Қ.ЖҰБАНОВ АТЫНДАҒЫ АҚТӨБЕ
ӨҢІРЛІК МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

АКТЮБИНСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ К.ЖУБАНОВА

AKTOBE REGIONAL STATE UNIVERSITY
NAMED AFTER K. ZHUBANOV

«АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР: ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ БЕРУДЕГІ ИННОВАЦИЯЛАР» ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕРИАЛДАРЫ

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ: ИННОВАЦИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ»

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE «INFORMATION TECHNOLOGIES: INNOVATIONS IN SCIENCE AND EDUCATION»

Ақтөбе, 2015
Aktobe, 2015

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ және ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.ЖҰБАНОВ атындағы
АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ
Ministry of Science and education of the Republic of Kazakhstan
Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov

«АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР: ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ БЕРУДЕГІ ИННОВАЦИЯЛАР»
«Information Technologies: Innovations in Science and Education»

ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ-ПРАКТИКАЛЫҚ КОНФЕРЕНЦИЯ

INTERNATIONAL SCIENTIFIC-PRACTICAL CONFERENCE

МАТЕРИАЛДАРЫ
PROCEEDINGS

АҚТӨБЕ – 2015
AKTOBE – 2015

УДК 51:004
ББК 22.1
А37

А37 «Ақпараттық технологиялар: ғылым және білім берудегі инновациялар» халықаралық ғылыми-практикалық конференция материалдары. Ақтөбе, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, 2015. - 545 б.

ISBN 978-9965-631-25-2

Жинақтағы жарияланған материалдар мазмұны бағдарламалық қамсыздандыруды және аппараттық құралдарды құру және енгізу, дифференциалдық теңдеулер және математиканың қолданбалы мәселелері, математикалық және компьютерлік модельдеу, білім берудегі ақпараттық технологиялар проблемаларының әртүрлі бағыттағы өзекті мәселелерді қамтиды.

ISBN 978-9965-631-25-2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.К. Дауылбаев, Н. Атахан
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Работа посвящена качественному исследованию асимптотического по малому параметру поведения решений краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений произвольного порядка с интегральным оператором типа Фредгольма. Для сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения построены фундаментальная система решений, начальные и граничные функции. С помощью начальных и граничных функции получены явная аналитическая формула решений. Получены асимптотические оценки решений исходной краевой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, сингулярное возмущенние, асимптотическое разложение, начальный скачок, малый параметр.

Рассмотрим на отрезке [0,1] следующее линейное сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$h_i y \equiv \sum_{j=0}^{m+1-i}\left[\alpha_{ij}y^{(j)}(0,\varepsilon) + \beta_{ij}y^{(j)}(1,\varepsilon)\right] = a_i, \quad i=\overline{1,n} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, a_{ij}, β_{ij}, a_i , $i=\overline{1,n}$ - некоторые известные постоянные, не зависящие от ε , $m = fix \in \{0,1,\ldots,n-2\}$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t)$, $F(t)$, $i=\overline{1,n}$ являются достаточно гладкими на отрезке [0,1], а $H_i(t,x), i=\overline{0,n-1}$ - в области $D=(0\le t\le 1,\ 0\le x\le 1)$.

II. $A_1(t) \ge \gamma = const > 0,\ 0 \le t \le 1$.

III. $\alpha_{1,m} \ne 0$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y = 0 \tag{3}$$

При условии I, II для фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n}$ уравнения (3) справедливы асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления:

$$\begin{cases} y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = y_{i0}^{(j)}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{0,n-1}, \\ y_n^{(j)}(t,\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^j}\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)dx\right)\cdot(\mu^i(t)y_{n0}(t) + O(\varepsilon)),\ j=\overline{0,n-1}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mu(t) = -A_1(t) < 0$, функции $y_{i0}(t), i=\overline{1,n-1}$является решением задачи $L_0 y_{i0} \equiv A_1(t)y_{i0}^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y_{i0} = 0$, $y_{i0}^{(j)}(0) = \delta_{i-1,j}$

а $y_{n0}(t) = \left(A_1(0)/A_1(t)\right)^{n-1}\exp\left(\int_0^t \left(A_2(x)/A_1(x)\right)dx\right)$.

Пусть функция $K(t,s,\varepsilon)$ при $0 \le s \le t \le 1$, является решением задачи

$$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0,\ K^{(j)}(s,s,\varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0,n-2}, \quad K^{(n-1)}(s,s,\varepsilon) = 1$$

Для функций Коши $K(t,s,\varepsilon)$ в виде [1]справедливы при $0 \le s \le t \le 1$следующие оценки:

$$\left|K^{(j)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon,\ j = \overline{0,n-2},\ \left|K^{(n-1)}(t,s,\varepsilon)\right| \le C\left(\varepsilon + \exp\left(-\frac{\gamma(t-s)}{\varepsilon}\right)\right) \tag{5}$$

где $C > 0,\ \gamma > 0 -$постоянные, не зависящие от ε.

Теперь введем функции $\Phi_k(t,\varepsilon), k = \overline{1,n}$ называемые граничными функциями, являющиеся решениями задачи: $L_\varepsilon \Phi_k(t,\varepsilon) = 0,\ k = \overline{1,n}, h_i \Phi_k(t,\varepsilon) = \delta_{ik},\ i = \overline{1,n}$. Функции $\Phi_k(t,\varepsilon), k = \overline{1,n}$ представимы в виде:

$$\Phi_k(t,\varepsilon) = \frac{\Delta_k(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{6}$$

Где $\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t,\varepsilon) & \ldots & h_1 y_n(t,\varepsilon) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n y_1(t,\varepsilon) & \ldots & h_n y_n(t,\varepsilon) \end{vmatrix}$, а $\Delta_k(t,\varepsilon)$ - определитель, получаемый из $\Delta(\varepsilon)$ заменой его $k -$ой строки фундаментальной системой решений $y_1(t,\varepsilon),\ldots,y_n(t,\varepsilon)$ уравнения (3). Для $\Delta(\varepsilon)$ с учетом (2), (4) справедливо представление

$$\Delta(\varepsilon) = (-1)^{1+n}\frac{\mu^m(0)}{\varepsilon^m}\left(\alpha_{1,m}\overline{\Delta} + O(\varepsilon)\right), \tag{7}$$

где $\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} h_2 y_{10} & \ldots & h_2 y_{n-1,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n y_{10} & \ldots & h_n y_{n-1,0} \end{vmatrix}$. Пусть выполнено условие

IV. $\overline{\Delta} \ne 0$

Тогда для граничных функций $\Phi_k(t,\varepsilon), k = \overline{1,n}$ из (6) с учетом (2), (4), (7) имеем следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ оценки:

$$\left|\Phi_1^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(\varepsilon + \varepsilon^{m-j}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\ j = \overline{0,n-1}, \tag{8}$$

$$\left|\Phi_k^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1 + \varepsilon^{m-j}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = \overline{0,n-1}; \quad k = \overline{2,n}$$

V. Пусть $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра $H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 \sum_{i-0}^{m+1} H_i(t,x)K^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx$.

Тогда:решениезадачи (1), (2) будем искать в виде [2]:

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} C_k Q_k(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \tag{9}$$

где

$$Q_k(t,\varepsilon) = \Phi_k(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_k(s,\varepsilon)ds,\ P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 K(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds$$

$$\overline{\varphi_k}(t,\varepsilon) = \varphi_k(t,\varepsilon) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon)\varphi_k(s,\varepsilon)ds,\ k = \overline{1,n}\ \overline{F}(t,\varepsilon) \equiv F(t) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon)F(s)ds,$$

$\varphi_k(t,\varepsilon)=\int\limits_0^1\sum\limits_{i=0}^{m+1}H_i(t,x)\Phi_k^{(i)}(x,\varepsilon)dx,\ k=\overline{1,n}$, а $R(t,s,\varepsilon)-$ резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$,

$C_i, i=\overline{1,n}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1(1+d_{11}(\varepsilon))+C_2\ d_{12}(\varepsilon)\cdot+...+C_n d_{1n}(\varepsilon)=a_1-e_1(\varepsilon), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 d_{n1}(\varepsilon)+C_2\ d_{n2}(\varepsilon)\cdot+...+C_n(1+d_{1n}(\varepsilon))=a_n-e_n(\varepsilon) \end{cases} \tag{11}$$

где

$$d_{ik}(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{m+1-i}\frac{\beta_{ij}}{\varepsilon}\int\limits_0^1 K^{(j)}(1,s,\varepsilon)\overline{\varphi}_k(s)ds,\quad k,i=\overline{1,n},$$

$$e_i(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{m+1-i}\frac{\beta_{ij}}{\varepsilon}\int\limits_0^1 K^{(j)}(1,s,\varepsilon)\overline{F}(s)ds,\ i=\overline{1,n} \tag{12}$$

С учетом (5), (10), (12) для главного определителя $\delta(\varepsilon)$ системы (11) справедливо асимптотическое представление $\delta(\varepsilon)=\overline{\delta}+O(\varepsilon)$, где $\overline{\delta}=\begin{vmatrix} 1+\overline{d}_{11} & \overline{d}_{12} & \ldots & \overline{d}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{d}_{n1} & \overline{d}_{n2} & \ldots & 1+\overline{d}_{nn} \end{vmatrix}$.

Предположим, что выполнено условие

VI. $\overline{\delta}\neq 0$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия I-VI. Тогда для решения $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2)на отрезке $0\le t\le 1$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le\frac{C}{\overline{\delta}}\left[\frac{1}{\alpha_{1,m}}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot\max_{0\le t\le 1}|H_{m+1}(t,0)|+\sum_{k=2}^{n}|a_k|+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot\varepsilon^{m-i}\exp\left(-\gamma\frac{t}{\varepsilon}\right)+\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right],\ j=\overline{0,n-1} \tag{13}$$

Из оценок (13) следует

$y^{(i)}(0,\varepsilon)=O(1),\ i=\overline{0,m},\ \ y^{(m+i)}(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^i}\right),\ i=\overline{1,n-m-1},\ \ \varepsilon\to 0$, т.е. решение краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка m - го порядка.

$$L_0\overline{y}(t)\equiv A_1(t)\overline{y}^{(n-1)}(t)+\sum_{i=2}^{n}A_i(t)\overline{y}^{(n-i)}(t)=F(t)+\int\limits_0^1\sum_{i=0}^{m+1}H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)dx+\Delta(t) \tag{14}$$

с краевыми условиями:

$$h_1\overline{y}(t)\equiv\sum_{j=0}^{m}\left[\alpha_{1j}y^{(j)}(0)+\beta_{1j}y^{(j)}(1)\right]=\ a_1-\alpha_{1,m}\Delta_0,$$
$$h_i\overline{y}(t)\equiv\sum_{j=0}^{m+1-i}\left[\alpha_{ij}y^{(j)}(0)+\beta_{ij}y^{(j)}(1)\right]=a_i,\ i=\overline{2,n}, \tag{15}$$

где $\Delta(t),\Delta_0$ – пока неизвестные, так называемые, начальные скачки интегрального члена решения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия I-VIи $\Delta(t)=\Delta_0\cdot H_{m+1}(t,0)$. Тогда для разности между решением $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) и решением $\overline{y}(t)$ невозмущенной краевой задачи (14), (15) получаемследующие асимптотические при $\varepsilon\to 0$ оценки:

$$\left| y^{(i)}(t,\varepsilon) - \overline{y}^{(i)}(t) \right| \le C\left[\varepsilon + \varepsilon^{m-i}\exp(-\gamma\frac{t}{\varepsilon})\right],\ i=\overline{0,n-1}, \tag{16}$$

где $C > 0,\ \gamma > 0 -$ постоянные, не зависящие от ε.

Из оценок (16) получаем следующие предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(i)}(t),\ i=\overline{0,m-1},\quad 0\le t\le 1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(m+i)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(m+i)}(t),\ i=\overline{0,n-1-m},\quad 0< t\le 1.$$

Список литературы

1. Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. Алматы: Изд-во Санат, 1997. 195 с.

2. Дауылбаев М.К. Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Учебное пособие. Алматы, Изд-во «Қазақ университетi», 2009. 190 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ТИПА СТЕФАНА

С.К.Джанабекова, М.Р.Кулиманова, Н.К.Нугыманова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Рассмотрена задача теории изотермической фильтрации жидкости в пористой среде, допускающее автомодельное решение в двумерном случае и построен эффективный вычислительный алгоритм относительно давления при наличии свободной границей между несмешивающихся жидкостей.

Ключевые слова: задача Стефана, закон Дарси, изотермическая фильтрация, капиллярное давление.

Работа посвящена дальнейшему исследованию задач изотермической фильтрации. Схема исследования состоит из: вывода уравнений с помощью потенциала скорости система уравнений составного типа приведена более удобному виду относительно давления и насыщенности, относительно насыщенности показано применение автомодельных переменных и приведение к задаче типа Стефана, затем построен вычислительный алгоритм для численной реализаций на ЭВМ.

1. Вывод уравнений. Пусть $\rho_{\alpha},\ \mu_{\alpha}$ и p_{α} соответственно, плотность, коэффициент жидкости и давление каждой из фаз: воды ($\rho_{в}, \mu_{в}, p_{в}$) и нефти ($\rho_{н}, \mu_{н}, p_{н}$). Как в [2], вводятся потенциалы Φ_{α} по формулам

$$\Phi_{в} = p_{в} + \rho_{в}\cdot g\cdot h,\quad \Phi_{н} = p_{н} + \rho_{н}\cdot g\cdot h, \tag{1}$$

где h – высота точки над фиксированным уровнем, g – ускорение силы тяжести. Обобщенный закон Дарси для каждой из фаз при указанных предположениях принимает вид [1]:

$$\vec{\vartheta} = -k_{\alpha}\cdot\nabla\Phi_{\alpha},\ \ (\alpha = в, н) \tag{2}$$

где $k = K(x,y,\Phi_{\alpha})\cdot\tilde{k}(s)$ - коэффициент фильтрации. В случае учета капиллярных сил давления $p_{н}$ и $p_{в}$ связаны между собой соотношением Лапласа

$$p_{н}(x,y,t) - p_{в}(x,y,t) = p_{k}(s), \tag{3}$$

где $p_k(s)$ - капиллярное давление, причем для гидрофильного пласта $\frac{dp_k}{ds} < 0$. Относительно насыщенности каждой из фаз исходя из уравнения неразрывности имеем:

Мазмұны

СЕКЦИЯ 2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ҚОЛДАНБАЛЫ МӘСЕЛЕЛЕРІ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ