МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

# МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

# «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

*посвящается 50-летию создания*
*Института математики и механики АН КазССР*

Алматы 1–5 июня 2015 года

## *ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ*

Алматы – 2015

значения:
$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -1,025199890 \cdot 10^{-3}, \quad \lambda_2 = -1,655432837 \cdot 10^{10}, \\ &\lambda_3 = -1,025199890 \cdot 10^{-3}, \quad \lambda_4 = -1,652313352 \cdot 10^{10}, \\ &\lambda_5 = -1,025199890 \cdot 10^{-3}, \quad \lambda_6 = -1,591840475 \cdot 10^{10}. \end{aligned} \tag{5}$$

Все корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные, поэтому для системы (3) выполняется оценка
$$\|W(t,\tau)\| \leq \Phi_0 \exp\left[-\alpha\,(\mathrm{t}-\tau)\right] \tag{6}$$
для любых $0 \leq t \leq \tau < \infty$, где $\Phi_0$ и $\alpha$ положительные постоянные, а под $\|W(t,\tau)\|$ понимается норма матрицы Коши [6].

Итак, если матрица Коши удовлетворяет неравенству (6), то возмущение не накапливается, а возмущённые и невозмущённые движения стремятся к стационарному предельному режиму.

**Литература**


1. *Anderson D.L., Hart R.S.* An Earth model based on free oscillations and body waves. J.Geoph. Res. // 1976. – Vol.81, No. 8. – P. 1461–1475.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч.II. 6-е изд. – М.: Наука. – 1972. – 332 с.
3. *Мелентьев П.В.* Приближённые вычисления. – М.: Физматхиз. – 1962. – 336 с.
4. *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.* Общая теория вращения Земли. – М.: Наука. – 1984. – 254 с.
5. *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А..* Точное решение задачи о динамической уравновешенности Земли // Вестник АН Каз. ССР, 1975, №3, с. 20–29.
6. *Демин В.Г.* Применение теории В.В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных в задачах небесной механики // Космические исследования. – Т. 2, вып. 5. – 1965. – 716 с.


УДК 517.951


Кошанов Б.Д., Кулимбек Ж.К.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*

*koshanov@list.ru, k.zhazira.93@mail.ru*


## Внешняя трехмерная задача Дирихле для бигармонического уравнения

Для того, чтобы краевая задача для бигармонического уравнения в области $D_e$, внешней по отношению к ограниченной области $D$ с кусочно-глакой границей $S$, имела единственное решение, в постановке задачи помимо краевого условия следует добавить условие на бесконечности. Таким условием является требование регулярности решения на бесконечности.

**Определение 1.** В трехмерном случае функция $u(x)$ называется регулярной на бесконечности, если при достаточно большом $r \geq r_0$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, выполнены неравенства
$$|\,u\,| \leq \frac{A}{r}, |\frac{\partial u}{\partial x}| \leq \frac{A}{r^2}, |\frac{\partial u}{\partial y}| \leq \frac{A}{r^2}, |\frac{\partial u}{\partial z}| \leq \frac{A}{r^2},$$

$$|\triangle u| < \frac{A}{r^3}, |\frac{\partial}{\partial n}\triangle u| < \frac{A}{r^4},$$

где $A > 0$ – некоторая постоянная.

Исследуется для уравнения Пуассона следующая задача Дирихле:

$$\triangle u = -f(x), |x| < 1,$$
$$u|_S = \varphi_0(x), |x| = 1.$$

Имеет место теорема.

**Теорема.** Функция Грина для внутренней [3] и для внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре представима в виде:

$$G_{2,3}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|y| - \frac{y}{|y|}|}.$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для бигармонического уравнения:

$$\triangle^2 u = -f(x), \quad x \in D_e, \tag{1}$$
$$u|_S = \varphi_0(x), \quad x \in S, \tag{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \varphi_1(x), \quad x \in S, \tag{3}$$

$u$ регулярна на бесконечности. (4)

**Определение 2.** Будем называть классическим решением задачи (1)-(4) регулярную на бесконечности функцию $u(x) \in C^{(4)}(D_e) \cap C(\bar{D}_e)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $D_e$ и граничному условию (2)-(3).

Если функция $f(x)$ финитна и непрерывна дифференцируема в $D_e$, а функция $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ непрерывна на поверхности $S$, то существует единственное классическое решение задачи (3)-(5) [1,2]:

$$u(x) = \int\limits_S (G\frac{\partial\triangle u}{\partial n} - \varphi_0(x)\frac{\partial\triangle G}{\partial n})dS_x + \int\limits_S (\triangle G\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} -$$
$$-\triangle u\frac{\partial G}{\partial n})dS_x - \int\limits_{D_e} G(x,y)f(y)dV_y. \tag{5}$$

Для того, чтобы построить функцию $G(x,y)$, достаточно решить задачу для гармонического слагаемого $v(x,y)$ :

$$\begin{cases} \triangle^2 v = 0, & x \in D_e, \\ v|_S = -\frac{1}{4\pi r}, & x \in S, \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_S = \varphi_1(x), & x \in S, \\ v \Longrightarrow 0 & \text{на бесконечности.} \end{cases} \tag{6}$$

## Литература


1. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. - Москва: Изд-во Московского ун-та, 1998.

2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литеретуры, 1981.

3. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008.- Т. 421, № 3. - С. 305-307.