КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

К. А. Жаксыбекова
М. А. Жусупов
Р. С. Кабатаева

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Второе издание, дополненное

Алматы
«Қазақ университеті»
2016

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.32я73
Ж 22

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
физико-технического факультета и
РИСО КазНУ им. аль-Фараби
(протокол №2 от 12 февраля 2016 года)*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор
К.Н. Джумагулова
кандидат технических наук, доцент
Г.А. Абдраимова

Жаксыбекова К.А.
Ж 22 Основы векторного и тензорного анализа: учебное пособие. – 2-е изд., доп. / К.А. Жаксыбекова, М.А. Жусупов, Р.С. Кабатаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2015. – 148 с.
ISBN 978-601-04-1806-6

Учебное пособие подготовлено на основе курса, читаемого на кафедре теоретической и ядерной физики физико-технического факультета КазНУ им. аль-Фараби.

Представленное учебное пособие по основам векторного и тензорного анализа предназначается для студентов-физиков, математиков, механиков и может быть использовано для активного освоения методов решения различных физических задач.

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.32я73

ISBN 978-601-04-1806-6

ВВЕДЕНИЕ

В физике при описании свойств, законов движения и взаимодействия различных физических объектов используются математические методы.

Использование скалярных величин позволяет описывать простейшие физические свойства тел. Однако, например, для количественного описания взаимодействия тел скалярных величин недостаточно. В данном случае необходимо использовать более сложные математические величины − направленные отрезки или векторы.

Тензоры, имеющие более сложную математическую природу, используются для характеристики деформаций, инерции при вращательном движении и т.д.

Поскольку скаляры, векторы и тензоры выбираются для количественного описания характеристик объектов окружающего мира, то, с точки зрения физики, они должны иметь общую природу.

При рассмотрении физических задач удобно конкретные векторы и тензоры определять относительно системы координат. При этом сами системы координат можно выбирать произвольным образом, поскольку они носят вспомогательный характер. То есть, все системы координат должны быть равноправными.

В математическом аппарате тензорного исчисления, как в его частном случае − векторной алгебре и анализе, заложено равноправие координатных систем, так как физические характеристики и формулировка физических закономерностей не должны зависеть от выбора системы координат. Это позволило выразить математические формулировки законов физики в удобной и наглядной форме и дало возможность его активного использования в современной физике.

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ векторного и тензорного анализа для физиков в объёме, необходимом для решения задач классической механики, электродинамики, квантовой механики и т.д. Изложение теории проиллюстрировано примерами. Пособие содержит также задачи для самостоятельного решения.

В первой главе настоящего пособия рассматриваются вопросы, связанные с операциями над векторами, интегральными теоремами векторного анализа. Следующие две главы содержат информацию по криволинейным ортогональным системам координат и тензорной алгебре.

Глава 1
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Основные понятия

В науке и технике часто встречаются величины, которые вполне определяются одним числом, так называемой абсолютной величиной, например, масса, время, температура и т.д. Эти величины называют *скалярными*. Однако многие физические величины определяются не только числом, но и направлением, например, перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс и момент количества движения. Эти величины называют *векторными*.

Интересно заметить, что все перечисленные векторные величины заимствованы из механики, однако при развитии механики векторный анализ не был использован; более того, он еще не был создан. Потребность в векторном анализе возникла после того, как Максвелл разработал электромагнитную теорию и стала ясна векторная природа электрического и магнитного полей.

Графически любую векторную величину (в дальнейшем будем называть ее *вектором*) удобно представлять стрелкой, длина которой пропорциональна величине вектора, а направление определяет направление вектора. За положительное принято направление, указанное этой стрелкой. При таком определении сумма векторов

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (1.1)$$

означает совмещение начала вектора $\vec{B}$ с концом вектора $\vec{A}$. Стрелка, соединяющая начало вектора $\vec{A}$ с концом вектора $\vec{B}$, определяет вектор $\vec{C}$. Эта процедура сложения векторов по правилу треугольника (1.1) проиллюстрирована на рисунке 1.

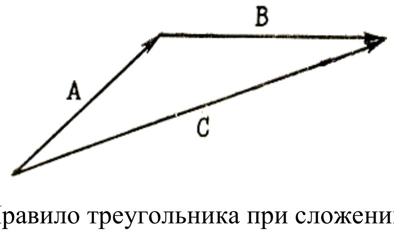


Рис. 1. Правило треугольника при сложении векторов

Дополняя полученный треугольник до параллелограма, видим (рис. 2), что

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \qquad (1.2)$$

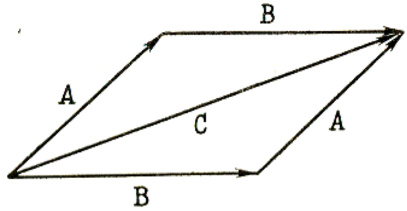


Рис. 2. Правило параллелограмма при сложении векторов

Отметим, что под векторами понимаются геометрические объекты, не зависящие от системы координат. Например, вектор $\vec{A}$ (рис. 3), направленный из начала системы отсчета, оканчивается в точке (x_1,y_1,z_1).

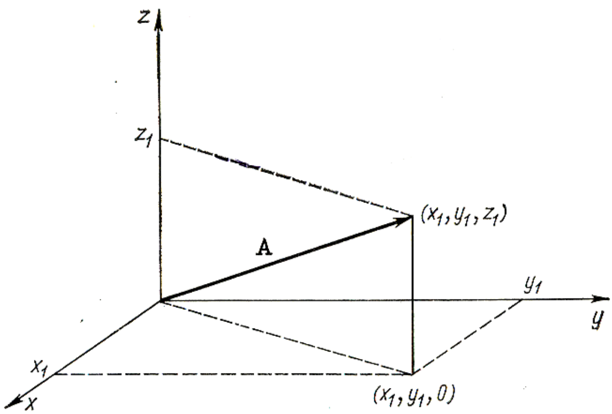


Рис. 3. Компоненты вектора в декартовой системе координат

Символом $\vec{A}$ можно обозначить любую векторную величину (импульс, напряженность электрического поля и т.д.), однако некоторые векторные величины, например, расстояние от начала координат до точки (x_1,y_1,z_1), обозначают специальным символом $\vec{r}$ (*радиусом-вектором*)

$$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)\,. \tag{1.3}$$

Обозначим символом $\vec{r}$ абсолютную величину радиуса-вектора. Легко убедиться (рис. 4), что координаты конца вектора связаны с абсолютной величиной вектора соотношениями

$$x_1 = r \cdot cos\alpha, \quad y_1 = r \cdot cos\beta, \quad z_1 = r \cdot cos\gamma. \tag{1.4}$$

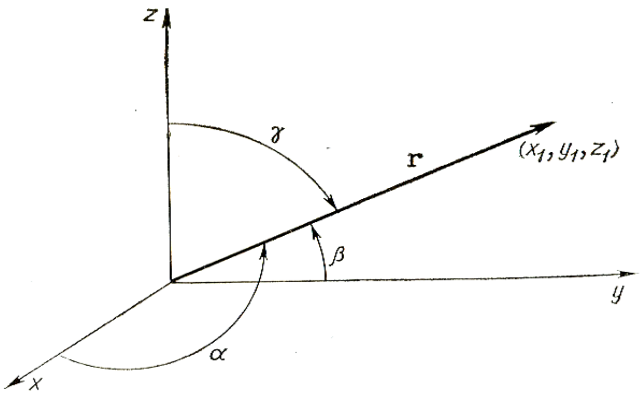


Рис. 4. Направляющие косинусы

Здесь $cos\alpha,\ \ cos\beta$ и $cos\gamma -$ направляющие косинусы, а α, β и $\gamma -$ соответственно углы между данным вектором и положительными направлениями осей x, y и z. Величины x_1, y_1 и z_1 называются *компонентами* (декартовыми) радиуса-вектора $\vec{r}$ или его *проекциями*.

Любой вектор $\vec{A}$ можно разложить на компоненты (или спроектировать на координатные оси):

$$A_x = A \cdot cos\alpha, \quad A_y = A \cdot cos\beta, \quad A_z = A \cdot cos\gamma. \tag{1.5}$$

Введем единичные векторы в направлении каждой из координатных осей. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – соответственно векторы единичной длины, направленные вдоль положительных полуосей x, y, z. Тогда согласно операции векторного сложения,

$$\vec{A} = \vec{i}\,\mathrm{A}_x + \vec{j}\,\mathrm{A}_y + \vec{k}\,\mathrm{A}_z . \qquad (1.6)$$

Если $\vec{A} = 0$, то $\mathrm{A}_x = \mathrm{A}_y = \mathrm{A}_z = 0$. В соответствии с теоремой Пифагора абсолютная величина вектора $\vec{A}$ равна

$$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{A}_x^2 + \mathrm{A}_y^2 + \mathrm{A}_z^2} .$$

Сложение и вычитание векторов можно выполнить, используя компонентное представление. Для вектора $\vec{A}$

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{i}\,\mathrm{A}_x + \vec{j}\,\mathrm{A}_y + \vec{k}\,\mathrm{A}_z$$

и вектора $\vec{\mathrm{B}}$

$$\vec{\mathrm{B}} = \vec{i}\,\mathrm{B}_x + \vec{j}\,\mathrm{B}_y + \vec{k}\,\mathrm{B}_z$$

справедливо

$$\vec{\mathrm{A}} \pm \vec{\mathrm{B}} = \vec{i}\left(\mathrm{A}_x \pm \mathrm{B}_x\right) + \vec{j}\left(\mathrm{A}_y \pm \mathrm{B}_y\right) + \vec{k}\left(\mathrm{A}_z \pm \mathrm{B}_z\right). \qquad (1.7)$$

Задачи

1. Даны два вектора: $\vec{C}_1 = \vec{A} + \vec{B}$ и $\vec{C}_2 = \vec{A} - \vec{B}$. Построить векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

2. Даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Определить в координатной форме вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. Найти единичный вектор, коллинеарный (параллельный) вектору, направленному по биссектрисе угла *BAC* треугольника *ABC*, если заданы его вершины: *A*(1; 1; 1), *B*(3; 0; 1), *C*(0; 3; 1).

4. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник?

5. Пусть $\vec{\mathrm{A}} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{\mathrm{B}} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Определить $\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}}$ и $\vec{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{B}}$.

6. Самолет пролетает последовательно стороны АВ, ВС и СА треугольника АВС за данные промежутки времени t_1, t_2 и t_3 соответственно. При этом его все время сносит с курса ветром с постоянной скоростью $\vec{u}$. Определить собственную скорость $\vec{v}$ самолета и скорость $\vec{u}$, с которой самолет сносит ветром.

7. Вектор $\vec{A}$, длина которого равна 10, составляет равные углы с осями координат. Найти A_x, A_y и A_z.

8. Определить компоненты единичного вектора, который лежит в плоскости xy и составляет равные углы с положительными направлениями осей x и y.

9. Найти сумму трех векторов, имеющих длину *a* и проведенных:

а) из вершины куба по трем его ребрам;

б) из вершины правильной треугольной пирамиды по трем ее ребрам.

1.2. Поворот системы координат

Определение вектора заданием его абсолютной величины и направления не вполне строгое. Есть величины, такие как, например, коэффициент упругости, коэффициент преломления в анизо-тропных кристаллах, которые характеризуются абсолютной величиной и направлением, но тем не менее не являются векторами. Кроме того, данное наглядное определение вектора неудобно и не может быть обобщено на более сложные величины.

Используя радиус-вектор $\vec{r}$, дадим новое определение вектора. Для введения нового определения имеются важные физические причины. Мы описываем окружающий нас мир с помощью математики, но любое физическое описание должно быть независимым от математического аппарата. В дальнейшем будем предполагать, что пространство изотропно. В этом случае исследуемая физическая система или сформулированный физический закон не должны зависеть от выбора или от *ориентации* системы координат.

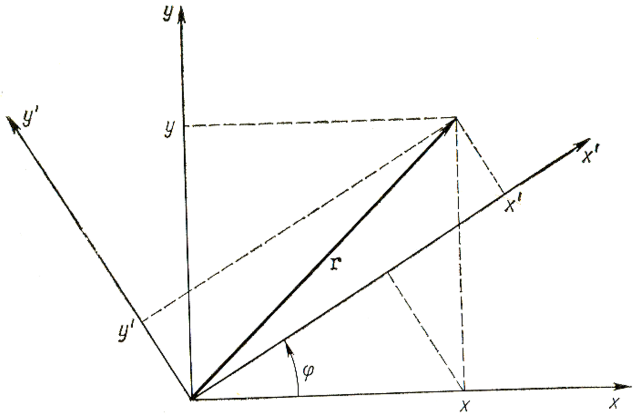


Рис. 5. Вращение декартовой системы координат

Теперь мы вновь обратимся к радиусу-вектору $\vec{r}$. Рассмотрим $\vec{r}$ в двух различных системах, одна из которых повернута относительно другой. Для простоты ограничимся двумерным случаем (рис. 5). Если координатные оси x и y повернуты против часовой стрелки на угол φ, и при этом положение радиуса-вектора $\vec{r}$ фиксировано, можно записать следующие соотношения, связывающие компоненты радиуса-вектора в неподвижной системе с компонентами того же вектора в повернутой:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \qquad (1.8)$$

Вектор можно представить с помощью координат его концевой точки (раздел 1.1), иными словами, координаты этой точки пропорциональны компонентам вектора. Следовательно, компоненты вектора должны преобразовываться при повороте координатных осей так же, как координаты точки (или как радиус-вектор $\vec{r}$). Более того, если любая пара величин (A_x, A_y), заданных в декартовой системе координат x, y, преобразуется в (A'_x, A'_y) поворотом системы координат так, что

$$A'_x = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi, \quad A'_y = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi, \qquad (1.9)$$

то считаем A_x и A_y компонентами вектора $\vec{A}$. Вектор $\vec{A}$ определен теперь законом преобразования его компонент при повороте системы координат. Если A_x и A_y преобразуются так же, как компоненты двумерного радиуса-вектора, они являются компонентами вектора $\vec{A}$. Если A_x и A_y ведут себя при повороте системы координат иначе, то из этих величин нельзя образовать вектор.

Чтобы сделать определение вектора более полным, необходимо выяснить смысл величин A'_x и A'_y в уравнениях (1.9). Предположим, что компоненты $\vec{A}$ – функции координат и кроме того, некоторого постоянного вектора $\vec{C}$:

$$A_x = A_x(x, y, C_x, C_y), \; A_y = A_y(x, y, C_x, C_y). \qquad (1.10)$$

В повернутой системе координат $\vec{A}$ имеет компоненты A'_x и A'_y:

$$A'_x = A'_x(x', y', C'_x, C'_y),$$

$$A'_y = A'_y(x', y', C'_x, C'_y). \qquad (1.11)$$

Используя уравнения (1.8), координаты x', y', C'_x, C'_y можно выразить через координаты неподвижной системы и угол поворота φ. Вообще должна существовать некоторая зависимость от угла поворота. Однако такая зависимость от ориентации нежелательна. Поэтому мы ограничимся функциями, которые не зависят от ориентации. Очевидно, в частном случае, когда $\varphi=0$,

$$A_x = A'_x, A_y = A'_y.$$

Примеры:

1. Дана пара величин (-y, x). Показать, что эти величины образуют двумерный вектор.

Исследуем, как преобразуются эти величины при повороте системы на угол φ. Имеем

$$V'_x = -y\cos\varphi + x\sin\varphi, \qquad V'_y = y\sin\varphi + x\cos\varphi,$$

где $V_x = -y,\ V_y = x$. Используя (1.8), получаем $V'_x = -y'$, $V'_y = x'$, т.е. данная пара величин удовлетворяет уравнениям (1.9), определяющим двумерный вектор. Таким образом, пара (-y,x) представляет собой компоненты вектора.

2. Рассмотрим $\vec{V} = \vec{i}x - \vec{j}y = (x,-y)$.

Согласно (1.9),

$V'_x = x\cos\varphi + y\sin\varphi = x',\ V'_y = x\sin\varphi - y\cos\varphi = -y'.$

Подставляя $V_x = x$ и, $V_y = -y$, получаем

$V'_x = V_x cos\varphi - V_y sin\varphi, \quad V'_y = V_x\sin\varphi + V_y\cos\varphi.$

Эти соотношения не удовлетворяют данному определению вектора. Следовательно, пара $(x,-y)$ не может быть вектором.

Для перехода к трех- и *n*-мерному пространству удобно воспользоваться более компактной записью. Пусть

$$\begin{gathered} x = x_1, \quad a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \\ y = x_2, \quad a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Тогда уравнения (1.9) можно переписать так:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \tag{1.13}$$

Коэффициент a_{ij} можно отождествить с направляющими косинусами (как косинусом угла между x'_i и x_j), т.е.

$$a_{12} = \cos(x_1', x_2) = \sin\varphi,$$

$$a_{21} = \cos(x_2', x_1) = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi.$$

Тогда уравнения (1.13) можно записать в виде:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j, \qquad i = 1,2. \tag{1.14}$$

Теперь очень легко произвести обобщение на случай трех, четырех и более измерений. Набор из N величин $V_j \ (j = 1,..., N)$ определяет компоненты N-мерного вектора $\vec{V}$ тогда и только тогда, когда значения этих величин в повернутой системе координат задаются с помощью формулы:

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V_j, \qquad i = 1, 2,..., N, \tag{1.15}$$

Здесь a_{ij} – косинус угла между x_i' и x_j.

Исходя из определения a_{ij}, можно записать в декартовых координатах

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \ . \tag{1.16}$$

Это частные производные. Подставляя (1.16) в (1.15), получаем

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} V_j \ . \tag{1.17}$$

Направляющие косинусы a_{ij} удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} , \tag{1.18}$$

или

$$\sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk} . \tag{1.19}$$

Здесь δ_{jk} – дельта-символ Кронекера, определенный как

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{для} \quad j = k, \\ 0, & \text{для} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{1.20}$$

Подстановкой a_{ij} из (1.12) легко убедиться, что уравнения (1.18) и (1.19) справедливы и для двумерного случая. В результате для $j = k$ имеем:

$$sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1.$$

Чтобы убедиться в справедливости уравнения (1.18) в общем случае, можно использовать выражение (1.16):

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} . \tag{1.21}$$

Выводы. В новом определении вектора через закон преобразования его компонент следует обратить внимание на два момента:

1) оно удобно для описания различных физических явлений;

2) служит основой для перехода к новому разделу математики – тензорному анализу.

Задачи

1. Задан постоянный вектор $\vec{V}(V_x = 1, \quad V_y = 0)$. Показать, что компоненты этого вектора в повернутой системе координат имеют

вид: $V_x' = \cos\varphi, \quad V_y' = -\sin\varphi$, что соответствует закону преобразования векторов (введя постоянный вектор, мы выделили определенное направление в пространстве).

2. Определить, удовлетворяют ли закону векторного преобразования (1.15) величины:

а) (x-y, x+y, 0) при повороте вокруг оси z;

б) (0, 2z+y, z-2y) при повороте вокруг оси x;

в) $(y^2 + z^2, -xy, -xz)$ при повороте вокруг каждой из координатных осей.

3. Показать, что $(xyC_x + y^2C_y, -x^2C_x - xyC_y)$ образует вектор. Величины C_x и C_y являются компонентами постоянного вектора $\vec{C}$. Проделать то же для $(xyC_x - x^2C_y, y^2C_x - xyC_y)$.

4. Исследовав вращение вокруг любой из координатных осей, ответить на вопрос, являются ли три функции

$V_x = a_1(x^2 + y^2 + z^2), \quad V_y = a_2(x^2 + y^2 + z^2)$

и $V_z = a_3(x^2 + y^2 + z^2)$ компонентами вектора ($a_i -$ постоянные).

5. Двумерный вектор $\vec{V}$ задан в виде (ax+b y, cx+dy), где *a,* b *, c, d* – постоянные. Доказать, что вектор $\vec{V}$ есть линейная комбинация радиального вектора $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$ и тангенциального вектора $\vec{t} = \vec{i}y - \vec{j}x$:

$$\vec{V} = a\vec{r} + b\vec{t} .$$

Замечание. Закон векторного преобразования должен соблюдаться для любых углов и любых точек (*x*,*y*).

1.3. Скалярное произведение

Законы перемножения векторов должны быть математически непротиворечивыми. Из всех возможных определений перемножения векторов выберем два, которые представляют интерес как с математической, так и с физической точки зрения.

Произведение вида $A \cdot B \cdot cos\theta$ (в котором A, B – абсолютные величины двух векторов, $\theta -$угол между ними) встречается в физике довольно часто. Например, выражение работа = сила × перемещение × $cos\theta$.

Определим *скалярное* произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ следующим образом:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i \,. \qquad (1.22)$$

Из (1.22) $\Rightarrow$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$.

Единичные векторы $\vec{i}\,, \vec{j}, \vec{k}$ удовлетворяют соотношениям

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \qquad (1.22а)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0\,. \qquad (1.22б)$$

Если переориентировать оси и направить новую ось *x* вдоль $\vec{A}$ (рис. 6), то $A_x = A, A_y = A_z = 0$ и $B_x = B\cdot cos\theta$. Из (1.22) $\Rightarrow$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot cos\theta \qquad (1.23)$$

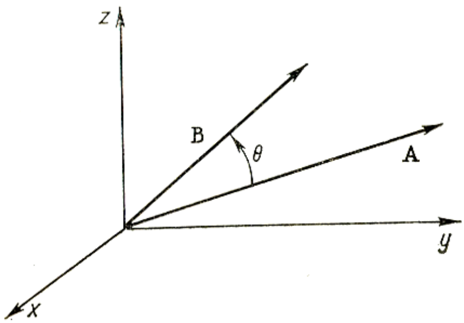


Рис. 6. Скалярное произведение $\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot cos\theta$

Если $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ и при этом известно, что $\vec{A}\neq 0,\ \vec{B}\neq 0$, то из (1.23) $\Rightarrow$ $\theta = 90^0, 270^0$ и т.д. В этом случае векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ должны быть взаимно перпендикулярны, иначе говоря, *ортогональны*. Единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ являются ортогональными векторами.

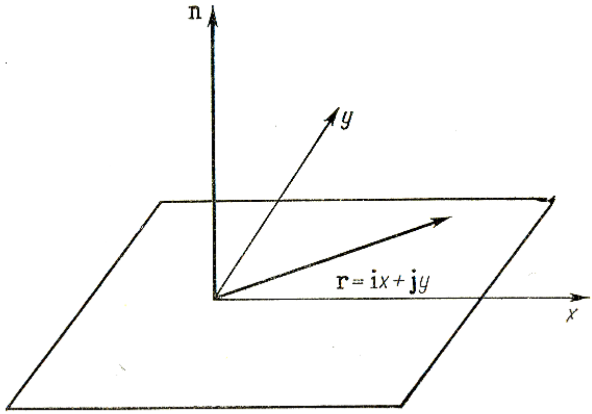


Рис. 7.

Для дальнейшего развития понятия ортогональности предположим, что $\vec{n}$ – единичный вектор, а $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$ – ненулевой вектор, лежащий в плоскости *xy*. Если $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ при любых $\vec{r}$, то $\vec{n}$ перпендикулярен (ортогонален) к плоскости *xy*.

Теперь убедимся в оправданности слова *скалярное*. Для этого нужно исследовать поведение произведения $\vec{A} \cdot \vec{B}$ при повороте координатной системы. С помощью (1.15) представим скалярное произведение в виде:

$$A'_x \cdot B'_x + A'_y \cdot B'_y + A'_z \cdot B'_z = \tag{1.24}$$

$$= \sum_i a_{xi} A_i \sum_j a_{xj} B_j + \sum_i a_{yi} A_i \sum_j a_{yj} B_j + \sum_i a_{zi} A_i \sum_j a_{zj} B_j$$

Используя индексы *k*, *l*, получаем:

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li} A_i a_{lj} B_j = \tag{1.25}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_l (a_{li} a_{lj}) A_i B_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i \tag{1.26}$$

Уравнение (1.26) приводит к равенству

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_i A_i B_i \, , \tag{1.27}$$

соответствующему определению скалярной величины, которая *инвариантна* относительно поворота системы координат.

Аналогично рассмотрим произведение вектора $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ на самого себя, используя инвариантность скалярного произведения:

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{\mathrm{B}} + 2\vec{A} \cdot \vec{\mathrm{B}} \, , \tag{1.28}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = C^2 \, , \tag{1.29}$$

$$\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2) \, . \tag{1.30}$$

$\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}}$ инвариантно относительно поворота системы координат, поскольку инвариантна правая часть уравнения (1.30).

Уравнение (1.28) можно записать в иной форме:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B \cdot cos\theta \, , \tag{1.31}$$

которая называется *законом косинусов* (рис. 8). Сравнивая уравнения (1.28) и (1.31), мы еще раз убеждаемся в векторной природе закона косинусов.

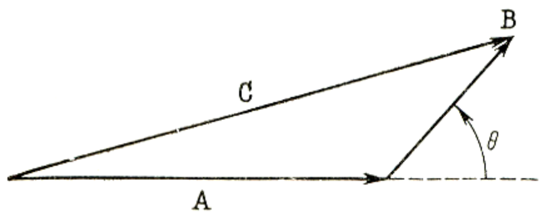


Рис. 8. Закон косинусов

Задачи

1. Разложением скалярного произведения показать, что если два вектора имеют направляющие косинусы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ соответственно, то $cos\theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$, где θ – угол между двумя векторами.

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. (Ответ: $\cos\theta = 0.\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$.)

3. Два единичных вектора $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ либо параллельны, либо перпендикулярны. Показать, что условие ортогональности направляющих косинусов (1.18) следует из скалярного произведения этих векторов.

4. Найти угол, образованный векторами $\vec{a} = \vec{i}m\cos\varphi + \vec{j}m\sin\varphi$ и $\vec{b} = \vec{i}n\cos\varphi + \vec{j}n\sin\varphi$.

5. Даны два вектора: $\vec{l}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{l}_2 = 3\vec{b} - 2\vec{c} - \vec{a}$. Найти третий вектор, который с данными двумя векторами образует треугольник.

6. Дан вектор $\vec{a} = \vec{i}\alpha\cos\varphi + \vec{j}\alpha\sin\varphi$. Найти $|\vec{a}|$ и единичный вектор $\vec{a}_0$.

7. В треугольнике ABC даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Найти векторы, совпадающие с медианами $\overrightarrow{Am_1}$, $\overrightarrow{Bm_2}$ и $\overrightarrow{Cm_3}$ треугольника (m_1, m_2, m_3 – середины сторон треугольника).

8. Найти сумму $(\vec{a}\cdot\vec{F}) + (\vec{b}\cdot\vec{F}) + (\vec{c}\cdot\vec{F})$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют треугольник.

9. Даны вершины треугольника: A(-1; 1), B(-5; 4), C(7; 2). Найти скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ и площадь треугольника.

10. Даны векторы $\vec{a}$ (6; -8; $5\sqrt{2}$) и $\vec{b}$ (2; -4; $\sqrt{2}$). Найти угол, образуемый вектором $\vec{a} - \vec{b}$ с осью Oz.

11. Единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ удовлетворяют условию:

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0.$$

Найти ($\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1$).

1.4. Векторное произведение

Данная форма перемножения векторов связана с использованием синуса угла, заключенного между двумя векторами.

$$\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}, \tag{1.32}$$

где $C = A \cdot \mathrm{B} \cdot sin\theta$, но в отличие от скалярного произведения в данном случае $\vec{C}$ – уже вектор, и мы по определению предполагаем, что этот вектор перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{A}$ и $\vec{\mathrm{B}}$, а направление его таково, что совокупность векторов $\vec{A}$, $\vec{\mathrm{B}}$ и $\vec{C}$ образует правую систему координат. При указанном выборе направления имеем:

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = -\vec{\mathrm{B}} \times \vec{\mathrm{A}} \text{ (антикоммутация).} \tag{1.32а}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \tag{1.32б}$$

$$\begin{aligned} &\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ &\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{aligned} \tag{1.32в}$$

Векторное произведение имеет важную геометрическую интерпретацию (рис. 9).

$\left|\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}\right| = A \cdot B \cdot sin\theta$ – площадь параллелограмма. Итак, вектор $\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$ перпендикулярен к плоскости параллелограмма и по абсолютной величине равен его площади.

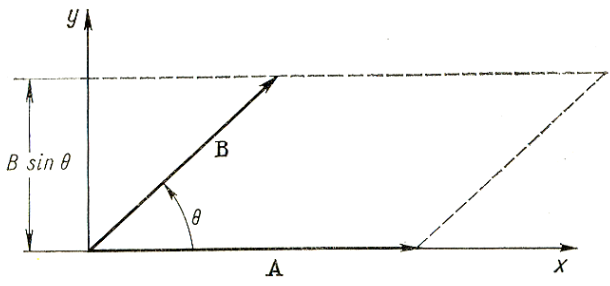


Рис. 9. Представление векторного произведения в виде параллелограмма

Другое определение векторного произведения $\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$ связано с записью компонент вектора $\vec{C}$:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = -A_x B_z + A_z B_x,$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x, \tag{1.33}$$

или

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j, \quad i, j, k - \text{ различны,} \tag{1.34}$$

с циклической перестановкой индексов i, j, k.

Векторное произведение удобно записать в виде определителя:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{A}_x & \mathrm{A}_y & \mathrm{A}_z \\ \mathrm{B}_x & \mathrm{B}_y & \mathrm{B}_z \end{vmatrix}. \tag{1.35}$$

Покажем эквивалентность определений векторного произведения (1.32) и (1.33). Рассмотрим для этого скалярные произведения $\vec{A} \cdot \vec{C}$ и $\vec{B} \cdot \vec{C}$:

$$\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A_x (A_y B_z - A_z B_y) +$$

$$+ A_y (A_z B_x - A_x B_z) + A_z (A_x B_y - A_y B_x) = 0, \tag{1.36}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0, \tag{1.37}$$

$\Rightarrow$, уравнения (1.36) и (1.37) показывают, что вектор $\vec{C}$ перпендикулярен и к вектору $\vec{A}$, и к вектору $\vec{B}$, и, следовательно, перпендикулярен к плоскости, в которой они лежат.

Рассмотрим далее произведение

$$(\vec{A}\times\vec{\mathrm{B}})\cdot(\vec{A}\times\vec{\mathrm{B}}) = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{B}})^2 =$$
$$= A^2B^2 - A^2B^2cos^2\theta = A^2B^2sin^2\theta, \tag{1.38}$$

$\Rightarrow$,
$$C = A\cdot B\cdot sin\theta\,. \tag{1.39}$$

В уравнении (1.38) мы разлагали векторное произведение $\vec{A}\times\vec{\mathrm{B}}$ на компоненты в виде (1.33) и затем использовали формулы скалярного произведения (1.22). Из уравнений (1.36), (1.37) и (1.39) следует, что два определения векторного произведения (1.32) и (1.33) эквивалентны.

Докажем теперь, что $\vec{C} = \vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}$ действительно вектор, т.е. подчиняется закону преобразования векторов (1.15). В повернутой системе координат

$$C_i' = A_j'B_k' - A_k'B_j' =$$
$$= \sum_l a_{jl}A_l\cdot\sum_m a_{km}B_m - \sum_l a_{kl}A_l\sum_m a_{jm}B_m =$$
$$= (\sum_{l,m} a_{jl}a_{km} - a_{kl}a_{jm})A_lB_m\,, \tag{1.40}$$

где *i*, *j*, *k* берутся в циклическом порядке. Выражение в скобках исчезает при $m=l$. Поэтому индексы *j*, *k* принимают определенные значения в зависимости от выбора *i* и шести комбинаций *m* и l. Если i=3, то j=1, k=2 (циклический порядок), и мы получаем набор направляющих косинусов:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{33},\ \ a_{13}a_{21} - a_{13}a_{11} = a_{32},$$
$$a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = a_{31}. \tag{1.41}$$

Подставив (1.41) в уравнение (1.40), получим:

$$C'_3 = a_{33}A_1B_2 + a_{32}A_3B_1 + a_{31}A_2B_3 -$$

$$-a_{33}A_2B_1 - a_{32}A_1B_3 - a_{31}A_3B_2 = \qquad (1.42)$$

$$= a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 = \sum_n a_{3n}C_n.$$

Переставляя индексы, получаем C'_1 и C'_2, после этого легко установить, что условие (1.15) выполнено, и $\vec{C}$ – действительно вектор.

Задачи

1. Даны векторы

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} \text{ и } \vec{B} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k} .$$

Определить скалярное и векторное произведения $\vec{A}\cdot\vec{B}$ и $\vec{A}\times\vec{B}$.

2. Показать, что

$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = A^2 - B^2, \quad (\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B}) = 2\vec{A}\times\vec{B},$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}, \qquad \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}.$$

3. Найти скалярное и векторное произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол между ними $\varphi = 150^0$, а длины их равны соответственно m и $2m$.

4. Найти скалярное и векторное произведения векторов $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\left|\vec{b}\right| = 2\left|\vec{a}\right| = \alpha$.

5. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{a} \perp (\vec{b}\times\vec{c})$.

6. Найти векторное произведение векторов $\vec{l}_1 = \vec{i}\,\alpha + \vec{k}\beta$ и $\vec{l}_2 = \vec{i}\,\gamma + \vec{k}\delta$.

7. Координаты вершин треугольника заданы точками (2, 1, 5), (5, 2, 8) и (4, 8, 2). С помощью векторного анализа определить площадь треугольника.

8. Даны три вектора $\vec{P} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{Q} = -6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{R} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Определить, какие два из них взаимно перпендикулярны и какие два параллельны или антипараллельны друг другу.

9. Используя векторы

$\vec{P} = \vec{i}cos\theta + \vec{j}sin\theta$, $\vec{Q} = \vec{i}cos\varphi - \vec{j}sin\varphi$, $\vec{R} = \vec{i}cos\varphi + \vec{j}sin\varphi$, доказать известные тригонометрические формулы:

$$sin(\theta + \varphi) = sin\theta cos\varphi + cos\theta sin\varphi,$$

$$cos(\theta + \varphi) = cos\theta cos\varphi - sin\theta sin\varphi$$

10. Определить вектор $\vec{A}$, перпендикулярный к векторам $\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Каким должен быть вектор $\vec{A}$, если дополнительно потребовать, чтобы он по абсолютной величине был равен единице?

11. Четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ лежат в одной плоскости. Показать, что $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$.

12. Найти стороны и углы сферического треугольника ABC (рис. 10), определенного векторами $\vec{A}$ =(1,0,0), $\vec{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{C} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Начало каждого вектора совпадает с началом координат.

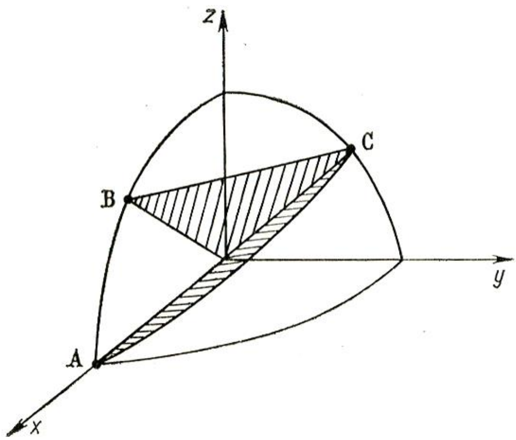


Рис. 10. Сферический треугольник

13. Магнитная индукция $\vec{B}$ *определена* уравнением Лоренца $\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$, где $\vec{V}$ – скорость электрического заряда q, а $\vec{F}$ – сила, действующая на заряд.

При выполнении трех экспериментов установлено, что:

1) $\vec{V} = \vec{i}, \quad \dfrac{\vec{F}}{q} = 2\vec{k} - 4\vec{j};$

2) $\vec{V} = \vec{j}, \quad \dfrac{\vec{F}}{q} = 4\vec{i} - \vec{k};$

3) $\vec{V} = \vec{k}, \quad \dfrac{\vec{F}}{q} = \vec{j} - 2\vec{i}.$

По результатам этих экспериментов найти магнитную индукцию.

Ответ: $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

14. Доказать тождество:

$$[\vec{a}\vec{b}] + [\vec{b}\vec{c}] + [\vec{c}\vec{a}] = [(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})].$$

15. Доказать:

$$[\vec{a}\vec{c}] \,||\, [\vec{d}\vec{b}] \text{ и } [\vec{b}\vec{c}] \,||\, [\vec{d}\vec{a}],$$

если $(\vec{a} + \vec{b}) \,||\, (\vec{c} + \vec{d})$ и $(\vec{a} - \vec{b}) \,||\, (\vec{c} - \vec{d})$.

16. Доказать:

$$(\vec{i}\vec{a})\vec{i} + (\vec{j}\vec{a})\vec{j} + (\vec{k}\vec{a})\vec{k} = \vec{a}.$$

17. Вычислить:

$$\vec{a} = [\vec{i}(-\vec{j})][(-\vec{i})\vec{k}]; \; \vec{s} = [(-\vec{j})(-\vec{i})][\vec{k}(-\vec{i})].$$

18. Доказать:

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] + [\vec{b}[\vec{c}\vec{a}]] + [\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] = 0.$$

1.5. Смешанное и двойное векторное произведение трех векторов

Имеются комбинации трех векторов $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ и $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, которые встречаются довольно часто. Комбинация векторов $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ известна как *смешанное* произведение.

Произведение $\vec{B}\times\vec{C}$ дает вектор, который затем умножается на вектор $\vec{A}$, в результате получается скаляр. Заметим, что $(\vec{A}\cdot\vec{B})\times\vec{C}$ есть умножение скаляра на вектор, а такая операция еще не определена. Поэтому заранее условимся не рассматривать данную операцию.

Используя формулы (1.33), (1.22), получаем:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) +$$

$$+A_z(B_xC_y - B_yC_x) = B_x(A_zC_y - A_yC_z) +$$

$$+B_y(A_xC_z - A_zC_x) + B_z(A_yC_x - A_xC_y) = \tag{1.43}$$

$$= \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{A}\cdot\vec{C}\times\vec{B} =$$

$$= -\vec{C}\cdot\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{B}\cdot\vec{A}\times\vec{C},$$

или

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}. \tag{1.44}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1.45}$$

Из правил замены в определителе строк на столбцы сразу же следуют перестановочные соотношения (1.43), тогда как симметрия векторов $\vec{A}, \vec{B}$, $\vec{C}$ в такой записи обеспечивает выполнение условия (1.44).

Смешанное произведение имеет наглядную геометрическую интерпретацию: если три вектора $\vec{A}, \vec{B}$ и $\vec{C}$ образуют параллелепипед (рис. 11), то $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ равно объему этого параллелепипеда.

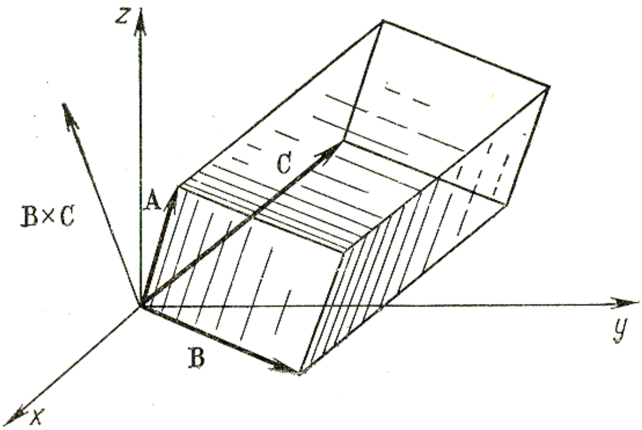


Рис. 11.

Рассмотрим теперь *двойное векторное произведение* $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$. В данном случае скобки необходимо сохранить, в чем можно убедиться, остановившись на специальном случае:

$$\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\quad ((\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{k}=0). \tag{1.48}$$

Указанное произведение трех векторов само является вектором. Кроме того, результирующий вектор $\vec{j}$ перпендикулярен к $\vec{A}$ и $(\vec{B}\times\vec{C})$. Плоскость, определенная векторами $\vec{B}$ и $\vec{C}$, перпендикулярна к $(\vec{B}\times\vec{C})$, и, следовательно вектор $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ лежит в этой плоскости. Это означает, что вектор $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ должен быть линейной комбинацией векторов $\vec{B}$ и $\vec{C}$. $\Rightarrow$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}). \tag{1.49}$$

С помощью смешанного и двойного векторного произведений можно упростить другие произведения векторов.

Пример:

Смешанное произведение находит интересное применение при построении обратной кристаллической решетки. Пусть $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ (необязательно взаимно перпендикулярные) – векторы, определяющие кристаллическую решетку. Расстояние между двумя точками решетки

$$\vec{r} = n_a\vec{a} + n_b\vec{b} + n_c\vec{c}\,,$$

где n_a, n_b и n_c – некоторые целые числа. С помощью заданных векторов запишем соотношения

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{a\cdot\vec{b}\times\vec{c}};\ \vec{b}' = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}};\ \vec{c}' = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}} \tag{1.50}$$

Из (1.50) $\Rightarrow$ $\vec{a}'$ перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и по абсолютной величине пропорционален a^{-1}. Легко показать, что

$$\vec{a}'\cdot\vec{a} = \vec{b}'\cdot\vec{b} = \vec{c}'\cdot\vec{c} = 1,$$

$$\vec{a}'\cdot\vec{b} = \vec{a}'\cdot\vec{c} = \vec{b}'\cdot\vec{a} = \vec{b}'\cdot\vec{c} = \vec{c}'\cdot\vec{a} = \vec{c}'\cdot\vec{b} = 0\,.$$

Последние уравнения определяют так называемую обратную решетку. Обратная решетка связана с задачами по рассеянию волн на различных плоскостях кристалла.

Задачи

1. Доказать формулу $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\vec{b}$.

2. Показать, что $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$.

3. Вектор $\vec{A}$ разложен на радиальный $\vec{A}_r$ и тангенциальный вектор $\vec{A}_t$, $\vec{r}_0$ – единичный вектор в радиальном направлении. Показать, что $\vec{A}_r = \vec{r}_0(\vec{A}\cdot\vec{r}_0)$ и $\vec{A}_t = -\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{A})$.

4. Доказать, что необходимым и достаточным условием компланарности трех (ненулевых) векторов $\vec{A}, \vec{B}$ и $\vec{C}$ является равенство нулю смешанного произведения .

5. Даны векторы

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$
$$\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k},$$
$$\vec{C} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\ ,$$
$$\vec{D} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Найти:

а) суммы и разности векторов:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D};$$
$$\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D};$$
$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D};$$
$$-\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} + \vec{D};$$

б) углы, которые составляют векторы $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ с осями координат;

в) модули векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$;

г) скалярное и векторное произведения суммы двух первых векторов на сумму двух последующих;

д) углы, которые образуют вектор $\vec{A}$ с остальными векторами $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$;

е) проекцию вектора $\vec{A}$ на направление векторов $\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$;

ж) векторные произведения $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$, $\vec{B} \times \vec{C}$ и углы, которые они образуют с вектором $\vec{D}$;

з) площади параллелограммов, построенных на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$, $\vec{C}$ и $\vec{D}$; найти длины диагоналей этих параллелограммов;

и) показать, что все векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ и $\vec{D}$ лежат в одной плоскости;

к) найти:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} \text{ и } \vec{D}\cdot\vec{B}\times\vec{C};\ \vec{A}\cdot\vec{D}\times\vec{C} \text{ и } \vec{D}\cdot\vec{B}\times\vec{A};$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}),\ \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) \text{ и } \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A});$$
$$\vec{D}\times(\vec{B}\times\vec{C}),\ \vec{C}\times(\vec{D}\times\vec{B}) \text{ и } \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D});$$
$$\vec{A}\times(\vec{D}\times\vec{C}),\ \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{D}) \text{ и } \vec{D}\times(\vec{C}\times\vec{A});$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{D}),\ \vec{D}\times(\vec{A}\times\vec{B}) \text{ и } \vec{B}\times(\vec{D}\times\vec{A}).$$

остальными векторами $\vec{B},\ \vec{C},\ \vec{D};$

6. Даны три вектора $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{B}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{C}=-3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$. Найти $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ и $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}),\ \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ и $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$.

7. Даны векторы

$$\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},$$
$$\vec{B}=4\vec{i}+5\vec{j},$$
$$\vec{C}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Какую систему (правую или левую) образуют эти векторы?

Определить:

а) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

б) векторы, изображающие две (исходящие из концов вектора $\vec{A}$) диагонали параллелепипеда, построенного на этих векторах, и найти длины этих диагоналей;

в) площадь диагонального сечения параллелепипеда, проведенного через вектор A и $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}),\ \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ и $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$.

8. Сила $\vec{F}$ действует на тело, помещенное в точке $\vec{r}$. Показать, что результирующий момент относительно любой из осей, проведенных через начало координат, равен $L=\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{a}$, где $\vec{a}$ – единичный вектор в направлении этой оси.

9. Дано:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}\quad \vec{b}'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}\quad \vec{c}'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}}$$

и $$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}\neq 0$$

Показать, что

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\delta_{xy}(\vec{x},\vec{y}=\vec{a},\vec{b},\vec{c});$$

$$\vec{a}^{'}\cdot\vec{b}^{'}\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c})^{-1};\ \vec{a}=\frac{\vec{b}^{'}\times\vec{c}^{'}}{\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}^{'}}.$$

10. Используя формулу Эйлера $\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, определить линейную скорость центра прямоугольника, вращающегося вокруг одной из вершин и имеющего стороны $a=2$ см и $b=4$ см в те моменты, когда мгновенная угловая скорость имеет величину $5\frac{1}{сек}$ и направлена: а) по меньшей, б) по большей стороне прямоугольника.

11. Определить момент силы, величиной в 5 Н, направленной по одному из ребер куба, относительно всех его вершин и осей, проходящих через ребра (длина ребер куба равна *а см*).

12. Кинетическим моментом относительно центра *O* (моментом количества движения) системы *n* материальных точек называется векторная сумма

$$\vec{L}_0=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i,$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-ой точки, имеющей массу m_i и скорость $\vec{v}_i$. Определить:

а) кинетический момент двух точек с массами $m_1=1$ *г*, $m_2=2$ *г*, вращающихся с угловой скоростью $\omega=5\frac{1}{сек}$ вокруг оси (*z*) и описывающих окружности радиусом 3 и 6 *см*;

б) кинетический момент точек массой 1 *г* и 2 *г*, движущихся в противоположные стороны со скоростью 3 *см/сек* по двум противоположным ребрам куба, относительно всех его вершин (длина ребер куба равна *а см*).

13. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора, определяющие стороны параллелограмма с диагоналями $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$; показать, что:

а) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон;

б) диагонали параллелограмма перпендикулярны тогда и только тогда, если этот параллелограмм – ромб;

в) площадь параллелограмма (*A*), построенного на диагоналях другого параллелограмма (*B*), в два раза больше площади этого параллелограмма (*B*).

Векторный анализ (дифференцирование векторов)

1.6. Градиент $\vec{\nabla}$

Предположим, что $\varphi(x, y, z)$ – скалярная функция точки пространства, т.е. такая функция, значение которой зависит от значений координат (*x*,*y*,*z*). Как скаляр она должна иметь одно и то же значение для фиксированной точки пространства независимо от вращения системы координат, т. е.

$$\varphi'(x_1', x_2', x_3') = \varphi(x_1, x_2, x_3). \tag{1.51}$$

Дифференцируя по x_i' и используя уравнения (1.16), получаем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi'(x_1', x_2', x_3')}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x'} = \\ = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \left|\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = a_{ij}\right| = \sum_j a_{ij} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.\end{gathered} \tag{1.52}$$

Сравнение (1.52) с законом преобразования векторов (1.17) сразу убеждает нас в том, что мы построили вектор с компонентами $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$. Этот вектор мы назовем градиентом φ. Удобно перейти к символической записи

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.53}$$

или

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.54}$$

Здесь $\vec{\nabla}$ (набла) – векторный дифференциальный оператор. Этот оператор обладает свойствами векторов и подчиняется законам частного дифференцирования.

Пример:

Вычислим градиент функции

$$f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r}\ .$$

Другие компоненты находятся аналогично. Тогда:

$$\vec{\nabla} f(r) = (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)\cdot\frac{1}{r}\frac{df}{dr} = \frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{df}{dr} = \vec{r}_0\,\frac{df}{dr},$$

где $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор в *положительном* направлении радиуса-вектора.

Одно из непосредственных приложений $\vec{\nabla}\varphi$ связано с вычислением приращения длины

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \qquad (1.55)$$

Учитывая предыдущую запись, получаем:

$$(\vec{\nabla}\varphi)d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi, \qquad (1.56)$$

изменение скалярной функции φ, соответствующее изменению положения $d\vec{r}$.

Рассмотрим далее две точки P и Q на поверхности $\varphi(x, y, z) = C$. Расстояние между этими двумя точками dr. Тогда при перемещении из P в Q изменение функции на поверхности $\varphi(x, y, z) = C$ равно

$$d\varphi = (\vec{\nabla}\varphi)d\vec{r} = 0\,, \qquad (1.57)$$

так как перемещение происходит по поверхности $\varphi(x, y, z) = C$. Отсюда следует, что $(\vec{\nabla}\varphi) \perp d\vec{r}$. Поскольку $d\vec{r}$ можно провести в любом направлении от точки P в Q, лежащую на этой поверхности, а значит $d\vec{r}$ всегда остается на поверхности, $\vec{\nabla}\varphi$ должен быть перпендикулярен к поверхности $\varphi = const$ в любой ее точке.

Если предположить теперь, что $d\vec{r}$ направлен от одной поверхности $\varphi = c_1$ к соседней $\varphi = c_2$ (рис. 12), то

$$d\varphi = c_2 - c_1 = \Delta c = (\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{r}. \qquad (1.58)$$

Для данного $d\varphi$ абсолютная величина $|d\vec{r}|$ минимальна, если $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla}\varphi$ (cosθ=1), или, наоборот, при заданном $|d\vec{r}|$ изменение скалярной функции φ максимально для $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla}\varphi$.

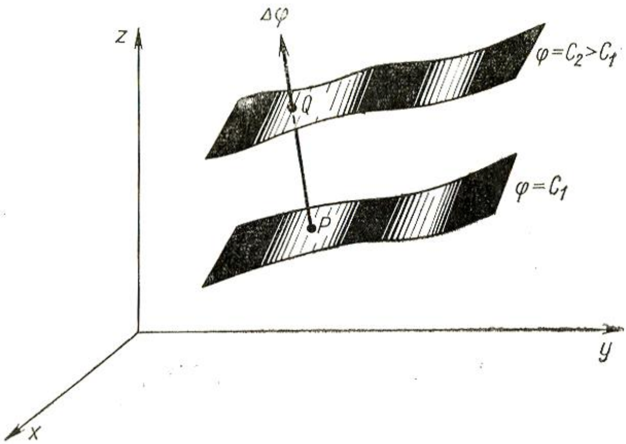


Рис. 12. Градиент

Это определяет $\vec{\nabla}\varphi$ как вектор, *указывающий направление максимальной скорости изменения функции*.

Градиент скалярной величины играет очень важную роль в физике при установлении связи между полем сил и потенциальным полем:

$$\text{Сила} = -\vec{\nabla}\,(\text{потенциал}) \tag{1.59}$$

Это справедливо и для гравитационного, и для электрического поля.

Задачи

1. Показать, что $\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v$, где $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – дифференцируемые скалярные функции.

2. Найти градиент скалярного поля

$$u = x - 2y + 3z.$$

3. Найти наибольшую крутизну (скорость) подъема поверхности $u = x^y$ в точке $M(2,2,4)$.

4. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2.$

5. Найти градиент поля $u = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}),$ где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

6. Найти градиент расстояния

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

где $P(x, y, z)$ – изучаемая точка поля, а точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка.

7. Найти угол Θ между градиентами функций

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad v = x + y + 2\sqrt{xy}$$

в точке $M_0\,(1, 1)$.

8. Найти производную по направлению радиуса-вектора $\vec{r}$ для функции $u = \sin r$, где $r = |\vec{r}|$.

9. Найти в точке M_0 (1,1,1) направление наибольшего изменения скалярного поля $u = xy + yz + xz$ и величину этого наибольшего изменения в этой точке.

10. Дана функция

$$S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Определить в точке (1,2,3) $\vec{\nabla}S$, его абсолютную величину и направляющие косинусы $\vec{\nabla}S$.

11. Дан вектор

$$\vec{r}_{12} = \vec{i}\,(x_1 - x_2) + \vec{j}\,(y_1 - y_2) + \vec{k}\,(z_1 - z_2).$$

Показать, что $\vec{\nabla}_1 r_{12}$ (градиент абсолютной величины вектора $\vec{r}_{12}$ по переменным x_1, y_1, z_1) есть единичный вектор, направленный вдоль $\vec{r}_{12}$.

12. Найти $grad\ r,$ где $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

13. Найти $grad\ (\vec{r}\vec{c}),$ где $\vec{c} = const.$.

14. Доказать, что условие $(\vec{\nabla}u) \times (\vec{\nabla}v) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы две функции $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ были связаны соотношением $f(u,v) = 0$. Убедиться, что в случае $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ условие $(\vec{\nabla}u) \times (\vec{\nabla}v) = 0$ приводит к двумерному якобиану:

$$I\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Функции *u* и *v* предполагаются дифференцируемыми.

15. Доказать, что $(\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v) \times (\vec{\nabla}\omega) = 0$ – необходимое и достаточное условие того, чтобы три функции $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ и $\omega(x,y,z)$ были связаны некоторой функцией $F(u,v,\omega) = 0$. Показать также, что смешанное произведение градиентов эквивалентно трехмерному якобиану

$$I\left(\frac{u,v,\omega}{x,y,z}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega}{\partial y} & \dfrac{\partial \omega}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Предполагается существование необходимых производных.

16. Доказать, что если векторная функция $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ зависит от пространственных координат и от времени, то

$$d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt.$$

17. Найти градиент скалярного поля

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

в точке M_0 (1,1,-1).

18. Пусть

$$v = v(x, y, z), \quad u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

– дифференцируемые в точке M_0 (x,y,z) функции. Показать, что

а) $grad\ \lambda u = \lambda\ grad\ u, \quad \lambda = const;$

б) $grad\ (u \pm v) = grad\ u \pm grad\ v;$

в) $grad\ (\lambda uv) = \lambda v\ grad\ u + \lambda u\, grad\ v, \lambda = const;$

г) $grad\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{v\ grad\ u + u\, grad\ v}{v^2}, \ v \neq 0.$

19. Вычислить

$grad\ (x^m y^n).$

1.7. Дивергенция

Дифференцирование векторной функции является обобщением дифференцирования скалярных величин. Предположим, что $\vec{r}(t)$ описывает положение некоторого тела в пространстве в момент времени t (рис. 13).

Тогда дифференцирование по времени дает

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{v},$$

где $\vec{v}$ – линейная скорость, а оператор $\vec{\nabla}$ был определен в параграфе 1.6 как векторный оператор.

Теперь, имея в виду его векторные и дифференциальные свойства, рассмотрим действие $\vec{\nabla}$ на вектор.

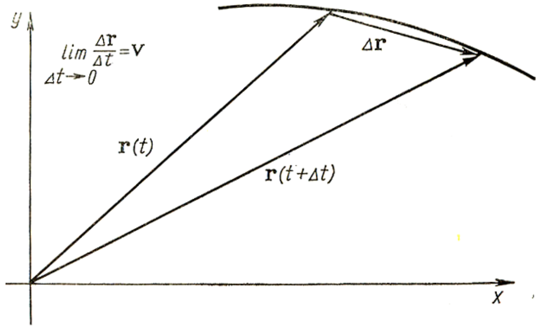


Рис. 13. Дифференцирование вектора

Скалярное умножение этого векторного оператора на вектор приводит к выражению

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{1.60}$$

которое называется *дивергенцией* вектора $\vec{V}$. Дивергенция есть скаляр в том смысле, как он определен в разделе 1.3. Например:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z)=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}f(r)=\frac{\partial}{\partial x}(xf(r))+\frac{\partial}{\partial y}(yf(r))+\frac{\partial}{\partial z}(zf(r))=3f(r)+r\frac{\partial f}{\partial r}.$$

В частности, если $f(r)=r^{n-1}$, то

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}r^{n-1}=\vec{\nabla}\cdot\vec{r}_0r^n=3r^{n-1}+(n-1)r^{n-1}$$

Дивергенция этой величины обращается в нуль при n=-2.

Для более ясного представления физической сущности дивергенции рассмотрим $\vec{\nabla}\cdot(\rho\cdot\vec{v})$, где $\vec{v}(x,y,z)$ – скорость течения сжимаемой жидкости; $\rho(x,y,z)$ – плотность этой жидкости в точке (*x*,*y*,*z*). Если рассмотреть некоторый элемент объема *dxdydz* (рис. 14), то количество жидкости, поступающей в этот объем в единицу времени через поверхность EFGH, выразится так: (приток) $_{\mathrm{EFGH}}=\rho\cdot v_x dydz$. Количество вытекшей из

объема жидкости через поверхность ABCD равно: $(\text{сток})_{ABCD} =$
$= \left[\rho \cdot v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x)dx \right] dydz$; производная учитывает возможность зависимости неоднородной плотности или скорости, или сразу обеих этих величин от x. Полный расход жидкости через эти две поверхности равен просто разности двух потоков или расходу в направлении оси x: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x)dxdydz$.

Дополнительный расход жидкости происходит через остальные четыре поверхности данного элемента объема, полный расход (в единицу времени) равен

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v_z) \right] dxdydz = \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v}) dxdydz. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Следовательно, полное количество сжимаемой жидкости, прошедшей через единицу объема в единицу времени, равно $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$. Отсюда и название *дивергенция*, или *расходимость*.

Одним из примеров использования дивергенции является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0. \quad (1.62)$$

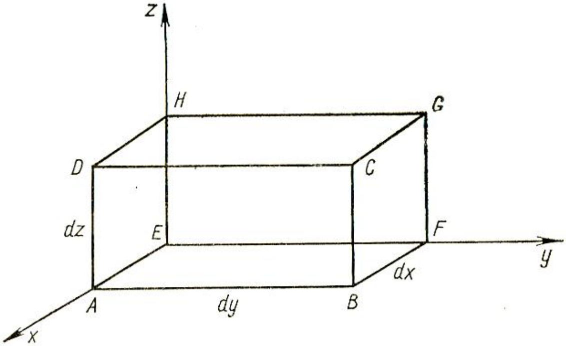


Рис. 14. Дифференциальный прямоугольный параллелепипед

Причем

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})=\frac{\partial}{\partial x}(fv_x)+\frac{\partial}{\partial y}(fv_y)+\frac{\partial}{\partial z}(fv_z)=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot v_x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot v_y+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot v_z+f\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\;+f\,\frac{\partial v_y}{\partial y}+f\,\frac{\partial v_z}{\partial z}= \qquad (1.63)$$

$$=\left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{v}+f\vec{\nabla}\cdot\vec{v},$$

где f – скаляр, а $\vec{v}$ – векторная функция.

В частном случае, когда $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, вектор $\vec{B}$ называют *соленоидальным*.

Задачи

1. Доказать формулу $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\vec{b}$. *Замечание*. Рассматривать левую часть формулы как смешанное произведение.

2. Делая поворот системы координат, показать, что $\vec{\nabla}'\cdot\vec{v}'=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$, и, следовательно, по определению, дивергенция вектора – скаляр (достаточно рассмотреть двумерный случай).

3. Вычислить $div\ \vec{r}$.

4. Вычислить $div\ (\varphi\vec{a})$, где φ – скалярная функция, $\vec{a}$ – векторная функция поля.

5. Вычислить $div\ (r\vec{c})$, $div(r^2\vec{c})$ где $\vec{c}$ – постоянный вектор.

6. Вычислить $div\ (\alpha\vec{r})$, где α – постоянный скаляр.

7. Вычислить $div\ \dfrac{\vec{r}}{r}$.

8. Вычислить $div\ \vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})$, $div\,\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{a})$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы.

9. Найти $div\ (r^4\vec{r})$.

10. Найти $div\ (\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))$, где ω – постоянный вектор.

11. Найти $div\ (\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b}))$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы.

12. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Показать, что линейная скорость $\vec{v}$ соленоидальна.

13. Электростатическое поле точечного заряда q равно $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2}$. Вычислить $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

14. Показать, что:

а) $div\ (r^n \vec{c}) = nr^{n-2}(\vec{r}\vec{c}),\ (n \neq 2);$

б) $div(\vec{c} \times \vec{r}) = 0;$

в). $div\ r^n \vec{r} = (n+3) r^n$.

15. Найти поток радиуса вектора $\vec{r}$ через поверхность сферы.

16. Найти дивергенцию вектора $\vec{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \vec{r}$, где $r = |\vec{r}|$ – расстояние от начала координат до переменной точки $M(x, y, z)$.

17. Найти $div\ [grad\ \varphi(r)].$

18. Найти

$$div\ \frac{x+y+z}{xyz} \cdot \vec{r}.$$

1.8. Ротор

Операцию векторного умножения $\vec{\nabla}$ на вектор можно определить формулой:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z\right) + \tag{1.64}$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Полученное выражение называется *ротором* вектора $\vec{v}$. При раскрытии определителя или при любых других операциях с $\vec{\nabla}$ необходимо учитывать его дифференциальную природу. Специально подчеркнем, что произведение $\vec{v}\times\vec{\nabla}$ определяется как новый векторный дифференциальный оператор. В общем случае он, конечно, $\vec{v}\times\vec{\nabla}\neq\vec{\nabla}\times\vec{v}$. Если $\vec{\nabla}$ векторно умножается на произведение скаляра и вектора, можно записать:

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{v})\Big|_x=\vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(fv_z)-\frac{\partial}{\partial z}(fv_y)\right]=$$

$$=\vec{i}\left[f\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}v_z-f\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}v_y\right]=$$

$$=f\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}\Big|_x+\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{v}\Big|_x. \qquad (1.65)$$

Делая циклическую перестановку координат, легко получить *y*- и *z*-компоненты. Можно убедиться, что

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{v})=f\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}+\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{v}. \qquad (1.66)$$

Полученное выражение есть аналог выражения (1.63).

Пример:

$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r)=f(r)\vec{\nabla}\times\vec{r}+(\vec{\nabla}f(r))\times\vec{r}.$

1)

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0.$$

2) Пользуясь равенством $\vec{\nabla}f(r)=\vec{r}_0\cdot\dfrac{df}{d\vec{r}}$,

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}f(r)=\frac{df}{dr}\cdot\vec{r}_0\times\vec{r}=0,$$

так как $\vec{r}=\vec{r}_0\cdot r$, $\vec{r}_0\times\vec{r}_0=0$. Название *ротор* возникло в связи с тем, что $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ описывает вращение векторного поля $\vec{v}$ в точке, в которой вычисляется ротор.

Пусть имеется твердое тело в плоскости *xy*, вращающееся вокруг оси *z* с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Линейная скорость $\vec{V}$ в точке, которая задана радиусом-вектором $\vec{r}$, равна

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}\ . \tag{1.67}$$

Чтобы определить $\vec{\nabla}\times\vec{r}$, рассмотрим

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \tag{1.68}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\varpi}\times\vec{r})=\vec{\omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})-\vec{r}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})=\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\cdot\vec{\omega}-\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\cdot\vec{r}. \tag{1.69}$$

Здесь $\vec{\nabla}$ скалярно умножается на первый вектор, но как дифференциальный оператор он действует на *оба* вектора:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega}-r\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}-\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}r. \tag{1.70}$$

При $\vec{\omega}=const$ второй и третий члены в уравнении (1.70) обнуляются.

Как известно

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3, \tag{1.71}$$

поэтому

$$\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}r=\omega_x\frac{\partial}{\partial x}(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z)+\omega_y\frac{\partial}{\partial y}(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z)+$$

$$+\omega_z\frac{\partial}{\partial z}(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z)==\vec{i}\,\omega_x+\vec{j}\,\omega_y+\vec{k}\,\omega_z=\vec{\omega}. \tag{1.72}$$

Подставляя (1.71) и (1.72) в (1.70), получаем

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\omega}, \tag{1.73}$$

т.е. ротор линейной скорости твердого тела равен удвоенной угловой скорости.

Если

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0, \tag{1.74}$$

то вектор $\vec{V}$ называют *безвихревым*.

Наиболее важные физические примеры безвихревых векторов дают гравитационные и электростатические силы

$$\vec{V} = C\cdot\frac{\vec{r}_0}{r^2} = C\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{1.75}$$

где C – постоянная, $\vec{r}_0$ – единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора.

Задачи

1. Показать, что вектор $\vec{U}\times\vec{V}$ соленоидален, если $\vec{U}$, $\vec{V}$ – безвихревые векторы.

2. Показать, что вектор $\vec{A}\times\vec{r}$ соленоидален, если $\vec{\mathrm{A}}$ – безвихревой вектор.

3. Найти ротор вектора $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$.

4. Найти вихрь поля $\overleftarrow{F} = y^2z\vec{i} + z^2x\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

5. Поворотом координат показать, что компоненты ротора подчиняются закону векторного преобразования.

Замечание. Воспользоваться направляющими косинусами из уравнения (1.41).

6. Убедиться, что ротор $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ перпендикулярен к вектору $\vec{V}$, если $\vec{V} = \vec{i}\,V_x(x,y) + \vec{j}V_y(x,y)$ и $\vec{\nabla}\times\vec{V} \neq 0$.

7. В квантовой механике операторы момента количества движения определены соотношениями:

$$L_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}),$$

$$L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}), \qquad L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}).$$

Показать, что $[L_{x,}L_y] = i\hbar L_z$ и, следовательно, $\vec{L}\times\vec{L} = i\hbar\vec{L}$.

8. Проверить векторные тождества:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}),$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}).$$

9. Показать, что:

а) $rot\ \vec{r} = 0;$

б) $rot\ (\vec{c}\times\vec{r}) = 2\vec{c};$

в) $rot\,\vec{c}(\vec{a}\vec{r}) = \vec{a}\times\vec{c}.$.

10. Найти :

а) $rot[(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{a}],$

б) $rot[(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{r}],$

где $\vec{a},\ \vec{c}$ – постоянные векторы.

11. Найти дивергенцию и вихрь поля скоростей $\vec{V}$ и поля ускорений $\vec{W}$ твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, зная, что

$$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}; \quad W = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}),$$

где поля ускорений $\vec{\omega},\ \vec{\varepsilon}$ – постоянные векторы.

12. Найти ротор следующих векторов:

а) $\vec{a} = (x^2+y^2)\vec{i} + (y^2+z^2)\,\vec{j} + (z^2+x^2)\vec{k};$

б) $\vec{a} = z^3\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} + x^3\,\vec{k};$

в) $\vec{a} = \frac{1}{2}(-y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}).$

13. Представить $\vec{a}\times grad\,\varphi$ где $\vec{a}$ – постоянный вектор, в виде вихря некоторого вектора.

14. Вектор $r(\vec{\omega}\times\vec{r})$, где $\vec{\omega}$ – постоянный вектор, есть вектор соленоидальный. Представить его в виде вихря некоторого вектора.

1.9. Последовательное применение оператора $\vec{\nabla}$

С помощью введенных понятий градиента, дивергенции и ротора можно получить вектор, скаляр и комбинацию векторов. Действуя на каждую из введенных величин оператором $\vec{\nabla}$, получаем выражения $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}$, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})$.

Эти выражения часто используются в дифференциальных уравнениях второго порядка в математической физике.

Первое из них, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi$, дивергенция градиента, называется *лапласианом* φ:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi=(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z})=$$

$$=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi=\Delta\varphi=\vec{\nabla}^2\varphi.$$

Вторую операцию можно записать как

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}, \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi=\vec{i}\,(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y})+\\ +\vec{j}\,(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z})+\vec{k}\,(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x})=0.\end{aligned} \tag{1.77}$$

Здесь предполагалось, что можно изменять порядок дифференцирования. Это можно делать только тогда, когда первые частные производные непрерывны.

Далее из уравнения (1.77) следует, что ротор градиента тождественно равен нулю:

$$rot\ \ grad \equiv 0\,.$$

Следовательно, градиент – безвихревой вектор.

Четвертое выражение представляет собой смешанное произведение:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x} = 0, \qquad (1.78)$$

То есть

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V} = 0. \qquad (1.79)$$

Таким образом, дивергенция ротора равна нулю $div\,(rot) = 0$, т.е. ротор – всегда соленоидальный вектор.

Рассмотрим последнее выражение:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{V} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}\,. \qquad (1.80)$$

Если $\vec{V}$ разложить на компоненты в декартовой системе координат, то $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}$ – *векторный лапласиан* – приводится к векторной сумме обычных скалярных лапласианов:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V = \vec{i}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V_x + \vec{j}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V_y + \vec{k}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V_z.$$

Важное приложение тождества (1.80) связано с волновым уравнением в электромагнитной теории. В вакууме уравнения Максвелла принимают вид:

$$a)\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \qquad\qquad в)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t},$$

$$(1.81)$$

$$б)\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}=0, \qquad\qquad г)\quad \vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}.$$

Здесь $\vec{\mathrm{E}}$ – электрическое поле; $\vec{B}$ – магнитная индукция; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная проницаемости. Предположим, что $\vec{\mathrm{B}}$ определяется из уравнений (1.81в) и (1.81г). Это можно сделать, взяв ротор от обеих частей уравнения (1.81г):

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}})=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{B}}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}. \qquad (1.82)$$

Далее возьмем производную по времени от обеих частей уравнений (1.81в):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}})=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}=-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}),$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}})=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}, \qquad (1.83)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{\mathrm{E}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2}. \qquad (1.84)$$

(1.84) есть векторное волновое уравнение электромагнитного поля.

Если $\vec{E}$ разложить в декартовых координатах, то (1.84) распадается на три скалярных волновых уравнения, содержащих скалярный лапласиан.

Задачи

1. Доказать, что $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{\nabla}\varphi)=0$.

2. Доказать, что вектор $(\vec{\nabla}U)\times(\vec{\nabla}V)$ соленоидален, если U и V дифференцируемые скалярные функции.

3. Скаляр φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi=0$. Показать, что вектор $\vec{\nabla}\varphi$ соленоидальный и безвихревой.

4. Убедиться что $\vec{C}_1=\vec{\nabla}\psi$, $\vec{C}_2=\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi$ и $\vec{C}_3=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi)$ – решения векторного волнового уравнения:

$$\vec{\nabla}^2\vec{C}+k^2\vec{C}=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{C}-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{C}+k^2\vec{C}=0.$$

Здесь ψ удовлетворяет скалярному волновому уравнению $\vec{\nabla}^2\psi+k^2\psi=0$ и $\vec{a}$ – постоянный вектор. Доказать также, что $\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$ ортогональны, вектор $\vec{C}_1$ безвихревой, а $\vec{C}_2$ и $\vec{C}_3$ – соленоидальные векторы.

5. Доказать, что тождество $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}$

вытекает из правила $\vec{B}\vec{A}\vec{C}-\vec{C}\vec{A}\vec{B}$ для двойного векторного произведения. Объяснить произвольное расположение множителей в членах $\vec{B}\vec{A}\vec{C}$ и $\vec{C}\vec{A}\vec{B}$.

6. Показать, что любое решение уравнения $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}-k^2\vec{\mathrm{A}}=0$ автоматически удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\vec{\nabla}^2\vec{\mathrm{A}}+k^2\vec{\mathrm{A}}=0$ и условию соленоидальности $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}=0$.

7. Проверить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими:

а) $u=x^2+2xy-y^2$;

б) $u=x^2y+y^2z+z^2x$;

в) $u=x^2-y^2$.

8. Показать, что скалярное поле $u=\ln\dfrac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $(r\neq 0)$, является гармоническим.

9. Скалярный потенциал $U_{LM} = j_L(ka)Y_{LM}(\theta,\varphi)$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца $\vec{\nabla}^2 U_{LM} + k^2 U_{LM} = 0$. Используя оператор момента количества движения $\vec{L} = -i(\vec{r}\times\vec{\nabla})$, можно построить векторные потенциалы:

$$\vec{A}_{LM}^{E} = -\frac{1}{k}\vec{\nabla}\times\vec{L}U_{LM}, \quad \vec{A}_{LM}^{M} = l\vec{L}U_{LM}.$$

Показать, что оба потенциала удовлетворяют уравнению

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}} - k^2\vec{\mathrm{A}} = 0.$$

10. Зависящее от времени уравнение Шредингера имеет вид:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} + V(r)\right]\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} .$$

Положим, $\Psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t)\cdot e^{iS(\vec{r},t)/\hbar}$. Показать, что такое представление Ψ приводит к двум уравнениям (отдельно для реальной и мнимой части):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\vec{\nabla}^2 A}{A},$$

$$m\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{A})(\vec{\nabla}\cdot\vec{S}) + \frac{A}{2}\vec{\nabla}^2 S = 0.$$

В квантовой механике плотность вероятности обнаружить частицу в данной точке пространства ρ определяется величиной A^2, а плотность тока $\vec{J}$ – величиной $\left(\dfrac{A^2}{m}\vec{\nabla}\vec{S}\right)$. Показать, что второе из записанных уравнений эквивалентно уравнению непрерывности:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

11. Пусть Ψ – скалярная функция, показать, что она удовлетворяет уравнению:

$$(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\Psi = r^2\vec{\nabla}^2\Psi - r^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - 2r\frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

1.10. Интегрирование векторов

Вслед за дифференцированием векторов рассмотрим интегрирование векторов. При этом начнем с линейного интегрирования, а затем перейдем к поверхностным и объемным интегралам. В каждом из этих случаев интеграл от вектора будет сводиться к интегралу от скалярных функций. Используя приращение длины $d\vec{r}$, можно определить линейные интегралы:

$$a)\ \int_C \varphi d\vec{r}, \qquad б)\ \int_C \vec{V}\cdot d\vec{r}, \qquad в)\ \int_C \vec{V}\times d\vec{r}. \qquad (1.85)$$

Здесь интегрирование ведется по некоторому контуру C, открытому или замкнутому.

$$a)\ \int_C \varphi d\vec{r} = \vec{i}\int_C \varphi(x,y,z)dx + \\ +\vec{j}\int_C \varphi(x,y,z)dy + \vec{k}\int_C \varphi(x,y,z)dz. \qquad (1.86)$$

Такое разбиение первоначального интеграла возможно благодаря равенству

$$\int \vec{i}\,\varphi dx = \vec{i}\int \varphi dx, \qquad (1.87)$$

которое записано с учетом свойства единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, и $\vec{k}$, остающихся в прямоугольной системе координат постоянными по величине и направлению.

Три интеграла в правой части уравнения (1.86) представляют собой обычные скалярные интегралы и являются интегралами Римана. Однако интеграл по переменной x нельзя вычислять, не зная зависимости y и z от x (то же следует заметить и относительно интегралов от других переменных). Это говорит о необходимости точно определить контур интегрирования C. Если только подынтегральная функция не обладает специальными свойствами (в результате чего интеграл будет зависеть только от положения конечных точек контура), значение интеграла определяется особенностями выбора контура C. Например, для частного случая $\varphi = 1$ интеграл (1.85а) будет точным векторным расстоянием от начала контура *C* до его конечной точки. В этом случае значение интеграла не зависит от выбора пути интегрирования между фиксированными концами. При $d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ второй и третий интегралы, рассмотренные выше, тоже приводятся к интегралам от скалярных величин. Интеграл (1.85б) точно равен интегралу, который определяет работу, произведенную силой на заданном отрезке пути:

$$W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (1.88)$$

Пример:

Проинтегрируем скалярную функцию $r^2 = x^2 + y^2$ от начала координат до точки (1,1), используя приращение длины $d\vec{r}$ (рис. 15).

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)(\vec{i}\,dx + \vec{j}dy) = \vec{i} \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dx + \vec{j} \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dy =$$

(интегрирование проведем по контуру, изображенному на рис. 15)

$$= \vec{i} \int\limits_{(0,y=0)}^{x=1} (x^2 + y^2)dx + \vec{j} \int\limits_{(x=1,0)}^{y=1} (x^2 + y^2)dy = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}\frac{4}{3},$$

при контуре интегрирования $((0,0) \to (0,1) \to (1,1))$:

$$\vec{i} \int\limits_{(x=0,\,0)}^{1} \left(x^2 + y^2\right)dx + \vec{j} \int\limits_{(0,\,y=1)}^{1} (x^2 + y^2)dy = \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j},$$

интегрирование по контуру x=y приводит к значению:

$$\vec{i} \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dx + \vec{j}\int (x^2 + y^2)dy = \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}.$$

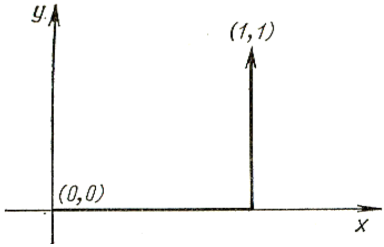


Рис. 15. Контур интегрирования

Таким образом, значение интеграла зависит от выбора контура C, вдоль которого производят интегрирование.

Поверхностные интегралы записываются так же, как и линейные, только $d\vec{r}$ заменяют вектором $d\vec{\sigma}$. Часто этот элемент поверхности записывают в виде $\vec{n}dA$, где $\vec{n}$ – единичный (нормальный) вектор положительного направления (рис. 16).

Имеется два варианта выбора положительного направления. Если поверхность замкнута, условимся называть положительным направление из объема, ограниченного этой поверхностью. Для открытых поверхностей будем считать, что положительное направление зависит от направления обхода периметра этой поверхности. Если пальцы правой руки расположить в направлении обхода по границе поверхности, то направление большого пальца совпадает с положительным направлением.

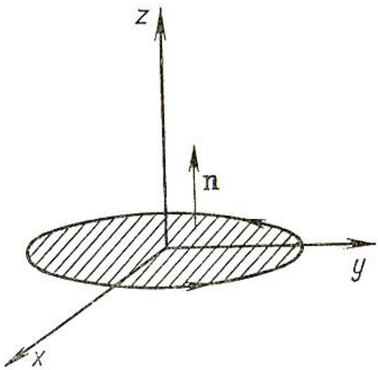


Рис. 16. Правило правой руки при выборе положительного направления

Поверхностный интеграл $\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$ можно интерпретировать как поток через данную поверхность.

Объемные интегралы несколько проще, так как элемент объема $d\tau$ – скаляр.

$$\int_V \vec{V} d\tau = \vec{i} \int_V V_x d\tau + \vec{j} \int_V V_y d\tau + \vec{k} \int_V V_z d\tau. \qquad (1.89)$$

С помощью поверхностных и объемных интегралов можно определить дифференциальные соотношения иначе:

$$\vec{\nabla} \varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \varphi d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \qquad (1.90)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \qquad (1.91)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int d\vec{\sigma} \times \vec{V}}{\int d\tau}. \qquad (1.92)$$

В этих уравнениях $\int d\tau$ – некоторый малый объем пространства, $d\vec{\sigma}$ – векторный элемент поверхности этого объема. Покажем теперь, что выражение (1.90) в действительности соответствует ранее введенной уравнением (1.53) величине $\vec{\nabla} \varphi$. Для простоты заменим $\int d\tau$ дифференциальным объемом *dxdydz* и поместим начало координат в геометрический центр этого элемента объема (рис. 17).

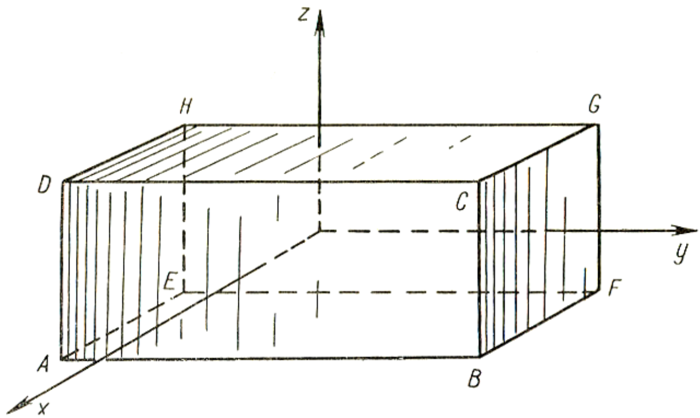


Рис. 17. Дифференциальный прямоугольный параллелепипед

Поверхностный интеграл сводится к шести интегралам по каждой из шести граней параллелепипеда. Вектор $d\vec{\sigma}$ направлен наружу, $\Rightarrow$ имеем $d\vec{\sigma}\cdot\vec{i} = -\left|d\vec{\sigma}\right|$ для поверхности $EFGH$ и $\left|d\vec{\sigma}\right|$ для поверхности $ABCD$, поэтому

$$\int \varphi\vec{\sigma} = -i\int\limits_{EFGH}(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydz + \vec{i}\int\limits_{ABCD}(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydz -$$

$$-\vec{j}\int\limits_{AEHD}(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2})dxdz + \vec{j}\int\limits_{\mathbf{BFGC}}(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2})dxdz - \tag{1.93}$$

$$-\vec{k}\int\limits_{AEFB}(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{2})dxdy + \vec{k}\int\limits_{DCGH}(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2})dxdy =$$

$$= (\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z})dxdydz.$$

Поделив полученное выражение на $\int d\tau = dxdydz$, убеждаемся в справедливости (1.90).

При доказательстве мы пренебрегли поправочными членами, содержащими производные более высокого порядка. Дополнительные члены в связи с рассмотрением ряда Тейлора исчезают в пределе

$$\int d\tau \to 0 \quad (dx \to 0, \quad dy \to 0, \quad dz \to 0).$$

Для более строгой проверки уравнений (1.90), (1.91) и (1.92) необходимо совершить указанный предельный переход.

Задачи

1. Найти неопределенный интеграл от вектор-функции

$$\vec{a}(t) = \vec{i}\cos t + \vec{j}e^{-t} + \vec{k}.$$

2. Найти интегралы от следующих вектор-функций:

а) $\vec{a}(t) = te^t\vec{i} + \sin^2 t\,\vec{j} - \dfrac{1}{1+t^2}\vec{k};$

б) $\vec{a}(t) = \dfrac{t}{1+t^2}\vec{i} + t\,e^{t^2}\vec{j} + \cos t\,\vec{k};$

в) $\vec{a}(t) = \cos t\,e^{\sin t}\,\vec{i} - t\cos t^2\,\vec{j} + \vec{k};$

г) $\vec{a}(t) = \dfrac{1}{2}t^2\,\vec{i} - t\sin t\,\vec{j} + 2^t\vec{k}.$

3. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi} \vec{a}(t)\,dt,$ где $\vec{a} = \sin^2 t\cos t\,\vec{i} + \cos^2 t\sin t\,\vec{j} + \vec{k};$

б) $\int\limits_0^{1} \vec{a}(t)\,dt,$ где $\vec{a} = \dfrac{e^{-i/2}}{2}\vec{i} + \dfrac{e^{i/2}}{2}\vec{j} + e^t\vec{k};$

в) $\int\limits_0^{1} \vec{a}(t)\,dt,$ где $\vec{a} = 3\pi\cos\pi t\,\vec{i} - \dfrac{1}{1+t}\vec{j} + 2t\,\vec{k};$

г) $\int\limits_0^1 \vec{a}(t)\,dt,$ где $\vec{a} = (2t+\pi)\vec{i} + t\sin t\ \vec{j} + \pi\vec{k}.$

4. Поле сил, действующих на двумерный линейный осциллятор, можно записать как $\vec{F} = -\vec{i}kx - \vec{j}ky$. Сравнить работу, которая совершается при движении от точки (1,1) до точки (4,4) в поле этих сил в случае трех различных путей перемещения:

а) (1,1) $\rightarrow$ (4,1) $\rightarrow$ (4,4);
б) (1,1) $\rightarrow$ (1,4) $\rightarrow$ (4,4);
в) x=y.

Для этого оценить интеграл $-\int\limits_{(1,1)}^{(4,4)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

5. Задано поле сил

$$\vec{F} = -\frac{\vec{i}y}{x^2+y^2} + \frac{\vec{j}x}{x^2+y^2}.$$

Определить работу, совершаемую при движении по окружности единичного радиуса:
а) против часовой стрелки от 0 до π;
б) по часовой стрелке от 0 до $-\pi$.

6. Вычислить интеграл $\frac{1}{3}\int\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$, взятый по поверхности единичного куба, который определен точкой (0,0) и единичными отрезками в положительных направлениях осей *x*, *y* и *z*. Для трех граней $\vec{r}\cdot d\vec{\sigma} = 0$, а каждая из оставшихся граней вносит в интеграл одинаковый вклад.

7. Доказать, что $\lim\limits_{\int d\tau\to 0} \dfrac{\int\limits_S d\vec{\sigma}\times\vec{V}}{\int\limits_S d\tau} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$.

Замечание. При доказательстве пользоваться элементарным объемом *dxdydz*.

8. Найти работу, которая совершается при перемещении из точки (1,1) в точку (3,3). Приложенная сила равна $\vec{F} = \vec{i}\,(x - y) + \vec{j}\,(x + y)$. Определить точно путь перемещения. Заметим, что эта сила неконсервативна.

1.11. Теорема Гаусса

Пусть заданы $\vec{V}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$, непрерывные во всей интересующей нас области. Теорема Гаусса утверждает, что

$$\int_S \vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{V}d\tau. \qquad (1.94)$$

Под $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ можно понимать количество жидкости, вытекшей из единичного объема. Следовательно, правая часть уравнения (1.94) равна полному количеству жидкости, вытекшей из объема V, по которому ведется интегрирование. Убеждаясь, что левая часть уравнения описывает поток жидкости через поверхность S, которая ограничивает данный объем, мы тем самым доказываем теорему Гаусса. Более детальное и математически строгое доказательство теоремы Гаусса можно найти в литературе, рекомендованной в конце данного пособия.

Из теоремы Гаусса вытекает одно полезное следствие, известное как *теорема Грина*. Если *u* и *v* – две скалярные функции, то имеем:

$$\vec{\nabla}\cdot(u\vec{\nabla}v) \equiv u\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v + (\vec{\nabla}u)\cdot(\vec{\nabla}v), \qquad (1.95)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(v\vec{\nabla}u) \equiv v\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u + (\vec{\nabla}v)\cdot(\vec{\nabla}u). \qquad (1.96)$$

Вычитая (1.96) из (1.95), интегрируя по объему (*u*, *v* и их производные предполагаются непрерывными) и применяя формулу (1.94) (теорему Гаусса), получаем теорему Грина:

$$(\int_V (u\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u)d\tau = \int_S (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)\cdot d\vec{\sigma}. \qquad (1.97)$$

Уравнение (1.95) допускает иную запись:

$$\int_S u\vec{\nabla}v\cdot d\vec{\sigma}=\int_V u\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}v d\tau+\int_V \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v d\tau. \qquad (1.98)$$

Несмотря на то, что выражение (1.94), содержащее дивергенцию, является важной формой записи теоремы Гаусса, может встретиться и такая форма этой теоремы, когда объемные интегралы будут содержать градиент и ротор. Предположим, что

$$\vec{V}(x,y,z)=V(x,y,z)\cdot\vec{a}, \qquad (1.99)$$

где $\vec{a}$ – постоянный по абсолютной величине и направлению вектор (направление выбрано произвольно, но выбранное направление затем всегда остается фиксированным).

С помощью соотношения (1.62a) уравнение (1.94) в этом случае перепишется так:

$$\vec{a}\int_V V d\vec{\sigma}=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{a}V d\tau=\vec{a}\int_V \vec{\nabla}V d\tau, \qquad (1.100)$$

$$\vec{a}\cdot\left[\int_S V d\vec{\sigma}-\int_V \vec{\nabla}V d\tau\right]=0. \qquad (1.101)$$

$$|\vec{a}|\neq 0, \quad \Rightarrow \quad \int_S V d\vec{\sigma}=\int_V \vec{\nabla}\cdot V d\tau. \qquad (1.102)$$

Аналогично, считая, что $\vec{V}=\vec{a}\times\vec{P}$ ($\vec{a}$ – постоянный вектор), легко доказать

$$\int_S d\vec{\sigma}\times\vec{P}=\int_V \vec{\nabla}\times\vec{P}d\tau. \qquad (1.103)$$

1.12. Теорема Стокса

Теорема Гаусса связывает объемный интеграл от дивергенции некоторой функции с интегралом по замкнутой поверхности, ограничивающей объем, от той же функции.

Теперь рассмотрим аналогичное соотношение между поверхностным интегралом от дивергенции некоторой функции и линейным интегралом от той же функции, причем линейное интегрирование ведется по периметру заданной поверхности. С этой целью преобразуем поверхностный интеграл от ротора, применив для этой цели к подынтегральной функции формулу смешанного произведения:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{\sigma} = \int_S \Big(\frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z + \frac{\partial V_y}{\partial x} d\sigma_z -$$

$$- \frac{\partial V_y}{\partial z} d\sigma_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} d\sigma_x - \frac{\partial V_z}{\partial x} d\sigma_y\Big). \tag{1.104}$$

Данный поверхностный интеграл берется по некоторой заданной поверхности S. Ориентируем оси декартовой системы координат так, чтобы поверхность пересекала плоскость x=c по линии *AB* (рисунок 18). Положительное направление на этой линии соответствует направлению от *A* к *B*, направление $d\vec{\sigma}$ указано на рисунке 18. В частности, как показано на рисунке 19,

$$d\sigma_y = dxdy,\ \ d\sigma_z = -dxdy. \tag{1.105}$$

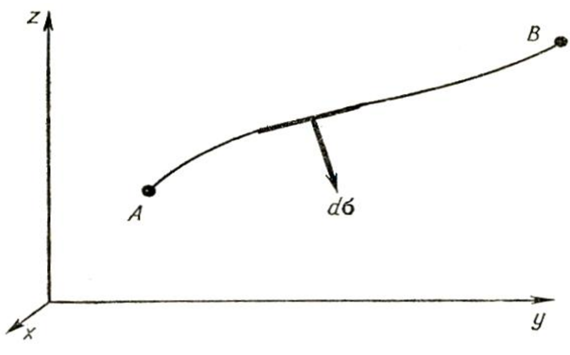


Рис. 18.

Приращение *dx* соответствует поверхности, заключенной между плоскостями *x=c* и *x=c+dx*. Интегрируя производные от V_x по указанному приращению поверхности, получаем:

$$\int_S \left(\frac{dV_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{dV_x}{\partial y} d\sigma_z\right) = \int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz\right) dx. \qquad (1.106)$$

Поскольку x остается постоянным при интегрировании от A до B, то

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz = dV_x \qquad (1.107)$$

или

$$\int dx \int_A^B dV_x = \int V_x(x, y_B, z_B) dx - \int V_x(x, y_A, z_A) dx. \quad (1.107а)$$

Указанный выбор направления при обходе границы области означает, что $dx = d\lambda_x$ – в направлении к точке В и $dx = -d\lambda_x$ – в направлении к А, где $d\vec{\lambda}$ – вектор приращения длины вдоль периметра.

$$\int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z\right) = \oint V_x \cdot d\vec{\lambda}_x. \qquad (1.108)$$

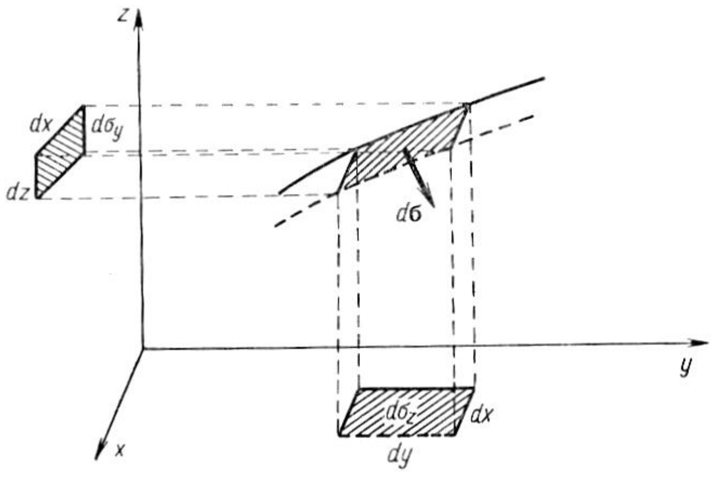


Рис. 19.

Символом $\oint$ обозначено интегрирование по замкнутому пути, в данном случае по периметру заданной поверхности. Для других координат получаются такие же выражения, поэтому окончательно

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{V}\cdot d\vec{\sigma} = \oint (V_x d\lambda_x + V_y d\lambda_y + V_z d\lambda_z) = \oint \vec{V}\cdot d\vec{\lambda}. \qquad (1.109)$$

Это и есть *теорема Стокса*.

С помощью теоремы Стокса можно установить дополнительные соотношения между поверхностными и линейными интегралами:

$$\int_S d\vec{\sigma}\times\vec{\nabla}\varphi = \oint \varphi d\vec{\lambda}, \qquad (1.110)$$

$$\int_S (d\vec{\sigma}\times\vec{\nabla})\times\vec{\mathrm{P}} = \oint d\vec{\lambda}\times\vec{\mathrm{P}}. \qquad (1.111)$$

В справедливости (1.110) легко убедиться подстановкой в (1.109) $\vec{V} = \vec{a}\cdot\varphi$, где $\vec{a}$ – вектор, постоянный по величине и направлению:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{a}\varphi)\cdot d\vec{\sigma} = -\int_S (\vec{a}\times\vec{\nabla}\varphi) d\vec{\sigma} = -\vec{a}\int_S \vec{\nabla}\varphi\times d\vec{\sigma}. \qquad (1.112)$$

Для линейного интеграла

$$\oint \vec{a}\varphi\cdot d\vec{\lambda} = \vec{a}\cdot\oint \varphi d\vec{\lambda} \qquad (1.113)$$

поэтому

$$\vec{a}(\int_S \vec{\nabla}\varphi\times d\vec{\sigma} + \oint \varphi d\vec{\lambda}) = 0. \qquad (1.114)$$

Поскольку направление $\vec{a}$ произвольно, выражение в круглых скобках равно нулю. Аналогично доказывается соотношение (1.111), в котором нужно положить $\vec{V} = \vec{a}\times\vec{\mathrm{P}}$.

Вернемся к уравнению (1.109), в котором член $\oint \vec{V}\cdot d\vec{\lambda}$ можно рассматривать как поток жидкости, циркулирующей по замкнутому контуру. Если в качестве поверхности выбрать круг площадью $\vec{k}d\sigma$, то $\left|\vec{\nabla}\times\vec{V}\right|d\sigma$ – равно циркуляции вектора вдоль замкнутого контура площадью $d\vec{\sigma}$ в плоскости *xy*. Это позволяет измерить ротор вектора $\vec{V}$ вращением небольшого гребного винта. Если винт не вращается, циркуляция равна нулю, и, следовательно, на основании теоремы Стокса, вектор $\vec{V}$ – безвихревой.

Задачи

1. Вычислить поток поля вектора $\vec{F}(M)=x^3\,\vec{i}+y^3\,\vec{j}+z^3\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2. Вычислить поток поля напряженности $\vec{E}=\dfrac{q\overline{r}}{\vec{r}^{\,3}}$ точечного заряда q через замкнутую поверхность S, не содержащую внутри себя заряда q.

3. Вычислить поток поля вектора $\vec{F}(M)=xy^2\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+z\vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную координатными плоскостями $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ и частью поверхности параболоида $4-z=x^2+y^2,$ лежащей в первом октанте.

4. Даны точки $A(1;0;0),\ \ B(0;2;0),\ \ C(0;0;3)$ и поле $\vec{F}=(x+y^2)\,\vec{i}+(y+z^2)\,\vec{j}+(z+x^2)\vec{k}.$ Найти поток поля $\vec{F}$ через площади треугольников *OBC*, *OAC* и *OAB*. Найти поток поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды *OABC*.

5. Доказать теорему Стокса в форме (1.111).

6. Пусть $\vec{t}\,=-\vec{i}\,y+\vec{j}x$. Используя теорему Стокса, показать, что интеграл вдоль непрерывной замкнутой кривой в плоскости *xy* равен

$$\frac{1}{2}\oint\vec{t}\cdot d\vec{\lambda}=\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx)=A,$$

где *A* – площадь поверхности, ограниченной этой кривой.

7. Интегрированием по периметру поверхности, расположенной в плоскости *xy,* показать, что по абсолютной величине интеграл $\oint \vec{r} \times d\vec{r}$ вдвое больше самой поверхности.

8. Показать, что $\int\limits_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = 0$, если S – замкнутая поверхность.

9. Доказать соотношения

$$\oint U\vec{\nabla}V \cdot d\vec{\lambda} = -\oint V\vec{\nabla}U \cdot d\vec{\lambda},$$

$$\oint U \cdot \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\lambda} = \int\limits_S (\vec{\nabla}U) \times (\vec{\nabla}V) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Контрольные вопросы к главе 1

1. Найти центр тяжести системы трех материальных точек $\mathrm{M}_1(\vec{r}_1)$, $\mathrm{M}_2(\vec{r}_2)$, $\mathrm{M}_3(\vec{r}_3)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, m_3, зная, что центр тяжести двух масс лежит на линии, соединяющей эти массы, и делит ее в отношении, обратно-пропорциональном массам.

2. Доказать, что вектор $\vec{x} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

3. Какой угол составляют между собой два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярен вектору $7\vec{a} - 5\vec{b}$, а вектор $\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярен вектору $7\vec{a} - 2\vec{b}$?

4. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Показать, что линейная скорость $\vec{v}$ соленоидальна.

5. Найти, чему равно $(\vec{c} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$, где $\vec{r}$ есть радиус-вектор.

6. Вычислить $\mathrm{rot}\,(\vec{b}(\vec{r} \cdot \vec{a}))$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы.

7. Доказать теорему Гаусса в форме $\int\limits_S V\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \int\limits_V \vec{\nabla}V\,\mathrm{d}\tau.$

8. Доказать теорему Гаусса в форме $\int\limits_S \mathrm{d}\vec{\sigma} \times \vec{\mathrm{P}} = \int\limits_V \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}\tau.$

9. Доказать теорему Стокса в форме $\int\limits_S \mathrm{d}\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}\varphi = \oint \varphi\,\mathrm{d}\vec{\lambda}.$

Глава 2
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В главе 1 мы почти целиком ограничились декартовой системой координат, в которой предполагалось, что единичные векторы постоянны. Мы ввели радиус-вектор. Однако не все физические задачи успешно решаются в декартовой системе. Например, для центральных сил (таких, как гравитационные или электростатические) декартовы координаты могут оказаться крайне неудобными, поэтому пользуются такой системой, в которой одной из координат служит расстояние в радиальном направлении.

Систему координат следует выбирать из условия наилучшего соответствия поставленной задаче, используя различные условия и симметрию, характерные для рассматриваемой проблемы. Правильный выбор системы координат позволяет быстрее получить решение, т.е. дифференциальное уравнение в частных производных в новой системе можно свести к дифференциальным уравнениям первого порядка методом разделении переменных.

Рассмотрим сначала координаты, в которых уравнение

$$\vec{\nabla}^2\Psi + k^2\Psi = 0 \tag{2.1}$$

допускает разделение переменных.

Уравнение (2.1) имеет гораздо более общий смысл, чем это может показаться с первого взгляда:

1) при $k^2 = 0$ оно представляет собой уравнение Лапласа;

2) при $k^2 = (+)\cdot const$ – уравнение Гельмгольца;

3) при $k^2 = (-)\cdot const$ – уравнение диффузии (пространственная часть);

4) при $k^2 = const \times$ кинетическая энергия – волновое уравнение Шредингера.

2.1. Криволинейные координаты

Декартовы координаты образуются тремя семействами взаимно перпендикулярных плоскостей: x=*const*, y=*const*, и z=*const*. Представим себе, что мы наложили на эту систему три других семейства поверхностей. Поверхности любого из этих семейств не параллельны друг другу, и, кроме того, они не должны быть плоскостями. Все три новых семейства поверхностей не должны быть взаимно перпендикулярными, однако для простоты мы опустим это условие. Положение любой точки можно задать пересечением трех плоскостей в декартовой системе или пересечением трех поверхностей, которые образуют новую систему криволинейных координат. Полагая поверхности криволинейных координат

$$q_1 = const, q_2 = const, q_3 = const,$$

мы тем самым фиксируем положение заданной точки координатами (q_1, q_2, q_3) так же, как и координатами (x_1, x_2, x_3). Это означает, что в принципе можно записать:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2 q_3), z = z(q_1, q_2, q_3). \qquad (2.2)$$

Возможна и обратная зависимость:

$$q_1 = q_1(x, y.z), q_2 = q_2(x, y, z), q_3 = q_3(x, y, z). \qquad (2.3)$$

Каждому семейству поверхностей $q_i = const$ можно поставить в соответствие единичный вектор $\vec{a}_i$, нормальный к поверхности $q_i = const$ и направленный в сторону возрастания q_i.

Квадрат расстояния между двумя точками вычисляется по формуле:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{ij} h_{ij}{}^2 dq_i dq_j. \qquad (2.4)$$

Коэффициенты h_{ij} называют коэффициентами Ламе; их можно рассматривать как некие параметры, характеризующие заданную систему координат q_1, q_2, q_3. Совокупность коэффициентов Ламе определяет *метрику* системы координат.

Чтобы определить h_{ij}^2, продифференцируем уравнения (2.2):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3, \qquad (2.5)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3;$$

$$dx^2 = \sum_{ij} \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_i dq_j,$$

$$dy^2 = \sum_{ij} \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} dq_i dq_j,$$

$$dz^2 = \sum \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} dq_i dq_j.$$

Подставляя полученные выражения в (2.4), получаем:

$$ds^2 = \sum_{ij} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j,$$

(2.6)

$$h_{ij}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}.$$

Ограничимся *ортогональными* системами координат (взаимно перпендикулярные поверхности). Математически это означает, что

$$h_{ij} = 0,\ i \neq j\ . \tag{2.7}$$

Чтобы упростить обозначения, положим $h_{ii} = h_i$, тогда

$$ds^2 = \left(h_1 dq_1\right)^2 + \left(h_2 dq_2\right)^2 + \left(h_3 dq_3\right)^2 . \tag{2.8}$$

В последующих разделах каждая система координат будет определяться заданием коэффициентов Ламе. И, наоборот, для любого заданного dq_i, полагая остальные q постоянными, эти величины удобно определять с помощью соотношения

$$ds_i = h_i dq_i\ . \tag{2.9}$$

Криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 безразмерны. Коэффициенты Ламе могут зависеть от q и могут иметь размерность. Произведение $h_i dq_i$ может иметь размерность длины.

Из соотношения (2.9) немедленно получаются элементы поверхности и объема

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j\ , \tag{2.10}$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3\ . \tag{2.11}$$

Выражения (2.10), (2.11) полностью согласуются с законом преобразования (2.2).

Задачи

1. Показать, что требованию ортогональности системы координат соответствует условие (2.7).

2. Показать, что якобиан $J\left(\dfrac{x, y, z}{q_1, q_2, q_3}\right) = h_1 h_2 h_3$ и, следовательно, элемент объема

$$J\left(\frac{x, y, z}{q_1, q_2, q_3}\right) dq_1 dq_2 dq_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

в согласии с (2.11).

2.2. Дифференциальные векторные операторы

В основу рассмотрения операторов градиента, дивергенции и ротора в криволинейных координатах мы положили определение градиента некоторой функции как вектора, имеющего абсолютную величину и направление максимальной скорости изменения этой функции в пространстве (см. разд. 1.6).

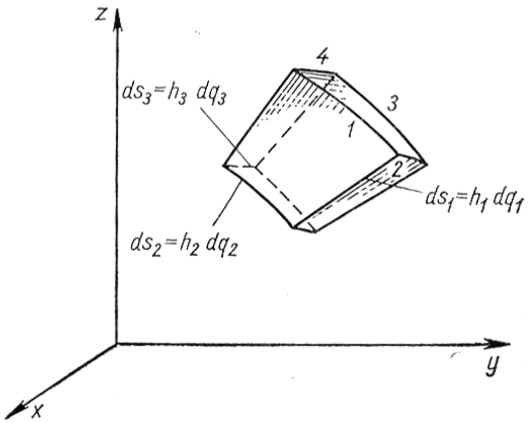


Рис. 20. Криволинейный элемент объема

Тогда компонента $\vec{\nabla}\Psi(q_1, q_2, q_3)$ в направлении, нормальном к семейству поверхностей (рис. 20), задается в виде:

$$\vec{\nabla}\Psi\big|_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial S_1} = \frac{\partial\Psi}{h_1 dq_1} \qquad (2.12)$$

(q_2 и q_3 фиксированы). Величина dS_1 – приращение длины в направлении увеличения q_1. В разд. 2.1 был введен единичный вектор $\vec{a}_1$ для указания этого направления. Получив выражение (2.12) для других компонент и векторно сложив их, представим градиент в виде:

$$\vec{\nabla}\Psi(q_1,q_2,q_3)=\vec{a}_1\frac{\partial\Psi}{\partial S_1}+\vec{a}_2\frac{\partial\Psi}{\partial S_2}+\vec{a}_3\frac{\partial\Psi}{\partial S_3}=$$

$$=\vec{a}_1\frac{\partial\Psi}{h_1\partial q_1}+\vec{a}_2\frac{\partial\Psi}{h_2\partial q_2}+\vec{a}_3\frac{\partial\Psi}{h_3\partial q_3}. \qquad (2.13)$$

Оператор дивергенции можно получить, используя уравнение (1.91) (теорему Гаусса):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(q_1,q_2,q_3)=\lim_{\int d\tau\to 0}\frac{\int\vec{V}d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \qquad (2.14)$$

где в качестве элемента объема взято произведение $h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3$. Положительные направления выбраны так, что $q_1q_2q_3$ или $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ образуют правую систему.

Как и в разд. 1.7 и 1.10, интегрирование по двум поверхностям $q_1=const_1$ и $(q_1\in dq_1)=const_2$ дает:

$$\left[V_1h_2h_3+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(V_1h_2h_3\right)dq_1\right]dq_2dq_3-V_1h_2h_3dq_2dq_3=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(V_1h_2h_3\right)dq_1dq_2dq_3. \qquad (2.15)$$

Здесь мы ограничимся дифференциалом первого порядка, так как если рассматривать предел при $dq_1dq_2dq_3\to 0$, то

$$\left[V_1h_2h_3+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(V_1h_2h_3\right)dq_1+\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\left(V_1h_2h_3\right)dq_1^2+...\right]dq_2dq_3-$$

$$-V_1h_2h_3dq_2dq_3=\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(V_1h_2h_3\right)+\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\left(V_1h_2h_3\right)dq_1+...\right]dq_1dq_2dq_3.$$

Поделив это выражение на элемент объема и переходя к пределу, видим, что коэффициенты при дифференциалах второго и более высокого порядка $\left(dq_1\right)^{n-1}$ обращаются в нуль.

Добавляя аналогичные результаты для двух других пар поверхностей, получаем:

$$\int \vec{V}\left(q_1, q_2, q_3\right) d\vec{\sigma} = \tag{2.16}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(V_1 h_2 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(V_2 h_1 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(V_3 h_1 h_2\right)\right] dq_1 dq_2 dq_3.$$

После деления на элементарный объем имеем:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\left(q_1, q_2, q_3\right) =$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(V_1 h_2 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(V_2 h_1 h_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(V_3 h_1 h_2\right)\right], \tag{2.17}$$

где V_i – проекция $\vec{V}$ на направление $\vec{a}_i$, т.е. $V_i = \vec{a}_i \cdot \vec{V}$. Комбинируя уравнения (2.13) и (2.17), получаем лапласиан:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi\left(q_1, q_2, q_3\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3}\right) \end{array}\right]. \tag{2.18a}$$

С помощью теоремы Стокса выпишем в явном виде $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ и перейдем к пределу, устремив к нулю площадь поверхности. Рассмотрим дифференциальный элемент поверхности на криволинейной поверхности $q_1 = const$.

Из

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{\sigma} = \vec{\nabla} \times \vec{V}\Big|_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 \qquad (2.18б)$$

согласно теореме Стокса

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}\Big|_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \oint \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}\,. \qquad (2.19)$$

Здесь линейный интеграл взят по контуру, лежащему на поверхности $q_1 = const$.

$$\oint V(q_1, q_2, q_3) \cdot d\vec{\lambda} = V_2 h_2 dq_2 +$$
$$+\left[V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(V_3 h_3\right) dq_2\right] dq_3 -$$
$$-\left[V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(V_2 h_2\right) dq_3\right] dq_2 - V_3 h_3 dq_3 = \qquad (2.20)$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_3 V_3\right) - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_2 V_2\right)\right] dq_2 dq_3.$$

На участках пути 1 и 2 выбран знак плюс, тогда как на участках 3 и 4 взят знак минус (рис. 21), поскольку во втором случае обход совершается в отрицательном направлении.

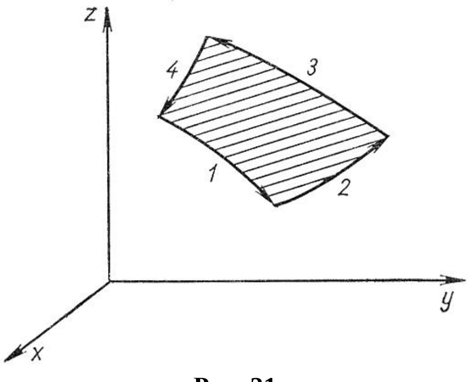


Рис. 21.

Из формулы (2.19) получаем:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}\Big|_1=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_3V_3\right)-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_2V_2\right)\right]. \qquad (2.21)$$

Остальные две компоненты можно получить циклической перестановкой индексов:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{bmatrix}\vec{a}_1h_1 & \vec{a}_2h_2 & \vec{a}_3h_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3\end{bmatrix}. \qquad (2.22)$$

Задачи

1. Пусть $\vec{a}_1$ – единичный вектор в направлении возрастания q_1. Показать что

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{\partial\left(h_2h_3\right)}{\partial q_1},\vec{\nabla}\times\vec{a}_1=\frac{1}{h_1}\left[\vec{a}_2\frac{\partial h_1}{h_3\partial q_3}-\vec{a}_3\frac{\partial h_1}{h_2\partial q_2}\right].$$

2. Показать, что ортогональные единичные векторы $\vec{a}_i$ можно определить как $\vec{a}_i=\dfrac{1}{h_i}\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$. В частности, доказать, что условие $\vec{a}_i\cdot\vec{a}_i=1$ приводит к выражению для h_i, которое согласуется с уравнением (2.6).

3. Обосновать утверждение, что обычное скалярное и векторное произведения (не содержащие оператор $\vec{\nabla}$) в ортогональных криволинейных координатах раскрываются точно так же, как и в декартовых, и *не содержат* коэффициентов Ламе.

4. Используя векторное тождество

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}=\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}),$$

получить в криволинейных координатах векторный лапласиан $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}$.

2.3. Декартовы (прямоугольные) координаты

В декартовой системе координат

$$h_1 = h_x = 1, \; h_2 = h_y = 1, \; h_3 = h_z = 1.$$

Декартова система – единственная, в которой все коэффициенты Ламе постоянны.

Это обстоятельство будет особенно важным при рассмотрении тензоров в главе 3.

Исходя из уравнений (2.13), (2.17), (2.18) и (2.22), можно получить результаты, рассмотренные в главе 1:

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{2.24}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{2.25}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \tag{2.26}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

2.4. Сферические координаты

Основные семейства поверхностей сферической системы координат:

1. Концентрические сферы с общим центром в начале координат:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = const.$$

2. Концентрические поверхности прямых круговых конусов с полярной осью z и вершинами в начале координат:

$$\theta = ark\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = const.$$

3. Полуплоскости, проходящие через ось z:

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = const\,.$$

В силу произвольного выбора полярного угла θ и азимутального угла φ все привязки производят относительно оси z.

Связь с декартовой системой координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta\,. \tag{2.28}$$

$$0 \le r\angle\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi.$$

Из уравнения (2.6)

$$h_1^2 = h_{11}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 =$$

$$= \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = 1$$

$$h_2^2 = h_{22}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 =$$

$$= r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$$\tag{2.29}$$

$$h_3^2 = h_{33}^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = r^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow h_1 = h_r = 1,\ h_2 = h_\theta = r,\ h_3 = h_\varphi = r\sin\theta.$$

Единичные векторы $\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0$ меняют направление, которое определено углами θ и φ (рис. 22).

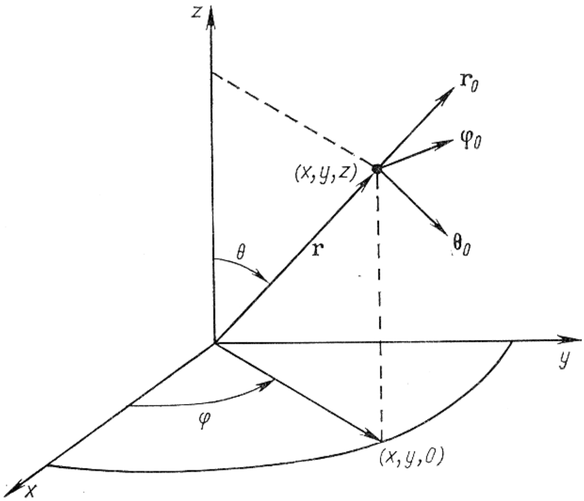


Рис. 22. Сферические координаты

Эти единичные векторы выражаются через фиксированные единичные векторы декартовой системы координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{r}_0 = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta,$$

$$\vec{\theta}_0 = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{k}\cos\varphi\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta,$$

$$\vec{\varphi}_0 = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Полагая в разделе 2.2

$$\vec{a}_1 = \vec{r}_0,\ \vec{a}_2 = \vec{\theta}_0,\ \vec{a}_3 = \vec{\varphi}_0,$$

получаем основные соотношения

$$(2.13) \Rightarrow \vec{\nabla}\Psi = \vec{r}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \qquad (2.30)$$

$$(2.17) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \\ + r \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta V_\theta\right) + r \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \end{bmatrix}, \qquad (2.31)$$

$$(2.18a) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Psi = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) + \\ + \dfrac{1}{\sin\theta} \cdot \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \end{bmatrix}, \qquad (2.32)$$

$$(2.22) \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_0 & r\vec{\theta}_0 & r \sin\theta \cdot \vec{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin\theta V_\varphi \end{bmatrix}. \qquad (2.33)$$

Иногда требуется записать векторный лапласиан $\vec{\nabla}^2\vec{V}$ в сферических координатах. Это можно сделать с помощью векторного тождества (1.80):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right):$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{V}\Big|_r = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}+ \\ +\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{pmatrix}\cdot V_r +$$

$$+\left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot V_\theta+\left(-\frac{2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot V_\varphi = \tag{2.34}$$

$$=\vec{\nabla}^2 V_r-\frac{2}{r^2}V_r-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}V_\theta-\frac{2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{V}\Big|_\theta=\vec{\nabla}^2 V_\theta-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2\vec{V}\Big|_\varphi=\vec{\nabla}^2 V_\varphi-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}&+\\ +\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}&.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Задачи

1. Выразить единичные векторы сферической системы координат через декартовы.
2. Получить формулы обратного преобразования:

$$\vec{i}=\vec{r}_0\sin\theta\cos\varphi+\vec{\theta}_0\cos\theta\cos\varphi-\vec{\varphi}_0\sin\varphi,$$

$$\vec{j}=\vec{r}_0\sin\theta\sin\varphi+\vec{\theta}_0\cos\theta\sin\varphi+\vec{\varphi}_0\cos\varphi,$$

$$\vec{k}=\vec{r}_0\cos\theta-\vec{\theta}_0\sin\varphi.$$

3. Частица перемещается в пространстве. Найти компоненты ее скорости и ускорения в сферической системе координат:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0 + \vec{\theta}_0 \cdot r + \vec{\varphi}_0 r \sin\theta,$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_0 \cdot \dot{r} + \vec{\theta}_0 r\dot{\theta} + \vec{\varphi}_0 r \sin\theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$v_r = \dot{r},\ v_\theta = r\dot{\theta},\ v_\varphi = r\sin\theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin\theta \cdot \dot{\varphi}^2,$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta - r\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = r\sin\theta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\sin\theta \cdot \dot{\varphi} + 2r\cos\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}.$$

4. Движение частицы с массой m под действием центральных сил определяется вторым законом Ньютона $m\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_0 f\left(\vec{r}\right)$. Показать, что $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{c} = const$ и геометрическое толкование этого факта приводит ко второму закону Кеплера.

5. Выразить $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ в сферических координатах

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases}$$

6. Используя результаты упр. 5, получить формулу:

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Это – квантовый оператор, соответствующий z-компоненте момента количества движения.

7. Доказать эквивалентность трех форм $\vec{\nabla}^2\psi\left(r\right)$ (в сферических координатах):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2d\psi\left(r\right)}{dr}\right];\ \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\psi\left(r\right)\right],\quad \frac{d^2\psi(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}.$$

Вторая форма особенно удобна для проверки соответствия между постановкой задачи в сферических и декартовых координатах.

8. Пусть $\vec{\nabla}^2\psi=0$. Показать, что $\vec{\nabla}^2\vec{\nabla}^2\left(r^2\psi\right)=0$.

2.5. Разделение переменных

В декартовой системе уравнение Гельмгольца (2.1) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0. \qquad (2.42)$$

Ограничимся случаем $k^2=const$. Самый простой путь решения дифференциального уравнения в частных производных типа (2.42) состоит в том, чтобы свести его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого положим

$$\psi\left(x,y,z\right)=X\left(x\right)\cdot Y\left(y\right)\cdot Z\left(z\right), \qquad (2.43)$$

и подставим в (2.42). Мы вообще не знаем, справедливо ли представление искомого решения в виде (2.43). Но если наша попытка увенчается успехом, то представление в виде (2.43) подтвердится. В противном случае уравнение (2.42) следует решать с помощью функции Грина, интегральных преобразований или численных методов.

Положим, что представление (2.43) справедливо, подставим его в (2.42):

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2XYZ=0. \qquad (2.44)$$

Разделив на $\psi = XYZ$ и перегруппировав члены, получим:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}. \qquad (2.45)$$

Таким образом, переменные разделяются: левая часть уравнения зависит только от x, тогда как правая только от y и z. Поскольку x, y и z – независимые переменные, поведение x не может определяться поведением y и z. Следовательно, остается приравнять каждую часть уравнения некоторой постоянной, *постоянной разделения*.

$$\frac{1}{x}\frac{d^2X}{dx^2}=-l^2, \qquad (2.46)$$

$$-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-l^2, \qquad (2.47)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2+l^2-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}. \qquad (2.48)$$

Приравняем каждую часть уравнения (2.48) постоянной:

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-m^2, \qquad (2.49)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2+l^2+m^2=-n^2. \qquad (2.50)$$

Введенная постоянная n^2 позволяет получить симметричный набор трех обыкновенных уравнений (2.46), (2.49) и (2.50). В итоге, исходное предположение (2.43) оказалось оправданным.

Таким образом, запишем решение в виде:

$$\psi_{lmn}(x,y,z)=X_l(x)\cdot Y_m(y)\cdot Z_n(z), \qquad (2.50а)$$

где l,m,n – любые числа, удовлетворяющие условию $k^2=l^2+m^2+n^2$. Функция (2.50а) должна быть решением уравнения (2.1), если $X_l(x)$ – решение уравнения (2.46), $Y_m(y)$ – решение уравнения (2.49), $Z_n(z)$ – решение (2.50). Общий вид решения уравнения (2.1) можно представить как линейную комбинацию решений ψ_{lmn}:

$$\psi=\sum_{lmn}a_{lmn}\psi_{lmn}. \qquad (2.50б)$$

Постоянные коэффициенты a_{lmn} выбираются так, чтобы выполнялись граничные условия задачи.

Представление решения в виде (2.50б) основано на том, что $\left(\vec{\nabla}^2+k^2\right)$ – линейный дифференциальный оператор. По определению, линейный оператор $\widehat{L}$ обладает двумя свойствами:

$$\widehat{L}(a\psi)=a\widehat{L}\Psi,\ \ \widehat{L}(\psi_1+\psi_2)=\widehat{L}\psi_1+\widehat{L}\psi_2,$$

где a – постоянная.

Рассмотренный метод разделения переменных действует и в том случае, когда

$$k^2=f(x)+g(y)+h(z)+k'^2, \qquad (2.50в)$$

где k'^2 – новая постоянная.

Уравнение (2.46) теперь принимает вид:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+f(x)=-l^2. \tag{2.50г}$$

Решения X,Y,Z будут уже иными, однако преобразование дифференциального уравнения и построение линейной комбинации решений остаются прежними.

Метод разделения переменных дифференциального уравнения в частных производных приведен здесь для того, чтобы проиллюстрировать полезность различных систем координат.

Теперь рассмотрим уравнение (2.1) в сферической системе координат и попытаемся разделить переменные. Используя формулу (2.32), получаем:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\begin{array}{l}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\\ +\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\end{array}\right]=-k^2\psi. \tag{2.51}$$

Положим теперь

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \tag{2.52}$$

Подставим $(2.52)\to(2.51)$:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\begin{array}{l}\sin\theta\cdot\Theta\cdot\Phi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+R\Phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\\ +\frac{R\Theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\end{array}\right]= \tag{2.53}$$

$$=-k^2R\Theta\Phi.$$

Разделим уравнение (2.53) на $R\Theta\Phi$:

$$\frac{1}{R\cdot r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-k^2. \tag{2.53a}$$

Заметим, что вместо частных производных в уравнении появились обычные. $(2.53a)\times r^2\sin^2\theta\Rightarrow$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=r^2\sin^2\theta\left[\begin{array}{l}-k^2-\dfrac{1}{R\cdot r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)-\\ -\dfrac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)\end{array}\right]. \tag{2.54}$$

Уравнение (2.54) связывает функцию Φ, зависящую только от φ, с функцией, которая зависит от r и θ. Поскольку переменные r, θ и φ независимы, можно приравнять обе части этого уравнения некоторой постоянной. Следует заметить, что почти во всех физических задачах φ играет роль азимутального угла, поэтому более вероятно, что решение Φ будет иметь периодический характер, а не экспоненциальный. Учитывая это, полагаем постоянную разделения равной $-m^2$, тогда

$$\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2, \tag{2.55}$$

$$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-$$

$$-\frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}=-k^2. \tag{2.56}$$

Умножив (2.56) на r^2 и перегруппировав члены, получим:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+ \\ +\frac{m^2}{\sin^2\theta}. \tag{2.57}$$

Переменные снова разделились. Приравняем каждую часть уравнения постоянной λ^2, тогда окончательно:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta+\lambda^2\Theta=0, \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R-\frac{\lambda^2R}{r^2}=0. \tag{2.59}$$

Нам снова удалось свести дифференциальное уравнение в частных производных к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Полное решение имеет вид:

$$\psi_{lm}(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}R_l(r)\cdot\Theta_{lm}(\theta)\cdot\Phi_m(\varphi). \tag{2.60а}$$

Величина k^2 может быть и переменной. Разделение переменных возможно, если k^2 выражается формулой:

$$k^2=f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi)+k'^2. \tag{2.60б}$$

Задачи

1. Подействовать оператором $\left(\vec{\nabla}^2+k^2\right)$ на сумму

$a_1\psi_1(x,y,z)+a_2\psi_2(x,y,z)$ и доказать линейность этого оператора, т.е.

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right)\left(a_1\psi_1(x,y,z) + a_2\psi_2(x,y,z)\right) =$$

$$= a_1\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right)\psi_1 + a_2\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right)\psi_2(x,y,z)$$

2. Проверить, что уравнение

$$\vec{\nabla}^2\psi(r,\theta,\varphi) + \begin{bmatrix} k^2 + f(r) + \dfrac{1}{r^2}g(\theta) + \\ + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\varphi) \end{bmatrix}\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

допускает разделение переменных (в сферических координатах). $k^2 = const.$

2.6. Цилиндрические координаты

Соотношения, которые определяют связь между декартовыми и круговыми цилиндрическими координатами (рис. 23) имеют вид:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \qquad (2.61)$$

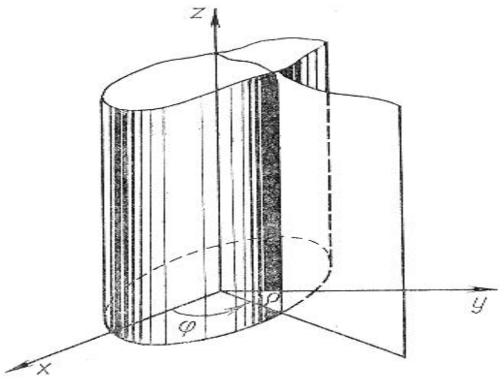


Рис. 23. Цилиндрические координаты

Коэффициенты Ламе:

$$h_1 = h_\rho = 1, h_2 = h_\varphi = \rho, h_3 = h_z = 1, \qquad (2.62)$$

Эта система координат образована следующими семействами координа тных поверхностей:

1) правильные круговые цилиндры с осью z в качестве общей оси: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = const.$

2) полуплоскости, проходящие через ось z:

$\varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} = Const.$

3) плоскости, параллельные плоскости xy: $z = const.$

$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

$$(2.13) \Rightarrow \vec{\nabla}\Psi(\rho,\varphi,z) = \vec{\rho}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \vec{k}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad (2.63)$$

$$(2.17) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \qquad (2.64)$$

$$(2.18) \Rightarrow \vec{\nabla}^2\cdot\Psi = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \qquad (2.65)$$

$$(2.22) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{\rho}_0 & \rho\cdot\vec{\varphi}_0 & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}. \qquad (2.66)$$

Векторный лапласиан

$$\vec{\nabla}^2\vec{V}\Big|_\rho = \vec{\nabla}^2 V_\rho - \frac{1}{\rho^2}V_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{V}\Big|_\varphi = \vec{\nabla}^2 V_\varphi - \frac{1}{\rho^2}V_\varphi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}, \qquad (2.67)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{V}\Big|_z = \vec{\nabla}^2 V_z \ .$$

Вид z – компоненты лапласиана определяется тем, что оси z в декартовой и цилиндрической системе совпадают, т.е. $z_{\text{д}} = z_{\text{ц}}$:

$$\vec{\nabla}^2(\vec{\rho}_0 V_\rho + \vec{\varphi}_0 V_\varphi + \vec{k}V_z) = \vec{\nabla}^2(\vec{\rho}_0 V_\rho + \vec{\varphi}_0 V_\varphi) + \vec{k}\vec{\nabla}^2 V_z =$$

$$= \vec{\rho}_0 f(V_\rho, V_\varphi) + \vec{\varphi}_0 g(V_\rho, V_\varphi) + \vec{k}\vec{\nabla}^2 V_z.$$

Задачи

1. Разложить единичные векторы цилиндрической системы на компоненты в декартовой системе координат:

$$\vec{\rho}_0 = \vec{i}cos\varphi + \vec{j}sin\varphi, \qquad \vec{\varphi}_0 = -\vec{i}sin\varphi + \vec{j}cos\varphi, \qquad \vec{k}_0 = \vec{k}.$$

2. Разложить единичные векторы декартовой системы на компоненты в цилиндрической системе координат:

$$\vec{i} = \vec{\rho}_0 cos\varphi - \vec{\varphi}_0 sin\varphi, \qquad \vec{j} = \vec{\rho}_0 sin\varphi + \vec{\varphi}_0 cos\varphi, \qquad \vec{k} = \vec{k}_0.$$

3. Частица движется в пространстве. Найти компоненты ее скорости и ускорения в цилиндрической системе:

$$V_\rho = \dot{\rho}, \quad V_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad V_z = \dot{z}; \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\ddot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

4. Проводник, по которому течет ток I, расположен вдоль оси z. Векторный магнитный потенциал равен

$$\vec{A} = \vec{k}\frac{\mu I}{2\pi}\ln(\frac{1}{\rho}).$$

Показать, что магнитная индукция $\vec{B} = \vec{\varphi}_0 \dfrac{\mu I}{2\pi\rho}$.

5. Решить уравнение Лапласа $\vec{\nabla}^2\Psi = 0$ в цилиндрических координатах для случая:

$$\Psi = \Psi(\rho). \left[\Psi = k\ln(\frac{\rho}{\rho_0})\right].$$

7. В цилиндрических координатах задана векторная функция $\vec{V}(\rho,\varphi)=\vec{\rho}_0 V_\rho(\rho,\varphi)+\vec{\varphi}_0 V_\varphi(\rho,\varphi)$. Показать, что $(\vec{\nabla}\times\vec{V})$ имеет только z-компоненту.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Дайте определение коэффициентов Ламе.
2. Операторы градиента, дивергенции и ротора в криволинейных координатах.
3. Уравнение Гельмгольца в декартовой системе координат.
4. Коэффициенты Ламе для параболических координат.

Глава 3
ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

3.1. Введение. Основные понятия

Тензоры играют важную роль во многих областях физики, в частности в общей теории относительности и магнитной теории, широко используются при изучении анизотропных свойств твердого тела. Рассмотрим в качестве примера закон Ома:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{\mathrm{E}}, \tag{3.1}$$

где $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{E}$ – электрическое поле; σ – электропроводность. Если изучаемая среда изотропна, то σ – скаляр и, например, для *x*-компоненты тока выполняется равенство:

$$j_1 = \sigma \cdot \mathrm{E}_1. \tag{3.2}$$

Однако, если среда анизотропна, как, например, во многих кристаллах, плотность тока в *x*-направлении может зависеть от электрических полей в *y*- и *z*-направлениях. Предполагая линейную зависимость, можно переписать уравнение (3.2) в виде:

$$j_1 = \sigma_{11}\mathrm{E}_1 + \sigma_{12}\mathrm{E}_2 + \sigma_{13}\mathrm{E}_3 \tag{3.3}$$

или, в общей форме:

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik}\mathrm{E}_k\ . \tag{3.4}$$

Скалярная электропроводность задается набором девяти элементов σ_{ik}:

$$\sigma \to \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Величины, которые не изменяются при повороте системы координат, т.е. являются инвариантными, называются скалярами. Величины, компоненты которых преобразуются по тем же законам, что и компоненты радиуса-вектора, называются векторами:

$$\mathrm{A}'_i = \sum_j a_{ij} A_j, \tag{3.6}$$

где a_{ij} – набор косинусов угла между осями x'_i и x_j. Но такое определение вектора содержит некоторую неопределенность.

Возьмем радиус-вектор $\vec{r}$, тогда

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \cdot x_j. \tag{3.7}$$

Если определить производные как

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}, \tag{3.8}$$

то уравнения (3.6) и (3.7) окажутся идентичными. Любой набор величин A_j, преобразующихся по закону

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \tag{3.9}$$

определяет *контравариантный* вектор.

Рассмотрим градиент скаляра

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \tag{3.10}$$

который преобразуется по закону

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x'_i},. \tag{3.11}$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi'(x', y', z') = \varphi'$ – скаляр. Уравнение (3.11) отличается от (3.9). Уравнение (3.11) определяет *ковариантный* вектор.

В декартовых координатах

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = a_{ij} \tag{3.12}$$

и, следовательно, контравариантные и ковариантные преобразования совпадают. В других системах координат соотношение (3.12), вообще говоря, не имеет места. Мы будем отмечать компоненты контравариантного вектора индексом сверху A^i, а компоненты ковариантного – индексом снизу A_i.

Скаляр называется тензором нулевого ранга, а вектор – тензором первого ранга.

Теперь определим контравариантные, смешанные и ковариантные тензоры второго ранга с помощью соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} \mathrm{A}^{kl} \\ \mathrm{B}'^{i}_{j} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} \mathrm{B}^{k}_{l} \\ C'_{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} C_{kl} \end{aligned}\right\}. \tag{3.13}$$

Видно, что A^{kl} контравариантен по обоим индексам, C_{ij} ковариантен по обоим индексам, а B^k_l преобразуется контравариантно по первому индексу k, но ковариантно по второму индексу l. В декартовых координатах все три типа тензоров второго ранга – контравариантные, смешанные и ковариантные – совпадают.

Тензор второго ранга $\boldsymbol{A}$ (с компонентами A^{kl}) удобно представить, записав его компоненты в виде квадратной таблицы (3×3 в случае трехмерного пространства):

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{A}^{11} & \mathrm{A}^{12} & \mathrm{A}^{13} \\ \mathrm{A}^{21} & \mathrm{A}^{22} & \mathrm{A}^{23} \\ \mathrm{A}^{31} & \mathrm{A}^{32} & \mathrm{A}^{33} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Это не означает, однако, что любая квадратная таблица чисел или функций образует тензор. Существенное условие, налагаемое на компоненты тензора, состоит в том, что они *преобразуются* по закону (3.13).

Например, рассмотрим двумерный тензор:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}.$$

В повернутой системе координат компонента $\mathrm{T}^{11'}$ должна равняться $-x'y'$. Проверим, преобразуется ли $\mathrm{T}^{11'}$ по закону (3.13):

$$\mathrm{T}^{11'}=-x'y'=\sum_{kl}\frac{\partial x_1'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_1'}{\partial x_l}\mathrm{T}^{kl}=\sum_{kl}a_{1k}a_{1l}\mathrm{T}^{kl},$$

где $i, j=1$. Подставляя вместо a_{1k}, a_{1l} и T^{kl} их действительные значения, получаем:

$$-(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=$$

$$cos^2\theta\,\mathrm{T}^{11} + cos\theta\sin\theta\,\mathrm{T}^{12} + sin\theta\cos\theta\,\mathrm{T}^{21} + sin^2\theta\,\mathrm{T}^{22} =$$

$$= -xy\cdot cos^2\theta - y^2 cos\theta sin\theta + x^2 sin\theta cos\theta + xysin^2\theta.$$

Возникло тождество, показывающее, что условие (3.13) выполнено для $\mathrm{T}^{11'}$ (и других компонент). Таким образом, Т – действительно тензор второго ранга.

Сложение тензоров определим аналогично сложению векторов:

$$\text{A+B=C,} \tag{3.15}$$

если $\mathrm{A}^{ij} + \mathrm{B}^{ij} = C^{ij}$. При этом тензоры А и В должны иметь один и тот же ранг и оба должны быть заданы в пространстве одинаковой размерности.

Уравнение (3.13) можно записать в более компактной форме. Если два одинаковых индекса встретились в одной части какого-то выражения, причем один индекс верхний, а другой нижний, то по этим индексам производится суммирование. Поэтому второе выражение из (3.13) можно переписать в виде:

$$\mathrm{B}_j^{'i} = \frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial x_j^{'}}\mathrm{B}_l^k, \tag{3.16}$$

где подразумевается суммирование по k и l. Этим определено *правило суммирования*.

Для иллюстрации этого правила покажем, что δ – символ Кронекера представляет собой смешанный тензор второго ранга δ_l^k. Во-первых, необходимо установить, преобразуется ли δ_l^k в соответствии с (3.13), т.е. является ли он тензором. С учетом правила суммирования имеем:

$$\delta_l^k\,\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial x_j'} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}, \tag{3.17}$$

причем,

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_j'} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j'} . \qquad (3.18)$$

Однако x_j' и x_i' – независимые координаты, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial x_j'} = \delta_j'^{ik} , \qquad (3.19)$$

поэтому

$$\delta_l^k \, \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} = \delta_j'^{\,i} ,$$

т.е. δ_l^k – действительно смешанный тензор второго ранга. Символ Кронекера обладает еще одним интересным свойством: он имеет одинаковые компоненты во всех вращающихся системах координат, и поэтому его можно назвать изотропным.

Вообще говоря, A^{mn} не зависит от A^{nm}, поэтому важен порядок, в котором представлены индексы тензора. Однако имеется несколько интересных специальных случаев; так, если

$$\mathrm{A}^{mn} = \mathrm{A}^{nm} , \qquad (3.20)$$

то тензор называют *симметричным*.

Если же

$$\mathrm{A}^{mn} = -\mathrm{A}^{nm} , \qquad (3.21)$$

то тензор *антисимметричен*. Очевидно, всякий тензор (второго ранга) можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\mathrm{A}^{mn} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}^{mn} + \mathrm{A}^{nm}\right)}_{\text{симметричный тензор}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}^{mn} - \mathrm{A}^{nm}\right)}_{\text{антисимметричный тензор}}. \qquad (3.22)$$

Задачи

1. Доказать, что

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & -xy \end{pmatrix},$$

являются тензорами, а

$$C = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} xy & y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

нет.

2. В общей теории относительности четырехмерный тензор кривизны четвертого ранга (Римана-Кристофеля) удовлетворяет условиям симметрии $R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$:

а) показать, что число компонент при условии $R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$ снижается с 256 до 36;

б) показать, что условие $R_{iklm} = R_{lmik}$ дополнительно уменьшает число независимых компонент до 21;

в) показать, что если справедливо тождество $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$, то число независимых компонент равно 20.

Замечание. Последнее соотношение можно считать дополнительным условием только в том случае, когда все четыре индекса различны.

3. Разложить тензор $\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$ на симметричную и антисимметричную части.

4. Доказать, что если компоненты тензора произвольного ранга равны нулю в заданной системе координат, то они равны нулю и во всех остальных системах координат.

5. Компоненты тензора A равны соответствующим компонентам тензора B в некоторой заданной системе координат, т.е. $A_{ji}^{0} = B_{ij}^{0}$.

Показать, что тензор A равен тензору B во всех системах координат, т.е. $A_{ij} = B_{ij}$.

3.2. Прямое произведение

Мы определили скалярное произведение (разд. 1.3) как сумму произведений соответствующих компонент:

$$\vec{\mathrm{A}} \cdot \vec{\mathrm{B}} = \left\{ \mathrm{A}_i \mathrm{B}_i \right\}. \tag{3.23}$$

Обобщением этого выражения в тензорном анализе служит операция *свертывания*. Два индекса, один ковариантный, а другой контравариантный, полагаются равными друг другу и затем (в соответствии с правилом суммирования) производится суммирование по этому повторяющемуся индексу. Например,

$$\mathrm{B}_j'^i \to \mathrm{B}_i'^i = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_i'} \mathrm{B}_l^k = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} \mathrm{B}_l^k. \tag{3.24}$$

С учетом уравнений (3.18) и (3.19)

$$\mathrm{B}_i'^i = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B_l^k = \delta_k^l \mathrm{B}_l^k = \mathrm{B}_k^k. \tag{3.25}$$

Таким образом, свернутый смешанный тензор второго ранга инвариантен и, следовательно, является скаляром. Это в точности соответствует тому, что мы получили в разд. 1.3 для скалярного произведения двух векторов и в разд. 1.7 для дивергенции вектора. Вообще, операция свертывания уменьшает ранг тензора на два.

Компоненты ковариантного и контравариантного векторов (тензоров первого ранга) можно умножить одна на другую, в результате чего получится член $a_i b^j$. Согласно (3.13), полученное произведение есть тензор второго ранга:

$$a_i' b'^{j} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} a_k \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} a_k b^l. \qquad (3.26)$$

Производя свертывание, получаем обычное скалярное произведение:

$$a_i' b'^{i} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x_l} a_k b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} a_k b^l = \delta_l^k a_k b^l = a_k b^k. \qquad (3.27)$$

Приведенная операция называется *прямым произведением*. В случае двух векторов прямое произведение представляет собой тензор второго ранга. Именно в таком смысле можно понимать величину $\vec{\nabla}\vec{\mathrm{E}}$, которая не была определена в рамках векторного анализа.

Прямое произведение двух тензоров есть тензор, ранг которого равен сумме рангов двух первоначальных тензоров, т.е.

$$\mathrm{A}_j^i \mathrm{B}^{kl} = C_j^{ikl} , \qquad (3.28)$$

где C_j^{ikl} – тензор четвертого ранга.

До сих пор мы сохраняли различие между ковариантным и контравариантным преобразованиями, поскольку оно имеет место в неевклидовом пространстве и играет большую роль в общей теории относительности. В дальнейшем мы не будем различать ковариантные и контравариантные тензоры, поэтому примем систему нижних индексов. Кроме того, будем пользоваться правилом суммирования и операцией свертывания.

Правило суммирования. Если индекс (буква, но не число) встречается дважды на одной стороне уравнения, то по этому индексу подразумевается суммирование.

Свертывание. Свертывание заключается в приравнивании двух различных индексов друг другу и в последующем применении правила суммирования.

Задачи

1. Задан тензор n -го ранга $T_{...i}$. Доказать, что $\partial \text{T}_{...i} / \partial x_j$ – тензор $(n+1)$ -го ранга (в декартовых координатах).

2. Задан тензор n -го ранга $\text{T}_{ijk...}$, доказать, что $\sum \partial \text{T}_{ijk...} / \partial x_j$ – тензор $(n-1)$-го ранга (в декартовых координатах).

3. Величина *L* – скалярная функция недекартовых переменных q_i, их производных по времени $\dot{q}_i$ и, кроме того, в явном виде зависит от времени *t*, т.е. $L'(q_i', \dot{q}_i', t) = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Показать, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ представляют собой компоненты вектора.

Замечание. Считается, что q_i и $\dot{q}_i$ независимые переменные. Однако $\partial \dot{q}_j / \partial q_j \neq 0$.

3.3. Правило частного

Если A_i и B_j – векторы, то легко доказать, что $\text{A}_i \text{B}_j$ – тензор второго ранга. Рассмотрим теперь ряд обратных зависимостей.

$$K_i A_i = B, \tag{3.29а}$$

$$K_{ij} A_j = B_i, \tag{3.29б}$$

$$K_{ij} A_{jk} = B_{ik}, \tag{3.29в}$$

$$K_{ijkl} A_{ij} = B_{kl}, \tag{3.29г}$$

$$K_{ij} A_k = B_{ijk}. \tag{3.29д}$$

В каждом из этих уравнений *A* и *B* – известные тензоры, ранг которых определен числом индексов и, кроме того, *A* произволен. В каждом случае *K* – неизвестная величина. Нам необходимо установить поведение величины *K* при ее преобразовании. Согласно правилу частного, если интересующее нас уравнение выполняется в любой вращающейся (повернутой) декартовой системе координат, то *K* – тензор указанного ранга. В качестве иллюстрации остановимся на уравнении (3.29б). Учитывая векторные свойства преобразования *B*, можно записать, что в неподвижной системе координат

$$K'_{ij} A'_j = B'_i = a_{ik} B_k . \tag{3.30}$$

Уравнение (3.29б) справедливо в любой вращающейся декартовой системе координат, поэтому

$$a_{ik} B_k = a_{ik} (K_{kl} A_l) . \tag{3.31}$$

В последнем уравнении вновь запишем А во вращающейся системе координат:

$$\mathrm{A}_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \mathrm{A}'_j = \sum_j a_{jl} A'_j$$

$$\mathrm{K}'_{ij} \mathrm{A}'_j = a_{ik} \mathrm{K}_{kl} a_{jl} \mathrm{A}'_j \tag{3.32}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\mathrm{K}'_{ij} - a_{ik} a_{jl} \mathrm{K}_{kl} \right) \mathrm{A}'_j = 0 . \tag{3.33}$$

Последнее равенство выполняется при любом i и в любой вращающейся системе. Поскольку A'_j произвольно, то

$$\mathrm{K}'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \mathrm{K}_{kl} , \tag{3.34}$$

что совпадает с определением тензора второго ранга.

Аналогично можно рассмотреть другие уравнения (3.29). В заключение следует предостеречь от неправильного применения правила частного. Оно может не выполняться, если *B*=0. В этом случае свойства преобразования не определены.

3.4. Псевдотензоры

До сих пор все преобразования системы координат ограничивались чистым вращением. Рассмотрим теперь операцию *отражения*, или *инверсии*. Если заданы коэффициенты преобразования $a_{ij} = -\delta_{ij}$, то

$$x_i = -x'_i \,. \tag{3.35}$$

Существенно, что это преобразование заменяет первоначальную правую систему координат на левую. Радиус-вектор $\vec{r} = \left(x'_1,\, x'_2,\, x'_3\right) = \left(-x_1,\, -x_2,\, -x_3\right)$. Этот новый вектор имеет отрицательные компоненты относительно новых преобразованных осей. Одновременное изменение знаков как у осей, так и у компонент не меняет вектора (направление в пространстве, рис. 24).

Радиус-вектор $\vec{r}$ и все другие векторы, которые ведут себя аналогичным образом при отражении, или инверсии системы координат, называются *полярными* векторами.

Совершенно по-другому ведет себя вектор, равный векторному произведению двух полярных векторов. Пусть $\vec{C} = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}},$, где $\vec{\mathrm{A}}$ и $\vec{\mathrm{B}}$ – полярные векторы. Уравнение (1.33) определяет компоненты $\vec{C}$:

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2. \tag{3.36}$$

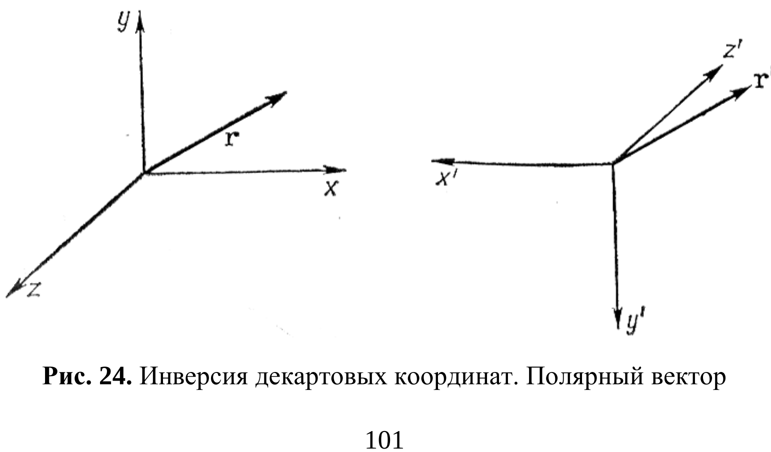


Рис. 24. Инверсия декартовых координат. Полярный вектор

$\vec{C}$ при инверсии ведет себя не так как полярный вектор. Чтобы различать их, мы назовем вектор $\vec{C}$ *псевдовектором* или *аксиальным* вектором (рис. 25).

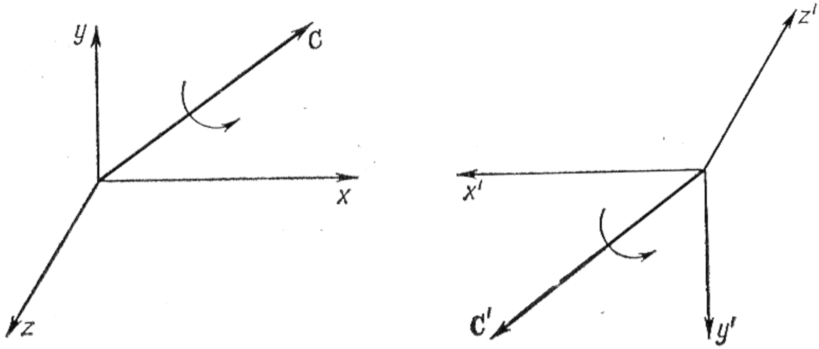


Рис. 25. Аксиальный вектор

Например, угловая скорость $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$, момент количества движения $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{\mathrm{P}}$, момент вращения $\vec{L} = \vec{r} \times \bar{f}$, магнитное поле $\vec{\mathrm{B}}$, для которого $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}}$. В правой системе координат вектор $\vec{C}$ характеризует вращение, которое связывают с правилом правой руки. В левой, инвертированной системе, вращение изменяется на левое.

Вообще говоря, псевдовекторы и псевдотензоры преобразуются по формулам:

$$C_i' = |a| a_{ij} C_j, \qquad \mathrm{A}'_{ij} = |a| a_{ik} a_{jl} \mathrm{A}_{kl}, \tag{3.37}$$

где $|a|$ – есть определитель, составленный из элементов таблицы для коэффициентов a_{mn}.

В случае инверсии определитель имеет вид:

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \; . \qquad (3.38)$$

При инверсии одной лишь оси x

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 . \qquad (3.39)$$

Для любого чистого вращения $|a| = +1$ всегда. Величины, которые преобразуются в соответствии с (3.37), часто называют *тензорными* плотностями.

Смешанное произведение $S = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{C}$ ведет себя подобно скаляру (при вращениях). Однако при инверсии координат (3.35) $\mathrm{S} \to -\mathrm{S}$, т.е. S – псевдоскаляр. Это свойство смешанного произведения затемняется его геометрической трактовкой как объема параллелепипеда. В самом деле, если все три параметра – длину, ширину и высоту – заменить на отрицательные, то произведение этих трех величин будет отрицательно. Электрический заряд также псевдоскаляр.

Введем для удобства трехмерный символ Леви-Чивита ε_{ijk} :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \end{aligned} \right\} , \qquad (3.40)$$

все остальные $\varepsilon_{ijk} = 0.$

Пусть псевдотензор третьего ранга δ_{ijk} в некоторой системе координат равен ε_{ijk} . Тогда, по определению псевдотензора,

$$\delta'_{ijk} = |a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr}. \qquad (3.41)$$

$$\delta_{123} = |a| \cdot a_{1p} a_{2q} a_{3r} = |a| \cdot \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} \cdot 1 + a_{12}a_{23}a_{31} \cdot 1 + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} \cdot 1 - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{pmatrix} =$$

$$= |a|^2 = 1 \Rightarrow a_{1p} a_{2q} a_{3r} \varepsilon_{pqr} = |a|. \qquad (3.42)$$

Для других компонент получаем аналогично:

$$\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}. \qquad (3.43)$$

Отсюда следует, что ε_{ijk} – изотропный псевдотензор с одинаковыми компонентами в любой вращающейся системе координат.

Любому *антисимметричному* тензору второго ранга C_{ij} (в трехмерном пространстве) можно сопоставить дуальный псевдовектор C_i, определенный как

$$C_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \cdot C_{jk}, \qquad (3.44)$$

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{31} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.45)$$

Двойное свертывание (псевдо-) тензора пятого ранга $\varepsilon_{ijk} C_{jk}$ показывает, что при вращениях системы координат величина C_i

должна вести себя как вектор, но наличие псевдотензора ε_{ijk} приводит к тому, что C_i является псевдовектором. Компоненты псевдовектора $\vec{C}$ заданы как

$$\left(C_1,\ C_2,\ C_3\right) = \left(C_{23},\ C_{31},\ C_{12}\right). \tag{3.46}$$

Заметим, что циклический порядок индексов возник из-за цикличности компонент ε_{ijk}. Эта дуальность означает, что трехмерное векторное произведение можно записать либо в виде псевдовектора, либо в виде антисимметричного тензора второго ранга.

Если задать три (полярных) вектора $\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}, \vec{C}$, то можно определить:

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_i & \mathrm{B}_i & C_i \\ \mathrm{A}_j & \mathrm{B}_j & C_j \\ \mathrm{A}_k & \mathrm{B}_k & C_k \end{vmatrix} = \mathrm{A}_i \mathrm{B}_j C_k - \mathrm{A}_i \mathrm{B}_k C_j + \ldots \tag{3.47}$$

Каждый член $\mathrm{A}_p \mathrm{B}_q C_r$ должен быть тензором третьего ранга. Поскольку определитель (3.47) полностью антисимметричен, то при перестановке любых двух индексов произойдет изменение знака. Дуальная величина

$$V = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk} V_{ijk} \tag{3.48}$$

есть псевдоскаляр. Раскрывая в явном виде определитель

$$V = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 & C_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 & C_2 \\ \mathrm{A}_3 & \mathrm{B}_3 & C_3 \end{vmatrix}, \tag{3.49}$$

легко убедиться, что это – смешанное произведение.

Для доказательства ковариантности уравнений Максвелла необходимо распространить данный результат на четырехмерное пространство и, в частности, показать, что четырехмерный элемент объема $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ – псевдоскаляр.

Введем четырехмерный символ Леви-Чивита δ_{ijkl}, аналог трехмерного ε_{ijk}. По определению, δ_{ijkl} полностью антисимметричен по всем четырем индексам.

$\delta_{ijkl} = +1,$ если четное число перестановок индексов,

$\delta_{ijkl} = -1,$ если нечетное число перестановок индексов.

Введя тензор четвертого ранга Н

$$\mathrm{H}_{ijkl} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_i & \mathrm{B}_i & C_i & D_i \\ \mathrm{A}_j & \mathrm{B}_j & C_j & D_j \\ \mathrm{A}_k & \mathrm{B}_k & C_k & D_k \\ \mathrm{A}_l & \mathrm{B}_l & C_l & D_l \end{vmatrix}, \tag{3.50}$$

элементами которого служат компоненты полярных векторов $\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}, \vec{C}, \vec{D}$, можно определить дуальную величину:

$$H = \frac{1}{4!}\delta_{ijkl} H_{ijkl}. \tag{3.51}$$

Поскольку δ_{ijkl} псевдотензоры, H_{ijkl} тоже псевдотензор. Предположим теперь, что $\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}, \vec{C}, \vec{D}$ имеют бесконечно малую протяженность вдоль четырех координатных осей (пространство Минковского):

$$\vec{\mathrm{A}} = \left(dx_1, 0, 0, 0\right), \quad \vec{\mathrm{B}} = \left(0, dx_2, 0, 0\right), \ldots \tag{3.52}$$

а четырехмерный элемент объема

$$H = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \tag{3.53}$$

является псевдоскаляром.

Мы перешли к четырехмерному пространству простым математическим обобщением трехмерного пространства. Аналогично можно рассмотреть и N-мерные пространства.

Задачи

1. Задана антисимметричная таблица, элементы которой (C_1, C_2, C_3) образуют псевдовектор

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что соотношение

$$C_i = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk}C_{jk}$$

выполняется во всех системах координат, доказать, что C_{jk} – тензор (здесь в другом виде сформулирована теорема частного).

2. Оператор $\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}$ можно записать в виде суммы $\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, в которой $x_4 = ic\cdot t$. Этот четырехмерный лапласиан, обычно называемый даламберианом, обозначают символом $\Box^2$. Показать, что $\Box^2$ – *скалярный* оператор.

3. Показать, что

$$\delta_{ii} = 3, \quad \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0, \quad \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

4. Показать, что

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}.$$

5. Проверить, что каждый из следующих тензоров четвертого ранга:

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

изотропен, т.е. форма каждого из них не зависит от вращения системы координат.

6. Применив инверсию, доказать, что изотропный тензор в действительности имеет псевдотензорную природу.

3.5. Аффиноры

Аффинор введен с целью распространить правила обычного векторного анализа на тензоры второго ранга. Возьмем два вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и образуем комбинацию $\vec{i}\,\vec{j}$. Эта комбинация и называется *аффинором*. Умножение слева заключается в перемножении левого множителя на первый множитель из пары, записанной справа:

$$\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{i}\vec{j}=\left[\left(\vec{i}\,\mathrm{A}_x+\vec{j}\mathrm{A}_y+\vec{k}\mathrm{A}_z\right)\cdot\vec{i}\,\right]\vec{j}=\mathrm{A}_x\cdot\vec{j}. \qquad (3.60)$$

Умножение справа предполагает обратный порядок, т.е.

$$\vec{i}\vec{j}\cdot\vec{\mathrm{A}}=\vec{i}\left[\,\vec{j}\left(\vec{i}\,\mathrm{A}_x+\vec{j}\mathrm{A}_y+\vec{k}\mathrm{A}_z\right)\right]=\vec{i}\,\mathrm{A}_y\,. \qquad (3.61)$$

Отсюда видно, что операция умножения не коммутативна. Нужно четко представлять, что $\vec{i}$ и $\vec{j}$, образующие аффинор $\vec{i}\,\vec{j}$, не взаимодействуют друг с другом. Если они имеют скалярные коэффициенты, то эти коэффициенты перемножаются, сами же единичные векторы не образуют ни скалярного, ни векторного произведения. $\Rightarrow \vec{i}\,\vec{j}\neq\vec{j}\,\vec{i}$.

Теперь образуем комбинацию двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{\mathrm{T}}=\vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}}=\left(\vec{i}\,\mathrm{A}_x+\vec{j}\mathrm{A}_y+\vec{k}\mathrm{A}_z\right)\left(\vec{i}\mathrm{B}_x+\vec{j}\mathrm{B}_y+\vec{k}\mathrm{B}_z\right)=$$

$$=\vec{i}\vec{i}\,\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x+\vec{i}\vec{j}\mathrm{A}_x\mathrm{B}_y+\vec{i}\vec{k}\mathrm{A}_x\mathrm{B}_z+\vec{j}\vec{i}\,\mathrm{A}_y\mathrm{B}_x+\vec{j}\vec{j}\mathrm{A}_y\mathrm{B}_y+ \qquad (3.62)$$

$$+\vec{j}\vec{k}\mathrm{A}_y\mathrm{B}_z+\vec{k}\vec{i}\,\mathrm{A}_z\mathrm{B}_x+\vec{k}\vec{j}\mathrm{A}_z\mathrm{B}_y+\vec{k}\vec{k}\mathrm{A}_z\mathrm{B}_z.$$

Величина $\vec{\mathrm{T}} = \vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}}$ представляет собой аффинор, образованный из комбинации аффиноров. Было установлено, что произведение двух векторов $\vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}}$ – тензор второго ранга. Следовательно, аффиноры тоже являются тензорами второго ранга, записанными в форме, которая подчеркивает их векторное происхождение.

Уже отмечалось, что операция умножения вектора и аффинора не коммутативна. Однако существует один важный частный случай, когда эта операция обладает свойствами коммутативности:

$$\vec{a} \cdot \vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{a}\,, \tag{3.63}$$

где $\vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}}$ – аффинор, $\vec{a}$ – произвольный вектор.

Если $\vec{a} = \vec{i}$, то $\mathrm{A}_x \cdot \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{A}}\mathrm{B}_x$, т.е.

$$\begin{gathered} \vec{i}\,\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x + \vec{j}\,\mathrm{A}_x\mathrm{B}_y + \vec{k}\,\mathrm{A}_x\mathrm{B}_z = \\ = \vec{i}\,\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x + \vec{j}\,\mathrm{A}_y\mathrm{B}_x + \vec{k}\,\mathrm{A}_z\mathrm{B}_x. \end{gathered} \tag{3.64}$$

Приравнивая отдельные компоненты друг к другу, получаем:

$$\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x = \mathrm{A}_x\mathrm{B}_x, \quad \mathrm{A}_x\mathrm{B}_y = \mathrm{A}_y\mathrm{B}_x, \quad \mathrm{A}_x\mathrm{B}_z = \mathrm{A}_z\mathrm{B}_x, \tag{3.65}$$

т.е. $\vec{\mathrm{A}} = c \cdot \vec{\mathrm{B}},$ где $c = const$. Иначе, если умножение на произвольный вектор коммутативно, то аффинор должен быть симметричным.

Одно из наиболее важных свойств симметричного аффинора заключается в том, что специальным выбором координатных осей его *всегда* можно представить в нормальной или диагональной форме:

$$\vec{\mathrm{T}} \to \vec{i}\vec{i}\,\mathrm{T}_{xx} + \vec{j}\vec{j}\,\mathrm{T}_{yy} + \vec{k}\vec{k}\,\mathrm{T}_{zz}\,. \tag{3.66}$$

Интересно и полезно дать геометрическую трактовку симметричного аффинора. Для простоты предположим, что симметричный аффинор $\vec{\mathrm{T}}$ задан в диагональной форме. Тогда с помощью радиуса-вектора $\vec{r}$ запишем уравнение:

$$\vec{r}\cdot\vec{\mathrm{T}}\cdot\vec{r}=1, \tag{3.67}$$

которое накладывает ограничение на абсолютную величину $\vec{r}$ в зависимости от его ориентации.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\right)\left(\vec{i}\vec{i}\,\mathrm{T}_{xx}+\vec{j}\vec{j}\,\mathrm{T}_{yy}+\vec{k}\vec{k}\,\mathrm{T}_{zz}\right)\left(\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z\right)=1\\&x^2\mathrm{T}_{xx}+y^2\mathrm{T}_{yy}+z^2\mathrm{T}_{zz}=1\end{aligned}\right\}. \tag{3.68}$$

Последнее равенство определяет эллипсоид с полуосями

$$a=\mathrm{T}_{xx}^{-1/2},\quad b=\mathrm{T}_{yy}^{-1/2},\quad c=\mathrm{T}_{zz}^{-1/2}. \tag{3.69}$$

Следовательно, диагонализация аффинора соответствует ориентированию аффинорного эллипсоида таким образом, чтобы его оси совпали с осями координат.

Если задан антисимметричный аффинор $\vec{U}$, т.е. $U_{ii}=0,\quad U_{ij}=-U_{ji}\qquad (i\neq j,\quad i,j=x,y,z)$, то для любого вектора $\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot\vec{U}=-\vec{U}\cdot\vec{a}.$$

Иначе говоря, умножение вектора на антисимметричный аффинор подчиняется правилу антикоммутации.

Задачи

1. Даны антисимметричный аффинор $\vec{U}$ и вектор $\vec{V}$. Доказать, что $\vec{V}\cdot\vec{U}=-\vec{U}\cdot\vec{V},\qquad \vec{V}\cdot U\cdot\vec{V}=0$.

2. Пусть $\vec{U}$ – антисимметричный аффинор, $\vec{a}$ – единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\vec{r}$. Показать, что конец радиуса-вектора скользит по поверхности эллипсоида, когда $\vec{r} = \vec{U} \cdot \vec{a}$.

3. Двумерные векторы $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y, \quad \vec{t} = -\vec{i}y + \vec{j}x$ могут быть связаны уравнением $\vec{r}\vec{U} = \vec{t}$. Определить тензор $\vec{U}$, используя для этой цели обычное тензорное представление. Найти $\vec{U}$ и дать его определение с точки зрения аффиноров.

4. Показать, что $\vec{I} = \vec{i}\,\vec{i} + \vec{j}\,\vec{j} + \vec{k}\,\vec{k}$ есть единичный аффинор в том смысле, что для любого вектора $\vec{V}$

$$\vec{I} \cdot \vec{V} = \vec{V}.$$

Контрольные вопросы к главе 3

1. Контравариантный и ковариантный векторы. Дайте определения.

2. Контравариантные, смешанные и ковариантные тензоры второго ранга.

Примеры решения задач

1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

Решение:

$$u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2},$$

$$S : x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 23,$$

$$M(3, 0, -4).$$

$$\vec{N} = grad\ F(x, y, z).$$

$$F = x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 - 4z - 23,$$

$$grad\ F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = (2x - 6)\vec{i} + 18y\vec{j} - (2z - 4)\vec{k}.$$

$$\vec{N}\,|_M = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 12\vec{k},$$

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-12)^2} = 12.$$

$$\cos\alpha = 0; \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1.$$

$$\frac{\partial U}{\partial N}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2};\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2};\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}|_M=0,6;\frac{\partial U}{\partial y}|_M=0;\frac{\partial U}{\partial z}|_M=0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial N}=0,6\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot(-1)=0.$$

2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке M.

Решение:

$$v=x^2-y^2-3z^2, u=\frac{x}{yz^2}, M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

α – искомый угол.

$$\cos\alpha=\frac{(grad\upsilon\cdot gradU)}{|grad\upsilon|\cdot|gradU|};$$

$$grad\upsilon=2x\vec{i}-2y\vec{j}-6z\vec{k},$$

$$grad\upsilon|_M=\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}-2\sqrt{3}\vec{k},$$

$$|grad\upsilon|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{3})^2}=4,$$

$$gradU = \frac{1}{yz^2}\vec{i} - \frac{x}{y^2z^2}\vec{j} - \frac{2x}{yz^3}\vec{k},$$

$$gradU\,|_M = 3\sqrt{2}\vec{i} - 3\sqrt{2}\vec{j} - 6\sqrt{3}\vec{k},$$

$$\left|grad\upsilon\right| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2})^2 + (-6\sqrt{3})^2} = 12,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}}{4\cdot 12} = 1 \Rightarrow \alpha = \pi.$$

3. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{a}$.

Решение:

$$\vec{a} = 3x\vec{i} + 6z\vec{k}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий поля $\vec{a}$:

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{6z} \Rightarrow \begin{cases} dy = 0 \Rightarrow y = C_0, \\ \dfrac{2dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \end{cases}$$

$$2\ln x = \ln z + \ln C,$$

$$x^2 = Cz.$$

4. Найти поток векторного поля a через поверхности S, вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение:

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + (z^2 - 1)\vec{k},$$

$$S : x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0),\ \ P : z = 4.$$

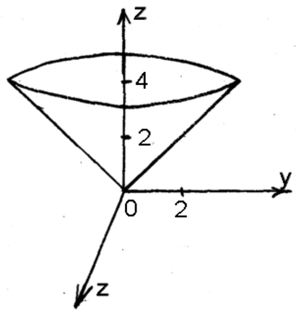


Рис. 26.

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint\limits_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy,$$

$$\iint\limits_S a_x dydz = \iint\limits_S xzdydz = \iint\limits_S z\sqrt{z^2 - y^2}dydz = \int\limits_0^4 zdz \int\limits_{-z}^{z} \sqrt{z^2 - y^2}dy =$$

$$= \int\limits_0^4 z\left(\frac{y}{2}\sqrt{z^2 - y^2} + \frac{z^2}{2}\arcsin\frac{y}{z}\right)\Big|_{-z}^{z} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\int\limits_0^4 z^3 dz = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{4}z^4 \Big|_0^4 = 32\pi.$$

$$\iint\limits_S a_y dxdz = \iint\limits_S yzdxdz = \iint\limits_S z\sqrt{z^2-x^2}\,dxdz = \int\limits_0^4 zdz\int\limits_{-z}^{z}\sqrt{z^2-x^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 z\left(\frac{x}{2}\sqrt{z^2-x^2}+\frac{z^2}{2}\arcsin\frac{x}{z}\right)\Bigg|_{-z}^{z} dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^4 z^3dz = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{4}z^4\Big|_0^4 = 32\pi.$$

$$\iint\limits_S a_z dxdy = \iint\limits_S (z^2-1)dxdz = \iint\limits_S (x^2+y^2-1)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-z}^{z}\rho(\rho^2-1)d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^4(\rho^3-\rho)d\rho = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{2}\rho^2\right)\Bigg|_0^4 d\varphi = 56\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 56\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = 112\pi,$$

$$\Pi = 32\pi + 32\pi + 112\pi = 176\pi.$$

5. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz.

Решение:

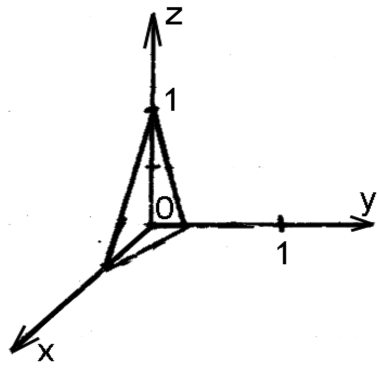


Рис. 27.

$$\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}, P: 2x + 3y + z = 1.$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint\limits_{S} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} (2x\cos\alpha + 3y\cos\beta + 4z\cos\gamma) d\sigma.$$

$$\vec{n} = \{3,2,1\} \Leftarrow |\vec{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1+4+9}\, dxdy = \sqrt{14}\, dxdy,$$

$$\Pi = \iint\limits_{Dxy} \left(\frac{2 \cdot 2x}{\sqrt{14}} + \frac{3 \cdot 3y}{\sqrt{14}} + \frac{4z}{\sqrt{14}} \right) \sqrt{14}\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_0^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x} (4x + 9y + 4(1 - 2x - 3y)) dy =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_0^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x} (4 - 4x - 3y) dy = \frac{1}{3} \int\limits_0^{1/2} \left(\frac{7}{2} - 10x + 6x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{7}{2}x - 5x^2 + 2x^3 \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

6. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в 1 октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение:

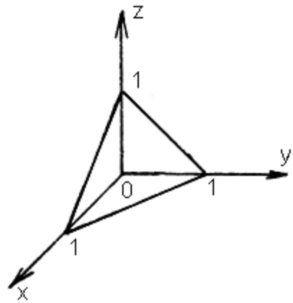


Рис. 28.

$$a = 9\pi y\vec{j} + (7z+1)\vec{k},\ \ P: x + y + z = 1.$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}\cdot d\sigma = \iint\limits_{S} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} (2x\cos\alpha + 3y\cos\beta + 4z\cos\gamma) d\sigma.$$

$$\vec{n} = \{1,1,1\} \Leftarrow |\vec{n}| = \sqrt{3}.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+1+1}dxdy = \sqrt{3}dxdy,$$

$$\Pi = \int_0^1 dx \int_0^{1-ч} \left(0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 9\pi y\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 7(1-x-y)+1)\frac{1}{\sqrt{3}} \right)\sqrt{3}dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8 - 7x - 7y + 9\pi y) dy = \int_0^1 \left(8y - 7xy - \frac{7}{2}y^2 + \frac{9\pi}{2}y^2 \right)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{9+9\pi}{2} - (8+9\pi)x + \frac{7+9\pi}{2} x^2 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{9+9\pi}{2} x - \frac{8+9\pi}{2} x^2 + \frac{7+9\pi}{2\cdot 3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{10+9\pi}{6}.$$

7. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

Решение:

$$\vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k},$$

$$S: 2x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3;$$

$$J_1 = \iint\limits_{D_{yoz}} (e^{-z} - x) dydz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-y} \left(e^{-z} + 1 - \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z \right) dz =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-e^{-z} + z - \frac{1}{2} yz - \frac{1}{4} z^2 \right) \Big|_0^{2-y} dy = \int\limits_0^2 \left(-e^{y-2} + 1 - y + \frac{1}{4} y^2 \right) dy =$$

$$= \left(-e^{y-2} + y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{12} y^3 \right) \Big|_0^2 = -\frac{1}{3}.$$

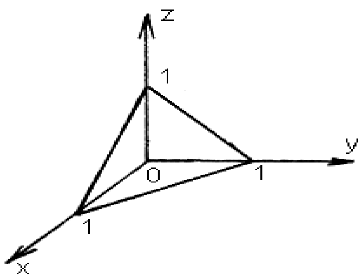


Рис. 29.

$$J_2 = \iint\limits_{D_{xoz}} (xz + 3y)dzdx = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left(xz + 6 - 3z - 6x\right)dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} xz^2 + 6z - \frac{3}{2} z^2 - 6xz \right) \Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(6 - 10x + 2x^2 + 2x^3\right) dx = \left(6x - 5x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 6 - 5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}.$$

$$J_3 = \iint\limits_{D_{yox}} (z + x^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left(2 - 2x - y + x^2\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2y - 2xy - \frac{1}{2} y^2 + x^2 y \right) \Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2 - 4x + 4x^2 - 2x^3\right) dx = \left(2x - 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = -\frac{1}{3} + \frac{13}{6} + \frac{5}{6} = \frac{8}{3}.$$

8. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

Решение:

$$\vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j},$$

$$S:\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 (z \ge 0). \end{cases}$$

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \vec{a}\vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} div\,\vec{a}\, dxdydz,$$

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 - 0 = 3.$$

Перейдем к цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\Pi = \iiint\limits_{V} 3dxdydz = 3 \cdot 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}} rdr \int\limits_0^{6-r^2} dz = 6\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}} r(6 - r^2 - r)dr =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}} (6r - r^3 - r^2)dr = 6\int\limits_0^{\pi} (9 - 2\sqrt{6})d\varphi = 6(9 - 2\sqrt{6})\varphi\Big|_0^{\pi} = 6(9 - 2\sqrt{6})\pi.$$

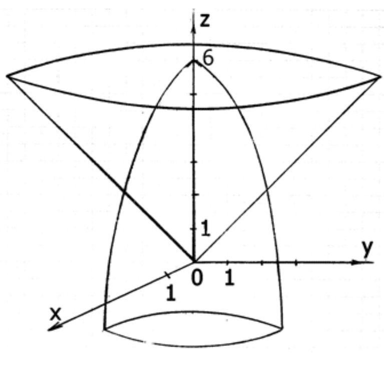


Рис. 30.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

Решение:

$$\vec{a} = (zx + y)\vec{i} + (xy - z)\vec{j} + (x^2 + yz)\vec{k},$$

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса.

$$\Pi = \oiint\limits_S \vec{a}\vec{n}\, dS = \iiint\limits_V div\, \vec{a}\, dxdydz,$$

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = z + y + z.$$

$$\Pi = \iiint (x + y + z) dxdydz.$$

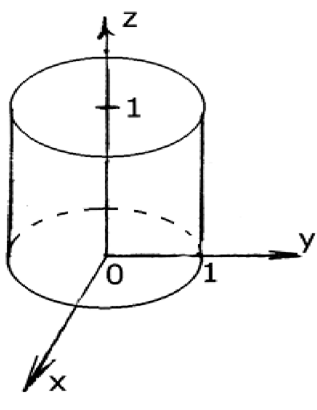


Рис. 31.

Цилиндрическая система координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Отсюда,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dv \int_0^1 (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^2\cos\varphi + r^2\sin\varphi + \frac{1}{2} \right) dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \cos\varphi + \frac{1}{3} r^3 \sin\varphi + \frac{1}{2} v \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos\varphi + \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin\varphi - \frac{1}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 - \frac{1}{3} + \pi = \pi - \frac{1}{3}.$$

10. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

Решение:

$\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, L : отрезок $MN, M(-4,0), N(0,2)$.

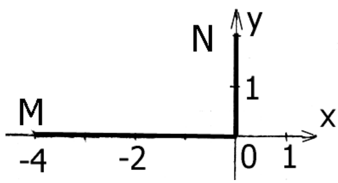


Рис. 32.

1) $MO \quad y = 0, dy = 0, -4 \le x \le 0.$

$$\int_L (x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = \int_{-4}^{0} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-4}^{0} = \frac{64}{3}.$$

2) $ON \quad x = 0, dx = 0, 0 \le y \le 2.$

$$\int_L (x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = \int_{0}^{2} y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 \Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3}.$$

$$\int_L (x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} = \frac{72}{3} = 24.$$

11. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

Решение:

$$\vec{a} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y\vec{k},$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t, y = 3\sin t, \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3. \end{cases}$$

$$dx = -2\sin t dt,$$

$$dy = 3\cos t dt,$$

$$dz = -4\sin t - 3\cos t.$$

$$Ц = \int_\Gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_0^{2\pi} (-2 \cdot 2\cos t \sin t - 3\cos t(4\cos t - 3\sin t - 3) +$$

$$+3\sin t(-4\sin t - 3\cos t))dt = \int_0^{2\pi} (-2\sin 2t - 12\cos^2 t + 9\sin t\cos t - 9\cos t -$$

$$-12\sin^2 t - 9\sin t\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin 2t - 12 - 9\cos t)dt = (\cos 2t - 9\sin t - 12t) \Big|_0^{2\pi} = -24\pi.$$

12. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ.

Решение:

$$\vec{a} = 2y\vec{i} + 5z\vec{j} + 3x\vec{k},$$

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Стокса:

$$Ц = \oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_{\sigma} \vec{n} \cdot rot\vec{a} \cdot d\sigma$$

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 5z & 3k \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\iint_{\sigma} \vec{n} \cdot rot\vec{a} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} (-5\cos\alpha - 3\cos\beta - 2\cos\gamma) d\sigma.$$

$$\vec{n} = \{1,1,1\}, |\vec{n}| = \sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

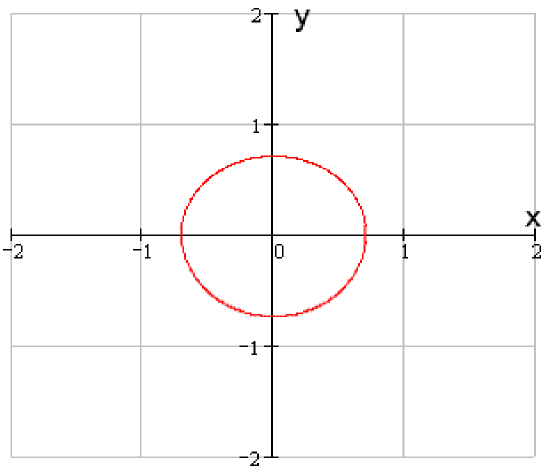
$$d\sigma = \sqrt{1 + (z_x^{'})^2 + (z_y^{'})^2}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\,dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

$$Ц = \sqrt{3}\iint\limits_{Dxy}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)dxdy = -10\iint\limits_{Dxy} dxdy = \begin{Bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{Bmatrix} =$$

$$= -10\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} rdr = -10\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = -10\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -5\pi.$$

Проекция на XOY



Задачи для самостоятельной работы

1. Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $\upsilon = \upsilon(x, y, z)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = \vec{C}\vec{r}$, где $\vec{C}$ – постоянный вектор, а $\vec{r}$ – радиус-вектор. Каковы поверхности уровня этого поля и как они расположены по отношению к вектору $\vec{C}$?

3. Доказать, что если S – замкнутая кусочно-гладкая поверхность и $\vec{C}$ – ненулевой постоянный вектор, то

$$\oiint_S \cos\left(\vec{n}, \vec{C}\right) dS = 0,$$

где $\vec{n}$ – вектор, нормальный к поверхности S.

4. Доказать формулу

$$\oiint_S \varphi \vec{a}\vec{n}^0 dS = \iiint_V \left(\varphi div\vec{a} + \vec{a} grad\varphi\right) dV,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$; S – поверхность, ограничивающая объем V; $\vec{n}^0$ – орт внешней нормали к поверхности S. Установить условия применимости формулы.

5. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ то } \oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к кусочно-гладкой замкнутой поверхности S.

6. Доказать, что если функция $u(x,y,z)$ является многочленом второй степени и S – кусочно-гладкая замкнутая поверхность, то интеграл

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

пропорционален объему, ограниченному поверхностью S.

7. Пусть $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, где P, Q, R – линейные функции от x, y, z и пусть Γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в некоторой плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром Γ.

8. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через начало координат. Вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$. Определить ротор и дивергенцию поля линейных скоростей $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$ точек тела (здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор).

9. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

9.1. $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz,\ S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1,\ M(1,1,1).$

9.2. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z};\ S: 4z + 2x^2 - y^2 = 8,\ M(2,4,4).$

9.3.
$u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz,\ S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1,\ M(1,1,1).$

9.4.
$u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2},\ S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,\ M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$

9.5. $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y},\ S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0,\ M(2,2,4).$

9.6. $u = x\sqrt{y} - yz^2,\ S: x^2 + y^2 = 4z + 9,\ M(2,1,-1).$

9.7. $u = 7\ln\left(1/13 + x^2\right) - 4xyz,\ S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7,\ M(1,1,1).$

9.8. $u = arctg\left(y/x\right) + xz,\ S: x^2 + y^2 - 2z = 10,\ M(2,2,-1).$

9.9.
$u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z},\ S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16,\ M(1,-2,4).$

9.10. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z,\ S: x^2 + y^2 = 24z + 1,\ M(3,4,1).$

10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $\upsilon(x,y,z)$ в точке M .

10.1. $\upsilon = \dfrac{x^2}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,\ u = \dfrac{yz^2}{x^2},\ M\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

10.2. $\upsilon = \dfrac{4\sqrt{6}}{x} - \dfrac{\sqrt{6}}{9y} + \dfrac{3}{z},\ u = x^2 yz^3,\ M\left(2, \dfrac{1}{3}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right).$

10.3. $\upsilon = 9\sqrt{2}x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}},\ u = \dfrac{z^3}{xy^2},\ M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right).$

10.4. $\upsilon = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}z},\ u = \dfrac{z}{x^3 y^2},\ M\left(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

10.5. $\upsilon = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,\ u = \dfrac{x^2}{yz^2},\ M\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

10.6. $\upsilon = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}z^3,\ u = \dfrac{z^2}{xy^2},\ M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right).$

10.7. $\upsilon = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3,\ u = \dfrac{xz^2}{y},\ M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$

10.8. $\upsilon = \dfrac{\sqrt{6}}{2x} - \dfrac{\sqrt{6}}{2y} + \dfrac{2}{3z},\ u = \dfrac{yz^2}{x},\ M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

10.9. $\upsilon = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,\ u = \dfrac{xy^2}{z^2},\ M\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right).$

10.10. $\upsilon = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}z},\ u = \dfrac{x^3y^2}{z},\ M\left(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

11. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{a}$.

11.1. $\vec{a} = 4y\vec{i} - 9x\vec{j}$.

11.2. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}$.

11.3. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 4y\vec{j}$.

11.4. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}$.

11.5. $\vec{a} = x\vec{i} + 4y\vec{j}$.

11.6. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 6z\vec{k}$.

11.7. $\vec{a} = 4z\vec{i} - 9x\vec{k}$.

11.8. $\vec{a} = 2z\vec{i} + 3x\vec{k}$.

11.9. $\vec{a} = 4y\vec{j} + 8z\vec{k}$.

11.10. $\vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}$.

12. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть поверхности S , вырезаемую плоскостями P_1 , P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

12.1. $S : x^2 + y^2 = 1,$

$P_1 : z = 0, \quad P_2 : z = 2.$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$

12.2. $S : x^2 + y^2 = 1,$

$P_1 : z = 0, \quad P_2 : z = 4.$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$

12.3. $S : x^2 + y^2 = 1,$

$P_1 : z = 0, \quad P_2 : z = 3.$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^3\vec{k}$

12.4. $S : x^2 + y^2 = 1,$

$P_1 : z = 0, \quad P_2 : z = 1.$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$

12.5. $S : x^2 + y^2 = 1,$

$P_1 : z = 0, \quad P_2 : z = 5.$

$\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$

12.6. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2.$

$\vec{a} = (x + y)\vec{i} - (x - y)\vec{j} + xyz\vec{k}$

12.7. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 4.$

$\vec{a} = \left(x^3 + xy^2\right)\vec{i} + \left(y^3 + x^2 y\right)\vec{j} + z^2\vec{k}$

12.8. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 3.$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sin z\vec{k}$

12.9. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 5.$

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$

12.10. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2.$

13. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

13.1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$P: x + y + z = 1.$

13.2. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}$

$P: x + y + z = 1.$

13.3. $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$P: x + y + z = 1.$

13.4. $\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$
$P: x + y + z = 1.$

13.5. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}$
$P: x + y + z = 1.$

13.6. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$P: x/2 + y + z = 1.$

13.7. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$
$P: x/2 + y + z = 1.$

13.8. $\vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}$
$P: x/2 + y + z = 1.$

13.9. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$
$P: x + y/2 + z/3 = 1.$

13.10. $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$P: x + y/2 + z/3 = 1.$

14. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

14.1. $\vec{a} = 7x\vec{i} + (5\pi y + 2)\vec{j} + 4\pi z\vec{k},$
$P: x + y/2 + 4z = 1.$

14.2. $\vec{a} = 2\pi x\vec{i} + (7y+2)\vec{j} + 7\pi z\vec{k},$
$P: x + y/2 + z/3 = 1.$

14.3. $\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + \vec{j} - 3z\vec{k},$
$P: x/3 + y + z = 1.$

14.4. $\vec{a} = (2x+1)\vec{i} - y\vec{j} + 3\pi z\vec{k},$
$P: x/3 + y + 2z = 1.$

14.5. $\vec{a} = 7x\vec{i} + 9\pi y\vec{j} + \vec{k},$
$P: x + y/3 + z = 1.$

14.6. $\vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11\pi z\vec{k},$
$P: x + y + z/3 = 1.$

14.7. $\vec{a} = x\vec{i} + (\pi z - 1)\vec{k},$
$P: 2x + y/2 + z/3 = 1.$

14.8. $\vec{a} = 5\pi x\vec{i} + (9y+1)\vec{j} + 4\pi z\vec{k},$
$P: x/2 + y/3 + z/2 = 1.$

14.9. $\vec{a} = 2\vec{i} - y\vec{j} + \left(3\pi/2\right) z\vec{k},$
$P: x/3 + y + z/4 = 1.$

14.10. $\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + (5y+1)\vec{j} + 2\pi z\vec{k},$
$P: 3x + y + z/9 = 1.$

15. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

15.1. $\vec{a} = \left(e^{z} + 2x\right)\vec{i} + e^{x}\vec{j} + e^{y}\vec{k},$
$S: x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

15.2. $\vec{a} = \left(3z^2 + x\right)\vec{i} + \left(e^{x} - 2y\right)\vec{j} + \left(2z - xy\right)\vec{k},$
$S: x^2 + y^2 = z^2,\ \mathrm{z} = 1,\ z = 4.$

15.3. $\vec{a} = \left(\ln y + 7x\right)\vec{i} + \left(\sin z - 2y\right)\vec{j} + \left(e^{y} - 2z\right)\vec{k},$
$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$

15.4. $\vec{a} = \left(\cos z + 3x\right)\vec{i} + \left(x - 2y\right)\vec{j} + \left(3z + y^2\right)\vec{k},$
$S: z^2 = 36\left(x^2 + y^2\right),\ z = 6.$

15.5. $\vec{a} = \left(e^{-z} - x\right)\vec{i} + \left(xz + 3y\right)\vec{j} + \left(z + x^2\right)\vec{k},$
$S: 2x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

15.6. $\vec{a} = \left(6x - \cos y\right)\vec{i} - \left(e^{x} + z\right)\vec{j} - \left(2y + 3z\right)\vec{k},$
$S: x^2 + y^2 = z^2,\ z = 1,\ z = 2.$

15.7. $\vec{a} = \left(4x - 2y^2\right)\vec{i} - \left(\ln z - 4y\right)\vec{j} + \left(x + 3z/4\right)\vec{k},$
$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$

15.8. $\vec{a} = \left(1 + \sqrt{z}\right)\vec{i} + \left(4y - \sqrt{x}\right)\vec{j} + xy\vec{k},$
$S: z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right),\ z = 3.$

15.9. $\vec{a} = \left(\sqrt{z} - x\right)\vec{i} + \left(x - y\right)\vec{j} + \left(y^2 - z\right)\vec{k},$
$S: 3x - 2y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

15.10. $\vec{a} = \left(yz + x\right)\vec{i} + \left(x^2 + y\right)\vec{j} + \left(xy^2 + z\right)\vec{k},$
$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$

16. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

16.1. $$\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{k},\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x,\ z = 0\,(z \ge 0). \end{cases}$$

16.2. $$\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{k},\quad S: \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0. \end{cases}$$

16.3. $$\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k},\quad S: \begin{cases} y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 1\ (x \ge 0) \\ z = y,\ z = 0. \end{cases}$$

16.4. $$\vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j},\quad S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2\,(z \ge 0). \end{cases}$$

16.5. $$\vec{a} = (z+y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k},\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = 2. \end{cases}$$

16.6. $$\vec{a} = x\vec{i} - (x+2y)\,\vec{j} + y\vec{k},\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1,\ z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$$

16.7. $\vec{a} = 2(z-y)\vec{j} + (x-z)\vec{k}$,

$$S:\begin{cases} z = x^2 + 3y^2 + 1,\ z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

16.8. $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$,

$$S:\begin{cases} z = 4 - 2\left(x^2 + y^2\right), \\ z = 2\left(x^2 + y^2\right). \end{cases}$$

16.9. $\vec{a} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 2x\vec{k}$,

$$S:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

16.10. $\vec{a} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$,

$$S:\begin{cases} 3x + 2y = 12,\ 3x + y = 6,\ y = 0, \\ x + y + z = 6,\ z = 0. \end{cases}$$

17. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).

17.1. $\vec{a} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + x^2\right)\vec{j} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0,\ z = 1. \end{cases}$$

17.2. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$,

$$S:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2,\ (z \geq 0). \end{cases}$$

17.3. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0, \ (z \geq 0). \end{cases}$

17.4. $\vec{a} = xz\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$,
$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$

17.5. $\vec{a} = 3xz\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$,
$S: \begin{cases} x + y + z = 2, \ x = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

17.6. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$,
$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = 0 \ (z \geq 0). \end{cases}$

17.7. $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$,
$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

17.8. $\vec{a} = (zx + y)\vec{i} + (zy - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$,
$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0, \ (z \geq 0). \end{cases}$

17.9. $\vec{a} = y^2x\vec{i} + z^2y\vec{j} + x^2z\vec{k}$,
$S: x^2 + y^2 + z = 1.$

17.10. $\vec{a} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 3z\vec{k},$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

18. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

18.1. $\vec{F} = \left(x^2 + 2y\right)\vec{i} + \left(y^2 + 2x\right)\vec{j},$

$L:\ 2\text{-}x^2/8 = y,$

$M\left(-4,0\right),\ N\left(0,2\right).$

18.2. $\vec{F} = \left(x + y\right)\vec{i} + 2x\vec{j},$

$L:\ x^2 + y^2 = 4\ \left(y \geq 0\right),$

$M\left(2,0\right),\ N\left(-2,0\right).$

18.3. $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j},$

$L:\ x^2 + y^2 = 4,\ \left(x \geq 0,\ y \geq 0\right).$

$M\left(2,0\right),\ N\left(0,2\right).$

18.4. $\vec{F} = \left(x + y\right)\vec{i} + \left(x - y\right)\vec{j},$

$L:\ y = x^2,$

$M\left(-1,1\right),\ N\left(1,1\right).$

18.5. $\vec{F} = \left(2xy - y\right)\vec{i} + \left(x^2 + x\right)\vec{j},$

$L:\ x^2 + y^2 = 9,\ \left(y \geq 0\right),$

$M\left(3,0\right),\ N\left(-3,0\right).$

$$\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j},$$
18.6. $L:\ x^2 + y^2/9 = 1\ (x \ge 0,\ y \ge 0),$
$$M(1,0),\ N(0,3).$$

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j},$$
18.7. $L:\ x^2 + y^2 = 1\ (y \ge 0),$
$$M(1,0),\ N(-2,0).$$

$$\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\vec{j},$$
18.8. $L:\begin{cases} x,\ 0 \le x \le 1; \\ 2-x,\ 1 \le x \le 2; \end{cases}$
$$M(2,0),\ N(0,0).$$

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j},$$
18.9. $L:\ x^2 + y^2 = 2,\ (y \ge 0),$
$$M\left(\sqrt{2},0\right),\ N\left(-\sqrt{2},0\right).$$

$$\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j},$$
18.10. $L:\ x^2 + y^2 = 1,\ (x \ge 0,\ y \ge 0),$
$$M(1,0),\ N(0,1).$$

19. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).
$$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k},$$
19.1. $\Gamma:\begin{cases} x = \left(\sqrt{2}/2\right)\cos t,\ y = \left(\sqrt{2}/2\right)\cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$

$\vec{a} = -x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z\vec{k},$

19.2. $\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{4}\cos t,\ y = \sqrt[3]{4}\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k},$

19.3. $\Gamma: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

$\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k},$

19.4. $\Gamma: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \left(\sqrt{2}\sin t\right)\big/2, \\ z = \left(\sqrt{2}\cos t\right)\big/2. \end{cases}$

$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k},$

19.5. $\Gamma: \begin{cases} x = 4\cos t,\ y = 4\sin t, \\ z = 1 - \cos t. \end{cases}$

$\vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k},$

19.6. $\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 2 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

$\vec{a} = 2z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k},$

19.7. $\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k},$

19.8. $\Gamma: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

19.9.
$$\vec{a} = x\vec{i} + z^2\vec{j} + y\vec{k},\quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1. \end{cases}$$

19.10.
$$\vec{a} = 3y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k},\quad \Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t,\ y = 3\sin t, \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t. \end{cases}$$

20. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ.

20.1.
$$\vec{a} = \left(x^2 - y\right)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k},\quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

20.2.
$$\vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k},\quad \Gamma: \begin{cases} z = 5\left(x^2 + y^2\right) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

20.3.
$$\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k},\quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9\ \left(z > 0\right). \end{cases}$$

20.4.
$$\vec{a} = x\vec{i} + yz\vec{j} - x\vec{k},\quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

20.5. $$\vec{a} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

20.6. $$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} z = 3\left(x^2 + y^2\right) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

20.7. $$\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \ (z > 0). \end{cases}$$

20.8. $$\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

20.9. $$\vec{a} = y\vec{i} + (1-x)\vec{j} - z\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \ (z > 0). \end{cases}$$

20.10. $$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

ГЛОССАРИЙ

Абсолютная величина вектора	Magnitude of vector
Аксиальные векторы	Axial vector
Определитель	Determinant
Смешанное произведение	Triple scalar product
Аффинор	Affinor (dyadics)
Направляющие косинусы	Direction cosines
Векторный элемент поверхности	Vector area element
Единичный вектор	Unit vector
Единичный (нормальный) вектор	Normal vector
Вектор	Vector
Интегрирование векторов	Integration of vectors
Векторное произведение	Vector product; vector (cross) product
Векторный дифференциальный оператор	Differential vector operator
Векторный лапласиан	Vector Laplacian
Векторные величины	Vector quantities
Теорема Гаусса	Gauss's theorem
Уравнение Гельмгольца	Helmholtz equation
Градиент	Gradient
Теорема Грина	Green's theorem
Декартовы координаты	Cartesian coordinates
Дивергенция	Divergence
Физическая сущность дивергенции	Physical significance of divergence
Двойное векторное произведение	Triple vector product
Свертывание	Convolution (faltung);
Операция свертывания	Contraction
Закон косинусов	The law of cosines
Символ Кронекера	Kronecker delta
Антисимметричные тензоры	Antisymmetric tensors
Правило суммирования	Sum rules
Безвихревые векторы	Irrotational vectors
Лапласиан	Laplacian
Коэффициенты Ламе	Metric; Lamer's coefficients
Уравнения Максвелла	Maxwell's equations
Ортогональные векторы	Orthogonal vectors
Полярные векторы	Polar vectors
Псевдовекторы	Pseudovectors; axial vectors

Псевдотензоры	Pseudotensors
Радиус-вектор	Radius-vector
Ротор	Curl
Симметричные тензоры	Symmetry tensors
Скаляр	Scalar
Скалярное произведение	Scalar product; dot product of vectors
Скалярная функция	Scalar function
Теорема Стокса	Stoke's theorem
Правило частного	Quotient rule
Тензор	Tensor
- двумерный	- two-dimensional
Тензорные плотности	Tensor density
Приращение длины	Differential length

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
3. Борисенко А.И., Таранов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М.: Высшая школа, 1963. – 262 с.
4. Гречко Л.В., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф. и др. Сборник задач по теоретической физике. – М.: Высшая школа, 1972. – 335 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 140 с.

Дополнительная

1. Жаксыбекова К.А. Руководство к решению задач по электродинамике. Часть 1. – Алматы: Қазақ университеті, 2003.
2. Arfken G.B., Weber H.J. Mathematical Methods for Physicists. – Elsevier, 2005. – 1182 p.
3. Chow T. L. Mathematical Methods for Physicists: a concise introduction. – Cambridge University Press, 2000. – 555 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА ....

1.1. Основные понятия ....

1.2. Поворот системы координат ....

1.3. Скалярное произведение

1.4. Векторное произведение

1.5. Смешанное и двойное векторное произведение трех векторов ....

Векторный анализ (дифференцирование векторов)

1.6. Градиент $\vec{\nabla}$ ....

1.7. Дивергенция ....

1.8. Ротор ....

1.9. Последовательное применение оператора $\vec{\nabla}$ ....

1.10. Интегрирование векторов

1.11. Теорема Гаусса ....

1.12. Теорема Стокса ....

Контрольные вопросы к главе 1 ....

Глава 2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ....

2.1. Криволинейные координаты ....

2.2. Дифференциальные векторные операторы ....

2.3. Декартовы (прямоугольные) координаты ....

2.4. Сферические координаты

2.5. Разделение переменных ....

2.6. Цилиндрические координаты ....

Контрольные вопросы к главе 2 ....

Глава 3. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ....

3.1. Введение. Основные понятия ....

3.2. Прямое произведение ....

3.3. Правило частного ....

3.4. Псевдотензоры ....

3.5. Аффиноры ....

Контрольные вопросы к главе 3 ....

Примеры решения задач ....

Задачи для самостоятельной работы ....

Глоссарий ....

ЛИТЕРАТУРА ....

Учебное издание

Жаксыбекова Кулян Айтмагамбетовна
Жусупов Марат Абжанович
Кабатаева Раушан Сарсембековна

**ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО И
ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА**

Учебное пособие

Второе издание, дополненное

Редактор *Э. Сулейменова*
Компьютерная верстка
и дизайн обложки *К.С. Умирбековой*

В оформлении обложки использованы
фото с сайтов www.sciteclibrary.ru

ИБ № 9283
Подписано в печать 29.03.2016. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Объем 9,37. Тираж 150 экз. Заказ № 873.
Издательский дом «Қазақ университеті»
Казахского национального университета им. аль-Фараби
050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71.

Отпечатано в типографии издательского дома «Қазақ университеті»