МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СУЛЕЙМАНА ДЕМИРЕЛЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«АЛГЕБРА, АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

посвящается 60-летию академика НАН РК Аскара Серкуловича Джумадильдаева

Алматы, 8–9 апреля 2016 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2016

$$\varphi_{k_0l_0}(x,y) = e^{\pm i(k_0y\pm l_0x)},\ \lambda_{k_0l_0} = \alpha+\beta \Big\} . \tag{8}$$

Одномерный аналог задач (1) и (2) был изучен в работе [1].

Литература

1. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Стабилизация решения уравнения теплопроводности, нагруженного по нуль-мерным многообразиям, с помощью граничных условий // Математический журнал. - 2015. - Т. 15, №4(58). - С. 33-53.

УДК 517.968.7

[1]Арепова Г.Д., [2]Кальменов Т.Ш.

[1]*Институт математики и математического моделирования, (Казахстан, Алматы)*

[2]*Институт математики и математического моделирования, (Казахстан, Алматы)*

e-mail: arepovag@mail.ru, kalmenov@math.kz

О граничном условие поверхностного теплового потенциала

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ конечная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Через D будем обозначать цилиндрическую область $D = \Omega \times (0,T)$. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ тепловой потенциал определяется по формуле

$$u = \Diamond^{-1}f = \varepsilon_n * f = \int_0^t d\tau \int_\Omega \varepsilon_n(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi \tag{1}$$

Известно, что тепловой потенциал $u = \Diamond^{-1}f$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\Diamond u = (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)u = f \tag{2}$$

и нулевому начальному условию

$$u|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

В работе [1] впервые найдены боковые граничные условия теплового потенциала $u = \Diamond^{-1}f$ в следующем виде:

$$-\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau) - \varepsilon_n(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,\tau))d\xi \tag{4}$$

для всех $x \in \partial\Omega$.

В этой же работе показано, что если $u \in W_2^{1,2}(D)$ удовлетворяет уравнению (2), начальному условию (3) и боковому граничному условию (4), то является тепловым потенциалом $u = \Diamond^{-1}f$.

В области D рассмотрим поверхностный тепловой потенциал

$$u = \dot{\Diamond}^{-1} u_0 = \int_\Omega \varepsilon_n(x-\xi, t) u_0(\xi) d\xi, \tag{5}$$

где $\varepsilon_n(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\Diamond u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \triangle_x\right) u = 0, \tag{6}$$

которое имеет вид [2, с. 199]

$$\varepsilon_n(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Хорошо известно, что при $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, поверхностный тепловой потенциал (5) является в области D бесконечно дифференцируемой функцией, принадлежит классу $u \in C(\overline{D})$, удовлетворяет уравнению (6) и начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega. \tag{7}$$

Естественно возникает вопрос о краевых условиях поверхностного потенциала. То есть необходимо найти дополнительные условия (не зависящие от $u_0(x)$), которые вместе с уравнением (6) и начальным условием (8) однозначно определят функцию (5).

Теорема. *Для любой $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ поверхностный тепловой потенциал $u = \dot{\Diamond}^{-1} u_0$ удовлетворяет следующему боковому граничному условию:*

$$-\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x-\xi, t-\tau) u(\xi,\tau) - \varepsilon_n(x-\xi, t-\tau) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,\tau)\right) d\xi \tag{8}$$

для всех $x \in \partial\Omega$.

Обратно, если $u \in W_2^{1,2}(D)$ является решением однородного уравнения теплопроводности

$$\Diamond u = 0, \tag{9}$$

удовлетворяющему начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{10}$$

и боковому граничному условию (8), то и задается в виде поверхностного теплового потенциалом $u = \dot{\Diamond}^{-1} u_0$.

Литература

1. *Кальменов Т. Ш., Токмагамбетов Н.Е.* Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области // Сибирский Математический Журнал. – 2013. – Т. 54, No 6. – С. 1287 – 1293.

2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1981. – 512 с.

УДК 517.926, 519.216

Василина Г.К., Тлеубергенов М.И.
Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы)
e-mail: v_gulmira@mail.ru
Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)
e-mail: marat207@mail.ru

Об экспоненциальной р-устойчивости интегрального многообразия

Данная работа посвящена исследованию экспоненциальной устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями, которая является обобщением задачи об экспоненциальной р-устойчивости невозмущенного движения стохастического уравнения Ито [1].

Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx = X(x(t),t)dt + \sigma(x(t),t)dw(t) + \int\limits_{R^n} f(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du), \qquad (1)$$

где $X(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $f(x,t,u)$ – не случайны, X, f – векторные функции со значениями в R^n, $t \geq 0$, $x \in R^n$, $u \in R^n$, $\sigma(x,t)$ – матричная функция размера $n \times m$, $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ – пуассоновская мера на R^n, $E\nu(t,A) = t\Pi(A)$, процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы между собой, $\Pi(A)$ – мера на σ-алгебре борелевских множеств R^n.

Предположим, что

1) существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|X(x,t)\|^2 + \|\sigma(x,t)\|^2 + \int\limits_{R^n} \|f(x,t,u)\|^2 \Pi(du) \leq L(1 + \|x\|^2);$$

2) функции $X(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $f(x,t,u)$ – непрерывны по совокупности аргументов;

3) выполнено локальное условие Липшица по x, т.е. для любого $R > 0$ найдется постоянная $C_R > 0$ такая, что при $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$

$$\|X(x,t) - X(y,t)\|^2 + \|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)\|^2 +$$
$$+ \int\limits_{R^n} \|f(x,t,u) - f(y,t,u)\|^2 \Pi(du) \leq C_R \|x - y\|^2.$$

Согласно [2, стр. 276], эти условия обеспечивают существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $x^{x_0,t_0}(t)$ 1 с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным справа с вероятностью 1 строго марковским случайным процессом.

Рассмотрим в пространстве R^n поверхность $\Lambda(t)$ заданную системой уравнений

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ – r-мерная вектор-функция, $r \leq n$.

Определение 1. Интегральным многообразием уравнения 1 называется гладкая поверхность $\Lambda(t)$ такая, что из условия $(x(t_0), t_0) \in \Lambda(t_0)$ следует, что с вероятностью 1 $(x(t), t) \in \Lambda(t)$ при всех $t \geq t_0$.

Далее, поверхность 2, являющуюся интегральным многообразием для уравнения 1 (см. теорему 1 из [3]), исследуем на экспоненциальную устойчивость.

Рассмотрим функции Ляпунова вида $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt} : R^r \times R^n \times R^+ \to R^+$ и $V(0; x, t) \equiv 0$.

Обозначим $V_1(x,t) = V(\lambda(x,t), x, t)$. Очевидно, что $V_1(x,t) \in C^{21}_{xt}$. Будем рассматривать такие функции Ляпунова, чтобы

$$\int\limits_{R^n} \left\| [V_1(x + f(x,t,u), t) - V_1(x,t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u)] \right\| \Pi(du) < \infty.$$

Введем следующий производящий оператор

$$\tilde{L}V(\lambda(x,t), x, t) = \tilde{L}V_1(x,t) =$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} tr\left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik}\sigma^T_{jk}\right] +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \left[V_1(x + f(x,t,u), t) - V_1(x,t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u)\right] \Pi(du).$$

Определение 2. Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой 2, уравнения 1 называется p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ $(p > 0)$ при $t \geq t_0 > 0$, если

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\| \to 0} \sup_{t \geq t_0} E\|\lambda(x^{x_0,t_0}(t), t)\|^p = 0.$$

Определение 3. Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой 2, уравнения 1 называется экспоненциально p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ $(p > 0)$, если при некоторых положительных постоянных A и γ

$$E\|\lambda(x^{x_0,t_0}(t), t)\|^p \leq A\|\lambda(x_0,t_0)\|^p \exp\{-\gamma(t - t_0)\}.$$

Применением к процессу $V(\lambda; x, t)$ обобщенной формулы Ито [2, стр. 276] доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема. Если для уравнения 1 и множества 2 существует функция Ляпунова $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 неравенствам

$$k_1\|\lambda(x,t)\|^p \leq V(\lambda; x, t) \leq k_2\|\lambda(x,t)\|^p,$$

$$\widetilde{L}V(\lambda; x, t) \leq -k_3\|\lambda(x,t)\|^p,$$

тогда интегральное многообразие $\Lambda(t)$ 2 уравнения 1 экспоненциально p-устойчиво относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ $(p > 0)$.

Литература

1. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969. - 368 с.

2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. -Киев: Наукова думка, 1968. - 356 с.

3. *Василина Г.К., Тлеубергенов М.И.* О решении задачи стохастической устойчивости интегрального многообразия вторым методом Ляпунова // Укр. матем. журнал. - 2016. -Т. 68, № 1. -С. 14-27.

УДК 517.95

[1,2]Дилдабек Г., [1,3]Ержанов Н.Е., [1,4]Тенгаева А.А.

[1]*Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)*

[2]*Казахский национальный университет им. Аль-Фараби (Казахстан, Алматы)*

[3]*Региональный социально-инновационный университет (Казахстан, Шымкент)*

[4]*Казахский национальный аграрный университет (Казахстан, Алматы)*

e-mail: [2]dildabek.g@gmail.com, [3]imanbaevnur@mail.ru, [4]aijan0973@mail.ru

Функция Грина задачи теплопроводности с краевым условием Самарского-Ионкина

Наряду с классическими краевыми и начально-краевыми задачами, в последнее время внимание многих учёных привлекают задачи математической физики с нелокальными (неклассическими) дополнительными условиями. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для дифференциальных уравнений и как раздел математики, имеющий многочисленные приложения в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. К ним относятся краевые задачи с условиями типа периодичности, с условием Бицадзе-Самарского, с условиями интегрального типа, а также задачи с многоточечными граничными условиями общего вида. Актуальность изучения этих задач обусловлена также наличием ряда физических приложений в области электростатики, электродинамики, теории упругости, физики плазмы, многослойной оптики и т.п.

Возможность представления решения задачи в интегральном виде, основанном на функции Грина начально-краевой задачи имеет существенные преимущества для практики. Интегральное представление решения позволяет дать физическую интерпретацию: сопряженная функция Грина в точке с координатой y_0 в момент

Эта работа была поддержана грантом 0825/ГФ4 МОН РК.

Литература

1. Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР. - 1982. - Т. 265, № 4. - С. 815-819.

2. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. - 1983. - Т. 271, № 6. - С. 1307-1310.

3. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. ММО. - 1952. - Т. 1. - М.-Л.: ГИТТЛ. - С. 187-246.

4. Бияров Б.Н. Корректные сужения и расширения с компактными обратными не принадлежащими классам Шаттена // Математический журнал. - 2014. - Т. 14, № 4. - С. 72-83.

5. Cabada A., Tojo F.A.F. Solutions of the first order linear equation with reflection and general linear conditions // Proceedings of the 6th International Federation of Nonlinear Analysts Conference. - 2012. - P. 1-8.

6. Cabada A., Tojo F.A.F. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions // J. Math.Anal.Appl.- 2014. - V. 412. - P. 529–546.

УДК 517.925, 62.50

Жуматов С.С.

Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)

e-mail: sailau.math@mail.ru

О неустойчивости программного многообразия неявных дифференциальных систем

Неявные дифференциальные системы возникают при моделировании вырожденных физических систем, решении задач робототехники, динамики космических аппаратов, в задачах оптимального управления и т. д. Неявные системы имеют приложения также и в теории построения систем программного движения.

Исследованию неявных дифференциальных систем посвящено ограниченное число работ. В работе [1] эти системы рассмотрены в общем виде. В ней получены достаточные условия устойчивости и ограниченности решений неявных систем относительно некоторых заданных нелинейных функций. Обзор работ по дальнейшим исследованиям приведены в [2].

Целью данной работы является установление некоторых качественных свойств программного многообразия неявных дифференциальных систем с помощью прямого метода Ляпунова.

Рассмотрим неявную дифференциальную систему

$$f\left(t, x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right)\right) = 0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f \in R^k$, $t \in I = (\alpha, \beta)$.

Предположим, что векторная функция $f(t, x, \dot{x})$ обеспечивает существование решений системы (1).

Под решением системы (1) будем понимать непрерывную функцию времени t, существующую на временном интервале $T \subseteq I$, которая всюду $T \backslash S$ удовлетворяет систему (1), где S- не более чем счётное множество.

Программное многообразие $\Omega\left(t\right)$ задается следующим образом

$$\Omega\left(t\right) \equiv \omega\left(t,\ x\right) = 0, \quad \omega \in R^s \quad (s \leq n).$$

Обозначим через Φ множество, образованное при $t \in [t_0, \beta)$, значениями $x(t, t_0, x_0)$ всех решений $x\left(t\right)$, существующих на $[t_0, \beta)$, $t_0 \in \bar{T}$, где $\bar{T}$ –связное множество всевозможных начальных моментов, а через Ψ - многозначную функцию, которая обладает свойством $\Phi\left(t_0, t\right) \subset \Psi\left(t_0, t\right)$, $t_0 \leq t$. Пусть $x_u\left(t\right)$ - известное решение системы (1), $\omega\left(t,\ x_u\left(t\right)\right) = 0$.

Введём некоторые векторные функции q, p, l, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{array}{l} \bar{Q}\left(t, \varepsilon\right) = \left(x \in R^n : \left|q\left(t, \omega\right) - q\left(t, 0\right)\right| \leq \varepsilon, q\left(t, \omega\right) \in R^q, \right. \\ \bar{P}\left(t, \varepsilon\right) = \left(x \in R^n : \left|\,p\left(t, \omega\right) - p\left(t, 0\right)\right| \leq \varepsilon, p\left(t, \omega\right) \in R^p, \right. \\ \bar{L}\left(t, \varepsilon\right) = \left(x \in R^n : \left|\,l\left(t, \omega\right) - l\left(t, 0\right)\right| \leq \varepsilon, l\left(t, \omega\right) \in R^l. \right. \end{array} \tag{2}$$

Ставится задача. Получить условия неустойчивости программного многообразия неявной системы (1) относительно функций q, p, l.

Введём множества:

$$B_\varepsilon = Q(t, \varepsilon) \bigcap \Phi(t_0, t);$$

$$B_\delta\left(\varepsilon\right) = B_\delta \bigcap B_\varepsilon;$$

$$\bar{A}_\varepsilon = \bar{L}\left(t, \varepsilon\right) \bigcap \bar{\Psi}\left(t_0, t\right).$$

Определение 1.Программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) называется неустойчивым относительно заданных функций q, p, если для заданных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T$, $T \subseteq I$ найдётся $\delta\left(t_0, \varepsilon\right) \geq 0$ такое, что $\forall x_0 \in B_\delta\left(\varepsilon\right)$, и $t_0 \leq t$ имеет место соотношение $\omega\left(t, t_0, x_0\right) \notin \bar{A}_\varepsilon$. Здесь $\bar{A}_\varepsilon\left(t_0\right) = \bar{P}\left(t, \varepsilon\right) \bigcap \bar{\Psi}\left(t_0, t\right)$.

Определение 2. Программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) называется ограниченным относительно заданных функций q, p, если для заданных $\delta \geq 0$ и $t_0 \in T$, $T \subseteq I$ найдётся $\varepsilon\left(t_0, \delta\right) \geq 0$ такое, что $\forall x_0 \in B_\varepsilon\left(\delta\right)$, и $t_0 \in T$ имеет место соотношение $\omega\left(t, t_0, x_0\right) \in \bar{A}_\varepsilon$. Здесь $\bar{A}_\varepsilon\left(t_0\right) = \bar{P}\left(t, \varepsilon\right) \bigcap \bar{\Psi}\left(t_0, t\right)$.

Определение 3. Многозначная функция $S(t) \in S_p(R^n), t \in I$ называется незатухающей, если для непрерывной функции $k(t) \in R$, удовлетворяющей соотношениям $k(t_0) \in intS(t_0)$ и $k(t_2) \in S(t_2)$ при $t_0, t_2 \in I, t_0 < t_2$ существует $t_1 \in (t_0, t_2)$ такое, что $k(t) \in S(t), \forall\, t \in [t_0, t_1[$ и $k(t_1) \in \partial S(t_1)$.

Для формулировки основных результатов введём следующие обозначения:

$$a\left(t, \omega\right) = p\left(t, \omega\right) - p\left(t, 0\right);$$

$$D\left(t_0, t, \Phi\right) = P\left(t, \gamma\right) \bigcap \Phi\left(t_0, t\right), \gamma > 0;$$

$$D^{+} f\left(t_0\right) = \lim_{t \to t_0^{+}} \sup \frac{f\left(t\right) - f\left(t_0\right)}{t - t_0}$$

и $\forall v > 0$, удовлетворяющей $\bar{B}_v \subset$ B, где B $\subset R^n$- открытая область, положим, что $V_v = \left\{x \in R^n : V\left(t, q\left(t, \omega\right)\right) \leq \theta\left(v\right)\right\}$.

Здесь D^{+} - правая верхняя производная Дини.

Теорема . Пусть заданы функции q, p, удовлетворяющие условию (2), и существуют непрерывная функция V, которая является локально липшицевой по x, и решение $x_u\left(t\right) \in D\left(t_0, t, \Phi\right)$ такие, что:

1. $\Phi\left(t_0, \delta\right) \neq \emptyset, \forall \delta > 0, \forall t_0 \in T;$
2. $V\left(t, q\left(t, 0\right)\right) \equiv 0, \theta\left(\|a\left(t, \omega\right)\|\right) \leq V\left(t, q\left(t, \omega\right)\right);$
3. $P\left(\cdot, \varepsilon\right)$ *было не затухающим* $\forall \varepsilon \in \left(0, \gamma\right);$
4. $D^{+} V\left(t, q\left(t, \omega\right)\right) \geq 0.$

Тогда программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) неустойчиво относительно функций q, p.

Литература

1. *Bajik V. N.* Non-linear function and stability of motions implicit systems // Int. J. Cont. - 1990. - V. 52, No 5. - P. 1167-1187.

2. *Жуматов С.С.* Асимптотическая устойчивость неявных дифференциальных систем в окрестности программного многообразия // Укр. матем. журнал. - 2014. - Т.66, No 4. - С. 558-565.