МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы-2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

посвящается 50-летию создания

Института математики и механики АН КазССР

Алматы 1–5 июня 2015 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Предложен подход, основанный на применении метода прямых и сведении исходной задачи к задаче параметрической идентификации для обыкновенных дифференциальных уравнений [2-3]. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений.

Аналогичный подход применен к решению обратных задач относительно нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа при нелокальных условиях переопределения.

Были проведены многочисленные численные эксперименты на тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточно высокую эффективность для практического применения описанного подхода.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232с.

2. *Айда-заде К.Р.* Численный метод восстановления параметров динамической системы // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – №3. – С. 101-108.

3. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. – 2014. – Vol.54, №7. – Pp. 1096-1109.

УДК 517.938

Айсагалиев С.А., Жунусова Ж.Х.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Об одном методе построения решения краевой задачи с параметром

Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу с параметром

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,\lambda,t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \omega(t) \le F(x,\lambda,t) \le \varphi(t), \ \ t \in I\}, \tag{3}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(x_0, x_1, \lambda) \le c_j, \quad j = \overline{1, m_1}; \quad g_j(x_0, x_1, \lambda) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x_0, x_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), x_0, x_1, \lambda, t)dt, \quad j = \overline{1, m_2}. \tag{5}$$

с параметром

$$\lambda \in \Lambda \subset R^s, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s). \tag{6}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times m$, вектор функция
$f(x, \lambda, t) = (f_1(x, \lambda, t), \ldots, f_r(x, \lambda, t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x, \lambda, t) \in R^n \times R^s \times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т.е.

$$|f(x, \lambda, t) - f(y, \lambda, t)| \le l(t)|x - y|, \quad \forall (x, \lambda, t), (y, \lambda, t) \in R^n \times R^s \times I \tag{7}$$

и условию

$$|f(x, \lambda, t)| \le c_0(|x| + |\lambda|^2) + c_1(t), \quad \forall (x, \lambda, t), \tag{8}$$

где $l(t) \ge 0$, $l(t) \in L_1(I, R^1)$, $c_0 = const > 0$, $c_1(t) \ge 0$, $c_1(t) \in L_1(I, R^1)$.

Заметим, что при выполнении условий (7), (8) дифференциальное уравнение (1) при фиксированных $x_0 = x(t_0) \in R^n$, $\lambda \in R^s$ имеет единственное решение для значений $t \in I$.

Вектор функция $F(x, \lambda, t) = (F_1(x, \lambda, t), \ldots, F_S(x, \lambda, t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x, \lambda, t) \in R^n \times I$.
Функция $f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) = f_{01}(x, x_0, x_1, \lambda, t), \ldots \ldots, f_{0m_2}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$|f_0(x, x_0, x_1, \lambda, t)| \le c_2(|x| + |x_0| + |x_1| + |\lambda|^2) + c_3(t),$$

$$\forall (x, x_0, x_1, \lambda, t) \in R^n \times R^n \times R^n \times R^s \times I,$$

$$c_2 = const \ge 0, \quad c_3(t) \ge 0, \quad c_3(t) \in L_1(I, R^1).$$

$\omega(t)$, $\varphi(t)$, $t \in I$ – заданные r – мерные непрерывные функции. S – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^{2n}, Λ – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^s, моменты времени t_0, t_1 – фиксированы, $t_1 > t_0$.

Заметим, что если $A(t) \equiv 0$, $m = n$, $B(t) = I_n$, где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x, \lambda, t) + \mu(t), \quad t \in I. \tag{9}$$

Поэтому полученные ниже результаты остаются верными для уравнения вида (9) при условиях (2) – (6). В частности, множество S определяется соотношением

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} / H_j(x_0, x_1) \le 0, \ j = \overline{1, p};$$

$$< a_j, x_0 > + < b_j, x_1 > - e_j = 0, \ j = \overline{p + 1, s_1}\},$$

где $H_j(x_0, x_1)$, $j=\overline{1,p}$ – выпуклые функции относительно переменных (x_0, x_1), $x_0=x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $a_j \in R^n$, $b_j \in R^n$, $e_j \in R^1$, $j = \overline{p+1, s}$ – заданные векторы и числа $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение. В частности, множество

$$\Lambda = \{\lambda \in R^s / h_j(\lambda) \leq 0, \;\; j = \overline{1, p_1}; \;\; < \overline{a}_j, \lambda > - \overline{e}_j = 0, \;\; j = \overline{p_1 + 1, s_1}\},$$

где $h_j(\lambda)$, $j = \overline{1, p_1}$ – выпуклые функции относительно λ, $\overline{a}_j \in R^s$, $\overline{e}_j \in R^1$, $j = \overline{p_1 + 1, s_1}$ – заданные векторы и числа.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1) – (6).

Задача 2. Построить решение краевой задачи (1) – (6).

Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары $(x_0, x_1) \in S$ и параметра $\lambda \in \Lambda$ таких, что решение системы (1) исходящее из точки x_0 в момент времени t_0, проходит через точку x_1 в момент времени t_1, при этом вдоль решения системы (1), где $x(t) = x(t; x_0, t_0, \lambda)$, $t \in I$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (3), и интегралы (5) удовлетворяют условиям (4).

В частности, из краевой задачи (1) – (6) при отсутствии фазовых и интегральных ограничений следует задача Штурма-Лиувилля. Применение метода Фурье к решению задач математической физики приводит к решению следующей задачи [1]: найти такие значения параметра λ, при которых в конечном промежутке $[t_0, t_1]$ существует отличное от нуля решение однородного уравнения

$$L[y] + \lambda r(t) y(t) \equiv 0, \tag{10}$$

удовлетворяющее на концах условиям:

$$\alpha_1 y(t_0) + \alpha_2 \dot{y}(t_0) = 0, \;\; \beta_1 y(t_1) + \beta_2 \dot{y}(t_1) = 0, \tag{11}$$

где $L[y] = \dfrac{d}{dt}[p(t)\dot{y}(t)] - q(t)y(t)$, $p(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Вводя обозначения $y(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, уравнение (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x_1, \lambda, t), \;\; t \in I = [t_0, t_1], \tag{12}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{q(t)}{p(t)} & -\dfrac{\dot{p}(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \;\; B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \;\; f(x_1, \lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}.$$

Граничное условие (11) запишется в виде

$$\alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} = 0, \;\; \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} = 0, \tag{13}$$

где $x(t_0) = (x_{10}, x_{20})$, $x(t_1) = (x_{11}, x_{21})$. Параметр $\lambda \in R^1$. Уравнение (12), краевое условие (13), $\lambda \in R^1$ являются частными случаями (1), (2), (6) соответственно.

Как известно [2], решение задачи Штурма-Лиувилля сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$y(t) = -\lambda \int_{t_0}^{t_1} G(t, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi, \tag{14}$$

где $G(t,\xi)$ – функция Грина. Заметим, что построение функции Грина $G(t,\xi)$ и решение интегрального уравнения (14) довольно сложны. Поэтому представляет интерес разработка новых методов исследования решения краевых задач (1) – (6).

Литература

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1981. – 550 с. – Т. 4, часть II (6-е изд.).
2. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Светников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1985. – 231 с.

УДК 517.938

Алдибеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы)

e-mail: tamash59@mail.ru

О центральных показателях дифференциальных систем

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (x \in R^n, t_0 \le t < +\infty) \tag{1}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$\|A(t)\| \le C_A\varphi(t), t \geqslant t_0 \tag{2}$$

где C_A–постоянная, зависящая от выбора матриц А, $\varphi(t)$– положительная непрерывная функция на промежутке $[t_0, +\infty]$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$ и интеграл $I(\varphi) = \int\limits_{t_0}^{\infty}\varphi(s)ds$ расходится.

Определение 1. Функций $r_q(t)$ и $R_q(t)$ называются соответственно обобщенной нижней и обобщенной верхней относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)ds$ для системы (1)с условием (2), если они ограничены, измеримы, и для всех ненулевых решений $x(t)$ системы (1) осуществляются оценки

$$d_{r,\varepsilon}\exp\left(\int\limits_s^t[r_q(\tau)-\varepsilon]dq(\tau)\right) \le \frac{|x(t)|}{|x(s)|} \le D_{R,\varepsilon}\exp\left(\int\limits_s^t[R_q(\tau)+\varepsilon]dq(\tau)\right)$$

для всех $t \ge s \ge t_0$, $D_{R,\varepsilon}, d_{r,\varepsilon}$– константы, зависящие от выбора $r_q(t)$ и $R_q(t)$, $\varepsilon > 0$. Число

$$\Omega(A,q) = \inf_{R\in B(A,q)}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}R_q(\tau)dq(\tau)$$