КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

МАТЕРИАЛЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

«М И Р Н А У К И»

под девизом «Интеллектуальный прорыв: молодежь, наука и инновации»

(19-22 АПРЕЛЯ)

АЛМАТЫ 2010

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:

Бектемесов М.А.	декан механико-математического факультета, доцент
Сералин Г.А.	заместитель декана
Данаев Н.Т.	директор НИИ ММ, профессор
Даирбаева Л.М.	ученый секретарь НИИ ММ, доцент
Кабидолданова А.А.	председатель Совета НИРС
Абдибеков У.С.	зав. кафедрой математического и компьютерного моделирования, профессор
Бадаев С.А.	зав. кафедрой геометрии, алгебры и математической логики, профессор
Серовайский С.Я.	зав. кафедрой теории управления, профессор
Аканбай Н.	зав. кафедрой функционального анализа и теории вероятностей, доцент
Дауылбаев М.К.	зав. кафедрой дифференциальных уравнений и математической физики, профессор
Кангужин Б.Е.	зав. кафедрой математического анализа, профессор
Ракишева З.Б.	зав. кафедрой механики, доцент
Тукеев У.А.	зав. кафедрой информационных систем, профессор
Шакенов К.К.	зав. кафедрой вычислительной математики, профессор
Ахмед-Заки Д.Ж.	зав. кафедрой информатики
Артюхин Т.А.	председатель НСО, студент 4 к., кафедра теории управления
Исахов А.А.	магистрант 2 года обучения, кафедра математического и компьютерного моделирования
Азанова А.Н.	магистрант 2 года обучения, кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
Толеуханов А.Е.	магистрант 1 года обучения, кафедра математического анализа
Бибосинов А.	магистрант 2 года обучения, кафедра механики
Грачева О.	магистрант 1 года обучения, кафедра геометрии, алгебры и математической логики
Монастырева В.В.	магистрант 2 года обучения, кафедра теории управления
Джумабаев А.Д.	магистрант 2 года обучения, кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
Бектемесов А.Т.	магистрант 2 года обучения, кафедра информатики
Кусембаева К.К.	магистрант 1 года обучения, кафедра механики

Редакционная коллегия:

Бектемесов М.А., Данаев Н.Т., Даирбаева Л.М., Кабидолданова А.А., Алимжанов Е.С.

Материалы Международной конференции студентов и молодых ученых «Мир науки» под девизом «Интеллектуальный прорыв: молодежь, наука и инновации» (19-22 апреля). - Алматы: Қазақ университеті, 2010. – 224 с.

ISBN 9965-29-490-9

Материалы, публикуемые в сборнике, являются изложением докладов студентов и молодых ученых на международной конференции студентов и молодых ученых «Мир науки» по вопросам математики, механики, прикладной математики и информатики.

ISBN 9965-29-490-9

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А.Н. ТЕМИРБЕКОВ, К.Е. ШЕРНИЯЗОВ

В работе рассматривается задача дискретизации решения уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f \qquad ((x,y)\in(0,\,a)\times(0,\,b))$$

непрерывного вплоть до границы $T\equiv[0,\,a]\times[0,\,b]$ и удовлетворящих граничным условиям

$$u(x,\,0)=g_1(x),\; u(x,\,b)=g_2(x) \qquad (0\le x\le a)$$
$$u(0,\,y)=g_3(y),\; u(a,\,y)=g_4(y) \qquad (0\le y\le b)$$

где правая часть $f(x,\;y)$ –периодическая функция из пространства Соболева $W_2^{r_1}([0,a]\times[0,\,b])$ $(r_1>1)$, граничные условия $g_1(x)$, $g_2(x)$ из класса $W_2^{r_2}([0,a])$, а $g_3(y)$, $g_4(y)$ из класса $W_2^{r_2}([0,b])$ $(r_2>1/2)$, удовлетворяющие условию $g_i(0)=g_i(a)=0$ $(i=1,2)$ и $g_i(0)=g_i(b)=0$ $(i=3,\,4)$.

Отметим, что для уравнения Лапласа (т.е. при $f\equiv 0$) задача дискретизации рассмотрена в [1], где получены оптимальные на рассматриваемых классах алгоритмы.

В случае ненулевой правой части f (т.е. уравнения Пуассона) и нулевых граничных условий $g_i\equiv 0$ $(i=1,2,3,\,4)$ для произвольного числа переменных задачи дискретизации рассматривались в работах Н.М. Коробова [2], а также в [3]. Но в этих работах на f накладывалось существенное ограничение. А именно, требовалось нечетность по каждой переменной.

В настоящей работе в рассматриваемом двумерном случае при любой непрерывной и периодической правой части $f\,(x,\,y)$ и при любых непрерывных граничных условиях g_i $(i=1,\,2,\,3,\,4)$ для дискретизации соответствующего решения $u(x,\,y;\,f,\,g)$ задачи (1)-(2) предлагается следующий алгоритм (или оператор приближенного восстановления)

$$T_{N_1,\,N_2}(f,g)\,(x,y)=T^{(0)}_{N_1}f\;\;(x,y)+T^{(1)}_{N_1,N_2}(f\;,g_1)\,(x,y)+T^{(2)}_{N_1,N_2}(f\;,g_2)\,(x,y)+$$
$$+T^{(3)}_{N_1,N_2}(f\;,g_3)\,(x,y)+T^{(4)}_{N_1,N_2}(f\;,g_4)\,(x,y)-T^{(0)}_{N_1}f\;\;(0{,}0)\,,$$

где

$$T^{(0)}_{N_1}f\;\;(x,y)=\frac{1}{N_1}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\;f\left(a\frac{k_1}{n},\,b\frac{k_2}{n}\right)\cdot\left(\omega_0(x,\,y)+V^{(0)}_{N_1}\left(x-a\frac{k_1}{n},y-b\frac{k_2}{n}\right)\right)\qquad (N_1=n^2)$$

с

$$V^{(0)}_{N_1}(x,y)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\,\in\left(Z^2\setminus\{0\}\right)\cap\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)^2}\left(\frac{m_1^2}{a^2}+\frac{m_2^2}{b^2}\right)^{-1}\exp\left(2\pi i\left(\frac{m_1x}{a}+\frac{m_2y}{b}\right)\right),$$

$$\omega_0(x,\,y)=\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2\right)\Big/4\,,$$

и, кроме того, при $i=1,\,2$

$$T^{(i)}_{N_2}(f, g_i)(x,y) = \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{[N_2/2]} \left(g_i\left(2a\frac{k}{N_2}\right) - T^{(0)}_{N_1} f\left(2a\frac{k}{N_2},0\right) + T^{(0)}_{N_1} f(0,0)\right)\cdot V^{(i)}_{N_2}\left(x-2a\frac{k}{N},y\right) +$$

$$+\frac{1}{N_2}\sum_{k=[N_2/2]+1}^{N_2}\left(-g_i\left(2a\left(1-\frac{k}{N_2}\right)\right) + T^{(0)}_{N_1} f\left(2a\left(1-\frac{k}{N_2}\right),0\right) - T^{(0)}_{N_1}f(0,0)\right)\cdot V^{(i)}_{N_2}\left(x-2a\frac{k}{N},y\right)$$

$$V^{(1)}_{N_2}(x,y) = \sum_{\substack{m=-[N_2/4],\\ m\neq 0}}^{[N_2/4]} \frac{sh(|m|(b-y))}{sh(|m|b)}\cdot e^{\frac{\pi}{a}imx}\ ;\ V^{(2)}_{N_2}(x,y) = \sum_{\substack{m=-[N_2/4],\\ m\neq 0}}^{[N_2/4]} \frac{sh(|m|y)}{sh(|m|b)}\cdot e^{\frac{\pi}{a}imx},$$

и, наконец, при $i=3, 4$

$$T^{(i)}_{N_2}(f, g_i)(x,y) = \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{[N_2/2]} \left(g_i\left(2b\frac{k}{N_2}\right) - T^{(0)}_{N_1} f\left(0,\ 2b\frac{k}{N_2}\right) + T^{(0)}_{N_1} f(0,0)\right)\cdot V^{(i)}_{N_2}\left(x, y-2b\frac{k}{N_2}\right) +$$

$$+\frac{1}{N_2}\sum_{k=[N_2/2]+1}^{N_2}\left(-g_i\left(2b\left(1-\frac{k}{N_2}\right)\right) + T^{(0)}_{N_1} f\left(0,\ 2b\left(1-\frac{k}{N_2}\right)\right) - T^{(0)}_{N_1}f(0,0)\right)\cdot V^{(i)}_{N_2}\left(x, y-2b\frac{k}{N}\right)$$

$$V^{(3)}_{N_2}(x,y) = \sum_{\substack{m=-[N_2/4],\\ m\neq 0}}^{[N_2/4]} \frac{sh(|m|(a-x))}{sh(|m|a)}\cdot e^{\frac{\pi}{b}imy}\ ;\ V^{(4)}_{N_2}(x,y) = \sum_{\substack{m=-[N_2/4],\\ m\neq 0}}^{[N_2/4]} \frac{sh(|m|x)}{sh(|m|a)}\cdot e^{\frac{\pi}{b}imy}.$$

Можно показать, что на указанных выше классах Соболева при некоторых $\alpha_i = \alpha_i(r_1, r_2) > 0$ $(i=1,2)$ имеет место

$$\sup_{(x,y)\in[0,a]\times[0,b]} \left| u\ (x,y; f,\ g) - T_N(f,g)\ (x,y)\right| \le c\ (f,g,r_1,\ r_2)\cdot\left(N_1^{-\alpha_1} + N_2^{-\alpha_2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берикханова М.Е., Наурызбаев К.Ж., Шерниязов К.Е. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике по значениям граничных функций // Тез. Межд. конф. "Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий". - Алматы, 2006. -

2. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. - М.: Физмат-гиз, 1963. – 224.

3. Баилов Е.А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений уравнения Пуассона // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2006. - Т. 46, №9. - С. 1594-1604.

4. Берикханова М.Е. Об информативных мощностях всевозможных линейных функционалов при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа// Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук по спец. 01.01.01 –мат. ан. –Алматы, 2007.