпты жинақтылығын әрі Дирихле есебінің шешімі болатындығын дәлелдеуге болады. ([]-[] әдебиеттерден табуға болады).*

Ескерту 5.2.2 *Егер (5.2.23)-(5.2.24) және (5.2.47)-(5.2.48) есептері – Дирихле шартыны орнында үшінші шеттік немесе Нейман шартымен қойылан ішкі немесе сыртқы есептер болса, онда да олар дәл осындай жолмен шешіледі. Бұл кезде тек a_n, b_n коэффиценттеріндер ғана өзгешелікте болады.*

Мысал 5.2.1 $(x+1)^2 + y^2 < 1$ *шеңбері ішінде келесі Дирихле есебін шешіңіз:*

$$\begin{array}{l} \Delta u\,(x,y) = 0, \quad \Omega = \{(x+1)^2 + y^2 < 1\} \\ u|_{\partial\Omega} = 4x^3 + 6x - 1, \quad \partial\Omega = \{(x+1)^2 + y^2 = 1\}. \end{array}$$

Шешуі. Есептің шешімі полярлық координата жүйесінде (5.2.46) формуламен өрнектеледі:

$$u\,(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

Егер

$$\begin{cases} x + 1 = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

бойынша полярлық координата жүйесіне өтсек

$$\Omega' = \{0 \le r \le 1,\;\; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

және шекаралық функция

$$f\,(r,\varphi) = 4\,(r\cos\varphi - 1)^3 + 6\,(r\cos\varphi - 1) - 1.$$

Шекарадағы мәні:

$$f\,(r,\varphi)|_{r=1} = 4\,(r\cos\varphi - 1)^3 + 6\,(r\cos\varphi - 1) - 1 =$$

$$4\cos^3\varphi - 12\cos^2\varphi + 12\cos\varphi - 4 + 6\cos\varphi - 6 - 1 =$$

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - 12\cos^2\varphi + 21\cos\varphi - 11 = \cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi.$$

Бұдан (5.2.44), (5.2.45) формулалар бойынша Фурье коэффициенттерін есептесек

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi)\,d\varphi =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}\sin 3\varphi - 3\sin 2\varphi + 21\sin\varphi - 17\varphi\right]\Bigg|_0^{2\pi} = -17$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} 21, & n = 1 \\ -6, & n = 2 \\ -1, & n = 3 \\ 0, & n = 0, 4, 5, ... \end{cases}$$

$$b_n = B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi)\sin n\varphi d\varphi = 0.$$

Олай болса, полярлық координата жүйесінде табылған шешім

$$u(r,\varphi) = -17 + 21r\cos\varphi - 6r^2\cos 2\varphi + r^3\cos 3\varphi$$

Енді кері декарттық жүйесіне көшсек,

$$u(x,y) = -17 + 21r\cos\varphi - 6r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + r^3\left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right) =$$

$$-17 + 21(x+1) - 6(x+1)^2 + 6y^2 + 4(x+1)^3 - 3\left((x+1)^2 + y^2\right)(x+1) =$$

$$x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 12x - 3xy^2 - 1.$$

Жауабы: $u(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 12x - 3xy^2 - 1.$

Бұл есепті (5.2.44)-(5.2.45) интегралдарды есептемей-ақ, *анықталмаған коэффиценттер* әдісін қолданып шешу жеңілірек болады. (5.2.46) формула бойынша

$$u(r,\varphi)|_{r=1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\Big|_{r=1} = \tag{5.2.52}$$

$$a_0 + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi + a_3\cos 3\varphi + b_3\sin 3\varphi = ...$$

Екінші жағынан шекаралық шарт бойынша

$$u(1,\varphi) = f(1,\varphi) = \cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi + 21\cos\varphi - 17 \tag{5.2.53}$$

Бұл (5.2.52), (5.2.53) өрнектерін салыстырып, $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $n = 0, 1, 2, ...$ функцияларының алдындағы коэффиценттерін теңестірсек:

$$a_0 = -17,\ a_1 = 2,\ a_2 = -6,\ a_3 = 1,\ \ a_4 = a_5 = ... = 0,$$
$$b_1 = b_2 = ... = 0.$$

Демек шешім,

$$u(r,\varphi) = -17 + 21r\cos\varphi - 6r^2\cos 2\varphi + r^3\cos 3\varphi$$

немесе декарттық координата жүйесінде

$$u(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 12x - 3xy^2 - 1.$$

Мысал 5.2.2 *Дирихленің сыртқы есебін шешіңіз:*

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 > R^2,$$

$$u(x,y) = y^2 - xy, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Шешуі. (5.2.50) формуламен анықталынған $u(r,\varphi)$ шешімі $r = R$ шекарада

$$u(r,\varphi)\,|_{r=R} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\Big|_{r=R} =$$

$$a_0 + \frac{a_1}{R}\cos\varphi + \frac{b_1}{R}\sin\varphi + \frac{a_2}{R^2}\cos 2\varphi + \frac{b_2}{R^2}\sin 2\varphi + ...$$

Ал шекарадағы мәні (шекаралық шарт) бойынша

$$u(R,\varphi) = f(R,\varphi) = \left(y^2 - xy\right)\Big|_{\substack{x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi}} = R^2\sin^2\varphi - R^2\sin\varphi\cos\varphi =$$

$$\frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\varphi) + \frac{R^2}{2}\sin 2\varphi = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{R^2}{2}\sin 2\varphi$$

Соңғы екі өрнекті салыстырып

$$a_0 = \frac{R^2}{2},\ a_1 = 0,\ \ a_2 = -\frac{R^4}{2},\ a_3 = a_4 = a_5 = ... = 0$$

$$b_1 = 0,\ b_2 = -\frac{R^4}{2},\ \ b_3 = b_4 = ... = 0$$

коэффициенттерін анықтаймыз. Олай болса,

$$u(r,\varphi) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2r^4}\cos 2\varphi - \frac{R^4}{2r^4}\sin 2\varphi$$

немесе

$$u(x,y) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2r^4}\left(r^2\cos 2\varphi - r^2\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}} =$$

$$= \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2r^4}\left(r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) - 2r^2\cos\varphi\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}} =$$

$$\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2 - y^2 - 2xy\right).$$

Жауабы: $u(x,y) = \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{R^4}{2\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2 - y^2 - 2xy\right)$.

Мысал 5.2.3 *Полярлық координата жүйесінде берілген келесі Нейманның ішкі есебінің шешімін анықтаңыз:*

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \qquad \Omega = \{0 < r < R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \cos^3\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Шешуі. Әуелі Нейман есебінің $\int\limits_{\partial\Omega}\dfrac{\partial u}{\partial n}ds = 0$ шешімділік шартын тексерейік.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\partial\Omega'}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int\limits_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi = \frac{3}{4}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\cos 3\varphi d\varphi = 0. \qquad \checkmark$$

Екіншіден, (5.2.42) формула бойынша

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} nr^{n-1}\left(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\right)\Bigg|_{r=R} =$$

$$a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + 2R_1a_2\cos 2\varphi + 2R_1b_2\sin 2\varphi + 3R^2a_3\cos 3\varphi + 3R^2\sin 3\varphi + ... =$$

$$\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi.$$

Бұдан

$$a_0 = c = const, \;\; a_1 = \frac{3}{4}, \;\; a_3 = \frac{1}{12R^2}, \;\; a_i = 0, \; i = 2, 4, 6, \; \ldots,$$

$$b_j = 0, \;\; j = 0, 1, 2, \; \ldots .$$

Демек шешім,

$$u\left(r, \varphi\right) = \frac{3}{4} r \cos\varphi + \frac{r^3}{12R^2} \cos 3\varphi + c, \;\; c = const.$$

5.2.3 Сақинада қойылған Лаплас теңдеуі үшін шеттік есептер

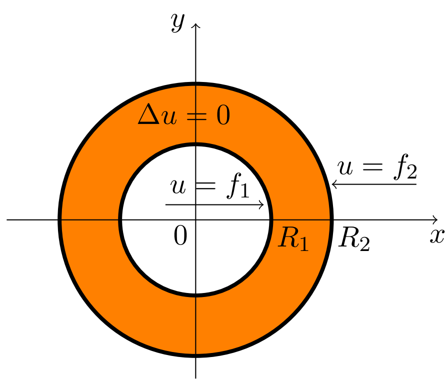
Радиустары R_1 және R_2 $(R_1 < R_2)$, центрі бас нүктеде орналасқан екі шеңбердің арасындағы сақинада (сурет 5.2.3.-2)

$$\Delta\left(x, y\right) = 0, \quad \left(R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\right)$$

Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын және сақина шекарасында

$$u|_{x^2+y^2=R_1^2} = f_1\left(x, y\right), \qquad u|_{x^2+y^2=R_2^2} = f_2\left(x, y\right) \tag{5.2.54}$$

шарттарын қанағаттандыратын $u\left(x, y\right)$ шешімін табу есебін қарастырайық.



Сурет 5.2.3.-2.

Жоғарыдағыдай, декарттық координата жүйесінен полярлық координата жүйесіне (5.1.3) өтсек, бұл есеп

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \; 0 < \varphi < 2\pi, \\ u\left(R_1, \varphi\right) = f_1\left(\varphi\right), \\ u\left(R_2, \varphi\right) = f_2\left(\varphi\right), \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \tag{5.2.55}$$

түрде қойылады.

Мұнда $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ шекаралық функциялары 2π периодты деп қабылдаймыз. Фурье әдісін қолданып, шешімді $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \neq 0$ түрінде іздесек, нәтижеде

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \tag{5.2.56}$$

$$\begin{aligned} &\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \\ &\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{aligned} \tag{5.2.57}$$

теңдеулеріне келеміз. (5.2.57) есептің периодтық шартын қанағаттандыратын шешімдері тек $\lambda_n = \pm n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ жағдайда ғана бар болады, және оларға сәйкес дербес шешімдері

$$\Phi_{1n} = \cos n\varphi, \quad \Phi_{2n} = \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

ал мұндай λ_n сәйкес (5.2.56) теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес шешімдері

$$R_{10} = 1, \;\; R_{20} = \ln r, \;\; n = 0,$$

$$R_{1n} = r^n, \;\; R_{2n} = r^{-n}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

болады. Олай болса (5.2.55) есептің жалпы шешімі:

$$u(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n r^n + d_n r^{-n}\right) \sin n\varphi \right] \tag{5.2.58}$$

түрде болады. Мұндағы a_i, b_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ белгісіз коэффиценттерді шекаралық шарттарды қолданып анықтаймыз, яғни:

$$u(R_1,\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n R_1^n + d_n R_1^{-n}\right) \sin n\varphi \right] = f_1(\varphi),$$

$$u(R_2,\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n R_2^n + d_n R_2^{-n}\right) \sin n\varphi \right] = f_2(\varphi).$$

Бұл екі қатарды екінші жағынан $f_1(\varphi)$ және $f_2(\varphi)$ функциялары үшін Фурье қатары деп қабылдап, Фурье коэффиценттері бойынша, a_0, b_0 коэффиценттеріне қатысты

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\, d\varphi, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\varphi)\, d\varphi \end{cases} \tag{5.2.59}$$

жүйесін, a_n, b_n, $n = 1, 2, 3, \dots$ коэффиценттеріне байланысты

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \end{cases} \tag{5.2.60}$$

жүйесін және c_n, d_n, $n = 1, 2, 3, \dots$ коэффиценттеріне байланысты

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \end{cases} \tag{5.2.61}$$

жүйелерін аламыз. Бұл (5.2.59)-(5.2.61) теңдеулер жүйелерінен a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n белгісіз коэффициенттерін анықтап, (5.2.58) қойсақ, ізделінді шешімді аламыз.

Мысал 5.2.4 *Келесі сақинада берілген Дирихле есебін қарастырайық:*

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0, \quad 1 < r < 2, \ 0 < \varphi < 2\pi \\ u(1, \varphi) = \cos\varphi, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2, \varphi) = 3\sin 2\varphi, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Шешуі. 1. (5.2.58) формула бойынша шекаралық шарттарды қолдансақ:

$$u(1, \varphi) = a_0 + (a_1 + b_1)\cos\varphi + (c_1 + d_1)\sin\varphi + (a_2 + b_2)\cos 2\varphi + (c_2 + d_2)\sin 2\varphi + \dots =$$

$$u(2, \varphi) = a_0 + b_0 \ln 2 + \left(2a_1 + \frac{b_1}{2}\right)\cos\varphi + \left(2c_1 + \frac{d_1}{2}\right)\sin\varphi +$$

$$\left(4a_2 + \frac{b_2}{4}\right)\cos 2\varphi + \left(4c_2 + \frac{d_2}{4}\right)\sin 2\varphi + \dots = 3\sin 2\varphi$$

Бұдан $n = 1, 2$ жағдайда, яғни a_1, b_1, c_2, d_2 коэффициенттері үшін

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1 \\ 2c_1 + \dfrac{b_1}{2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 + d_2 = 0 \\ 4c_2 + \dfrac{d_2}{4} = 3. \end{cases} \tag{5.2.62}$$

теңдеулер жүйесін аламыз, ал қалан a_i, b_i, c_i, d_i коэффициенттерінің барлығы нөлге тең. Бұл жүйелердің шешімдері:

$$a_1 = -\frac{1}{3},\ b_1 = \frac{4}{3},\ c_2 = \frac{4}{5},\ d_2 = -\frac{4}{5}.$$

Демек, шешім (5.2.58) бойынша:

$$u(r,\varphi) = \left(-\frac{1}{3}r + \frac{4}{3r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{4}{5}r^2 - \frac{4}{5r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

2. Екіншіден, жоғарыдағы (5.2.59)-(5.2.61) формулаларын қолдансақ, онда да ортогональдық қасиеті бойынша (5.2.62) жүйеге келеміз. қалған коэффициенттері нөлге тең болады.

5.2.4 Сақинада қойылған Пуассон теңдеуі үшін шеттік есептер

Есептің қойылымы. Төмендегі Пуассон теңдеуі үшін сақинада қойылған үшінші шеттік есепті қарастырайық:

$$\Delta u = f(r,\varphi), \quad r_1 < r < r_2, \tag{5.2.63}$$

$$u|_{r=r_1} = g_1(\varphi), \tag{5.2.64}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2} = g_2(\varphi). \tag{5.2.65}$$

Есептің берілу облысы шеңбер типті болғандықтан, (5.2.63) теңдеу (r,φ) полярлық координата жүйесінде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = f(r,\varphi) \tag{5.2.66}$$

түрде жазылады. Бұл (5.2.66) теңдеудің шешімін

$$u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos\, n\varphi + b_n(r)\sin\, n\varphi \tag{5.2.67}$$

тригонометриялық Фурье қатары түрінде іздейміз, мұндағы $a_0(r)$, $a_n(r)$, $b_n(r)$ - әзірге белгісіз функциялар. Алда оларды анықтап, бастапқы (5.2.63)-(5.2.65) есептің шешімін табатын боламыз.

Ол үшін алдымен $f(r,\varphi)$ функциясын Фурье қатарына жіктеп (мұнда әрине жіктеледі деп жоримыз)

$$f(r,\varphi) = \tilde{a}_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(r)\cos\, n\varphi + \tilde{b}_n(r)\sin\, n\varphi, \tag{5.2.68}$$

және оны (5.2.67) түрде ізделінген $u\left(r,\varphi\right)$ функциясымен қоса (5.2.66) теңдеуге қоямыз, яғни:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0\left(r\right)}{dr}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n\left(r\right)}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}a_n\left(r\right)\right]\cos n\varphi+\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n\left(r\right)}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}b_n\left(r\right)\right]\sin n\varphi=\\ \tilde{a}_0\left(r\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{a}_n\left(r\right)\cos n\varphi+\tilde{b}_n\left(r\right)\sin n\varphi\right].\end{gathered}\tag{5.2.69}$$

Бұл теңдіктен, $f\left(r,\varphi\right)$ функциясы үшін Фурье коэффициенттерін ескеріп, *анықталмаған коэффициенттер әдісі* бойынша келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0\left(r\right)}{dr}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\left(r,\varphi\right)d\varphi=\tilde{a}_0\left(r\right),\tag{5.2.70}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n\left(r\right)}{dr}\right)-\frac{n^2a_n\left(r\right)}{r^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\left(r,\varphi\right)\cos\ n\varphi d\varphi=\tilde{a}_n\left(r\right),\tag{5.2.71}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n\left(r\right)}{dr}\right)-\frac{n^2b_n\left(r\right)}{r^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\left(r,\varphi\right)\sin\ n\varphi d\varphi=\tilde{b}_n\left(r\right).\tag{5.2.72}$$

Бұл (5.2.70)-(5.2.72) дифференциалдық теңдеулерін шешіп, $a_0\left(r\right),\ \ a_n\left(r\right),\ \ b_n\left(r\right)$ коэффициенттерін анықтаймыз. Бұлар жалпы шешімдер болғандықтан олар кез келген тұрақты санға дейінгі дәлдікпен анықталады. Мәселен, (5.2.70) теңдеу – реті төмендетілетін теңдеу және оның жалпы шешімі

$$a_0\left(r\right)=A_0\left(r\right)+E_0+F_0\ln\ r\tag{5.2.73}$$

түрде болады, мұндағы $A_0\left(r\right)$ - белгілі функция, ал E_0 және F_0 - кез келген тұрақты сандар.

(5.2.71) теңдеуі

$$r^2a_n''\left(r\right)+ra_n'\left(r\right)-n^2a_n\left(r\right)=r^2\tilde{a}_n(r)$$

түрдегі біртекті емес Эйлер теңдеуі. Мұны тұрақтыны вариациялау әдісі арқылы шешеміз. Мұның сәйкес біртекті теңдеуінің жалпы шешімі

$$a_n\left(r\right)=C_nr^n+D_nr^{-n}$$

болғандықтан, жалпы шешімі

$$a_n(r) = C_n(r)\, r^n + D_n(r)\, r^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

түрде ізделінеді. Мұндағы $C_n(r)$, $D_n(r)$ белгісіз функциялары

$$\begin{cases} r^{2n} C_n'(r) + D_n'(r) = 0, \\ r^{2n} C_n'(r) - D_n'(r) = r^{n+3} \tilde{a}_n(r)/n. \end{cases}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесінен кез келген E_n және F_n тұрақты сандарына дейінгі дәлдікпен анықталады.

Дәл осындай жолмен, $b_n(r)$ коэффициенттері де кез келген G_n, H_n тұрақты сандарына дейінгі дәлдікпен анықталады.

Бұл $a_0(r)$, $a_n(r)$, $b_n(r)$ коэффициенттерін (5.2.67) қатарға қойып, белгісіз еркін тұрақты сандары бар $u(r,\varphi)$ жалпы шешімді аламыз. Бұл белгісіз сандарды (5.2.64)-(5.2.65) шекаралық шарттарды пайдаланып анықтаймыз.

Мысал 5.2.5 *Сақинада қойылған Пуассон теңдеуі үшін үшінші шеттік есепті шешіңіз:*

$$\Delta u = r^3 \cos\varphi, \quad 1 < r < 2, \tag{5.2.74}$$

$$u|_{r=1} = \cos 2\varphi, \tag{5.2.75}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = \sin 3\varphi. \tag{5.2.76}$$

Шешуі. Алдымен $f(r,\varphi) = r^3 \cos\varphi$ функциясын (5.2.68) түрдегі Фурье қатарына жіктейміз. Бұл функцияның өзі Фурье қатары түрінде болғандықтан, Фурье коэффициенттері бірден анықталынады, яғни:

$$\tilde{a}_0(r) = 0, \ \ \tilde{a}_1(r) = r^3, \ \ \tilde{a}_n(r) = 0, \ \ n = 1, 2 \ldots, \ \ \tilde{b}_n(r) = 0, \ \ n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Жоарыда айтылғандайын, шешімді

$$u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos\, n\varphi + b_n(r) \sin\, n\varphi \tag{5.2.77}$$

түрде іздейміз. Мұндағы $a_0(r)$, $a_n(r)$, $b_n(r)$ – коэффициенттері

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d a_0(r)}{dr}\right) = 0, \tag{5.2.78}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_1(r)}{dr}\right)-\frac{a_1(r)}{r^2}=r^3, \tag{5.2.79}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2a_n(r)}{r^2}=0, \quad n=2,3,..., \tag{5.2.80}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2b_n(r)}{r^2}=0, \quad n=1,2,... \tag{5.2.81}$$

теңдеулер жүйесінен анықталынады.

(5.2.78) теңдеудің жалпы шешімі

$$a_0(r)=E_0+F_0\ln r,$$

мұндағы E_0, F_0 – белгісіз еркін тұрақтылар.

Ал, (5.2.79) теңдеудің жалпы шешімі

$$a_1(r)=C_1(r)\,r+D_1(r)\,r^{-1}$$

түрде ізделінеді. Мұндағы $C_1(r)$, $D_1(r)$ функциялары

$$\begin{cases} r^2C_1'(r)+D_1'(r)=0, \\ r^2C_1'(r)-D_1'(r)=r^7 \end{cases}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесінен анықталады. Демек,

$$a_1(r)=\frac{r^7}{48}+E_1r+F_1r^{-1},$$

мұндағы E_1 және F_1 кез келген тұрақты сандар.

(5.2.80), (5.2.81) теңдеулер біртекті болғандықтан олардың сәйкес жалпы шешімдері

$$a_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}, \quad n=2,3,...,$$

$$b_n(r)=G_nr^n+H_nr^{-n}, \quad n=1,2...,$$

мұндағы C_n, D_n, G_n, H_n әзірге белгісіз еркін тұрақты сандар.

Демек, берілген есептің жалпы шешімі

$$\begin{gathered} u(r,\varphi)=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)\cos n\varphi+b_n(r)\sin n\varphi= \\ E_0+F_0\ln r+\left(\tfrac{r^7}{48}+E_1r+F_1r^{-1}\right)\cos\varphi+ \\ +\sum_{n=2}^{\infty}\left(E_nr^n+F_nr^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(G_nr^n+H_nr^{-n}\right)\sin n\varphi \end{gathered} \tag{5.2.82}$$

болады. Бұл белгісіз еркін тұрақтыларын анықтау үшін шекаралық шарттарды қолданамыз, яғни бірінші шекаралық шарт бойынша:

$$u(1,\varphi) = E_0 + \left(\frac{1}{48} + E_1 + F_1\right)\cos\ \varphi + \sum_{n=2}^{\infty}(E_n + F_n)\cos n\varphi +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(G_n + H_n)\sin n\varphi = \cos\varphi,$$

екінші шарт бойынша

$$u'_r(2,\varphi) = \frac{F_0}{2} + \frac{28}{3}\cos\ \varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(nE_n 2^{n-1} - nF_n 2^{-n-1}\right)\cos n\varphi +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(nG_n 2^{n-1} - nH_n 2^{-n-1}\right)\sin n\varphi = \sin 3\varphi.$$

Бұлардан

$$E_0 = 0, \quad F_0 = 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{48} + E_1 + F_1 = 0 \\ \dfrac{28}{3} + E_1 - \dfrac{F_1}{4} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} E_2 + F_2 = 1, \\ 4E_2 - \dfrac{1}{4}F_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_n + F_n = 0 \\ nE_n 2^{n-1} - nF_n 2^{-n-1} = 0, \quad n = 3, 4, ..., \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_n + H_n = 0 \\ nG_n 2^{n-1} - nH_n 2^{-n-1} = 0, \quad n \neq 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} G_3 + H_3 = 0 \\ 12G_3 - \dfrac{3}{16}H_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_3 + H_3 = 0 \\ 3G_3 2^2 - 3H_3 2^{-4} = 1. \end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйесін шешіп, белгісіз тұрақтыларды анықтап оларды (5.2.77) қойсақ, нәтижеде ізделінді шешімді аламыз

$$u(r,\varphi) = \left(\frac{r^5}{24} - \frac{1793}{240}r + \frac{447}{60}r^{-1}\right)\cos\varphi +$$
$$\left(\frac{1}{17}r + \frac{16}{17}r^{-1}\right)\cos 2\varphi + \left(\tfrac{16}{195}r - \frac{16}{195}r^{-1}\right)\sin 3\varphi.$$

.

5.2.5 Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

5.2.1 $\Delta u = 0,\ \ 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ \ u\,(R, \varphi) = \varphi \cdot (2\pi - \varphi)\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

5.2.2 $\Delta u(x, y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < 4,\quad u|_{r=2} = x^3 - 2xy + 1,\ \ u|_{r=0} < \infty.$

5.2.3 $\Delta u(r, \varphi) = 0,\ \ r > R,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = \alpha \sin \frac{\varphi}{2},\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ |u| < \infty.$

Шеңбер ішінде немесе сыртында берілген төмендегі Нейман есебінің шешілу шартын тексеріп, шешімін анықтаңыз:

5.2.4 $\Delta u = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2,\ 0 < r < 1,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=1} = 4(x^2 - y^2) + y.$

5.2.5 $\Delta u = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2,\ 0 < r < 1,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=1} = Ay^2 - B.$

5.2.6 $\Delta u(x, y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < R^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = 4x^2 - Ay^2 + y\big|_{r=R}.$

5.2.7 $\Delta u(x, y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < R^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = \alpha x + \beta y + \gamma|_{r=R}.$

5.2.8 $\Delta u(x, y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < R^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma\big|_{r=R}.$

5.2.9 $\Delta u = 0,\ \ 0 < r < R,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = A \cos \varphi.$

Келесі сақинада берілген Дирихле есебін шешіңіз:

5.2.10 $\begin{cases} \Delta u\,(r, \varphi) = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi \\ u\,(1, \varphi) = v_1 = const,\ \ u\,(2, \varphi) = v_2 = const,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

5.2.11 $\begin{cases} \Delta u\,(r, \varphi) = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi \\ u\,(1, \varphi) = 1 + \cos^2 \varphi,\ \ u\,(2, \varphi) = \sin^2 \varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

5.2.12 $\begin{cases} \Delta u\,(r, \varphi) = 0, \quad a < r < b,\ 0 < \varphi < 2\pi, \\ u\,(a, \varphi) = 0,\ \ u\,(b, \varphi) = A \cos \varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

5.2.13 $\Delta u\,(x, y) = 0,\quad 1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3,\quad u|_{r=1} = 0,\ \ u|_{r=3} = 3x.$

5.2.14 $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ *шеңбері ішінде* $\Delta u(x, y) = -Axy,\ \ A = const$ *Пуассон теңдеуінің шешімін табыңыз, егер* $u|_{r=R} = 0$ *болса.*

5.2.15 $\Delta u\,(x, y) = 0,\quad 1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2,\quad u|_{r=1} = 1,\ \ u|_{r=2} = 2xy.$

5.2.6 Жауаптары

5.2.1 $u\,(r,\varphi)=\dfrac{2\pi^2}{3}-4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi.$

5.2.2 $u\,(x,y)=1+3x-2xy+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}xy^2.$

5.2.3 $u\,(r,\varphi)=\dfrac{2\alpha}{\pi}-\dfrac{4\alpha}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\left(\dfrac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi.$

5.2.4 *Шешілу шарты орындалады,* $u\,(x,y)=2(x^2-y^2)+y+C,\ C=const.$

5.2.5 *Шешілу шарты* $A=2B$ *болса орындалады,* $u\,(x,y)=\frac{A}{4}(y^2-x^2)+C,\ C=const.$

5.2.6 *Шешілу шарты* $A=4$ *болса орындалады,* $u=2R^2(x^2-y^2)+Ry+C,\ \ C=const.$

5.2.7 *Шешілу шарты* $\gamma=0,\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ *болса орындалады,* $u=\alpha x+\beta y+C,\ \ C=const.$

5.2.8 *Шешілу шарты* $\gamma=-\frac{\alpha R^2}{2},\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ *болса орындалады,* $u=\frac{\alpha R}{4}(x^2-y^2)+\frac{\beta R}{2}xy+C,\ \ C=const.$

5.2.9 *Шешілу шарты орындалады,* $u=Ar\cos\varphi+C,\ C=const.$

5.2.10 $u=v_1+(v_2-v_1)\dfrac{\ln r}{\ln 2}.$

5.2.11 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln r}{\ln 2}+\left(\dfrac{2}{3r^2}-\dfrac{1}{6}r^2\right)\cos 2\varphi.$

5.2.12 $u=A\dfrac{b\left(r^2-a^2\right)}{r\left(b^2-a^2\right)}\cos\varphi.$

5.2.13 $u(x,y)=\dfrac{27(x^2+y^2-1)}{8(x^2+y^2)}x.$

5.2.14 $u=\frac{Ar^2}{24}\left(R^2-r^2\right)\sin 2\varphi.$ *Нұсқау:* $u=v+\omega,$ *мұндағы* $v=-\frac{Axy}{12}\left(x^2+y^2\right)=-\frac{Ar^4}{24}\sin 2\varphi-$ *Пуассон теңдеуінің дербес шешімі, ал* $\omega-$ *Лаплас теңдеуінің* $\omega|_{r=R}=\frac{A}{24}R^4\sin 2\varphi$ *шекаралық шартын қанағаттандыратын шешімі.*

5.2.15 $u(x,y)=\dfrac{\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{\ln\frac{1}{2}}+\dfrac{32((x^2+y^2)^2-1)}{15(x^2+y^2)^2}xy.$

5.3 Грин функциясы әдісі

Бұл бөлімде арнайы облыстарда қойылған Лаплас немесе Пуассон теңдеулері үшін шеттік есептерді шешудің тағы бір әдісі –Грин функциясы әдісі қарастырылады. Электростатикалық кескін әдісі арқылы дербес жағдайдағы облыстар үшін Грин функциясын құру көрсетіледі.

5.3.1 Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебі үшін Грин функциясы. Грин функциясы әдісі

Евклидтік $\mathbb{R}^n$ кеңістіктегі $S = \partial\Omega$ жатық шекаралы $n-$ өлшемді Ω облысында қойылан Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебін қарастырайық, яғни

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0, \quad x \in \Omega, \\ \\ u(x)|_{x\in S} = \varphi(x), \quad x \in S, \end{cases} \tag{5.3.83}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ функциясын табу керек, мұндағы $\varphi(x) \in C(S)$ берілген үзіліссіз функция.

Жоғарыдағы айтылған Лаплас теңдеуінің іргелі шешімін еске түсірейік ((5.1.14) қараңыз)

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|\xi - x|}, \quad n = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi|\xi - x|}, \; n = 3. \end{cases} \tag{5.3.84}$$

Анықтама 5.3.1 Ω *облысында:*

1. $$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi), \tag{5.3.85}$$

яғни $E(x,\xi)$ – Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі мен Ω облысының барлық жерінде гармониялық $g(x,\xi)$ функцияның қосындысынан тұратын және шекарада

2. $$G(x,\xi)|_S = 0 \tag{5.3.86}$$

шартын қанағаттандыратын $G(x,\xi)$, $\quad x \neq \xi \in \overline{\Omega}$ функциясы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің Грин функциясы деп аталады.

Грин функциясының қасиеттері. Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің $G(x,\xi)$-Грин функциясы келесі қасиеттерге ие:

1^0. $G(x,\xi) \geq 0, \quad x \neq \xi \in \Omega;$

2^0. $\Delta_x G(x,\xi) = \Delta_\xi G(\xi,x) = 0, \quad x \neq \xi \in \Omega;$

3^0. $G(x,\xi) = G(\xi,x), \quad x \neq \xi \in \overline{\Omega}.$

Егер Грин функциясы белгілі болса онда Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін Дирихле есебін оңай шешуге болады.

Теорема 5.3.1 *Егер $G(x,\xi)$- (5.3.83) Дирихле есебінің Грин функциясы болса, онда (5.3.83) есептің шешімі*

$$u(x) = -\int\limits_S \varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} dS_\xi \tag{5.3.87}$$

түрде өрнектеледі, мұндағы $\dfrac{\partial}{\partial \vec{n}_\xi}$- $\xi \in S$ нүктедегі S бетіне тұрғызылған сыртқы нормал бойынша туынды, ал dS_ξ- ξ нүктедегі S беті ауданының элементі.

Дәлелдеуі. Жоғарыдығы (5.1.16)–Гриннің екінші формуласын осы $u(x)$ және $g(x,y)$ функциялары үшін қолданайық

$$\int\limits_\Omega \left(g\left(x,y\right)\Delta u(x) - u(x)\Delta g\left(x,y\right)\right)dx = \int\limits_S \left(g\left(\xi,y\right)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u(\xi)\frac{\partial g(\xi,y)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi$$

Бұдан $\Delta u(x) = 0, \quad \Delta g\left(x,y\right) = 0$ болғандықтан

$$\int\limits_S \left(g\left(\xi,y\right)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u(\xi)\frac{\partial g(\xi,y)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi = 0. \tag{5.3.88}$$

Енді гармоникалық функцияның интеграл арқылы өрнектелу формуласын жазайық ((5.1.21) қараңыз):

$$u\left(x\right) = \int\limits_S \left(E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u\left(\xi\right)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi. \tag{5.3.89}$$

Егер Грин функциясының анықтамасындағы (5.3.85) $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)$ теңдігін ескеріп, (5.3.88) және (5.3.89) теңдіктерді қоссақ, онда

$$u\left(x\right) = \int\limits_S \left(G(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u\left(\xi\right)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi.$$

Бұған $u(\xi) = \varphi\left(\xi\right), \ \xi \in S$ және Грин функциясының анықтамасындағы $G(x,\xi) = 0, \quad \xi \in S$ шекаралық шарттарын қолдансақ, нәтижеде

$$u(x) = -\int\limits_S \varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} dS_\xi$$

теңдікті аламыз.

Теорема 5.3.2 *Егер $G(x,\xi)$- (5.3.83) Дирихле есебінің Грин функциясы болса, онда*

$$\Delta u(x) = -F(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x)|_S = f(y)|_{y\in S}$$

Пуассон есебінің шешімі

$$u(x) = -\int\limits_S f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}dS_y + \int\limits_\Omega F(y)G(x,y)dy \tag{5.3.90}$$

түрде өрнектеледі, мұндағы ω_n- бірлік сфера бетінің ауданы.

Демек, Лаплас немесе Пуассон теңдеулерін үшін Дирихле есебін шешу үшін $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)$ Грин функциясын құру жеткілікті. Алайда, $E(x,\xi)$ Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі белгілі болғандықтан Грин функциясын құру – $g(x,\xi)$ гармоникалық функциясын табуға келіп тіреледі. Жоғарыдағы Грин функциясының анықтамасы және 2–қасиеті бойынша, $g(x,\xi)$ функциясы

$$\Delta_x g(x,\xi) = \Delta_\xi g(x,\xi) = 0, \quad x,\ \xi \in \Omega, \tag{5.3.91}$$

$$g(x,\xi)|_{x\in S} = -E(x,\xi)|_{x\in S} \tag{5.3.92}$$

шеттік есебінің шешімі болады. Бұл да Дирихле есебі, бірақ шекаралық мәні кез келген емес арнайы түрдегі функция.

5.3.2 Грин функциясын құру. Электростатикалық кескін әдісі

Шекарасы жазықтық немесе сфера болып келетін облыстарда Грин функциясы айқын түрде құрылады. Грин функциясын физикалық интерпретациясы бойынша *электростатикалық кескін* әдісі және математикалық түрде *конформдық бейнелеу* әдісі арқылы құруға болады.

Электростатикалық кескін әдісін $n = 3$ өлшемді жағдай үшін қарастырайық. Анықтама бойынша Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi\,|x-\xi|} + g(x,\xi). \tag{5.3.93}$$

Жалпы физика курсынан белгілі, ξ нүктеге жайғастырылған шамасы q-ге тең электрлік заряд шексіз кеңістікте белгілі бір координата жүйесінде, потенциалы

$$\frac{q}{4\pi\,|x-\xi|} \tag{5.3.94}$$

болатын электростатикалық өрісті тудырады. Бұл (5.3.94) потенциал ξ нүктесінен басқа барлық жерде гармоникалық функция болатынын көруге болады, яғни Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі болады ((5.1.14) қараңыз). Сондықтан (5.3.93) өрнектегі $E(x,\xi) = \frac{1}{4\pi|x-\xi|}$ бірінші қосылғышты ξ нүктеге жайғастырылған $q = 1$ оң бірлік нүктелік зарядтың потенциалы, ал екінші қосылғыш – $g(x,\xi)$ функциясын Ω облысының сыртындағы $\xi^k \notin \overline{\Omega}$ нүктелерде орналасқан $q_k,\ k = 1, 2, ...m$ нүктелік зарядтары тудырған электростатикалық өріс потенциялы ретінде қарастыруға болады, яғни:

$$g\,(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k}{|x - \xi^k|}, \quad \xi^k \notin \overline{\Omega}. \tag{5.3.95}$$

Себебі, жоғарыда айтылғандайын, нүктелік зарядтар тудырған электростатикалық өріс потенциалы ξ^k нүктелерден басқа жерлерде гармоникалық функция болады.

Бұл Ω облысының сыртындағы $q_k,\ k = 1, 2, ...m$ зарядтары қосынды өріс потенциалы шекарада нөлге айналатындай, яғни

$$G\,(y, \xi) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

шарты орындалатындай таңдап алынады. q_k зарядтары $q = 1$ бірлік зарядының ***электростатикалық бейнесі*** деп аталады. Мұндай физикалық тұрғыда Грин функциясын құру ***электростатикалық әдіс*** деп аталады. Бұл әдіс бойынша Грин функциясын құру үшін әуелі $q_k,\ k = 1, 2, ...m$ зарядтары мен $\xi^k \notin \overline{\Omega}$ нүктелерін таңдай білу қажет. Мәселен, шекарасы жазықтық болып келетін облыстар үшін ξ^k нүктелері ретінде ξ нүктесінің Ω облысын шектейтін әрбір жазықтықтарға қатысты айналық бейнелері алынады. Егер Ω – сфера түрдегі облыс болса, онда сфера бойынша инверсия түрлендіруі қолданылады.

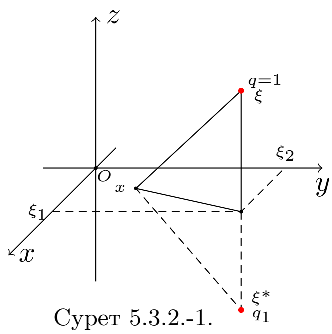
1. Жарты кеңістікте Грин функциясын құру

Грин функциясын құру арқылы $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3)\,,\ \ x_1, x_2 \in R,\ x_3 \geq 0\}$ жарты кеңістігінде

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_1, x_2 \in R,\ x_3 > 0,$$

$$u(x_1, x_2, x_3)|_{x_3 = 0} = \varphi\,(x_1, x_2)\,,\ x_1, x_2 \in R$$

Дирихле есебінің шешімін табуды қарастырайық.



Сурет 5.3.2.-1.

Жоғарыдағы әдіс бойынша, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega$ нүктесіне оң $q = 1$ бірлік зарядын орналастырамыз. ξ нүктесінің $S = \{x_3 = 0\}$ жазықтығына қатысты айналы симметриялы $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$ нүктесіне q_1 зарядын орналастырсақ, онда $q = 1$ және q_1 зарядтары тудырған қосынды өріс потенциалы, яғни Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} + \frac{q_1}{|x-\xi^*|}\right) \tag{5.3.96}$$

түрде болады. Мұндағы q_1 шамасын

$$G\left(x,\xi\right)\big|_{x_3=0} = 0$$

шарты орындалатындай таңдап аламыз, яғни (5.3.96) өрнектен

$$q_1 = -\left.\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|}\right|_{x_3=0} = -\left.\frac{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2}}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\right|_{x_3=0} = -1.$$

Демек, Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi^*|}\right).$$

Енді (5.3.87) формуланы қолданып есептің шешімін жазамыз. Ол үшін алдымен Грин функциясының нормал туындысын, яғни біздің жағдайда S бетке тұрғызылған сыртқы нормалдың бағыты x_3 өсінің оң бағытына қарама-қарсы болқандықтан $\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = -\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_3}$ туындыны табу қажет.

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi^*|}\right) =$$
$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \right.$$
$$\left.\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right) =$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{x_3-\xi_3}{\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \right.$$
$$\left.\frac{x_3+\xi_3}{\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

$S = \{x_3 = 0\}$ шекарадағы мәні

$$\left.\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}\right|_{x_3=0} = -\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = -\frac{\xi_3}{2\pi\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Олай болса, (5.3.87) бойынша Дирихле есебінің шешімі

$$u(\xi) = \frac{\xi_3}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2}{\left[\left(x_1 - \xi_1\right)^2 + \left(x_2 - \xi_2\right)^2 + \xi_3^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.3.97}$$

Жалпы жағдайда $g(x, \xi)$ функциясын

$$g(x, \xi) = -\sum_{k=1}^{m} E\left(q_k x, q_k \xi^k\right) \tag{5.3.98}$$

түрде іздеуге болады. Мұндағы $E(x, \xi)$- Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі, q_k-Ω облысын шектейтін k-шы жазықтық бойынша ξ нүктесінің айналық кескіні. Бұл q_k шамалары

$$g(x, \xi)|_{x \in S} = -E(x, \xi)|_{x \in S} \tag{5.3.99}$$

шарты орындалатындай таңдап алынады.

Мәселен, кеңістік өлшемі $n = 2$ болса, онда Грин функциясы (5.3.84), (5.3.98) бойынша

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} + g(x, \xi).$$

түрде құрылады. Мұндағы $g(x, \xi)$ функциясы

$$g\left(x, \xi\right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \ln \frac{1}{q_k \left|x - \xi^k\right|}$$

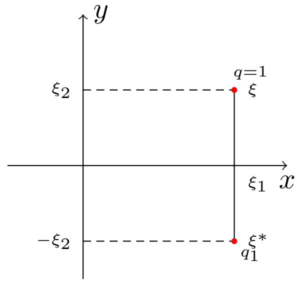
түрде ізделінеді.

2. Жарты жазықтықта Грин функциясын құру.

$\Omega = \left\{\left(x_1, x_2\right),\ x_1 \in R,\ x_2 \geq 0\right\}$ жарты жазықтығында Грин функциясын құрып, келесі Дирихле есебінің шешімін табуды қарастырайық:

$$\Delta u(x_1,x_2)=0,\quad x_1\in R,\ x_2>0,$$

$$u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=\varphi\left(x_1\right),\ \ x_1\in R.$$



Сурет 5.3.2.-2.

Шешуі. $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\xi_2>0$ нүктесіне оң $q=1$ бірлік зарядын орналастырамыз. ξ нүктесіне $S=\{x_2=0\}$ түзуіне қатысты симметриялы нүкте $\xi^*=(\xi_1,-\xi_2)$

$$g(x,\xi)=-E\left(qx,q\xi^*\right)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{q\left|x-\xi^*\right|}$$

(5.3.99) шарт бойынша

$$g(x,\xi)|_{x_2=0}=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{q\left|x-\xi^*\right|}\bigg|_{x_2=0}=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|x-\xi\right|}\bigg|_{x_2=0}.$$

Бұдан

$$q=\frac{|x-\xi|}{|x-\xi^*|}\bigg|_{x_2=0}=\frac{\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2}}{\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2+\xi_2\right)^2}}\Bigg|_{x_2=0}=1.$$

Демек, Грин функциясы

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)+g(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi^*|}.$$

Ал нормал туынды

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}=-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_2}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\ln\frac{1}{|x-\xi^*|}\right)=$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln\left[\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2\right]-\ln\left[\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2+\xi_2\right)^2\right]\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2-\xi_2}{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2}-\frac{x_2+\xi_2}{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2+\xi_2\right)^2}\right].$$

$S = \{x_2 = 0\}$ шекарада

$$\left.\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}\right|_{x_2=0} = -\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = -\frac{1}{\pi}\frac{\xi_2}{(x_1-\xi_1)^2+\xi_2^2}.$$

Олай болса, (5.3.87) бойынша Дирихле есебінің шешімі

$$u(\xi) = \frac{\xi_2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x_1)}{(x_1-\xi_1)^2+\xi_2^2}dx_1. \tag{5.3.100}$$

3. Шар үшін Грин функциясы.

Грин функциясы әдісі арқылы $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2, x_3):\ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\right\}$ шар ішінде

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

Лаплас теңдеуін және $\partial\Omega = \left\{x = (x_1, x_2, x_3):\ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\right\}$ сферада (шекарасында)

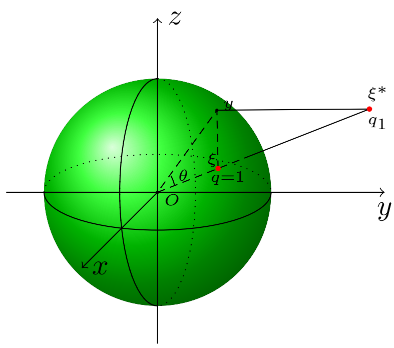
$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу есебін қарастырайық.

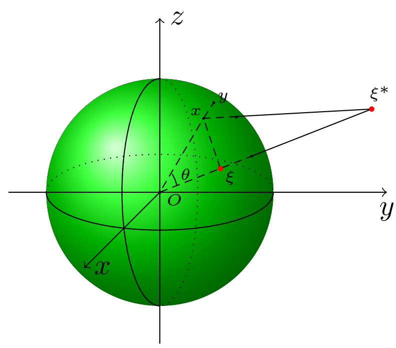
Шешуі. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega$ нүктесіне оң $q = 1$ бірлік зарядын орналастырамыз. Осы ξ нүктесінің $|x| = R$ сферасына қатысты инверция бойынша анықталатын $\xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi$ нүктесін аламыз, яғни ξ және ξ^* нүктелері шар центрінен шығатын бір түзудің бойында жатады және

$$|\xi| \cdot |\xi^*| = R^2 \tag{5.3.101}$$

теңдігі орындалады.



Сурет 5.3.2.-3.



Сурет 5.3.2.-4.

Осы нүктеге q_1 зарядын орналастырсақ, онда $q = 1$ және q_1 зарядтары тудырған қосынды өріс потенциалы, яғни Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{q_1|x-\xi^*|}\right) \tag{5.3.102}$$

түрде ((5.3.98) бойынша $g(x,\xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{q_1|x-\xi^*|}$ түрде ізделінеді) болады. Мұндағы q_1 шамасын шекарада

$$G(y,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y-\xi|} - \frac{1}{q_1|y-\xi^*|}\right) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

шарты орындалатындай таңдап аламыз, яғни бұл өрнектен

$$q_1 = \frac{|y-\xi|}{|y-\xi^*|}, \quad y \in \partial\Omega. \tag{5.3.103}$$

Мұндағы ξ облыстың ішкі, ал y шекарадағы кез келген тұрақтандырылған нүкте. Енді (5.3.103) теңдіктің оң жағы тұрақты екендігін көрсетейік.

Шындығында $\triangle yO\xi \sim \triangle yO\xi^*$ ұқсас үшбұрыштар, себебі (Сурет 5.3.2.-3.) O төбесіндегі θ бұрышы ортақ және осы бұрышты құрайтын қабырғалары (5.3.101) бойынша пропорционал. Олай болса үшбұрыштардың ұқсастығынан қалған қабырғаларының пропорционалдығын аламыз:

$$\frac{|y-\xi|}{|y-\xi^*|} = \frac{|\xi|}{R}, \tag{5.3.104}$$

мұнда $|\xi| = |O\xi|$ және $\frac{|\xi|}{R} = const$. (5.3.103), (5.3.104) теңдіктерді ескеріп, (5.3.102) теңдіктен

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{R}{|\xi|}\frac{1}{|x-\xi^*|}\right)$$

Грин функциясын аламыз.

Енді шешімді табу үшін Грин функциясының нормал туындысын есептеу қажет. Айталық, $x \in \Omega$ кез келген айнымалы ішкі нүкте болсын және $|x| = r$ белгілейік (Сурет 5.3.2.-4.). Мұнда сфераға тұрғызылған сыртқы нормалдың бағыты радиус бағытымен бағыттас болады. Сондықтан егер $x \in \vec{n}_y$ болса, онда

$$|x-\xi|^2 = r^2 + |\xi|^2 - 2r|\xi|\cos\theta, \; |x-\xi^*|^2 = r^2 + |\xi^*|^2 - 2r|\xi^*|\cos\theta.$$

Олай болса

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2+|\xi|^2-2r|\xi|\cos\theta\right)^{-1/2} - \right.$$

$$\left.\frac{R}{|\xi|}\left(r^2+\left(\frac{R^2}{|\xi|}\right)^2-2r\frac{R^2}{|\xi|}\cos\theta\right)^{-1/2}\right]_{r=R} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{R-|\xi|\cos\theta}{\left(R^2+|\xi|^2-2R|\xi|\cos\theta\right)^{3/2}} - \frac{R}{|\xi|}\frac{R-\frac{R^2}{|\xi|}\cos\theta}{\left(R^2+\left(\frac{R^2}{|\xi|}\right)^2-2R\frac{R^2}{|\xi|}\cos\theta\right)^{3/2}}\right] =$$

$$-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-|\xi|^2}{\left(R^2+|\xi|^2-2R|\xi|\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

Егер $x=y$ кезде $R^2+|\xi|^2-2R|\xi|\cos\theta = |y-\xi|^2$ екендігін ескерсек, онда

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-|\xi|^2}{|y-\xi|^3}.$$

Демек, (5.3.87) бойынша есептің шешімі

$$u(\xi) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|x|=R}\frac{R^2-|\xi|^2}{|y-\xi|^3}\varphi(y)ds_y. \tag{5.3.105}$$

(5.3.105) формула Пуассон формуласы деп аталады, оң жағындағы интеграл Пуассон интегралы, ал $\frac{R^2-|\xi|^2}{|y-\xi|^3}$ оның ядросы деп аталады.

Егер жоғарыдағы есеп Пауссон теңдеуі үшін қойылса, яғни

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x\in\Omega, \\ u(y)=\varphi(y), & y\in\partial\Omega \end{cases}$$

болса, онда онда шешім (5.3.90) бойынша

$$u(\xi) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|x|=R}\frac{R^2-|\xi|^2}{|y-\xi|^3}\varphi(y)ds_y + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x|\le R}\left(\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{R}{|\xi|}\frac{1}{|x-\xi^*|}\right)f(x)dx$$

болады.

Мысал 5.3.1 $\Omega = \{(x,y):\ y>0,\ -\infty<x<\infty\}$ *жарты жазықтығында гармоникалық* $u(x,y)$ *функциясын анықтаңыз, егер ол функция үшін* $u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}$ *ақпарат мәлім болса.*

Шешуі. (5.3.100) бойынша шешім

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(1+\xi^2)\left[(\xi-x)^2+y^2\right]}d\xi$$

интегралы арқылы есептелінеді. Бұл интегралды есептеу үшін шегерімдер теориясын[4] қолданған тиімдірек болады, яғни:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(1+\xi^2)\left[(\xi-x)^2+y^2\right]}d\xi=2\pi i\left[res\,f(i)+res\,f(x+iy)\right],$$

$$f(z)=\frac{z}{(1+z^2)\left[(z-x)^2+y^2\right]}.$$

Мұнда $res\,f(i)=\dfrac{1}{2\left[(i-x)^2+y^2\right]}$ $res\,f(x+iy)=\dfrac{x+iy}{2iy\left[1+(x+iy)^2\right]}$ болғандықтан,

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(1+\xi^2)\left[(\xi-x)^2+y^2\right]}d\xi=\frac{iy}{(i-x)^2+y^2}+\frac{x+iy}{1+(x+iy)^2}=$$

$$\frac{iy}{[(i-x)+iy]\,[(i-x)-iy]}+\frac{x+iy}{(x+iy-i)(x+iy+i)}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-x-iy}-\frac{1}{i-x+iy}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+iy-i}+\frac{1}{x+iy+i}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1-y)-x}-\frac{1}{i(1+y)-x}+\frac{1}{x+i(y-1)}+\frac{1}{x+i(y+1)}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1+y)+x}-\frac{1}{i(1+y)-x}\right]=\frac{x}{x^2+(x+y)^2}.$$

Жауабы $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+(x+y)^2}$.

Мысал 5.3.2 $\Omega=\{(x,y,z):\ -\infty<x,y<\infty,\ z>0\}$ *жарты кеңістігінде келесі Дирихле есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ (x,y,z)\in\Omega,\\ u|_{z=0}=\cos x\cos y,\quad x,y\in R^2.\end{cases}$$

[4] Комплекс айнымалы функциялар теориясы пәнін қараңыз.

Шешуі. (5.3.97) формула бойынша шешім

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{\cos\xi\cos\eta d\xi d\eta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

интегралы арқылы есептелінеді.

Бұл интегралды есептеу үшін $\xi-x=u,\ \eta-y=v$ белгілеу енгіземіз, мұнда якобианы бірге тең.

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{\cos(u+x)\cos(v+y)\,dudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}=$$

$$\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{(\cos u\cos x-\sin u\sin x)(\cos v\cos y-\sin v\sin y)\,dudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}=$$

$$\frac{z}{2\pi}\cos x\cos y\iint\limits_{R^2}\frac{\cos u\cos vdudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}.$$

Мұнда қалған интегралдар интеграл астында тақ функциялар болғандықтан нөлге айналды. Енді соңғы интегралды есептейік:

$$J=\iint\limits_{R^2}\frac{\cos u\cos vdudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}=\iint\limits_{R^2}\frac{\cos(u+v)+\sin u\sin v}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}dudv=$$

$$\iint\limits_{R^2}\frac{\cos(u+v)dudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}=\left|\begin{array}{l}p=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v),\\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)\end{array}\right|=\iint\limits_{R^2}\frac{\cos\left(\sqrt{2}p\right)}{[p^2+q^2+z^2]^{3/2}}dpdq=$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\sqrt{2}p\right)dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{[p^2+q^2+z^2]^{3/2}}.$$

$$J_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{[p^2+q^2+z^2]^{3/2}}=\left|q=\sqrt{p^2+z^2}tgt\right|=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|}{p^2+z^2}dt=\frac{2}{p^2+z^2}.$$

Олай болса,

$$J=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{2}p\right)}{p^2+z^2}dp=2Re\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2+z^2}dp=$$

$$4\pi i\,res\left.\frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2+z^2}\right|_{p=zi}=4\pi i\,\frac{e^{-\sqrt{2}z}}{2zi}=\frac{2\pi}{z}e^{-\sqrt{2}z}.$$

Демек,

$$u(x,y,z) = e^{-\sqrt{2}z} \cos x \cos y.$$

Есеп

1. $\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3) :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2,\ \ x_3 > 0\right\}$ жарты шар үшін Грин функциясын құрыңыз

Жауабы $G(x,\xi) = G_0(x,\xi) - G_0(x,\xi^2)$, мұндағы $G_0(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{R}{|\xi|}\frac{1}{|x-\xi^*|}\right)$, ал ξ^2- $x_3 = 0$ жазықтығына қатысты ξ нүктесіне симметриялы нүкте

5.3.3 Жаттығулар

Грин функциясын қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

5.3.1 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u|_{x_2=0} = \begin{cases} -1, & x_1 \le 0, \\ 0, & x_1 > 0, \end{cases} \quad x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0.$

5.3.2 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u\,|_{x_2=0} = \sin 2x_1,\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 > 0.$

5.3.3 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u|_{x_2=0} = \begin{cases} 1, & x_1 \ge a, \\ 0, & x_1 < a, \end{cases} \quad x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0.$

5.3.4 $\Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad x_1,\, x_2 \ge 0,\ \ u|_{x_1=0} = a,\ \ u|_{x_2=0} = b,\ \ a, b = const.$

5.3.5 $\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0,\ \ u|_{x_3=0} = \cos x_1 \cos x_2,\ \ x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3 > 0.$

5.3.6 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u(x_1, x_2)\,|_{x_2=0} = \dfrac{1}{1 + x_1^2},\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 > 0.$

5.3.7 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u(x_1, x_2)\,|_{x_2=0} = \dfrac{x_1}{1 + x_1^2},\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \ge 0.$

5.3.8 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u(x_1, x_2)\,|_{x_2=0} = \dfrac{x_1^2 - 1}{\left(1 + x_1^2\right)^2},\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \ge 0.$

5.3.9 $\Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ u(x_1, x_2)\,|_{x_2=0} = \cos x_1,\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \ge 0.$

5.3.10 $\Delta u(x_1, x_2) = \sigma,\ \ u(x_1, x_2)\,|_{x_2=0} = b,\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ x_2 \ge 0.$

5.3.11 $\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0,\ \ u(x_3)\,|_{x3=0} = \varphi(x_1, x_2)\,,\ \ x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_3 > 0.$

5.3.12 $\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = 0,\ \ x_1 \in \mathbb{R}, \quad 0 < x_2 < \pi, \\ u(x_1, x_2)|_{x_2=0} = 0,\ \ x_1 \in \mathbb{R},\ \ u|_{x_2=\pi} = \begin{cases} u_0, & x_1 \ge 0, \\ 0, & x_1 < 0. \end{cases} \end{cases}$

5.3.13 $\Delta u\left(x_1,x_2,x_3\right)=e^{-x_3}\sin x_1\cos x_2,\ u\left|_{x_3=0}=0,\ \ x_1,\,x_2\in\mathbb{R},\quad x_3>0.\right.$

5.3.14 $\Delta u\left(x_1,x_2,x_3\right)=0,\ u\left|_{x_3=0}=\Theta\left(x_2-x_1\right),\ \ x_1,\,x_2\in\mathbb{R},\ \ x_3>0.\right.$

5.3.15 $\Delta u\left(x_1,x_2,x_3\right)=0,\quad u\left|_{x_3=0}=e^{-4x_1}\sin 5x_2,\ \ x_1,\,x_2\in\mathbb{R},\ \ x_3>0.\right.$

5.3.16 $\left\{\begin{array}{l}\Delta u\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left[x_1^2+x_2^2+\left(x_3+1\right)^2\right]^{-2},\\ u\left(x_1,x_2,x_3\right)|_{x_3=0}=\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^{-1},\ \ x_1,\,x_2\in\mathbb{R},\quad x_3>0.\end{array}\right.$

5.3.4 Жауаптары

5.3.1 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{1}{2}.$

5.3.2 $u\left(x_1,x_2\right)=e^{-2x_2}\sin 2x_1.$

5.3.3 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{x_1-a}{x_2}.$

5.3.4 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{2}{\pi}\left(a\arctan\dfrac{x_2}{x_1}+b\arctan\dfrac{x_1}{x_2}\right).$

5.3.5 $u\left(x_1,x_2\right)=e^{-\sqrt{2}x_3}\cos x_1\cos x_2.$

5.3.6 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{x_2+1}{x_1^2+\left(x_2+1\right)^2}.$

5.3.7 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{x_1}{x_1^2+\left(x_2+1\right)^2}.$

5.3.8 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{x_1^2-\left(x_2+1\right)^2}{\left[x_1^2+\left(x_2+1\right)^2\right]^2}.$

5.3.9 $u\left(x_1,x_2\right)=e^{-x_2}\cos x_1.$

5.3.10 $u\left(r,\Psi\right)=\dfrac{a}{4}\left(R^2-r^2\right)+b.$

5.3.11 $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{|x-\xi|}+\dfrac{1}{|x-\xi^*|}\right]\Bigg|_{\xi_3=0}d\xi_1 d\xi_2$ *мұнда* $x\left(x_1,x_2,x_3\right),\ \xi\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right),\ \xi^*\left(\xi_1,\xi_2-\xi_3\right)$ *нүктелер.*

5.3.12 $u\left(x_1,x_2\right)=\dfrac{u_0}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{e^{x_1}+\cos x_2}{\sin x_2}\right).$

5.3.13 $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(e^{-\sqrt{2}x_3}-e^{-x_3}\right)\sin x_1\cos x_2.$

5.3.14 $u\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2} x_3}.$

5.3.15 $u\left(x_1, x_2, x_3\right) = e^{-4x_1 - 3x_3} \sin 5x_2.$

5.3.16 $u\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left[x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 + 1\right)^2\right]^{-1}.$

Бөлім 6

Интегралдық түрлендірулер әдісі

6.1 Интегралдық түрлендірулер әдісі

Математкалық физика есептерін жуықтап шешудің тиімді әдістерінің бірі – интегралдық түрлендірулер әдісі.

Интегралдық түрлендірулердің түрі көп және олар өз алдына үлкен бір теория. Бұл бөлімде осындай интегралдық түрлендірулердің ішіндегі ең қарапайым әрі жиі қолданылатын Фурье және Лапластың интегралдық түрлендірулерін қарастыратын боламыз.

Анықтама 6.1.1 *$f(t)$ функциясының интегралдық түрлендіруі деп*

$$\tilde{f}(z) = \int_a^b K(z,t)\, f(t)dt$$

интегралы арқылы анықталған $\tilde{f}(z)$ функциясын айтамыз. Мұндағы $f(t)$ түпнұсқа, $\tilde{f}(z)$ функциясы бейне (интегралдық түрлендіруі), $K(z,t)$ интегралдық түрлендірудің ядросы деп аталады.

Интегралдық түрлендіру әдісі арқылы дербес туындылы теңдеулер (ДТДТ) үшін қойылған есептерді шешудің алгоритмі келесідей:

1. Ізделінді U функциясы үшін ДТДТ –ге қойылған есепті (Коши, шеттік, бастапқы-шеттік) қайсыбір бір айнымалысы бойынша интегралдық түрлендіруді қолданып, оны U функциясының интегралдық түрлендіруі болатын $\tilde{U}$ функциясы үшін жәй дифференциалдық теңдеуге (ЖДТ) қойылған есепке (Коши немесе шеттік) түрлендіру.

2. ЖДТ үшін алынған есептің $\tilde{U}$ шешімін табу.

3. Кері интегралдық түрлендіруі арқылы бастапқы есептің U шешімін анықтау.

6.2 Фурьенің интегралдық түрлендірулері

Анықтама 6.2.1 *$f\left(x\right)$ функциясы үшін Фурьенің интегралдық түрлендіруі деп*

$$F\left[f\right]\equiv\tilde{f}\left(\lambda\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\,x\lambda}dx \tag{6.2.1}$$

интегралын, ал кері түрлендіруі деп

$$F^{-1}\left[f\right]\equiv f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\tilde{f}\left(\lambda\right)e^{i\,x\lambda}d\lambda \tag{6.2.2}$$

интегралын айтады.

$f\left(x\right)$ функциясы үшін (6.2.1) Фурье түрлендіруі бар болуы үшін $f\left(x\right)$ функциясының $\left(-\infty,+\infty\right)$ аралығында үзіліссіз болуы $f\left(x\right)\in C\left(R\right)$ немесе осы аралықта саны арқылы бірінші ретті үзіліс нүктелері болуы және

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx$$

интегралының абсолютті жинақты болуы жеткілікті, яғни $f\left(x\right)\in L^{1}\left(R\right)$.

Егер $f\left(x\right)$ жұп функция болса, онда (6.2.1), (6.2.2) түрлендірулердің орнына сәйкес *Фурьенің косинус түрлендірулерін* (тура және кері)

$$F_{c}\left[f\right]\equiv\tilde{f}\left(\lambda\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{+\infty}f\left(x\right)\cos\lambda xdx, \tag{6.2.3}$$

$$F_{c}^{-1}\left[f\right]\equiv f\left(x\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{f}\left(\lambda\right)\cos\lambda xd\lambda, \tag{6.2.4}$$

ал $f\left(x\right)$ тақ функция болса, онда *Фурьенің синус түрлендірулерін*

$$F_{s}\left[f\right]\equiv\tilde{f}\left(\lambda\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{+\infty}f\left(x\right)\sin\lambda xdx, \tag{6.2.5}$$

$$F_{s}^{-1}\left[f\right]\equiv f\left(x\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{f}\left(\lambda\right)\sin\lambda xd\lambda \tag{6.2.6}$$

қолдануға болады.

Анықтама 6.2.2 *(үйірткі). $(-\infty,+\infty)$ аралықта анықталған, шенелген және абсолют интегралданатын $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларының үйірткісі деп*

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt \tag{6.2.7}$$

өрнегін атайды.

6.2.1 Фурьенің интегралдық түрлендіруінің негізгі қасиеттері.

Айталық $u(x,t) \in L^1(R)$, $u(x,t) \to 0,\ x \to \pm\infty$, функциясының x айнымалысы бойынша Фурье түрлендіруі $F[u] = \tilde{u}(\lambda,t)$ болсын. Келесі қасиеттер орынды:

1. **Сызықтығы:** $F[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1F[u_1] + c_2F[u_2] = c_1\tilde{u}_1 + c_2\tilde{u}_2$.
2. **Дербес туындылары туралы.**

$$F[u_x] = i\lambda\tilde{u}(\lambda,t),\ \ F[u_{xx}] = (i\lambda)^2\,\tilde{u}(\lambda,t),\ ...,F\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right] = (i\lambda)^n\,\tilde{u}(\lambda,t);$$

$$F[u_t] = \tilde{u}_t(\lambda,t),\ \ F[u_{tt}] = \tilde{u}_{tt}(\lambda,t),\ ...,F\left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right] = \frac{\partial^n \tilde{u}(\lambda,t)}{\partial t^n}$$

3. Егер $u(x) \in C(R)$, $u_x(x) \in L^1[0,\infty)$ және $u(x) \to 0,\ x \to +\infty$ болса, онда

$$F_c[u_x] = \lambda F_s[u] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{u}(0),\ \ F_s[u_x] = -\lambda F_c[u]$$

$$F_c[u_{xx}] = -\lambda^2 F_c[u] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(0),\ \ F_s[u_{xx}] = -\lambda^2 F_s[u] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda u(0).$$

4. **Үйірткі туралы.** φ мен ψ функцияларының үйірткісі үшін

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]\cdot F[\psi]$$

теңдігі орындалады.

5. $F[f(x+a)] = e^{-i\lambda a}F[f]$.
6. $F\left[\int\limits_0^x f(\eta)\,d\eta\right] = \dfrac{F[f]}{i\lambda}$.

Мысал 6.2.1 *Коши есебін*

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_{tt} = 0,\ t > 0,\ \ x \in (-\infty,+\infty) \equiv R^1, \\ &u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in R^1 \end{aligned}$$

Фурье түрлендіруін (x айнымалы) қолданып шешіңіз.

Шешуі. Есепке Фурье түрлендіруін x айнымалы бойынша қолдансақ, онда 1–2 қасиеттері бойынша есеп мына жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебіне келтіріледі

$$\frac{d^2\tilde{u}\left(\lambda,t\right)}{dt^2}+\lambda^2\tilde{u}\left(\lambda,t\right)=0,\ \ \tilde{u}\left(\lambda,0\right)=\tilde{\varphi}\left(\lambda\right),\ \ \frac{d\tilde{u}\left(\lambda,0\right)}{dt}=\tilde{\psi}\left(\lambda\right).$$

Бұл есептің жалпы шешімі:

$$\tilde{u}\left(\lambda,t\right)=C_1\left(\lambda\right)e^{i\lambda t}+C_2\left(\lambda\right)e^{-i\lambda t}\Rightarrow$$

Бастапқы шарттарды қолдансақ

$$C_1\left(\lambda\right)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)+\frac{1}{i\lambda}\tilde{\psi}\left(\lambda\right)\right],\ C_2\left(\lambda\right)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)-\frac{1}{i\lambda}\tilde{\psi}\left(\lambda\right)\right]\ \ \Rightarrow$$

$$\tilde{u}\left(\lambda,t\right)=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)\left(e^{i\lambda t}+e^{-i\lambda t}\right)+\frac{1}{2i\lambda}\tilde{\psi}\left(e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t}\right).$$

Бұған (6.2.2) фурьенің кері түрлендіруін қолданып, бастапқы есептің шешімін аламыз

$$u\left(x,t\right)=\tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\lambda(x+t)}+e^{i\lambda(x-t)}\right]\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)d\lambda+$$
$$+\tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\lambda(x+t)}-e^{i\lambda(x-t)}\right]\frac{1}{i\lambda}\tilde{\psi}\left(\lambda\right)d\lambda=\left(5^\circ,6^\circ\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x-t\right)-\varphi\left(x-t\right)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi\left(\tau\right)d\tau.$$

Бұл кәдімгі Даламбер формуласы (47 бет, (3.2.12) қараңыз) .

Мысал 6.2.2 *Жылуөткізгіш теңдеуі үшін*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,-\infty<x<\infty,\quad t>0, \tag{6.2.8}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ -\infty<x<\infty \tag{6.2.9}$$

Коши есебін Фурье интегралдық түрлендіруі арқылы шешейік.

Шешуі. Айталық $\tilde{u}\left(\lambda,t\right)=F\left[u\left(x,t\right)\right]$ және $\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)=F\left[\varphi\left(x\right)\right]$ сәйкес $u\left(x,t\right)$ және $\varphi\left(x\right)$ функцияларының x айнымалысы бойынша Фурье түрлендірулері болсын. Жоғарыдағы қасиеттерді ескере отырып (6.2.8) теңдеуге және (6.2.9) бастапқы шартқа Фурье түрлендіруін x айнымалысы бойынша қолдансақ, нәтижеде (6.2.8)-(6.2.9) есебі

$$\tilde{u}' + (a\lambda)^2\,\tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi} \tag{6.2.10}$$

бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебіне түрленеді. Жай дифференциалдық теңдеулер курсын белгілі (6.2.10) Коши есебінің шешімі

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda)\; e^{-(a\lambda)^2 t}.$$

Табылған $\tilde{u}(\lambda, t)$ кескін шешімге (6.2.2) Фурьенің кері түрлендіруін қолдансақ

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda, t)\; e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\; e^{-(a\lambda)^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$$

теңдігін аламыз. Бұған

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\; e^{-i\lambda y} dy$$

түрлендіруін қойсақ

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i(\lambda x - \lambda y)} d\lambda \right] dy.$$

Ішкі интегрант Эйлер формуласы[1] бойынша

$$e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i(\lambda x - \lambda y)} = e^{-a^2\lambda^2 t} \cos(\lambda x - \lambda y) + i e^{-a^2\lambda^2 t} \sin(\lambda x - \lambda y).$$

Бұл комплекс айнымалы функцияның жорамал бөлігі λ бойынша тақ функция екені анық. Олай болса оның интегралы нөлге тең. Ал нақты бөлігі жұп функция. Сондықтан $(-\infty, \infty)$ аралығы бойынша интегралы $[0, \infty)$ бойынша интегралды екі еселегенге тең, яғни

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos(\lambda x - \lambda y)\, d\lambda \right] dy. \tag{6.2.11}$$

Ішкі интегралға $s = \lambda a\sqrt{t}$, $\;b = \dfrac{x-y}{2a\sqrt{t}}$ белгілеулер енгізіп және

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-s^2} \cos 2bs dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2} \tag{6.2.12}$$

[1] $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

формуланы қолдансақ, онда

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos(\lambda x-\lambda y)\,d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$$

теңдігін аламыз. Мұны (6.2.11) қойсақ

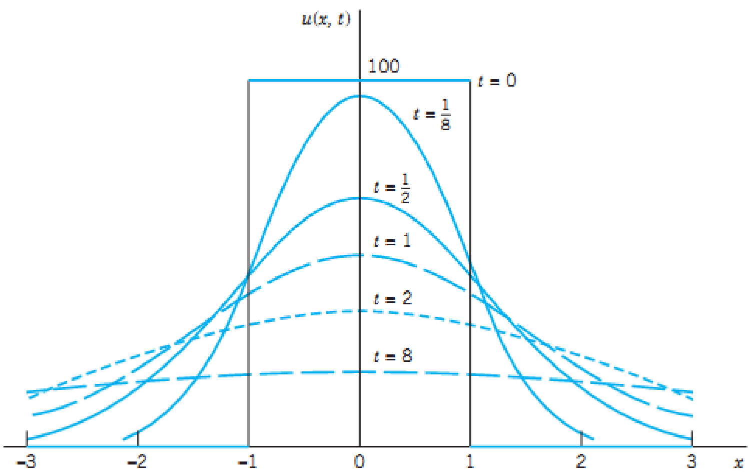
$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy \tag{6.2.13}$$

ізделінді шешімді аламыз. Бұл 3.3.1–бөлімдегі (64 бет, (3.3.36) қараңыз) дәлелдеусіз берілген Пуассон формуласы.

Айталық, $a=1$, $\varphi(x)=\begin{cases}100, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ болсын. Онда (6.2.13) формула бойынша

$$u(x,t)=\frac{100}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=\left|z=\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right|=\frac{100}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\frac{(1+x)}{2\sqrt{t}}}^{\frac{(1-x)}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz.$$

Бұл $u(x,t)$ функциясының әртүрлі t уақыттардағы графигі (график Maple 11 бағдарламасымен алынды) 6.2.-1–суретте көрсетілген.



Сурет 6.2.-1. $\varphi(x)=100,\ a=1$ болған кездегі $u(x,t)$ шешімнің бірнеше t уақыт мезетіндегі графигі.

Берілген есептің шешімін кейде $[0,+\infty)$ аралықта анықтау қажет болады. Міне бұл жағдайда шешімді табиғатына (жұп немесе тақ) байланысты (6.2.3)-(6.2.6) Фурьенің косинус немесе синус түрлендірулерді қолдануға болады немесе $(-\infty, 0)$ жарты өске тақ немесе жұп түрде (кейбір жағдайда нөлмен) жалғастырып жоғарыдағы (6.2.1)-(6.2.2) Фурьенің түрлендірулерін қолдануға болады.

Мысал 6.2.3 *Жарты жазықтықта берілген жылуөткізгіш теңдеуі үшін Коши есебін Фурье интегралдық түрлендіруі арқылы шешіңіз*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x > 0, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq 0.$$

Шешуі. Есепке x айнымалысы бойынша (6.2.5) Фурьенің синус түрлендіруін қолданайық. Синус түрлендіруінің қасиеттерін және $u(0,t) = 0$ шартын қолданып:

$$F_s[u_t] = \tilde{u}_t(\lambda,t), \; a^2F_s[u_{xx}] = -a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda,t) \text{ және } F_s[u(x,0)] = F_s[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda),$$

нәтижеде бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін аламыз

$$\tilde{u}' + (a\lambda)^2\tilde{u} = 0, \;\; \tilde{u}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}.$$

Бұл есептің шешімі

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \tilde{\varphi}(\lambda)\; e^{-(a\lambda)^2 t}.$$

Бұған енді (6.2.6) Фурьенің кері синус түрлендіруін қолданып, одан кейін

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F_s[\varphi(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi(y)\sin\lambda y dy$$

қойсақ, нәтижеде ізделінді шешімді аламыз

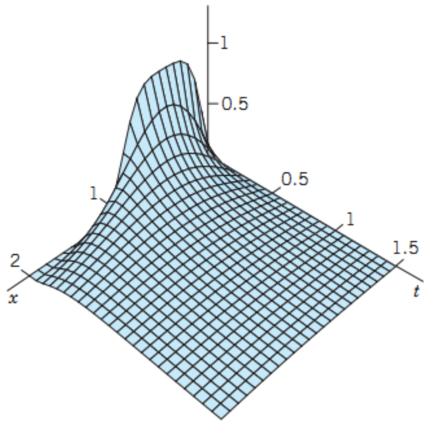
$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(y)\;\sin\lambda y e^{-(a\lambda)^2 t}\sin\lambda x dy dx.$$

Бұл интегралға (6.2.12) формуланы қолданып одан әрі интегралдап, $u(x,t)$ шешімнің екінші бір түрін алуға болады

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(y)\;\sin\lambda y e^{-(a\lambda)^2 t}\sin\lambda x dy dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(y)\int_0^\infty \; e^{-(a\lambda)^2 t}\left[\cos\lambda(x+y) + \cos\lambda(x-y)\right]dxdy =$$
$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(y)\left[e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\right]dy.$$

Бұл мысал жоғарыда 3.4.2–бөлімде жалғастыру әдіс арқылы да шығарғанды (81 бет, 3.4.5–мысалды қараңыз).

Бұл шешімнің $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ және $a = 1$ болған кездегі $0 \le x \le 2, \quad 0.01 \le t \le 1,5$ аралығындағы графигі 6.2.-2–суретте көрсетілген.



Сурет 6.2.-2. Мысал 1.3 есептің $0 \le x \le 2, \quad 0.01 \le t \le 1,5$ аралығындағы $u(x,t)$ шешімі.

Ескерту 6.2.1 *Егер* $u(0,t) = 0$ *шекаралық шарттың орнында* $u_x(0,t) = 0$ *шарты берілсе онда* (6.2.3)-(6.2.4) *Фурьенің косинус түрлендірулері қолданылады.*

6.3 Лапластың интегралдық түрлендіруі

Айталық $[0,+\infty)$ аралығында анықталған нақты немесе комплекс мәнді $f(t)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырсын:

1. $[0,\infty)$ аралығында үзіліссіз немесе осы аралықта саны ақырлы бірінші ретті үзіліс нүктелері бар;

2. $f(t) = 0, \quad t \in (-\infty, 0)$;

3. $M > 0$ және $s_0 > 0$ сандары табылып, барлық $t \in [0,\infty)$ үшін

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}$$

теңсіздігі орындалсын. Осындай $f(t)$ функциясының $Re(p) > s_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $p = x + iy$ комплекс айнымалысы үшін

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \tag{6.3.14}$$

интегралы бар болады және ол $Re(p) > s_0$ жарты жазықтығында аналитикалық функцияны анықтайды.

Анықтама 6.3.1 (6.3.14) *интегралымен анықталған $F(p)$ функциясы $f(t)$ функциясының* кескіні *немесе Лаплас түрлендіруі деп, ал $f(t)$ функциясы түпнұсқа функция деп аталады.*

Егер $F(z)$ функциясы $Rep > s_0$ жарты жазықтығында аналитикалық және

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0.$$

Сонымен қатар

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(a+iy)\, dy$$

интегралы абсолютті жинақты болса, онда Лаплас түрлендіруіне кері түрлендіру бар болады және ол

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a+iy)\, e^{(a+iy)t} dy \qquad (6.3.15)$$

формуласы арқылы анықталады.
Лапластың тура және кер түрлендірулерін қысқаша сәйкес
$L[f(t)] = F(p)$, $f(t) \to F(p)$ және $L^{-1}[F(p)] = f(t)$, $F(p) \to f(t)$
белгілейді.

6.3.1 Лаплас түрлендіруінің негізгі қасиеттері

Айталық $f(t)$ және $g(t)$ функцияларының Лаплас түрлендірулері сәйкес $F(p)$, $\Phi(p)$ функциялары болсын.

1. **Сызықтық.** Кез келген a, b сандары үшін $L[af(t) + bg(t)] = aF(p) + b\Phi(p)$.

2. **Ұқсастық қасиеті.** $L[f(t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ орынды, мұндағы α-кез келген комплекс сан.

3. **Түп нұсқаны дифференциалдау.** Егер $f^{(k)}(t) \in C[0, +\infty)$, $k = 0, 1, 2, ...n-1$ болса, онда

   $$L\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

   теңдігі орынды.

   Салдар Егер $u(x,t)$ функциясының t бойынша Лаплас түрлендіруі ${}_tL[u(x,t)] = U(x,p)$ болса, онда

   $${}_tL[u_t(x,t)] = pU(x,p) - u(x,0),$$

$$_tL\left[u_{tt}\left(x,t\right)\right]=p^2U\left(x,p\right)-pu\left(x,0\right)-u_t\left(x,0\right)$$

$$_tL\left[\frac{\partial^{(n)}u\left(x,t\right)}{\partial x^{(n)}}\right]=\frac{d^{(n)}U\left(x,p\right)}{dx^{(n)}},\ n=1,2,....$$

өрнектері орынды.

4. **Кескінді дифференциалдау.** $L\left[-tf\left(t\right)\right]=F'\left(p\right)$.

5. **Интегралдың Лаплас түрлендіруі.** Егер $f\left(t\right)\in C\left[0,+\infty\right)$ болса, онда

$$L\left[\int\limits_0^t f\left(\xi\right)d\xi\right]=\frac{F\left(p\right)}{p}\ \text{және}\ L\left[\frac{F\left(p\right)}{p}\right]=\int\limits_0^t f\left(\xi\right)d\xi$$

теңдіктері орынды.

6. **Кешігу.** Кез келген оң $\tau>0$ саны үшін $L\left[f\left(t-\tau\right)\right]=e^{-p\tau}F\left(p\right).$

7. **Кескіннің жылжуы.** Кез келген a комплекс саны үшін

$$L\left[e^{at}f\left(t\right)\right]=F\left(p-a\right)\ \text{және}\ L^{-1}\left[F\left(p-a\right)\right]=e^{at}f\left(t\right)$$

теңдіктері орынды.

Мысал 6.3.1 $Q=\{(x,t):\ 0<x<+\infty,\quad t>0\}$ *облысында жылуөткізгіш теңдеуі үшін қойылған есептің шешімін анықта*

$$\begin{array}{l} u_t=u_{xx}+u-f(x)\,,\qquad (x,t)\in Q,\\ u\left(0,t\right)=t,\ u_x\left(0,t\right)=0,\ \ t>0. \end{array}$$

Шешуі. Лаплас түрлендіруін x айнымалысы бойынша қолданайық. Лаплас түрлендіруінің дифференциалдау қасиеттері және $u\left(0,t\right)=t$, $u_x\left(0,t\right)=0$ шарттары бойынша

$$\begin{array}{l} L\ \left[u(x,t)\right]=U\left(p,t\right),\quad L\ \left[u_t(x,t)\right]=U_t\left(p,t\right),\quad L\left[u_x(x,t)\right]=pU\left(p,t\right)-t,\\ L\left[u_{xx}(x,t)\right]=p^2U\left(p,t\right)-pt,\qquad L\left[f(x)\right]=F(p). \end{array}$$

Олай болса берілген есеп келесі p параметрі бар, t айнымалы бойынша келесі бірінші ретті жәй дифференциалдық теңдеуге түрленеді

$$U_t-\left(1-p^2\right)U=-\left(F(p)+pt\right).$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі шешімі

$$U\left(p,t\right)=Ce^{\left(1+p^2\right)t}+\frac{p}{\left(1+p^2\right)^2}+\frac{F\left(p\right)}{1+p^2}+\frac{pt}{1+p^2}.$$

(6.3.15) Лапласың кері түрлендіруі бар болу шарты бойынша мұнда C тұрақтысы нөлге тең $C = 0$. Себебі, егер $C \neq 0$ болса онда $p \to \infty$ кезде $U(p,t) \to \infty$ болады да Лаплас түрлендіруінің бейнесінің бар болу шарты орындалмас еді. Олай болса, кескін шешім

$$U\left(p,t\right) = \frac{p}{\left(1+p^2\right)^2} + \frac{F\left(p\right)}{1+p^2} + \frac{pt}{1+p^2}.$$

Енді $u(x,t)$ түпнұсқа шешімді анықтайық. Лаплас түрлендіруінің кестесі бойынша (қосымша А, 3 кестені қараңыз):

$$\frac{p}{\left(1+p^2\right)^2} \to \cos x,$$

және үйірткінің қасиеті бойынша

$$\frac{F\left(p\right)}{1+p^2} \to \int\limits_0^x f(y)\sin(x-y)dy, \qquad \frac{pt}{1+p^2} \to \frac{1}{2}x\sin x.$$

Демек, бастапқы есептің шешімі

$$u(x,t) = \frac{1}{2}x\sin x + t\cos x + \int\limits_0^x f(y)\sin(x-y)dy.$$

Мысал 6.3.2 $Q = \{(x,t):\ 0 < x < +\infty, \quad t > 0\}$ *облысында келесі есептің шешімін анықтаңыз.*

$$\begin{array}{l} 4u_{tt} + 9u_{xx} = 36e^{2x}\sin 3t\,, \qquad (x,t) \in Q, \\ u\left(0,t\right) = 0,\ u_x\left(0,t\right) = \sin 3t,\ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 0,\ u_t\left(x,0\right) = 3xe^{2x},\ \ x \geq 0. \end{array} \tag{6.3.16}$$

Шешуі. Лаплас түрлендіруін x айнымалысы бойынша қолданайық. Айталық $U\left(p,t\right)$ функциясы $u\left(x,t\right)$ функциясының Лаплас түрлендіруі болсын, яғни

$$U\left(p,t\right) = L\left[u\left(x,t\right)\right] = \int\limits_0^\infty u(x,t)e^{-px}dx.$$

Онда шекаралық шарттар және Лаплас түрлендіруінің қасиеттері бойынша

$$L\ \left[u_{tt}(x,t)\right] = U_{tt}\left(p,t\right), \quad L\left[u_{xx}(x,t)\right] = p^2U\left(p,t\right) - \sin 3t,$$

$$L\left[36e^{2x}\sin 3t\right] = \frac{36}{p-2}\sin 3t \quad L\left[u(x,0)\right] = 0, \quad L\ \left[u_t(x,0)\right] = \frac{3}{\left(p-2\right)^2}$$

болғандықтан берілген (6.3.16) бастапқы-шеттік есеп мына екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебіне түрленеді:

$$U_{tt} + \frac{9p^2}{4}U = \frac{9(p+2)}{p-2}\sin 3t, \tag{6.3.17}$$

$$U(p,0) = 0, \quad U_t(p,0) = \frac{3}{(p-2)^2}. \tag{6.3.18}$$

Бұл (6.3.17)-(6.3.18) Коши есебінің шешімі

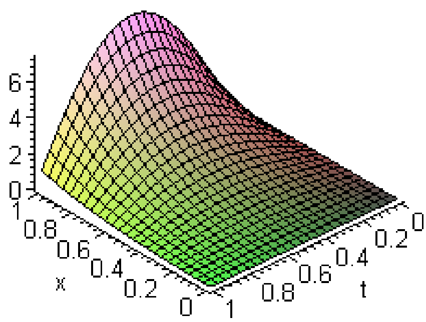
$$U(p,t) = \frac{1}{(p-2)^2}\sin 3t.$$

Енді бұл анықталған $U(p,t)$ шешімге Фурьенің кері түрлендіруін (кестені) пайдаланып

$$u(x,t) = L^{-1}[U(p,t)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)^2}\sin 3t\right] = xe^{2x}\sin 3t$$

бастапқы берілген (6.3.16) есептің шешімін табамыз. Бұл есепті Maple бағдарламасымен де есептеуге болады.

```
> eq:=9*diff(u(x,t),x,x)+4*diff(u(x,t),t,t)=36*exp(2*x)*sin(3*t);
x>0,t>0;
> bc1:=u(0,t)=0;t>0;
> bc2:=D[1](u)(0,t)=sin(3*t); t>0;
> ic1:=u(x,0)=0; x>0;
> ic2:=D[2](u)(x,0)=3*x*exp(2*x); x>0;
> with(inttrans,laplace,invlaplace);
> laplace(eq,x,p);
> subs(laplace(u(x,t),x,p)=v(t),bc1,bc2,%);
> dsolve({%,v(0)=laplace(rhs(ic1),x,p),
D(v)(0)=laplace(rhs(ic2),x,p)},{v(t)});
> subs(v(t)=laplace(u(x,t),x,p),%);
> invlaplace(%,p,x);
> plot3d(sin(3*t)*x*exp(2*x),x=0.01..2, t=0..8);
```



Сурет 6.3.-3. Мысал 1.4 есептің $0 \le x \le 2,\ \ 0.01 \le t \le 1,5$ аралығындағы $u(x,t)$ шешімі.

6.4 Жаттығулар

Жоғарыдағы Лаплас және Фурье түрлендірулерін қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

6.4.1 $u_t = 4u_{xx} + x, \quad x \in (-\infty, \infty)\,, \ \ t > 0; \qquad u\,(x,0) = x,\ x \in (-\infty, \infty)\,.$

6.4.2 $u_t = u_{xx} + 2u + t,\ \ x \in (-\infty, \infty)\,, \ \ t > 0; \qquad u\,(x,0) = x^2 - 1,\ x \in (-\infty, \infty)\,.$

6.4.3 $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + xt + 2,\ x \in (-\infty, \infty)\,, \ \ t > 0;\ \ u\,(x,0) = \cos^2 x,\ \ x \in (-\infty, \infty)\,.$

6.4.4 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ \ x \in (0, \infty)\,, \quad t > 0; \\ u_x\,(0,t) = \sin t,\ \ t > 0; \\ u\,(x,0) = \sin x,\ \ u_t\,(x,0) = 0, \quad x > 0. \end{cases}$

6.4.5 $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \qquad x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty)\,, \\ u\,(x,0) = 1, \qquad u_t\,(x,0) = 1, \quad x \in R^1. \end{cases}$

6.4.6 $\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx} + xt, \qquad x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty)\,, \\ u\,(x,0) = 0, \qquad u_t\,(x,0) = 0, \quad x \in R^1. \end{cases}$

6.4.7 $\begin{array}{l} 2u_{xx} + 5u_{xt} + 3u_{tt} = 0, \quad x > 0,\ \ t > 0, \\ u\,(0,t) = 0,\ \ u_x\,(0,t) = f\,(t)\,,\ \ t > 0;\ \ u\,(x,0) = g\,(x)\,,\ \ u_t\,(x,0) = 0\ \ x > 0. \end{array}$

6.4.8 $\begin{array}{l} u_{xx} + u_{xt} = 0, \quad 0 < x,\ \ t < \infty, \\ u\,(0,t) = \mu\,(t)\,,\ \ u_x\,(0,t) = 0, \\ u\,(x,0) = \phi\,(x)\,,\ \ \mu\,(0) = \phi\,(0) = 0; \end{array}$

6.4.9 $\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + f\,(x,t)\,,\ \ -\infty < x < \infty,\ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty, \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} u = \lim\limits_{x \to \pm\infty} u_x = 0. \end{array}$

6.4.10 $\begin{array}{l} u_{tt} = 9u_{xx},\ \ -\infty < x < \infty,\ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0,\ \ -\infty < x < \infty,\ \ u_t\,(x,0) = \begin{cases} e^{-2x},\ \ x \ge 1, \\ 0,\ \ x < 1. \end{cases} \end{array}$

6.4.11 $\begin{array}{l} u_{tt} = 9u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ \ t > 0, \\ u_x\,(0,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = \begin{cases} x\,(1-x)\,,\ \ 0 \le x \le 1 \\ 0,\ \ x > 1, \end{cases} \qquad u_t\,(x,0) = 0,\ \ 0 < x < \infty. \end{array}$

6.4.12 $\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} + K, \;\; x > 0, \; t > 0, \;\; K = const, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \;\; x > 0, \\ u(0,t) = f(t), \;\; \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \;\; t \geq 0. \end{array}$

6.4.13 $\begin{array}{l} u_t = k u_{xx}, \;\; 0 < x < L, \; t > 0 \\ u(x,0) = 0, \;\; 0 < x < L, \\ u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = T_0 = const, \;\; t > 0. \end{array}$

6.4.14 $\begin{array}{l} u_{tt} = 196 u_{xx}, \;\; 0 < x < \infty, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; 0 < x < \infty, \;\; u_t(x,0) = \begin{cases} x^2(3-x), & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases} \end{array}$

6.4.15 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \;\; x \in (0,\infty), \quad t > 0; \\ u(0,t) = t, \; t > 0; \\ u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = x^2 + 1, \quad x > 0. \end{cases}$

6.4.16 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \;\; x \in (0,\infty), \quad t > 0; \\ u_x(0,t) = 5, \; t > 0; \\ u(x,0) = -3x, \; u_t(x,0) = 0, \quad x > 0. \end{cases}$

6.4.17 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; x \in (0,\infty), \quad t > 0; \\ u_x(0,t) - h u(0,t) = \varphi(t), \; t \geq 0; \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$

6.5 Жауаптары

6.5.1 $x(t+1)$.

6.5.2 $e^{2t}\left(x^2 + 2t - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}(2t+1)$.

6.5.3 $u(x,t) = 2t + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos 2x$.

6.5.4 $u(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & x - t \geq 0; \\ \sin t \cos x + \cos(x-t) - 1, & x - t \leq 0. \end{cases}$

6.5.5 $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)\sin x$.

6.5.6 $u(x,t) = \frac{xt^3}{6}$.

6.5.7 $$u(x,t) = \begin{cases} 3g\left(x - \frac{2}{3}t\right) - 2g\left(x-t\right), & x > t, \\ 3g\left(x - \frac{2}{3}t\right) + 2\int\limits_0^{t-x} f\left(t - x - \xi\right) d\xi, & \dfrac{2}{3}t < x < t, \\ 2\int\limits_0^{t-x} f\left(t-x-\xi\right) d\xi - 2\int\limits_0^{t-\frac{3}{2}x} f\left(t - \dfrac{3}{2}x - \xi\right) d\xi, & x < \dfrac{2}{3}t. \end{cases}$$

6.5.8 $$u(x,t) = \begin{cases} \phi\left(x-t\right) + \mu\left(t\right), & x - t > 0, \\ \mu\left(t\right), & x - t < 0. \end{cases}$$

6.5.9 $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi, \tau\right) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi d\tau.$$

6.5.10 $$u(x,t) = \frac{1}{3e^2} \int\limits_0^{\infty} \left[\left(\frac{2\cos\left(\omega\right) - \omega\sin\left(\omega\right)}{\omega(4+\omega^2)}\right)\cos\left(\omega x\right) + \left(\frac{\omega\cos\left(\omega\right) + 2\sin\left(\omega\right)}{\omega(4+\omega^2)}\right)\sin\left(\omega x\right)\right]\sin\left(3\omega t\right) d\omega.$$

6.5.11 $$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{2 - \omega\sin\left(\omega\right) - 2\cos\left(\omega\right)}{\omega^3} \sin\left(\omega x\right)\cos\left(3\omega t\right) d\omega.$$

6.5.12 $$u(x,t) = \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - \frac{K}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2\right] H\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}Kt^2.$$

6.5.13 $$u(x,t) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(erfc\left(\frac{(2n+1)\,L - x}{2\sqrt{kt}}\right) - erfc\left(\frac{(2n+1)\,L + x}{2\sqrt{kt}}\right)\right).$$

6.5.14 $$u(x,t) = \int\limits_0^{\infty} \frac{3}{7\pi\omega^5} h_\omega \sin\left(\omega x\right)\sin\left(14\omega t\right) d\omega,$$
$$h_\omega = 2\sin\left(3\omega\right) - 4\omega\cos\left(3\omega\right) - 3\omega^2\sin\left(3\omega\right) - 2\omega.$$

6.5.15 $$u(x,t) = \begin{cases} x^2 t + \frac{1}{3}t^3 + t, & x - t \geq 0; \\ xt^2 + \frac{1}{3}x^3 + t, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

6.5.16 $$u(x,t) = \begin{cases} -3x, & x - t \geq 0; \\ 5x - 8t, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

$$\textbf{6.5.17}\ \ u(x,t) = \begin{cases} 0, \quad x > at, \\ -ae^{h(x-at)} \int\limits_0^{t-x/a} e^{h\tau}\varphi(\tau)\, d\tau, \quad x < at. \end{cases}$$

Бөлім 7

Пайдаланылған әдебиеттер

1. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985.

2. *Будак Б. М., Самарский А. Л., Тихонов А. И.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1978.

3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

4. *Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С.* Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть I: Учебное пособие. –М.: МИФИ, 2007. –152 с.

5. *Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С.* Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть II: Учебное пособие. –М.: МИФИ, 2008. –328 с.

6. *Орынбасаров М.О., Токибетов Ж.А., Тулегенова М.Б.* Методическая разработка лабораторных работ по уравнениям математической физики, Алма-Ата, 1983. –328 с.

7. *Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.* Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы, оқу құралы. Алматы, Қазақ университеті, 2009. 203 б.

8. *Панов Ю.Д., Егоров Р.Ф.* Математическая физика. методы решения задач, Учебное пособие, Екатеринбург, 2005. –150 с.

9. *Пикулин В. П., Похожаев С. И.* Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд., – М.: МЦНМО, 2004. – 208 с. ISBN 5-94057-148-4.

10. *Рогов А.А., Семенова Е.Е., Чернецкий В.И., Щеголева Л.В.* Уравнения математической физики. Сборник примеров и упражнений. ПетрГУ. Петрозаводск, 2001. 220 с.

11. *Тихонов А. Я., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

12. *Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.* Математикалық физика теңдеулері, оқулық. Астана, Астана полиграфия, 2010. 376 б.

13. *Alan Jeffrey* Advanced Engineering Mathematics. Massachusetts 01803, USA 2002, HARCOURT/ACADEMIC PRESS. http://www.harcourt-ap.com

14. *Kreyszig E.* Advanced Engineering Mathematics. New York: Wiley, 1999. http://www.wiley.com/college/kreyszig

15. *William F. Trench* Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. (2013). Books and Monographs. Book 9. http://digitalcommons.trinity.edu/mono/9

A

Фурье түрлендірулерінің кестесі		
N	$f(x)$	$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
1	2	3
1	$af(x)+bg(x)$	$aF(w)+bG(w)$
2	$f^{(n)}(x)$	$(iw)^n F(w)$
3	$x^n f(x)$	$(i)^n \frac{d^n}{dw^n}[F(w)]$
4	$x^m f^{(n)}(x)$	$(i)^{m+n}\frac{d^m}{dw^m}[w^n F(w)]$
5	$f(ax),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{w}{a}\right)$
6	$f(x-a)$	$e^{-iwa}F(w)$
7	$e^{i\lambda x}f(x)$	$F(w-\lambda)$
8	$(f*g)(x)$	$\sqrt{2\pi}F(w)G(w)$
9	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert f(x)\rvert^2 dx$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert F(w)\rvert^2 dw,$
10	$f(x)=\begin{cases}1, & \lvert x\rvert<a,\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}\quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin aw}{w}\right)$
11	$\frac{\sin ax}{x},\ a>0$	$F(w)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \lvert w\rvert<a,\\ 0, & \lvert w\rvert>a\end{cases}$
12	$f(x)=\begin{cases}1, & a<x<b,\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases}\quad a>b>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-iaw}-e^{-ibw}}{iw}\right)$
13	$f(x)=\begin{cases}a-\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert<a,\\ 0, & \lvert x\rvert>a,\end{cases}\quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1-\cos aw}{w^2}\right)$
14	$\frac{1}{a^2+x^2},\ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert w\rvert}}{a}$
15	$f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & 0<x,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+iw}\right)$
16	$f=\begin{cases}e^{ax}, & b<x<c,\\ 0, & x<b,\ x>c,\end{cases}\quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{(a-iw)c}-e^{(a-iw)b}}{a-iw}\right)$
17	$e^{-a\lvert x\rvert},\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a}{a^2+w^2}\right)$
18	$xe^{-a\lvert x\rvert},\ a>0$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2iaw}{(a^2+w^2)^2}$
19	$f(x)=\begin{cases}e^{iax}, & \lvert x\rvert<b,\\ 0, & \lvert x\rvert>b\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin b(w-a)}{w-a}\right)$

Жалғасы келесі бетте

1	2	3
20	$e^{-a^2x^2}\,,\;\; a>0$	$\dfrac{1}{a\sqrt{2}}e^{-\dfrac{w^2}{4a^2}}$
21	$f(x)=\begin{cases} x^a e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$\dfrac{(a)}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)^a}$
22	$J_0(ax)\,,\;\; a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{H(a-\|w\|)}{\sqrt{a^2-w^2}}$
23	$\delta(x-a)\,,\;\; a\in R$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iaw}$

B

Лаплас түрлендіруінің кестесі			
N	$f\left(x\right)$	$F\left(p\right)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	p мәндері
1	2	3	4
1	1	$\frac{1}{p}$	$p>0$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$p>0$
3	$t^n,\, n=1,2,...$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$p>0$
4	$t^a,\ \ a>-1$	$\frac{(a+1)}{p^{a+1}}$	$p>a$
5	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$p>a$
6	$t^ne^{at},\ \ n=1,2,...$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$p>a$
7	$H(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$	$p\geq a$
8	$\delta(t-a)$	e^{-ap}	$p>0,\, a>0$
9	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$p>0$
10	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$p>0$
11	$t\sin at$	$\frac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p>0$
12	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p>0$
13	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{\left((p-a)^2+b^2\right)^2}$	$p>a$
14	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{\left((p-a)^2+b^2\right)^2}$	$p>a$
15	$\frac{1}{2a^3}\sin at-\frac{1}{2a^2}t\cos at$	$\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p>0$
16	$\frac{1}{2a}\sin at+\frac{1}{2}t\cos at$	$\frac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p>0$
17	$1-\cos at$	$\frac{a^2}{p\left(p^2+a^2\right)}$	$p>0$
18	$at-\sin at$	$\frac{a^3}{p^2\left(p^2+a^2\right)}$	$p>0$
19	$sh\left(at\right)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$p>\lvert a\rvert$

Жалғасы келесі бетте

1	2	3	4
20	$ch\,(at)$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$p>\lvert a\rvert$
21	$\dfrac{1}{2a^3}sh\,(at)+\dfrac{1}{2a^2}tch\,(at)$	$\dfrac{1}{(p^2-a^2)^2}$	$p>\lvert a\rvert$
22	$\dfrac{1}{2a}t\cdot sh\,(at)$	$\dfrac{p}{(p^2-a^2)^2}$	$p>\lvert a\rvert$
23	$\dfrac{1}{2a}sh\,(at)+\dfrac{1}{2}t\cdot ch\,(at)$	$\dfrac{p^2}{(p^2-a^2)^2}$	$p>\lvert a\rvert$
24	$sh\,(at)-\sin at$	$\dfrac{2a^3}{p^4-a^4}$	$p>\lvert a\rvert$

Ескертулер үшін

Ескертулер үшін

Ескертулер үшін