Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 135–144.

УДК 517.956.4

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

М.А. Садыбеков[1], Г. Дилдабек[2], А.А. Тенгаева[3]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]sadybekov@math.kz

[2]Казахский национальный университет им. Аль-Фараби
050040, Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, e-mail: [2]dildabek.g@gmail.com

[3]Казахский национальный аграрный университет
050010, Алматы, пр-т Абая, 8, e-mail: [3]aijan0973@mail.ru

Аннотация: В работе рассматривается нелокальная начально-краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Область рассмотрения – прямоугольник. Ставится классическое начальное условие по переменной t. По пространственной переменной x ставится нелокальное периодическое краевое условие. Хорошо известно, что решение задачи может быть построено в виде сходящегося ортогонального ряда по собственным функциям спектральной задачи для оператора кратного дифференцирования с периодическими краевыми условиями. Поэтому функция Грина задачи может быть также выписана в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям (ряда Фурье). Для классических первой и второй начально-краевых задач существует также и второе представление функции Грина – через функцию Якоби. В нашей работе найдено представление функции Грина нелокальной начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями в виде ряда по экспонентам.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, начально-краевая задача, периодические краевые условия, функция Грина.

1. Введение

Наряду с классическими краевыми и начально-краевыми задачами в последнее время внимание учёных привлекают задачи математической

Keywords: *Heat equation, initial-boundary value problems, periodic boundary condition, Green's function.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35C15, 35E15, 35K05, 35K20.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0825/ГФ4.

физики с нелокальными (неклассическими) дополнительными условиями. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. К ним относятся краевые задачи с условиями типа периодичности, с условием Бицадзе-Самарского, Самарского-Ионкина, с условиями интегрального типа, а также задачи с многоточечными граничными условиями общего вида. Актуальность изучения этих задач обусловлена также наличием ряда физических приложений в области электростатики, электродинамики, теории упругости, физики плазмы, многослойной оптики и т.п. Возможность представления решения задачи в интегральном виде, основанном на функции Грина начально-краевой задачи, имеет существенные преимущества для практики. Интегральное представление решения позволяет дать физическую интерпретацию: сопряженная функция Грина в точке с координатой y_0 в момент времени s_0 при наблюдении температуры в точке (x_0, t_0) есть температура в точке x_0 в момент времени t_0, если в точку y_0 в момент времени s_0 помещен импульсный тепловой источник единичной мощности. В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Область рассмотрения – прямоугольник. Ставится классическое начальное условие по переменной t. По пространственной переменной x ставится нелокальное периодическое краевое условие. Хорошо известно, что решение этой задачи может быть построено в виде сходящегося ортогонального ряда по собственным функциям спектральной задачи для оператора кратного дифференцирования с периодическими краевыми условиями. Поэтому функция Грина задачи может быть также выписана в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям (ряда Фурье).

Для классических первой и второй начально-краевых задач существует также и второе представление функции Грина – через функцию Якоби. В настоящей работе найдено представление функции Грина нелокальной начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями в виде ряда по экспонентам.

2. Постановка задачи

В области $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = f(x,t). \tag{1}$$

К классическим задачам теории теплопроводности относят первую и вторую начально-краевые задачи. Это – задачи нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \tau(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и однородным краевым условиям

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=1} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

или

$$u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=1} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

соответственно.

Также хорошо известной и широко применяемой является начально-краевая задача для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с периодическими краевыми условиями

$$u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u(0,t) = u(1,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Эти задачи хорошо исследованы, их решения (в классическом и обобщенном смыслах) существуют, единственны и могут быть построены методом разделения переменных. Решение может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G(x,\xi,t)\tau(\xi) d\xi. \tag{6}$$

Функция Грина начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (1) с произвольными самосопряженными краевыми условиями по переменной x строится методом разделения переменных в виде [1, с. 194]

$$G(x,\xi,t-s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-s)} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi), \tag{7}$$

где $y_n(x)$ – ортогональные собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_n.

Поэтому функции Грина первой, второй и периодической начально-краевых задач соответственно имеют вид [1, с. 196]:

$$G_D(x,\xi,t-s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2(t-s)} \sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi), \tag{8}$$

$$G_N(x,\xi,t-s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2(t-s)} \cos(n\pi x)\cos(n\pi\xi), \tag{9}$$

$$G_\pi(x,\xi,t-s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n\pi)^2(t-s)} \cos(2n\pi(x-\xi)). \tag{10}$$

Функция Грина может быть построена методом отражений [2, стр. 116]. Это дает нам второй (эквивалентный) вид функции Грина. Для первой и второй начально-краевых задач соответственно функции Грина имеют вид

$$G_D(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-s)}} \right], \tag{11}$$

$$G_N(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-s)}} \right]. \tag{12}$$

Это представление также может быть получено через функцию Якоби [1, с. 197]. Каждое из представлений имеет свои преимущества. Для начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями по пространственной переменной подобного экспоненциального представления функции Грина получено не было. В настоящей работе нами найдено представление функции Грина нелокальных начально-краевых задач с периодическими и антипериодическими краевыми условиями в виде ряда по экспонентам.

3. Функция Грина периодической задачи

Теорема 1. *Функция Грина начально-краевой задачи для уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *и с периодическими краевыми условиями* (5) *имеет вид*

$$G_\pi(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi+n)^2}{4(t-s)}}. \tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся способом решения задач теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями, предложенным в [3]. Решение задачи (1), (2), (5) представим в виде

$$u\,(x,t) = C\,(x,t) + S\,(x,t)\,, \tag{14}$$

где $C\,(x,t)$ и $S\,(x,t)$ – четные и нечетные по переменной x на интервале $(0,1)$ части функции $u\,(x,t)$:

$$2C\,(x,t) = u\,(x,t) + u\,(1-x,t)\,,\ \ 2S\,(x,t) = u\,(x,t) - u\,(1-x,t)\,. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $C\,(x,t)$ и $S\,(x,t)$ являются в области Ω решениями уравнений теплопроводности

$$C_t\,(x,t) - C_{xx}\,(x,t) = f_0\,(x,t)\,, \tag{16}$$

$$S_t\,(x,t) - S_{xx}\,(x,t) = f_1(x,t) \tag{17}$$

и удовлетворяют однородным начальным условиям

$$C\,(x,0) = \tau_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{18}$$

$$S\,(x,0) = \tau_1(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{19}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} 2f_0\,(x,t) = f\,(x,t) + f\,(1-x,t)\,, \\ 2f_1\,(x,t) = f\,(x,t) - f\,(1-x,t)\,, \\ 2\tau_0(x) = \tau(x) + \tau(1-x),\ \ 2\tau_1(x) = \tau(x) - \tau(1-x). \end{gathered} \tag{20}$$

Найдем краевые условия по переменной x, которым на границе области Ω удовлетворяют функции $C\,(x,t)$ и $S\,(x,t)$. Подчиняя функцию (14) краевым условиям (5), с учетом соотношений (15) получаем

$$C_x\,(x,0) = C_x\,(x,1) = 0,\ \ 0 \le x \le 1, \tag{21}$$

$$S\,(x,0) = S\,(x,1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{22}$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с периодическими краевыми условиями (5) сведено к решению двух задач с более простыми краевыми условиями. Это – вторая начально-краевая задача для уравнения (16) с начальным условием (18) и с краевыми условиями Неймана (21) и первая начально-краевая задача для уравнения (17) с начальным условием (19) и с краевыми условиями Дирихле (22). Эти задачи хорошо исследованы, их решения (в классическом и обобщенном смыслах) существуют, единственны и могут быть представлены с помощью функций Грина (11) и (12) по формуле (6).

Для $C\,(x,t)$ получаем представление

$$C(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_N(x,\xi,t-s) f_0(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G_N(x,\xi,t)\tau_0(\xi) d\xi. \tag{23}$$

Учитывая обозначения (20), отсюда после несложных преобразований будем иметь

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{ G_N(x,\xi,t-s) + G_N(x,1-\xi,t-s) \Big\} f(\xi,s) d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{ G_N(x,\xi,t) + G_N(x,1-\xi,t) \Big\} \tau(\xi) d\xi. \tag{24}$$

Аналогично для $S\,(x,t)$ получим

$$S(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{ G_D(x,\xi,t-s) - G_D(x,1-\xi,t-s) \Big\} f(\xi,s) d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{ G_D(x,\xi,t) - G_D(x,1-\xi,t) \Big\} \tau(\xi) d\xi. \tag{25}$$

Суммируя полученное в (24) и (25) с учетом (14) будем иметь

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_\pi(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G_\pi(x,\xi,t)\tau(\xi) d\xi, \tag{26}$$

где обозначено

$$G_\pi(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2}\Big\{G_N(x,\xi,t-s)+G_N(x,1-\xi,t-s)\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{G_D(x,\xi,t-s)-G_D(x,1-\xi,t-s)\Big\}. \tag{27}$$

Теперь здесь используем явный вид функций Грина из (11) и (12). Тогда

$$G_\pi(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}}+e^{-\frac{(x-\xi+2n+1)^2}{4(t-s)}}\right], \tag{28}$$

откуда легко получаем (11). Теорема доказана. □

4. Функция Грина антипериодической задачи

Наряду с рассмотренными выше задачами также хорошо известной и широко применяемой является начально-краевая задача для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с антипериодическими краевыми условиями

$$u_x(0,t)=-u_x(1,t),\quad u(0,t)=-u(1,t),\quad 0\le t\le T. \tag{29}$$

Её решение (в классическом и обобщенном смыслах) существует, единственно и может быть построено методом разделения переменных, а также может быть представлено с помощью функции Грина. В настоящем разделе мы построим явный вид функции Грина задачи в экспоненциальной форме.

Теорема 2. *Функция Грина начально-краевой задачи для уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *и с антипериодическими краевыми условиями* (29) *имеет вид*

$$G_{a\pi}(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{-\frac{(x-\xi+n)^2}{4(t-s)}}. \tag{30}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 и использует способ решения задач теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями, предложенный в [3]. Решение задачи (1), (2), (29) представим в виде (14), где $C(x,t)$ и $S(x,t)$ – четные и нечетные по переменной x на интервале $(0,1)$ части функции $u(x,t)$. Нетрудно убедиться в том, что функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$ являются в области Ω решениями уравнений теплопроводности (16) и (17) соответственно и удовлетворяют однородным начальным условиям (18) и (19).

Найдем краевые условия по переменной x, которым на границе области Ω удовлетворяют функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$. Подчиняя функцию (14) краевым условиям (29), с учетом соотношений (15) получаем

$$C(x,0) = C(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{31}$$

$$S_x(x,0) = S_x(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \tag{32}$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с антипериодическими краевыми условиями (5) сведено к решению двух задач с более простыми краевыми условиями. Это – первая начально-краевая задача для уравнения (16) с начальным условием (18) и с краевыми условиями Дирихле (31) и вторая начально-краевая задача для уравнения (17) с начальным условием (19) и с краевыми условиями Неймана (32). Решение этих задач представляем с помощью функций Грина (11) и (12) по формуле (6).

Для $C(x,t)$ получаем представление

$$C(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_D(x,\xi,t-s) f_0(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G_D(x,\xi,t)\tau_0(\xi) d\xi. \tag{33}$$

Учитывая обозначения (20), отсюда после несложных преобразований будем иметь

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{ G_D(x,\xi,t-s) + G_D(x,1-\xi,t-s) \Big\} f(\xi,s) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{ G_D(x,\xi,t) + G_D(x,1-\xi,t) \Big\} \tau(\xi) d\xi. \tag{34}$$

Аналогично для $S(x,t)$ получим

$$S(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{ G_N(x,\xi,t-s) - G_N(x,1-\xi,t-s) \Big\} f(\xi,s) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{ G_N(x,\xi,t) - G_N(x,1-\xi,t) \Big\} \tau(\xi) d\xi. \tag{35}$$

Суммируя полученное в (34) и (35), с учетом (14) будем иметь

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_{a\pi}(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G_{a\pi}(x,\xi,t)\tau(\xi)d\xi, \tag{36}$$

где обозначено

$$G_{a\pi}(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2}\Big\{G_D(x,\xi,t-s) + G_D(x,1-\xi,t-s)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{G_N(x,\xi,t-s) - G_N(x,1-\xi,t-s)\Big\}. \tag{37}$$

Теперь здесь используем явный вид функций Грина из (11) и (12). Тогда

$$G_{a\pi}(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}} - e^{-\frac{(x-\xi+2n+1)^2}{4(t-s)}} \right], \tag{38}$$

откуда легко получаем (30). Теорема доказана. □

Литература

1 Бабич В.М. и др. Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. Под. ред. Михлина С.Г. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

2 Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. Ю.В. Егорова, под ред. О.А. Олейник. – М.: Мир, 1966. – 352 с.

3 Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. — С. 180-186.

Статья поступила в редакцию 29.03.2016

Садыбеков М.А., Ділдəбек Г., Тенгаева А.А. ПЕРИОДТЫ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫ БАР ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ЕСЕБІНІҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫ

Бұл жұмыста біртекті емес бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бейлокал бастапқы-шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылу облысы - тіктөртбұрыш болып табылады. t айнымалысы бойынша классикалық бастапқы шарт қойылған. Кеңістіктік x айнымалысы бойынша бейлокал периодты шеттік шарт қойылған. Бұл есептің шешімін периодты шеттік шарттары бар еселі дифференциалдау операторы үшін спектралдық есептің меншікті функциялары бойынша ортогональдық жинақталатын қатар түрінде тұрғызуға болатындығы белгілі. Сол себепті осы есептің Грин функциясын да тригонометриялық функциялар бойынша шексіз қатар (Фурье қатары) түрінде жазуға болады. Классикалық бірінші жəне екінші бастапқы-шеттік есептер үшін Грин функциясының екінші кейіптемесі - Якоби функциясы да бар екені белгілі. Біздің жұмыста периодты шеттік шарттары бар бейлокал бастапқы-шеттік есептің Грин функциясының кейіптемесі экспоненталар бойынша қатар түрінде табылып отыр.

Sadybekov M.A., Dildabek G., Tengayeva A.A. GREEN FUNCTION OF THE HEAT EQUATION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITION

This work deals with nonlocal initial boundary value problem for the inhomogeneous one-dimensional heat equation. Viewing area is rectangle. We consider classic initial condition in the variable t and nonlocal periodic boundary conditions in the spatial variable x. It is well known that the solution of the problem can be constructed in the form of a convergent orthogonal series of eigenfunctions of a spectral problem for the operator of multiple differentiation with periodic boundary conditions. Therefore, Green's function of this problem may also be represented in the form of an infinite series of trig functions (Fourier series). For the first and the second classic initial boundary value problems there is also a second representation of Green's function, i.e. through Jacobi function. In our work, we obtain the representation of Green's function of nonlocal initial boundary value problem with periodic boundary conditions in the form of exponential series.