Научный журнал Сентябрь, 2013

ВЕСТНИК
Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН

Вычислительные технологии
Часть 2

СОВМЕСТНЫЙ ВЫПУСК

г. Усть-Каменогорск, 2013 г.

Содержание

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. Н. Темирбеков

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

Abstract. In the given work I examine numerical methods of solving Navier-Stokes equations in multiply-connected domains. Two methods of problem solution are examined. The first method is based on setting differential in variable velocity, stream function and use of pressure single value condition. Numerical solution of elliptic equation for stream function is as a sum of two simple problems of elliptic type. One problem is with uniform boundary conditions, and another one with a uniform equation. Alternative approach to solving the set problem is fictive region method with small coefficient extension. This method does not require satisfaction to the condition of pressure uniformity and is simple in realization.
Keywords: Navier-Stokes equation, velocity, pressure, stream function, multiply-connected domain, boundary condition, stability.

Аннотация. В данной работе исследуются численные методы решения уравнений Навье-Стокса в двухсвязных областях. Рассматриваются два метода решения задачи. Первый метод основан на построении разностной задачи в переменных скорость, функция тока и использование условия однозначности давления. Численное решение эллиптического уравнения для функций тока находится как сумма решений двух простых задач эллиптического типа. Одна задача является с однородными граничными условиями, а другая с однородным уравнением. Альтернативный подход к решению поставленной задачи является метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентом. Этот метод не требует удовлетворения условия однозначности давления и является простым в реализаций.
Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, скорость, давления, функция тока, многосвязная область, граничные условия, устойчивость.

Введение

В настоящей работе рассматриваются методы численного решения уравнении Навье – Стокса в многосвязной области. Одна из трудностей численного решения уравнении Навье – Стокса в переменных функции тока и вихря скорости в случае многосвязной области порождается неопределенностью значений функции тока на внутренних границах . Численное решение уравнения Навье – Стокса в многосвязной области рассматривались авторами работ [1-2], в которых предлагается явный метод численного решения уравнении Навье – Стокса в двухсвязной области. Данная задача с использованием условия однозначности давления решена в работе Сироченко В.П. [3]. В работе [4] применялась явная схема которая привела к неустойчивому счету. В предлагаемой работе рассматриваются явная разностная схема для численного решения уравнений Навье-Стокса в многосвязной области с использованием условия однозначности давления и метод фиктивных областей для решения этой задачи. Для моделирования конвективных течении рассмотрим уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска [3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\Delta v - Gr\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr}\Delta\theta, (x,y) \in D, t \in (0,T] \quad (4)$$

с начальными и граничными условиями

$$u = u_0(x,y), v = v_0(x,y), \theta = \theta_0(x,y), (x,y) \in \overline{D}, t = 0 \quad (5)$$

$$u = a_x(x,y,t), v = a_y(x,y,t), \theta = \xi(x,y,t), (x,y) \in \partial D, t \in [0,T] \quad (6)$$

В этой системе u,v-компоненты вектора скорости, p-давленепе, Θ-температура. Re-число Рейнольдса, Gr-число Грасгофа, Pr-число Прандтля, $\partial D = \gamma_1 \bigcup \gamma_2$-граница области D. Задачу (1-6) удобно решать исключением давления из уравнений движения и введением новых переменных-функция тока и завихренности. При доказательстве эквивалентности постановок задач в естественных переменных и в переменных функция тока и завихренность существенную роль играет интегральные условия однозначности давления. В работе Ладыженской О.А. для однозначной разрешимости разностной схемы для уравнения Навье-Стокса к системе уравнений добавляется условие однозначности давления следующего вида

$$\int\int_{\overline{D}} p(x,y)dxdy = 0 \quad (7)$$

Необходимость постановки условия вида (7) связоно с тем, что разностный аналог уравнения (3) не является линейно-независимым. В работе Сироченко В.П. [3] предлагается другой вариант условия однозначности давления которая записывается в виде

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy = 0 \quad (8)$$

где $\prod = p + (u^2 + v^2)/2$-полный напор.

Введем функцию тока ψ и вихрь скорости ω, которые связаны с компонентами скорости u,v следующими соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Задача (1)-(6) в переменных ψ, ω записывается следующим образом [3]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\Delta\omega + Gr\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\Delta\psi = \omega. \quad (11)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{RePr}\Delta\theta,\ (x,y)\in D,\ t\in(0,T], \tag{12}$$

$$\omega=\alpha(x,y),\ \theta=\phi(x,y),\ (x,y)\in\overline{D},\ t=0, \tag{13}$$

$$\psi=\xi_1(x,y,t),\ \frac{\partial\psi}{\partial\overrightarrow{n}}=\eta_1(x,y,t),\ (x,y)\in\gamma_1,\ t\in(0,T], \tag{14}$$

$$\psi=\xi_2(x,y,t)+\lambda(t),\ \frac{\partial\psi}{\partial\overrightarrow{n}}=\eta_2(x,y,t),\ (x,y)\in\gamma_2,\ t\in(0,T], \tag{15}$$

$$\theta=\beta_l(x,y,t),\ (x,y)\in\gamma_l,\ l=1,2,\ t\in(0,T], \tag{16}$$

$\alpha,\phi,\xi_i,\eta_i,\beta_i,\ i=1,2$ -заданные функции. Условие (8) запишем в следующем виде

$$\oint\limits_{\gamma_3}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y}+\omega\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dx+\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}+\omega\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{1}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x}-Gr\theta\right)dy\right]=0 \tag{17}$$

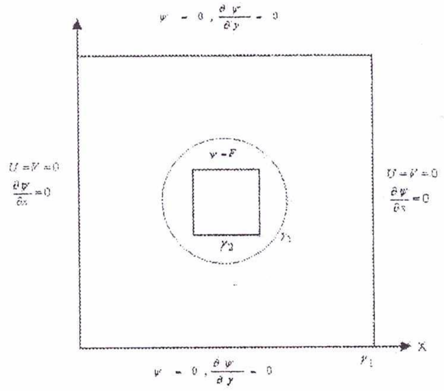

Рисунок 1 Физическая область

Решение задачи (10)-(17) будем искать в виде

$$\omega^{n+1}(x,y)=\omega_0^{n+1}(x,y)+\lambda^{n+1}\omega_1^{n+1}(x,y),$$

$$\psi^{n+1}(x,y)=\psi_0^{n+1}(x,y)+\lambda^{n+1}\psi_1^{n+1}(x,y). \tag{18}$$

I-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_0^{n+1}-\omega^n}{\tau}+\frac{\partial\psi^n}{\partial y}\frac{\partial\omega_0^{n+1}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^n}{\partial x}\frac{\partial\omega_0^{n+1}}{\partial y}=\frac{1}{Re}\Delta\omega_0^{n+1}+Gr\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x}$$

$$\Delta\psi_0^{n+1}=-\omega_0^{n+1},\ \ (x,y)\in D. \tag{19}$$

$$\psi_0^{n+1}|_{\gamma_1}=0,\ \ \frac{\partial\psi_0}{\partial n}|_{\gamma_1}=0,\ \ \psi_0^{n+1}|_{\gamma_2}=0,\ \ \frac{\partial\psi_0}{\partial n}|_{\gamma_2}=0, \tag{20}$$

II-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_1^{n+1}-\omega^n}{\tau}+\frac{\partial\psi^n}{\partial y}\frac{\partial\omega_1^{n+1}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^n}{\partial x}\frac{\partial\omega_1^{n+1}}{\partial y}=\frac{1}{Re}\Delta\omega_1^{n+1} \qquad (21)$$

$$\Delta\psi_1^{n+1}=-\omega_1^{n+1}, \quad (x,y)\in D.$$

$$\psi_1^{n+1}|_{\gamma_1}=0, \quad \frac{\partial\psi_1^{n+1}}{\partial n}|_{\gamma_1}=0, \quad \psi_1^{n+1}|_{\gamma_2}=1, \quad \frac{\partial\psi_1^{n+1}}{\partial n}|_{\gamma_2}=0. \qquad (22)$$

Построем равномерную сетку в области $D_h=\{(x_i,y_i),x_i=(i-1)h_1,y_j=(j-1)h_2,i=0,1,..n_1,j=0,1,..n_2,h_1=l_1/(n_1-1),h_2=l_2/(n_2-1)$ Предположим что область D_0 является прямоугольником $D_{0h}=\{(x,y),x_{k1}\le x\le x_{k2},y_{m1}\le y\le y_{m2}\}$ $x_i=(i-1)h_1,y_j=(j-1)h_2,i=0,1,..n_1,j=0,1,..n_2$ узлы равномерной сетки построеный в области D. Рассмотрим область D_1 охватывающий область D_0, т.е.$D_0\subset D_1$. $D_1=\{(x,y),x_{k3}\le x\le x_{k4},y_{m3}\le y\le y_{m4}\}$ Рассмотрим разностный аналог условия (17) и подставляя разложение вида (18) получим

$$M\alpha^{n+1}=N \qquad (23)$$

где

$$M=\sum_{j=m3}^{m4}[\psi_{1,x,k3,j}^{n+1}/\tau+0.5\omega_{1,k3+1,j}^{n+1}\psi_{\bar{y},k3,j}^{n}+0.5\omega_{1,k3,j}^{n+1}\psi_{\bar{y},k3+1,j}^{n}-$$

$$-\frac{1}{Re}\omega_{1,x,k3,j}^{n+1}-\beta g\theta_{k3+1/2,j}^{n+1}]h_2+$$

$$+\sum_{i=k3}^{k4}[\psi_{1,\bar{y},i,m4}^{n+1}/\tau+0.5\omega_{1,i,m4-1}^{n+1}\psi_{\dot{x},i,m4}+$$

$$+0.5\omega_{1,i,m4}^{n+1}\psi_{\dot{x},i,m4-1}^{n}+\frac{1}{Re}\omega_{1,\bar{y},i,m4}^{n+1}]h_1- \qquad (24)$$

$$-\sum_{j=m3}^{m4}[\psi_{1,x,k4,j}^{n+1}/\tau+0.5\omega_{1,k4+1,j}^{n+1}\psi_{\bar{y},k4,j}^{n}+0.5\omega_{1,k4,j}^{n+1}\psi_{\bar{y},k4+1,j}^{n}-$$

$$-\frac{1}{Re}\omega_{1,x,k4,j}-\beta g\theta_{k4+1/2,j}^{n+1}]h_2-$$

$$-\sum_{j=k3}^{k4}[\psi_{1,\bar{y},i,m3}^{n+1}/\tau+0.5\omega_{1,i,m3-1}^{n+1}\psi_{\dot{x},i,m3}+$$

$$+0.5\omega_{1,i,m3}^{n+1}\psi_{\dot{x},i,m3-1}^{n}+\frac{1}{Re}\omega_{1,\bar{y},i,m3}^{n+1}]h_1$$

$$N = \sum_{j=m3}^{m4} [-\psi^{n+1}_{0,x,k3,j}/\tau - \psi^{n}_{x,k3,j}/\tau + 0.5\omega^{n+1}_{0,k3+1,j}\psi^{n}_{\bar{y},k3,j} + 0.5\omega^{n+1}_{0,k3,j}\psi^{n}_{\dot{x},k3+1,j} -$$

$$-\frac{1}{Re}\omega^{n+1}_{0,x,k3,j} - \beta g\theta^{n+1}_{k3+1/2,j}]h_2 +$$

$$+\sum_{i=k3}^{k4}[\psi^{n+1}_{0,\bar{y},i,m4}/\tau - \psi^{n}_{\bar{y},i,m4}/\tau + 0.5\omega^{n+1}_{0,i,m4-1}\psi_{\dot{x},i,m4} +$$

$$+0.5\omega^{n+1}_{0,i,m4}\psi^{n}_{\dot{x},i,m4-1} + \frac{1}{Re}\omega^{n+1}_{0,\bar{y},i,m4}]h_1 \tag{25}$$

$$\sum_{j=m3}^{m4}[-\psi^{n+1}_{0,x,k4,j}/\tau - \psi^{n}_{x,k4,j}/\tau + 0.5\omega^{n+1}_{0,k4+1,j}\psi^{n}_{\bar{y},k4,j} + 0.5\omega^{n+1}_{0,k4,j}\psi^{n}_{\dot{x},k4+1,j} -$$

$$-\frac{1}{Re}\omega^{n+1}_{0,x,k4,j} - \beta g\theta^{n+1}_{k4+1/2,j}]h_2 +$$

$$+\sum_{i=k3}^{k4}[\psi^{n+1}_{0,\bar{y},i,m3}/\tau - \psi^{n}_{\bar{y},i,m3}/\tau + 0.5\omega^{n+1}_{0,i,m3-1}\psi_{\dot{x},i,m3} +$$

$$+0.5\omega^{n+1}_{0,i,m3}\psi^{n}_{\dot{x},i,m3-1} + \frac{1}{Re}\omega^{n+1}_{0,\bar{y},i,m3}]h_1$$

Рассмотрим метод фиктивных областей [6] для решения задачи (10)-(17)

$$\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{Re}\Delta\omega^\varepsilon + Gr\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x} - div(k(x,y)\nabla\psi). \tag{26}$$

$$\Delta\psi^\varepsilon = \omega^\varepsilon \tag{27}$$

$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{RePr}\Delta\theta^\varepsilon \tag{28}$$

$$\psi^\varepsilon|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial\vec{n}}|_{\gamma_1} = 0. \tag{29}$$

$$\theta^\varepsilon = \beta_l(x,y,t), \ \ (x,y)\in\gamma_l, \ \ l = 1,2, \ \ t\in(0,T] \tag{30}$$

где

$$k(x,y) = 1, (x,y)\in D_0$$

$$k(x,y) = 0, (x,y)\in D/D_0 \tag{31}$$

Таким образом, рассмотрены два метода решений уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока, вихрь скорости. Разработан явный метод решения уравнении с учетом условия однозначности давления. Это условие позволяет определить коэффициент, который используется в формуле (18). Рассмотренными методами проведены численные расчеты конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости в двухсвязной области.

Список литературы

[1] Фром Дж. Неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 343-381.

[2] Суд Элрод. Численное решение уравнений Навье-Стокса в двусвязных областях для течения несжимаемой жидкости // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12. №5. С. 76-82.

[3] Сироченко В. П. Численное моделирование конвективных течении вязкой жидкости в многосвязных областях // Труды Международной конференции RDAMM-2001. 2001. Т. 6. Ч. 2. Спец.выпуск. С. 554-562.

[4] Adlam J.H. Computation of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal bodies. // Computers and Fluids. 1986. Vol. 14. N2. P. 141-157.

[5] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Издательство. Наука. 2-е издание. 1970.

[6] Смагулов Ш.С., Темирбеков Н.М., Камаубаев К. Моделирование методом фиктивных областей условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сиб. журн.вычисл. мат. 2000. Т. 3, №1. С. 57-62

УДК 532.517.7

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ «ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ» РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ

Н.М. Темирбеков

Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова

Abstract. This article contains one-dimensional problem of gas dynamics of malleable gas with contact gap in Lagrang's variables. For numerical solution of this problem was used Newton's method in detail. This method allow to turn the equations difference scheme of gas dynamics into the "three punctual" linear systems, they are solving with scalar screw. The effect and economy of numerical algorithms are confirmed by the realization them during minimum-machine time with saving adequate accuracy. The received results are set in graphics form.
Keywords: viscous compressible gas, the contact gap, the equation of gas dynamics.

Аңдатпа. Бұл жұмыста Лагранж айнымалысында бір өлшемді түйіспелі үзілісті тұтқыр газдың газ динамика есебі қарастырылған. Берілген есепті сандық іске асыру үшін Ньютон әдісі қолданылған. Бұл әдіспен газ динамика теңдеулер жүйесінің айырымдық сұлбасын сызықты «үшнүктелі» жүйеге келтірілген. Сызықты «үшнүктелі» жүйе скаляр куалау әдісімен шешілген. Сандық алгоритмнің тиімділігі және үнемділігі жеткілікті дәлдікпен аз уақытта іске асырылуымен расталады. Алынған нәтижелер график түрінде де көрсетілген.
Кілттік сөздер: сығылатын тұтқыр газ, кенеттен өзгеру байқалатын аймақ, газ динамикасының теңдеуі.