XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа 2015 года. С. 4157-4158.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДАМИ МОНТЕ-КАРЛО И ВЕРОЯТНОСТНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

К.К. Шакенов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

shakenov2000@mail.ru

Аннотация. Рассматривается модель фильтрации по простейшему неравновесному закону в упругой пористой среде. Ставятся трехмерные задачи Дирихле, Неймана и смешанная задача, и эти задачи численно решаются алгоритмами «блуждания по сферам», «блуждания по шарам» и «блуждания по решеткам» методов Монте-Карло и вероятностно-разностным методом.

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В книге [1] приведены основные принципы и выведены уравнения, описывающие фильтрацию однофазной слабосжимаемой жидкости в однородных, изотропных коллекторах с учетом релаксационных явлений. Линейная релаксационная фильтрация описывается законом сохранения импульса сил сопротивления, линеаризованным законом сохранения массы жидкости, определяющими соотношениями для импульса сил сопротивления и массы жидкости. Эта система уравнений, после исключения плотности импульса сил сопротивления ($\mathbf{J}$) и ($m\cdot\rho$), относительно давления (p) и скорости фильтрации ($\mathbf{W}$) имеет вид:

$$\Delta p(x,t)=\frac{\mathrm{F}(0)\Phi(0)}{\rho_0}\cdot\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}+\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{F}(0)}{\rho_0}\cdot\frac{d\Phi(t')}{dt'}+\frac{\Phi(0)}{\rho_0}\cdot\frac{d\,\mathrm{F}(t')}{dt'}+\frac{1}{\rho_0}\int_0^{t'}\frac{d\,\mathrm{F}(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{d\Phi(t'-\tau)}{d(t'-\tau)}d\tau\right)\cdot\frac{\partial^2 p(x,t-t')}{\partial(t-t')^2}dt',\quad(1)$$

$$\mathrm{grad}_x\left(p(x,t)\right)=-\mathrm{F}(0)\cdot\frac{\partial\mathbf{W}(x,t)}{\partial t}-\int_0^{\infty}\frac{d\,\mathrm{F}(t')}{dt'}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}(x,t-t')}{\partial(t-t')}dt'.\quad(2)$$

Здесь $\mathrm{F}(t)$ и $\Phi(t)$ называются ядрами релаксации закона фильтрации и массы жидкости соответственно.

Рассматривается модель фильтрации по простейшему неравновесному закону в упругой пористой среде $\Omega\in\mathbb{R}^3$. В этом случае ядра релаксации имеют вид

$$\mathrm{F}(t)=\frac{\mu}{\kappa}\left(t+\left(\tau_W-\tau_p\right)\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)\right)\right)\cdot\eta(t),\quad(3)$$

$$\Phi(t)=\rho_0\cdot\beta\cdot\eta(t).\quad(4)$$

Система (1), (2) записываются в виде

$$\chi\cdot\Delta\left(p(x,t)+\tau_p\cdot\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(p(x,t)+\tau_W\cdot\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right),\quad(5)$$

$$-\frac{\kappa}{\mu}\cdot\mathrm{grad}_x\left(p(x,t)+\tau_p\cdot\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right)=\mathbf{W}(x,t)+\tau_W\cdot\frac{\partial\mathbf{W}(x,t)}{\partial t}.\quad(6)$$

Здесь $p(x,t)$ – давление жидкости, $x\in\Omega\in\mathbb{R}^3$, t – время, $t\in[0,\ T]$, t' – время, τ – время релаксации, ρ_0 – плотность жидкости в невозмущенных пластовых условиях, $\mathbf{W}(x,t)$ – скорости фильтрации, μ – вязкость жидкости, κ – коэффициент проницаемости, τ_W и τ_p – неотрицательные постоянные времена релаксации соответственно скорости фильтрации и давления, β – коэффициент упругоёмкости пласта, $\beta=\beta_c+m_0\cdot\beta_f$, β_c – коэффициент сжимаемости пористой среды, β_f – коэффициент сжимаемости жидкости, $\eta(t)=\begin{cases}1 & \text{при}\ \ t>0,\\ 1/2 & \text{при}\ \ t=0,\\ 0 & \text{при}\ \ t<0\end{cases}$ – функция Хевисайда, χ – коэффициент пьезопроводности пласта, $\chi=\dfrac{\kappa}{\mu\cdot\beta}$. [1].

В подземной механике часто рассматривается только давление. Из уравнения (5) находим давление (численно) и, подставляя его в (6), легко находим скорость фильтрации. Поэтому мы будем рассматривать только уравнение (5).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть при $t=0$ выполнены начальные условия, то есть

$$p(x,t)=a(x),\quad t=0,\ \ x\in\Omega,\quad(7)$$

и

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = b(x), \quad t=0, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

а на границе $\partial\Omega$ области Ω выполнены условия:

1) Дирихле: $p(x,t) = p_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T]$, (9)

2) Неймана: $\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = p_2(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, (10)

3) смешанная: $\alpha(x,t)\, p(x,t) + \beta(x,t) \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = p_3(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T]$, (11)

где $a(x)$, $b(x)$, $p_1(x,t)$, $p_2(x,t)$, $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$, $p_3(x,t)$ – заданные функции.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО

Итак, мы получили следующие начально-краевые задачи: 1) Дирихле (5), (7)–(9); 2) Неймана (5), (7), (8), (10) и 3) смешанная (5), (7), (8), (11). Пусть коэффициенты χ, τ_p, τ_W, κ, μ – положительные заданные величины. После дискретизации (5), (7), (8), (9)–(11) только по временной переменной $t \in [0,T]$ с шагом $\Delta\tau$, $t_n = n \cdot \Delta\tau$, $n = 0,1,2,...,N$, $\Delta\tau = \dfrac{T}{N}$, $\Delta\tau > 0$, мы (5) запишем для t_{n+1} слоя по времени в виде

$$\Delta p^{n+1}(x) - a_1 p^{n+1}(x) = f^n(x), \tag{12}$$

где $a_1 = \dfrac{\Delta\tau + \tau_W}{\Delta\tau\chi(\Delta\tau + \tau_p)} > 0$, $f^n(x) = \dfrac{\tau_p}{\Delta\tau + \tau_p} \Delta p^n(x) - \dfrac{\Delta\tau + 2\tau_W}{\Delta\tau\chi(\Delta\tau + \tau_p)} p^n(x) + \dfrac{\tau_W}{\Delta\tau\chi(\Delta\tau + \tau_p)} p^{n-1}(x)$. Начальные условия (7), (8) примут вид соответственно:

$$p^0(x) = a(x), \quad x \in \Omega, \tag{13}$$

$$\frac{p^1(x) - p^0(x)}{\Delta\tau} = b(x), \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

а условие Дирихле (9) записывается в виде

$$p^{n+1}(x) = p_1^{n+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{15}$$

условие Неймана (10) записывается в виде

$$\frac{\partial p^{n+1}(x)}{\partial \mathbf{n}} = p_2^{n+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{16}$$

смешанное условие (11) примет вид

$$\alpha^{n+1}(x) p^{n+1}(x) + \beta^{n+1}(x) \frac{\partial p^{n+1}(x)}{\partial \mathbf{n}} = p_3^{n+1}(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{17}$$

Заметим, что уравнение (12) для каждого временного слоя $n = 2,3,...,N-1$ является уравнением Гельмгольца. Здесь учитывается, что для $n = 0,\ 1$ известны функции $p^0(x)$ и $p^1(x)$ в силу начальных условий (13) и (14). Далее, (12) с учетом (13) и (14), с условием (15) является задачей Дирихле для уравнения Гельмгольца на временных слоях $n = 2,3,...,N-1$, а (12) с учетом (13) и (14), с условием (16) является задачей Неймана для уравнения Гельмгольца на временных слоях $n = 2,3,...,N-1$ и (12) с учетом (13) и (14), с условием (17) является смешанной задачей для уравнения Гельмгольца на временных слоях $n = 2,3,...,N-1$. Последние три задачи численно решаются алгоритмами «блуждания по сферам», «блуждания по шарам» и «блуждания по решеткам» методов Монте–Карло и вероятностно-разностным методом. [2–4].

Литература

1. Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Изд-во Казанского университета, 1987. 106 с.
2. Shakenov K. Solution of one mixed problem for equation of relaxational filtration by Monte Carlo methods// Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Volume 93. Advances in High Performance Computing and Computational Sciences. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. P. 205-210.
3. Shakenov K.K. Solution of problem for one model of relaxational filtration by probability–difference and Monte Carlo methods// Polish Academy of Sciences. Committee of Mining. Archives of Mining Sciences. 2007. V. 52 (2). P. 247-255.
4. Shakenov K. The solution of the initial mixed boundary value problem for hyperbolic equations by Monte Carlo and probability difference methods. Trends in Mathematics. Fourier Analysis. Pseudo-differential operators, time-frequency analysis and partial differential equations. Switzerland: Birkhäuser, Springer International Publishing, 2014. P. 349-355.