

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
КОМИТЕТ НАУКИ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

**«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»**

*посвящается 50-летию создания*

*Института математики и механики АН КазССР*

Алматы 1–5 июня 2015 года

***ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ***

Алматы – 2015

## МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Академик НАН РК Т.Ш. Кальменов (председатель, Казахстан), вице-министр МОН РК Т.О. Балыкбаев (сопредседатель, Казахстан), академик РАН В.А. Левин (Россия), академик РАН И.А. Тайманов (Россия), член-корр. РАН С.И. Кабанихин (Россия), академик НАН Беларуси В.И. Корзюк (Беларусь), академик АН РУз Ш.А. Алимов (Узбекистан), академик АН РУз М.С. Салахитдинов (Узбекистан), академик АН РТ Н.Р. Раджабов (Таджикистан), академик НАНА Ф.А. Алиев (Азербайджан), академик НАН РК М. Отелбаев (Казахстан), академик НАН РК Н.К. Блиев (Казахстан), академик НАН РК С.Н. Харин (Казахстан), академик НАН РК А.С. Джумадильдаев (Казахстан), академик НИА РК С.У. Джолдасбеков (Казахстан), член-корр. НАН РК М.Н. Калимолдаев (Казахстан), проф. А.П. Солдатов (Россия), проф. К.К. Кенжебаев (Казахстан), проф. Д.Ж. Ахмед-Заки (Казахстан).

## ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Академик НАН РК Т.Ш. Кальменов (председатель), член-корр. НАН РК Байжанов Б.С. (заместитель председателя), профессор Л.А. Алексеева, профессор Г.И. Бижанова, профессор В.Г. Воинов, профессор Н.С. Даирбеков, профессор М.Т. Дженалиев, профессор Д.С. Джумабаев, профессор С.С. Жуматов, профессор А.Ж. Калтаев, профессор Б.Т. Маткаримов, профессор А.Ж. Найманова, профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор Р.О.Ойнаров, член-корр. НАН РК М.А. Садыбеков, профессор А.М. Сарсенби, профессор Е.С. Смаилов, к.ф.-м.н. М.А. Сахауева (секретарь).

## СЕКЦИИ

### 1. Дифференциальные уравнения

Руководители секции — Т.Ш. Кальменов, Д.С. Джумабаев, М.А. Садыбеков.

### 2. Теория функций и функциональный анализ

Руководители секции — Д.Б. Базарханов, Н.К. Блиев, М. Отелбаев.

### 3. Алгебра, математическая логика и геометрия

Руководители секции — Б.С. Байжанов, А.С. Джумадильдаев, И.А. Тайманов.

### 4. Математическая физика и математическое моделирование

Руководители секции — Г.И. Бижанова, М.Т. Дженалиев, С.Н. Харин.

### 4. Информационные технологии и вычислительная математика

Руководители секции — Д.Ж. Ахмед-Заки, М.Н.Калимолдаев, Б.Т. Маткаримов.

### 6. Механика и машиноведение

Руководители секции — А.А. Алексеева, С.У. Джолдасбеков, А.Ж. Найманова.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 Дифференциальные уравнения	19
<i>Абдикаликова Г.А.</i> Разрешимость нелокальной краевой задачи с интегральным условием для системы уравнений в частных производных .....	19
<i>Абдуллаев В.М.</i> Численное решение одной обратно-коэффициентной задачи для нагруженного уравнения .....	21
<i>Айсагалиев С.А., Жунусова Ж.Х.</i> Об одном методе построения решения краевой задачи с параметром .....	23
<i>Алдибеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.</i> О центральных показателях дифференциальных систем.....	26
<i>Арепова Г.Д., Кальменов Т.Ш.</i> О квазиспектральном разложении теплового потенциала .....	28
<i>Аттаев А.Х.</i> Характеристические задачи для нагруженного волнового уравнения с особым сдвигом.....	29
<i>Бакирова Э.А., Исакова Н.Б.</i> О корректной разрешимости аппроксимирующей краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений .....	30
<i>Балкизов Ж.А.</i> Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения .....	31
<i>Бапаев К.Б.</i> Устойчивость и бифуркация резонансных разностно-динамических систем (РДС) .....	33
<i>Бердышев А.С., Серикбаев Д.А.</i> Вольттеровость аналога задачи Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с интегральными условиями сопряжения .....	34
<i>Бержанов А.Б., Кенжебаев К.К.</i> Многопериодическое по части переменных решение одной системы уравнений в частных производных .....	36
<i>Билал Ш.</i> Об одном свойстве оператора Штурма-Лиувилля .....	37
<i>Василлина Г.К.</i> Об оптимальной по вероятности стабилизации программного движения .....	41
<i>Джумабаев Д.С.</i> О свойствах семейств краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма .....	43

<i>Жапсарбаева Л.К.</i> Об одной полупериодической нелинейной задаче на полосе для вырождающейся эллиптической системы второго порядка .....	45
<i>Жуматов С.С.</i> Неустойчивость программного многообразия систем управлений с разрывными нелинейностями .....	46
<i>Зикиров О.С.</i> Об одной нелокальной задаче Стеклова для псевдогиперболического уравнения .....	48
<i>Иманбаев Н.С.</i> Характеристический определитель спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с интегральным возмущением краевого условия .....	49
<i>Искакова У.А.</i> Причины некорректности локальной задачи Коши для уравнения Лапласа .....	50
<i>Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шилинин М.А.</i> Новые методы регуляризации задачи продолжения .....	51
<i>Кабидолданова А.А.</i> Построение ограниченного управления для дискретных систем .....	53
<i>Кангуужин Б.Е., Абдуазитова Г.Е., Шаймерденова А.К.</i> Операторы преобразования для дифференциальных уравнений четвертого порядка с неаналитическими коэффициентами .....	56
<i>Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А.</i> Построение многопериодических решений матричного уравнения типа Риккати .....	58
<i>Кошанов Б.Д.</i> Представление функции Грина и их свойства для полигармонических уравнений .....	60
<i>Крицков Л.В., Сарсенби А.М.</i> Базисность в $L_p$ корневых функций одной нелокальной задачи для уравнения с инволюцией .....	63
<i>Муратбеков М.Б.</i> О существовании резольвенты и дискретности спектра оператора Шредингера с отрицательным параметром .....	64
<i>Муратбеков М.Б., Игисинов С.Ж.</i> О существовании резольвенты и разделимости одного класса сингулярных дифференциальных операторов гиперболического типа в неограниченной области .....	65
<i>Муратбеков М.Б., Мусилимов Б.М.</i> О существовании и единственности решений одного класса дифференциальных уравнений с переменными операторными коэффициентами .....	67
<i>Назарова К.Ж.</i> Об одном решении нелинейной двухточечной краевой задачи .....	68

<i>Панкратова И.Н.</i> О периодах циклов лучей линейных неотрицательных операторов в $\mathbb{R}^n$ .....	69
<i>Пирматов Ш.Т.</i> О необходимых условиях разложимости распределений по собственным функциям бигармонического оператора .....	71
<i>Псху А.В.</i> Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования распределенного порядка .....	73
<i>Рамазанова Х.С.</i> Неравенство типа Пиконе для полулинейного уравнения второго порядка и теоремы сравнения .....	74
<i>Сабитбек Б., Сураган Д.</i> К вопросам спектральной геометрии для оператора односкоростного переноса частиц .....	75
<i>Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.</i> Обратные задачи для вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа .....	76
<i>Сабитова Ю.К.</i> Нелокальная начально-граничная задача для вырождающегося гиперболического уравнения .....	78
<i>Садыбеков М.А.</i> Критерий базисности системы собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями .....	79
<i>Сартабанов Ж.А., Мухамбетова А.А.</i> Разрешимость одной однородной краевой задачи .....	80
<i>Сламжанова С.С.</i> Необходимые и достаточные условия асимптотической эквивалентности разностно-динамических систем .....	82
<i>Тасмамбетов Ж.Н.</i> Произведения логарифмических решений систем типа Бесселя .....	83
<i>Глеубергенов М.И., Ибраева Г.Т.</i> О построении управляющих по сносу параметров в задаче восстановления .....	85
<i>Токибетов Ж.А.</i> Граничные условия потенциала оператора Коши-Римана .....	87
<i>Торбек Б.Т.</i> Представление функции Грина спектральной задачи Стеклова в круге .....	88
<i>Турметов Б.Х.</i> О разрешимости дробных аналогов задачи Неймана для полигармонического уравнения .....	90

<i>Турсунов Э.А.</i> Предельный переход в системе сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае смены устойчивости .....	91
<i>Турсунов Д.А., Эркебаев У.З.</i> Метод погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце .....	93
<i>Тюреходжаев А.Н., Карыбаева Г.А.</i> Построение аналитического решения одного нелинейного уравнения параболического типа .....	96
<i>Утешова Р.Е., Абильдаева А.Д.</i> Сингулярные краевые задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения на конечном интервале .....	97
<i>Халдыбаева И.Т., Абдыкайымова Г.А.</i> Оценка субоптимальности в интервальной задаче оптимального управления с запаздыванием ..	98
<i>Хасанов А.Х., Сеилханова Р.Б., Сейлова Р.Д.</i> Линейно-независимые решения одного класса вырождающегося дифференциального уравнения третьего порядка и некоторые свойства гипергеометрической функции Кампе де Ферьет .....	100
<i>Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Шоманбаева М.Т</i> Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному спектру .....	102
<i>Шыракбаев А.Б.</i> О гладкости решений одного класса вырождающихся уравнений неклассического типа .....	104
<i>Abiev N.A.</i> On classification of semi-hyperbolic singular points of Ricci flows .....	105
<i>Abiev N.A., Turtkulbayeva Z.O.</i> On separatrices of Ricci flows in a neighborhood of linear zero singular point .....	107
<i>Akzhigitov E.A., Assanova A.T.</i> On the solvability of a nonlocal problem with integral conditions for system of partial differential equations of the special form .....	109
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E.</i> On the solvability of a multi-point boundary value problem for a differential equation third order .....	110
<i>Danilov V.Y., Kravets V.I., Marchuk N.A.</i> Optimal control of linear and nonlinear stochastic systems with quadratic on control cost functional	112
<i>Kalmenov T.Sh., Kassymov A.</i> An isoperemetric inequality of $s_1$ for the inverse to the Cauchy-Robin heat operator .....	113

<i>Kalmenov T.Sh., Oralsyn G.</i> Constructing correct nonlocal boundary value problems for elliptic differential equations with variable coefficients .....	114
<i>Mogilova V.V.</i> Exponential dichotomy for discrete linear systems .....	116
<i>Oralsyn G.</i> An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient for the heat equation from an integral condition .....	117
<i>Stanzhytskyi O.M., Lavrova O.E.</i> Pontryagin maximum principle for dynamic systems on time scales.....	118
<i>Suleimenov Zh.</i> On the existence and stability of quasi-periodic solutions of a quasilinear system of differential equations.....	118
<i>Suragan D.</i> A boundary condition of the Newton potential on Heisenberg groups .....	121
<i>Tungatarov A.</i> Cauchy Problem for some nonlinear system of second order ordinary differential equations.....	123
<b>2 Теория функций и функциональный анализ</b>	<b>124</b>
<i>Абылаева А.М., Кабиден А.Д.</i> Весовые оценки оператора типа Хольмгрена в весовых пространствах Лебега .....	124
<i>Айсагалиев С.А.</i> К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода ...	126
<i>Акишев Г.</i> Об оценках билинейной аппроксимации классов в пространстве со смешанной нормой.....	129
<i>Аскарлов А.А.</i> Обобщение формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши с непрерывной ограниченной плотностью по действительной оси ....	131
<i>Бимендина А.У., Токмагамбетов Н.С.</i> Преобразования ряда Фурье-Прайса.....	132
<i>Бокаев Н.А., Сыздыкова А.Т.</i> О взаимосвязи двух классов функций, определенных рядами по системе Хаара.....	133
<i>Даркенбаева Г.С.</i> Регрессий с медленно меняющимися регрессорами.....	137
<i>Кусаинова Л.К.</i> Оценки $s$ -чисел одномерных дифференциальных операторов.....	138

<i>Ойнаров Р.</i>	
Интегральные операторы в функциональных пространствах . . . . .	140
<i>Оспанов К.Н.</i>	
Максимальная регулярность и условия дискретности спектра полного дифференциального оператора второго порядка . . . . .	142
<i>Оспанова А.Б.</i>	
Теоремы вложения разностных весовых пространств . . . . .	144
<i>Смаилов Е.С.</i>	
Теорема типа теоремы Пэли для рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца . . . . .	146
<i>Темиргалиев Н.</i>	
Некоторые результаты оптимального выбора вычислительных агрегатов и случайные процессы . . . . .	147
<i>Фалалеев Л.П.</i>	
Сходимость средних Чезаро и Рисса тригонометрических полиномов . . . . .	149
<i>Халмухамедов, А. Абдикайимова Г.А.</i>	
О полноте положительного конуса в упорядоченных векторных пространствах . . . . .	151
<i>Bekjan T., Kairat A.</i>	
Characterization of subdiagonal algebras on noncommutative Lorentz spaces . . . . .	152
<i>Bliev N.K.</i>	
On continuous solutions of the Carleman-Vekua equation with the pole type singular point generalized Riemann-Hilbert's problem . . . . .	154
<i>Kalybay A.A., Temirkhanova A.M.</i>	
A new discrete Hardy-type inequality with kernels . . . . .	156
<i>Nursultanov, E.D., Tleukhanova, N.T.</i>	
Recovery operator of periodic functions . . . . .	158
<i>Nursultanov, E.D., Tikhonov, S.Y., Tleukhanova, N.T.</i>	
Norm convolution inequalities in $L_p$ . . . . .	159
<i>Persson, L.E., Shaimardan, S.</i>	
Some new Hardy-type inequalities for Riemann-Liouville fractional $q$ integral operator . . . . .	161
<i>Pyra N.</i>	
Additive regression for scaled t data with residual autocorrelation . . .	165



*Shaimardan, S .*

Hardy-type inequality for Riemann-Liouville fractional integral operator  
in  $q$ -analysis spaces..... 165

3 Алгебра, математическая логика и геометрия 168

*Адашев Ж.К., Омиров Б.А.* Одномерные центральные расширения  
градуированных филиформных алгебр Лейбница ..... 168

*Алексеева Л.А., Азиз Г.Н.* Обобщенные решения модифицированных  
уравнений Максвелла на основе их бикватернионного представления  
и их свойства ..... 170

*Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш.* Ортогональность семейства выпуклых  
компонент в циклически упорядоченных структурах ..... 171

*Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах распределений бинарных изолирующих  
формул теории одноместных предикатов с унарной функцией. Пне  
связаны никаким термом ..... 173

*Замбарная Т.С.* Счётные модели теорий с линейным порядком ..... 175

*Зоркальцев В.И.* Наименее удаленные от начала координат точки  
линейных многообразий и полиэдров ..... 175

*Исахов Ас.А.* Минимальные элементы в полурешетках Роджерса  
обобщенно вычислимых семейств всюду определенных функций .. 177

*Касинов А.Н.* Максимальные диаграммы Хассе ..... 179

*Коньрханова А.А., Хисамиев Н.Г.* О вычислимых подгруппах групп  
 $UT_n(Z[x])$  ..... 180

*Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., Емельянов Д.Ю.* Задачи  
сопряжения, возникающие при линеаризации одной нелинейной  
задачи со свободными границами..... 182

*Кунгожин А.М.* Нахождение базисных тождеств одной алгебры  
нечеткой логики ..... 184

*Латкин И.В., Хисамиев Н.Г.* Вычислимость нильпотентного  
произведения вычислимых абелевых групп без кручения ..... 185

*Мажитова А.Д.* Субриманова задача на трехмерной разрешимой  
группе Ли  $SOLV^+$  с правоинвариантным распределением ..... 187

*Макажанова Т.Х.* Неподвижные точки отображений упорядоченных  
пространств ..... 189

<i>Ревин Д.О.</i> Обобщение теоремы Виланда о нильпотентных холловых подгруппах.....	190
<i>Abdykassymova S.</i> Assosymmetric operad is not Koszul .....	191
<i>Alexeyeva L.A.</i> Biquaternionic wave equations and generalized solutions	193
<i>Baizhanov B.S., Yershigeshova A.D.</i> Weak and almost orthogonality of types .....	194
<i>Baizhanov S.S.</i> Model completeness of the expansion of weakly o-minimal theories .....	195
<i>Biyarova N.B</i> Definability of 2-types in weakly o-minimal theories .....	195
<i>Dzhumadil'daev A.S., Bagdarov Y.A., Sultamuratov R.S.</i> Symmetries of n-trees .....	198
<i>Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N</i> Jordan elements in a free associative algebra .....	200
<i>Yeshkeyev A.R.</i> Jonsson sets and model-theoretic properties of its closures .....	201
<i>Mammadova G.H.</i> About properties of two-parameter bilinear sequential machines .....	203
<i>Saulebayeva T.</i> Countable models of almost o-minimal theories .....	206
<i>Sudoplatov S.V.</i> Criteria for Ehrenfeuchtness of disjoint P-combinations and E-combinations .....	207
<i>Tazabekova N. S.</i> Neighborhoods and the number of countable models .	209
<i>Umbetbayev O.A.</i> Inessential expansions of Ehrenfeucht theories .....	210
<i>Zhakhayev B.K.</i> Representations of Symmetric Group on 1 - asymmetric trees .....	211
<b>4 Математическая физика и математическое моделирование</b>	<b>214</b>
<i>Құрмансейіт М.Б., Қалтаев А., Кульджабеков А.Б.</i> Уранды жерасты шаймалау арқылы өндіру процессін ағын сызығы әдісімен модельдеу .....	214
<i>Абенов М.М.</i> О континууме точных решений общего уравнения неразрывности .	215
<i>Абылкаиров У.У.</i> Классическая однозначная разрешимость начально-краевой задачи	

для квазистационарной системы Навье-Стокса неоднородной жидкости.....	216
<i>Абылкаиров У.У., Айтжанов С.Е., Кайыржан М., Мырзахмедова Б.А.</i> Восстановление функций источника для параболического уравнения с переменными показателями нелинейностями .....	217
<i>Абылкаиров У.У., Хомпыш Х.</i> Обратная задача для уравнений Кельвина-Фойгта .....	219
<i>Айда-заде К.Р., Кулиев С.З.</i> Определение коэффициента гидравлического сопротивления линейных участков нефтепровода при неустановившемся режиме движения * .....	221
<i>Айменова К.А., Иманбердиев К.Б.</i> Об алгоритме решения некорректной задачи для уравнения Пуассона .....	223
<i>Айтжанов С.Е., Бекболат Б., Нурланова А.Н., Нурыженова Ж.С., Толеубеккызы К.</i> 'Разрушение' решения обратной задачи псевдопараболического уравнения .....	225
<i>Алимжанов Е.С.</i> Задача Веригина с малым параметром .....	227
<i>Аманбаев Т.Р., Тилеуов Г., Тулегенова Б., Бейсебаева А.</i> Моделирование процесса седиментации кластеров частиц с учетом .....	227
<i>Амангалиева М.М., Джениалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.</i> О разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода со спектральным параметром .....	229
<i>Асадова Д.А.</i> Численный подход к исследованию нестационарных процессов в трубопроводах сложной закольцованной структуры .....	230
<i>Ахманова Д.М., Мергембаева А.Ж., Шалдыкова Б.А.</i> Об одном сингулярном интегральном уравнении Вольтерра второго рода .....	232
<i>Джобулаева Ж.К.</i> Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан, Алматы .....	234

<i>Жанболова А.К.</i> Решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с нагрузкой в виде производной первого порядка .....	235
<i>Жаркенов А.Б.</i> Оценка сверху величины рыночного риска методом VaR .....	237
<i>Исмаилов Б.Р., Исмаилов Х.Б.</i> Математическое моделирование процесса каталитического пиролиза синтеза углеродных нанотрубок с учетом концентрации промежуточных радикалов .....	239
<i>Кабдрахова С.С., Кадирбаева Ж.М.</i> Оценки сходимости модификации метода ломаных Эйлера решения линейного гиперболического уравнения с интегральными краевыми условиями .....	240
<i>Кабдрахова С.С., Темешева С.М.</i> О начальном приближении для семейства нелинейных двухточечных краевых задач .....	241
<i>Калиева А.К., Туленбаев К.М.</i> Математическая модель движения капсулы в пожаротушении .....	242
<i>Колесникова С.И.</i> Управление нелинейными многомерными объектами при выводе на заданное многообразие .....	243
<i>Коржымбаев Т.Т.</i> Анализ решения уравнений поступательно-вращательного движения послойно изменяемой Земли .....	245
<i>Кошанов Б.Д., Кулимбек Ж.К.</i> Внешняя трехмерная задача Дирихле для бигармонического уравнения .....	247
<i>Кошкарова Б.С.</i> К задаче об истечении тяжелой жидкости из-под щита .....	249
<i>Куан М., Кудайкулов А.А.</i> Метод численного исследования течения несжимаемой жидкости в канале путём решения уравнений Навье-Стокса на основе схем высокого порядка точности .....	250
<i>Могульский А.А., Китапбаев Е.</i> О постановке стохастических задач управления и задач об оптимальной остановке .....	251
<i>Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А.</i> Моделирование линейных дискретных динамических систем с	

ограниченным управлением.....	251	
<i>Мустапокулов Х.Я.</i>		
Необходимые условия инвариантности относительно системы с распределенными параметрами.....	252	
<i>Нахушев А.М., Нахушева В.А.</i>		
О качественных свойствах уравнения фрактального осциллятора..	254	
<i>Нысанов Е.А., Сураган Д.</i>		
О математическом моделировании движения грунтовых вод и почвенной влаги .....	256	
<i>Нысанов Е.А., Шоманбаева М.Т.</i>		
Выбор оптимальной формы поперечного сечения открытых каналов с целью наибольшей транспортировки при установившемся течении вязких двухфазных сред.....	256	
<i>Орумбаева Н.Т., Каршыгина Г.Ж.</i>		
О корректных задачах для нагруженных уравнений.....	258	
<i>Сакабеков А., Аужани Е., Исагалли А.</i>		
Разрешимость начально-краевой задачи для одномерной нелинейной нестационарной системы моментных уравнений Больцмана при граничных условиях Максвелла-Аужана.....	259	
<i>Сахаев Ш.С.</i>		
Оценки решения одной задачи для стационарных систем уравнений магнитной гидродинамики .....	262	
<i>Сахауева М.А.</i> Задачи сопряжения, возникающие при линеаризации одной нелинейной задачи со свободными границами .....		263
<i>Серовайский С.Я.</i>		
Математический анализ модели лечения антибиотиками зараженного организма .....	264	
<i>Толеуханов А.Е., Калтаев А., Панфилов М.Б.</i>		
Проведение численного и аналитического исследования кинетики химических реакций, вызываемых бактериями в пластовых условиях процесса самоорганизации в подземных хранилищах водорода .....	266	
<i>Туленбаев К.М., Отенов Н.О., Жумабеков А.В., Сайдуллин А.А., Мухиддинов Е.М.</i>		
Математическое моделирование в қазақша күрес .....	267	
<i>Шпади Ю.Р., Инчин П.А.</i>		
Оценка температурного режима датчика феррозондового		

магнитометра .....	268
<i>Харин С.Н.</i>	
Математические модели электродуговой эрозии.....	269
<i>Хусаинов И.Г.</i>	
Моделирование релаксации давления в полости при ее опрессовке введением газа .....	272
<i>Шаймарданова М.Н.</i>	
Решение нерегулярной задачи для параболического уравнения с производной по времени в граничном условии.....	274
<i>Ыдрысова А., Кудайкулов А.А.</i>	
Обзор алгоритмов реализации метода объема жидкости для отслеживания положения границы раздела двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей .....	275
<i>Akhmetov B., Amanzholov T.E., Tungatarov M.S., Dzhomartov A.A.</i>	
One- and two-dimensional modeling of the solid to liquid phase change processes in solar thermal energy storages with phase change materials	275
<i>Baikonys A., Nysanov E., Nemchenko M.</i>	
On a mathematical model of unsteady groundwater flow and program- ming in Matlab .....	276
<i>Bizhanova G.I.</i>	
Solution of the problems for the parabolic equations with small param- eters in the boundary conditions .....	277
<i>Kalmenov Sh.T., Nysanov E., Maken A.</i>	
Boundary and spectral properties of hydrodynamic potentials .....	277
<i>Karjanto N., van Groesen E.</i>	
Variational Methods for Waves on Finite Background .....	278
<i>Kharin S.N., Kavokin A.A., Shpadi Yu.R.</i>	
Mathematical model of time-dependent capacitance shunted electric arc	278
<i>Kharin S.N., Mergenbayeva M.</i>	
Mathematical Model of the Thomson effect in a liquid electrical bridge	280
<i>Kharin S.N., Sagyndykuly Z.</i> Mathematical model of welding at closure of electrical contacts .....	283
<i>Kitapbaev E., Baikonus A.</i>	
Optimal stopping theory as a part of stochastic control theory.....	286

<i>Nysanov E.A., Beketauov B.</i> Mathematical modelling for unsteady groundwater flow .....	286
<i>Sandybekova M., Tuimebayeva A.</i> On the reduction of boundary value problem for a loaded equation to an integral equation.....	287
<i>Yermukanova B.N., Zhexembay L. and Karjanto N.</i> Boundary value problems in Black-Scholes equation .....	288
<b>5 Информационные технологии и вычислительная математика</b>	<b>289</b>
<i>Акыш А.Ш.</i> Метод расщепления для нелинейного уравнения Каца ..	289
<i>Баканов Г.Б., Дильман Т.Б.</i> Об одной задаче интегральной геометрии для некоторого семейства кривых .....	290
<i>Баканов Г.Б., Турмаганбет К.А.</i> Необходимое и достаточное условие существования решения одномерной дискретной обратной задачи .	291
<i>Бияшев Р.Г., Нысанбаева С.Е., Бегимбаева Е.Е.</i> Модификация схемы цифровой подписи DSA.....	293
<i>Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е., Капалова Н.А., Хакимов Р.А.</i> Моделирование программной реализации непозиционного алгоритма шифрования .....	295
<i>Даирбаева Г.</i> Численное решение обратной задачи для уравнения Гельмгольца.....	297
<i>Дарибаев Б.С., Ахмед-Заки Д.Ж., Иманкулов Т.С.</i> Высокопроизводительные вычисления на мобильных платформах .	298
<i>Иманбаев К.С., Биярова А.О., Махсут Г.</i> Обучение нейронных сетей при решении модельного уравнения в частных производных.....	301
<i>Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Шолпанбаев Б.Б.</i> Численное решение задачи продолжения при наличии локализованных объектов .....	302
<i>Климов В.С., Климов А.С.</i> Применение нейронных сетей для диагностики качества контактной сварки .....	304
<i>Латкина Л. П.</i> Графы, вершины которых составляют одну орбиту ..	306
<i>Мансурова М.Е., Алимжанов Е.С., Кашкымбай И.Ж.</i> Применение технологии MapReduce Hadoop для сжатия RDF данных .....	308

<i>Новикова А.О., Барсуков А.А., Минаев А.С.</i> Математическое моделирование работы нейронных сетей в приложениях прогнозирования исхода судебных дел.....	310
<i>Нурсеитов Д.Б., Касенов С.Е.</i> Численное решение задачи продолжения для уравнения акустики.....	312
<i>Сулейманова Г. А.</i> Смешанный метод описательной статистики и построение гистограммы.....	314
<i>Сыздыкова Р.А., Шаукенова К.С., Кауымбек И.С.</i> Особенности подхода к проблеме использования информационных технологий на уроках математики.....	315
<i>Шакенов К.К., Бакбердиева А.А.</i> Численные методы решения уравнения вероятности разорения компании для одной модели риска.....	316
<i>Темирбекова Л.Н.</i> Двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана	317
<i>Турар О.Н., Ахмед-Заки Д.Ж.</i> Разработка модуля визуализации с использованием графической библиотеки NVIDIA OPTIX.....	319
<i>Amirgaliev YE., Lovazov T., Mustafin S.</i> About design problem of mobile robot.....	321
<i>Erlangga Y.A</i> Multilevel Krylov for Symmetric Singular Systems.....	322
<i>Lavrov E.A., Pasko N.B., Krivodub A.S.</i> Computer simulation of discrete human-machine interaction in automated systems.....	323
<i>Skrzypacz Piotr</i> On the construction of $L_2$ -orthogonal elements of arbitrary order for Local Projection Stabilization.....	324
<b>6 Механика и машиноведение</b>	<b>325</b>
<i>Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М.</i> Метод обобщенных функций в краевых задачах динамики термоупругих стержней.....	325
<i>Алексеева Л.А., Душеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т.</i> Дифракция и преломление волн в упругом полупространстве с упругим поверхностным включением.....	327
<i>Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К., Курманов Е.Б.</i> Волновая динамика среды Био при транспортных нагрузках, движущихся с дозвуковой скоростью.....	329



- Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.*  
 Метод обобщенных функций в задачах динамики анизотропных упругих сред ..... 331
- Алексеева Л.А., Сабаев Е., Сандыбаев Е.*  
 Математические модели динамики среды при образовании трещин 333
- Алимжанов А.М., Оздамирова Д.М., Джалимбетов С.Б.*  
 Расчет НДС и устойчивости пород приконтурной зоны вертикальной скважины в неоднородном горном массиве с использованием полиномиальных функций ..... 336
- Бекетаева А.О., Елубаева Ш.М.*  
 Метод предобуславливания для существенно дозвуковых течений . 338
- Закирьянова Г.К.*  
 Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики анизотропных сред ..... 342
- Калиева А.К., Туленбаев К.М.*  
 Математическая модель движения капсулы в пожаротушении ..... 344
- Мартынов Н.И., Рамазанова М.А.*  
 Смешанная краевая задача обобщенной плоской деформации линейно-упругого тела в нелинейной теории упругости ..... 345
- Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.*  
 Новые уравнения движения неограниченной и ограниченной задачи трех тел и их точные решения ..... 347
- Моисеева Е.С., Найманова А.Ж., Бекетаева А.О.*  
 Построение ENO-схемы на неравномерной сетке для расчета сверхзвуковых течений ..... 349
- Саспаева А.Д.*  
 Построение уравнения движения искусственного спутника Земли в гравитационных полях Земли и Луны ..... 352
- Телтаев Б.Б., Айтбаев К.А.*  
 Конечно-элементное моделирование нестационарного температурного поля в автомобильной дороге ..... 353
- Телтаев Б.Б., Амирбаев Е.Д.*  
 Высоко- и низкотемпературные механические характеристики битумных вяжущих ..... 355
- Украинец В.Н., Гирнис С.Р.*  
 Расчет перегонного тоннеля метрополитена на транспортную нагрузку ..... 358

<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Акинбеков Е.К., Рахимжанов Б.Н., Бердалиев Д.Т., Умирбеков М.С.</i>	
Новый метод исключения "малых знаменателей" в задаче о движении резонансных .....	360
<i>Ногайбаева М.О., Кудайкулов А.К.</i>	
Моделирование термо-механических процессов в стержнях, возникающих из-за наличия внутреннего точечного источника тепла, теплоизоляции и теплообмена .....	362
<i>Alibayeva K.A., Tungatarova M.S., Kaltayev A.</i>	
Verification of the mathematical and computer model of an ISL uranium mining process .....	364
<i>Beketaeva A.O., Shakhan N.S.</i>	
Mathematical modeling of shock-wave structures in interaction of shocks with the boundary layers on the bottom and top walls .....	365
<i>Guo Xixiong, Cao Jun</i>	
Mathematical modeling and numerical simulation of disastrous wind .	366

# 1 Дифференциальные уравнения

УДК 517.95

Абдикаликова Г.А.

*Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова  
(Казахстан, Актюбе)*

*e-mail: a\_a\_galiya@mail.ru*

## Разрешимость нелокальной краевой задачи с интегральным условием для системы уравнений в частных производных

На  $\bar{\Omega} = \{(x, t) : t \leq x \leq t + \omega, 0 \leq t \leq T\}$ ,  $T > 0$ ,  $\omega > 0$  рассматривается краевая задача с нелокальным интегральным условием для системы уравнений в частных производных

$$D \left[ \frac{\partial}{\partial x} u \right] = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + S(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$B(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \Big|_{x \in [0, \omega]} + C(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, T) \Big|_{x \in [T, T+\omega]} + \\ + \int_0^T K(x, s) \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) ds = d(x), \quad (2)$$

$$u(t, t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь  $u \in R^n$ ;  $D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$ ;  $(n \times n)$ -матрицы  $A(x, t)$ ,  $S(x, t)$ ,  $K(x, t)$  и  $n$ -вектор-функция  $f(x, t)$  непрерывны по  $x$  и  $t$  на  $\bar{\Omega}$ ;  $(n \times n)$ -матрицы  $B(x)$ ,  $C(x)$  и  $n$ -вектор-функция  $d(x)$  непрерывны на  $[0, \omega]$ ; функция  $\Psi(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$ .

Среди краевых задач для уравнения с частными производными значительный интерес представляют задачи, в которых условия связывают искомое решение и его производные в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области. Краевые задачи с нелокальными условиями для широкого класса дифференциальных уравнений в частных производных различными методами исследовались многими авторами. Отметим работы [1] - [2], где можно найти подробный обзор и библиографию по этим задачам. Для исследования краевых задач систем гиперболических уравнений со смешанной производной в [3] предложен метод введения функциональных параметров, являющегося обобщением метода параметризации [4], разработанного для решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель данного сообщения – установить коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости в широком смысле нелокальной краевой задачи (1)-(3).

Следуя [5–6] введем новую неизвестную функцию  $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ . От задачи (1)-(3) перейдем к эквивалентной краевой задаче, состоящей из краевой задачи для

системы уравнений гиперболического типа первого порядка и функционального соотношения, связывающая исходную и новую функции

$$Dv = A(x, t)v + S(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$B(x)v(x, 0) \Big|_{x \in [0, \omega]} + C(x)v(x, T) \Big|_{x \in [T, T+\omega]} + \int_0^T K(x, s)v(x, s)ds = d(x), \quad (5)$$

$$u(x, t) = \Psi(t) + \int_t^x v(\eta, t)d\eta, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Нелокальные задачи (1)-(3) и (4)-(6) эквивалентны в следующем смысле: если непрерывная функция  $u(x, t)$  - решение задачи (1)-(3), то пара функций  $(v(x, t), u(x, t))$  есть решение задачи (4)-(6) для гиперболических уравнений первого порядка, где  $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  и, наоборот, если пара непрерывных функций  $(v(x, t), u(x, t))$  - решение краевой задачи (4)-(6), то из соотношений (6) следует, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет условию (3) и имеет непрерывные производные. Функцию  $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$  подставив в (4)-(6) получим, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)-(3) при всех  $(x, t) \in \bar{\Omega}$ ,  $x \in [0, \omega]$ ,  $t \in [0, T]$ , т.е.  $u(x, t)$  есть решение задачи (1)-(3).

Задачу (4)-(6) сводим к задаче семейства обыкновенных дифференциальных уравнений на  $\bar{H} = \{(\xi, \tau) : 0 \leq \xi \leq \omega, 0 \leq \tau \leq T\}$ ,  $T > 0, \omega > 0$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \tilde{A}(\xi, \tau)\tilde{v} + \tilde{S}(\xi, \tau)\tilde{u}(\xi, \tau) + \tilde{f}(\xi, \tau), \quad (7)$$

$$\tilde{B}(\xi)\tilde{v}(\xi, 0) + \tilde{C}(\xi)\tilde{v}(\xi, T) + \int_0^T \tilde{K}(\xi, \tau)\tilde{v}(\xi, \tau)d\tau = \tilde{d}(\xi), \quad \xi \in [0, \omega], \quad (8)$$

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \Psi(\tau) + \int_\tau^{\xi+\tau} \tilde{v}(\zeta, \tau)d\zeta, \quad \tau \in [0, T], \quad (9)$$

где  $\tilde{v}(\xi, \tau) = v(\xi + \tau, \tau)$ ,  $\tilde{u}(\xi, \tau) = u(\xi + \tau, \tau)$ ,  $\tilde{A}(\xi, \tau) = A(\xi + \tau, \tau)$ ,  $\tilde{S}(\xi, \tau) = S(\xi + \tau, \tau)$ ,  $\tilde{f}(\xi, \tau) = f(\xi + \tau, \tau)$ ,  $\tilde{K}(\xi, \tau) = K(\xi + \tau, \tau)$ .

Нелокальная задача (7)-(9) при фиксированной  $\tilde{u}(\xi, \tau)$  исследуется методом параметризации. Получены коэффициентные достаточные условия существования единственного решения краевой задачи (7)-(9), которые являются условиями разрешимости эквивалентной краевой задачи с нелокальным интегральным условием (1)-(3). Установлено существование единственного решения рассматриваемой задачи в широком смысле по Фридрихсу и предложен алгоритм нахождения решения.

### Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
2. *Джурев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: ФАН, 1986. – 220 с.

3. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 337–346.
4. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл.матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.
5. Асанова А.Т. О краевой задаче для систем гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием // Математический журнал. – 2005. – Т. 5, № 3(17). – С. 5-10.
6. Абдикаликова Г.А. Корректная разрешимость нелокальной краевой задачи для одного класса уравнений // Наука и Мир. Междунар. научный журнал. – 2014. – Т. 1, № 4(8). – С. 10-14.

УДК 519.63:532.13

Абдуллаев В.М.

*Институт Систем Управления НАН Азербайджана  
(Азербайджан, Баку)  
e-mail: vaqif\_ab@rambler.ru*

### **Численное решение одной обратно-коэффициентной задачи для нагруженного уравнения**

Рассматривается задача восстановления коэффициентов для нагруженного одномерного параболического уравнения [1]:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \mathfrak{S}(x, t)u(x, t) + N(x, t)u(x, t) + F(x, t; C) + f(x, t),$$

$$(x, t) \in \Omega = (0; a) \times (0; T]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathfrak{S}(x, t)$  – линейной эллиптической оператор:

$$\mathfrak{S}(x, t) = \xi(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \xi_1(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \xi_2(x, t)u(x, t), \quad (2)$$

$N(x, t)$  – линейный оператор нагружения, относительно которого рассмотрены следующие виды:

$$N(x, t)u(x, t) = \sum_{s=1}^{l_3} \widehat{b}_s(x, t)u(\widehat{x}_s, t), \quad (3)$$

$$N(x, t)u(x, t) = \sum_{s=1}^{l_3} \widetilde{b}_s(x, t)u(x, \widetilde{t}_s). \quad (4)$$

Здесь  $u(x, t)$  – функция фазового состояния;  $\widehat{x}_s, \widetilde{t}_s, s = 1, 2, \dots, l_3$  – заданные нагруженные точки,  $\xi(x, t) > 0, \xi_1(x, t), \xi_2(x, t), f(x, t), \widehat{b}_s(x, t), \widetilde{b}_s(x, t)$  заданные функции, непрерывные по своим аргументам.

В зависимости от выбора (3) или (4) функция  $F(x, t; C)$  имеет один из видов:

$$F(x, t; C) = \sum_{i=1}^l B_i(x, t) C_i(t), \quad (5)$$

$$F(x, t; C) = \sum_{i=1}^l B_i(x, t) C_i(x). \quad (6)$$

Здесь  $B_i(x, t)$  – заданные непрерывные линейно-независимые функции,  $C_i(x)$  и  $C_i(t)$  подлежат определению,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Для определения идентифицируемых функций  $C_i(x)$ ,  $C_i(t)$  имеются следующие начально-краевые условия, заданные в виде неразделенных интегральных и точечных значений фазового состояния.

В случае оператора нагружения (3) начально-краевые и дополнительные условия имеет вид:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l_1} \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i + \Delta_i} \bar{D}_i(x, t) u(x, t) dx + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j(t) u(\tilde{x}_j, t) + \\ + \sum_{s=1}^{l_3} \check{D}_s(t) u(\check{x}_s, t) = L_0(t), \end{aligned} \quad (8)$$

а в случае оператора нагружения (4) условия заданы в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l_1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i + \Delta_i} \bar{K}_i(x, t) u(x, t) dt + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{K}_j(x) u(x, \tilde{t}_j) + \\ + \sum_{s=1}^{l_3} \check{K}_s(x) u(x, \check{t}_s) = L_0(x), \end{aligned} \quad (9)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(a, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

где  $\bar{t}_i, \tilde{t}_j, \check{t}_s$  – заданные упорядоченные моменты времени из  $[0, T]$  т.е.  $0 \leq \bar{t}_i < \bar{t}_{i+1} \leq T$ ,  $0 \leq \tilde{t}_j < \tilde{t}_{j+1} \leq T$ ,  $0 \leq \check{t}_s < \check{t}_{s+1} \leq T$ ,  $\bar{t}_i + \Delta_i \in [0, T]$ ;  $\min(\bar{t}_1, \tilde{t}_1) = 0$ ,  $\max(\bar{t}_{l_1} + \Delta_{l_1}, \tilde{t}_{l_2}) = T$  и для всех  $i = 1, \dots, l_1$ ,  $j = 1, \dots, l_2$  выполняется условие  $\tilde{t}_j \in [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i]$ ; и  $\bar{x}_i, \tilde{x}_j, \check{x}_s \in [0, a]$ ,  $0 \leq \bar{x}_i < \bar{x}_{i+1} \leq a$ ,  $0 \leq \tilde{x}_j < \tilde{x}_{j+1} \leq a$ ,  $0 \leq \check{x}_s < \check{x}_{s+1} \leq a$ ,  $\bar{x}_i + \Delta_i \in [0, a]$ ,  $\min(\bar{x}_1, \tilde{x}_1) = 0$ ,  $\max(\bar{x}_{l_1} + \Delta_{l_1}, \tilde{x}_{l_2}) = a$  и для всех  $i = 1, \dots, l_1$ ,  $j = 1, \dots, l_2$  выполняется условие  $\tilde{x}_j \in [\bar{x}_i, \bar{x}_i + \Delta_i]$ ; функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $(l+1)$ -мерные функции  $\bar{K}_i(x, t)$ ,  $\tilde{K}_j(x)$ ,  $\check{K}_s(x)$ ,  $L_0(x)$  и  $(l+2)$ -мерные функции  $\bar{D}_i(x, t)$ ,  $\tilde{D}_j(t)$ ,  $\check{D}_s(t)$ ,  $L_0(t)$  заданы и непрерывны по своим аргументам.

Требуется определить  $u(x, t)$  и  $l$ -мерную вектор-функцию  $C(t)$  в случае задачи (1),(2),(3), (5), (7),(8) (задача А) или  $C(x)$  для задачи (1),(2),(4), (6), (9),(10) (задача В).

Предложен подход, основанный на применении метода прямых и сведении исходной задачи к задаче параметрической идентификации для обыкновенных дифференциальных уравнений [2-3]. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений.

Аналогичный подход применен к решению обратных задач относительно нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа при нелокальных условиях переопределения.

Были проведены многочисленные численные эксперименты на тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточно высокую эффективность для практического применения описанного подхода.

### Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232с.
2. *Айда-заде К.Р.* Численный метод восстановления параметров динамической системы // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – №3. – С. 101-108.
3. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. – 2014. – Vol.54, №7. – Pp. 1096-1109.

УДК 517.938

Айсагалиев С.А., Жунусова Ж.Х.

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби*

*(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz*

### Об одном методе построения решения краевой задачи с параметром

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую краевую задачу с параметром

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, \lambda, t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n}, \quad (2)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \omega(t) \leq F(x, \lambda, t) \leq \varphi(t), \quad t \in I\}, \quad (3)$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(x_0, x_1, \lambda) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}; \quad g_j(x_0, x_1, \lambda) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (4)$$

$$g_j(x_0, x_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) dt, \quad j = \overline{1, m_2}. \quad (5)$$

с параметром

$$\lambda \in \Lambda \subset R^s, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (6)$$

Здесь  $A(t)$ ,  $B(t)$  – матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков  $n \times n$ ,  $n \times m$ , вектор функция

$f(x, \lambda, t) = (f_1(x, \lambda, t), \dots, f_r(x, \lambda, t))$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, \lambda, t) \in R^n \times R^s \times I$ , удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$ , т.е.

$$|f(x, \lambda, t) - f(y, \lambda, t)| \leq l(t)|x - y|, \quad \forall (x, \lambda, t), (y, \lambda, t) \in R^n \times R^s \times I \quad (7)$$

и условию

$$|f(x, \lambda, t)| \leq c_0(|x| + |\lambda|^2) + c_1(t), \quad \forall (x, \lambda, t), \quad (8)$$

где  $l(t) \geq 0$ ,  $l(t) \in L_1(I, R^1)$ ,  $c_0 = const > 0$ ,  $c_1(t) \geq 0$ ,  $c_1(t) \in L_1(I, R^1)$ .

Заметим, что при выполнении условий (7), (8) дифференциальное уравнение (1) при фиксированных  $x_0 = x(t_0) \in R^n$ ,  $\lambda \in R^s$  имеет единственное решение для значений  $t \in I$ .

Вектор функция  $F(x, \lambda, t) = (F_1(x, \lambda, t), \dots, F_S(x, \lambda, t))$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, \lambda, t) \in R^n \times I$ .

Функция  $f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) = f_{01}(x, x_0, x_1, \lambda, t), \dots, f_{0m_2}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$  непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$|f_0(x, x_0, x_1, \lambda, t)| \leq c_2(|x| + |x_0| + |x_1| + |\lambda|^2) + c_3(t),$$

$$\forall (x, x_0, x_1, \lambda, t) \in R^n \times R^n \times R^n \times R^s \times I,$$

$$c_2 = const \geq 0, \quad c_3(t) \geq 0, \quad c_3(t) \in L_1(I, R^1).$$

$\omega(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$  – заданные  $r$  – мерные непрерывные функции.  $S$  – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из  $R^{2n}$ ,  $\Lambda$  – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из  $R^s$ , моменты времени  $t_0, t_1$  – фиксированы,  $t_1 > t_0$ .

Заметим, что если  $A(t) \equiv 0$ ,  $m = n$ ,  $B(t) = I_n$ , где  $I_n$  – единичная матрица порядка  $n \times n$ , то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x, \lambda, t) + \mu(t), \quad t \in I. \quad (9)$$

Поэтому полученные ниже результаты остаются верными для уравнения вида (9) при условиях (2) – (6). В частности, множество  $S$  определяется соотношением

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} / H_j(x_0, x_1) \leq 0, \quad j = \overline{1, p}; \\ < a_j, x_0 > + < b_j, x_1 > - e_j = 0, \quad j = \overline{p + 1, s_1}\},$$



где  $H_j(x_0, x_1)$ ,  $j = \overline{1, p}$  – выпуклые функции относительно переменных  $(x_0, x_1)$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $x_1 = x(t_1)$ ,  $a_j \in R^n$ ,  $b_j \in R^n$ ,  $e_j \in R^1$ ,  $j = \overline{p+1, s}$  – заданные векторы и числа  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение. В частности, множество

$$\Lambda = \{\lambda \in R^s / h_j(\lambda) \leq 0, \quad j = \overline{1, p_1}; \quad \langle \bar{a}_j, \lambda \rangle - \bar{e}_j = 0, \quad j = \overline{p_1+1, s_1}\},$$

где  $h_j(\lambda)$ ,  $j = \overline{1, p_1}$  – выпуклые функции относительно  $\lambda$ ,  $\bar{a}_j \in R^s$ ,  $\bar{e}_j \in R^1$ ,  $j = \overline{p_1+1, s_1}$  – заданные векторы и числа.

Ставятся следующие задачи:

**Задача 1.** Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1) – (6).

**Задача 2.** Построить решение краевой задачи (1) – (6).

Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары  $(x_0, x_1) \in S$  и параметра  $\lambda \in \Lambda$  таких, что решение системы (1) исходящее из точки  $x_0$  в момент времени  $t_0$ , проходит через точку  $x_1$  в момент времени  $t_1$ , при этом вдоль решения системы (1), где  $x(t) = x(t; x_0, t_0, \lambda)$ ,  $t \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ , для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (3), и интегралы (5) удовлетворяют условиям (4).

В частности, из краевой задачи (1) – (6) при отсутствии фазовых и интегральных ограничений следует задача Штурма-Лиувилля. Применение метода Фурье к решению задач математической физики приводит к решению следующей задачи [1]: найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых в конечном промежутке  $[t_0, t_1]$  существует отличное от нуля решение однородного уравнения

$$L[y] + \lambda r(t)y(t) \equiv 0, \quad (10)$$

удовлетворяющее на концах условиям:

$$\alpha_1 y(t_0) + \alpha_2 \dot{y}(t_0) = 0, \quad \beta_1 y(t_1) + \beta_2 \dot{y}(t_1) = 0, \quad (11)$$

где  $L[y] = \frac{d}{dt}[p(t)\dot{y}(t)] - q(t)y(t)$ ,  $p(t) > 0$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Вводя обозначения  $y(t) = x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , уравнение (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x_1, \lambda, t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (12)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{q(t)}{p(t)} & -\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad f(x_1, \lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}.$$

Граничное условие (11) запишется в виде

$$\alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} = 0, \quad \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} = 0, \quad (13)$$

где  $x(t_0) = (x_{10}, x_{20})$ ,  $x(t_1) = (x_{11}, x_{21})$ . Параметр  $\lambda \in R^1$ . Уравнение (12), краевое условие (13),  $\lambda \in R^1$  являются частными случаями (1), (2), (6) соответственно.

Как известно [2], решение задачи Штурма-Лиувилля сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$y(t) = -\lambda \int_{t_0}^{t_1} G(t, \xi)r(\xi)y(\xi)d\xi, \quad (14)$$

где  $G(t, \xi)$  – функция Грина. Заметим, что построение функции Грина  $G(t, \xi)$  и решение интегрального уравнения (14) довольно сложны. Поэтому представляет интерес разработка новых методов исследования решения краевых задач (1) – (6).

### Литература

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1981. – 550 с. – Т. 4, часть II (6-е изд.).
2. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Светников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1985. – 231 с.

УДК 517.938

Алдибеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: tamash59@mail.ru*

### О центральных показателях дифференциальных систем

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (x \in R^n, t_0 \leq t < +\infty) \quad (1)$$

где матрица  $A(t)$  непрерывна и удовлетворяет условию

$$\|A(t)\| \leq C_A \varphi(t), \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

где  $C_A$  – постоянная, зависящая от выбора матриц  $A$ ,  $\varphi(t)$  – положительная непрерывная функция на промежутке  $[t_0, +\infty]$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$  и интеграл  $I(\varphi) = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(s) ds$  расходится.

**Определение 1.** Функций  $r_q(t)$  и  $R_q(t)$  называются соответственно обобщенной нижней и обобщенной верхней относительно  $q(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$  для системы (1) с условием (2), если они ограничены, измеримы, и для всех ненулевых решений  $x(t)$  системы (1) осуществляются оценки

$$d_{r,\varepsilon} \exp \left( \int_s^t [r_q(\tau) - \varepsilon] dq(\tau) \right) \leq \frac{|x(t)|}{|x(s)|} \leq D_{R,\varepsilon} \exp \left( \int_s^t [R_q(\tau) + \varepsilon] dq(\tau) \right)$$

для всех  $t \geq s \geq t_0$ ,  $D_{R,\varepsilon}$ ,  $d_{r,\varepsilon}$  – константы, зависящие от выбора  $r_q(t)$  и  $R_q(t)$ ,  $\varepsilon > 0$ .  
Число

$$\Omega(A, q) = \inf_{R \in B(A, q)} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t R_q(\tau) dq(\tau)$$

называется обобщенным верхним центральным показателем системы 1 относительно  $q(t)$ , где  $\inf$  берется на множестве обобщенных верхних функций. Число

$$\omega(A, q) = \sup_{R \in H(A, q)} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t r_q(\tau) dq(\tau)$$

называется обобщенным нижним центральным показателем системы (1) относительно  $q(t)$ , где  $\sup$  берется на множестве обобщенных нижних функций.

Рассмотрим нелинейную системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad t \in I \equiv [t_0, +\infty], \quad x \in R^n \quad (3)$$

где матрица  $A(t)$  непрерывна при  $t \geq t_0$  и удовлетворяет условию (2), векторная функция  $f(t, x)$  непрерывна в области  $G = I \times R^n$  и  $f(t, 0) = 0$ .

Обозначим через  $L(\varphi(t))$  класс векторных функций  $f(t, x)$  удовлетворяющих неравенству  $\|f(t, x)\| \leq \delta(t)|x|$ , где норма возмущения  $\delta$  непрерывна при  $t \geq t_0$  и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

**Теорема 1.** *Если в нелинейной системе (3), система первого приближения (1) удовлетворяет условию (2) и возмущения  $f(t, x) \in L(\varphi(t))$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $d_\varepsilon > 0, D_\varepsilon > 0$  такие, что равномерно для всех решений системы 3 выполняются неравенства*

$$d_\varepsilon |x(t_0)| \exp \left( [\omega(A, q) - \varepsilon][q(t) - q(t_0)] \right) \leq |x(t)| \leq D_\varepsilon |x(t_0)| \exp \left( [\Omega(A, q) + \varepsilon][q(t) - q(t_0)] \right)$$

при всех  $t \geq t_0$ .

**Следствие 1.** *Если линейная система (1) с условием (2) имеет отрицательный обобщенный верхний центральный показатель относительно  $q$ , то нулевое решение нелинейной системы (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ , где возмущения  $f(t, x) \in L(\varphi(t))$  более того имеет место экспоненциальная устойчивость относительно  $q$  при  $t \rightarrow +\infty$ , (см. [3]).*

## Литература

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М., 1966. – 576 с.
2. Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Математический сборник. – 1957. – Т. 42, №2. – С. 207-222.
3. Алдибеков Т.М., Алдажарова М.М. Об устойчивости по первому приближению в критических случаях характеристических показателей Ляпунова // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, №10. – С. 1392-1395.

Арепова Г.Д., Кальменов Т.Ш.

*Институт математики и математического моделирования,  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: arepovag@mail.ru*

## О квазиспектральном разложении теплового потенциала

В работах И.М. Гохберга и М.К. Крейна доказано, что любой линейный вполне непрерывный оператор  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  имеет треугольное представление  $A = U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ , где  $A^*$  – сопряженный оператор к  $A$ , а  $U$  – унитарный оператор. Случай, когда оператор  $A$  является вполне непрерывным вольтерровым оператором, порожденным решением смешанной задачи Коши параболических и гиперболических уравнений, представляет большой интерес. В данной работе дается новый аналог треугольного представления многомерного теплового потенциала и его квазиспектральное разложение.

Пусть  $\Omega \subset R^n$  – конечная область с гладкой границей  $\partial\Omega \in C^1$ , а  $D = \Omega \times (0, T)$ . Определим в области  $D$  тепловой потенциал

$$u = \diamond^{-1}f = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi,$$

где

$$\varepsilon_n(x, t) = \frac{\theta(t)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2(\pi t)^{\frac{n}{2}}}$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\diamond \varepsilon_n(x, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varepsilon_n(x, t) = \delta(x, t),$$

$$\varepsilon_n(x, t)|_{t=0} = 0.$$

При  $f \in L_2(\Omega)$  легко проверить, что

$$\diamond u = \diamond \diamond^{-1}f = \diamond \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi = f(x, t), \quad u|_{t=0}.$$

**Лемма 1.** *Оператор  $P\diamond^{-1}$  является вполне непрерывным самосопряженным оператором.*

**Лемма 2.** *При  $f \in L_2(D)$   $u = P\diamond^{-1}f$  удовлетворяет уравнению*

$$\diamond Pu = f, \tag{1}$$

*начальному условию*

$$u|_{t=T} = 0, \tag{2}$$

и боковому граничному условию

$$-\frac{(Pu)(x, t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_\xi} (x - \xi, \tau - t) Pu(\xi, \tau) d\xi \right) - \\ - \int_0^t d\tau \int_{\Omega} (\varepsilon_n(x - \xi, \tau - t) P \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, \tau) d\tau) = 0, x \in \partial\Omega, t \in [0, T]. \quad (3)$$

Обратно, если  $u \in W_2^{1,2}(D)$  удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2) и боковому граничному условию (3), то  $u = P\Diamond^{-1}f$ .

**Теорема 1.** Пусть  $e_k$  полная ортонормированная система собственных векторов самосопряженного оператора  $\lambda_k(P\Diamond^{-1})e_k = e_k$ . Тогда для любой  $f \in L_2(D)$ ,  $\Diamond^{-1}f$  имеет квазиспектральное разложение в следующем виде

$$\Diamond^{-1}f = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (f, e_k) P e_k.$$

УДК 517.95

Аттаев А.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации  
(Россия, Нальчик)

e-mail: [attaev.anatoly@yandex.ru](mailto:attaev.anatoly@yandex.ru)

## Характеристические задачи для нагруженного волнового уравнения с особым сдвигом

В данном докладе объектом исследования является уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda \operatorname{sign} y u(x - |y|, 0) = 0, \quad (\lambda = \text{const}),$$

которое рассматривается в области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}.$$

Обобщенным решением рассматриваемого уравнения в области  $\Omega$  назовем любую функцию  $u(x, y)$ , представимую в виде

$$u(x, y) = \frac{\tau(x - |y|) + \tau(x + |y|)}{2} + \\ + \frac{\operatorname{sign} y}{2} \int_{x-|y|}^{x+|y|} \nu(t) dt - \frac{\lambda \operatorname{sign} y}{4} \int_{x-|y|}^{x+|y|} (x + |y| - t) \tau(t) dt,$$

где  $\tau \in C[0, 1] \cap C^1]0, 1[$ , а  $\nu$  – непрерывна и интегрируема в  $]0, 1[$ .

Доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи Гурса и задачи с данными на параллельных характеристиках. УДК 517.968.72

Бакирова Э.А., Исакова Н.Б.

Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)

e-mail: bakirova1974@mail.ru, narkesh@mail.ru

## О корректной разрешимости аппроксимирующей краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений

На отрезке  $[0, T]$  рассматривается двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где  $n \times n$ -матрица  $A(t)$  непрерывна на  $[0, T]$ ,  $n \times n$ -матрица  $K(t, s)$  непрерывна на  $[0, T] \times [0, T]$ ,  $n$ -вектор-функция  $f(t)$  непрерывна на  $[0, T]$ ,  $B, C$  – постоянные  $n \times n$ -матрицы.

В сообщении отрезок  $[0, T]$  разбиваем точками  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$  на частичные отрезки и на каждом из этих частичных отрезков приближенно заменяем функцию  $K(t, s)x(s)$  по переменной  $s$  кубическим сплайном, а, именно,

$$\int_0^T K(t, s)x(s)ds \approx \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ a_i + b_i(s - t_i) + \frac{c_i}{2}(s - t_i)^2 + \frac{d_i}{6}(s - t_i)^3 \right] ds,$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – коэффициенты, определяемые по формулам [1, стр.141] в виде линейных комбинаций значений функции  $K(t, s)x(s)$  в точках  $s = t_i, i = \overline{0, m}$ .

Таким образом, краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений (1), (2) аппроксимируется краевой задачей для системы нагруженных дифференциальных уравнений. Установлена взаимосвязь между константой корректной разрешимости задачи (1), (2) и константой корректной разрешимости аппроксимирующей ее задачи.

### Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.

Балкизов Ж.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
Институт прикладной математики и автоматизации

(Россия, Нальчик)

e-mail: Giraslan@yandex.ru

**Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения**На евклидовой плоскости независимых переменных  $x$  и  $y$  рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{(m-2)/2}, & y < 0, \\ y^n u_{xx} - u_{yy} + by^{(n-2)/2}, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

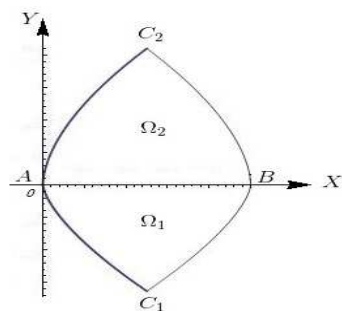
где  $a, b, m, n = \text{const}$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$ .Через  $\Omega_1$  обозначим область, ограниченную характеристиками

Рис. 1

$$\sigma_1 = AC_1 : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0,$$

$$\sigma_2 = C_1B : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$$

уравнения (1) при  $y < 0$ , выходящими из точек  $A = (0, 0)$ ,  $B = (r, 0)$  пересекающимися в точке  $C_1 = (r/2, y_1)$  и отрезком  $AB$  прямой $y = 0$ , а через  $\Omega_2$  – область, ограниченную характеристиками

$$\sigma_3 = AC_2 : x - \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2} = 0, \quad \sigma_4 = C_2B : x + \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2} = r$$

уравнения (1) при  $y > 0$ , выходящими из точек  $A$  и  $B$ , пересекающимися в точке  $C_2 = (r/2, y_2)$  и отрезком  $AB$  прямой  $y = 0$ ;  $y_1 = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)}$ ,  $y_2 = \left[\frac{r(n+2)}{4}\right]^{2/(n+2)}$ ;  $J = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$  – интервал  $AB$  прямой  $y = 0$ ;  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$  (Рис. 1).

Методом функционального анализа и интегральных уравнений в работе [1] была исследована краевая задача со смещением для уравнения (1) в случае, когда  $\Omega_1 \equiv \emptyset$  и коэффициент  $b = 0$ . В работе [2] были поставлены и исследованы характеристическая задача Коши и задача Гурса для класса вырождающихся внутри области гиперболических уравнений. В работе [3] были сделаны некоторые обобщения по постановке и исследованию первой и второй задач Дарбу для класса вырождающихся внутри области гиперболических уравнений. В работе [4] в описанной выше области  $\Omega$  была исследована краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения (1) при  $a = 0$ ,  $b = 0$  в случае, когда данные задаются на противоположных характеристиках  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Исследованию

задачи со смещением для уравнения (1) в области  $\Omega$  посвящена работа [5]. Задачи со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, содержащего слагаемые с младшими производными исследованы в работе [6]. Достаточно полная библиография по вырождающимся гиперболическим уравнениям имеются в монографиях [7]-[10].

Регулярным в области  $\Omega$  решением уравнения (1) назовем функцию  $u = u(x, y)$  из класса  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ,  $u_x, u_y \in L(J)$  при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В работе исследуется

**Задача 1.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) = \psi_1(x) \quad \forall (x, y) \in \sigma_2,$$

$$u(x, y) = \psi_2(x) \quad \forall (x, y) \in \sigma_4,$$

где  $\psi_1(x), \psi_2(x)$  заданные функции из класса  $C^1[0, r/2]$ , причем  $\psi_1(r) = \psi_2(r)$ .

Задача 1 относится к классу краевых задач, сформулированных в работе [11] и названных в монографии [9, с. 236] первой краевой задачей для уравнений параболического типа.

Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $a$  и  $b$  уравнения (1) таковы, что:  $|a| \leq \frac{m}{2}$ ,  $|b| \leq \frac{n}{2}$  и  $(2a - m)^2 + (2b - n)^2 \neq 0$ . Тогда существует единственное решение задачи 1.

## Литература

1. Нахушев А.М. ДАН СССР. – 1969. – Т.187, №4. – С. 736 - 739.
2. Кальменов Т.Ш. Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.IX, №1. – С. 84-96.
3. Нахушев А.М. Сообщения АН ГССР. 1975. – Т.77, №3. – С. 545-548.
4. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Дифференц. уравнения. – 1978. – Т.XIV, №1. – С. 50-64.
5. Кумыкова С.К. Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. XVI, №1. – С. 93-104.
6. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. XVII, №1. – С. 129-136.
7. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 160 с.
8. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Самарский филиал Саратовского университета, 1992. – 161 с.
9. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2002. – 288 с.



10. *Кальменов Т.Ш.* К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Цикл научных работ Т.Ш. Кальменова. – Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2013. – 406 с.
11. *Нахушев А.М.* Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. XIV, №1. – С. 66-73.

УДК 517.962

Бапаев К.Б.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: v\_gulmira@mail.ru*

### **Устойчивость и бифуркация резонансных разностно-динамических систем (РДС)**

В работе рассматриваются РДС с параметром в критическом случае пар комплексно-сопряженных корней по модулю равных единице. С математической точки зрения такие (как в системе дифференциальных уравнений [1]) РДС подразделяются на резонансные и нерезонансные. Однако с практической точки зрения когда, например, коэффициенты РДС известны лишь приближенно, подобная классификация носит условный характер. Любая резонансная РДС сколь угодно близка (в смысле близости коэффициентов) к некоторой нерезонансной РДС, и наоборот. Априори неясно, как связано свойство устойчивости этих РДС. Для изучения интересующей нас связи рассматривается РДС непрерывно зависящая от  $\varepsilon$ . Вводится понятие сильной устойчивости такой РДС в точке  $\varepsilon_0$ . Строится непрерывная нормальная форма рассматриваемой РДС, на основе которой для некоторых типов резонансных РДС получены условия сильной устойчивости и выделен случай бифуркации свойства устойчивости.

#### **Литература**

1. *Гельцер Я.М., Кунцын Л.А.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе // ПММ. – 1975. – Т.39, вып 6. – С. 974-981.

Бердышев А.С., Серикбаев Д.А.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая  
(Казахстан, Алматы)

e-mail: berdyshev@mail.ru

**Вольтерровость аналога задачи Трикоми для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка с интегральными условиями сопряжения**

Пусть  $\Omega \subset R^2$  – конечная область, ограниченная при  $y > 0$  отрезками  $AA_0$ ,  $A_0B_0$ ,  $B_0B$  прямых  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 1$  соответственно, а при  $y < 0$  характеристиками  $AC : x + y = 0$  и  $BC : x - y = 1$  парабола-гиперболического уравнения третьего порядка

$$Lu = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} lu = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$$

**Задача В.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AA_0 \cup A_0B_0 \cup AC} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{AA_0 \cup AC} = 0, \quad (3)$$

и условиям склеивания

$$\begin{aligned} u_x(x, +0) &= u_x(x, -0), \\ u_y(x, +0) &= \alpha u_y(x, -0) + \beta \int_0^x u_y(t, -0) Q(x, t) dt, \quad 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

где  $n$  – внутренняя нормаль,  $\alpha, \beta = const$ , такие что  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $Q(.,.)$  – заданная функция.

Задача В с непрерывными условиями склеивания для первых производных искомой функции изучены в работе [1].

Вольтерровость ряда локальных и нелокальных задач для смешанного парабола-гиперболического уравнения второго и третьего порядков исследованы в [2-4]. В [4] также приведены список статей близкие к теме исследования.

В данном сообщении устанавливается сильная разрешимость задачи В и отсутствие у нее собственных значений.

Через  $W_2^l(\Omega)$  обозначим пространство С.Л.Соболева со скалярным произведением  $(.,.)$ , и нормой  $\|\bullet\|_l$ ,  $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ ,  $L_2(\cdot)\Omega$  -пространство квадратично суммируемых в  $\Omega$  функций.

Функцию  $u$  из класса  $C(\bar{\Omega})$  будем называть регулярным решением задачи В если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1) в областях  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , и в этих областях удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3), а также на линии изменения типа условием сопряжения (4). Здесь  $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$ ,  $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$ . Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для любой функции  $f(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $f(A)=0$  существует единственное регулярное решение задачи  $B$  и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \leq c \|f\|_0 \quad (5)$$

и представимо в виде

$$u(x, y) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(x, y, x_1, y_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \quad (6)$$

где  $K(x, y, x_1, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ ,  $c$  – здесь и далее означает положительные, вообще говоря, разные постоянные.

Через  $W$  обозначим множество функций из класса

$$u \in C(\bar{\Omega}), u_{xx}, u_{yy} \in C(\bar{\Omega}_0), u_{xxx}, u_{yyy} \in C(\bar{\Omega}_1),$$

удовлетворяющих краевым условиям (2) и (3), а также на линии изменения типа условием сопряжения (4).

Функцию  $u \in L_2(\Omega)$  назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функции  $\{u_n\}$ ,  $u_n \in W$ , такая, что  $u_n$  и  $Lu_n$  сходятся в  $L_2(\Omega)$  к  $u$  и  $f$  соответственно.

**Теорема 2.** Для любой функции  $f(x, y) \in L_2(\Omega)$  существует единственное сильное решение задачи. Это решение принадлежит классу  $C(\bar{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$ ; удовлетворяет неравенству (5) и представимо в виде (6).

Через  $L$  обозначим замыкание в  $L_2(\Omega)$  дифференциального оператора заданного равенством (1) на  $W$ . Из теоремы 2 следует, что оператор  $L$  обратим,  $L^{-1}$  определен на всем  $L_2(\Omega)$  и вполне непрерывен. Поэтому спектр оператора  $L$  может состоять только из собственных значений.

Основным результатом данного сообщения является следующая теорема об отсутствии собственных значений оператора  $L$ .

**Теорема 3.** Обратный оператор  $L^{-1}$  задачи определяемый формулой (6) является вольтерровым (то есть вполне непрерывным, и квазинильпотентным).

**Следствие 1.** Задача является вольтерровой краевой задачей.

**Следствие 2.** Для любого  $\lambda \in C$ , уравнение  $Lu - \lambda u = f$  однозначно разрешимо при всех  $f \in L_2(\Omega)$  в классе  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$ .

## Литература

1. Бердышев А.С. О вольтерровости аналога задачи Трикоми для параболического уравнения третьего порядка // Узбекский математический журнал. – 1996. – № 2. – С. 22-31.
2. Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T, Akhtaeva N.S. On the Volterra property of a boundary problem with integral gluing condition for mixed parabolic- hyperbolic equation // Boundary value problems. – 2013. DOI: 10.1186/1687-2770-2013-94.

3. Бердышев А.С. О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе-Самарского для смешанного парабола-гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т.46, № 3. – С. 500-510.
4. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного парабола-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы, 2015. – 224 с.

УДК 517.95

Бержанов А.Б., Кенжебаев К.К.

*Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова  
(Казахстан, Актюбе)  
e-mail: amantay48@mail.ru*

### **Многопериодическое по части переменных решение одной системы уравнений в частных производных**

Рассматривается система уравнений в частных производных

$$D_\varepsilon x = \left( \frac{\partial}{\partial t} + a(t, \varphi, \psi, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varphi} + a(t, \varphi, \psi, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \psi} \right) x = P(t, \varphi, \psi) x + \mu Q(t, \varphi, \psi, x, u, v) \quad (1)$$

где  $u = \int_{-\infty}^{+\infty} t_1^{-v|t-t_1|} R(t_1, t, \varphi, \psi, x, \mu) dt_1$ ,  $a, b$  - соответственно  $m$  и  $k$  - векторы;  $x, Q, R$  -  $n$  - векторы;  $(n \times n)$  - матрица;  $\varepsilon, \mu$  - положительные параметры;  $v > 0$  - const.

Вектор-функцию  $f(t, \varphi, \psi)$  назовем почти периодической по части переменных функцией, если она почти периодична по  $t, \varphi$  равномерно относительно  $\psi \in E^k$ . Как известно, что классическое решение  $x(t, \varphi, \psi)$  является непрерывно дифференцируемым. Если решение  $x(t, \varphi, \psi)$  системы (1) обладает меньшей гладкостью, что оно называется обобщенным решением системы (1).

В данной работе по методике [1] строится почти периодическое по части переменных решение системы (1) в широком смысле по Фридрихсу [2]. Если входные данные системы (1) обладают нужной гладкостью, то построенное решение в широком смысле является и классическим решением системы (1).

Отметим, что такое решение является интегральным многообразием в смысле Боголюбова-Митропольского [3] для характеристической системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a(t, \varphi, \psi, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = b(t, \varphi, \psi, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(t, \varphi, \psi) x + \mu Q(t, \varphi, \psi, x, u, v)$$

обладающим свойством почти периодичности по  $t, \varphi$  равномерно относительно  $\psi$ .

Работа выполнена по Гранту МОН РК (N 0113РК00686).

## Литература

1. Бержанов А.Б., Бекбауова А.У. О многопериодическом по части переменных решении одной системы уравнений в частных производных // Математический журнал. – 2003. – Т. 3, № 9. – С. 39-42.
2. Рождественский Б.А., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.:Наука, 1978. – 607 с.
3. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.:Наука, 1973. – 512 с.

УДК 539.3

Билал Ш.

*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: bilal44@mail.ru*

### Об одном свойстве оператора Штурма-Лиувилля

В работе с использованием функции Грина оператора Штурма-Лиувилля показана позитивность самого оператора. Построена функция Грина для уравнения Штурма-Лиувилля на базе найденных двух линейно-независимых решений, существование которых доказано в предыдущих работах автора [3,4]. Данная работа является логическим их продолжением. В работе исследована одно из существенных свойств оператора в рамках новоявленных специфических терминов, усиливающих прозрачность решения проблемы.

Пусть  $J \equiv (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . В пространстве  $L_p \equiv L_p(J)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $J = (a, b) \subseteq R$ , определим оператор  $\mathcal{L}_p$

$$\mathcal{L}_p y = -(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x), \quad y \in D(\mathcal{L}_p),$$

соответствующий уравнению

$$-(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho(x)$  – положительная непрерывно-дифференцируемая в  $J$  функция,  $v(x) \geq 1$  непрерывная в  $J$  функция. Область определения  $D(\mathcal{L}_p) \equiv D_p$  оператора  $\mathcal{L}_p$  состоит из функций  $y(x) \in L_p$  таких, что функции  $y(x)$ ,  $\rho(x)y'(x)$  локально абсолютно непрерывны и  $\mathcal{L}_p y$  принадлежит  $L_p$ .

Пусть будет выполнено условие А [3].

Из результатов работы [1] следует, что  $D_p$  плотна в  $L_p$  и  $\mathcal{L}_p$  – замкнутый оператор.

**Определение 1.** Линейный замкнутый оператор  $A$ , действующий в банаховом пространстве  $E$  и с  $\overline{D(A)} = E$  будет позитивным,  $\forall \lambda > 0$  если существуют операторы  $(A + \lambda I)^{-1}$  и если

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + \lambda} \quad (\lambda \geq 0).$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие  $A$  [3]. Тогда оператор  $\mathcal{L}_p$  непрерывно обратим и позитивен.

Предварительно докажем лемму.

**Лемма 1.** Пусть выполнено условие  $A$ . Тогда уравнение (1) не имеет решений из  $L_p(J)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_+(x)$ ,  $y_-(x)$  решения уравнения (1), удовлетворяющие теореме 1 [3].

Тогда любое решение  $y(x)$  уравнения (1) запишется в виде

$$y(x) = C_1 y_+(x) + C_2 y_-(x). \quad (2)$$

По выражению (17) из [3], на основании условий [3] следует, что  $y_-(t) \notin L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , в окрестности точки  $b$ . Если покажем, что в окрестности точки  $b$   $y_+(x) \in L_p$ , то этим мы докажем, что (2) не принадлежит  $L_p$  ни при каких значениях  $C_1, C_2$ .

При  $1 \leq p \leq \infty$  для любого  $x \in J = (a, b)$  на основании утверждения 2) теоремы 1, [4] имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b y_+^p(s) ds &\leq y_+^{p-1}(x) \int_x^b y_+(s) ds \leq y_+^{p-1}(x) \int_x^b v(s) y_+(s) ds = \\ &= y_+^{p-1}(x) \int_x^b (\rho(s) y_+'(s))' ds = y_+^{p-1}(x) \rho(x) |y_+'(x)|. \end{aligned}$$

В силу монотонности  $y_+(t)$ ,  $\sup_{x \leq t \leq b} y_+(t) = y_+(x)$ . Таким образом, для любого  $x \in J = (a, b)$ ,  $y_+(\cdot) \in L_p(x, b)$ . Лемма доказана.

*Доказательство теоремы.* В силу леммы 1, обратный оператор  $\mathcal{L}_p^{-1}$  существует. Покажем, что  $L_p^{-1}$  имеет вид

$$\mathcal{L}_p^{-1} f = \int_J G(x, s) f(s) ds \quad (3)$$

и ограничено действует в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Здесь

$$G(x, s) = \frac{1}{\mu} \begin{cases} y_+(x) y_-(s), & \text{при } s \leq x, \\ y_-(x) y_+(s), & \text{при } s > x \end{cases}$$

есть функция Грина оператора  $\mathcal{L}_p$ . Постоянная  $\mu$  взята из тождества Лагранжа

$$\mu = \rho(x) y_-'(x) y_+(x) - \rho(x) y_+'(x) y_-(x).$$

В дальнейшем, без ограничения общности, положим  $\mu = 1$ .

Сначала покажем, что для любого  $f \in L_p$

$$Kf = \int_J G(x, s)f(s)ds$$

принадлежит  $D_p$ . Действительно, из представления

$$(Kf)(x) = y_-(x) \int_x^b y_+(s)f(s)ds + y_+(x) \int_a^x y_-(s)f(s)ds \quad (4)$$

следует, что  $Kf$  локально абсолютно непрерывен, если существуют интегралы в (4). Существование интегралов в (4) следует из неравенств

$$\int_x^b y_+(s)f(s)ds \leq \|y_+(\cdot)\|_{L_p(x,b)} \|f\|_{L_p(J)} < \infty,$$

$$\int_a^x y_-(s)f(s)ds \leq \|y_-(\cdot)\|_{L_p(a,x)} \|f\|_{L_p(J)} < \infty,$$

где  $1/p + 1/p' = 1$ . Эти неравенства справедливы в силу неравенства Гельдера и функция  $f(\cdot)$  суммируема с  $p$ -ой степенью на всем интервале  $J = (a, b)$ . Тогда из (4) имеем

$$\rho(x) \frac{d}{dx} (Kf)(x) = \rho(x)y'_-(x) \int_x^b y_+(s)f(s)ds + \rho(x)y'_+(x) \int_a^x y_-(s)f(s)ds.$$

Отсюда видно, что  $f(x) \frac{d}{dx} (Kf)(x)$  тоже локально абсолютно непрерывен. Дифференцируя (5) еще раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \rho(x) \frac{d}{dx} (Kf)(x) \right) &= (\rho(x)y'_-(x))' \int_x^b y_+(s)f(s)ds - \rho(x)y'_-(x)y_+(x)f(x) + \\ &+ (\rho(x)y'_+(x))' \int_a^x y_-(s)f(s)ds + \rho(x)y'_+(x)y_-(x)f(x) = v(x) \left( y_-(x) \int_x^b y_+(s)f(s)ds + \right. \\ &\left. + y_+(x) \int_a^x y_-(s)f(s)ds \right) - (\rho(x)y'_-(x)y_+(x) - \rho(x)y'_+(x)y_-(x))f(x) = vKf - f. \end{aligned}$$

То есть

$$\mathcal{L}_p Kf = f. \quad (5)$$

Таким образом, для любого  $f \in L_p$ ,  $Kf \in D_p$ .

С другой стороны, из (6) и из существования  $\mathcal{L}_p^{-1}$  следует, что  $\mathcal{L}_p^{-1}$  определен во всем пространстве  $L_p$  и имеет место (3).

Так как функция Грина  $G(x, s)$  симметрична, то поэтому справедливо неравенство

$$\|\mathcal{L}_1^{-1}\|_{1 \rightarrow 1} = \|(\mathcal{L}_1^{-1})^*\|_{\infty \rightarrow \infty} = \|\mathcal{L}_\infty^{-1}\|_{\infty \rightarrow \infty} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)} \right\} \leq 1.$$

Теперь применяя интерполяционную теорему Рисса-Торина [4, с.12] имеем

$$\|\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow p} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)} \right\} \leq 1.$$

Для дифференциального уравнения

$$-(\rho(x)y'(x))' + (v(x) + \lambda)y(x) = 0,$$

обратный оператор  $(\mathcal{L}_p + \lambda)^{-1}$  существует и имеет аналогичный, как в (3) вид

$$(\mathcal{L}_p + \lambda)^{-1}f = \int_J G(x, s, \lambda)f(s)ds$$

и ограниченно действует в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Это доказывается аналогичным образом. И норма оператора  $(\mathcal{L}_p + \lambda)^{-1}$  оценивается также. То есть

$$\|(\mathcal{L}_p + \lambda)^{-1}\|_{p \rightarrow p} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x) + \lambda}, \frac{1}{v_-(x) + \lambda} \right\} \leq \frac{1}{1 + \lambda}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Отсюда следует, что оператор  $\mathcal{L}_p + \lambda$  непрерывно обратим и

$$\|(\mathcal{L}_p + \lambda)^{-1}\|_{p \rightarrow p} \leq \frac{1}{1 + \lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Этим самым мы доказали, что оператор  $\mathcal{L}_p$  – позитивен.

### Литература

1. *Ойнаров Р.* Некоторые свойства оператора Штурма-Лиувилля в  $L_p$  // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1990. – № 1. – С. 43-47.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 500 с.
3. *Билал Ш.* Об оператора Штурма-Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т 48, № 3. – С. 425-429.
4. *Билал Ш.* Интегро-дифференциальные свойства сингулярного оператора Штурма-Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т 50, № 2. – С. 145-159.



Василина Г.К.

*Институт математики и математического моделирования,  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: v\_gulmira@mail.ru*

### Об оптимальной по вероятности стабилизации программного движения

Рассматривается задача оптимальной стабилизации программного движения управляемой стохастической системы. Получены достаточные условия разрешимости задачи оптимальной стабилизации аналитически заданного интегрального многообразия в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка.

Пусть заданы

1) управляемая система стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx = X(x, u, t)dt + \sigma(x, u, t)d\xi, \quad x \in R^n, \quad \xi \in R^m, \quad u \in R^k; \quad (1)$$

2) программное движение со свойствами в виде интегрального многообразия

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \quad \lambda \in R^r \quad (2)$$

уравнения (1);

3) некоторый функционал

$$J^{s, x_0}(u) = \int_s^\infty MW(\lambda(x^{s, x_0}(t), t); x^{s, x_0}(t), u(x^{s, x_0}(t), t), t)dt, \quad (3)$$

как мера отклонения движения точки  $x(t) \in \Lambda_h(t)$

$$\Lambda_h(t) : \|\lambda(x, t)\| < h, \quad t \geq t_0 \quad (4)$$

от многообразия  $\Lambda(t)$  (2).

Требуется найти управляющее воздействие  $u^0(x, t)$ , которое обеспечивает асимптотическую  $\rho$ -устойчивость по вероятности программного движения (2). При этом каковы бы ни были другие управляющие воздействия  $u^*(x, t)$ , также обеспечивающие асимптотическую по вероятности  $\rho$ -устойчивость  $\Lambda(t)$  (2), должно выполняться неравенство  $J(u^0) \leq J(u^*)$ , т.е.

$$\int_s^\infty MW(\lambda(x^0[t], t), u^0[t], x^0[t], t)dt \leq \int_s^\infty MW(\lambda(x^*[t], t), u^*[t], x^*[t], t)dt$$

для всех начальных условий  $\{s, x_0\}$  из области  $\Lambda_h(t)$  (4).

Задача об оптимальной стабилизации в классе ОДУ рассмотрена:

- а) в [1] для невозмущенного движения,  
 б) в [2] для аналитически заданного множества;  
 а) в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито -  
 с) в [3] для невозмущенного движения,  
 д) в [4] для аналитически заданного множества.

В [4] случайные возмущения предполагаются из класса винеровских процессов. В данной работе случайные возмущения предполагаются из более общего класса случайных возмущений, а именно из класса процессов с независимыми приращениями.

Составим уравнение "возмущенного" движения относительно программного движения  $\Lambda(t)$  (2), исходя из заданного уравнения (1)

$$d\lambda = A(x, t)dt + B(x, t)d\omega + \int_{R^n} G(x, t)dP(t, dx), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial t} + \left( \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x_i} \right)^T X_i + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 \lambda_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma_{jk}^T \right] + \\ &+ \int_{R^n} \left[ \lambda_\mu(x + \sigma_{ik} c_k(x), t) - \lambda_\mu(x, t) - \left( \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x_i} \right)^T \sigma_{ik} c_k(x) \right] dx, \\ B(x, t) &= \left( \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x_i} \right)^T \sigma_{ik}, \quad G(x, t) = \lambda_\mu(x + \sigma_{ik} c_k(x), t) - \lambda_\mu(x, t), \end{aligned}$$

$\mu = \overline{1, r}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Будем рассматривать непрерывные функции Ляпунова  $V(\lambda; x, t) \in C_{\lambda x t}^{221} : R^r \times R^n \times R^+ \rightarrow R^+$ , и такие, что  $V(0; x, t) = 0$ . С процессом  $x^{s, x_0}(t)$  в связи с совместным рассмотрением исходных уравнений (1) и уравнений возмущенного относительно  $\Lambda(t)$  движения (5) связан производящий дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} \tilde{L}_u V &= \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^T X_i + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma_{jk}^T \right] + \\ &+ \int_{R^n} [V(\lambda_\mu(x + \sigma_{ik} c_k(x), t); x + \sigma_{ik} c_k(x), t) - V(\lambda_\mu(x, t); x, t) - \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^T \sigma_{ik} c_k(x)] dx + \\ &+ \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^T \sigma_{ik} d\omega_k + \int_{R^n} [V(\lambda_\mu(x + \sigma_{ik} c_k(x), t); x + \sigma_{ik} c_k(x), t) - \\ &- V(\lambda_\mu(x, t); x, t)] dP(t, dx) + \frac{\partial V}{\partial \lambda_\mu} d\lambda_\mu. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения (5) существует функция Ляпунова  $V_0(\lambda; x, t) \in C_{\lambda x t}^{221}$  и вектор-функция  $u = u^0(x, t)$ , удовлетворяющие в области  $\Lambda_h(t)$  (4) условиям:

- 1)  $a(\|\lambda\|) \leq V_0(\lambda; x, t) \leq b(\|\lambda\|)$ ,  $a, b \in K$ ;
- 2)  $W(\lambda, x, u^0(x, t), t) \geq c(\|\lambda\|)$ ,  $c \in K$ ;

3)  $\lambda(x, t) \in C_{xt}^{21}$  удовлетворяет неравенству  $\|\lambda(x, t)\| \geq \alpha(\rho)$ ,  $\alpha \in K$ .

Кроме того, выполняются условия

4)  $\tilde{L}_u V_0(\lambda(x, t); x, t) + W(\lambda(x, t), x, u^0(x, t), t) \equiv 0$ ;

5)  $\tilde{L}_u V_0(\lambda(x, t); x, t) + W(\lambda(x, t), x, u(x, t), t) \geq 0$ .

Тогда управляющая вектор-функция  $u^0(x, t)$  разрешает задачу об оптимальной стабилизации, причем  $J(u^0) \leq J(u)$ .

### Литература

1. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге Малкина И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
2. Мухарлямов Р.Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 4. – С. 688-699.
3. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Устойчивость и стабилизация стохастических дифференциальных уравнений // Летняя школа по теории вероятностей и математической статистике. – Киев, 1969. – С. 68-121.
4. Тлеубергенов М.И. Метод функций Ляпунова в задаче стохастической устойчивости программного движения // Математический журнал. – 2001. – Т. 1, № 2. – С. 98-106.

УДК 519.624

Джумабаев Д.С.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: dzhumabaev@list.ru*

### О свойствах семейств краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

Рассматривается семейство интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t)u + \int_0^T K(x, t, s)u(x, s)ds + F(x, t),$$

$$x \in [0, \omega], \quad t \in (0, T), \quad u \in R^n, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$B(x)u(x, 0) + C(x)u(x, T) = d(x), \quad (2)$$

где  $n \times n$ -матрица  $A(x, t)$  и  $n$ -вектор  $F(x, t)$  непрерывны на  $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ ;  $(n \times n)$ -матрицы  $B(x)$ ,  $C(x)$  и  $n$ -вектор  $d(x)$  непрерывны на  $[0, \omega]$ .

В случае отсутствия интегрального члена семейство краевых задач (1), (2) было использовано для решения нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными [1]. В [2] было показано, что семейство краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений не является фредгольмовым.

Очевидно, что семейство краевых задач (1), (2) также не является фредгольмовым.

Вопросы разрешимости и свойства семейства краевых задач (1), (2) имеют самостоятельный научный интерес и находят применение при решении нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

В [3] предложен метод исследования и решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Метод основан на разбиении интервала  $[0, T]$  с шагом  $h > 0 : Nh = T$  и введении дополнительных параметров. Здесь, также как и в известных методах исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма, требуется однозначная разрешимость некоторой промежуточной задачи - специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений. Однако, в отличие от промежуточных задач известных методов, специальная задача Коши однозначно разрешима при достаточно малом шаге  $h$ . Это свойство промежуточной задачи метода [3] позволило установить необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемой задачи и предложить алгоритм нахождения ее решения.

В [4] метод и результаты [3] обобщены на случай произвольного разбиения  $\Delta_n$  интервала  $[0, T]$ . Для заданного  $\Delta_n$  по исходным данным интегро-дифференциального уравнения Фредгольма составляется однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Если это уравнение имеет только нулевое решение, то  $\Delta_n$  называется регулярным разбиением интервала  $[0, T]$ . Через  $\sigma([0, T])$  обозначается множество регулярных разбиений и установлено, что это множество не пусто. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости и однозначной разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

В сообщении семейство краевых задач (1), (2) исследуется на основе метода работ [3, 4]. Через  $C(\bar{\Omega}, R^n)$  обозначается пространство непрерывных функций  $u : \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  с нормой  $\|u\|_0 = \max_{\bar{\Omega}} \max_{i=1, n} |u_i(x, t)|$ .

Решением задачи (1), (2) является функция  $u(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ , имеющая на  $[0, \omega] \times (0, T)$  непрерывную производную по  $t$  и удовлетворяющую семейству интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма (1) и краевому условию (2) соответственно при всех  $(x, t) \in [0, \omega] \times (0, T)$  и  $x \in [0, \omega]$ .

На  $[0, T]$  возьмем произвольные точки:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$  и  $\bar{\Omega}$  разобьем на  $N$  частей параллельными линиями:  $(x, t_0), (x, t_1), \dots, (x, t_N), x \in [0, \omega]$ . Такое разбиение  $\bar{\Omega}$  обозначим через  $\Delta_n([0, \omega])$ . Для заданного разбиения  $\Delta_n([0, \omega])$  по данным семейства интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма (1) составляется семейство интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разбиение  $\Delta_n([0, \omega])$  называется регулярным, если построенное интегральное уравнение однозначно разрешимо. Множество регулярных разбиений  $\bar{\Omega}$  обозначается через  $\sigma(\bar{\Omega})$ . Показано, что множество  $\sigma(\bar{\Omega})$  не пусто.

Построена система линейных уравнений относительно значений решения задачи (1), (2) в линиях разбиения  $\bar{\Omega}$ . Установлено, что разрешимость семейств краевых задач (1), (2) эквивалентна разрешимости построенной системы.

Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2).

### Литература

1. *Asanova A.A., Dzhumabaev D.S.* Well-posedness of nonlocal value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 402 (2013)167-178.
2. *Джумабаев Д.С., Асанова А.Т.* Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доповіді НАН України. – 2010. – № 4. – С. 7-11.
3. *Джумабаев Д.С.* Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 7. – С. 1209-1221.
4. *Джумабаев Д.С.* Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Український математичний журнал. – 2014. – Т.66, № 8. – С. 1074-1091.

УДК 517.946

Жапсарбаева Л.К.

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: leylazhapsarbaeva@rambler.ru*

### Об одной полупериодической нелинейной задаче на полосе для вырождающейся эллиптической системы второго порядка

На полосе  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$  рассматривается нелинейная задача

$$\begin{cases} k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \varphi(y) \frac{\partial u}{\partial x} + a(y, u, v)u + a(y, u, v)v = f(x, y), \\ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k(y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \psi(y) \frac{\partial v}{\partial x} + c(y, u, v)u + d(y, u, v)v = g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

$$w(-\pi, y) = w(\pi, y), \quad w_x(-\pi, y) = w_x(\pi, y). \quad (2)$$

Предполагается, что функция  $k(y)$  определена на  $\mathbb{R}$ , непрерывна и  $k(y) \geq 0$ ,  $f, g \in L_2(G)$ .

Система (1) является эллиптической по Петровскому, важность изучения краевых задач для нее отмечена в монографии [1]. Обсуждаются достаточные условия на коэффициенты, при которых нелинейная задача (1), (2) имеет единственное решение принадлежащее классу Соболева  $W_{2,p,q}^2(G, \mathbb{R}^2)$  для каждой правой части  $(f, g)$ . Данная работа обобщает результат К.Н.Оспанова [3], получившего коэцитивные оценки решения задачи (1), (2) в случае, когда  $k(y) = 1$  при  $b = c = 0$ .

## Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981.
2. Оспанов К.Н. Об одной корректной задаче для сингулярной системы типа А.В.Бицадзе // Математический журнал. – 2004. – Т. 4. № 3. – С. 68-73.
3. Оспанов К.Н. Коэрцитивные оценки для сингулярной системы А.В.Бицадзе // Математический журнал. – 2005. – Т.5, №1. – С. 85-93.

УДК 517.925:62.50

Жуматов С.С.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: sailau.math@mail.ru*

## Неустойчивость программного многообразия систем управлений с разрывными нелинейностями

Рассмотрим задачу построения систем автоматического управления по заданному программному многообразию  $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$  [1]:

$$\dot{x} = f(t, x) - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  - вектор состояния объекта,  $f \in R^n$ - вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения  $x = x(t)$ ,  $B \in R^{n \times r}$ ,  $P \in R^{s \times r}$ - постоянные матрицы,  $\omega \in R^s$ -вектор ( $s \leq n$ ),  $\xi \in R^r$ - разрывная вектор-функция управления по отклонению от заданного многообразия имеющая лишь изолированные точки разрыва, для которых существуют конечные верхний и нижний пределы

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\sigma) = \varphi_+(\sigma_0), \quad \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow \sigma_0} \varphi(\sigma) = \varphi_-(\sigma_0) \quad (2)$$

и выполняются условия

$$\varphi_-[\sigma(t)] \leq \|\xi(t)\| \leq \varphi_+[\sigma(t)], \quad (3)$$

где

$$\varphi_-(\sigma_0) = \inf_i \varphi_-(\sigma_{i0}), \quad \varphi_+(\sigma_0) = \sup_i \varphi_-(\sigma_{i0}) \quad i = 1, \dots, r.$$

В силу того, что многообразие  $\Omega(t)$  является интегральным для системы (1) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + H \cdot f(t, x) = F(t, x, \omega), \quad H = \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (4)$$

Здесь  $F(t, x, \omega)$  - некоторая  $s$  – вектор-функция Еругина [2].

Если положим, что

$$F = -A\omega, \quad (5)$$

, где  $-A$  гурвицева матрица, то, дифференцируя многообразие  $\Omega(t)$  по времени  $t$  в силу системы (1), получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (6)$$

(6) где нелинейность  $\varphi(\sigma)$  удовлетворяет условиям (2) и (3). Составим передаточную функцию

$$W(i\varpi) = P^T(A + i\varpi E)^{-1}HB. \quad (7)$$

**Определение 1.** Дополненным графиком разрывной функции  $\varphi(\sigma)$  называется замкнутое множество на плоскости  $\{\sigma, \xi\}$ , состоящее из точек  $[\sigma, \varphi(\sigma)]$ , где  $\sigma$  - точка непрерывности функции  $\varphi(\sigma)$  и из всех вертикальных отрезков с концами  $[\sigma_0, \varphi_-(\sigma_0)], [\sigma_0, \varphi_+(\sigma_0)]$ , где  $\sigma_0$ - точки разрыва функции  $\varphi(\sigma)$ . Если программное многообразие является интегральной для системы на  $[t_1, t_2]$ , то точка  $[\sigma(t), \xi(t)]$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$  принадлежит дополненному графику функции  $\varphi(\sigma)$ .

**Определение 2.** Программное многообразие называется неустойчивым в целом относительно вектор-функции  $\omega$ , если в фазовом пространстве существует неограниченная открытая область  $\Xi$ , включающая окрестность заданного многообразия и обладающая тем свойством, что все решения относительно вектор-функции  $\omega$  начинающиеся в этой области, не ограничены при  $t \rightarrow \infty$ .

Предположим, что  $\mu_1 \leq \mu_2$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $\theta$ - некоторые диагональные матрицы,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  могут принимать значения равные  $\pm\infty$ . Введем следующую частотную функцию

$$\pi(\varpi) = \tau Re\{[1 + \mu_1 W(i\varpi)] \cdot [1 + \mu_2 W(i\varpi)]^T\} + \vartheta Re[i\varpi W(i\varpi)]$$

при  $\mu_1 \neq -\infty$ ,  $\mu_2 \neq +\infty$ .

Пусть  $S[\mu_1, \mu_2]$  замкнутый сектор на плоскости  $\{\sigma, \xi\}$ , состоящий из точек  $(\sigma, \xi)$ , для которых  $\sigma \neq 0$ ,  $\mu_1 \leq \xi/\sigma \leq \mu_2$  и включающий программное многообразие  $\omega = 0$ .

**Определение 3.** Замкнутый сектор  $S[\mu_1, \mu_2]$ , для которого при всех  $0 \leq \varpi \leq \infty$  и некоторых  $\tau \geq 0$ ,  $\theta$  выполнено частотное условие  $\pi(\varpi) > 0$ , и если  $\pi(\varpi) = 0$  то  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \varpi^2 \pi(\varpi) > 0$ , будем называть при  $k = 0$  сектором абсолютной устойчивости и при  $0 < k \leq s$  сектором абсолютной неустойчивости, а при  $k = s$  сектором полной абсолютной неустойчивости и неполной абсолютной неустойчивости при  $1 \leq k < s$ .

Если график функции  $\varphi(\sigma)$  расположен частично в секторах абсолютной устойчивости, частично в секторах абсолютной неустойчивости, то в системе при определенных условиях могут возникнуть автоколебания.

**Теорема 1.** Пусть функция Еругина имеет вид (5), существует  $\delta > 0$  и выполняется частотное неравенство

$$\pi(\varpi) \geq \delta \| (A + i\varpi E)^{-1} \|^2, \quad (8)$$

а матрица  $-A - HB\mu P^T$  имеет  $k \geq 1$  собственных значений в правой полуплоскости и дополненный график функции  $\Phi$  лежит в секторе  $S[\mu_1, \mu_2]$ . Тогда программное многообразие  $\Omega(t)$  неустойчиво в целом относительно вектор-функции  $\omega$ .

При этом в окрестности программного многообразия осуществляется одна из двух возможностей: а) функция  $\omega(t)$  не ограничена на интервале существования, а если этот интервал бесконечен, то  $\|\omega(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ; б) интервал существования решения бесконечен,  $\|\omega(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и сходятся интегралы  $\int_0^{\infty} \|\omega\|^2 dt$ ,  $\int_0^{\infty} \|\xi\|^2 dt$ . Кроме того на любой сфере  $\|\omega\| = \rho$  найдутся такие точки  $\omega_0$ , что при  $\omega(0) = \omega_0$  для функции  $\omega(t)$  имеет место случай а).

### Литература

1. Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. – Алматы: Гылым, 1999. – 228 с.
2. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т. 10, вып. 6. – С. 659-670.
3. Якубович В.А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сибирский мат. журнал. – 1973. – Т. XIV, № 5. – С. 1100-1129 с.

УДК 517.95

Зикиров О.С.

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека  
Узбекистан, Ташкент  
e-mail: zikirov@yandex.ru*

### Об одной нелокальной задаче Стеклова для псевдогиперболического уравнения

В области  $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $a_x(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $f(x, t) \in C(\bar{D})$ , кроме того  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $c(x, t) \leq 0$ .

В работе для уравнения (1) изучается следующая нелокальная **задачи**. требуется найти в области  $D$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и нелокальным граничным условиям

$$u(0, t) = \alpha u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$a(l, t)u_x(l, t) = \beta a(0, t)u_x(0, t) + \gamma u(l, t) + \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$\varphi(x)$ ,  $\mu(t)$  – заданные функции,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – заданные действительные числа.

Отметим, что условия (3) и (4) относятся к типу нелокальных граничных условий Стеклова второго класса [1], которые естественным образом возникают при решении многих прикладных задач и обобщено А.М.Нахушевым в [2].

Методом энергетических неравенств доказана следующая



**Теорема 1.** Если выполнены условия  $\alpha = \beta \neq 1$ ,  $\gamma \leq 0$ , то для решения задачи (1)–(4) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \| u(x, t) \|_0^2 + \int_0^t \| u_x(x, t) \|_0^2 d\tau \leq \\ & \leq M \left( \int_0^t \| f(x, t) \|_0^2 d\tau + \int_0^t \mu^2(\tau) d\tau + \| \varphi(x) \|_0^2 \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\| u \|_0^2 = \int_0^l u^2(x, t) dx$ ,  $M$  – известная постоянная, не зависящая от  $T$ .

Из оценки (5) следует единственность и непрерывная зависимость решения от заданных функций. Методом редукции к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода доказана существования решения задачи (1)–(4).

### Литература

1. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. – М.: Наука, 1983. – 432 с.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

УДК 517.43

Иманбаев Н.С.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. Ясави  
(Казахстан, Туркестан)  
e-mail: imanbaevnur@mail.ru

### Характеристический определитель спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с интегральным возмущением краевого условия

В пространстве  $L_2(0, 1)$  рассмотрим оператор  $\mathcal{L}_0$ , порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(u) = u^{(n)}(x) + q_2(x)u^{(n-2)}(x) + \dots + q_n(x)u(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$U_j(u) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{jk}u^{(k)}(0) + \beta_{jk}u^{(k)}(1)] = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения  $q_k(x) \in C^{n-k}[0, 1]$ ,  $k = \overline{2, n}$ ; а формы  $U_j(u)$  – линейно независимые.

Пусть  $\mathcal{L}_1$  - оператор в  $L_2(0, 1)$ , заданный выражением (1) и "возмущенными" краевыми условиями:

$$\begin{aligned} U_j(u) &= 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq m, \\ U_m(u) &= \int_0^1 \overline{p_m(x)} u(x) dx, \quad p_m(x) \in L_2(0, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Вопрос о базисности собственных и присоединенных функций (СиПФ) оператора  $\mathcal{L}_1$  с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [1], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу краевых условий (2); а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса СиПФ.

В настоящем докладе в предположении, что невозмущенный оператор  $\mathcal{L}_0$  обладает системой СиПФ, образующей базис Рисса в  $L_2(0, 1)$ , мы построим характеристический определитель спектральной задачи для оператора  $\mathcal{L}_1$ . На основании полученной формулы делаются выводы об устойчивости свойств базисности Рисса СиПФ задачи при интегральном возмущении краевого условия. Возможности формулы иллюстрируются на примере задачи Самарского-Ионкина с интегральным возмущением краевого условия.

### Литература

1. Шкаликков А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. – 1982. – № 6. – С. 12-21.

УДК 517.43

Искакова У.А.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: ulzada@list.ru*

### Причины некорректности локальной задачи Коши для уравнения Лапласа

Пусть  $\Omega \subset R^2$  – односвязная область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Через  $\Gamma \subset \partial\Omega$  обозначим односвязное не пустое подмножество границы.

В  $\Omega \subset R^2$  рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа

$$Lu \equiv \Delta u = f \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \psi. \quad (2)$$

Условная корректность задач вида (1)-(2) изучалась в работах [1], [2]. В [3] был предложен новый метод построения критерия корректности задачи Коши и смешанной задачи Коши для оператора Лапласа в прямоугольной области.

В настоящей работе причины некорректности задачи (1)-(2) устанавливаются для областей произвольного вида. Как и в [3] используется спектральное

разложение решения задачи (1)-(2) – по системе собственных функций специальной самосопряженной задачи Коши для оператора Лапласа с отклоняющимся аргументом:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x, t).$$

Показывается, что  $\lambda_{km} > 1/17$  при всех  $k$  и при  $m \neq 1$ , а для одной серии собственных значений (серия при  $m = 1$ ) имеет место асимптотика при  $k \rightarrow \infty$ :

$$\lambda_{k1} = 4k^2 e^{-2k} (1 + o(1)).$$

На основании полученной асимптотики делается вывод о причинах некорректности локальной задачи Коши для уравнения Лапласа.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 142 с.
2. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – Т. 20, № 6. – С. 819-842.
3. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады РАН. – 2008. – Т.423, № 4. – С. 730-732.

УДК 519.61, 519.62, 519.63

Кабанихин С.И.<sup>1</sup>, Бектемесов М.А.<sup>2</sup>, Шишленин М.А.<sup>3</sup>

- <sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет (Россия, Новосибирск),  
<sup>2</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби (Казахстан, Алматы),  
<sup>3</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет (Россия, Новосибирск)  
e-mail: kabanikhin@sscc.ru, maktagali@mail.ru, mshishlenin@ngs.ru

### Новые методы регуляризации задачи продолжения

Некоторые задачи интерпретации гравитационного и магнитного полей, связанные с разведкой полезных ископаемых, приводят к некорректно поставленным задачам эквивалентным задаче Коши для уравнения Лапласа (задача продолжения) [1-3].

Неоднородность распределения плотности под поверхностью  $z = 0$  Земли вызывает гравитационную напряженность поля на поверхности Земли, которая отклоняется от своего среднего значения. Хотя в процентном отношении эти отклонения невелики, но они фиксируются физическими приборами (гравиметрами). Гравиметрические данные используются для определения места и формы подповерхностных неоднородностей.

Если расстояние между геологическими телами больше, чем расстояние между ними и поверхностью Земли, то их расположение соответствует локальным

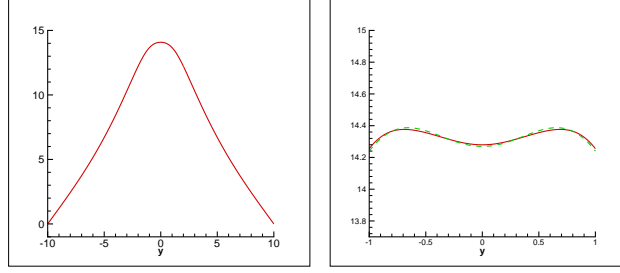


Figure 1: Слева — данные измеряемые на поверхности  $z = 0$ . Справа — решение задачи продолжения на глубину  $z = 0.9$  км.

максимумам аномалий (на рис. 1 справа). В противном случае, два тела могут быть связаны с единственным локальным максимумом (на рис. 1 слева).

Было предложено находить аномальное гравитационное поле на некоторой глубине  $h$  (на рис. 1) на основе результатов гравитационных измерений, проводимых на поверхности Земли (решение задачи продолжения).

Если выясняется, что аномалия на этой глубине по-прежнему имеет один локальный максимум, то весьма вероятно, что аномалия создается одной неоднородностью.

В противном случае, если два локальных максимума появляются в результате численного продолжения (см. рис. 1), то мы можем заключить, что есть две неоднородности.

Рассмотрим задачу продолжения:

$$u_{zz} + u_{yy} = 0, \quad (z, y) \in \Omega = (0, h) \times (0, L_y), \quad (1)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, L_y), \quad (2)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in (0, L_y), \quad (3)$$

$$u(z, 0) = u(z, L_y) = 0, \quad z \in (0, h). \quad (4)$$

Рассмотрим некорректную задачу продолжения (1)–(4) как обратную задачу к следующей прямой задаче

$$u_{zz} + u_{yy} = 0, \quad (z, y) \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_z(0, y) = 0, \quad y \in (0, L_y), \quad (6)$$

$$u(h, y) = q(y), \quad y \in (0, L_y), \quad (7)$$

$$u(z, 0) = u(z, L_y) = 0, \quad z \in (0, h). \quad (8)$$

В прямой задаче (5)–(8) требуется найти  $u(z, y)$  в области  $\Omega$  по функции  $q(y)$  заданной на части границы  $z = h$  области  $\Omega$ .

Обратная задача заключается в определении  $q(y)$  из условий (5)–(8) и заданной дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, L_y). \quad (9)$$

Для численного решения задачи продолжения рассматривались метод градиентного спуска и прием С.К. Годунова на основе сингулярного разложения [1,4,5].

Показано, что размер области наблюдения  $L_y$  является параметром регуляризации задачи. Приведены результаты численных расчетов.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №15-01-09230) и Министерства образования и науки РФ.*

### Литература

1. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nursetova A.T., Kasenov S.E.* Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation // Journal of Applied Mathematics. - 2014. - Vol. 2014. - 7 pages (<http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326>).
2. *Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S.* Regularization of the continuation problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2013. - Vol. 21, № 6. - Pp. 871–884.
3. *Kabanikhin S.I., Nurseitov D., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B.* Inverse Problems for the Ground Penetrating Radar // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2013. - Vol. 21, № 6. - Pp. 885–892.
4. *Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Бектемесов М.А., Шишленин М.А.* Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач. – Астана, 2012. - 338 с.
5. *Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шишленин М.А.* Методы решения некорректных задач линейной алгебры. - КазНПУ, Алматы (Казахстан) – Новосибирск (Россия), 2011. - 131 с.

УДК 517.977.1

Кабидолданова А.А.

*Институт ММ КазНУ имени аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: kabasem@mail.ru*

### Построение ограниченного управления для дискретных систем

Рассматривается дискретная система, описываемая уравнением состояния вида

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \mu(t), \quad t \in I, \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

$$x(N) = x^1, \quad (2)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in I, \quad (3)$$

$$U = \left\{ (u(0), \dots, u(N-1)) \in L_2(I, R^r) \mid \gamma(t) \leq u(t) \leq \delta(t), \quad t \in I \right\},$$

где  $I = \{0, \dots, N-1\}$ ,  $A(t), B(t)$  заданные матрицы,  $\mu(t), \gamma(t), \delta(t)$ ,  $t \in I$ , - заданные вектор-функции,  $x^0, x^1 \in R^n$  фиксированы.

Ставятся задачи:

**Задача 1.** Найти необходимое и достаточное условие управляемости системы (1) при условиях (2), (3) для случая, когда  $U \equiv L_2(I, R^r)$ .

**Задача 2.** Построить управление  $u(t) \in U$ , при котором решение системы (1) удовлетворяет условию (2).

Введем обозначения

$$P(0) = A(N-1)\dots A(2)A(1), \quad P(1) = A(N-1)\dots A(3)A(2), \dots,$$

$$P(N-2) = A(N-1), \quad P(N-1) = I_n,$$

т.е.

$$P(t) = A(N-1)\dots A(t+1), \quad t = \overline{0, N-2}, \quad P(N-1) = I_n,$$

здесь  $I_n$  - единичная матрица порядка  $n \times n$ . Полагаем, что матрица  $P(t)B(t)$  не является нулевой одновременно при всех  $t \in I$ .

**Теорема 1.** Для управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы матрица  $T(t) = P(t)B(t)B'(t)P'(t)$  была положительно определена для любого  $t \in I$ , здесь символ  $'$  - знак транспонирования.

Доказательство. Доказательство необходимости аналогично случаю непрерывных систем, который можно найти в [1].

*Достаточность.* Пусть матрица  $T(t) = P(t)B(t)B'(t)P'(t)$  положительно определена для любого  $t \in I$ . Покажем, что система (1) управляема.

Нетрудно убедиться в том, что

$$x(N) = P(0)A(0)x^0 + P(0)B(0)u(0) + P(1)B(1)u(1) + \dots + P(N-2)B(N-2)u(N-2) +$$

$$+ B(N-1)u(N-1) + \sum_{t=0}^{N-1} P(t)\mu(t).$$

Тогда управление  $(u(0), \dots, u(N-1))$  должно удовлетворять уравнению:

$$\sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)u(t) = a, \tag{4}$$

где  $a = x^1 - P(0)A(0)x^0 - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)\mu(t)$ .

Выберем управление

$$u(t) = \frac{1}{c} B'(t)P'(t)T^{-1}(t)a, \quad t \in I,$$

где  $0 < c \leq N$ ,  $c$  - количество  $t \in I$ , при которых  $P(t)B(t)$  не является нулевой матрицей. Покажем, что такое управление удовлетворяет уравнению (4). В самом деле,

$$\frac{1}{c} \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)B'(t)P'(t)T^{-1}(t)a = \frac{c}{c} T(t)T^{-1}(t)a = a.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть матрица  $\Gamma(t) = P(t)B(t)B'(t)P'(t)$  положительно определена для любого  $t \in I$ , величина

$$\alpha = \frac{K'(t)[a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t)]}{K'(t)K(t)} \quad (5)$$

удовлетворяет условию  $0 \leq \alpha \leq 1$ , здесь  $K(t) = \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)[\gamma(t) - \delta(t)]$ ,  $t \in I$ .

Тогда управление

$$u(t) = \alpha[\gamma(t) - \delta(t)] + \delta(t), \quad t \in I, \quad (6)$$

является решением задачи 2.

Доказательство. Для решения задачи 2 необходимо построить решение уравнения (4), удовлетворяющее условию (3). Покажем, верность равенства

$$\sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t) [\alpha[\gamma(t) - \delta(t)] + \delta(t)] = a.$$

В самом деле, так как  $\alpha$  определяется по формуле (5), то должно выполняться равенство

$$\frac{K'(t)[a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t)]}{K'(t)K(t)} \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)[\gamma(t) - \delta(t)] + \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) = a.$$

Отсюда,

$$K'(t) \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right] \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)[\gamma(t) - \delta(t)] = K'(t)K(t) \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right].$$

Разделим обе части на  $K'(t) \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right]$ . Тогда, с учетом того, что

$$K(t) = \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)[\gamma(t) - \delta(t)], \quad t \in I, \text{ получим}$$

$$K(t) = \frac{K'(t)K(t)}{K'(t) \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right]} \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right].$$

Умножим слева на  $K'(t)$

$$K'(t)K(t) = \frac{K'(t)K(t)}{K'(t) \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right]} K'(t) \left[ a - \sum_{t=0}^{N-1} P(t)B(t)\delta(t) \right],$$

теперь имеем

$$K'(t)K(t) = K'(t)K(t).$$

Следовательно, управление, определяемое по формуле (6), удовлетворяет уравнению (4). Поскольку по условию теоремы  $\alpha \in [0, 1]$ , то  $u(t) = \alpha[\gamma(t) - \delta(t)] + \delta(t) \in U$ . Теорема доказана.

### Литература

1. Айсагалиев С.А. Общее решение одного класса интегральных уравнений Математический журнал. – 2005. – Т. 5, № 4. – С. 3-10.

УДК 517.43

Кангужин Б.Е., Абдурахитова Г.Е., Шаймерденова А.К.

*Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби*

*(Алматы, Казахстан)*

*e-mail: kanbalta@mail.ru*

### Операторы преобразования для дифференциальных уравнений четвертого порядка с неаналитическими коэффициентами

В работе [1] рассмотрено уравнение Штурма-Лиувилля на отрезке  $[0, 1]$

$$-y'' + q(x)y(x) = \lambda y(x), q(\cdot) \in L^1[0, 1], \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, i \in 1, 2. \quad (2)$$

Здесь  $q$  - комплекснозначный потенциал,  $a_{ik} \in \mathbb{C}$ .

Полнота системы собственных и присоединенных функций (СПФ) задачи (1)-(2) в случае регулярных краевых условий хорошо известна [2]. Наиболее полный результат о полноте системы СПФ задачи (1)-(2) получен в [3].

**Теорема 1.** Пусть  $q(\cdot) \in L^1[0, 1]$  краевая условия (2) невырождены. Тогда система СПФ задачи (1)-(2) полна в  $L^p[0, 1]$  при  $p \in [1, \infty)$ . Наиболее полный результат о полноте СПФ невырожденных краевых задач (1)-(2) в случае вырожденных краевых условий (2) получен в работе [1].

В данной работе результаты работ [1, 2] обобщены для краевых задач дифференциальных уравнений четвертого порядка. Основной математический аппарат работы [1, 2] – операторы преобразования. Поэтому нам сначала необходимо построить операторы преобразования для дифференциальных уравнений четвертого порядка с неаналитическими коэффициентами.

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y^{(4)}(x) + p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = \lambda y(x) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$y_m^{(k-1)}(0) = \delta_{km}, k, m = 1, 2, 3, 4, \quad (4)$$

где функций  $p_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2$  будем считать  $k$  раз непрерывно дифференцируемыми на  $[0, b]$  функциями,  $\lambda$ -параметр и  $\delta_{km}$  символ Кронекера.



**Теорема 2.** Решение  $y(x, \lambda)$  задачи (3), (4) имеет интегральное представление

$$y(x, \lambda) = \int_0^x d\xi \int_\xi^x d\tau (\psi_1(\tau - \xi + i\xi, \lambda) + \psi_1(\tau - \xi - i\xi, \lambda)) A(x, \tau, \xi) + \\ + \int_0^x \psi_1(\xi, \lambda) B(x, \lambda) d\xi,$$

где  $A(x, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x, \tau, \xi)$ ,  $B(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x, \xi)$  для некоторых функций  $A_k, B_k$  независимые от параметра  $\lambda$ , и функция

$$\psi_1(x, \lambda) = \frac{1}{4} (\exp(p\omega_0 x) + \exp(p\omega_1 x) + \exp(p\omega_2 x) + \exp(p\omega_3 x)),$$

через  $\omega_s, s = 0, 1, 2, 3$  обозначены различные корни степени 4.

Используя указанные формулы преобразования доказаны теоремы полноты системы собственных и корневых функций двухточечной граничной задачи для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка.

### Литература

1. Маламуд М.М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма-Лиувилля с общими граничными условиями // Функциональный анализ и его приложения. – 2008. – Т. 42, вып. 3. – С. 45-52.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М: Наука, 1969. – с. 528.
3. Марченко В.А. Уравнения Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – с.331.
4. Кангуэсин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных функций. – Шымкент: Гылым, 1996. – с. 321.
5. Щетинин Н.И. Теория интегральных уравнений. – М: Издательство МГУ, 1968. – 103 с.
6. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. – М: Издательство МГУ, 1989. – 160 с.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М: Издательство МГУ, 1984. – 296 с.

Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А.

*Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова  
(Казахстан, Актюбе)*

e-mail: sartabanov42@mail.ru

**Построение многопериодических решений  
матричного уравнения типа Риккати**

Рассмотрим матричное уравнение

$$DX = A(\tau, t)X + XB(\tau, t) + XQ(\tau, t)X + F(\tau, t) \quad (1)$$

где  $D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$ ,  $t \in R$ ,  $A = A(\tau, t)$ ,  $B = B(\tau, t)$ ,  $Q = Q(\tau, t)$ ,  $F = F(\tau, t)$  -  $n \times n$  - матрицы периодические по  $(\tau, t)$  с рационально несоизмеримыми периодами  $\Theta$  и  $\omega$ , удовлетворяющими условию

$$\left| \frac{\theta}{\omega} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^{2+\delta}} \quad (2)$$

с постоянной  $c = c\left(\frac{\theta}{\omega}, \delta\right) > 0$  для всех целых  $p$  и  $q \neq 0$ .

Отметим, что для числа  $\mu = \frac{\theta}{\omega}$ , удовлетворяющего условию (2) имеет место следующая оценка снизу:

$$\left| e^{2\pi i k \frac{\theta}{\omega}} - 1 \right| \geq \frac{c}{2^{|k|^{1+\delta}}}, (|k| > 0) \quad (2')$$

для любого  $k \in Z$ .

Полосу  $|Imz| < \rho$  обозначим через  $\Pi_\rho$ . Матрицы  $A, B, Q$  и  $F$  предположим определенным при  $(\tau, t) \in \Pi_\rho \times \Pi_\rho = \Pi_\rho^2$  и аналитическими. Следовательно, матрицы системы (1) удовлетворяют условию вида:

$$\Psi(\tau + \theta, t) = \Psi(\tau, t + \omega) = \Psi(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{1,1}(\Pi_\rho \times \Pi_\rho). \quad (3)$$

Нетрудно доказать, что гомологическое матричное уравнение

$$U(\sigma) - U(\sigma - \theta) = \int_{-\theta}^0 \Psi(s, \sigma + s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega d\sigma \int_{-\theta}^0 \Psi(s, \sigma + s) ds \quad (4)$$

при условиях (2) и (3) допускает единственное  $\omega$  - периодическое решение  $U(\sigma + \omega) = U(\sigma) \in C_\sigma^1(\Pi_{\rho_1}), 0 < \rho_1 = const < \rho$ .

При решении уравнения (4) существенно используется условие (2').

**Лемма 1.** *При условиях (2) и (3) имеет место представление*

$$\int_0^\tau \Psi(s, t - \tau + s) ds = M\tau + G(\tau, t) + U(t - \tau), \quad (5)$$

где  $M$  – среднее значение матрицы  $\Psi(\tau, t)$ :

$$M = \frac{1}{\theta\omega} \int_0^\omega \int_0^\theta \Psi(s, \sigma) ds d\sigma,$$

матрицы  $U(\sigma)$  является  $\omega$  - периодическим решением уравнения (4),  $G(\tau, t)$  – аналитическая в  $\Pi_\rho \times \Pi_\rho$   $(\theta, \omega)$ -периодическая матрица

$$G(\tau + \theta, t) = G(\tau, t + \omega) = G(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{1,1}(\Pi_\rho \times \Pi_\rho).$$

Если  $M = 0$  – нулевая матрица, то интеграл (5) матрицы  $\Psi(\tau, t)$  назовем  $(\theta, \omega, \omega)$  - периодическим по  $(\tau, t, \sigma) = (\tau, t, t - \tau)$ .

Наша основная задача заключается в установлении  $(\theta, \omega, \omega)$  – периодических решений  $X(\tau, t, \sigma)$  матричного уравнения (1) в области:  $\tau \in \Pi_{\rho_*}, t \in \Pi_{\rho_*}, \|X\| \leq \Delta$

Положив

$$C(\theta, \omega) = \int_0^\theta \int_0^\omega A(\tau, t) d\tau dt, K(\theta, \omega) = - \int_0^\theta \int_0^\omega B(\tau, t) d\tau dt,$$

определим оператор  $\Phi$  соотношением

$$\Phi X = C(\theta, \omega)X - XK(\theta, \omega).$$

Примем обозначения:

$$\alpha = \|A\| = \max|A(\tau, t)|, \beta = \|\beta\|, \sigma = \|Q\|, h = \|F\|, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \gamma_1 = \|C^{-1}(\theta, \omega)\|.$$

В работе на основе леммы, доказывается существование единственного  $(\theta, \omega, \omega)$  - периодического по  $(\tau, t, \sigma)$  решения при условиях:

- 1) матрицы  $C(\theta, \omega)$  и  $K(\theta, \omega)$  не имеют общих собственных значений;
- 2)  $\gamma(\alpha + \beta)^2\theta^2\omega^2\Delta + \gamma(\alpha + \beta)\delta\theta^2\omega^2\Delta^2 + \gamma(\alpha + \beta)\theta^2\omega^2h + 2\gamma\theta\omega h \leq 2\Delta$ ;
- 3)  $\frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)^2\theta^2\omega^2 + \gamma(\alpha + \beta)\delta\theta^2\omega^2\Delta + 2\gamma\delta\theta\omega\Delta < 1$ .

Доказательство основана на идеях работ [1-3].

### Литература

1. Самойленко А.М., Кенжебаев К.К., Лаптинский В.Н. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. – Киев: ИМ НАУ, 1996. – 238 с.
2. Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А. Периодические по многомерному времени решения матричных уравнений типа Ляпунова с оператором дифференцирования по диагонали // Евразийский математический журнал. – 2008. – №3. – С. 63-67.
3. Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А. Периодические решения линейных матричных уравнений типа Ляпунова с оператором дифференцирования по многомерному времени // Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посв. 70-летию ректора МГУ академика Садовниченко В.А. – 2009. – С. 158-159.

Кошанов Б.Д.

*Институт математики и математического моделирования  
(Алматы, Казахстан)*

*e-mail: koshanov@list.ru*

## Представление функции Грина и их свойства для полигармонических уравнений

Теория краевых задач для полигармонических уравнений, и для эллиптических уравнений высокого порядка в последнее время привлекает особое внимание математиков. Она имеет большое теоретическое и практическое значение, как например [1-3], в задачах гидродинамики и теории упругости.

Описание различных подходов к теории расширений и сужений дифференциальных операторов от функций нескольких переменных по ограниченным областям, а также применения и постановки задач функционально-аналитического подхода даны в работах [4-6].

Пусть  $m$  – натуральное число и в  $n$ - мерном шаре  $\Omega_r = \{x : |x| < r\}$  рассмотрим полигармоническое уравнение

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_r, \quad (1)$$

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1):

$$\frac{\partial^j u}{\partial n_x^j} \Big|_{x \in \partial \Omega} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (2)$$

В случае нечетного  $n$ , а также при четных  $n$ , если  $2m < n$  функция Грина задачи Дирихле для уравнения (1) представима в виде [5]:

$$G_{2m,n}(x, y) = \varepsilon_{2m,n}(x, y) - g_{2m,n}^0(x, y) - \sum_{k=1}^{m-1} g_{2m,n}^k(x, y), \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x, y) = d_{2m,n} |x - y|^{2m-n}, \quad (4)$$

$$g_{2m,n}^0(x, y) = d_{2m,n} \left[ \left| \frac{y}{r} \right| \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right| \right]^{2m-n}, \quad (5)$$

$$g_{2m,n}^k(x, y) = d_{2m,n} (2m-n)(2(m-1)-n) \dots (2(m-k+1)-n) \cdot \left[ \left| \frac{y}{r} \right| \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right| \right]^{2m-n-2k} \cdot$$

$$\cdot \left( 1 - \left| \frac{y}{r} \right|^2 \right)^k \left( 1 - \left| \frac{x}{r} \right|^2 \right)^k \left( \frac{r^2}{-2} \right)^k \frac{1}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (6)$$

причем

$$d_{2m,n} = \frac{1}{(m-1)!(2m-n)(2(m-1)-n)\dots(4-n)(2-n)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^m \pi^{n/2}},$$

$\Gamma(\cdot)$  – гамма функция.

Теперь рассмотрим бигармоническое уравнение

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x), x \in \Omega_r. \quad (7)$$

В работах [5,6] для бигармонического уравнения было построено решение следующей краевой задачи **K-01**, т.е. задачи Дирихле

$$\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u \Big|_{x \in \partial \Omega_r} = 0, \quad i = 0, 1. \quad (8)$$

Единственное решение  $u(x)$  представимо:

$$u(x) = L^{-1} f(x) = \int_{\Omega_r} G_{4,n}^{01}(x, y) f(y) dy, \quad (9)$$

где  $G_{4,n}^{01}(x, y)$  - функция Грина задачи Дирихле может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} G_{4,n}^{01}(x, y) = & d_{4,n} \left[ |x-y|^{4-n} - \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^{4-n} \left| \frac{y}{r} \right|^{4-n} \right] + \\ & + d_{4,n} \frac{4-n}{2} \cdot r^2 \left( 1 - \left| \frac{y}{r} \right|^2 \right) \left( 1 - \left| \frac{x}{r} \right|^2 \right) \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^{2-n} \left| \frac{y}{r} \right|^{2-n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для бигармонического уравнения (7) рассмотрим следующую задачу типа Дирихле задачу **K-02**:

$$\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u \Big|_{x \in \partial \Omega_r} = 0, \quad i = 0, 2. \quad (11)$$

Единственное решение  $u(x)$  представимо:

$$u(x) = L^{-1} f(x) = \int_{\Omega_r} G_{4,n}^{02}(x, y) f(y) dy, \quad (12)$$

где  $G_{4,n}^{02}(x, y)$  - функция Грина задачи Дирихле может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} G_{4,n}^{02}(x, y) = & d_{4,n} \left[ |x-y|^{4-n} - \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^{4-n} \left| \frac{y}{r} \right|^{4-n} \right] + \\ & + d_{4,n} \frac{2(4-n)(3-n)}{6-n} \cdot r^2 \left( 1 - \left| \frac{y}{r} \right|^2 \right) \left( 1 - \left| \frac{x}{r} \right|^2 \right) \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^{2-n} \left| \frac{y}{r} \right|^{2-n} - \\ & - d_{4,n} \frac{(4-n)(3-n)(2-n)}{4(6-n)} \cdot r^4 \left( 1 - \left| \frac{y}{r} \right|^2 \right)^2 \left( 1 - \left| \frac{x}{r} \right|^2 \right)^2 \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^{-n} \left| \frac{y}{r} \right|^{-n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Зная явный вид функции Грина задач Дирихле К-01 и К-02 для бигармонического уравнения (7) рассмотрим функцию

$$w(x) = \int_{\Omega_r} G_{4,n}(x, y) f(y) dy + \sum_{j=0}^1 \int_{\partial\Omega_r} \left[ \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^j G_{4,n}(x, y) \cdot \Delta_y^{1-j} h(y) - \Delta_y^j G_{4,n}(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^{1-j} h(y) \right] dS_y, \quad (14)$$

где  $G_{4,n}(x, y) = \alpha_1 G_{4,n}^{01}(x, y) + \alpha_2 G_{4,n}^{02}(x, y)$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $h(x) = (Kf)(x)$ ,  $K$  – некоторый произвольный оператор, ставящий каждой функции  $f(x)$ ,  $x \in \Omega_r = \{x : |x| < r\} \subseteq R^n$  в соответствие единственную достаточно гладкую функцию  $h(x)$ .

**Теорема 1.** *Функция  $w(x)$ , задаваемая формулой (14), является решением следующей краевой задачи:*

$$\Delta_x^m w(x) = f(x), \quad x \in \Omega_r, \quad (15)$$

$$w(x)|_{x \in \partial\Omega_r} = h(x)|_{x \in \partial\Omega_r},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x} w(x) \Big|_{x \in \partial\Omega_r} = \frac{\partial}{\partial n_x} h(x) \Big|_{x \in \partial\Omega_r}, \quad (16)$$

где  $h(x) = (K \cdot \Delta_x^m w)(x)$ ,  $x \in \Omega_r$ ,  $K$  – произвольный оператор.

**Теорема 2.** *Решение краевой задачи (15)-(16) существует и единственно.*

Работа выполнена при поддержке гранта 3492/ГФ4 Комитета Науки МОН РК.

### Литература

1. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. матем. журнал. – 1953. – Т.5, №2. – С. 123-151.
2. *Вилишк М.И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Матем. о-ва. – 1952. – №3. – С. 187-246.
3. *Бизадзе А.В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т.24, №5. – С. 825-831.
4. *Отелбаев М.О., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н.* К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, №6. – С. 1307-1310.
5. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады РАН. – 2008. – Т.421, №3. – С. 305-307.
6. *Koshanov B.D.* On the solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equation in a ball // AIP Conference Proceedings, International Conference on Analysis and Applied Mathematics. – 2014. – V. 1611. – P. 119-127.

Крицков Л.В.,<sup>1</sup> Сарсенби А.М.<sup>2</sup><sup>1</sup>МГУ им.М.Ломоносова, Россия, Москва,<sup>2</sup>ЮКГУ им. М.Ауэзова, Казахстан, Шымкентe-mail: <sup>1</sup>kritskov@cs.msu.su, <sup>2</sup>abzhahan@mail.ru**Базисность в  $L_p$  корневых функций одной нелокальной задачи для уравнения с инволюцией**

Изучается задача

$$\begin{cases} \alpha u''(-x) - u''x = \lambda u(x), -1 < x < 1, \\ u(-1) = 0, u'(-1) = u'(1) \end{cases} \quad (1)$$

в которой дифференциальное выражение содержит преобразование инволюции независимой переменной в старшей производной, а краевые условия являются нелокальными (типа условий в задаче Самарского - Ионкина [1]). Исследованы базисные свойства системы корневых функций этой задачи при  $\alpha \in (-1, 1)$  в банаховых пространствах  $L_p(-1, 1), p > 1$ . Результаты, полученные в случае  $p = 2$ , обобщены на случай произвольного  $p > 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $r = \sqrt{(1 - \alpha)/(1 + \alpha)}$  иррационально. Тогда задача (1) имеет только собственные функции, которые образуют в каждом  $L_p(-1, 1), p > 1$ , замкнутую и минимальную систему, не являющуюся базисом.

**Теорема 2.** Пусть  $r = \sqrt{(1 - \alpha)/(1 + \alpha)}$  рационально. Тогда задача (1) является существенно несамосопряженной (в терминологии В.А.Ильина [3]); ее спектр  $\Lambda = \{\lambda_n\} \cup \{\lambda_n^*\}$  таков, что для каждого  $\lambda = \lambda_n$  имеется только собственная функция, а для каждого  $\lambda = \lambda_n^*$  - одна собственная и одна присоединенная функции. Присоединенные функции можно выбрать так, что все корневые функции задачи образуют базис в каждом  $L_p(-1, 1), p > 1$ .

**Литература**

1. Ионкин Н.И. // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т.13, № 2. – С. 294-304.
2. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. // Дифференц.уравнения. – 2015 (в печати).
3. Ильин В.А. // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30, № 9. – С. 1516-1529.

Муратбеков М.Б.

*Таразский государственный педагогический институт  
(Казахстан, Тараз)*

*e-mail: musahan\_m@mail.ru*

## **О существовании резольвенты и дискретности спектра оператора Шредингера с отрицательным параметром**

В этой работе изучается оператор Шредингера с отрицательным параметром

$$-\Delta + (-t^2 + ita(x) + c(x)) \quad (1)$$

в пространстве  $L_2(R^n)$ , где  $-\infty < t < \infty$ ,  $i^2 = -1$ ,  $x \in R^n$ .

Как известно, при  $t = 0$  спектральные свойства оператора Шредингера  $\Delta + c(x)$  сильно зависят от поведения  $c(x)$  на бесконечности. В этом случае спектральные характеристики оператора Шредингера достаточно хорошо изучены в работах А.М.Молчанова, Т.Като, М.Рида и Б.Саймона, М.Ш.Бирмана, Б.С.Павлова, В.Г.Мазья, М.Отелбаева, Я.Т.Султанаева, К.Х.Бойматова и др.

Вопросы о дискретности спектра и об оценках аппроксимационных чисел (s-чисел) оператора Шредингера  $-\Delta + q_1(x) + iq_2(x)$ , ( $q_1(x) \geq 0$ ,  $q_2(x) \geq 0$ ) изучены в работах В.Б.Лидского, М.Отелбаева, Т.Като и др.

В данной работе для оператора (1) будут исследованы такие вопросы как:

- 1) существование резольвенты;
- 2) дискретность спектра.

### **Литература**

1. *Молчанов А.М.* Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Моск.Матем.Общ-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 169-200
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М: Мир, 1972. – 740 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Математическая физика. Т.2, 4. – М: Мир, 1982.
4. *Бирман М.Ш., Павлов Б.С.* О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестник ЛГУ. серия мат.мех. и астр. – 1961. – № 1. – С. 61-74
5. *Мазья В.Г.* Пространство Соболева. – Ленинград: ЛГУ, 1985.
6. *Отелбаев М.* Теоремы вложения пространства с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Труды МИАН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 265-305
7. *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды МИАН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 37-76



8. *Лидский В.Б.* Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Труды Моск. матем. общ-ва. – 1960. –Т. 9. – С. 45-80
9. *Отелбаев М.* Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля. – Алматы: Гылым, 1990.

УДК 517.95

Муратбеков М.Б., Игисинов С.Ж.

*Таразский государственный педагогический институт  
(Казахстан, Тараз)  
e-mail: igisinovsabit@mail.ru*

### **О существовании резольвенты и разделимости одного класса сингулярных дифференциальных операторов гиперболического типа в неограниченной области**

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u \quad (1)$$

первоначально определенный на  $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ -множестве, состоящей из бесконечно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию  $u(x, -1) = u(x, 1) = 0$  и финитных по переменной  $x$ , коэффициенты  $a(x)$  и  $c(x)$  непрерывные функции в  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

Здесь отметим, что коэффициенты оператора (1)  $a(x)$  и  $c(x)$  могут быть неограниченными функциями.

Дифференциальный оператор гиперболического типа во всем пространстве  $E^n$  (евклидово пространство размерности  $n$ ) исследован в работе [1], где коэффициенты оператора непрерывные и ограниченные функции в  $E^n$ .

В данной работе изучаются вопросы о существовании резольвенты и разделимости оператора (1).

**Определение 1.** Будем говорить, что оператор  $L$  разделим, если для всех функций  $u \in D(L)$  имеет место оценка

$$\|u_{xx} - u_{yy}\|_2 + \|a(x)u_x\|_2 + \|c(x)u\|_2 \leq c(\|Lu\|_2 + \|u\|_2)$$

где  $c > 0$  – постоянная, независящая от  $u(x, y)$ .

Термин "разделимости" введен в фундаментальных работах В.Н.Эверитта и М.Гирца, где исследуются разделимость дифференциального оператора Штурма-Лиувилля. Чуть позже проблемами разделимости дифференциальных операторов занимались М.Отелбаев, К.Х.Бойматов, и их ученики. Основные результаты полученные в этих работах опираются на метод локализации резольвенты дифференциальных операторов и его различные варианты, который был предложен

автором работы [2]. В работах вышеуказанных авторов изучены только разделимость эллиптических и псевдодифференциальных операторов.

Операторы гиперболического и смешанного типов в случае неограниченной области с растущими и колеблющимися коэффициентами рассмотрен в работе [3]. В этой работе изучен оператор, первоначально определенный на множестве функций сколь угодно дифференцируемых с периодическими по переменной  $x$  и финитными по  $y$  в полосе  $\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$  и в отличие от оператора (1) коэффициенты изученного оператора при  $u_x(x, y)$  и  $u(x, y)$  зависят только от  $y$ .

Совершенно иная ситуация возникает при исследовании оператора (1). В частности, применить подход работы [3], базирующийся на разделении переменных становится невозможным.

Обозначим через  $K(\tau, b)$  класс коэффициентов удовлетворяющих следующим условиям:

- i)  $|a(x)| \geq \delta_0 > 0$ ,  $c(x) \geq \delta > 0$  непрерывные функций в  $\mathbb{R}$ ;
- ii)  $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$  постоянные числа;
- iii)  $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau c(t)$  для всех  $x, t \in \mathbb{R}$  таких, что  $|x - t| \leq bd(t)$ ,  $d(t) = \frac{1}{|c(t)|^{1/2}}$ ,  $b > 0$ ,  $\tau > 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ . Тогда найдутся такие числа  $\tau_0$  и  $b_0$  что при  $\tau \in (0, \tau_0)$  и  $b > b_0$  замыкание  $L$  оператора  $L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u$ ,  $D(L_0) = C_0^\infty(\bar{\Omega})$  в  $L_2(\Omega)$  существует.

**Теорема 2.** Пусть  $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ . Тогда найдутся такие числа  $\tau_0$  и  $b_0$  что при  $\tau \in (0, \tau_0)$  и  $b > b_0$  оператор  $L$  имеет непрерывный обратный оператор в  $L_2(\Omega)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Тогда оператор разделим.

**Пример 1.** Для оператора  $L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + (|x| + 32)u_x + (4x^2 + 4^6)u$  нетрудно проверить, что все условия теорем 1-3 выполняются. Следовательно, оператор  $L_0$  допускает замыкание, для него существует непрерывный обратный оператор и разделим.

## Литература

1. Нагумо М. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. – М: Мир, 1967.
2. Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234, № 3. – С. 540-543
3. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Abylayeva A.M. On existence of the resolvent and discreteness of the spectrum of a class of differential operators of hyperbolic type // E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. – 2013. – № 64. – P. 1-10.

Муратбеков М.Б., Муслимов Б.М.

Таразский государственный педагогический институт  
(Казахстан, Тараз)

e-mail: bilanmus45@mail.ru

## О существовании и единственности решений одного класса дифференциальных уравнений с переменными операторными коэффициентами

Пусть  $H$  – абстрактное сепарабельное пространство Гильберта. Обозначим через  $H_1 = L_2(\mathbb{R}, H)$  гильбертово пространство, полученное пополнением  $C_0^\infty(\mathbb{R}, H)$  множества финитных бесконечно гладких вектор функций, определенных на  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  со значением в  $H$  по норме

$$\|u(y)\|_{H_1} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(y)\|_H^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

соответствующей скалярному произведению

$$\langle u(y), v(y) \rangle_{H_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u(y), v(y) \rangle_H dy.$$

В заданном пространстве рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv -u''(y) + k(y)A(y)u + ia(y)A^\alpha(y)u + c(y)u = f \in H_1, \quad (1)$$

Здесь  $A$  – положительно определенный самосопряженный оператор, зависящий от переменной  $y$  в гильбертовом пространстве  $H$  с вполне непрерывным обратным,  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $k(y)$  – кусочно-непрерывная и ограниченная функция в  $\mathbb{R}$ ,  $k(0) = 0$  и  $yk(y) > 0$  при  $y \neq 0$ .

Через  $L$  обозначим замкнутый оператор, соответствующий уравнению (1) в пространстве  $H_1$ . Под решением уравнения (1) понимается функция  $u \in H_1$ , если существует последовательность  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}, H)$  такая, что

$$\|u_n - u\|_{H_1} \rightarrow 0, \|Lu_n - f\|_{H_1} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда нетрудно проверить, что найти единственное решение уравнения (1) означает доказать обратимость оператора  $L$  при всех  $f \in H_1$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

- 1)  $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$ ,  $c(y) \geq \delta > 0$  – непрерывные функций в  $\mathbb{R}$ ;
- 2)  $\sup_{|y-t| \leq 1} \frac{a(y)}{a(t)} \leq c_0 < \infty$ ,  $\sup_{|y-t| \leq 1} \frac{c(y)}{c(t)} \leq c_1 < \infty$ ;
- 3)  $\sup_{|y-t| \leq 1} \|(A^\alpha(y) - A^\alpha(t))A^{-\alpha}(t)\|_H \leq o(1)$ ,  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ ;
- 4)  $c(y) \leq c_0 a^2(y)$  для любого  $y \in \mathbb{R}$ ,  $c_0$  – const.

Тогда для оператора  $L + \lambda E$  при достаточно больших  $\lambda > 0$  существует ограниченный обратный оператор  $(L + \lambda E)^{-1}$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1) - 4). Тогда для любого  $u \in D(L)$  справедлива оценка

$$\| -u'(y) \|_{H_1} + \| ia(y)A^\alpha(y)u \|_{H_1} + \| c(y)u \|_{H_1} \leq c \| Lu \|_{H_1},$$

где  $c > 0$  – постоянное число не зависящее от  $u$ .

### Литература

1. Брук В.М. О максимальной диссипативности дифференциального оператора высокого порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 1. – С. 1986-1989.

УДК 517.968

Назарова К.Ж.

*Международный Казахско-Турецкий университет  
(Казахстан, Туркестан)  
e-mail: gjnazarova@mail.ru*

### Об одном решении нелинейной двухточечной краевой задачи

Рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=1, N} |x_i| \quad (1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \quad (2)$$

где  $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $g : R^n \times R^n \rightarrow R^n$  – непрерывны.

В сообщении к задаче (1), (2) применяется вариант метода параметризации [1], путем введения дополнительных параметров как значения искомого решения в серединах интервалов разбиения  $[0, T]$ . Одним из трудных проблем теории нелинейных краевых задач является выбор "хорошего" начального приближения к решению. Для нахождения таких начальных значений параметров построены системы нелинейных уравнений.

$Q_{\nu, 2h}(\lambda, u) = 0$ , определяемые по исходным данным задачи и отличаются выбором значений  $2h > 0$ ,  $\nu \in N$ . Когда неизвестна область принадлежности решения рассматриваемой краевой задачи, то используя условие  $u[(2r - 1)h] = 0$ ,  $r = \overline{1, N}$  определим компоненты параметра  $\lambda^{(0)}$  из следующей системы уравнений

$$Q_{\nu, 2h}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \quad (3)$$

Так как значения  $2h > 0$ ,  $\nu \in N$  влияют на размерность и сложность системы уравнений, то предложен алгоритм нахождения решений этой системы, основанной на переходе от простых и меньшей размерности системы к более сложным и большей размерности систем. Приведем один из способов нахождения решения уравнения (3). Для этого рассмотрим систему (3) при  $\nu = 1$  и  $N = 1$  и получим решение  $\lambda_{1,1}^{(0)} \in R^n$ . Далее осуществляя продвижение по шагу  $2h > 0$ , т.е.

увеличивая число разбиения интервала получаем на  $m$ -ом шаге  $\lambda_{1,2^k} \in R^{n2^k}$  решения уравнения  $Q_{1,2^k}(\lambda, 0) = 0$ , где число повторных интегралов  $\nu = 1$  и число разбиений  $N = 2^k$ . Полученная оценка разности  $\lambda_{1,2^k} - \tilde{\lambda}_{1,2^k}$  при увеличении числа разбиений  $N$  становится малой величиной. Теперь осуществим продвижение по  $\nu$ .

1. Пусть  $\lambda_{1,2^k} \in R^{n2^k}$  решения уравнения  $Q_{1,2^k}(\lambda, 0) = 0$ . Для определения  $\lambda_{2,2^k} \in R^{n2^k}$  рассмотрим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров  $\lambda$ , где число повторных интегралов  $\nu = 2$ :  $Q_{2,2^k}(\lambda, 0) = 0$  и воспользуемся теоремой 1 из [2]. В качестве начального приближения возьмем вектор  $\lambda_{1,2^k} \in R^{n2^k}$  - решение систем уравнений  $Q_{1,2^k}(\lambda, 0) = 0$ .

2. Продолжая увеличение числа повторных интегралов, на  $m$ -ом шаге найдем  $\lambda_{\nu,2^k} \in R^{n2^k}$  удовлетворяющее уравнению (3).

Таким образом продвижение по числу подстановок  $\nu$  и по шагу  $2h > 0$  осуществляется на основе итерационных процессов, где в качестве начального приближения берется решение уравнения (3) при предыдущих параметрах  $\nu$  и  $2h$ .

Доказано, что начальное приближение по параметру  $\lambda^{(0)}$  будет тем ближе к точному решению, чем меньше шаг разбиения  $2h > 0 : 2Nh = T$  или чем больше число постановок  $\nu \in N$ .

### Литература

1. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29. № 1. – С. 50-66.
2. Джумабаев Д.С. Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Математический журнал. – 2001. – Т.1, № 1. – С. 30-40.

УДК 512.64

Панкратова И.Н.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: inpankratova@gmail.com*

### О периодах циклов лучей линейных неотрицательных операторов в $\mathbb{R}^n$

Пусть  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – отображение вида  $Fy = \Phi(y)Ay$ , где  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное вещественное векторное пространство,  $A$  – матрица  $n$ -го порядка,  $\Phi(y)$  – скалярная функция. Если  $X$  такое, что  $F : X \rightarrow X$ , то  $F$ , в общем случае необратимое, порождает на  $X$  динамическую систему  $\{F^m, X, Z_+\}$ , как полугруппу отображений,  $Z_+$  – множество целых неотрицательных чисел. Класс динамических систем  $\{F^m, X, Z_+\}$  является основным объектом исследований, для которого разрабатывается качественная теория.

Зафиксируем в  $\mathbb{R}^n$  некоторый базис  $\Delta$ . Обозначим через  $A \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$  линейный оператор, заданный матрицей  $\mathcal{A}$  в  $\Delta$ . Луч, проходящий через точку  $y \neq 0$ , есть множество вида  $\text{cone}(y) = \{\alpha y \mid \alpha \geq 0\}$ . При изучении асимптотического поведения

системы  $\{F^m, X, Z_+\}$  на компактах в  $\mathbb{R}^n$  возникает проблема описания инвариантных относительно линейного оператора множеств в виде систем лучей и подпространств, в которых эти системы лучей содержатся. Данное направление исследований имеет отношение к теории линейных операторов и приводит к понятию цикла лучей линейного оператора, обобщающему понятия неподвижной точки и цикла.

**Определение 1.** Система несовпадающих лучей  $l_1, \dots, l_p$  называется циклом лучей (оператора  $A$ ) периода  $p \in \mathbb{N}$  и обозначается, как  $(l_1, \dots, l_p)$ , если

$$Al_k = l_{k+1}, \quad k = 1, \dots, p-1, \quad Al_p = l_1. \quad (1)$$

Установлено, что циклы лучей содержатся в инвариантных подпространствах  $\ker \mathcal{P}(A; p, \mu)$  оператора  $A$ , где  $\ker A$  – ядро оператора  $A$ ,  $\mathcal{P}(A; p, \mu) = A^p - \mu^p E$ ,  $\mu^p > 0$ ,  $\mu$  – собственное значение оператора  $A$  и  $E$  – тождественный оператор [1].

Выберем в качестве  $X$  множество  $X = \{y \in K_+ \mid \|y\| \leq a\}$ ,  $a < \infty$ . Здесь  $K_+ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0\}$  – конус неотрицательных векторов  $y = (\xi_1, \dots, \xi_n)' \geq 0$ , для которых  $\xi_i \geq 0$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Имеем  $A \geq 0$ ,  $\mathcal{A} \geq 0$  – неотрицательные, если  $AK_+ \subseteq K_+$  ( $\mathcal{A} = (a_{ij})_1^n \geq 0$  означает  $a_{ij} \geq 0$  для всех  $i, j = \overline{1, n}$ ). Отметим, что одним из условий выполнения  $F : X \rightarrow X$  является  $A \geq 0$ .

Определим подпространства  $\ker \mathcal{P}(A; p, \mu)$  оператора  $A \geq 0$ , которые содержат циклы лучей и пересекаются с  $K_+$  ( $\supset X$ ). Согласно общей теории неотрицательных матриц  $\mathcal{A} \geq 0$  имеет максимальное собственное значение  $\lambda \geq 0$ ; модули всех других собственных чисел не превосходят  $\lambda$  [2, с. 344]. Если  $\lambda > 0$ , то  $\mathcal{A} \geq 0$  – одного из двух видов: разложимая или неразложимая. Разложимая матрица приводима к виду  $\begin{pmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$ , где  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{D}$  – квадратные матрицы, и неразложимая не приводима [2, с. 332]. У неразложимой  $\mathcal{A} \geq 0$  число  $1 \leq h \leq n$  собственных значений по модулю  $\lambda$  называется индексом импримитивности матрицы. Разложимая матрица нормальной формы – это нижняя треугольная матрица с неразложимыми квадратными матрицами на главной диагонали [2, с. 351]. Обозначим через  $\text{LCM}(k, m)$  наименьшее общее кратное целых  $k$  и  $m$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{A} \geq 0$  – разложимая матрица нормальной формы с неразложимыми матрицами  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  на главной диагонали индексов импримитивности  $h_1, \dots, h_s$  соответственно. Тогда существуют одно и более подпространств вида  $\ker \mathcal{P}(A; p, \mu)$ , содержащих циклы лучей периода  $p$ , таких, что  $\ker \mathcal{P}(A; p, \mu) \cap K_+ \neq \{0\}$ , где

$$p = \text{LCM}(h_{j_1}, \dots, h_{j_t}),$$

$h_{j_1}, \dots, h_{j_t}$  – индексы импримитивности матриц  $\mathcal{A}_{j_1}, \dots, \mathcal{A}_{j_t}$  с максимальным собственным значением  $\mu$ . Если для некоторых  $k = 1, \dots, r$ ,  $r \geq 1$ ,  $\mathcal{A}_{f_k}$  с максимальными собственными значениями больше, чем  $\mu$ , имеют собственные значения вида  $\mu \exp(2\pi i/d_{f_k})$ ,  $d_{f_k} \geq 1$ , то

$$p = \text{LCM}(h_{j_1}, \dots, h_{j_t}; h_{f_1} \cdot d_{f_1}, \dots, h_{f_r} \cdot d_{f_r}).$$

Доказательство основано на использовании свойств инвариантных подпространств  $\ker \mathcal{P}(A; p, \mu)$ , содержащих циклы лучей, формулы суммы этих подпространств и свойств неотрицательных матриц.

## Литература

1. Панкратова И.Н. Инвариантные множества неотрицательных линейных операторов. II // Математический журнал. Алматы, 2012. – Т. 12, № 1. – С. 48-70.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

УДК 517.984.5

Пирматов Ш.Т.

*Ташкентский Государственный Технический Университет  
(Узбекистан, Ташкент)  
e-mail: shamshod@rambler.ru*

### О необходимых условиях разложимости распределений по собственным функциям бигармонического оператора

Пусть  $\Omega$  – произвольная ограниченная область в  $R^N$ . Рассмотрим полную ортонормированную систему  $u_k(x)$  собственных функций бигармонического оператора, отвечающих собственным значениям  $\lambda_k$ :

$$\Delta^2 u_k(x) - \lambda_k u_k(x) = 0. \quad (1)$$

В области  $\Omega$  разложим распределений  $f \in E'(\Omega)$  по системе собственных функций  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x),$$

где

$$f_k = \langle f, u_k \rangle$$

коэффициенты Фурье.

Соответствующее оператору  $A$  разложений единицы  $E_\lambda$ , согласно теореме Л.Гординга, представимо в виде интегрального оператора

$$E_\lambda f(x) = \int_{\Omega} \theta(x, y, \lambda) f(y) dy \quad (2)$$

с ядром  $\theta(x, y, \lambda)$ , называемым спектральной функцией оператора  $A$ .

**Определение 1.** Спектральным разложением распределения  $f \in E'(\Omega)$  назовем распределение  $E_\lambda f \in D'(\Omega)$ , действующее по правилу

$$\langle E_\lambda f, \varphi \rangle = \langle f, E_\lambda \varphi \rangle \quad (3)$$

для любой функции  $\varphi \in D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ .

**Предложение 1 (см. [1]).** Для любой функции  $\varphi \in D(\Omega)$  в топологии  $E(\Omega)$  выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda \varphi = \varphi.$$

Отсюда следует, что для любого распределения  $f \in E'(\Omega)$  и любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle E_\lambda f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2 (см. [1]).** Для каждого распределения  $f \in E'(\Omega)$  в топологии  $D'(\Omega)$  имеет место соотношение  $E_\lambda f \rightarrow f$ .

Известные результаты о сходимости спектральных разложений позволяют утверждать, что соотношение (3) может выполняться в тех точках, в окрестности которых  $f = 0$ . В этом случае приходится вводить регулярные методы суммирования, наиболее важным из которых является метод нормальных Рисса.

Для любого  $s \geq 0$  введем средние Рисса порядка  $s$ :

$$E_\lambda^s f = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f \quad (4)$$

Введем следующую функцию

$$g(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x-x_0|^2}{R^2}\right)^{\alpha-1}, & \text{если } |x-x_0| \leq R, \\ 0, & \text{если } |x-x_0| > R. \end{cases}$$

**Определение 2.** Средним значением порядка  $\alpha$  распределения  $f \in E'(\Omega)$  назовем распределение  $S_R^\alpha f \in D'(\Omega)$ , действующее по правилу

$$\langle S_R^\alpha f, \varphi \rangle = \langle f, S_R^\alpha \varphi \rangle$$

для любой функции  $\varphi \in D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ , где

$$S_R^\alpha \varphi = \frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\pi^{3/2} \Gamma(\alpha) R^3} \int_{R^3} \varphi(x+y) g(y) dy.$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_2(\Omega)$ . Предположим, что при некотором целом  $s > \frac{N-3}{2}$  в точки  $x \in \Omega$  выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x).$$

Тогда, для любого  $\alpha > s - \frac{N-3}{2}$  справедливо следующее равенство

$$\lim_{R \rightarrow +0} S_R^\alpha f(x) = f(x).$$

Теорема 1 доказана в работе [2].



**Теорема 2.** Пусть  $f \in E'(\Omega)$ . Предположим, что при некотором целом  $s > \frac{N-3}{2}$  в топологии  $D'(\Omega)$  выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f = f.$$

Тогда, для любого  $\alpha > s - \frac{N-3}{2}$  в топологии  $D'(\Omega)$  справедливо следующее утверждения

$$\lim_{R \rightarrow +0} S_R^\alpha f(x) = f(x).$$

### Литература

1. Алимов Ш.А. О спектральных разложениях распределений // Доклады Академии Наук. – 1993. – Т. 331, № 6. – С. 661-662.
2. Пирматов Ш.Т. Об обобщенной непрерывности функций в точках Риссовской суммируемости их спектральных разложений. // Узбекский Математический Журнал. – 2009. – № 2. – С. 135-143.

УДК 517.95

Пеху А.В.

*Институт прикладной математики и автоматизации  
(Россия, Нальчик)*

*e-mail: pskhu@list.ru*

### Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования распределенного порядка

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial^t}{\partial y^t} u(x, y) d\mu(t) = f(x, y) \quad (1)$$

в области  $\Omega = (-\infty, a) \times (0, b)$ ,  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ ,  $\mu(t)$  — функция ограниченной вариации. Через  $\frac{\partial^t}{\partial y^t} = D_{0y}^t$  обозначен оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка  $t$  с началом в точке  $y = 0$  [1];  $\int_\alpha^\beta \frac{\partial^t}{\partial y^t} d\mu(t)$  — оператор континуального дифференцирования [2].

Исследуется задача: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_\alpha^\beta D_{0y}^{t-1} u(x, y) d\mu(t) = \tau(x), \quad x < a. \quad (2)$$

Построено решение задачи (1), (2), доказана теорема единственности решения в классе быстро растущих функций.

## Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 300, № 4. – С. 796-799.

УДК 517.926

Рамазанова Х.С.

*Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева  
(Казахстан, Астана)*

e-mail: hanum1981@mail.ru

### Неравенство типа Пиконе для полулинейного уравнения второго порядка и теоремы сравнения

На интервале  $I = (a, b) \subset R$  рассматриваются следующие полулинейные уравнения с затухающими членами

$$\ell_\alpha u := \left( p_1(x)\varphi(u') \right)' + q_0(x)\varphi(u') + p_0(x)\varphi(u) = 0, \quad (1)$$

$$L_\alpha v := \left( P_1(x)\varphi(v') \right)' + Q_0(x)\varphi(v') + P_0(x)\varphi(v) = 0, \quad (2)$$

где  $\varphi(z) = |z|^{\alpha-1}z$ ,  $\alpha > 0$ .

При  $\alpha = 1$  уравнений (1) и (2) переходят к линейным уравнениям  $\ell_1 = 0$ ,  $L_1 v = 0$  с затухающими членами. На основе тождества Пиконе и неравенства Пиконе для  $\ell_1 = 0$ ,  $L_1 v = 0$  получены различные качественные характеристики их решений (см.[1]). Когда  $q_0 = Q_0$  тождество и неравенство типа Пиконе для (1) и (2) получены в [2].

Здесь, без предположения  $q_0 = Q_0$ , для уравнений (1) и (2) получены тождество и неравенство типа Пиконе и на основе которых установлены различные свойства решений уравнений (1) и (2). В частности

**Теорема 1.** Пусть  $(\alpha + 1)P_1(x) > |Q_0(x)|$ . Если существует нетривиальное решение  $v$  для уравнение (2) такое что  $v(x) \neq 0$  на  $(x_1, x_2)$ , тогда  $J(\eta) \geq 0$  для всех  $\eta \in U$ , кроме возможного  $v(x_1) = v(x_2) = 0$  и  $\eta = Kve^{-\int_{x_0}^x \frac{|Q_0(s)|}{(\alpha+1)P_1(s)} \frac{dv}{v}}$ ,  $K > 0$ , где

$$J(\eta) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left( \frac{P_1^{\alpha+1}(x)}{\left( P_1(x) - \frac{|Q_0(x)|}{\alpha+1} \right)^\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} |Q_0(x)| \right) |\eta'|^{\alpha+1} - \left( P_0(x) - \frac{3}{\alpha+1} |Q_0(x)| \right) |\eta|^{\alpha+1} \right\} dx$$

**Следствие 1.** Пусть  $(\alpha + 1)P_1(x) > |Q_0(x)|$ . Если существует  $\eta \in U$  такой что  $J(\eta) \leq 0$ , тогда каждое нетривиальное решение  $v$  уравнение (2) имеет нуль в интервале  $(x_1, x_2)$ , кроме возможного  $v(x_1) = v(x_2) = 0$  и  $\eta = Kve^{-\int_{x_1}^x \frac{|Q_0(s)|}{(\alpha+1)P_1(s)} \frac{dv}{v}}$ .

### Литература

1. Kreith K. Oscillation Theory. Lecture Notes in Mathematics. – Springer-Verlag, 1973. – № 324.
2. Jaroš J., Kusano T. Picone type identity for second order half-linear differential equations // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1999. – V. LXVIII., № 1. – Pp. 137-151.

УДК 517.956

Сабитбек Б., Сураган Д.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: sabytbek.bolys@gmail.com*

### К вопросам спектральной геометрии для оператора односкоростного переноса частиц

Односкоростное уравнение переноса (при определенных условиях) описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, передачи лучистой энергии, прохождения гамма-квантов через вещество, движение газов и другие процессы. Работы, опубликованные в последнее время в этой области, привели к ряду интересных результатов. В этом докладе мы докажем неравенство типа Рэлей-Фабера-Крана для односкоростного уравнения переноса нейтрона с определенным граничным условием, т. е. докажем, что шар минимизирует первое собственное значение  $\lambda_1$  оператора односкоростного переноса частиц во всех областях того же объема многомерного евклидова пространства.

### Литература

1. Отелбаев М., Об асимптотике спектра оператора переноса в плоскопараллельном случае // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 32, № 2. – С. 51-53
2. Сураган Д., К вопросам спектральной геометрии для оператора односкоростного переноса частиц // Журнал Выч. Мат. Физ. – 2015. – Т. 55, № 5.

Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.

*Институт прикладных исследований Республики Башкортостан  
(Россия, Стерлитамак)*

*e-mail: sabitov\_fmf@mail.ru, stsid@mail.ru*

### Обратные задачи для вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t + b^2 t^n u = f_1(x), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = f_2(x), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $n \geq 0$ ,  $m > 0$  и  $b \geq 0$  – заданные действительные числа,  $u(x, t)$  и  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , – неизвестные функции.

Для уравнения (1) поставлены и исследованы следующие обратные задачи.

**Задача 1.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, t)$  и  $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+), \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad (3)$$

$$Lu(x, t) \equiv f(x), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+, \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (5)$$

$$u_t(x, -\alpha) - u_t(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – достаточно гладкие функции,  $D_- = D \cap \{t < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{t > 0\}$ .

**Задача 2.** Найти в области  $D$  функции  $u(x, t)$  и  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющие условиям (2), (5) – (7) и

$$f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$Lu(x, t) \equiv f_i(x), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+, \quad (9)$$

$$u(x, \beta) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

здесь  $g(x)$  – заданная достаточно гладкая функция.

В задаче 2 исследуется уравнение с разными неизвестными правыми частями, не зависящими от времени, поэтому дополнительно задается условие (10).

Отметим, что прямые задачи с нелокальными граничными условиями (6) и

$$u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

для уравнения (1) при  $n \geq 0$ ,  $m \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и  $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$  в прямоугольной области  $D$  изучены в работах [1–4]. Обратная задача с нелокальным граничным условием (6) для уравнения (1) при  $n = 0$ ,  $m \geq 0$  и  $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$  рассмотрена в работах [5, 6]. В статье [7] исследована задача 1 для уравнения (1), где вместо условий (6) и (7) заданы условия (11) и  $u_t(x, -\alpha) = \chi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , соответственно.

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия единственности решений задач 1 и 2 при  $n = 0$  и  $n > 0$ . Решения задач построены при всех  $n \geq 0$ ,  $m > 0$  и  $b \geq 0$  в виде сумм рядов по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании существования решения задач возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость построенных рядов. В связи с чем установлены оценки об отдаленности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили при некоторых условиях относительно граничных функций и параметра  $\alpha$  доказать принадлежность построенного решения классам (2), (3) и (8). Доказана также устойчивость решения по граничным данным в нормах пространств  $L_2$  и  $C(\bar{D})$ .

### Литература

1. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, № 4. – С. 596-602.
2. *Юнусова Г.Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – Т. 89, № 8. – С. 108-117.
3. *Сидоров С.Н.* Нелокальная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Доклады АМАН. – 2012. – Т. 14, № 3. – С. 34-44.
4. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 356-365.
5. *Сабитов К.Б., Юнусова Г.Р.* Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 2. – С. 238-245.
6. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46-59.
7. *Сидоров С.Н.* Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – № 19 (190). – Вып. 36. – С. 91-104.

Сабитова Ю.К.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
 Институт прикладных исследований  
 (Россия, Стерлитамак)  
 e-mail: sabitovauk@rambler.ru

## Нелокальная начально-граничная задача для вырождающегося гиперболического уравнения

Для уравнения

$$Lu \equiv y^m u_{xx} - u_{yy} - b^2 y^m u = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $Q = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < T\}$ , где  $-1 < m < 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $T > 0$  — заданные действительные числа, изучена следующая нелокальная начально — граничная задача.

**Задача.** Найти в области  $Q$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям :

$$u(x, y) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \quad (2)$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in Q; \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T; \quad (5)$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (6)$$

где  $\tau(x)$ ,  $\nu(x)$  — заданные достаточно гладкие функции, причём  $\tau(0) = \tau(1)$ ,  $\tau'(0) = 0$ .

В данной работе, следуя [1], на основании свойства полноты системы корневых функций одномерной спектральной задачи доказана теорема единственности решения задачи. Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда.

**Теорема 1.** Если существует решение задачи (2) — (6), то оно единственно.

**Теорема 2.** Если  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  удовлетворяют условиям  $\tau(x), \nu(x) \in C^3[0, 1]$ ,  $\tau(0) = \tau(1)$ ,  $\nu(0) = \nu(1)$ ,  $\tau'(0) = 0$ ,  $\nu'(0) = 0$ ,  $\tau''(0) = \tau''(1)$ ,  $\nu''(0) = \nu''(1)$ , то существует единственное решение задачи (2) — (6) и оно представимо в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x, y) = u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) x \sin(2\pi n x),$$

где функции  $u_0(y)$ ,  $u_n(y)$ ,  $v_n(y)$  определены соответственно по формулам

$$u_0(y) = \left( \alpha_0 \nu_0 + \frac{\pi \tau_0}{2q \alpha_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right) J_{\frac{1}{2q}}(p_0 y^q) \sqrt{y} - \frac{\pi \tau_0}{2q \alpha_0} Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 y^q) \sqrt{y},$$

$$u_n(y) = \left( \alpha_n \nu_{1n} + \frac{\pi \tau_{1n}}{2q \alpha_n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right) J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \sqrt{y} - \frac{\pi}{2 \alpha_n q} \tau_{1n} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \sqrt{y} + w_n^-(y),$$

$$v_n(y) = \left( \alpha_n \nu_n + \frac{\pi \tau_n}{2q \alpha_n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right) J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \sqrt{y} - \frac{\pi \tau_n}{2q \alpha_n} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \sqrt{y},$$

где  $\alpha_0 = \frac{1}{2q} \Gamma(\frac{1}{2q}) (\frac{p_0}{2})^{-\frac{1}{2q}}$ ,  $p_0 = b_0/q$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{2q} \Gamma(\frac{1}{2q}) (\frac{p_n}{2})^{-\frac{1}{2q}}$ ,  $q = (m+2)/2$ ,  $p_n = \sqrt{b^2 + (2\pi n)^2/q}$ ,  $\Gamma(1/2q)$  – гамма-функция,  $J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)$  и  $Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)$  – функции Бесселя I и II рода,  $w_n^-(y)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} w_n^-(y) = & \frac{\pi n}{q^2} a_n \sqrt{y} \left( \frac{1}{p_n^2 q} J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) + \frac{\pi}{2} y^{2q} \left[ J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) J_{\frac{1}{2q}+1}(p_n y^q) Y_{\frac{1}{2q}-1}(p_n y^q) + \right. \right. \\ & \left. \left. + J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n y^q) Y_{\frac{1}{2q}+1}(p_n y^q) - 2 J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n y^q) J_{\frac{1}{2q}+1}(p_n y^q) Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \right] \right) + \\ & + \frac{\pi n}{q^2} b_n \sqrt{y} \left( \frac{2}{p_n^2 q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) + \frac{\pi}{2} y^{2q} \left[ Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) J_{\frac{1}{2q}+1}(p_n y^q) Y_{\frac{1}{2q}-1}(p_n y^q) + \right. \right. \\ & \left. \left. + Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) J_{\frac{1}{2q}-1}(p_n y^q) Y_{\frac{1}{2q}+1}(p_n y^q) - 2 Y_{\frac{1}{2q}-1}(p_n y^q) Y_{\frac{1}{2q}+1}(p_n y^q) J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{p_n^2 q} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) \right). \end{aligned}$$

### Литература

1. Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 12. – С. 49-58

УДК 517.43

Садыбеков М.А.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: makhmud-s@mail.ru*

### Критерий базисности системы собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями

В  $L_2(0,1)$  рассмотрим оператор  $\mathcal{L}$ , порождённый обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(u) = u^{(2n)}(x) + q_1(x)u^{(2n-1)}(x) + \dots + q_{2n}(x)u(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

и нормированными краевыми условиями

$$U_j(u) \equiv \sum_{k=0}^{2n-1} [\alpha_{jk} u^{(k)}(0) + \beta_{jk} u^{(k)}(1)] = 0, \quad j = \overline{1, 2n}. \quad (2)$$

Предполагаем, что коэффициенты  $q_k(x)$  в выражении (1) – измеримые существенно ограниченные функции, формы  $U_j(u)$  – линейно независимые, а краевые условия (2) – регулярные, но не усиленно регулярные. При этих условиях в работе А.А. Шкаликова [1] доказано, что система СиПФ оператора  $\mathcal{L}$  образует блок-базис Рисса в пространстве  $L_2(0,1)$ . Более конкретно, базис Рисса в  $L_2(0,1)$  образуют двумерные подпространства, составленные из СиПФ, отвечающих попарно близким собственным значениям.

Для всех достаточно больших номеров  $k \geq N_0$  обозначим  $u_{k1}$  – собственную, а  $u_{k2}$  – собственную (или присоединенную) функции, отвечающие попарно близким собственным значениям.

**Теорема 1.** Система СиПФ оператора  $\mathcal{L}$  образует безусловный базис в пространстве  $L_2(0,1)$ , если и только если существует такое число  $0 < \delta < 1$ , что для всех  $k \geq N_0$

$$\left| \left( \frac{u_{k1}}{\|u_{k1}\|}, \frac{u_{k2}}{\|u_{k2}\|} \right) \right| < \delta < 1.$$

### Литература

1. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. – 1979. – Т. 34, вып. 5. – С. 235-236.

УДК 517.95

Сартабанов Ж.А., Мухамбетова А.А.

*Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова  
(Казахстан, Актюбе)*

*e-mail: sartabanov42@mail.ru*

### Разрешимость одной однородной краевой задачи

В работе исследуется задача о решениях системы

$$Dx = Px \tag{1}$$

с искомой вектор-функцией  $x = x(\alpha, \xi, \eta, t, \tau, \tau_0)$ , дифференциальным оператором

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \langle a, \frac{\partial}{\partial t} \rangle + c \frac{\partial}{\partial \xi} + \langle A\eta, \frac{\partial}{\partial \eta} \rangle,$$

с квадратной постоянной матрицей  $P$ , граничным условием

$$Bx|_{\xi=\alpha} + Cx|_{\xi=\beta} = 0 \tag{1_0}$$

и начальным условием

$$x(\xi, \xi, \eta, t, \tau, \tau_0)|_{\tau=\tau_0} = u(\xi, \eta, t) \in C_{\xi, \eta, t}^{(1,1,1)}(I \times R^k \times R^m), \tag{1_*}$$



$$u(\xi, \eta, t + q\omega) = u(\xi, \eta, t), \quad q \in Z^m,$$

где

$$\tau \in (-\infty, +\infty) = R, \quad \tau_0 \in R, \quad t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m,$$

$$\xi \in [\alpha, \beta] = I, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in R \times \dots \times R = R^k, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right),$$

$\frac{\partial}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $c \neq 0$ ,  $A, B, C$  – постоянные квадратные матрицы,  $\langle, \rangle$  – знак скалярного произведения,  $q\omega = (q_1\omega_1, \dots, q_m\omega_m)$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  – период,  $q = (q_1, \dots, q_m)$  – кратность,  $Z^m$  – множество целочисленных векторов.

Предполагаются выполненными условия

$$\det(E_k - \exp[c^{-1}A(\beta - \alpha)]) = 0,$$

$$\det(B - C \exp[c^{-1}P(\beta - \alpha)]) = 0.$$

При ряде дополнительных условий относительно  $u(\xi, \eta, t)$  доказано, что задача (1) – (1<sub>0</sub>) – (1<sub>\*</sub>) допускает решение

$$x(\alpha, \xi_0, \eta, t, \tau, \tau_0) = \sum_{l=1}^{\infty} Y(\xi - \alpha) H_l(\xi - \alpha - c\tau + c\tau_0) u_l(x(\tau_0, \tau, \eta), h(\tau_0, \tau, t)) \cdot \sin \frac{2\pi l(\chi(\tau_0, \tau, \xi) - \alpha)}{\beta - \alpha},$$

где  $Y(\xi) = \exp[c^{-1}P\xi]$ ,  $H_l(\xi)$  – квадратные  $\delta = \beta - \alpha$  – периодические матрицы,  $u_l(\eta, t)$  – коэффициенты разложения функции  $u(\xi, \eta, t)$  в ряд Фурье по синусам,  $\chi, x, h$  – характеристики оператора  $D$ .

Далее, обсуждается вопрос о существовании  $(\theta, \omega)$  – периодических решений задачи по  $(\tau, t)$ .

### Литература

1. Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Многопериодические решения квазилинейной системы уравнений в частных производных первого порядка // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12-1. – С. 95-98.
2. A.A. Mukhambetova, Zh.A. Sartabanov. Solution of the Initial-Boundary Value Problem for a Linear System of the First Order Partial Differential Equations // Book of abstracts Conference 125 years of Mathematics and Natural Sciences at Sofia University "St. Kliment Ohridski". – Pp. 169-170.
3. A.A. Mukhambetova, Zh.A. Sartabanov. Integral criterion of the stability of the second order linear D-equations with oscillatory coefficients // Mathematical methods and computational Techniques in Science and Engineering Athens. – Greece, 2014.
4. A.A. Mukhambetova, Zh.A. Sartabanov. Research of multiperiodic solutions of quasi-linear system in the first order partial derivatives // Bulletin d/Eurotalent. – France, 2014. – № 4. – С. 33-37.

Сламжанова С.С.

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова  
(Казахстан, Талдыкорган)

e-mail: beksultan.82@mail.ru

### Необходимые и достаточные условия асимптотической эквивалентности разностно-динамических систем

В предлагаемой работе дается необходимое и достаточное условие асимптотической эквивалентности нелинейных разностно-динамических систем (РДС) по Брауэру [1,2].

Рассмотрим РДС

$$y_{n+1} = A(n) y_n, \quad (1)$$

$$x_{n+1} = A(n) x_n + f(n, x_n), \quad (2)$$

где  $A(\cdot) : N_{n_0} \rightarrow \text{Hom}(R^l, R^l)$  – непрерывное отображение,  $f \in C(D)$ ,  $D = N_{n_0} \times R^l$ .

Допустим, что решения  $x(n : n_0, x_{n_0})$ ,  $x_{n_0} \in S_0$  РДС (2) существуют при  $n_0 \in N$ ,  $n_0 < +\infty$ . Пусть  $S_0, S_1 \subset R^l$ ,  $S = \{y : \|y\| \leq r\}$

$$S_0 + S_1 = S_2. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Для существования множества  $S_3 \subseteq S_2$ ,  $S_3 \neq \emptyset$  такого, чтобы на  $S_0$  и  $S_3$  РДС (1) и (2) были бы асимптотически эквивалентными по Брауэру, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} (Y(n) \sum_{s=n_0}^n Y^{-1}(s) f(s, x(s : n_0, x_{n_0})) + Y(n)q) = 0 \quad (4)$$

при любом  $x_{n_0} \in S_0$  и некотором  $q \in S_1$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть РДС (1) и (2) на  $S_3 \subseteq S_2$  и  $S_0$  асимптотически эквивалентны. Это означает, что для любого  $x_{n_0} \in S_0$  существует  $y_{n_0} \in S_3$  такой, что  $\|x(n : n_0, x_{n_0}) - y(n : n_0, y_{n_0})\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  и, наоборот, для любого  $y_{n_0} \in S_3$  существует такой  $x_{n_0} \in S_0$ , что для решений справедлив предыдущий предельный переход.

Тогда

$$y(n, n_0, y_{n_0}) = Y(n) y_{n_0},$$

$$x(n : n_0, x_{n_0}) = Y(n) x_{n_0} + \sum_{s=n_0}^n Y(n) Y^{-1}(s) f(s, x(s : n_0, x_{n_0}))$$

и

$$\begin{aligned} & x(n : n_0, x_{n_0}) - y(n : n_0, y_{n_0}) = \\ & = Y(n) (x_{n_0} - y_{n_0}) + \sum_{s=n_0}^n Y(n) Y^{-1}(s) f(s, x(s : n_0, x_{n_0})) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow +\infty$ . Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( Y(n) \sum_{s=n_0}^n Y^{-1}(s) f(s, x(s : n_0, x_{n_0})) + Y(n) q \right) = 0,$$

которое справедливо при любом  $x_{n_0} \in S_0$  и некотором  $q \in S_1$ .

*Достаточность.* Пусть справедливо РДС (4). Тогда, взяв решения  $x(n : n_0, x_{n_0})$  и  $y(n : n_0, y_{n_0})$ , где  $x_{n_0} \in S_0$ ,  $y_{n_0} \in S_3, y_{n_0} \in S_1$ ,  $x_{n_0} + q = y_{n_0}$  получим  $x(n : n_0, x_{n_0}) - y(n : n_0, y_{n_0}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Теорема доказана.

Ясно, что если  $S_1$  – одноэлементное множество, то РДС (1) и (2) асимптотически эквивалентны по Левинсону. Если же матрица  $Y(n)$  ограничена, то необходимым условием асимптотической эквивалентности является существование суммы

$$\sum_{s=n_0}^n Y^{-1}(s) f(s, x(s : n_0, x_{n_0})), \quad x_{n_0} \in S_0.$$

### Литература

1. *Сламжанова С.С.* Покомпонентная асимптотическая эквивалентность разностно-динамических систем (РДС) // Математический журнал. – Алматы, 2009. – Т. 9, № 3. – С. 83-93.
2. *Бопаев К.Б.* Нормальная форма нелинейных разностно-динамических систем // Математический журнал. – Алматы, 2003. – Т. 3, № 1. – С. 42-54.

УДК 517.946

Тасмамбетов Ж.Н.

*Актюбинский региональный государственный университет им.К. Жубанова  
(Казахстан, Актюбе)*

*e-mail: tasmam@rambler.ru*

## Произведения логарифмических решений систем типа Бесселя

**1. Введение.** Вырожденные гипергеометрические функции двух переменных были введены с помощью предельного перехода из четырех гипергеометрических функций двух переменных  $F_1$ - $F_4$  Аппеля [1].

В данной работе изучение свойств функции Бесселя двух переменных исходить из ряда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2 \left( \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma'; \varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y \right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \frac{x^m y^n}{m! n!} = J(\gamma; x) J(\gamma'; y) \quad (1.1)$$

где  $(\lambda)_0 = 1$ ,  $(\lambda)_n = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + n - 1)$  - символ Похгаммера [1], установленный с помощью предельного перехода и на основании этих свойств построены логарифмические решения систем типа Бесселя.

**2. Основные свойства функции Бесселя двух переменных.** Основные свойства функции Бесселя двух переменных сформулируем в виде ряда теорем.

**Теорема 1.** *Функция Бесселя двух переменных представима в виде*

$$J_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!\Gamma(\mu + m + 1) \cdot \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\mu} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (2.1)$$

Учитывая также связь между обыкновенными уравнениями Куммера и Бесселя получим утверждение.

**Теорема 2.** *Функция Бесселя двух переменных первого рода  $J_{\mu,\nu}(x, y)$  является решением системы*

$$\begin{cases} x^2 Z_{xx} + xZ_x + (x^2 - \mu^2)Z = 0, \\ y^2 Z_{yy} + yZ_y + (y^2 - \nu^2)Z = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\mu, \nu$  – постоянные, а  $Z = Z(x, y)$  общая неизвестная, которую следует определить. Эту систему назовем системой типа Бесселя.

Решение системы типа Бесселя (2.2) построим с помощью метода Фробениуса-Латышевой в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z = x^\rho y^\sigma \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n, \quad A_{0,0} \neq 0, \quad (2.3)$$

где  $\rho, \sigma, A_{m,n}$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ) – неизвестные постоянные.

Неизвестные  $\rho$  и  $\sigma$  определяются из системы определяющих уравнений относительно особенности  $(0, 0)$  и имеет четыре пары корней:  $(\mu, \nu)$ ;  $(\mu, -\nu)$ ;  $(-\mu, \nu)$  и  $(-\mu, -\nu)$ . Соответствующие им решения  $J_{\mu,\nu}(x, y)$ ,  $J_{\mu,-\nu}(x, y)$ ,  $J_{-\mu,\nu}(x, y)$  и  $J_{-\mu,-\nu}(x, y)$  составляют четыре линейно-независимые частные решения системы (2.2).

Если  $\mu$  и  $\nu$  целые числа, то справедливо утверждение [2, стр.15].

**Теорема 3.** *Пусть  $\mu$  и  $\nu$  целые числа, то  $J_{\mu,\nu}(x, y)$  удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} J_{-\mu,\nu}(x, y) &= (-1)^\mu \cdot J_{\mu,\nu}(x, y), \\ J_{\mu,-\nu}(x, y) &= (-1)^\nu \cdot J_{\mu,\nu}(x, y), \\ J_{-\mu,-\nu}(x, y) &= (-1)^\nu \cdot J_{\mu,-\nu}(x, y) = (-1)^\mu \cdot J_{-\mu,\nu}(x, y) = (-1)^{\mu+\nu} \cdot J_{\mu,\nu}(x, y). \end{aligned}$$

### 3. Произведения логарифмических решений системы типа Бесселя.

Если  $\mu$  и  $\nu$  целые числа, то существуют логарифмические решения [3]. Справедливо утверждение.

**Теорема 4.** *Если  $\mu$  и  $\nu$  целые числа, то четыре линейно-независимые частные решения системы типа Бесселя (2.2) представляются следующим образом*

$$\begin{aligned} J_{\mu,\nu}^{(1)}(x, y) &= J_\mu(x)J_\nu(y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!\Gamma(\mu + m + 1) \cdot \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\mu} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+\nu}, \\ J_{\mu,\nu}^{(2)}(x, y) &= J_\mu(x)Y_\nu(y) = \frac{2^2}{\pi^2} J_{\mu,\nu}^{(1)}(x, y) \left(\ln \frac{y}{2} + C_2\right) + f_{10}(x, y) \\ J_{\mu,\nu}^{(3)}(x, y) &= J_\nu(y)Y_\mu(x) = \frac{2^2}{\pi^2} J_{\mu,\nu}^{(1)}(x, y) \left(\ln \frac{x}{2} + C_1\right) + f_{01}(x, y) \\ J_{\mu,\nu}^{(4)}(x, y) &= Y_\mu(x)Y_\nu(y) = \frac{2^2}{\pi^2} J_{\mu,\nu}^{(1)}(x, y) \left(\ln \frac{x}{2} + C_1\right) \left(\ln \frac{y}{2} + C_2\right) + \\ &+ f_{01}(x, y) \left(\ln \frac{y}{2} + C_2\right) + f_{10}(x, y) \left(\ln \frac{x}{2} + C_1\right) + f_{11}(x, y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

где через  $f_{10}(x, y)$ ,  $f_{01}(x, y)$  и  $f_{11}(x, y)$  обозначены произведения рядов  $J_{\mu, \nu}^{(1)}(x, y)$  и  $J_{\mu}(x)$ ,  $J_{\nu}(y)$ ;  $C_j = 0,577215664901532\dots (j = 1, 2)$  – так называемые постоянные Эйлера.

Первое частное решение  $J_{\mu, \nu}^{(1)}(x, y)$  определяется в виде обобщенного степенного ряда двух переменных, а остальные три решения логарифмические и они образуют функции Бесселя второго рода двух переменных.

### Литература

1. Appell P, Kampe de Fariet J. Functions hypergeometriques thyperspheriques polynomes d’Hermite. – Paris: Gauthier-Vollars, 1926. – 434 p.
2. RabiaAktas, AbgullaAltin, BayramGekim. On a two-variable analogue of the Bessel Functions // Journal of Inequalities and Special functions ISSN, 2217-4303, URL: <http://www.iliries.com>. – 2012. – Vol. 3, Issue 4. – Pp. 13-23.
3. Толстов Г.Н. Ряды Фурье. – М: ГИЯМЛ, 1960. – 390 с.

УДК 531.31; 519.21

Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: marat207@mail.ru*

### О построении управляющих по сносу параметров в задаче восстановления

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения, когда управление входит в коэффициент сноса. Определяется вид управляющих параметров, обеспечивающий необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2-4]. Настоящая работа обобщает результаты [5,6] в плане рассмотрения более общего класса стохастических уравнений Ито и [7,8] в плане рассмотрения более общего класса случайных возмущений, а именно случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y, z, v, w, t), & y \in R^{l_1}, z \in R^{l_2}, v \in R^{\rho_1}, w \in R^{\rho_2}, \\ \dot{z} = f_2(y, z, v, w, t) + \sigma_1(y, z, v, w, t)\xi, & \xi \in R^k, \\ \dot{v} = f_3(y, z, v, w, t) + L_1(y, z, v, w, t)u_1, & l_1 + l_2 + \rho_1 + \rho_2 = n, \\ \dot{w} = f_4(y, z, v, w, t) + L_2(y, z, v, w, t)u_2 + \sigma_2(y, z, v, w, t)\xi. \end{cases} \quad (1)$$

Требуется определить входящие в коэффициент сноса вектор-функции  $u_1 = u_1(y, z, v, w, t) \in R^r$  и  $u_2 = u_2(y, z, v, w, t) \in R^r$  по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \quad \lambda(y, z, v, w, t) = 0, \quad \lambda = \lambda(y, z, v, w, t) \in C_{yzvwt}^{12121}, \quad \lambda \in R^m \quad (2)$$

где  $C_{yzvwt}^{12121}$  обозначает множество функций  $\gamma(y, z, v, w, t)$ , непрерывно дифференцируемых по  $y, v$  и по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемых по  $z, w$ .

Будем говорить, что некоторая функция  $g(x, t)$  принадлежит классу  $K$ ,  $g \in K$ , если  $g$  непрерывна по  $t$ ,  $t \in [0, \infty]$ , липшицева по  $x$  во всем пространства  $x = (y^T, z^T)^T \in R^n$ ,  $\|g(x, t) - g(\tilde{x}, t)\| \leq B \|x - \tilde{x}\|$  и удовлетворяет условию линейного роста по  $x$   $\|g(x, t)\| \leq B(1 + \|x\|)$  с некоторой постоянной  $B$ .

Предполагается, что  $f_1, f_2, f_3, f_4, L_1, L_2, \sigma_1, \sigma_2$  принадлежат классу функций  $K$ . Пусть  $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ - система независимых случайных процессов с независимыми приращениями, которые следуя [9], можно представить в виде суммы процессов :  $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t, dy), \xi_0$ - винеровский процесс;  $P^0$ - пуассоновский процесс;  $P^0(t, dy)$  -число скачков процесса  $P^0$  в интервале  $[0, t]$ , попадающих на множество  $B$ ;  $B$ -векторная функция, отображающая пространство  $R^{2n}$  в пространство значений  $R^k$  процесса  $\xi(t)$  при любом  $t$ .

С использованием метода квазиобращения Мухарлямова [3,4], правила стохастического дифференцирования Ито в случае процессов с независимыми приращениями [9, с.204] и с использованием обозначений [3,9] доказывается справедливость следующей теоремы:

**Теорема 1.** *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (1) имело заданное интегральное многообразие (2) необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданном управлении  $u_1 = g(y, z, v, w, t) \in K$ , управляющая функция  $u_2$  имела вид  $u_2 = s_1[\tilde{L}C] + (\tilde{L})^+ \left[ A - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial v} f_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial w} f_4 + S_1 + S_2 + S_3 \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial v} L_1 g \right]$ , а матрицы диффузий  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  удовлетворяли условию  $\sigma_{2i} = s_2 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial w} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial w} \right)^+ \tilde{B}_i$ , где  $\sigma_{2i}$ -  $i$ -ый столбец матрицы  $\sigma_2 = (\sigma_{2\nu j})$  ( $\nu = \overline{1 \dots n}$ ), ( $j = \overline{1 \dots k}$ ),  $\tilde{B}_i$ -  $i$ -ый столбец матрицы  $\tilde{B} = B - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma_1$ .*

**Замечание 1.** Данная задача при  $l_1 = p_2 = \frac{n}{2}$ ,  $l_2 \equiv p_1 \equiv 0$ ,  $c(x) \equiv 0$  рассмотрена в работе [5], а при  $l_1 = p_2 = \frac{n}{2}$ ,  $l_2 \equiv p_1 \equiv 0$ ,  $c(x) \neq 0$  - в [6]. Частные случаи поставленной задачи исследованы в [7,8], в которых случайные возмущения предполагаются из класса винеровских процессов.

## Литература

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. - 1952. - Т. 10, в. 6. - С. 659-670.
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. - М.: Наука, 1986. - 224 с.

3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд-во РУДН, 1986. – 88 с.
4. Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, в. 3. – С. 343-353.
5. Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, в. 5. – С. 714-716.
6. Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче восстановления // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. Алматы, 2003. – № 5. – С. 34-43.
7. Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т. Об обратной стохастической задаче восстановления с вырождающейся диффузией // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. Алматы, 2006. – № 1. – С. 65-74.
8. Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On the restoration problem with degenerated diffusion // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2015. – V. 6, № 1. – Pp. 99-93.
9. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

УДК 517.544

Токибетов Ж.А.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Казахстан, Алматы)  
e-mail: ahytbek.meyram@gmail.com

## Граничные условия потенциала оператора Коши-Римана

Известно, что функция

$$\varepsilon(\zeta - z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\zeta - z}$$

является фундаментальным решением комплексного дифференциального оператора Коши - Римана  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$  ([1], стр.123), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \frac{1}{\pi} \frac{1}{\zeta - z} \right) = \delta(\zeta - z), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy. \quad (1)$$

В ограниченной области  $\Omega \in R^2$  с гладкой границей  $\Gamma$  рассмотрим потенциал оператора Коши-Римана

$$w(z) = \int \int_{\Omega} \varepsilon(z - \zeta) f(\zeta) d\xi d\eta = L_w^{-1} f, \quad (2)$$

где  $f(\zeta) = f_1(\xi, \eta) + if_2(\xi, \eta)$ .

В силу (1), функция  $w(z) = \varepsilon * f(z)$  удовлетворяет неоднородной системе Коши-Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} L_w^{-1} f = f(z). \quad (3)$$

Легко убедиться, что интегральный оператор  $L_w^{-1}$ , является вполне непрерывным оператором в  $L_2(\Omega)$ .

В данной работе найдены граничные условия оператора  $L_w^{-1} f$ , т.е. потенциала оператора Коши-Римана. Это краевое условие записывается в виде

$$\frac{w(\tau)}{2} + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta = 0, \quad \operatorname{Im} I_w(z_0) = 0, \quad (4)$$

где  $u(\tau) = \operatorname{Re} w(\tau)$ .

Основной результат доклада.

**Теорема.** Потенциал оператора Коши - Римана  $w = L_w^{-1} f$  удовлетворяет граничному условию (4). И обратно, если функция  $w(z)$  удовлетворяет неоднородной системе Коши - Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f(z) \quad (5)$$

и граничному условию (4), то  $w(z)$  совпадает с потенциалом Коши - Римана  $L_w^{-1} f$ .

### Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1971.

УДК 517.956.225

Торекбек Б.Т.

*Институт математики и математического моделирования,  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)  
e-mail: turebekb85@mail.ru*

### Представление функции Грина спектральной задачи Стеклова в круге

Пусть  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  – единичный круг,  $\partial\Omega$  - его граница. В  $\Omega$  рассмотрим следующую задачу В.А. Стеклова [1, 113]:

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lambda u(x), x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $f(x)$  достаточно гладкая функция,  $\lambda \in \mathbb{N}$  - собственные значения задачи Стеклова. Здесь и далее  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  - производная по направлению внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Классическим решением задачи (1)-(2) назовем функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  удовлетворяющую условиям (1)-(2).

Справедливы следующие утверждения.



**Теорема 1.** Пусть решение задачи (1)-(2) существует. Тогда оно единственно с точностью до гармонических полиномов  $H_\lambda(y)$  степени  $\lambda$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f(x)$  достаточно гладкая функция в  $\Omega$ . Тогда для разрешимости задачи (1)-(2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\Omega} H_\lambda(y) f(y) dy = 0. \quad (3)$$

Имеет место

**Теорема 3.** Пусть решение задачи (1)-(2) существует. Тогда при выполнении условия (3) решение задачи (1)-(2) может быть представлено в интегральном виде с помощью функции Грина задачи (1)-(2)  $G_S(x, y)$  по формуле:

$$u(x) = \int_{\Omega} G_S(x, y) f(y) dy.$$

Целью настоящей работы является построение в явном виде функции Грина задачи (1)-(2).

Отметим, что если  $\lambda < 0$  и  $0 < \lambda \notin \mathbb{N}$ , то для таких случаев функция Грина задачи (1)-(2) построена в явном виде в работе [2]. В этих случаях задача является корректной и определение функции Грина вводится аналогично, как и определение функции Грина задачи Дирихле для уравнения (1). Далее, мы построим в явном виде функцию Грина задачи (1)-(2).

Пусть  $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, y_1 = \rho \cos \theta, y_2 = \rho \sin \theta, \gamma = \varphi - \theta$ . Приведем следующее определение

**Определение 1.** Функцией Грина задачи (1)-(2) в области  $\Omega$  называется функция  $G_S(x, y)$  двух точек  $x, y \in \bar{\Omega}$  обладающая свойствами:

$$(i) \quad \Delta G_S(x, y) = \delta(x - y), (x, y) \in \Omega,$$

$$(ii) \quad \frac{\partial G_S(x, y)}{\partial v_y} - \lambda G_S(x, y) = -\frac{r^\lambda}{\pi} \cos \lambda \gamma, x \in \Omega, y \in \partial \Omega,$$

где  $\delta(x - y)$  дельта-функция Дирака.

Из свойства (ii) легко заметить, что при  $\lambda \rightarrow 0$  определение функции Грина задачи (1)-(2), совпадает с определением функции Грина задачи Неймана. Также очевидно, что функция Грина не единственна с точностью до гармонических полиномов  $H_\lambda(y)$  степени  $\lambda$ .

Основной результат работы.

**Теорема 4.** Функция Грина  $G_S(x, y)$  задачи (1)-(2) представляется в виде конечной суммы элементарных функций

$$G_S(x, y) = G_N(x, y) - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2}{\lambda} + 2r^\lambda \rho^\lambda \sin \lambda \gamma \operatorname{arctg} \frac{r \rho \sin \gamma}{1 - r \rho \cos \gamma} - \right. \\ \left. - 2r^\lambda \rho^\lambda \cos \lambda \gamma \ln (1 - 2r \rho \cos \gamma + r^2 \rho^2) + 2 \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{r^k \rho^k}{k - \lambda} \cos k \gamma \right],$$

где  $G_N(x, y)$  функция Грина задачи Неймана для уравнения (1).

## Литература

1. *Antoine Henrot* Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators. - Frontiers in Mathematics. – Birkhauser, 2006. – 204 p.
2. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle //AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 1611. – Pp. 255-260.
3. *Карачик В.В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. – № 9. С. 1674-1694.

УДК 517.95

Турметов Б.Х.

*Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. Ясави  
(Казахстан, Туркестан)*

e-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz

## О разрешимости дробных аналогов задачи Неймана для полигармонического уравнения

Пусть  $\Omega$  – единичный шар,  $r = |x|$  и параметр  $j$  принимает один из значений  $j = 0, 1, \dots, \ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$ . Для любого  $\ell - 1 < \beta \leq \ell$  введем семейство операторов

$$D_j^\beta u(x) = \frac{d^{\ell-j}}{dr^{\ell-j}} J^{\ell-\beta} \frac{d^j u(x)}{dr^j}, j = 0, 1, \dots, \ell,$$

где  $J^\gamma$  – оператор интегрирования порядка  $\gamma > 0$ . Рассмотрим в области  $\Omega$  следующую задачу

$$(-\Delta)^m u(x) = g(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$D_j^{\alpha+k} u(x) = f_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1, x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Если  $\alpha = \ell$ , то  $D_j^{\alpha+k} u(x) = \frac{d^{\ell+k} u(x)}{dr^{\ell+k}}$  и поэтому при целых значениях  $\alpha$  мы получаем аналоги задачи Неймана [1].

В настоящем докладе проводится полное исследование вопросов разрешимости задачи (1),(2) для случаев  $0 < \alpha \leq 2$  и  $j = 1, 2$ . Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1),(2) и получены интегральные представления решения.

Отметим, что ранее задача (1),(2) в случае  $0 < \alpha \leq 1, j = 0$  для неоднородного бигармонического уравнения изучена в работе [2], а для однородного полигармонического уравнения в [3].

## Литература

1. *Кангуэсин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский математический журнал. – 2010. – № 2. – С. 41-52.

2. *Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.Kh.* On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order // *Acta Mathematica Scientia.* –2014. – № 6. – P. 1695-1706.
3. *Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.Kh.* On Solvability of Some Boundary Value Problem for Polyharmonic Equation with Boundary Operator of a Fractional Order // *Applied Mathematical Modelling.* Article in press. doi.org /10.1016/j.apm.2015.01.006.

УДК 517.928

Турсунов Э.А.

*Ошский государственный университет  
(Кыргызстан, Ош)  
e-mail: emrah812@mail.ru*

### **Предельный переход в системе сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае смены устойчивости**

Рассмотрим задачу Коши для системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота:

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon^\alpha f(t), t \in (t_0, +\infty), \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^\beta), \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый параметр,  $A(t)$  – аналитическая, квадратная матрица функции второго порядка, с элементами  $a_{jm}(t), j, m = 1, 2, f(t) = \text{colon}(f_1(t), f_2(t))$  – аналитическая вектор-функция,  $x^0(\varepsilon) = \text{colon}(x_1^0(\varepsilon), x_2^0(\varepsilon))$ .

Условие  $U_1$ . Пусть матрица-функция  $A(t)$  имеет комплексно-сопряженные собственные значения  $\lambda_{1,2}(t) = (a - t)^{2n-1}(t \pm ik)$ , где  $n \in N, 0 < a \in R, tg(\pi n/(2n + 1)) = a/k, 0 < k \in R, \alpha > 1 - 1/(2n), \beta \geq \alpha, i = \sqrt{-1}$ .

Условие  $U_2$ . Начальная точка  $t_0 = -a/2n$ .

Решение задачи Коши (1)-(2) существует и единственно при  $0 < \varepsilon$ . Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2), когда малый параметр  $\varepsilon$  стремится к нулю, т.е. асимптотическая близость решения возмущенной задачи к решению предельного уравнения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Рассматриваемая задача имеет следующие особенности:

- 1) присутствие малого параметра  $\varepsilon$  при производной уравнения (1);
- 2) при  $t = a$  собственные значения матрицы функции  $A(t)$  совпадают, т.е.  $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ . По терминологии Вазова В. и Федорюка М.В. точка  $t = a$  называется точкой поворота системы (1). Точка поворота  $t = a$  является точкой поворота  $(2n - 1)$ -го порядка,  $n \in N$ ;
- 3) действительные части собственных значения  $\lambda_{1,2}(t)$  в интервале  $t \in [-a/2, +\infty)$  меняют знаки с отрицательного на положительное и с положительного на отрицательное, т.е.

$$Re(\lambda_{1,2}(t)) = t(a - t)^{2n-1} < 0, t \in [-a/2n, 0) \cup (a, +\infty),$$

$$Re(\lambda_{1,2}(t)) = t(a-t)^{2n-1} > 0, t \in (0, a).$$

Это означает, что в рассматриваемом интервале нарушается условие асимптотической устойчивости (одно из условий теоремы А.Н. Тихонова о предельном переходе [1]).

В устойчивом интервале, т.е. когда  $Re(\lambda_{1,2}(t)) < 0$ , выполняются все условия теоремы А.Н.Тихонова о предельном переходе и поэтому имеет место равенство:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \tilde{x}(t),$$

где  $\tilde{x}(t)$ - решение предельной задачи. А в неустойчивом интервале, т.е. в случае  $Re(\lambda_{1,2}(t)) > 0$ , вопрос о предельном переходе остается открытым.

Впервые, в конкретном примере, на этот вопрос дала положительный ответ Шишкова М.А.(1973 г.), ученица академика Л.С. Понтрягина [2]. Также аналогичная задача исследована в работе [3], и доказана асимптотическая близость решения возмущенной задачи и предельного уравнения на интервале содержащем бесконечно большой неустойчивый интервал.

Нами доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия  $U_1$  и  $U_2$ . Тогда для решения задачи (1)-(2) справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \tilde{x}(t), t \in [-a/2n, +\infty).$$

Приводим основные моменты доказательства теоремы. Предельное уравнение (1) имеет решение  $\tilde{x}(t) = 0$ . Уравнение (1) с помощью преобразования  $x(t, \varepsilon) = B(t)y(t, \varepsilon)$  приводится к виду:

$$\varepsilon y'(t, \varepsilon) = \Lambda(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon^\alpha h(t) + \varepsilon g(t)y(t, \varepsilon), t \in (t_0, +\infty), \quad (3)$$

$$y(t_0, \varepsilon) = y^0(\varepsilon), \|y^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^\beta), \quad (4)$$

где  $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ ,  $h(t) = B^{-1}(t)f(t)$ ,  $g(t) = -B^{-1}(t)B'(t)$ .

Задача Коши (3)-(4) заменяется на интегральное уравнение:

$$y(t, \varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon)y^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon)(g(\tau)y(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{\alpha-1}h(\tau))d\tau, \quad (5)$$

где  $E(t, \tau, \varepsilon) = \exp(\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t \Lambda(s)ds)$ . Далее интегральное уравнение (5) решается методом последовательных приближений. При оценке последовательных приближений применяем идею [2], т.е. переходим в комплексную плоскость. При интегрировании применяем метод стационарной фазы [4]. В результате получим следующие оценки для последовательных приближений:

$$y_{j,1}(t, \varepsilon) \sim O(\varepsilon^\beta) + O(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}) \sim O(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}), \alpha - 1 + 1/2n > 0, j = 1, 2;$$

$$y_{j,2}(t, \varepsilon) \sim O(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n})(1 + O(\varepsilon^{1/2n})), j = 1, 2;$$

...

$$y_{j,k}(t, \varepsilon) \sim O(\varepsilon^{\alpha-1+1/2n})(1 + O(\varepsilon^{1/2n}) + \dots + O(\varepsilon^{(k-1)/2n})), j = 1, 2.$$

Отсюда получим  $\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{\alpha-1+1/2n}$ ,  $c > 0 - const$ .

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = 0, t \in [-a/2n, +\infty).$$

### Литература

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сборник. – 1952. – Т. 31(73), № 3. – С. 575-586.
2. *Шшикова М.А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 209, № 3. – С. 576-579.
3. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют кратный полюс: дисс...канд-та физ.-мат. наук. – Ош, 2005.
4. *Федорюк М.В.* Метод перевала. – М.: Изд-во Либроком, 2010. – 368 с.

УДК 517.955.8

Турсунов Д.А.<sup>1</sup>, Эркебаев У.З.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Уральский государственный педагогический университет, Россия, Екатеринбург

<sup>2</sup>Ошский государственный университет, Кыргызстан, Ош

e-mail: <sup>1</sup>d\_osh@rambler.ru, <sup>2</sup>uluk3188@mail.ru

### Метод погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце

Рассмотрим задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце:

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - (\rho - a)^2(b - \rho)u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), (\rho, \varphi) \in D, \quad (1)$$

$$u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi, \varepsilon), u(b, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi, \varepsilon), \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый параметр,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  – оператор Лапласа в полярной системе координат,  $0 < a < b - const$ ,  $\psi_j(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_{j,k}(\varphi)$ ,  $D = \{(\rho, \varphi) | a < \rho < b, 0 \leq \varphi < 2\varphi\}$ ,  $f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\rho, \varphi)$ ,  $\psi_j(\varphi, \varepsilon)$ ,  $f_k(\rho, \varphi) \in C^{(\infty)}(D \cup \Gamma)$ ,  $\Gamma$  – граница области  $D$ .

Решение задачи Дирихле (1)-(2) существует и единственно, при  $0 < \varepsilon$ . Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1)-(2), которое будем искать в виде:

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = u_0(\rho, \varphi) + \varepsilon u_1(\rho, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\rho, \varphi) + \dots + \varepsilon^n u_n(\rho, \varphi) + \dots \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим рекуррентную систему уравнений, решениями этих уравнений являются функции:

$$u_0(\rho, \varphi) = -f_0(\rho, \varphi)/(b - \rho)(\rho - a)^2, u_k(\rho, \varphi) = \Delta u_{k-1}(\rho, \varphi)/(b - \rho)(\rho - a)^2, k \in N.$$

Заметим, что при  $\rho = a$  или  $\rho = b$  все эти функции  $u_k(\rho, \varphi)$  имеют нарастающие особенности вида:

$$u_k(\rho, \varphi) = O((b - \rho)^{-1-3k}(\rho - a)^{-2-4k}), k = 0, 1, \dots$$

Для построения равномерного формального асимптотического разложения решения задачи в области  $D$  применяем обобщенный метод погранфункции [1-3]. Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде:

$$u(\rho, \varphi, \varepsilon) = V(\rho, \varphi, \varepsilon) + W(\tau, \varphi, \mu) + Q(\eta, \varphi, \lambda), \quad (4)$$

где  $V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi)$ ,  $W = \sum_{k=-2}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$ ,  $Q = \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^k q_k(\eta, \varphi)$ ,  $\eta = \frac{b-\rho}{\lambda}$ ,  $\tau = \frac{\rho-a}{\mu}$ ,  $\lambda = \sqrt[3]{\varepsilon}$ ,  $\mu = \sqrt[4]{\varepsilon}$ . Отсюда получим следующие задачи:

$$\varepsilon \Delta V(\rho, \varphi, \varepsilon) - (b - \rho)(\rho - a)^2 V(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon) - H(\rho, \varphi, \varepsilon), (\rho, \varphi) \in D, \quad (5)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} - \lambda \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \lambda^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \right) - \eta \lambda (c - \eta \lambda)^2 Q = h_1(\eta, \varphi, \lambda), (\eta, \varphi) \in D_1, \quad (6)$$

$$\mu^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \mu \frac{\partial W}{\partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - (\tau \mu)^2 (c - \tau \mu) W = h_2(\tau, \varphi, \mu), (\tau, \varphi) \in D_2, \quad (7)$$

где  $c = b - a$ ,  $D_2 = \{(\tau, \varphi) | 0 < \tau < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ ,

$D_1 = \{(\eta, \varphi) | 0 < \eta < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ ,  $H(\rho, \varphi, \varepsilon) = h_1(\rho, \varphi, \varepsilon) + h_2(\rho, \varphi, \varepsilon)$ . Из соотношения (3) для функции  $v_k(\rho, \varphi)$  получим:

$$v_k(\rho, \varphi) = -(g_k(\rho, \varphi) - H_k(\rho, \varphi))/(b - \rho)(\rho - a)^2,$$

где  $g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi)$ ,  $v_{-1} \equiv 0$ ,  $H_k = h_{1,k} + h_{2,k}$ ,

$$h_{1,k} = g_k(a, \varphi) + \frac{\partial g_k(a, \varphi)}{\partial \rho} (\rho - a) - \left(\frac{\rho - a}{c}\right)^2 (g_k(a, \varphi) + \frac{\partial g_k(a, \varphi)}{\partial \rho} c), h_{2,k} = \left(\frac{\rho - a}{c}\right)^2 g_k(b, \varphi).$$

Из (4) и (5) для функции  $q_k(\eta, \varphi)$ ,  $w_k(\tau, \varphi)$  получим задачи:

$$\frac{\partial^2 q_k}{\partial \eta^2} - \eta c^2 q_k = \tilde{h}_{1,k}(\eta, \varphi), q_k(0, \varphi) = 0, k \neq 3j, q_{3j}(0, \varphi) = \psi_{2,j}(\varphi) - v_j(b, \varphi);$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial \tau^2} - \tau^2 c w_k = \tilde{h}_{2,k}(\tau, \varphi), w_k(0, \varphi) = 0, k \neq 4j, w_{4j}(0, \varphi) = \psi_{1,j}(\varphi) - v_j(a, \varphi);$$

$j = 0, 1, \dots$

Все эти задачи имеют единственные решения, удовлетворяющие граничным условиям. Функции  $q_k(\eta, \varphi)$  определяются через функции Эйри, а функции  $w_k(\tau, \varphi)$  через модифицированные функции Бесселя. Доказывается лемма:

**Лемма 1.** Пусть функция  $G(\tau, \varphi) \in C^{(\infty)}(D_1)$  разлагается в асимптотический ряд  $G(\tau, \varphi) = \tau^s \sum_{k=0}^{+\infty} G_k(\varphi) \tau^{-(n+2)k}$ ,  $\tau \rightarrow +\infty$ . Тогда в области  $D_1$  существует решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n c w(\tau, \varphi) = G(\tau, \varphi), c > 0 - const,$$

которое разлагается в асимптотический ряд

$$w(\tau, \varphi) = \tau^{s-n} \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(\varphi) \tau^{-(n+2)k}, \tau \rightarrow +\infty.$$

Доказана следующая теорема

**Теорема 1.** Если  $f(a, \varphi, 0) \neq 0$  и  $f(b, \varphi, 0) \neq 0$ , то для решения задачи (1)-(2) справедливо асимптотическое разложение:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} q_k\left(\frac{b-\rho}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, \varphi\right) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \varepsilon^{k/4} w_k\left(\frac{\rho-a}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, \varphi\right), \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Для обоснования полученного формального асимптотического разложения (8), решения задачи (1)-(2), составляем задачу для остаточного члена асимптотического ряда (8). Для оценки решения этой задачи применяем принцип максимума.

### Литература

1. *Alymkulov K.* Method of Boundary Layer Function to Solve the Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed Differential Equation of the Order Two with a Turning Point // Universal J. of Applied Mathematics. – 2014. – V. 2, № 3. – P. 119-124.
2. *Турсунов Д.А.* Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – Т. 26, № 6. – С. 37-44.
3. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского Политехнического Университета. – 2014. – Т. 324, № 2. – С. 31-35.

Тюреходжаев А.Н.,<sup>1</sup> Карыбаева Г.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. К.И. Сатпаева, Казахстан, Алматы

<sup>2</sup>Алматинский технологический университет, Казахстан, Алматы

e-mail: <sup>1</sup>tyurekhodja@mail.ru, <sup>2</sup>gulnaska83@mail.ru

## Построение аналитического решения одного нелинейного уравнения параболического типа

Методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [1-3], построенным первым автором с привлечением интегрального преобразования Лапласа и метода математической индукции построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (3au^2(x,t) + 2bu(x,t)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + f(x,t) = 3c_1c_2u^2(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t),$$

с построением графика температурного поля  $u = u(x, t)$  в слое.

### Литература

1. Тюреходжаев А.Н., Карыбаева Г.А. Решение нелинейного уравнения параболического типа методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений // Вестник КазНТУ. – Алматы, 2010. – № 5. – С. 264-271.
2. Тюреходжаев А.Н., Карыбаева Г.А. Аналитическое решение уравнения теплопроводности с переменными теплофизическими характеристиками // Вестник КазНТУ. – Алматы, 2010. – № 5. – С. 257-264.
3. Тюреходжаев А.Н., Карыбаева Г.А. Решение одного нелинейного уравнения теплопроводности // Вестник НАН РК. – Алматы, 2010. – № 5. – С. 37-43.



Утешова Р.Е., Абильдаева А.Д.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)**e-mail: ruteshova@mail.ru***Сингулярные краевые задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения на конечном интервале**

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где  $f : (0, T) \times R^n \rightarrow R^n$  непрерывна и имеет существенную особенность в начальной и конечной точках интервала  $(0, T)$ .

Уравнения с особенностями в конечной точке часто возникают в приложениях. Различные задачи для таких уравнений рассмотрены многими авторами обзор работ которых содержится [1]. Для исследования поведения решения уравнения (1) в особой точке можно использовать "предельные" решения. Определение "предельного при  $t \rightarrow \infty$ " решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения введено в [2]. Доказано, что при определенных предположениях относительно правой части дифференциального уравнения это решение обладает "притягивающим" свойством и является аттрактором. Это свойство "предельного при  $t \rightarrow \infty$ " решения позволило решить проблему аппроксимации ограниченного на всей оси решения нелинейного дифференциального уравнения.

Определение предельного решения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с особенностями в конечных точках дано в [3]; получены достаточные условия существования единственного решения, стремящегося на концах к заданным функциям.

В настоящей работе сингулярные краевые задачи на конечном интервале рассматриваются для нелинейного дифференциального уравнения (1). Дано определение предельного в особой точке решения уравнения (1). Установлены условия, при которых такое решение обладает "притягивающим" свойством. Построены аппроксимирующие регулярные краевые задачи, позволяющие с заданной точностью определить решение рассматриваемой сингулярной краевой задачи.

**Литература**

1. Кизурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Нов. достиж. – Т. 30. – М., 1987. – С. 105-201.
2. Джумабаев Д.С. Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1992. – Т. 32, № 1. – С. 13-29.

3. Кокотова Е.В. Ограниченные решения неоднородных дифференциальных систем с сингулярностями и их аппроксимации. Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Алматы, 2007. – 20 с.

517.997.52

Халдыбаева И.Т., Абдикайимова Г.А.

*Ташкентский государственный технический университет  
им. Абу Райхана Беруни  
(Узбекистан, Ташкент)  
e-mail: ayjamal\_0207@mail.ru*

### Оценка субоптимальности в интервальной задаче оптимального управления с запаздыванием

Пусть рассматривается задача управления с запаздыванием в функциональной форме

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \rightarrow \max \\ \tilde{g}_* &\leq \int_0^{t^*} h(t)u(t)dt \leq \tilde{g}^* \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} c(t) &= h'_0 F(t^*, t)b, \quad h(t) = HF(t^*, t)b, \quad t \in T \\ \tilde{g}_* &= g_* - HF(t^*, 0)x_0 - \int_{-\theta}^0 HF(t^*, t + \theta)A_1x_0(t)dt \\ \tilde{g}^* &= g^* - HF(t^*, 0)x_0 - \int_{-\theta}^0 HF(t^*, t + \theta)A_1x_0(t)dt \quad t \in T \end{aligned}$$

С функциональной точки зрения задача эквивалентна полубесконечной интервальной экстремальной задаче с бесконечным числом параметров  $u(t)$ ,  $t \in T$  и конечным числом основных ограничений. К задаче такого типа сводится и линейная терминальная задача оптимального управления обыкновенной динамической системой.

В дальнейшем основным элементом подхода станет опорное управление  $\{u, K_{on}\}$ .

Исследуем его прежде всего на оптимальность. Но для приложений большой интерес представляет не столько оптимальное, сколько субоптимальное управление, которое с гарантированной точностью по значению критерия качества приближают оптимальные управления.

В связи с этим возникает проблема распознавания  $\epsilon$ -оптимальных (субоптимальных) управлений. Критерии субоптимальности позволяют не только идентифицировать начальное  $\epsilon$ -оптимальное управление, но и во время остановить процесс решения задачи, не затрагивая дополнительных ресурсов на получения результата с излишней точностью.

**Определение 1.** При заданном  $\epsilon > 0$ , допустимое управление  $u^\epsilon(t)$ ,  $t \in T$  назовем  $\epsilon$ -оптимальным (субоптимальным), если на нем выполняется неравенство

$$J(u^0) - J(u^\epsilon) < \epsilon$$

где  $u^0(t)$ ,  $t \in T$  – оптимальное управление задачи линейного программирования в функциональном пространстве управлений (1).

Пусть  $\{u, K_{on}\}$  – опорное управление и

$$\beta(u, K_{on}) = \int_0^{t^*} \Delta(t)(\omega(t) - u(t))dt + \sum_{l \in L_{on}} \nu_l(\xi_l - z_l) \quad (2)$$

его оценка субоптимальности. Тогда из [2] и [3] получим

$$\begin{aligned} \beta(u, K_{on}) &= \int_0^{t^*} \Delta(t)(\omega(t) - u(t))dt + \sum_{l \in L_{on}} \nu_l(\xi_l - z_l) = \\ &= \int_0^{t^*} c(t)(u^0(t) - u(t))dt + \tilde{g}'(s - s^0) - \tilde{g}'_*(\eta - \eta^0) + \int_0^{t^*} (v^0(t) - v(t))dt + \\ &+ \int_0^{t^*} (\omega(t) - \omega^0(t))dt = J_0(u^0) - J_0(u) + J^*(\lambda) - J^*(\lambda^0). \end{aligned}$$

Таким образом оценка субоптимальности допускает разложение:

$$\beta(u, K_{on}) = \beta(u) + \beta(K_{on}) \quad (3)$$

где через  $\beta(u)$  обозначено отклонение значения  $J_0(u)$  от оптимального, а через  $\beta(K_{on})$  обозначено отклонение значения  $J^*(\lambda)$  от оптимального.

То есть

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \int_0^{t^*} c(t)(u^0(t) - u(t))dt = J_0(u^0) - J_0(u), \\ \beta(K_{on}) &= J^*(\lambda) - J^*(\lambda^0). \end{aligned}$$

В соответствии с этим числа  $\beta(u)$  и  $\beta(K_{on})$  будем называть соответственно мерой неоптимальности управления  $u(\cdot)$ , и мерой неоптимальности  $K_{on}$ .

Из (3) следует, что число  $\beta(u, K_{on})$  является точной оценкой управления  $u(\cdot)$ , если  $\beta(K_{on}) = 0$ . По аналогии с тем, что управление  $u^0(\cdot)$  называется оптимальным, при  $\beta(u^0) = 0$ , будем называть опору  $K_{on}^0$  оптимальной, если  $\beta(K_{on}^0) = 0$ .

Всякая опора, на которой в совокупности с некоторым управлением выполняются условия критерия оптимальности, являются оптимальной.

Приведенные вычисления делают прозрачным внутренний смысл опоры и дает основание рекомендовать в качестве начальной опоры такую, сопровождающий двойственный план которой по возможности близок к оптимальному. Это с одной стороны, позволяет точнее оценить текущее управление  $u(\cdot)$ , а с другой стороны быстрее построить субоптимальное управление.

**Теорема 1.** При любом  $\epsilon > 0$ , для  $\epsilon$ -оптимальности управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ , необходимо и достаточно существование такой опоры  $K_{on}$ , при которой оценка субоптимальности опорного управления  $\{u(\cdot), K_{on}\}$  не превосходит  $\epsilon$ , то есть  $\beta(u, K_{on}) \leq \epsilon$ .

## Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.И. Методы Оптимизации. – Минск:БГУ, 1975.
2. Халдыбаева И.Т. Использование коуправления и вектора потенциалов в опорном принципе максимума Актуальные вопросы в области технических и социально-экономических наук. – 2013. – Ч.1. – 257 с.
3. Халдыбаева И.Т. е-максимумнинг таянч принципи. Давлат илмий техника ахборот фонди. – 1997. – № 2663.

УДК 517. 956

Хасанов А.Х., Сеилханова Р.Б., Сейлова Р.Д.

*Актюбинский университет им. С. Баишева  
(Казахстан, Актюбе)*

*e-mail: anvarhasanov@yahoo.com, srahila@inbox.ru, roza\_seilova@mail.ru*

### Линейно-независимые решения одного класса вырождающегося дифференциального уравнения третьего порядка и некоторые свойства гипергеометрической функции Кампе де Ферьет

В области  $\Omega = \{(x, y, t) : x > 0, y > 0, t > 0\}$  рассматривается вырождающегося дифференциальное уравнение третьего порядка

$$x^n y^m u_t = t^k y^m u_{xxx} + t^k x^n u_{yyy}, \quad m, n, k = const > 0.$$

Определяются 9 линейно независимые решения, которые выражаются через гипергеометрические функции Кампе де Ферьет. Например, одна из них имеет вид

$$u_9 = P(t, \xi, \eta) F_{0;2;2}^{1;0,0} \left[ \begin{matrix} \frac{2\alpha+2\beta-7}{3}; & -; & -; \\ -; & \frac{4-\alpha}{3}, \frac{5-2\alpha}{3}; & \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \end{matrix} \xi, \eta \right],$$

где

$$P(t, \xi, \eta) = \left( \frac{2}{k+1} t^{k+1} \right)^{-1} \xi^{\frac{2(1-\alpha)}{3}} \eta^{\frac{2(1-\beta)}{3}}, \quad \xi = -\frac{k+1}{2(n+3)^3} \frac{x^{n+3}}{t^{k+1}},$$

$$\eta = -\frac{k+1}{2(m+3)^3} \frac{y^{m+3}}{t^{k+1}}, \quad \alpha = n/(3+n), \beta = m/(3+m),$$

$$F_{0;2;2}^{1;0,0} \left[ \begin{matrix} a; & -; & -; \\ -; c_1, c_2; d_1, d_2; \end{matrix} x, y \right] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i+j}}{(c_1)_i (c_2)_i (d_1)_j (d_2)_j i! j!} x^i y^j.$$

Обобщая операторный метод J.L. Burchnall и T.W. Chaundy вводятся одномерные взаимобратные символические операторы. Далее, используя введенные операторы, а также операторы Burchnall-Chaundy доказываются формулы разложения и интегральные представления для гипергеометрической функции Кампе де Ферьет  $F_{0;2;2}^{1;0,0} [x, y]$  от двух переменных.

## Литература

1. *Appell P., Kampe de Fériet J.* Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. – Gauthier-Villars, Paris, 1926.
2. *Burchnall J.L., Chaundy T.W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. –1940. – Vol. 11. – Pp. 249-270.
3. *Burchnall J.L., Chaundy T.W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1941. – Vol. 12. – Pp. 112-128.
4. *Chaundy T.W.* Expansions of hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1942. – Vol. 13. – Pp. 159-171.
5. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G.* Higher Transcendental Functions. – McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953. – Vol. I.
6. *Hasanov A., Karimov E.T.* Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Applied Mathematics Letters. – 2009. – Vol. 22. – Pp. 1828-1832.
7. *Hasanov A., Turaev M.* Decomposition Formulas for the Double Hypergeometric functions G1 and G2 // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – Vol. 187 (1). – Pp. 195-201.
8. *Hasanov A., Srivastava H.M.* Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions // Computers and Mathematics with Applications. – 2007. – Vol. 53 (7). Pp. 1119-1128.
9. *Hasanov A., Srivastava H.M.* Some decomposition formulas associated with the Lauricella Function and other multiple hypergeometric functions // Applied Mathematics Letters. – 2006. Vol. 19 (2). – Pp. 113-121.
10. *Hasanov A.* Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations. – 2007. – Vol. 52(8). – Pp. 673-683.
11. *Junesang Choi, Hasanov A.* Applications of the operator  $H(\alpha, \beta)$  to the Humbert double hypergeometric functions // Computers and Mathematics with Applications. – 2011. – Vol. 61. – Pp. 663-671.
12. *Salakhidinov M.S., Hasanov A.* A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2008. – Vol. 53(4). – Pp. 355-364.

Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О, Шоманбаева М.Т

*Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова  
(Казахстан, Шымкент)**e-mail: nyssanb@mail.ru***Об определении оператора Штурма-Лиувилля  
по одному спектру**

Ряд работ Б.М. Левитана [1, 2] посвящен восстановлению оператора Штурма-Лиувилля по одному и двум спектрам. Теоремы единственности по двум спектрам были доказаны Боргом [3] и Чудовым [4]. Теоремы единственности по одному спектру были доказаны Амбарцумяном [5] и Левинсоном [6]. Данная работа обобщает работы двух последних авторов и результат выводится из теоремы Борга с учетом внутренней симметрии оператора.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $L^2(0, 1)$  оператор Штурма-Лиувилля с вещественным потенциалом  $q(x)$ .

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1) \quad (0.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) &= 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где  $a_{i,j}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные комплексные постоянные и  $\lambda$  – спектральный параметр; через  $\Delta_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) обозначим миноры граничной матрицы (3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \quad (0.3)$$

Пусть  $P$  и  $Q$  – проекторы, определенные формулами

$$Pu(x) = \frac{u(x) + u(1-x)}{2}, \quad Qu(x) = \frac{u(x) - u(1-x)}{2}, \quad \forall u(x) \in L^2(0, 1); \quad (0.4)$$

$L^*$  – оператор формально сопряженный к оператору (0.1)-(0.2).

**Теорема 1.** *Если имеют место равенства*

$$1) PL = L^*P; LQ = QL^*;$$

$$2) \Delta_{13} \neq 0; \Delta_{12} = -\Delta_{34};$$

где  $P$  и  $Q$  – ортогональные проекторы, определенные формулами (0.4), то оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2)

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad x \in (0, 1) \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) + \Delta_{23}y'(0) - \Delta_{34}y'(1) = 0, \\ \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

восстанавливается по одному спектру.

**Теорема 2.** Если

$$\begin{aligned} 1) & PL = L^*P; LQ = QL^*; \\ 2) & \Delta_{24} \neq 0; \Delta_{12} = -\Delta_{34}; \end{aligned}$$

где  $P, Q$  - ортогональные проекторы, определенные формулами (0.4), то оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad x \in (0, 1) \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \Delta_{14}y(0) + \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{24}y(1) = 0, \\ \Delta_{12}y(0) + \Delta_{32}y(1) - \Delta_{24}y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

восстанавливается по одному спектру.

**Теорема 3.** Если

$$\begin{aligned} 1) & LP = PL^*; QL = L^*Q; \\ 2) & \Delta_{13} \neq 0; \Delta_{12} = -\Delta_{34}; \end{aligned}$$

где  $P, Q$  - ортогональные проекторы, определенные формулами (0.4), то оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad x \in (0, 1) \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} y(0) - y(1) - \frac{\Delta_{12} + \Delta_{32}}{\Delta_{13}}[y'(0) + y'(1)] = 0, \\ \Delta_{12}y'(0) + \Delta_{13}y(1) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

восстанавливается по одному спектру.

**Теорема 4.**

$$\begin{aligned} 1) & \Delta_{24} = 0, \Delta_{13} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0; \\ 2) & PL = L^*P; LQ = QL^*; \end{aligned}$$

где  $P, Q$  - ортогональные проекторы, определенные формулами (0.4).

При  $\Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \Delta_{32} + \Delta_{34} = 0, \Delta_{14} - \Delta_{34} \neq 0$ , и дополнительном условии,  $q(\frac{1}{2} - x) = q(x)$ , коэффициент  $q(x)$  находится единственным образом.

При  $\Delta_{12} - \Delta_{32} = 0, \Delta_{14} - \Delta_{34} = 0, \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0$ , условие  $q(\frac{1}{2} - x) = q(x)$  необходимо, но достаточность пока не ясна.

### Литература

1. Левитан Б.М. Об определении оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам // Известия АН СССР. Сер. матем. - 1964. - Т. 28. - С. 63-78.
2. Левитан Б.М. Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному и двум спектрам // Известия АН СССР. Сер. матем. - 1978. - Т. 42, № 1.
3. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm - Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Acta Mathematica. - 1945. - Т. 78, № 2. - С. 1-96.
4. Чудов Л.А. Обратная задача Штурма-Лиувилля // Матем. сб. - 1949. - Т. 25, № 67. С. 451-456.
5. Ambartsumian V.A. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschrift für Physik. - 1929. Т. 53. С. 690-695.
6. Levinson N. The inverse Sturm-Liouville problem // Math. Tidsskr. - 1949. - Vol. 13. - P. 25-30.

Шыракбаев А.Б.

Таразский государственный педагогический институт  
(Казахстан, Тараз)

e-mail: abaishirak@mail.ru

**О гладкости решений одного класса вырождающихся уравнений неклассического типа**

Общая теория краевых задач для неклассических уравнений в наиболее важных направлениях достаточно хорошо изучена. Однако имеется ряд фундаментальных задач теории вырождающихся дифференциальных уравнений, которые или совсем не решаются в рамках общей теории, или же требуют специальных исследований. Такими задачами являются задачи о гладкости решений и их производных для вырождающихся дифференциальных уравнений неклассического типа.

В работе найдены необходимые и достаточные условия коэрцитивной разрешимости задачи Дирихле для одного класса вырождающихся уравнений третьего порядка в неограниченной области.

Рассмотрим задачу

$$Lu + u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u = f(x, y) \in L_2(\Omega), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (2)$$

где  $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$ .

В дальнейшем на коэффициент  $k(y)$  уравнения (1) будем накладывать следующие ограничения:

- i)  $k(y) \in C[0, 1]$
- ii)  $-k(y) \geq 0$  и при  $y \in [0, 1]$  не убывает на отрезке  $[0, 1]$ ;
- iii)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{k(2y)}{k(y)} < \infty$ .

Всюду в дальнейшем через  $\rho(y)$  обозначим неотрицательную функцию, обладающую свойствами i)-iii).

**Теорема 1.** Пусть  $k(y)$  и  $\rho(y)$  удовлетворяют условиям i)-iii). Тогда оператор  $\rho(y)D_x^\alpha(L + E)^{-1}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) ограничен в  $L_2(\Omega)$  в том и только в том случае, если

$$\lim \gamma_t > 0$$

где

$$\gamma_t = \frac{Q_t^4}{(1 + |t|)^{2\alpha}} \inf_{Q_n \geq \xi \geq 1} \left( \frac{1 + \theta_n^{-2}(|t|^3 \cdot |k(\frac{\xi}{\theta_t}) + 1|)}{\rho(\frac{\xi}{\theta_t})} \right)^2, \quad -\infty < x < \infty,$$

где  $Q_t$  удовлетворяет неравенству

$$c^{-1} \leq \theta_t^{-2}(|t|^3 \cdot k(\frac{1}{\theta_t}) + 1) \leq 1,$$

где  $c$  – любое фиксированное число.



## Литература

1. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М. О гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Дифф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1244-1255.
2. Муратбеков М.Б. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка // Дифф. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 893-901.

UDC 514.765 + 517.938

Abiev N.A.

*Taraz State University after M. Kh. Dulaty  
(Kazakhstan, Taraz)*

e-mail: abievn@mail.ru

## On classification of semi-hyperbolic singular points of Ricci flows

**Introduction.** Consider the dynamical system obtained in [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_1 x_1 \left( \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) + x_1 B, \\ g(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_2 x_2 \left( \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) + x_2 B, \\ h(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_3 x_3 \left( \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} \right) + x_3 B, \end{aligned}$$

$$B := \left( \frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} - \left( \frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) \right) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)^{-1},$$

$a_i \in (0, 1/2]$ ,  $x_i = x_i(t) > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Recall that (1) arises at investigations of Ricci flows on generalized Wallach spaces (see [4-6] for more detailed information concerning geometrical aspects of this problem). As it was proved in [1], the system (1) could be equivalently reduced to a system of two differential equations of the type

$$\frac{dx_1}{dt} = \tilde{f}(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \tilde{g}(x_1, x_2), \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2) &\equiv f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)), \quad \tilde{g}(x_1, x_2) \equiv g(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)), \\ \varphi(x_1, x_2) &= x_1^{-a_3/a_1} x_2^{-a_3/a_2}. \end{aligned}$$

**Preliminaries.** It is obvious that the functions  $\tilde{f}(x_1, x_2)$  and  $\tilde{g}(x_1, x_2)$  are analytic in a small neighborhood of an arbitrary point  $(x_1^0, x_2^0)$  (where  $x_1^0 > 0$ ,  $x_2^0 > 0$ ). Denote by  $J$  the Jacobian matrix of (2) calculated at  $(x_1^0, x_2^0)$ . Let  $\lambda_1, \lambda_2$  are eigenvalues of  $J$  and let  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$  without loss of generality. Recall well-known definitions of the qualitative theory of ODEs:  $(x_1^0, x_2^0)$  is called a *singular* point of (2) if  $\tilde{f} = \tilde{g} = 0$  at this point;  $(x_1^0, x_2^0)$  is called a *degenerate* singular point if  $\det(J) = 0$ .

According to the qualitative theory of ODEs the degenerate case consists of the following subcases (see, for example [2]):

1. *Semi-hyperbolic* case ( $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ ). There exist 3 types of phase portraits: saddle, node and saddle-node;
2. *Nilpotent* case ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, J \neq 0$ ). In this case 13 topologically different types of phase portraits are possible (saddle, node, saddle-node, focus, center, cusp, et.c.);
3. *Linearly zero* case ( $J = 0$ ). This case is more difficult for studying and contains 65 different types of phase portraits according to results of [3].

In [1] we get some general results concerning types of singular points of (2), in particular, we proved that the *linearly zero* case may appear only at  $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$  ensuring (2) the unique singular point  $(1, 1)$ , moreover, using results of [4] it has also been proved in [1] that  $(1, 1)$  is a saddle point with six hyperbolic sectors around it. From Remark 4 in [1] one can easily deduce that the *nilpotent* case never can occur for (2). Therefore, excepting the case  $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$  degenerate singular points of (2) are all *semi-hyperbolic*.

However, it should be noted that the general results of [1] can not provide a suitable tool for solving the *question*: What kind of singularity (saddle, node or saddle-node) may hold for a given semi-hyperbolic singular point of (2)?

**Main results.** Note that the question above is very difficult in general case. In this work we solve this question in special cases of generalized Wallach spaces, more precisely, we offer a complete qualitative classification of semi-hyperbolic singular points of (2) where at least two of  $a_i$ 's are equal.

**Theorem 1.** *Let  $a_1 = a_2 = b, a_3 = c$ . Then for a given semi-hyperbolic singular point  $(x_1^0, x_2^0)$  of (2) only the following possibilities exist:*

- 1)  $(x_1^0, x_2^0)$  is a saddle-node if  $b \in [b_2, 1/4)$  and  $c = c_1$ ;
- 2)  $(x_1^0, x_2^0)$  is a saddle-node if  $b \in [b_2, 1/2] \setminus \{1/4\}$  and  $c = c_2$ ;
- 3)  $(x_1^0, x_2^0)$  is a saddle if  $b \in (0, b_3] \setminus \{1/4\}$  and  $c = c_3$ ,

where

$$\begin{aligned} b_2 &:= (\sqrt{2} - 1)/2, & b_3 &:= (\sqrt{5} - 1)/4, \\ c_1 &:= (1 - 2b - \sqrt{4b^2 + 4b - 1})/4, & c_2 &:= (1 - 2b + \sqrt{4b^2 + 4b - 1})/4, \\ c_3 &:= (16b^3 - 4b + 1)/(2 - 16b^2). \end{aligned}$$

**Acknowledgements.** This research was supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015-2017 (Agreement № 299, February 12, 2015).

## References

1. *Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Differential Geometry and its Applications.* – 2014. – V. 35. – P. 26-43.
2. *Dumortier F., Llibre J., Artes J.* Qualitative theory of planar Differential systems. Universitext. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 298 p.
3. *Jiang Q., Llibre J.* Qualitative classification of singular points // *Qualitative theory of Dynamical systems.* – 2005. – V. 6, № 1. – Pp. 87-167.
4. *Lomshakov A.M., Nikonorov Yu.G., Firsov E.V.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // *Siberian Advances in Mathematics.* – 2004. – V. 14, № 3. – P. 43-62.
5. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // *Siberian Mathematical Journal.* – 2000. – V. 41, № 1. – P. 168-172.
6. *Topping P.* Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series. – V. 325. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 133 p.

UDC 514.765 + 517.938

Abiev N.A., Turtkulbayeva Z.O.

*Taraz State University named after M. Kh. Dulaty  
(Kazakhstan, Taraz)*

*e-mail: abievn@mail.ru, zamira 90 91@mail.ru*

## On separatrices of Ricci flows in a neighborhood of linear zero singular point

**Introduction.** We offer an approach to calculation of separatrices of the following dynamical system:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2), \quad (1)$$

where

$$f := -1 - \frac{x_1}{4} \left( x_1^2 - x_2^2 - \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \right) + \frac{x_1}{12} \left( \frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2} + 4x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{1}{x_1^2 x_2^2} - x_2^2 \right),$$
$$g := -1 - \frac{x_2}{4} \left( x_2^2 - x_1^2 - \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \right) + \frac{x_2}{12} \left( \frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2} + 4x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{1}{x_1^2 x_2^2} - x_2^2 \right).$$

It should be noted that the system (1) corresponds to the generalized Wallach space  $SO(6)/(SO(2))^3$  and can be obtained from the system (5) studied in [1] (for more detailed information relating this problem see [1-4] and references therein).

$(x_1, x_2)$  is said to be a *linear zero degenerate singular point* if  $f = g = 0$  and  $J = 0$  at this point, where  $J = J(x_1, x_2)$  is the Jacobian matrix of (1).

**Theorem 1.** (Theorem 2 in [1]). The system (1) has the unique degenerate singular point  $(1, 1)$  of linear zero type with six hyperbolic sectors around it.

**Reconstruction of separatrices.** Using the transformation of variables  $x_1 := x + 1$ ,  $x_2 := y + 1$  we can equivalently reduce (1) to a convenient system with singularity at  $(0, 0)$ :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g_1(x, y). \quad (2)$$

Since the following Taylor series hold (in a small neighborhood of  $(0, 0)$ )

$$f_1(x, y) := y^2 + xy - \frac{1}{2}x^2 + o(\|(x, y)\|^2), \quad g_1(x, y) := x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + o(\|(x, y)\|^2)$$

then separatrices of (2) can be approximately found from the „short“ system

$$\frac{dx}{dt} = y^2 + xy - \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 \quad (3)$$

having (in a sufficiently small neighborhood of  $(0, 0)$ ) the same phase portrait as well as (2) as the calculations show (see left hand side of Fig. 1).

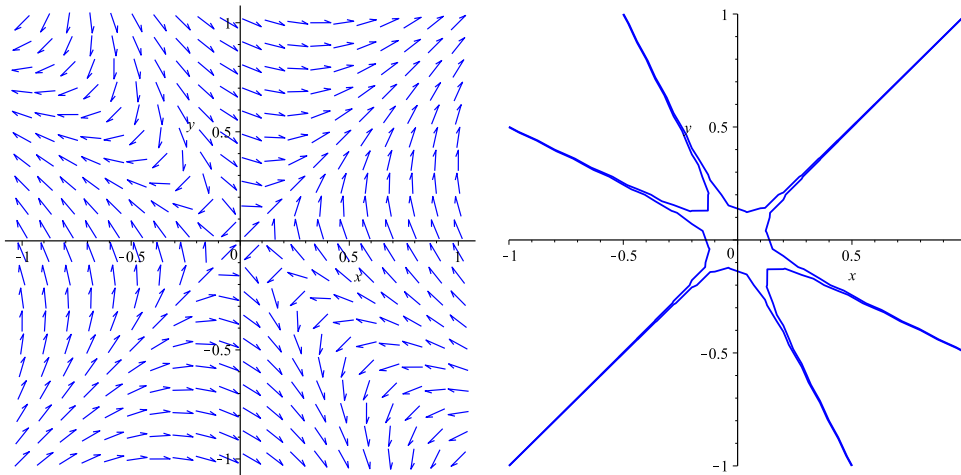


Figure 1: For the systems (2) and (3): the phase portrait in a neighborhood of  $(0, 0)$  (left hand side); separatrices corresponding to  $C = 0.005$  (right hand side)

Using blowing-up  $y = xw$  we can reduce (3) to the system

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^2(-1 + 2w + 2w^2), \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2}x(w - 1)(2w + 1)(w + 2) \quad (4)$$

having a first integral  $x^3(w - 1)(2w + 1)(w + 2) = C$ , where  $C$  is an arbitrary real number. It is easy to check that (4) has saddle points  $(0, -2)$ ,  $(0, -1/2)$  and  $(0, 1)$  all corresponding to  $(0, 0)$  (the phase portrait and separatrices of (4) are depicted in Fig. 2).

Now we can get the first integral of (3):  $(y - x)(2y + x)(y + 2x) = C$ . It is clear that the last equation defines curves which separate trajectories of (3) belonging to different sectors around  $(0, 0)$  (see Fig. 1).

**Acknowledgements.** This research was supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015-2017 (Agreement № 299, February 12, 2015).

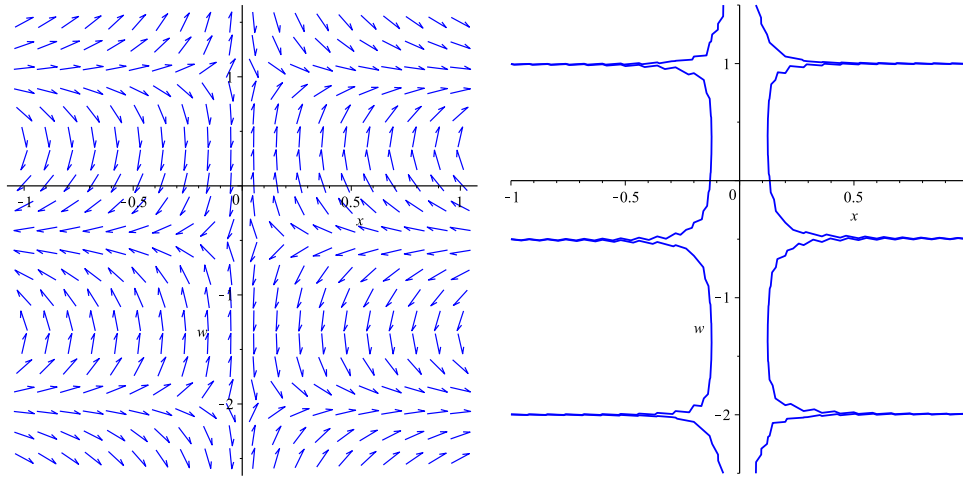


Figure 2: For the system (4): the phase portrait (left hand side); separatrices corresponding to  $C = 0.008$  (right hand side)

### References

1. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.* The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // *Differential Geometry and its Applications*. – 2014. – V. 35 (Supplement). – P. 26-43.
2. *Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G., Firsov E. V.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // *Siberian Advances in Mathematics*. – 2004. – V. 14, № 3. – P. 43-62.
3. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // *Siberian Mathematical Journal*. – 2000. – V. 41, № 1. – P. 168-172.
4. *Topping P.* Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series. – V. 325. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 133 p.

UDC 517.956

Akzhigitov E.A.,<sup>1</sup> Assanova A.T.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*S.Seifullin Kazakh Agro Technical University, Kazakhstan, Astana*

<sup>2</sup>*Institute of mathematics and mathematical modeling, Kazakhstan, Almaty*

e-mail: <sup>1</sup>akzhigitov@inbox.ru, <sup>2</sup>anarasanova@list.ru

### On the solvability of a nonlocal problem with integral conditions for system of partial differential equations of the special form

We consider the following nonlocal boundary value problem on  $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$  with integral conditions for a second order system of partial differential equations of the special form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = C(t, x)u + f(t, x), \quad (1)$$

$$\int_0^a u(t, x) dx = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\int_0^b u(t, x) dt = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

where  $u(t, x) = \text{col}(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$  is unknown function, the  $(n \times n)$  matrix  $C(t, x)$  is continuous differentiable on  $\bar{\Omega}$ ,  $n$ -vector function  $f(t, x)$  is continuous on  $\bar{\Omega}$ ,  $0 < a \leq \omega$ ,  $0 < b \leq T$ ,  $n$ -vector functions  $\varphi(x)$  and  $\psi(t)$  are continuously differentiable on  $[0, \omega]$ ,  $[0, T]$ , respectively; also satisfies to relation  $\int_0^b \psi(t) dt = \int_0^a \varphi(x) dx$ .

In the communication are investigated the questions of existence and uniqueness of the classical solution of the problem (1)– (3). Method of introduction additional functional parameters [1] is applied for the solving to problem (1) – (3). The algorithm is offered of findings of approximate solution studying problem also it is proved its convergence. Coefficient conditions of classical solvability to problem (1) – (3) are established.

### References

1. *Asanova A. T. and Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *J. of Math. Anal. and Appl.* – 2013. – V.402. – Pp. 167-178.

UDC 517.927

Assanova A.T.,<sup>1</sup> Imanchiev A.E.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute of mathematics and mathematical modeling, Kazakhstan, Almaty*

<sup>2</sup> *K.Zhubanov Aktobe regional state university, Kazakhstan, Aktobe*

e-mail:<sup>1</sup>anarasanova@list.ru, <sup>2</sup>imanchiev\_ae@mail.ru

## On the solvability of a multi-point boundary value problem for a differential equation third order

We consider the following multi-point boundary value problem for a third order differential equation

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = A_1(t) \frac{d^2 z}{dt^2} + A_2(t) \frac{dz}{dt} + A_3(t) z + f(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^m \left\{ \alpha_{i1} \frac{d^2 z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i1} \frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i1} z(t_i) \right\} = d_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^m \left\{ \alpha_{i2} \frac{d^2 z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i2} \frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i2} z(t_i) \right\} = d_2, \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^m \left\{ \alpha_{i3} \frac{d^2 z(t_i)}{dt^2} + \beta_{i3} \frac{dz(t_i)}{dt} + \gamma_{i3} z(t_i) \right\} = d_3, \quad (4)$$

where functions  $A_j(t)$ ,  $f(t)$  are continuous on  $[0, T]$ ,  $j = 1, 2, 3$ , and  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}$ ,  $d_k$  are constants,  $i = \overline{0, m}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_m = T$ .

A function  $z(t) \in C([0, T], R)$  having derivatives  $\frac{dz(t)}{dt} \in C([0, T], R)$ ,  $\frac{d^2z(t)}{dt^2} \in C([0, T], R)$ ,  $\frac{d^3z(t)}{dt^3} \in C((0, T), R)$ , is called a solution to problem (1)–(4) if it satisfies differential equation (1) for all  $t \in (0, T)$  and meets the multi-point boundary conditions (2)–(4).

The multi-point boundary value problems for differential equation of higher order arise in the mathematical modeling of various processes in physics, chemistry, biology, medicine, etc.. In connection with many applications, for example, in the theory of bending of beams, in the transport of goods, of most interest are the multi-point boundary value problems for differential equations of third order with variable coefficients [1-3]. Special cases of problem (1)–(4) seen in the works of many authors. To find conditions for the existence of solutions of multi-point boundary value problems of type (1)–(4) used the method of fixed points, the method of upper and lower solutions, monotone iterative method, etc [4-6]. Despite that the large number of papers devoted to multi-point boundary value problems for ordinary differential equations of higher order with variable coefficients, many questions are remain. Primarily, this is the issues of availability of effective signs of the solvability of the investigated problem, the study of qualitative properties of solutions, methods of constructing solutions, etc. The aforementioned issues can be achieved by developing constructive research methods multi-point boundary value problems for linear and nonlinear ordinary differential equations of high orders, and creation of algorithms for finding their solutions.

The present report is devoted to investigate of the existence unique solution of the multi-point boundary value problem for ordinary differential equation of third order (1)–(4) and ways of its solving. For this purpose we is used the parameterization method [7]. Earlier in the works [8,9] the method was applied to multi-point boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the linear multi-point boundary value problem are established, the existence of an isolated solution of a multi-point boundary value problem for nonlinear equations is proved. The results of this work demonstrate of the effective applicability of the parameterization method for studied multi-point boundary value problem for the differential equation of third order with variable coefficients and complement the results of [8]. The sufficient conditions of solvability to problem (1)–(4) are established in the terms of the coefficients of the differential equation  $A_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , and the date of boundary conditions  $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \gamma_{jk}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Algorithms of finding approximate solutions to problem (1)–(4) are constructed and is proved their convergence to the exact solution of considering multi-point problem for differential equation third order. The results of this report will be used for the study of nonlocal multi-point boundary value problems for partial differential equations of third order [10].

## References

1. *Samoilenko A. M., Ronto N.I.* Numerical-analytic methods of investigation of solutions of boundary value problems. – Kyiv: Naukova Dumka, 1985. – 224 p. [in Russian]
2. *Kiguradze I.T.* Boundary value problems for systems of ordinary differential equations // Modern problems of mathematics. Advancement achievements. – M.: Nauka, 1987. – Vol. 30. – P. 3-103. [in Russian]

3. *Samoilenko A. M., Laptinskii V. N., Kenzhebayev K. K.* Constructive methods of investigation of periodic and multipoint boundary value problems // Proceedings of Institute of mathematics of NAS of Ukraine. – Kiev: Institute of mathematics of NAS of Ukraine, 1999. – Vol. 29. – 220 p. [in Russian]
4. *Liu B., Yu J.* Solvability of multi-point boundary value problems at resonance (II) // Appl. Math. Comput. – 2002. – V. 129, № 1. – P. 119-143.
5. *Lin X., Du Z.* Uniqueness and existence results for a third-order nonlinear multipoint boundary value problem // Appl. Math. Comput. – 2008. – V. 205, № 1. – P. 187-196.
6. *Xie S., Li P., Gao Z., Wang H.* High order compact finite difference schemes for a system of third order boundary value problem // Appl. Math. Comput. – 2012. – V. 219, № 12. – P. 2564-2573.
7. *Dzhumabayev D.S.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational mathematics and mathematical Physics. – 1989. – V. 29, № 1. – P. 34-46.
8. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* Well-posedness of linear multi-point boundary value problem // Mathematical journal. – 2005. – V. 5, № 1. – P. 30-38. [in Russian]
9. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* Criteria of existence isolated solution of multipoint boundary value problem for system of ordinary differential equations // Izvestiya NAN RK. – 2010. – № 3. – P. 117-121. [in Russian]
10. *Asanova A.T.* About of the solvability of family multi-point boundary value problems for system of differential equations and their applications to nonlocal boundary value problems // Mathematical journal. – 2013. – V. 13, № 3. – P. 38-42. [in Russian]

UDC 517.97

Danilov V.Y.,<sup>1</sup> Kravets V.I.,<sup>2</sup> Marchuk N.A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Taras Shevchenko National University, Ukraine, Kyiv*

<sup>2</sup>*Tavrisheskiy State Agrotechnology University, Ukraine, Melitopol*

<sup>3</sup>*Podolski State Agricultural and Technical University, Ukraine, Melitopol*

e-mail: <sup>1</sup>danilov\_vy@ukr.net, <sup>2</sup>v\_i\_kravets@list.ru, <sup>3</sup>nata.marchuk2205@gmail.com

## Optimal control of linear and nonlinear stochastic systems with quadratic on control cost functional

We consider linear and nonlinear stochastic optimal control problems with linear quadratic functional. For such problems, by the method of dynamic programming, we



prove the existence of optimal control in the form of feedback control. We have linear and nonlinear stochastic equations with quadratic cost functional respectively:

$$\begin{aligned} dx &= [A(t)x + B(t)u] dt + [C(t)x + D(t)u] dw(t), \\ x(0) &= y, \\ I(y, u) &= E \langle Kx(T), x(T) \rangle + \\ &+ E \int_0^T [\langle N(t)u(t), u(t) \rangle + \langle R(t)x(t), x(t) \rangle] dt \longrightarrow \inf, \end{aligned} \tag{1}$$

here,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $w(t)$  is a one-dimensional Wiener process,  $A, B, C, D, N$ , and  $R$  are continuous matrices,  $A, C, K$ , and  $R$  are  $n \times n$  matrices,  $B$  and  $D$  are  $n \times m$  matrices,  $N$  is an  $m \times m$  matrix,  $K$  and  $R(t)$  are symmetric nonnegative matrices,  $N(t)$  is a positive definite matrix, and nonlinear case:

$$\begin{aligned} dx &= [f(x) + B(x)u] dt + g(x) dw(t) + \varepsilon D(x) u dw_1(t), \\ x(0) &= y, \\ I(y, u) &= E\varphi(x(\tau)) + \\ &+ E \int_0^\tau [\psi(x(t)) + \langle N(x(t))u(t), u(t) \rangle] dt \longrightarrow \inf. \end{aligned} \tag{2}$$

here  $x \in Q$ ,  $Q$  is a bounded domain with smooth boundary,  $\varepsilon$  is a small parameter,  $y \in Q$ ,  $\tau$  is the time of the first exit from  $Q$ .  $w_1(t)$ ,  $w(t)$  are a one-dimensional and an  $n$ -dimensional Wiener process respectively.  $\langle \cdot \rangle$  is an inner product in  $R^n$ . We give the sufficient conditions of solved these problems. UDC 517.983.248

Kalmenov T.Sh., Kassymov A.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: kalmenov.t@mail.ru, kassymov.aidyn@gmail.com*

### **An isoperimetric inequality of $s_1$ for the inverse to the Cauchy-Robin heat operator**

The eigenvalues of the Laplacian with Robin boundary conditions are called the eigenvalues of the elastically supported membrane. We will denote them by  $0 < \nu_1(\alpha, \Omega) \leq \nu_2(\alpha, \Omega) \leq \nu_3(\alpha, \Omega) \leq \dots$  where  $\alpha$  is a parameter,  $0 < \alpha < 1$  (the cases  $\alpha = 0$  or  $\alpha = 1$  correspond to Neumann or Dirichlet boundary conditions) or possibly a function. The corresponding system is

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \nu(\alpha, \Omega)u, \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\alpha}{1-\alpha}u &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Theorem 1. (Bossel-Daners).** *The ball minimizes the first eigenvalue of the Robin problem among open sets with a given volume (for every value of  $\alpha \in (0, 1]$ .)*

Let us recall that a  $s$ -number of a compact operator  $A$  is an eigenvalue of the positive operator  $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ , where  $A^*$  is an adjoint operator to operator  $A$ .

Consider

$$L_{\Omega}u := \begin{cases} \diamond u := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(t, x), & (t, x) \in ((0, T) \times \Omega) \equiv D, \\ u(0, x) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\alpha}{1-\alpha}u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

**Theorem 2.** *Let  $\Omega^*$  be a  $d$ -ball. We have*

$$s_1^R(\Omega) \leq s_1^R(\Omega^*)$$

for all bounded open domains  $\Omega$ , with  $|\Omega| = |\Omega^*|$ . Here  $s_1(\Omega)$  is the first  $s$ -number of the inverse operator  $L_{\Omega}^{-1}$ .

Here  $|\Omega|$  denotes the Lebesgue measure of the set  $\Omega$ .

**Remark 1.** In other words theorem says that the  $L_2$  norm of the operator  $L_{\Omega}^{-1}$  is maximized in a  $d$ -ball among the all domains of a given measure.

### References

1. *I. Gohberg, M. Krein.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. – Moscow: Nauka, 1965.
2. *A. Henrot.* On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain. – Basel-Boston-Berlin.: Birkhauser Verlag, 2006.
3. *T. Sh. Kal'menov, N. E. Tokmagambetov.* On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain. // Sibirsk. Mat. Zh. – 2013. – Vol. 54, Ъ 6. – Pp. 1287-1293.

UDC 517.956

Kalmenov T.Sh., Oralsyn G.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: suragan@list.ru*

## Constructing correct nonlocal boundary value problems for elliptic differential equations with variable coefficients

Let  $\Omega \subset R^d$  be an open bounded domain with a sufficiently smooth boundary  $\partial\Omega$ . We consider the second order uniformly strongly elliptic equation

$$D(u) = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

The functions  $a_{ij}, b_j$  and  $c$  are real-valued functions which, for convenience, are supposed to be  $C^\infty$ -functions.

**Definition 1.** The second order real-valued scalar linear differential operator  $D$  is called strongly elliptic in  $\Omega$  if there exists a smooth function  $\gamma(x) > 0$  such that

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \gamma(x) |\xi|^2 \quad (2)$$

for all  $\xi \in R^d$ . If, in addition,  $\gamma > 0$  is a constant independent of  $x$  and (2) holds for all  $x \in \Omega$ , then  $D$  is called uniformly strongly elliptic.

Note that strongly elliptic real differential operators are of even order and are properly elliptic.

**Definition 2.** Let  $x \in R^d$  be any chosen point. Then the distribution  $E(x, y)$  is called a fundamental solution of the differential operator  $D$  (in  $R^d$ ) if it satisfies the equation

$$D_y(E(x, y)) = \delta(x - y) \quad (3)$$

in the distributional sense where  $\delta$  is the Dirac distribution.

As usual, in (3) the notation  $D_y$  stands for differentiation with respect to  $y$ . For strongly elliptic operators it can be shown with the Green formula that (3) implies

$$D_x(E(x, y)) = \delta(x - y) \quad (4)$$

for any fixed  $y \in R^d$ .

For a general differential operator, the existence of a fundamental solution is by no means trivial. However, we have

**Lemma 1.** (*Hörmander*) Let  $D$  be a uniformly strongly elliptic differential operator of even order with real leading coefficients  $a_{ij} \in C^\infty$ . Then for every compact domain  $\bar{\Omega} \subset R^d$  with  $\partial\Omega \in C^\infty$  there exists a local fundamental solution  $E(x, y)$  which is a  $C^\infty$  function of all variables for  $x \neq y$  and  $x, y \in \bar{\Omega}$ .

In this talk by using properties of fundamental solutions we construct a correct boundary value problem for the differential equation (1).

### References

1. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On spectral problems for the volume potential // Dokl. Akad. Nauk. – 2009. – V. 428, № 1. – Pp. 16-19.

Mogilova V.V.

*National Technic University**(Ukraine, Kyiv)**e-mail: mogilova@gmail.com***Exponential dichotomy for discrete linear systems**

Let  $\mathbb{Z}_+$  be a nonnegative integer numbers. We consider the discrete linear systems

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = A_n x_n. \quad (1)$$

Here  $A_n$  is bounded matrix on  $\mathbb{Z}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Definition 1.** System (1) is called exponentially dichotomous on the  $\mathbb{Z}_+$  if the space  $\mathbb{R}^d$  can be represented as a direct sum of two subspaces,  $R^-$  and  $R^+$ , such that an arbitrary solution  $x_n(x_0)$  of system (1) such that  $x_0 \in R^-$  satisfies

$$|x_n(x_0)| \leq K \exp\{-\gamma(n - n_0)\} |x_{n_0}(x_0)| \quad (2)$$

for  $n \geq n_0 \geq 0$ , and an arbitrary solution  $x_n(x_0)$  of system (1) such that  $x_0 \in R^+$  satisfies the inequality

$$|x_n(x_0)| \geq K_1 \exp\{\gamma_1(n - n_0)\} |x_{n_0}(x_0)| \quad (3)$$

for  $n \geq n_0 \geq 0$  and arbitrary  $n_0 \geq 0$ , where  $K, K_1, \gamma, \gamma_1$  are some positive constants independent of  $n_0, x_0$ .

Together with system (1), consider the following system of linear nonhomogeneous equations:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = A_n x_n + f_n, \quad (4)$$

here  $f_n$  is bounded function on  $\mathbb{Z}_+$ .

**Theorem 1.** *System (1) is exponentially dichotomous on  $\mathbb{Z}_+$  if and only if the system (4) has bounded solution  $\mathbb{Z}_+$  for an arbitrary bounded  $f_n$ .*

Oralsyn G.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: g.oralsyn@list.ru*

## **An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient for the heat equation from an integral condition**

Parameter identification from over-specified data plays an important role in applied mathematics, physics, and engineering. The problem of identifying the diffusivity was investigated by many researchers under various boundary and over-determination conditions (see, for example [1]-[2]). In the rectangle  $\Omega = (x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T$ , we consider the inverse problem given by the heat equation

$$u_t(x, t) = k(t)u_{xx}(x, t) \quad (1)$$

with unknown concentration/temperature  $u(x, t)$  and unknown time-dependent diffusivity  $k(t) > 0$ , subject to the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

where  $\varphi$  is a given function, the Samarsky-Ionkin type heat flux boundary condition

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), u(0, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where  $\alpha$  is any positive number and the over-determination integral condition

$$\int_0^1 |x|u(x, t)dx = E(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

where  $E(t)$  is a given function. It is important to note that in [2], the time-dependent diffusion coefficient has been determined from an integral over-determined conditions in the case of self-adjoint auxiliary spectral problems with periodic boundary conditions. In the present talk, we solve above inverse problem and determine explicitly concentration/temperature  $u(x, t)$  and time-dependent diffusivity  $k(t)$ .

### **References**

1. *Kerimov N.B., Ismailov M.I.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2009. – V. 396, № 2. – P. 546-554.
2. *Hussein M.S., Lesnic D., Ismailov M.I.* An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* – 2015. – V. 396, № 2. – P. 546-554.

Stanzhytskyi O.M., Lavrova O.E.

*Taras Shevchenko National University  
(Ukraine, Kyiv)*

*e-mail: ostsanzh@gmail.com, lavrova\_olia@mail.ru*

### **Pontryagin maximum principle for dynamic systems on time scales**

Let  $T$  – be a time scale, that is, an arbitrary closed subset of  $\mathbf{R}$ . We consider the control optimal problem for dynamic systems on time scale

$$\begin{aligned}\Phi_0(x(t_0), x(t_1)) &\rightarrow \inf, \\ x^\Delta &= f(t, x, u(t)), t \in [t_0, t_1]_T, \\ \Phi_i(x(t_0), x(t_1)) &= 0, i = 1, \dots, k \\ \Phi_i(x(t_0), x(t_1)) &\leq 0, i = k + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Here  $x \in D$  – domain in  $\mathbb{R}^d$ ,  $u \in U$  – convex set in  $\mathbb{R}^m$ . The functions  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_u$  are defined for  $t \in [t_0, t_1]_T$ ,  $x \in D$ ,  $u \in U$ , and are continuous for their arguments. The functions  $\Phi_i$  are defined in some domain  $W \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  and are smoothness for their arguments. We derived a strong version of the Pontryagin Maximum Principle for this problem.

UDC 517.95

Suleimenov Zh.

*Al-Farabi Kazakh National University  
(Almaty, Kazakhstan)*

*e-mail: zh\_suleimenov@mail.ru*

### **On the existence and stability of quasi-periodic solutions of a quasilinear system of differential equations**

Take quasi-linear system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon f(t, x) \tag{1}$$

where  $x = colon(x_1, x_2)$ ,  $A = (a_{jk})$ ,  $j = k = 1, 2$ ,  $f(t, x) = colon(f_1(t, x_1, x_2), f_2(t, x_1, x_2))$  conditionally-periodic by  $t$  with frequency basis  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ; analytical by  $t$  and  $x$  in the domain  $D = \{(t, x) \in C^3 : \|x\| \leq h, \|Im\omega t\| \leq q\}$  function,  $\det|A - \lambda E| = 0$  has purely imaginary roots  $i\sigma_1, i\sigma_2$ , and rational numbers  $\sigma_1, \sigma_2$  non-co-measurable with  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ,  $\varepsilon$  is a small parameter.

Let  $S$  be a matrix, making the matrix  $A$  to Jordan form:

$$J = \begin{pmatrix} \sigma_1 i & 0 \\ 0 & \sigma_1 i \end{pmatrix}.$$

With conversion  $x = Sy$  of the system (1) reduces to the form

$$\frac{dy}{dt} = Jx + S^{-1}\varepsilon f(t, Sy) \quad (2)$$

Without loss of generality, can assume that the system (1) has the form (2), i.e.  $A$  has the form:  $J := \text{diag}(\sigma_1 i, \sigma_2 i)$ .

In order to find a conditionally-periodic solutions of 1 the method of accelerated convergence [1] is applied. As an initial approximate conditionally-periodic solutions of the system (1)  $x^{(0)}(t, \varepsilon) = 0 := \text{colon}(0, 0)$  is chosen. Its residual denoted by  $x^{(1)}(t, \varepsilon)$  and take this function as a first approximation to the original conditionally-periodic solutions of the system (1). Then the system relatively to  $x^{(1)}(t, \varepsilon)$  will look like:

$$\frac{dx^{(1)}(t, \varepsilon)}{dt} = (J + \varepsilon P^{(0)}(t))x^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon \chi^{(1)}(t, x^{(0)}),$$

where

$$P^{(0)}(t) := f'_x(t, 0) := \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{(t,0)}, j, k = 1, 2; \chi^1(t, x^{(0)}) := f(t, 0).$$

Amendment to  $x^{(1)}(t, \varepsilon)$  denote as  $y^{(1)}(t, \varepsilon) = \text{colon}(y_1^{(1)}(t, \varepsilon), y_2^{(1)}(t, \varepsilon))$ . Then it has the system:

$$\frac{dy^{(1)}(t, \varepsilon)}{dt} = (J + \varepsilon f'_x(t, x^{(1)})y^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon Y^{(1)}(t, x^{(1)})) \quad (3)$$

where

$$Y^{(1)}(t, x^{(1)}) := f(t, x^{(1)}) - f(t, 0) - f'_x(t, 0)x^{(1)}.$$

The second approximation is determined by the formula  $x^{(2)}(t, \varepsilon) := x^{(1)}(t, \varepsilon) + y^{(1)}(t, \varepsilon)$ , and the amendment is denoted by  $y^{(2)}(t, \varepsilon)$ , etc. Then to determine  $x^{(j)}(t, \varepsilon) := \text{colon}(x_1^{(j)}(t, \varepsilon), x_2^{(j)}(t, \varepsilon))$  and  $y^{(j)}(t, \varepsilon) := \text{colon}(y_1^{(j)}(t, \varepsilon), y_2^{(j)}(t, \varepsilon))$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , the following system of equations is obtained

$$\frac{dx^{(j)}(t, \varepsilon)}{dt} = (J + \varepsilon P^{(j-1)}(t))x^{(j)} + \varepsilon \chi^{(j)}(t, x^{(j-1)}) \quad (4)$$

$$\frac{dy^{(j)}(t, \varepsilon)}{dt} = (J + \varepsilon P^{(j)}(t))y^{(j)} + \varepsilon Y^{(j)}(t, x^{(j-1)}, y^{(j-1)}), \quad (5)$$

where  $P^{(j-1)}, \chi^{(j)}, Y^{(j)}, j = 2, 3, \dots$  - are defined similarly to  $P^{(0)}, \chi^{(1)}, Y^{(1)}$ .

The systems (4) and (5) have the same structure and are linear non-homogeneous

systems of the form

$$\frac{dz}{dt} = (J + \varepsilon P(t))z + \varepsilon q(t) \quad (6)$$

where  $J = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $P(t) = (p_{jk}(t))$ ,  $j, k = 1, 2$ ;  $q(t) := \text{colon}(q_1(t), q_2(t))$ .

Matrix  $P(t)$  and vector-function  $q(t)$  are considered to be analytical and conditionally periodic by  $t$  with frequency basis  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Let  $B = (b^1, b^2) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  be a constant, and  $R(t) = (r^1(t), r^2(t))$  is purely conditionally-periodic parts of the matrix  $P(t)$ , satisfying the equation  $P(t) = B + R(t)$ . Denote  $T(t) := \int R(t)dt$  and let  $TR = RT$ ,  $BT = TB$ . Making a replacement in the equation (6) with  $z = e^{\varepsilon T(t)}\vartheta$ , have

$$\frac{d\vartheta}{dt} = (J + \varepsilon B)\vartheta + \varepsilon g(t), \quad (7)$$

where  $g(t) := \exp(-\varepsilon T(t))q(t)$ ,  $g(t) := \text{colon}(g_1(t), g_2(t))$ .

Let  $g(t)$  be the following

$$g(t) = \sum_{\|k\| \geq 0} C^k \exp(i(k, \omega)t), \quad (8)$$

where  $k := (k_1, \dots, k_n)$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\|k\| := |k_1| + \dots + |k_n|$ ,  $C^k := \text{colon}(C_1^k, C_2^k)$ ,  $k\omega := k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n$ .

Conditionally-periodic solution of the system (7) is defined by the same form of series

$$\vartheta(t, \varepsilon) = \sum_{\|k\| \geq 0} d^k \exp(i(k, \omega)t), \quad (9)$$

where  $d^k = \text{colon}(d_1^k, d_2^k)$  - undetermined coefficients.

Let  $k_{n+1} := -1, \omega_{n+1} := \sigma_1, k_{n+2} := -1, \omega_{n+2} := \sigma_2$ ,  $k^* := (k_1, \dots, k_{n+2}), \omega^* := (\omega_1, \dots, \omega_{n+2}), (k^*, \omega^*) := k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n + k_{n+2}\omega_{n+2}$ .

Then for most of the frequencies (meaning Lebeaga)  $\{\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+2}\} \subset Q^*$  and for integers  $k_1, \dots, k_{n+2}$  the following estimation is true:

$$|(k^*, \omega^*)| \geq K(\|k\| + 2)^{-(n+2)}, \quad (10)$$

where  $K > 0$  is some fixed number smaller than 1.

Return to equations (4) and (5). Let in equation (2) matrix  $P^{(0)} := f'_x(t, 0)$  has a form:

$$P^{(0)}(t) = B^{(0)} + iC^{(0)} + R^{(0)}(t), B^{(0)} := (b_{lm}), C^{(0)} := (c_{lm}), l, m = 1, 2;$$

where  $R^{(0)}(t)$  - pure conditionally-periodic part of matrix  $P^{(0)}(t)$ . Then

$$\|x^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{\varepsilon M}{\sqrt{2}\delta_2^{2n+1}}(1 + Q_1)\exp(2\varepsilon N_0 Q \delta_1^{-2n}),$$



where  $N_0 := \|R^{(0)}(t)\|_0$ . If  $x^{(1)}(t, \varepsilon)$  stays in the domain  $D$ , then  $f(t, x^{(1)})$  and  $Y^{(1)}(t, x^{(1)})$  also will be analytical by  $t$  and  $x^{(1)}$ . If  $N_1 := \|R^{(1)}(t)\|$ ,  $R^{(1)}(t)$  is the pure conditionally-periodic part of matrix  $P^{(1)}(t)$ , then

$$\|y^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{\varepsilon M_2}{\sqrt{2}\delta_4^{2n+1}}(1 + Q_1)\exp(2\varepsilon N_1 Q \delta_3^{-2n}).$$

For  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n+1}, \omega_{n+2})$ ,  $\omega_{n+i} := \sigma_i + \varepsilon(c_{11}^{(i)} + c_{22}^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ , satisfying the inequality (8), where  $c_{lm}^{(i)}$  from the following expansion

$$P^{(1)}(t) = B^{(1)} + iC^{(1)} + R^{(1)}(t), B^{(1)} := (b_{lm}^{(1)}), C^{(1)} := (c_{lm}^{(1)}), R^{(1)} := (r_{lm}^{(1)}), l, m = 1, 2.$$

Similar estimation is obtained for  $y^{(j)}(t, \varepsilon)$ ,  $j \geq 2$ .

Solution of the system (1) is the sum of the series

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} y^{(j)}(t, \varepsilon). \quad (11)$$

Which uniformly converges on the real axis  $t$  to the conditionally-periodic solution of the system (1).

### References

1. *N. Bogolyubov, Y. Mitropolsky, A. Samoilenko.* The method of accelerated convergence in nonlinear mechanics. – Kiev: Naukova Dumka, 1969.

UDC 517.956

Suragan D.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: suragan@list.ru*

## A boundary condition of the Newton potential on Heisenberg groups

This talk is based on the papers [1] and [2]. In a bounded domain of the Euclidean space  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , it is very well known that the solution to the Laplacian equation

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

is given by the Green formula (or the Newton potential formula)

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y)f(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

for suitable functions  $f$  supported in  $\Omega$ . Here  $\varepsilon_d$  is the fundamental solution to  $\Delta$  in  $\mathbb{R}^d$  given by

$$\varepsilon_d(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{(2-d)s_d} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}, & d \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log|x-y|, & d = 2, \end{cases} \quad (3)$$

where  $s_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  is the surface area of the unit sphere in  $\mathbb{R}^d$ .

An interesting question having several important applications is what boundary conditions can be put on  $u$  on the (smooth) boundary  $\partial\Omega$  so that equation (1) complemented by this boundary condition would have the solution in  $\Omega$  still given by the same formula (2), with the same kernel  $\varepsilon_d$  given by (3). It turns out that the answer to this question is the integral boundary condition

$$-\frac{1}{2}u(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4)$$

where  $\frac{\partial}{\partial n_y}$  denotes the outer normal derivative at a point  $y$  on  $\partial\Omega$ . A converse question to the one above would be to determine the trace of the Newton potential (2) on the boundary surface  $\partial\Omega$ , and one can use the potential theory to show that it has to be given by (3).

In this talk we are interested in and we give answers to the following questions:

- What happens if an elliptic operator (the Laplacian) in (1) is replaced by a hypoelliptic operator? We will realise this as a model of replacing the Euclidean space by the Heisenberg group and the Laplacian on  $\mathbb{R}^d$  by a sub-Laplacian (or the Kohn-Laplacian) on  $\mathbb{H}_{n-1}$ . We will show that the boundary condition (3) is replaced by the similar integral boundary condition on Heisenberg groups.
- Since the theory of boundary value problems for elliptic operators is well understood, we know that the single condition (3) on the boundary  $\partial\Omega$  of a bounded domain  $\Omega$  guarantees the unique solvability of the equation (1) in  $\Omega$ . Is this uniqueness preserved in the hypoelliptic model as well for a suitably chosen replacement of the boundary condition (3)? The case of the second order operators is favourable from this point of view due to the validity of the maximum principle.
- What happens if we consider the above questions for higher order equations? In general, it is known that for higher order Rockland operators on stratified groups, fundamental solutions may be not unique. However, for powers of the Kohn Laplacian we still have the uniqueness provided that we impose higher order boundary conditions in a suitable way.

## References

1. *Kal'menov T.Sh., Suragan D.* On spectral problems for the volume potential // Dokl. Akad. Nauk. – 2009. – V. 428, № 1. – P. 16-19.
2. *Ruzhansky M., Suragan D.* On Kac's principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group // to appear in Proceedings of the American Mathematical Society. – 2015.

Tungatarov A.

*Al-Farabi Kazakh National University**(Almaty, Kazakhstan)**e-mail: tun-mat@list.ru*

### Cauchy Problem for some nonlinear system of second order ordinary differential equations

In this work the general solution of some linear system of second order ordinary differential equations with variable coefficients is found and Cauchy Problem for this system is solved.

Let  $t_1 > 0$ . We consider the system

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= f(t)u - g(t)v + h(t, u, v), \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= g(t)u + f(t)v + q(t, u, v) \end{aligned} \quad (1)$$

in the interval  $[0, t_1]$  where  $f(t), g(t) \in C[0, t_1]$  and the functions  $h(t, u, v), q(t, u, v)$  are continuous in the set of variables in the domain

$G = \{(t, u, v) : 0 < t < \delta, |u - \alpha| < \sigma_1, |v - \beta| < \sigma_2\}$ . Here  $u(0) = \alpha, v(0) = \beta; \delta, \alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2$  are real numbers so that  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, 0 < \delta < t_1$ .

The general solution of system first order ordinary differential equations with variable coefficients and the solutions of Cauchy Problem for it given in [1]. Let us consider the Cauchy Problem:

Find the solution of system (1) from the class  $C^2[0, t_1]$  satisfying the conditions

$$u(0) = \alpha_1, v(0) = \beta_1, u'(0) = \alpha_2, v'(0) = \beta_2,$$

where  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  are given real numbers,  $u'(t) = \frac{du}{dt}, v'(t) = \frac{dv}{dt}$ .

#### References

1. *Tungatarov A.* Cauchy Problem for a First Order Ordinary Differential System with Variable Coefficients. Current Trends in Analysis and its Applications // Proceedings of the 9 ISAAC Congress. – Krakow, 2013. – P. 109-115.

## 2 Теория функций и функциональный анализ

УДК 517.5

Абылаева А.М., Кабиден А.Д.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана,  
Казахстан

abylayeva\_b@mail.ru<sup>1</sup>, assemkabiden@gmail.com<sup>2</sup>

### Весовые оценки оператора типа Хольмгрена в весовых пространствах Лебега

Пусть  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$  и  $u, v, w$  - весовые функций, т.е. неотрицательные, измеримые на  $I = (0, +\infty)$ . Положим  $W(x) = \int_0^x w(s)ds$ .

Рассмотрим вопрос об ограниченности из  $L_p$  в  $L_q$  интегрального оператора

$$K_{\alpha,\beta}f(x) = v(x) \int_0^x \frac{w^\beta(s)u(s)f(s)}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} ds, \quad x \in I, \quad (1)$$

где  $L_p$  - пространства всех измеримых на  $I$  функции таких, что

$$\|f\|_p = \left( \int_0^\infty |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Если  $w^\beta(s) = 1$ ,  $W(x) = x$  тогда оператор (1) представляет собой дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля [1].

А также рассмотрим следующий сопряженный оператор к оператору (1)

$$K_{\alpha,\beta}^*g(x) = u(x)w^\beta(x) \int_x^\infty \frac{v(s)g(s)}{(W(s) - W(x))^{1-\alpha}} ds.$$

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ . Пусть  $k = 0$  или  $k = 1$ . Обозначим

$$I_k^0(s) := \int_s^\infty \frac{v^q(x)}{(W(x) - kW(s))^{q(1-\alpha)}} dx$$

и положим

$$E_0 := \sup_{s>0} (I_1^0(s)(I_0^0)^{-1}(s))^{\frac{1}{q}}, \quad E_1 := \sup_{s>0} (I_1^1(s)(I_0^1)^{-1}(s))^{\frac{1}{p'}},$$

а) Если  $1 < p \leq q < \infty$ , то оператор  $K_{\alpha,\beta} : L_p \rightarrow L_q$  ограничен тогда и только тогда, когда  $A < \infty$ , причем

$$A \ll \|K_{\alpha,\beta}\|_{L_p \rightarrow L_q} \ll E_0 A,$$

где

$$A := \sup_{t>0} \left( \int_t^\infty v^q(x) W^{q(\alpha-1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^t u^{p'}(x) w^{\beta p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}};$$

б) Если  $1 < q < p < \infty$ , то оператор  $K_{\alpha,\beta} : L_p \rightarrow L_q$  ограничен тогда и только тогда, когда  $B < \infty$ , причем

$$B \ll \|K_{\alpha,\beta}\|_{L_p \rightarrow L_q} \ll E_1 B,$$

где

$$B := \left( \int_0^\infty \left[ \left( \int_0^t u^{p'}(x) w^{\beta p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \int_t^\infty v^q(x) W^{q(\alpha-1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \right]^s * \right. \\ \left. * u^{p'}(y) w^{\beta p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{s}}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ . Пусть  $k = 0$  или  $k = 1$ . Обозначим

$$I_k^1(s) := \int_s^\infty \frac{u^{p'}(x) w^{\beta p'}}{(W(s) - kW(x))^{q(1-\alpha)}} dx$$

и положим

$$E_0 := \sup_{s>0} (I_1^0(s)(I_0^0)^{-1}(s))^{\frac{1}{q}}, \quad E_1 := \sup_{s>0} (I_1^1(s)(I_0^1)^{-1}(s))^{\frac{1}{p'}},$$

а) Если  $1 < p \leq q < \infty$ , то оператор  $K_{\alpha,\beta}^* : L_{q'} \rightarrow L_{p'}$  ограничен тогда и только тогда, когда  $A < \infty$ , причем

$$A \ll \|K_{\alpha,\beta}^*\|_{L_{q'} \rightarrow L_{p'}} \ll E_0 A;$$

б) Если  $1 < q < p < \infty$ , то оператор  $K_{\alpha,\beta}^* : L_{q'} \rightarrow L_{p'}$  ограничен тогда и только тогда, когда  $B^* < \infty$ , причем

$$B^* \ll \|K_{\alpha,\beta}^*\|_{L_{q'} \rightarrow L_{p'}} \ll E_1 B^*,$$

где

$$B^* := \left( \int_0^\infty \left[ \left( \int_0^t u^{p'}(x) w^{\beta p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_t^\infty v^q(x) W^{q(\alpha-1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \right]^s * \right. \\ \left. * v^q(y) W^{q(\alpha-1)}(y) dy \right)^{\frac{1}{s}}.$$

## Литература

1. Раутиан Н.А. Об ограниченности одного класса интегральных операторов дробного типа. // Математический сборник. - 2009. - Т. 200, № 12. - С. 81-106.

Айсагалиев С.А.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан  
 Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

## К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Предлагается новый метод исследования разрешимости и построения решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Получены необходимые и достаточные условия существования решения и разработан метод построения общего решения на основе представления исходного интегрального уравнения в виде системы вспомогательных интегральных уравнений. Для вспомогательных интегральных уравнений найдены условия разрешимости и построены их общие решения.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [t_0, t_1] = I, \quad (1)$$

где  $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – известная матрица порядка  $n \times m$ , функции  $K_{ij}(t, \tau)$  измеримы и принадлежат классу  $L_2$  на множестве  $S_1 = \{(t, \tau) \in R^2 / t_0 \leq t \leq t_1, a \leq \tau \leq b\}$ ,

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty,$$

функция  $f(t) \in L_2(I, R^n)$  – заданная,  $u(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ ,  $I_1 = [a, b]$  – искомая функция, величины  $t_0, t_1, a, b$  – фиксированы,  $K : L_2(I_1, R^m) \rightarrow L_2(I, R^n)$ .

**Задача 1.** Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (1) для любой функции  $f(t) \in L_2(I, R^n)$ .

**Задача 2.** Найти общее решение интегрального уравнения (1) для любого  $f(t) \in L_2(I, R^n)$ .

Для решения указанных задач, необходимо исследования разрешимости и построения решения вспомогательных интегральных уравнений:

$$K_1 v = \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau = \mu(t), \quad t \in [t_0, t_1] = I, \quad (2)$$

$$K_2 w = \int_a^b K(t_*, \tau)w(\tau)d\tau = \beta, \quad t_* \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Интегральное уравнение (3) следует из (2) при фиксированном  $t = t_* \in [t_0, t_1]$ ,  $K(t_*, \tau) = K(\tau)$ ,  $\tau \in I_1$ ,  $K_1 : L_2(S_1, R^m) \rightarrow L_2(I, R^n)$ ,  $K_3 : L_2(I_1, R^m) \rightarrow R^n$ .

**Задача 3.** Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (2) для любой функции  $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ .

**Задача 4.** Найти общее решение интегрального уравнения (2), при любом  $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ .

**Задача 5.** Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (2) при любом  $\beta \in R^n$ .

**Задача 6.** Найти общее решения интегрального уравнения (3) при любом  $\beta \in R^n$ .

Основными результатами являются: необходимые и достаточные условия разрешимости вспомогательных интегральных уравнений (2), (3); методы построения общих решений вспомогательных интегральных уравнений; сведения матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1) к счетной системе вспомогательных интегральных уравнений вида (3); получение необходимого и достаточного условия существования решения интегрального уравнения (1) на основе свойств решения уравнения (3);

**Теорема 1.** *Интегральное уравнение (2) имеет решение при любом  $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$  тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t) = \int_a^b K(t, \tau) K^*(t, \tau) d\tau \quad t \in I \quad (4)$$

порядка  $n \times n$  является положительно определенной для любого  $t \in I$ , где  $(*)$  – знак транспонирования.

**Теорема 2.** *Пусть матрица  $C(t)$ ,  $\forall t, t \in I$  определяемая по формуле (4) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения при любом  $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$  (2) имеет вид*

$$v(t, \tau) = K^*(t, \tau) C^{-1}(t) \mu(t) + \gamma(t, \tau) - \\ - K^*(t, \tau) C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau) \gamma(t, \tau) d\tau, \quad t \in I, \tau \in I_1, \quad (5)$$

где  $\gamma(t, \tau) \in L_2(S_1, R^m)$  – произвольная функция.

**Теорема 3.** *Интегральное уравнение (3) при любом  $\beta \in R^n$  имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C = \int_a^b K(t) K^*(t) dt \quad (6)$$

порядка  $n \times n$  является положительно определенной для любого  $a, b, b > a$  – заданные числа.

**Теорема 4.** *Пусть матрица  $C$  из (6) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (3) при любом  $\beta \in R^n$  имеет вид*

$$w(\tau) = K^*(\tau) C^{-1} \beta + p(\tau) - K^*(\tau) C^{-1} \int_a^b K(\tau) p(\tau) d\tau, \quad \tau \in I_1 = [a, b], \quad (7)$$

где  $p(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$  – произвольная функция.

Пусть  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $t \in I$  – полная ортонормированная система в  $L_2$ . Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\int_a^b L(\tau)u(\tau)d\tau = \bar{a}.$$

**Теорема 5.** *Интегральное уравнение (1) при любом  $f(t) \in L_2(I, R^n)$  имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C_{\infty} = \int_a^b L(\tau)L^*(\tau)d\tau \quad (8)$$

*является положительно определенной.*

**Теорема 6.** *Пусть матрица  $C_{\infty}$  из (8) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (1) при любом  $f(t) \in L_2(I, R^n)$  имеет вид*

$$u(\tau) = L^*(\tau)C_{\infty}^{-1}\bar{a} + p_{\infty}(\tau) - L^*(\tau)C_{\infty}^{-1} \int_a^b L(\tau)p_{\infty}(\tau)d\tau, \quad \tau \in I_1, \quad (9)$$

где  $p(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$  – произвольная функция.

Условие  $C(t) > 0$ ,  $t \in I$ ,  $C > 0$ ,  $C_{\infty} > 0$  (положительно определенные) являются более жесткими условиями на ядра соответствующих интегральных уравнений, гарантирующих существование решения для любой правой части. Аналогом этих условий является существование обратной матрицы  $A^{-1}$  для линейного алгебраического уравнения  $Ax = b$  гарантирующая существование решения для любого  $b \in R^n$ .

Алгебраическое уравнение  $Ax = b$  может иметь решение и случае, когда не существует обратная матрица ( $\text{rang}A = \text{rang}(A, B)$ ), однако не для любого вектора  $b \in R^n$ . Иными словами, если матрица  $C$  не является положительно определенной, то интегральное уравнение (3) может иметь решение, однако не для любого вектора  $\beta \in R^n$ . Аналогичные утверждения верны и для других интегральных уравнений.

### Литература

1. Айсагалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. —1991. —Т. 27, № 9. —С. 1475–1486.



Акишев Г.

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Караганды,  
Казахстан  
akishev@ksu.kz

### Об оценках билинейной аппроксимации классов в пространстве со смешанной нормой

Пусть  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  – множество натуральных чисел. Через  $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$  обозначим пространство измеримых по Лебегу функций  $f(\bar{x})$  определенных на  $\mathbb{R}^m$ , имеющих  $2\pi$  – период по каждой переменной для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \dots \left[ \int_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dx_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  (см [1], стр. 128, [2], стр. 54).

$l_{\bar{p}}$  – пространство числовых последовательностей со смешанной нормой.

Пусть даны векторы  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $1 < p_j < +\infty$ ,  $1 \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Рассматривается класс Никольского - Бесова - Аманова (см. [2])

$$S_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B = \left\{ f \in \mathring{L}_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m) : \|f\|_{B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}} = \|f\|_{\bar{p}} + \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\}.$$

Здесь и в дальнейшем  $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}$ , где  $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$ ,  $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$ ,  $a_{\bar{n}}(f)$  – коэффициенты Фурье функции  $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$  по кратной тригонометрической системе  $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$ .

Пусть  $q^{(1)} = (q_1^{(1)}, \dots, q_m^{(1)})$ ,  $q^{(2)} = (q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)})$ ,  $\bar{q} = (q^{(1)}, q^{(2)})$ .  $L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^{2m})$  – пространство  $2\pi$  – периодических функций  $f(\bar{x}, \bar{y})$  на  $\mathbb{T}^{2m}$  с конечной нормой  $\|f\|_{\bar{q}} = \| \|f(\cdot, \bar{y})\|_{q^{(1)}} \|_{q^{(2)}}$ , где норма вычисляется сначала в пространстве  $L_{q^{(1)}}(\mathbb{T}^m)$  по переменной  $\bar{x} \in \mathbb{T}^m$ , а затем от результата по переменной  $\bar{y} \in \mathbb{T}^m$  в пространстве  $L_{q^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ . Для функции  $f \in L_{\bar{q}}(\mathbb{T}^{2m})$  определим наилучшее билинейное приближение порядка  $M \in \mathbb{N}$ :

$$\tau_M(f)_{\bar{q}} = \inf_{u_j(\bar{x}), v_j(\bar{y})} \|f(\bar{x}, \bar{y}) - \sum_{j=1}^M u_j(\bar{x}) v_j(\bar{y})\|_{\bar{q}},$$

где  $u_j \in L_{q^{(1)}}(\mathbb{T}^m)$ ,  $v_j \in L_{q^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ .

Первый результат о наилучших билинейных приближениях был получен Э. Шмидтом в 1907 году для приближений по норме  $L_2$ . Оценкам порядка величин  $\tau_M(F)_p$  в случае когда  $F$  класс Соболева  $W_p^r$  или Никольского  $H_p^r$  посвящены статьи В.Н. Темлякова, Э.С. Белинского, М. Бабаева, К.Т. Мынбаева и других авторов

(см. библиографию в [3],[4]). Точные порядки наилучшего билинейного приближения класса Никольского – Бесова – Аманова  $S_{p,\theta}^r B$  установили В.Н. Темляков [3], [4], А.С. Романюк [5].

В докладе будут представлены оценки величин  $\tau_M(S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}} = \sup_{f \in S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B} \tau_M(f)_{\bar{q}}$  в предположении того, что  $f \in S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ , а билинейные приближения  $\tau_M(f)_{\bar{q}}$  рассматриваются для функции вида  $f(\bar{x} - \bar{y})$ ,  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{T}^m$ .

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p_j \leq 2 < q_j^{(1)} < +\infty$ ,  $1 \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $0 < r_1 + \frac{1}{q_1^{(1)}} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu^{(1)}} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}^{(1)}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq \dots \leq r_m + \frac{1}{q_m^{(1)}} - \frac{1}{p_m}$ .

Тогда

1. Если  $r_j = \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, \mu \geq \nu$  и  $r_j > \frac{1}{p_j}$ ,  $j = \mu + 1, \dots, m$ , то

$$\tau_M(S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}^{(1)},\infty} \leq CM^{-\frac{1}{2}}(\log(M+1))^{\sum_{j=1}^{\mu}(1-\frac{1}{\theta_j})}.$$

2. Если  $r_j > \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$\tau_M(S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}^{(1)},\infty} \leq CM^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log(M+1))^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+}.$$

3. Если  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^{(1)}} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $q_j^{(1)} < \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_1^{(1)}} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1^{(1)}}$ ,  $j = \nu + 1, \dots, m$ , то

$$\tau_M(S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}^{(1)},\infty} \leq CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1^{(1)}}-\frac{1}{p_1})}(\log(M+1))^{q_1^{(1)}(r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}(1-\frac{1}{q_j^{(1)}})+\sum_{j=2}^{\nu}(1-\frac{1}{\theta_j})}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $1 < p_j \leq 2 \leq q_j^{(1)} < +\infty$ ,  $1 \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $1 \leq q_j^{(2)} \leq +\infty$ ,  $r_j > \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Тогда справедливо соотношение

$$\tau_M(S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}} \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log(M+1))^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $2 \leq p_j < q_j^{(1)} < +\infty$ ,  $1 \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $1 \leq q_j^{(2)} \leq +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $r_1 > \frac{1}{2}$ . Тогда справедливо соотношение

$$\tau_M(S_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}} \asymp M^{-r_1}(\log(M+1))^{(\nu-1)r_1+\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+}.$$

## Литература

1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. — 456 с.
2. Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата: Наука, 1976. — 224 с.

3. Темляков В.Н. Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Труды мат. инст. АН СССР. — 1988. — Т. 181 — С. 250–267.
4. Темляков В.Н. Билинейная аппроксимация и приложения // Труды мат. инст. АН СССР. — 1989. — Т. 187 — С. 191–215.
5. Романюк А.С. Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова  $B_{p,\theta}^r$  периодических функций многих переменных // Известия РАН, серия матем. — 2006. — Т. 70, №2. — С. 69–98.

УДК 517.5

Аскарлов А.А.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*  
*kanbalta@mail.ru*

### **Обобщение формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши с непрерывной ограниченной плотностью по действительной оси**

В работе [1] показано, что для интеграла типа Коши по замкнутому гладкому контуру с непрерывной плотностью при определенных условиях имеет место формула Сохоцкого.

Докажем, что и для интеграла типа Коши, взятому по действительной оси, с непрерывной ограниченной плотностью в комплексной плоскости при некоторых условиях также имеет место формула Сохоцкого.

Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad (1)$$

где  $z = x + iy$  — точка в комплексной плоскости.

Докажем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\Phi^+(z) - \Phi^-(\bar{z})] = \varphi(x) \quad (2)$$

Рассмотрим разность:

$$\Phi^+(z) - \Phi^-(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t - \bar{z}},$$

где  $z = x + iy$ ;  $\bar{z} = x - iy$ .

$$\Phi^+(z) - \Phi^-(\bar{z}) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{(t - x)^2 + y^2}$$

Обозначим

$$f^*(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{(t - x)^2 + y^2} \quad (3)$$

Известно, что  $\frac{y}{\pi[(t-x)^2+y^2]}$  является дельта-образной последовательностью, т.е.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y}{\pi[(t-x)^2+y^2]}, \varphi(t) \right) = (\delta(t-x), \varphi(t)) = \varphi(x).$$

Значит,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f^*(x, y) = \varphi(x) \quad (4)$$

Таким образом, доказана формула (2) при условии, что точки верхней и нижней полуплоскостей, находящиеся на равных расстояниях от точки  $x$  действительной оси, стремятся к ней по одной прямой.

Нетрудно проверить, что функция  $f^*(x, y)$  является решением задачи Дирихле уравнения Лапласа для полуплоскости.

### Литература

1. *Мухомелишвили Н.И.* "Сингулярные интегральные уравнения". - Москва: Гос.издательство физ.-мат. литературы, 1962.

УДК 517.5

Бимендина А.У., Токмагамбетов Н.С.

*Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда,  
Казахстан  
bimend@mail.ru*

### Преобразования ряда Фурье-Прайса

Пусть  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ ,  $x \in [0, 1]$  – система Прайса [1] и  $L_{p\theta}([0, 1])$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $1 \leq \theta \leq +\infty$  пространство Лоренца[2].

Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x)$  называется рядом Фурье-Прайса функции  $f(x)$ , где коэффициенты  $a_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx$ .

Введем обозначения  $\Delta_0 a_n = a_n$ ,  $\Delta_k a_n = \Delta_{k-1} a_n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Для числовой последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$  определим разность первого порядка  $\Delta_1 a_n = a_n - a_{n+1}$ , второго порядка  $\Delta_2 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}$  и  $k$ -го порядка  $\Delta_k a_n = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j a_{n+j}$ , где  $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ .

Пусть  $D_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi_\nu(x)$  ядро Дирихле и  $D_{n+1}^{(1)}(x) = \sum_{\nu=0}^n \varphi_\nu(x)$ ,  $D_{n+1}^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^n D_{\nu+1}^{(k-1)}(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда для  $D_{n+1}^{(k)}(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  выполняются следующие утверждений:

- 1)  $|D_{n+1}^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{k!} (n+1)^k$ ;
- 2)  $\|D_{n+1}^{(k)}\|_{p\theta} \leq c_{p\theta k} (n+1)^{k-\frac{1}{p}}$ ;

$$3) \int_0^1 D_{n+1}^{(k)}(x) dx \leq c_k (n+1)^{k-1}.$$

**Теорема.** Пусть  $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$  коэффициенты Фурье Прайса функции  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x)$ , а  $\Delta_k a_n = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j a_{n+j}$  и  $D_{n+1}^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^n D_{\nu+1}^{(k-1)}(x)$ . Тогда функцию  $f$  можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_k a_n D_{n+1}^{(k)}(x), k \in \mathbb{N}.$$

**Теорема.** Пусть для последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$  разность  $k$ -го порядка  $\Delta_k a_n \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Если при некотором  $p, \theta: 1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$  ряд

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{k\theta - \frac{\theta}{p} - 1} (\Delta_{k-1} a_\nu)^\theta < +\infty (\Delta_0 a_\nu = a_\nu, \forall k \in \mathbb{N})$$

сходится, то функция  $f \in L_{p\theta}[0, 1], 1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$ .

### Литература

1. Голубов Б.И., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. - М: Наука, 1987. - 300 с.
2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. - М: Мир, 1974. - 332 с.

УДК 517.518

Бокаев Н.А.<sup>1</sup> Сыздыкова А.Т.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

<sup>2</sup> Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, Павлодар, Казахстан

bokayev2011@yandex.ru<sup>1</sup>, aizhan-syzdykova@yandex.ru<sup>2</sup>

### О взаимосвязи двух классов функций, определенных рядами по системе Хаара

Пусть

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0, 1],$$

– система Хаара, определяемая следующим образом (см., например, [1]). Для  $n = 2^k + i, k = 0, 1, \dots, i = 1, 2, \dots$ , положим  $\chi_1(x) \equiv 1$ , а функции  $\chi_n(x)$  для  $2^k < n \leq 2^{k+1}$  определяются так

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right], \\ 2^{k/2}, & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right), \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right). \end{cases}$$

Значения  $\chi_n(x)$  в точках разрыва и на концах отрезка  $[0, 1]$  выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\chi_n(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} [\chi_n(x + \delta) + \chi_n(x - \delta)], \quad x \in (0, 1),$$

$$\chi_n(0) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \chi_n(\delta), \quad \chi_n(1) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \chi_n(1 - \delta).$$

Через  $L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$  будем обозначать пространство измеримых функций, для которых

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через  $\alpha(x)$  обозначим некоторую функцию, которая измерима и неотрицательна на  $[0, 1]$  и суммируема на  $[\delta, 1]$  для любого положительного  $\delta < 1$ . Обозначим также

$$\beta(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \alpha(t) dt, \quad \mu(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \alpha(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Через  $E_n(f)_p$  обозначим наилучшее приближение функции  $f$  в метрике  $L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , полиномами по системе Хаара порядка  $n$ , т.е.

$$E_n(f)_p = \inf_{k \leq n} \|f(x) - H_k(x)\|_p,$$

где  $H_k(x) = \sum_i^k a_i \chi_i(x)$  – полином по системе Хаара порядка  $k$ .

А также обозначим

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n a_k(f) \chi_k(x)$$

– частичную сумму ряда Фурье–Хаара.

Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq \theta < \infty$ . Через  $B_{p,\theta}(\alpha)$  обозначим класс функций  $f \in L^p[0, 1]$ , для которых

$$I_{p,\theta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{\nu}^{\theta}(f)_p < \infty.$$

Через  $W_{p,\theta}(\alpha)$  – класс функций  $f \in L^p[0, 1]$ , имеющих ряд Фурье–Хаара

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \chi_n(x),$$

для которых ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \beta^{\frac{1}{\theta}}(n) a_n(f) \chi_n(x)$$

есть ряд Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ .

В случае тригонометрической системы аналогичные классы функций рассматривались М. К. Потаповым [2], [3]. При  $\alpha(t) = t^{-\theta r - 1}$  класс  $B_{p,\theta}(\alpha)$

соответствует классическому пространству Бесова  $B_{p,\theta}^r$ . В случае мультипликативной системы такие классы функций изучались С. С. Волосивецем [4], Р. Н. Фадеевым [5]. В указанных работах классы  $B_{p,\theta}(\alpha)$  определялись с помощью модуля гладкости [2], [3] и модуля непрерывности [4], [5].

Далее через  $C(p, \theta)$ ,  $C_1(p), \dots$  обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от фиксированных параметров  $\theta$  и  $p$  и, вообще говоря, разные в различных формулах. Выражение  $K \asymp T$  будет означать, что существуют положительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  такие, что  $C_1 K \leq T \leq C_2 K$ .

В следующих теоремах устанавливается взаимосвязь между указанными классами функций при различных  $\theta$ .

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\theta = \min(p, 2)$ , тогда  $B_{p,\theta}(\alpha) \subset W_{p,\theta}(\alpha)$ .

Другими словами, если  $f \in B_{p,\theta}(\alpha)$ , то ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=2}^{\infty} \beta^{\frac{1}{\theta}}(n) a_n(f) \chi_n(x)$$

есть ряд Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ . Кроме того, справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_p \leq C(p, \theta) I_{p,\theta}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\theta = \max(p, 2)$ , тогда  $W_{p,\theta}(\alpha) \subset B_{p,\theta}(\alpha)$ . Кроме того, справедливо неравенство

$$I_{p,\theta} = C(p, \theta) \|\varphi\|_p.$$

Отметим, что для случая тригонометрической системы, подобные теоремы доказаны М. К. Потаповым [2]. Но в работе [2] при установлении взаимосвязи соответствующих классов на функцию  $\alpha(t)$  накладывались дополнительные  $\sigma$ ,  $(\sigma, \tau)$  условия. А в приведенных теоремах 1 и 2 такие условия отсутствуют, что отражает специфику рассматриваемых классов, связанных с системой Хаара.

При доказательствах приведенных теорем используются следующие утверждения.

**Лемма 1. А)** Пусть функция  $f \in L^p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$  имеет ряд Фурье–Хаара

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \chi_n(x),$$

тогда существуют константы  $C_p$ ,  $C'_p$  такие, что имеют место неравенства:

$$C_p \left\| \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(f) \chi_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \chi_n(x) \right\|_p \leq C'_p \left\| \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(f) \chi_n^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

**В)** Пусть ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x),$$

удовлетворяет условию

$$J_p = \left( \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) \right|^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

тогда этот ряд является рядом Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ , при этом, имеет место оценка

$$\|\varphi\|_p \leq C(p)J_p.$$

**Следствие 1.** Пусть  $f \in L^p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $0 < r < \infty$ , тогда

1) при  $1 < p \leq 2$ , если  $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu pr} E_{2\nu}^p(f)_p < \infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^r a_n(f) \chi_n(x)$  является рядом Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ .

2) при  $2 \leq p < \infty$ , если  $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{2\nu r} E_{2\nu}^2(f)_p < \infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^r a_n(f) \chi_n(x)$  является рядом Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ .

**Следствие 2.** Пусть  $f \in L^p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $0 < r < \infty$ , тогда

1) при  $1 < p \leq 2$ , если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^r a_n(f) \chi_n(x)$  является рядом Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ , то  $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{2\nu r} E_{2\nu}^2(f)_p < \infty$ .

2) при  $2 \leq p < \infty$ , если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^r a_n(f) \chi_n(x)$  является рядом Фурье–Хаара некоторой функции  $\varphi \in L^p[0, 1]$ , то  $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu pr} E_{2\nu}^p(f)_p < \infty$ .

#### Литература

1. *Кашиш Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. Изд. 2-е. доп. – М. : Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с.
2. *Потапов М. К.* О взаимосвязи некоторых классов функций // Мат. заметки. –1967. –Т. 2. №4. – С. 361–372.
3. *Потапов М. К.* О вложении и совпадении некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. –1969. –Т. 33, №4. – С. 840–860.
4. *Volosivets S. S.* Fourier–Vilenkin series and analogs of Besov and Sobolev classes // Annales. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. –2010. – Vol. 33. – P. 343–363.
5. *Фадеев Р. Н.* Необходимые и достаточные условия принадлежности классам Бесова–Потапова и коэффициенты Фурье по мультипликативным системам // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, №4. – С. 41–48.



Даркенбаева Г.С.

Институт математики и математического моделирования,  
Алматы, КазахстанМеждународный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан  
КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан  
g.spandiyar@gmail.com**Регрессий с медленно меняющимися регрессорами**

Введем для начала основные определения и предположения.

Определение 1. Положительная функция  $L$  на  $[A, \infty)$  называется медленно меняющейся, если для любого  $r > 0$  выполнено  $\frac{L(rx)}{L(x)} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$ .Определение 2. Будем говорить, что  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ , если(а) Функция  $L$  является медленно меняющейся и имеет представление Карамата, т.е. $L(x) = c * \exp\left(\int_B^x \frac{\varepsilon(s)}{s} ds\right)$  для  $x \geq B$  для некоторого  $B$ , а также  $c > 0$ ,  $\varepsilon$  непрерывная и  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .(б) Функция  $|\varepsilon|$  медленно меняющаяся.(с) Существует функция памяти  $\psi_\varepsilon$  на  $[0, \infty)$  которая удовлетворяет следующим условиям:-  $\psi_\varepsilon$  положительная, неубывающая на  $[0, \infty)$ ,  $\psi_\varepsilon(x) \rightarrow \infty$ , и существуют положительные числа  $\theta$  и  $X$  такие, что  $x^{-\theta}\psi_\varepsilon(x)$  невозрастающая на  $[X, \infty)$ ;- существует константа  $C$  такая, что  $\frac{1}{C\psi_\varepsilon(x)} \leq |\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\psi_\varepsilon(x)}$ .Предположение 1.  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon)$  и  $\varepsilon = K(\eta, \psi_\eta)$ .Предположение 2. Процесс  $u_t$  обладает единичным корнем с гипотезой  $\rho = 1$  в регрессии  $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ , где  $v_t$  из [1](стр.102, 3.5.1).

В работе рассматриваются регрессии следующего вида

$$y_t = \alpha + \beta L(t) + u_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

где регрессор  $L(t)$  является медленно меняющейся и удовлетворяющий Предположению 1, а ошибки  $u_t$  удовлетворяют Предположению 3.Для этой регрессионной модели находятся МНК-оценки, предельные распределения для параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при помощи метода Мынбаева [2]. Проводится статистика на значимость коэффициентов.**Литература**

1. *Mynbaev K.T.* Short-Memory Linear Processes and Econometric Applications. - Wiley, 2009.
2. *Mynbaev K.T.* Comment on regression with Slowly Varying regressors and nonlinear trends, 2007.
3. *Phillips C.B. Peters* Regression with Slowly Varying regressors and nonlinear trends // *Econometric Theory.* — 2007. — V.23.

Кусаинова Л.К.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана,  
Казахстан  
leili2006@mail.ru

## Оценки $s$ -чисел одномерных дифференциальных операторов

В работе рассмотрен оператор

$$Ly = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\rho_k(x) y^{(k)})^{(k)}, \quad x \geq 0,$$

с комплекснозначными непрерывными на  $I = [0, \infty)$  коэффициентами  $\rho_k = u_k + i\delta_k$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). Область определения  $D(L) \subset W_{2,\rho}^n$ . Здесь приняты следующие обозначения: для системы функций  $w = \{w_j\}_{j=0}^{n-1}$  положим  $w^+ = (w_j^+)_{j=0}^{n-1}$ ,  $w^- = (w_j^-)_{j=0}^{n-1}$  ( $w_j^+ = \max(w_j, 0)$ ,  $w_j^- = \max(-w_j, 0)$ ),  $u + v = (u_j + v_j)_{j=0}^{n-1}$ ;  $W_{2,\rho}^n$  - пополнение класса  $C_0^\infty(I)$  бесконечно дифференцируемых и финитных в  $I$  функций по норме

$$\|y\|_{W_{2,\rho}^n} = \left[ \int_0^\infty \left( |y^{(n)}|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + v_k)^+(x) |y^{(k)}|^2 \right) dx \right]^{1/2}.$$

В работе получены оценки распределения  $\mathcal{N}_s(\lambda; L) = \sum_{s_j(L) < \lambda} 1$   $s$ -чисел оператора

$L$ . Если  $L$  имеет ограниченный обратный оператор  $L^{-1}$ , то по определению  $j$ -е  $s$ -число оператора  $L$   $s_j(L) = 1/s_j(L^{-1})$ ,  $s_j(L^{-1}) = \lambda_j \left( \sqrt{L^{-1}(L^{-1})^*} \right)$ . Пусть  $w = (w_j)_{j=0}^{n-1}$  - кортеж неотрицательных локально суммируемых в  $I$  функций. Положим

$$S(x, h; w) = \sum_{k=0}^{n-1} h^{-2k-1} \int_x^{x+h} w_k(t) dt \quad (x \geq 0, h > 0),$$

$$h(x) = \inf_{h>0} \{ h^{-2n} : h^{2n} S(x, h; (u+v)^+) \leq 1 \}.$$

Легко увидеть, что  $h(x) < \infty$  ( $x \geq 0$ ). В случае  $0 < h(x)$  имеет место равенство

$$h(x)^{-1} S(x, h(x)^{-1/2n}; (u+v)^+) = 1$$

(см. [1]). Обозначим через  $\mathfrak{R}_{x,h}$  множество всех полиномов  $R(\cdot)$  степени  $\leq n-1$ , для которых

$$\int_x^{x+h} |R(t)|^2 dt = 1 \quad (x \geq 0, h > 0).$$

Поскольку  $R(t) = h^{-1/2} \in \mathfrak{R}_{x,h}$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x, h; (u+v)^+) &= \inf_{R \in \mathfrak{R}_{x,h}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^{x+h} |R^{(k)}|^2 (u_k + v_k)^+(t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (u_0 + v_0)^+(t) dt \leq S(x, h; (u+v)^+). \end{aligned}$$

Если выполнены условия:

Q)  $\inf_{x \geq 0} h(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ ;

Q2) существует такое  $\eta$ ,  $0 < \eta < 1$ , что для всех  $x \geq 0$

$$\eta S(x, h(x)^{-1/2n}; (u+v)^+) \leq \tilde{S}(x, h(x)^{-1/2n}; (u+v)^+),$$

то  $W_{2,\rho}^n$  компактно вложено в  $L_2(I)$ , а оператор  $L$  обратим.

**Теорема.** Пусть выполнены условия Q1), Q2). Тогда существуют абсолютные постоянные  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$  такие, что если

$$h(x)^{-1} S(x, h(x)^{-1/2n}; (u+v)^-) \leq \frac{\eta}{24(n+1)^2 b_n} \quad (x \geq 0),$$

то имеет место оценка

$$\mathcal{N}_s(\lambda; L) \leq c_1 \lambda^{1/2n} \text{mes} \{x \geq 0 : h(x) \leq c_2 \lambda\},$$

где

$$c_1 = 2^{3/4n} a_n (1 - \eta)^{1/2n}, \quad c_2 = 2^{9/2} (n+1)^2 \eta^{-2n-1}.$$

К примеру, для оператора

$$Ly = -y'' + (p(x) + ir(x))y \quad (1)$$

условие Q2) выполнено, так как

$$\tilde{S}(x, h; (p+r)^+) = S(x, h; (p+r)^+) \quad (x \geq 0, h > 0).$$

Условие Q1) выполняется, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+h} (p+r)^+(t) dt = \infty \quad (h > 0).$$

Ранее оценки  $\mathcal{N}_s(\lambda; L)$  для оператора  $L$  в (1) были получены в [2] для  $p \geq 1$ ,  $r \geq 0$ .

### Литература

1. *Отелбаев М., Кусаинова Л., Булабаев А.* Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2009. — Т. 6, № 1. - С. 165–190.
2. *Отелбаев М.* Оценки  $s$ -чисел и условия полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля // Мат. заметки. — 1979. — Т. 25, № 3. — С. 409–418.

Ойнаров Р.

*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана,  
Казахстан*

*o\_ryskul@mail.ru, oinarov\_r@enu.kz*

## Интегральные операторы в функциональных пространствах

Пусть  $I = (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  и  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  - неотрицательные локально суммируемые на  $I$  функции. Рассмотрим интегральный оператор

$$\mathcal{K}f(x) = \int_a^x K(x, s)f(s)ds, \quad x \in I \quad (1)$$

с неотрицательным измеримым ядром  $K(\cdot, \cdot)$ . Одной из открытых проблем в теории интегральных операторов является нахождение в терминах ядра необходимых и достаточных условий ограниченности оператора  $\mathcal{K}$  из  $L_p(I)$  в  $L_q(I)$  при  $1 < p, q < \infty$  и значения нормы  $\|\mathcal{K}\|_{p \rightarrow q}$ .

Даже в простом случае  $K(x, s) = u(x)v(s)$  ограниченность оператора  $\mathcal{K}$  из  $L_p(I)$  в  $L_q(I)$  (так называемое весовое неравенство Харди) исследована многими авторами и когда функции  $u$ ,  $v$  не степенные, первый критерий ограниченности  $\mathcal{K}$  при  $p = q$  был получен в 1969 году. К 2000 году критерий ограниченности был установлен при всех значениях параметров  $0 < q < \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  и итоги этих исследований даны в [1].

Однако значения нормы  $\|\mathcal{K}\|_{p \rightarrow q}$  получены точные по порядку. Точные значения нормы  $\|\mathcal{K}\|_{p \rightarrow q}$  получены (см.[1], стр.23,26) лишь в случаях:

$$(i). a = 0, b = \infty, K(x, s) = x^{\alpha-p} s^{-\frac{\alpha}{p}}, \alpha < p - 1, q = p > 1;$$

$$(ii). a = 0, b = \infty, K(x, s) = x^{-\frac{q}{p'}-1}, 1 < p \leq q < \infty;$$

$$(iii). a = 1, b = 1, K(x, s) \equiv 1, 1 < p, q < \infty.$$

(i)–Hardy(1928), (ii)–Bliss(1930), (iii)–Howart-Schep(1990).

Приведённые результаты описывают круг проблем, касающихся исследования операторов типа  $\mathcal{K}$  в функциональных пространствах.

В работе [2], когда  $a = 0$ ,  $b = \infty$ ,  $K(x, s) = \frac{w(x)}{x+\omega}v(s)$  и функций  $w$ ,  $v$  являются периодическими с периодом  $\omega$  получены точные значения  $\|\mathcal{K}\|_{p \rightarrow q}$  в терминах функций  $w$  и  $v$ .

В [3] рассматривается вырожденный случай  $K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(s)$ ,  $n > 1$ , где измеримые функции  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  не обязательно знакопостоянные.

В случае  $K(x, s) = u(x)v(s)$  оператор  $\mathcal{K}$  рассматривается [4] из  $L_p(I)$  в локальном пространстве Морри  $LM_{r,q}(I)$ .

Проблема ограниченности многих известных операторов дробного интегрирования в весовых пространствах Лебега решена в работах [5,6], где

рассмотрен оператор  $\mathcal{K}$  с ядром  $K(x, s) = u(x)K_0(x, s)v(s)$ , а функция  $K_0(x, s)$  удовлетворяет условию:  $\exists D > 1$  и при  $b > x \geq t \geq s > a$  выполняется неравенство

$$: \frac{1}{D} \left( K_0(x, t) + K_0(t, s) \right) \leq K_0(x, s) \leq D \left( K_0(x, t) + K_0(t, s) \right). \quad (2)$$

В настоящее время имеется достаточно много работ, посвящённых оператору  $\mathcal{K}$  с условием (2).

В работах [7,8] исследованы расширяющие классы  $\mathcal{O}_n^\pm \subset \mathcal{O}_{n+1}^\pm$ ,  $n \geq 0$  операторов вида (1) и вида

$$\widehat{\mathcal{K}}f(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} K(x, s)f(s)ds, \quad x \in I, \quad (3)$$

где  $\psi(x) > \varphi(x)$ ,  $x \in I$  и обе возрастающие.

Отметим, что классы замкнуты относительно операции суперпозиции.

Пусть  $W_{p,r}^1(v, u; I)$  совокупность локально абсолютно непрерывных на  $I$  функций  $f$  с конечной нормой  $\|f\|_{W_p^1} = \|vf'\|_p + \|uf\|_r$ . Для  $g \in \left( W_p^1(v, u; I) \right)^*$  и  $g \geq 0$  в терминах функций  $v, u$  найдено эквивалентное выражение величины  $\|g\|_{(W_p^1)^*}$ .

На основе этого результата и результатов по оператору (3) получены [9,10] критерии ограниченности, компактности оператора  $K \in \mathcal{O}_n^\pm$  из  $W_{p,p}^1(v, u; I)$  в  $W_{p,r}^1(\tilde{v}, \tilde{u}; I)$ .

### Литература

1. Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results. - Pilsen: Vydavatelsky Servis Publishing House, 2007. -162 p.
2. Ойнаров Р. Осцилляторность полулинейного дифференциального уравнения второго порядка и весовое неравенство Харди // Математический журнал. — 2012. —Т. 12. -№ 3. —С. 134–139
3. Kufner A., Kuliev K. , Oinarov R. Some criteria for boundedness and compactness of the Hardy operator with some special kernels//Journal of inequalities and applications. —2013. —Vol. 310. —P. 1–15
4. Burenkov V. I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy -type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space//Mathematical Inequalities and Applications. —2013. —Vol. 16, -№ 1. — P. 1–19
5. Ойнаров Р. Весовые неравенства для одного класса интегральных операторов//Доклады АН СССР. —1991. —Т. 319, № 5. —С. 1076–1078
6. Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов//Труды МИ РАН. —1993. —Т. 204. —С. 240–250
7. Ойнаров Р. Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтеревского типа//Сибирский математический журнал. —2007. —Т. 48, № 5.— С. 1100-1115

8. Ойнаров Р. Ограниченность и компактность интегральных операторов с переменными пределами интегрирования в весовых пространствах Лебега//Сибирский математический журнал. —2011. —Т. 52, № +6. — С. 1313–1328
9. Oinarov R. Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesue space // Complex Var. Elliptic Equ. —2011. —Vol. 56, № 10–11. —P. 1021–1038
10. Ойнаров Р. Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева// Известия РАН, Серия математическая. —2014. —Т. 78, |№ 4. — С. 207–2023

УДК 517.946

Оспанов К.Н.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

<sup>2</sup> *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*  
ospanov\_kn@enu.kz

## Максимальная регулярность и условия дискретности спектра полного дифференциального оператора второго порядка

Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $r \geq 1$  (либо  $r \leq -1$ ) - непрерывно дифференцируемая функция,  $q \in L_{p,loc}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ . Через  $L$  обозначим замыкание в  $L_p := L_p(\mathbb{R})$  дифференциального выражения

$$L_0 y := -y'' + r(x)y' + q(x)y.$$

В настоящей работе обсуждаются достаточные условия ограниченной обратимости и максимальной регулярности (разделимости) оператора  $L$  в  $L_p$ , а также компактности обратного к нему оператора  $L^{-1}$ . Для оператора  $L$  аналогичные вопросы рассматривались в случае  $p = 2$  в работе [1], а в случае  $p = 1$  - в [2].

Пусть  $g$  и  $h$  - некоторые непрерывные на  $\mathbb{R}$  функции и  $p' = p/(p - 1)$ . Положим

$$\alpha_{g,h}(t) = \left( \int_0^t |g(\eta)|^p d\eta \right)^{1/p} \left( \int_t^{+\infty} |h(\xi)|^{-p'} d\xi \right)^{1/p'}, \quad t > 0,$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \left( \int_\tau^0 |g(\eta)|^p d\eta \right)^{1/p} \left( \int_{-\infty}^\tau |h(\xi)|^{-p'} d\xi \right)^{1/p'}, \quad \tau < 0,$$

$$\gamma_{g,h} = \max \left( \sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau) \right).$$

Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $r$  - непрерывно дифференцируемая функция,  $q \in L_{p,loc}(\mathbb{R})$  и

$$\max\left(\gamma_1, \sqrt[p]{|r|}, \gamma_{q,r}\right) < \infty, \quad \sup_{|x-\omega| \leq 1} \frac{r(x)}{r(\omega)} < \infty.$$

Тогда оператор  $L$  ограниченно обратим в пространстве  $L_p$  и для  $y \in D(L)$  имеет место оценка

$$\| -y'' \|_p + \|ry'\|_p + \|qy\|_p \leq C \|Ly\|_p.$$

Введем функцию  $K_{r,\omega}(s) = \sqrt[p]{s|r(s)|^{\omega-p}}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Предположим функция  $|r|$  не возрастает в промежутке  $(-\infty, 0)$  и не убывает в  $(0, +\infty)$ , а также при некотором  $0 < \omega < p$

$$\max\left(\sup_{\tau < 0} \|K_{r,\omega}(\cdot)\|_{L_{p'}(-\infty,\tau)}, \sup_{t > 0} \|K_{r,\omega}(\cdot)\|_{L_{p'}(t,+\infty)}\right) < \infty.$$

Тогда

а) для  $y \in D(L)$  имеет место следующая оценка

$$\| -y'' \|_p + \|ry'\|_p + \|qy\|_p + \| |r(\cdot)|^{\omega/p} y \|_p \leq C_1 \|Ly\|_p;$$

б) оператор  $L^{-1}$  является компактным в  $L_p$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 5132/ГФ4).

### Литература

1. *Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D.* Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* **66** — 2012. —Р. 1-12.
2. *Оспанов К.Н.* Разрешимость и нелокальная оценка решения квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка в классе суммируемых функций // Межд. конф. "Дифференциальные уравнения и математическая физика". Тезисы докладов. -Алматы, 2014.

Оспанова А.Б.

*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,  
Астана, Казахстан**o.ademi111@gmail.com***Теоремы вложения разностных весовых пространств**

В работе получены достаточные условия вложения

$$w_p^2(v) \rightarrow l_q(u) \quad (1 < p \leq q < \infty) \quad (1)$$

разностного весового пространства  $w_p^2(v)$  целой гладкости  $m = 2$  в пространство суммируемых последовательностей  $l_q(u)$ . Разностные функциональные пространства и соответствующие вопросы вложения естественным образом возникают, к примеру, в теории численного решения дифференциальных уравнений.

Пусть  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$  – неотрицательная числовая последовательность, удовлетворяющая условию невырожденности  $\sum_{j=k}^{\infty} v_j > 0$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ). Введем пространства  $l_q(u)$  и  $w_p^2(v)$ :

$$l_q(u) = \left\{ y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty} : \|y\|_{l_q(u)} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} u_j |y_j|^q \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad (u_j \geq 0),$$

$$w_p^2(v) = \left\{ y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty} : \|y\|_{w_p^2(v)} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (|\Delta^2 y_j|^p + v_j |y_j|^p) \right\}^{1/p} < \infty \right\}.$$

Здесь  $\Delta^2$  – разностный оператор на  $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ , задаваемый равенствами:

$$\Delta^2 y_j = y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} = \Delta y_{j+1} - \Delta y_j, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \quad (y_0 = 0).$$

Пусть  $n, k \geq 0$  – целые,  $\mathfrak{R}_{n,k} = \left\{ r = \{r_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^{\infty} : \sum_{j=n}^{n+k} |r_j|^p = 1 \right\}$ ,

$$S_v(n, k) = \inf_{r \in \mathfrak{R}_{n,k}} \left\{ \sum_{j=n}^{n+k} |r_j|^p v_j \right\}^{1/p}, \quad M_{p,v}(n, k) = \left( \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} v_j \right)^{1/p},$$

$$k_n^* = k_n^*(v) = \begin{cases} \sup \{ k : k^{1+1/p'} S_v(n, k) \leq 1 \}, & \text{если } v_n \leq 1, \\ 0, & \text{если } v_n > 1, \end{cases} \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

**Класс  $(\Pi_p)$ .** Будем говорить, что последовательность  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$  допустима (и писать  $v \in \Pi_p$ ), если  $k_n^* < \infty$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

**Пример 1.** Последовательность  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $v_j \geq 1$ ,  $j = \overline{1, \infty}$ , допустима, так как  $k_n^* = 0, 1$ .



Будем говорить, что весовая последовательность  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию регулярности  $(I)$  ( $v \in I$ ), если существует  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , такое, что  $\gamma M_{p,v}(n, k) \leq S_v(n, k)$  ( $k, n \geq 0$ ).

**Пример 2.** Пусть  $v = \{j^{-\mu}\}$ ,  $0 < \mu < 1$ . Тогда  $v \in I$ .

**Пример 3.** Всякая невырожденная регулярная в смысле  $(I)$  последовательность  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$  допустима.

Будем говорить, что весовая последовательность  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию  $(I^*)$  ( $v \in I^*$ ), если существует  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , такое, что  $\gamma M_{p,v}(n, k) \leq S_v(n, k)$ ,  $0 \leq k \leq k_n^*$ , для всех  $n \geq 0$ .

**Пример 4.** Пусть  $v_j \geq 1$  и существует такая постоянная  $c > 1$ , что  $\frac{1}{c} < \frac{v_n}{v_{n+1}} < c$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $v \in I^*$ .

**Пример 5.** Последовательность  $v = \{e^{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$  не удовлетворяет условию из примера 4, однако для нее выполнено условие  $(I^*)$ .

Пусть  $X, Y$  – пространства с полунормами  $\|\cdot; X\|, \|\cdot; Y\|$  соответственно. Будем говорить, что  $X$  вложено в  $Y$  ( $X \rightarrow Y$ ), если: 1)  $X \subset Y$ ;

2)  $\exists c > 0 : \|z; Y\| \leq c \|z; X\| \quad \forall z \in X$ .

Положим

$$\mathcal{A}_u(n, k) = (k+1)^{2-1/p} \left( \sum_{j=n}^{n+k} u_j \right)^{1/q}, \quad \mathcal{A}_{v,u}^*(n) = \mathcal{A}_u(n, k_n^*), \quad k_n^* = k_n^*(v).$$

**Теорема 1.** Пусть  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Pi_p \cap I^*$  и  $A_{v,u}^* = \sup_{n \geq 1} \mathcal{A}_{v,u}^*(n) < \infty$ . Тогда справедливо вложение (1) и норма оператора вложения  $E$

$$\|E : w_p^2(v) \rightarrow l_q(u)\| \leq 6 \cdot 2^{1+1/p} \gamma^{-1} A_{v,u}^*.$$

**Теорема 2.** Пусть  $v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty} \in I$  и  $A_u = \sup_{n \geq 1, k \geq 0} \mathcal{A}_u(n, k) < \infty$ . Тогда справедливо (1).

**Следствие 1.** Справедлива оценка

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} |y_j z_j|^q \right)^{1/q} \leq c \sup_{j \geq 1} |z_j| \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (|\Delta^2 y_j|^p + |y_j|^p) \right]^{1/p}.$$

**Следствие 2.** Пусть существуют такие  $0 < \beta < 1 < b < \infty$ , что для всех  $n \geq 1, k \geq 0$   $\beta \left( \sum_{j=n}^{n+k} |z_j|^q \right)^{1/q} \leq \left( \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} v_j \right)^{1/p} \leq b \min_{j \in [n, n+k]} v_j^{1/p}$ . Тогда справедлива оценка  $\left( \sum_{j=1}^{\infty} |y_j z_j|^q \right)^{1/q} \leq cb \beta^{-1} \|y\|_{w_{p,v}^2}$ .

## Литература

1. Мусилимов Б., Отелбаев М. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма-Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1430–1434.
2. Мухамедиев Г. Спектр одного разностного оператора и некоторые теоремы вложения. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения в механике и технике. - Алма-Ата: Наука, 1983. —С. 104–105.

3. Смаилов Е. С. Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложения // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 270, № 1. — С. 52–55.
4. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 288 с.
5. Ойнаров Р., Стихарный А. П. Критерии ограниченности и компактности одного разностного вложения // Мат. заметки. — 1991. — Т. 50, № 5. — С. 54–60.
6. Булабаев А. Т., Мухамбетжанов А. Т. О некоторых разностных теоремах вложения // Сборник КазГНУ. — 1993.

УДК 517.51

Смаилов Е.С.

*РГКП Институт прикладной математики КН МОН РК, Караганда, Казахстан*  
*esmailov@mail.ru*

### Теорема типа теоремы Пэли для рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца

Теорема Пэли была установлена для ограниченных по совокупности ортонормальных систем в пространствах Лебега  $L_p[a, b]$ ,  $1 < p < +\infty$ . Для обобщенных систем Хаара, при условии ограниченности образующей числовой последовательности, аналог теоремы Пэли в пространствах  $L_p[0, 1]$ ,  $1 < p < +\infty$  был установлен М.Ф. Тиманом [1]. В данном тезисе мы анонсируем теорему типа Пэли для рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца  $L_{q\tau}[0, 1]$ ,  $2 < q < +\infty$ ,  $2 < \tau < +\infty$ . Система Хаара и ее обобщения не являются ограниченными системами по совокупности на отрезке  $[0, 1]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $2 < q < +\infty$ ,  $2 < \tau < +\infty$  и последовательность действительных чисел  $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$  такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau(1-\frac{1}{q})-1} |a_k|^\tau < +\infty$$

сходится, тогда последовательность чисел  $a_k$  является коэффициентами Фурье-Хаара некоторой функции  $f \in L_{q\tau}[0, 1]$  и при этом справедливо неравенство

$$\|f\|_{q\tau} \leq c_{q\tau} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau(1-\frac{1}{q})-1} |a_k|^\tau \right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Здесь множитель  $c_{q\tau} > 0$  зависит лишь от указанных параметров.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L_{q\tau}[0, 1]$ ,  $1 < q < 2$ ,  $1 < \tau < 2$  и  $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$  – последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара. Тогда справедливо неравенство

$$\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau(1-\frac{1}{q})-1} |a_k|^\tau \right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq D_{q\tau} \|f\|_{q\tau}.$$

Здесь множитель  $D_{q\tau} > 0$  зависит лишь от указанных параметров.

Данные утверждения переносятся на ряды Фурье по обобщенным системам типа Хаара с дословным повторением доказательств приведенных теорем 1 и 2, поэтому при  $\tau = q$  отсюда следуют соответствующие результаты М.Ф. Тимана и К. Тухлиева, которые в свою очередь справедливы и для рядов Фурье-Хаара в  $L_q[0, 1]$ ,  $1 < q < +\infty$  как частный случай их результатов.

Теорема типа теоремы Пэли для рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца в 2003 году была установлена Е.Д. Нурсултановым и Т.У. Аубакировым при условии обобщенной монотонности, разлагаемой в ряд Фурье-Хаара, функции [2].

### Литература

1. Тиман М.Ф., Тухлиев К. Свойства некоторых ортонормированных систем // Изв. вузов. Матем. — 1983. №9. — С. 65–73.
2. Нурсултанов Е.Д., Аубакиров Т.У. Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье-Хаара // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73, вып. 3. — С. 340–347.

УДК 517

Темиргалиев Н.

*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,  
Астана, Казахстан  
ntmath10@mail.ru*

## Некоторые результаты оптимального выбора вычислительных агрегатов и случайные процессы

Будут изложены результаты, полученные в Институте теоретической математике и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н.Гумилева по темам:

1. Компьютерный (вычислительный) поперечник, в рамках которого дан определенный ответ на вопрос "Когда и как в вычислительной практике правильно использовать интерполяционные многочлены Лагранжа?" и исследована задача приближенного дифференцирования функций [1-2].
2. "Метод Смоляка" в контексте тензорных произведений функционалов [3-5].
3. Быстрое преобразование Фурье на основе алгебраической теории чисел [6].
4. Генерирование случайных чисел посредством равномерно распределенных многомерных последовательностей [7].
5. Вопросы вложений классов "типа Морри" [8].
6. Порядковые оценки поперечников "кодирования" функций и новые методы доказательств двусторонних оценок поперечников по Колмогорову [9-10].

### Литература

1. Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). - М.: МИАН, — 2013. — Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы/ — С.179–207.

2. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Жубанышева А. Ж., Таугынбаева Г. Е.* Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв.ВУЗов. Математика. — 2013. № 8. —С. 86–93.
3. *Темиргалиев Н.* Классы  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  и квадратурные формулы // Докл. РАН. — 2003. — Т.393, № 5. —С. 605–608.
4. *Темиргалиев Н.* Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл.РАН. —2010. —Т. 430, № 4. —С. 460–465.
5. *Темиргалиев Н., Наурызбаев Н.Ж., Шоманова А.А.* Изв.ВУЗов. Математика. - 2015, № 7.
6. *Темиргалиев Н.* Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. — 1999. —Т. 281, № 4. —С. 490–505.
7. *Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н.* Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014, том 54, № 7, С. 1059-1077.
8. *Джумакаева Г.Т., Жайнибекова М.А., Темиргалиев Н.* Критерии вложения классов типа Морри // Изв.Вузов. Математика. —2015. № 5.
9. *Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности линейных функционалов //Матем. заметки. —2003. —Т.3. № 6. —С. 803–812.
10. *Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н.* Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов  $H_p^\omega$  //Матем. сб. —2007. —Т. 198. № 11. — С. 3–20.

Фалалеев Л.П.

*Институт математики и математического моделирования,**Алматы, Казахстан**v\_gulmira@mail.ru***Сходимость средних Чезаро и Рисса тригонометрических полиномов**

Пусть

$$\sigma_n^\beta(f, x) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} T_\nu(x),$$

 $(c, \beta)$  – средние Чезаро, образованные из тригонометрических полиномов

$$T_\nu(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n+2} f(x_k) \frac{\sin \frac{2\nu+1}{2}(x-x_k)}{2 \sin \frac{x-x_k}{2}}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

приближающих функцию  $f(x) \in C_{2\pi}$  наилучшим образом в системе точек

$$x_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+2.$$

Пусть  $f(x)$  принадлежит классу  $W^{(1)}$  дифференцируемых функций, таких, что  $|f'(x)| \leq 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ . Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_n^\beta(x) = \sup_{f \in W^{(1)}} |\sigma_n^\beta(f, x) - f(x)|.$$

При  $\beta = 1$  поведение  $\Delta_n'(x)$  было исследовано Н.Я. Яценко (Изв. Вузов, 1974).**Теорема 1.** Для  $\beta \geq 1$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо следующее асимптотическое равенство

$$\Delta_n^\beta(x) = \frac{2\beta \ln(n+1)}{\pi} \frac{1}{n+1} + O_x\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Множители, описывающие метод суммирования Рисса  $\lambda_\nu^{(n)} = (1 - \frac{\nu}{n+1})^\alpha$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda_\nu^{(n)} = 0$ ,  $\nu \geq n+1$  порождаются сумматорной функцией  $(1-x)^\alpha$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $\alpha \geq 1$  выпуклой вниз. Учитывая связь между числами Чезаро и множителями Рисса, убеждаемся, что равенство (1) справедливо для средних Рисса, причем для  $\beta \geq 1$  не обязательно целых. При доказательстве (1) используются простейшие квадратурные формулы.

Некоторые обобщения для интерполяционных многочленов равенства (1) сделала польский математик Р. Рух.

Переход к двухпараметрическим средним Чезаро  $C(\beta, \gamma)$  позволил автору получить следующие результаты для рядов Фурье по тригонометрической системе. Пусть

$$\Delta_n^{\beta, \gamma} = \sup_{f \in W \in (1)} \|f(x) - \sigma_n(\beta, \gamma)\|_{C_{2\pi}},$$

тогда

$$\Delta_n^{\beta, \gamma} = \frac{2}{\pi} \frac{A_n^{\beta-1}}{A_n^{\beta+\gamma}} \sum_{\nu=0}^n \frac{A_\nu^\gamma}{\nu+1} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

что при  $\gamma = 0$   $\beta \geq 1$  дает оценку  $\Delta_n^\beta$  для чезаровских средних, а при  $-1 < \gamma < 0$  дает новый результат порядка  $O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Общность свойств операторов Фейера, Чезаро, Рисса прослеживается на примере аппроксимации функций в  $L_p[0, 2\pi]$ . Пусть  $T_n$  – тригонометрический полином наилучшего приближения  $f \in L_p$ ,  $E_n(f)_p$  – соответствующее наилучшее приближение. Вопросам приближения  $f \in C_{2\pi}$  операторами  $\sigma_n^\alpha$  Чезаро посвящены работы М. Заманского, А.В. Ефимова ( $\alpha = 1$ ), Го-чжу-жуя ( $\alpha > 0$ ), в случае  $f \in L_p$  – работа М.Лекишвили (Матем. сборник, 1982). Для операторов Рисса

$$R_\lambda^\alpha(f, x) = \sum_{\nu \leq \lambda} \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right)^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$\alpha \geq 1$ ,  $\lambda > 0$  – вещественное число,  $a_\nu, b_\nu$  – коэффициенты Фурье функции  $f$

$$R_\lambda^\alpha(f, x) - f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_a^\infty \frac{f(x + \frac{t}{\lambda}) - 2f(x) + f(x - \frac{t}{\lambda})}{t^2} dt + \varphi(\alpha, \lambda, x), \quad (2)$$

$$\|\varphi(\cdot)\|_p = O(E_n)_p + \lambda^{-2} \|T_n''\|_p, \quad n = [\lambda].$$

(Фалалеев Л.П., Матем. заметки, 1993):  $u_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^{(n)} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ ,  $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda_k^{(n)} = 0$ ,  $k > n$  – элементы нижней треугольной матрицы вещественных чисел.

**Теорема 2.** Пусть  $\{\lambda_\nu^{(n)}\}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  – выпукла вниз по индексу  $\nu$ ,  $\lambda_\nu^{(n)} \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ , тогда

$$u_n(f, \Lambda, x) - f(x) = \frac{n}{\pi} (1 - \lambda_1^{(n)}) \int_a^\infty \frac{f(x + \frac{t}{n}) - 2f(x) + f(x - \frac{t}{n})}{t^2} dt + \Omega_n(\Lambda, x), \quad (3)$$

$$\|\Omega_n(\Lambda, x)\|_{L_p} \leq c\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)_{L_p} \left\{ n^2 \sum_{\nu=0}^n \Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} \frac{1}{\nu+1} + n(1 - \lambda_1^{(n)}) \right\}.$$

(3) очень просто иллюстрируется для методов Чезаро и Рисса при  $\alpha = 1$  (метод Фейера). В этом случае  $1 - \lambda_1^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ ,  $\Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ ,  $\nu = n$ ,  $\Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = 0$ ,  $\nu \neq n$ .

В качестве следствия получим теорему Г.К. Лебеда и А.А. Авдеенко, для  $p = \infty$  – теорему А.В. Ефимова и результат (2).

### Литература

1. Фалалеев Л.П., Василина Г.К. О бигармонических операторах, разреженных по лакунам // Труды VIII Международ. симпозиума "Ряды Фурье и их приложения". Ростов-на-Дону: изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2015. — С. 35–43.
2. Фалалеев Л.П., Василина Г.К. Приближение непериодических функций оператором гармонического типа // Применение функц. анализа в теории приближений. - Тверь: изд-во Тв.ГУ, 2013. — С. 26–32.

3. Фалалеев Л.П. Общие константы Лебега линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье // Матем. заметки. — 2004. - Т. 75, вып. 3. — С. 435–443.

УДК 517.982

Халмухамедов А., Абдикайимова Г.А.

Ташкентский государственный технический университет имени Абу Райхана  
Беруни, Ташкент, Узбекистан  
amirmurod@mail.ru

### О полноте положительного конуса в упорядоченных векторных пространствах

В настоящей статье изучается взаимосвязи между понятиями  $d$ -полноты и  $(0)$ -замкнутости (Терминология и обозначения соответствуют [1,2,3]). В работе [3] показано, что всякий  $(0)$ -замкнутый и  $(0)$ -выпуклый подконус монотонного полного УВП является  $d$ -полным. Однако обратное неверно, что подтверждается следующим.

**Пример:** Рассмотрим пространство  $E$  – всех ограниченных последовательностей действительных чисел. С помощью следующих формул в  $E$  определим собственный конус  $K_1$  и множество  $K_2$ :

$$K_1 := \{(X_i)_{i=1}^{\infty} : X_i \geq 0, \quad \forall i \in N\}$$

$$K_2 := \{(X_i)_{i=1}^{\infty} : X_1 < 0, \quad |X_1| \leq X_i \quad \text{при} \quad i \geq 2\}$$

Тогда их объединение  $K := K_1 \cup K_2$  будет собственным конусом в  $E$  и пространство  $E$  с порядком  $X \geq Y \Leftrightarrow X - Y \in K$  является монотонно полным упорядоченным векторным пространством. Пусть  $p = (p_i)_{i=1}^{\infty}$  – такой элемент из  $E$ , что  $p_1 = 0$ ,  $p_n > 0$  при  $n \geq 2$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ . Тогда  $\{p\}^{dd} = \{(X_i)_{i=1}^{\infty} / X_1 = 0, \inf_{i>1} X_i = 0\}$ .

Рассмотрим элементы вида  $a_k = (0, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ . Очевидно, что  $\{a_k\}_{k \in N} \subset \{p\}^{dd}$ , а  $\sup_{k \in N} a_k \notin \{p\}^{dd}$ .

Отметим, что в конечномерных архимедово упорядоченных пространствах или в пространствах Рисса, из  $d$ -полноты множества из положительного конуса следует его  $(0)$ -замкнутость.

**Предположение 1:** Для  $(0)$ -замкнутости  $d$ -полного множества  $I$  в  $X^+$  необходимо, чтобы всякая монотонно сходящаяся сеть из  $I$ , удовлетворяющая условию  $(\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})^d = I^d$   $d$ -монотонно сходилась.

В дальнейшем предположим, что пространство  $X$  монотонно полно, т.е. любое направленное вверх и ограниченное сверху подмножество пространства  $X$  обладает супремумом.

**Определение:** Пусть  $L \subset X^+$ ,  $M \in X^+$ . Скажем, что множество  $L$  монотонно плотно в множестве  $M$ , если для каждого  $m \in M$  существует  $\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset L$  такое, что  $a_\gamma \uparrow m$ .

Для элемента  $p \in X^+$  вводим обозначение  $I_p = \{p\}^{dd}$ ,  $J_p^+ = \{x \in X^+ : x \leq \lambda p \text{ для некоторых } \lambda \in R\}$ . Отметим, что  $(J_p^+)^d = \{p\}^d = I_p^d$ .

**Предположение 2:** Для каждого  $p \in X^+ \quad J_p^+$  монотонно плотно в  $I_p$ .

**Предположение 3:** Пусть  $X$  монотонно полное упорядоченное векторное пространство,  $p \in X^+$  и всякая монотонно сходящаяся сеть в  $I_p$ , удовлетворяющая условию  $(\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})^d = I_p^d$   $d$ -монотонно сходится. Тогда

а) если  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset J_p^+$  и  $x_\gamma \uparrow x$ , то  $x \in I_p$ ;

б)  $I_p + I_p \subset I_p$ ;

в)  $I_p - (0)$ -замкнуто.

Следующая теорема объединяет Предположение 1 и Предположение 3.

**Теорема:** Пусть  $X$  монотонно полное упорядоченное векторное пространство и  $p \in X^+$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

а)  $I_p - (0)$ -замкнуто.

б) любая монотонно сходящаяся сеть в  $I_p$ , удовлетворяющая условию  $(\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})^d = I_p^d$   $d$ -монотонно сходится.

### Литература

1. Халмухамедов А., Абдикаимова Г.А. Дизъюнктные дополняемые идеалы положительного конуса в упорядоченных векторных пространствах. Международная научно-практическая конференция посвященная 140-летию А.Байтурсынова. -г.Шымкент. —2013 -КИПУ —С.244.
2. Халмухамедов А. Об одной сходимости в положительном конусе. Техника йуналишидаги Олий таълим муассасаларида математика ва физика фанларини уқитиш муаммолари. Илмий услубий анжуман. -г.Ташкент. —2013 -ТДТУ — С.200
3. Полонский Ю.А. Дизъюнктные дополняемые идеалы положительного конуса и теорема Шоке-Бишона де Лю. -Ред.си.мат.журнал -г.Новосибирск —1986 —С.20 -ВВИНИТИ -№3219–1386

Bekjan T. and Kairat A.

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

*bekjant@yahoo.com*

## Characterization of subdiagonal algebras on noncommutative Lorentz spaces

We use standard notation and notions from theory of noncommutative  $L_p$  spaces. Our main reference is [4]. Let  $\mathcal{M}$  be a finite von Neumann algebra on a Hilbert space  $\mathcal{H}$  with a normal finite faithful trace  $\tau$  and denote the lattice of (orthogonal) projections in  $\mathcal{M}$  by  $P(\mathcal{M})$ . The set of all  $\tau$ -measurable operators will be denoted by  $L_0(\mathcal{M}; \tau)$  or simply by  $L_0(\mathcal{M})$ .

Let  $x$  be a  $\tau$ -measurable operator and  $t > 0$ . The " $t$ -th singular number (or generalized  $s$ -number)" of  $x$   $\mu_t(x)$  is defined by

$$\mu_t(x) = \inf\{\|xe\| : e \in P(\mathcal{M}), \tau(e^\perp) \leq t\}.$$

It is clear that, if  $x$  is a  $\tau$ -measurable operator, then  $\mu_t(x) < \infty$  for every  $t > 0$ . See [3] for more information about generalized  $s$  number.



**Definition 1.** Let  $x$  be a  $\tau$ -measurable operator affiliated with a semi-finite von Neumann algebra  $\mathcal{M}$ , and  $0 < p, q \leq \infty$ . Define

$$\|x\|_{L^{p,q}(\mathcal{M})} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} \mu_t(x))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \mu_t(x), & q = \infty. \end{cases}$$

The set of all  $x \in L_0(\mathcal{M})$  with  $\|x\|_{L^{p,q}(\mathcal{M})} < \infty$  is denoted by  $L^{p,q}(\mathcal{M})$  and is called the noncommutative Lorentz space with indices  $p$  and  $q$ .

**Definition 2.** Let  $\mathcal{A}$  be a *weak\** closed unital subalgebra of  $\mathcal{M}$ . If there is a linear projection  $\mathcal{E}$  from  $\mathcal{A}$  onto  $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap J(\mathcal{A})$  such that  $\mathcal{E}$  is multiplicative on  $\mathcal{A}$ , i.e.  $\mathcal{E}(ab) = \mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)$  for all  $a, b \in \mathcal{A}$ ;  $\tau \circ \mathcal{E} = \tau$ , then  $\mathcal{A}$  is called a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ .

**Definition 3.** Let  $\mathcal{A}$  be a *weak\** closed unital subalgebra of  $\mathcal{M}$  and let  $\mathcal{E}$  be a normal faithful conditional expectation from  $\mathcal{M}$  onto a von Neumann subalgebra  $\mathcal{D}$  of  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{A}$  is called a subdiagonal algebra of  $\mathcal{M}$  with respect to  $\mathcal{E}$  if the following conditions are satisfied  $\mathcal{A} + J(\mathcal{A})$  is *weak\** dense in  $\mathcal{M}$ ;  $\mathcal{E}(ab) = \mathcal{E}(a)\mathcal{E}(b)$  for all  $a, b \in \mathcal{A}$ ;  $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap J(\mathcal{A})$ .

Let  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \ker(\mathcal{E})$ . We call  $\mathcal{A}$  is  $\tau$ -maximal, if

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{M} : \tau(xy) = 0, \forall y \in \mathcal{A}_0\}.$$

In [2], among other things, Blecher and Labuschagne proved that a tracial subalgebra  $\mathcal{A}$  has  $L^\infty$ -factorization if and only if  $\mathcal{A}$  is a subdiagonal algebra and [1] obtained that if a tracial subalgebra has  $L^p$ -factorization ( $0 < p < \infty$ ) then it is a subdiagonal algebra.

In this paper we will consider the  $L^{p,q}$ -factorization property of a tracial subalgebra.

**Lemma 1.** *Let  $1 \leq p < \infty$  and  $1 \leq q < \infty$ . Then*

$$\|\mathcal{E}(x)\|_{L^{p,q}(\mathcal{M})} \leq \|x\|_{L^{p,q}(\mathcal{M})}, \forall x \in L^{p,q}(\mathcal{M}).$$

Let  $\mathcal{A}$  be a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ . We write  $\mathcal{A}_{p,q}$  for  $[\mathcal{A}]_{p,q} \cap \mathcal{M}$ .

**Lemma 2.** *Let  $1 < p < \infty$  and  $1 \leq q < \infty$ . If  $\mathcal{A}$  is a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ , then  $\mathcal{A}_{p,q}$  is a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ .*

**Definition 4.** Let  $0 < p < \infty$ ,  $0 < q < \infty$ . Let  $\mathcal{A}$  be a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ . We say that  $\mathcal{A}$  has  $L^{p,q}$ -factorization, if for  $x \in L^{p,q}(\mathcal{M})^{-1}$ , there is a unitary  $u \in \mathcal{M}$  and  $a \in [\mathcal{A}]_{p,q}^{-1}$  such that  $x = ua$ .

**Proposition 1.** *Let  $\mathcal{A}$  be a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ . Let  $1 < p_1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q, s < \infty$ . If  $\mathcal{A}$  has  $L^{p,q}$ -factorization, then  $\mathcal{A}$  has  $L^{p_1,s}$ -factorization.*

**Theorem 1.** *Let  $\mathcal{A}$  be a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ . Then the following conditions are equivalent:  $\mathcal{A}$  is a subdiagonal subalgebra of  $\mathcal{M}$ . For all  $0 < p < \infty$ ,  $0 < q < \infty$ ,  $\mathcal{A}$  has  $L^{p,q}$ -factorization. For some  $1 < p < \infty$ ,  $0 < q < \infty$ ,  $\mathcal{A}$  has  $L^{p,q}$ -factorization.*

**Theorem 2.** *Let  $\mathcal{A}$  be a  $\tau$ -maximal tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ . Then the following conditions are equivalent:  $\mathcal{A}$  is a subdiagonal subalgebra of  $\mathcal{M}$ . For some  $0 < p \leq 1$ ,  $0 < q < \infty$ ,  $\mathcal{A}$  has  $L^{p,q}$ -factorization and  $\mathcal{A}_{p,q}$  is a tracial subalgebra of  $\mathcal{M}$ .*

## References

1. *Bekjan, T.N.* Characterization of subdiagonal algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 2011. —V.139. —P. 1121–1126.
2. *Blecher, D.P., Labuschagne, L. E.* Characterizations of noncommutative  $H^\infty$  // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2006. —V.56. —P. 301–321.
3. *Fack, T., Kosaki, H.* Generalized s-numbers of  $\tau$ -measure operators // Pac. J. Math. — 1986. —V.123. —P. 269–300.
4. *Pisier, G., Xu, Q.* Noncommutative  $L_p$ -spaces // Handbook of the geometry of Banach spaces. Amsterdam, North-Holland. — 2009. —V.2.—P. 1459–1517.

UDC 517.96.43

Bliev N.K.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan  
bliyev.nazarbay@mail.ru*

## On continuous solutions of the Carleman-Vekua equation with the pole type singular point generalized Riemann-Hilbert's problem

Consider the Carleman-Vekua differential equation with a singular point at  $z=0$

$$Lw \equiv \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{A(z)}{z}w + \frac{B(z)}{z}\bar{w} = F(z), A(0) \neq 0, B(z) \neq 0, \quad (1)$$

in the unit circle  $G = \{z : |z| < 1\}$  with the boundary condition on the unit circumference  $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$

$$Re \{z^{-n}w(z)\} = \gamma(z), \quad (2)$$

$n$  being an integer.

Problems of existence of continuous solutions of equations of type (1) occur, e.g., in the theory of infinitely small deformations of surfaces of positive curvature with a flatter point [1, 2]. In view of this, it is also of interest to consider solutions of the Riemann-Hilbert problem in a generalized statement. The existence of continuous solutions of the equation (1) under additional requirements of smallness of coefficients  $A(z)$ , and  $B(z)$  or space  $G$  has been proved in [3, 4, 5, 6, 7]. In some of those publications only special cases of the equation (1) were considered.

Our method is based on analytical approaches from the theory of equation (1) and does not require those additional requirements. The theory of equation (1) with  $\frac{A(z)}{z} = A_1(z)$ , and  $\frac{B(z)}{z} = B_1(z)$  belonging to  $L_p(G)$ ,  $p > 2$ , with applications in geometry and mechanics, is given in the book [8] of Vekua. Somewhat different approach to this theory was given by Bers [9]. The theory of equation (1) with arbitrary coefficients  $A_1(z)$  and  $B_1(z)$  from Besov's spaces  $B_{q,1}^\alpha(G)$  ( $1 < q < 2$ ,  $\alpha = \frac{2}{q} - 1$ ) not imbedded in  $L_p(G)$  for any  $p > 2$  is given in the book [10] of the author of this article.

Let

$$H^\theta(G) = \{f(z) : f(z) = f^0(z) * z^\theta, |\theta| < 1\}$$

be a set of functions  $f(z)$ , where  $f^0(z)$  belongs to a space  $C(\bar{G})$  of continuous functions in the closed domain  $\bar{G}$ . It is easy to see that  $H^\theta(G)$  for each fixed real number is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{H^\theta(G)} = \|f^0\|_{C(\bar{G})}.$$

Assume that coefficients  $A(z)$  and  $B(z)$  in the equation (1) are measurable and bounded functions in  $G$  that are equal to zero outside  $\bar{G}$ :

$$|A(z)| \leq A_0, |B(z)| \leq B_0, A(z) = B(z) = 0, z \notin \bar{G}, \quad (3)$$

Right part  $F(z) \in H^{\alpha-1}(G)$  of the equation (1) here and in the sequel for  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , means a fixed number, where in presentation of  $F(z) = F_0(z) * z^{\alpha-1}$  the function  $F_0(z)$  belongs to some compact set of functions  $N \subset C(\bar{G})$ . For  $N$ , e.g., let us take a set of uniformly bounded functions that meets the Lipchitz's condition with a common constant:

$$\|F_0(z)\|_{C(\bar{G})} \leq K_1,$$

$$\|F_0(z + \Delta z) - F_0(z)\|_{C(\bar{G})} \leq K_2 |\Delta z|, \quad (4)$$

where  $K_1$  and  $K_2$  are constants common for all  $F_0 \in N$ . Function  $\gamma(z)$  in (2) belongs to some set of functions  $N_1$  compact in  $C(\Gamma)$ .

It has been shown that the Carleman-Vekua differential equation with a singular point of the pole type may have a continuous solution  $w(z)$ , if and only if  $w(z)$  tends to zero at a singular point  $z=0$  as  $z^\alpha, 0 < \alpha < 1$ . Necessary and sufficient conditions of solvability of the generalized Riemann – Hilbert's problem are obtained.

### References

1. *Efimov N.V., Usmanov Z.D.* Infinitesimal bendings of surfaces with a flat point // Dokl.Acad. Nauk SSSR —1973.—V.208, —P. 28–31, translated in Sob. Math.Dokl. —1973. —V.14, —P. 22–25.
2. *A. Meziani* Infinitesimal bending of high orders for homogeneous surfaces with positive curvature and a flat point // Journal of Differential Equations. —2007.—V.239, —P. 16–37.
3. *H. Begehr, D. Dai* On continuous solutions of generalized Cauchy - Riemann system with more than one singularity // Journal of Differential Equations. —2004. —V.196, —P. 67–90.
4. *A. Meziani*, Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex variables and Elliptic Equations. —2008. —V.53, —P. 1111–11130.
5. *Z.D. Usmanov* Generalized Cauchy вЂ“ Riemann systems with a singular point. —Longman.: Harlow, 1997.

6. *A. Tungatarov* On continuous solutions of the Carleman - Vekua equation with a singular point // Soviet Math. Dokl. —1992. —V.44, № 1. —P. 175–178.
7. *A. Tungatarov* On the theory of the Carleman - Vekua equation with singular point // Russian Acad. Sci., Math. —1994. —V.78, № 2. —P. 357–368.
8. *J.N. Vekua* Generalized Analytic Functions. —Pergamon.: Oxford, 1962.
9. *L. Bers* Theory of Pseudo вЂ“ Analytic Functions, Lecture Notes, New York Univ., Jnst Math. Mech., New York, 1953.
10. *N. Bliev* Generalized Analytic Functions in Fractional Spaces, Longman, Published in the USA by Addison Wesley Longman Jnc., 1997.

UDC 517.5

Kalybay A.A.<sup>1</sup> and Temirkhanova A.M.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *KIMEP University, Almaty, Kazakhstan*

<sup>2</sup>*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

*kalybay@kimep.kz*

## A new discrete Hardy-type inequality with kernels

Let  $1 < p, q < \infty$  and  $n \geq 1$ . Suppose that  $v = \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$  is a positive number sequence,  $\omega_i = \{\omega_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , and  $u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  are non-negative number sequences, hereinafter referred to as weight sequences.

Let  $l_{p,v}$  be the space of sequences  $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  such that the following norm

$$\|f\|_{p,v} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |v_k f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

is finite.

We consider the operator

$$(S_{n-1}f)_i = \sum_{k_1=1}^i \omega_{1,k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \omega_{2,k_2} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-2}} \omega_{n-1,k_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_{n-1}} f_j, \quad i \geq 1, \quad (1)$$

and call it  $n$  - multiple discrete Hardy operator with weights.

Let us notice that if in (1) we change the order of summation, then the operator  $S_{n-1}$  can be rewritten in the form:

$$(S_{n-1}f)_i = \sum_{j=1}^i A_{n-1,1}(i, j) f_j, \quad i \geq 1,$$

where  $A_{n-1,1}(i, j) = \sum_{k_{n-1}=j}^i \omega_{n-1,k_{n-1}} \sum_{k_{n-2}=k_{n-1}}^i \omega_{n-2,k_{n-2}} \cdots \sum_{k_1=k_2}^i \omega_{1,k_1}$ ,  
 $i \geq j \geq 1$ , for  $n > 1$  and  $A_{n-1,1}(i, j) = 1$  for  $n = 1$ .

The main problem is to find necessary and sufficient conditions on the weight sequences  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $u$  and  $v$  for the validity of the inequality

$$\|S_{n-1}f\|_{l_{q,u}} \leq C\|f\|_{l_{p,v}} \quad (2)$$

for non-negative non-increasing sequences  $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$  in the case  $1 < q < p < \infty$ . Here and further a constant  $C$  does not depend on  $f$ .

When  $n = 1$  the operator  $S_{n-1}$  becomes the standard discrete Hardy operator  $(S_0f)_i = \sum_{j=1}^i f_j$ . The validity of inequality (8) with the standard discrete Hardy operator has been in detail investigated for non-negative sequences  $f$  and different relations between the parameters  $p$  and  $q$ . A thorough analysis and review of the development of this problem can be found, for example, in work [1].

Concerning the general inequality (8) the following is known:

- (i) a characterization for the case  $1 < p \leq q < \infty$  was derived in [2] while a corresponding characterization for the case  $1 < q < p < \infty$  can be found in [3];
- (ii) for the case when  $\{f_k\}$  is a non-increasing sequence a characterization of (8) for the case  $1 < p \leq q < \infty$  was derived in [4].

However, so far no such characterization in the case  $1 < q < p < \infty$  is known and it is the main aim of this paper to fill in this gap. Our main result reads:

**Theorem 1.** *Let  $1 < q < p < \infty$  and  $n \geq 1$ . Suppose that  $V_k = \sum_{i=1}^k v_i^p$  when  $k \geq 1$  and  $V_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k$ . Then inequality (8) holds for all non-negative non-increasing sequences  $f = \{f_i\}_{i=1}^\infty$  from  $l_{p,v}$  if and only if  $E_{12} = \max\{E_1, E_2\} < \infty$  when  $V_\infty = \infty$  and  $E_{13} = \max\{E_1, E_2', E_3\} < \infty$  when  $V_\infty < \infty$ , where*

$$\begin{aligned} E_1 &:= \max_{0 \leq r \leq n-1} \left( \sum_{i=1}^\infty \left( \sum_{j=i}^\infty A_{\tau,1}^q(j,i) u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right. \\ &\times \left. \left( \sum_{k=1}^i A_{r,\tau+1}^{p'}(i,k) \left( \sum_{j=1}^k A_{n-1,r+1}(k,j) \right)^{p'} \left( V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right. \\ &\times \left. \Delta_i^+ \left( \sum_{j=i}^\infty A_{\tau,1}^q(j,i) u_j^q \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \quad 0 \leq r \leq n-1, \\ E_2 &:= \sum_{s=1}^\infty \left( V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{s+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) V_s^{-\frac{p'(q-1)}{p-q}} \\ &\times \left( \sum_{k=1}^s \left( \sum_{j=1}^k A_{n-1,1}(k,j) \right)^q u_k^q \right)^{\frac{p}{p-q}}, \\ E_2' &:= \sum_{s=1}^\infty \left( V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_{s+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \left( V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \end{aligned}$$

$$\times \left( \sum_{k=1}^s \left( \sum_{j=1}^k A_{n-1,1}(k, j) \right)^q u_k^q \right)^{\frac{p}{p-q}},$$

$$E_3 := V_\infty^{-\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^\infty \left( \sum_{j=1}^i A_{n-1,1}(i, j) \right)^q u_i^q \right).$$

Moreover,  $E_{12} \approx C$  when  $V_\infty = \infty$  and  $E_{13} \approx C$  when  $V_\infty < \infty$ , where  $C$  is the best constant in (8).

## References

1. *Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.E.* The Hardy Inequality. About its History and some Related Results. —Pilsen: Vydavatel'sky Servis, 2007.
2. *Oinarov, R., Temirkhanova, A.M.* Boundedness and compactness of a class of matrix operators in weighted sequence spaces // J. Math. Ineq. —2008. —V. 2, № 4. — P. 555–570.
3. *Kalybay, A.A., Oinarov, R., Temirkhanova, A.M.* Boundedness of  $n$ -multiple discrete Hardy operators with weights for  $1 < q < p < \infty$  // J. Func. Spaces and Appl. — 2013. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/121767>
4. *Taspaganbetova Zh.* Two-sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences // J. Math. Anal. Appl. — 2014. —V. 410. —P. 82–93.

UDC 517.5

Nursultanov E.D. and Tleukhanova N.T.

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

*er-nurs@yandex.ru*

## Recovery operator of periodic functions

Let  $(X, Y)$  be pair of functional spaces of 1-periodic functions,  $X$  embedded in  $C[0, 1]^n$ . Our aim is to find the nodes  $\{t_k\}_{k=1}^M$  and functions  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^M$ , such that the error

$$\delta_M(X, Y) = \sup_{\|f\|_X=1} \|f_\lambda - \sum_{k=1}^M f(t_k)\phi_k(x)\|_Y$$

will be minimal when order  $M$  increase.

The problem of recovering of function from the classes with dominant mixed derivative is considered in many works.

The aim of this talk is to construct a recovery operator for which the error coincides with the order of corresponding orthodiameter:

$$d_M^{\perp}(X, Y) = \inf_{\{g_j\}_{j=1}^M} \sup_{\|f\|_X=1} \|f - \sum_{j=1}^M (f, g_j)g_j\|,$$

here the exact lower bound is taken over all orthogonal systems  $\{g_j\}_{j=1}^M$  from  $L_\infty[0, 1]^n$ .

For a function  $f \in C[0, 1]^n$  we define the transform

$$F_m(f; x) = \sum_{\substack{\psi(k)=m \\ k \in \mathbb{N}^n}} \frac{1}{2^{|k|}} \sum_{0 \leq r < 2^k} f\left(\frac{r}{2^k}\right) \phi_{k,r}\left(x + \frac{r}{2^k}\right), \quad (1)$$

$$\phi_{k,r}(x) = \sum_{0 \leq \nu \leq k} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j+1) \text{sgn}(k_j - \nu_j)} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} e^{2\pi i \mu x}. \quad (2)$$

Here  $\mu x := \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$ ,  $|k| := k_1 + \dots + k_n$ ,  $\rho(\nu) = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n : [2^{\nu_j-2}] \leq |\mu_j| < 2^{\nu_j-1}\}$ ,  $[x]$  is integer part of  $x$ , and  $\nu \leq \mu$  means that  $\nu_j \leq \mu_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Theorem 1.** *Let  $m \geq \psi(1)$ ,  $F_m(f)$  defined by the relations (1), (2),  $M$  is number of nodes in the definition of  $F_m(f)$ . If  $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$ ,  $\alpha_0 > \frac{1}{p}$ , then*

$$\sup_{\|f\|_{SW_p^\alpha}=1} \|f - F_m(f)\|_{L_q} \sim d_M^\perp(SW_p^\alpha, L_q),$$

$$\sup_{\|f\|_{SH_p^\alpha}=1} \|f - F_m(f)\|_{L_q} \sim d_M^\perp(SH_p^\alpha, L_q).$$

UDC 517.5

Nursultanov E.D., Tikhonov S.Y. and Tleukhanova N.T.

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

*tleukhanova@rambler.ru*

## Norm convolution inequalities in $L_p$

We obtain upper and similar lower estimates of the  $(L_p, L_q)$  norm for the convolution operator. The upper estimate improves on known convolution inequalities. The technique to obtain lower estimates is applied to study boundedness problems for oscillatory integrals.

Let  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L_p \equiv L_p(\mathbb{R})$  and let the convolution operator be given by

$$(Af)(x) \equiv (K * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy, \quad K \in L_{loc}.$$

Let  $d > 0$  and let

- $M_1$  be the set of intervals of length  $\leq d$ ;
- $M_2$  be the set of measurable sets  $e \subset [-d, d]$  such that  $\text{diam}(e) = \sup_{x,y \in e} |x-y| \leq d$ ;
- $W_1$  be the set of all finite arithmetic progressions of integer numbers;
- $W_2$  be the set of finite sets  $w \subset \mathbb{Z}$  such that  $\min_{i,j \in w} |i-j| \geq 2$ .

Now we define the sets  $\mathfrak{L}_d, \mathfrak{U}_d, \mathfrak{V}_d$  as follows:

$$\mathfrak{L}_d = \left\{ E = \bigcup_{k \in w} (e + kd) : e \in M_1, w \in W_1 \right\},$$

$$\mathfrak{U}_d = \left\{ E = \bigcup_{k \in w} (e_k + kd) : e_k \in M_2, w \in W_2, |e_k| = |e_j|, k, j \in w \right\},$$

$$\mathfrak{V}_d = \left\{ E = \bigcup_{x \in e} (x + w(x)d) : e \in M_2, w(x) \in W_2, |w(x)| = |w(y)|, x, y \in e \right\},$$

where  $|e|$  is a measure of the set  $e \in M_i$  and  $|w|$  is a number of elements of  $w \in W_i$ . Note that  $\mathfrak{L}_d \subset \mathfrak{U}_d \cap \mathfrak{V}_d$ . If  $E \in \mathfrak{L}_d$ , then  $|E| = |e||w|$ , where  $e, w$  are the sets from the representation of  $E$ . Similarly, this property holds for  $E \in \mathfrak{U}_d$  and  $E \in \mathfrak{V}_d$ .

**Theorem 1.** *Let  $1 < p < q < \infty$ . If for some  $d > 0$  we have either*

$$\sup_{E \in \mathfrak{U}_d} \frac{1}{|E|^{1/p-1/q}} \int_E |K(x)| dx \leq D,$$

or

$$\sup_{E \in \mathfrak{V}_d} \frac{1}{|E|^{1/p-1/q}} \int_E |K(x)| dx \leq D$$

then the operator  $Af = K * f$  is bounded from  $L_p(\mathbb{R})$  to  $L_q(\mathbb{R})$  and

$$\|A\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq C(p, q)D,$$

where  $C(p, q)$  depends on  $p$  and  $q$ .

**Theorem 2.** *Let  $1 < p < q < \infty$ ,  $d > 0$ , andm the operator  $Af = K * f$  be bounded from  $L_p(\mathbb{R})$  to  $L_q(\mathbb{R})$ . If for any  $B > 0$  we have*

$$\sup_{\substack{E \in \mathfrak{L}_d \\ |E| \leq B}} \frac{1}{|E|^{1/p-1/q}} \left| \int_E K(x) dx \right| \leq C(B) < \infty,$$

then

$$\sup_{E \in \mathfrak{L}_d} \frac{1}{|E|^{1/p-1/q}} \left| \int_E K(x) dx \right| \leq C(p, q) \|A\|_{L_p \rightarrow L_q}.$$

**Corollary 1.** *Let  $1 < p \leq q < \infty$  and  $\lambda = 1 - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ . Let also*

$$\mathcal{K}(x) = \frac{e^{i|x|^a}}{|x|^b},$$

where  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$ , and  $b \neq \lambda$ . If

$$\max(q, p') > \frac{a}{\lambda - b} > 0,$$

then the operator  $Af = \mathcal{K} * f$  is not bounded from  $L_p$  to  $L_q$ .

## References

1. O'Neil R. Convolution operators and  $L(p, q)$  spaces // Duke Math. J. — 1963. —V. 30. —P. 129–142.



2. *Stepanov V.D.* Some topics in the theory of integral convolution operators. — Vladivostok: Dalnauka, 2000.
3. *P. Sjölin* Regularity of solutions to the Schrödinger equation // Duke Mathematical Journal — 1987. —V. 55, № 3. —P. 699–715.

Persson L.E.<sup>1</sup> and Shaimardan S.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Narvik University College, Narvik, Norway*

<sup>2</sup>*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*  
*serikbol-87@yandex.kz*

### Some new Hardy-type inequalities for Riemann-Liouville fractional $q$ integral operator

We consider the  $q$ -analog of the Riemann-Liouville fractional  $q$ -integral operator of order  $n \in \mathbb{N}$ . Some new Hardy-type inequalities for this operator are proved and discussed.

In 1910 F. H. Jackson defined  $q$ -derivative and definite  $q$ -integral [9] (see also [5]). It was the starting point of  $q$ -analysis. Today the interest in the subject has exploded. The  $q$ -analysis has numerous applications in various fields of mathematics e.g dynamical systems, number theory, combinatorics, special functions, fractals and also for scientific problems in some applied areas such as computer science, quantum mechanics and quantum physics (see e.g. [2], [4], [5], [6], [7]). For the further development and recent results in  $q$ -analysis we refer to the books [2], [5] and [5] and the references given therein.

First we recall some definitions and notations in  $q$ -analysis from the recent books [2] and [5] and [5].

Let  $q \in (0, 1)$ . Then a  $q$ -real number  $[\alpha]_q$  is defined by

$$[\alpha]_q := \frac{1 - q^\alpha}{1 - q}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

where  $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^\alpha}{1 - q} = \alpha$ .

The  $q$ -analog of the binomial coefficients are defined by

$$[n]_q! := \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, \\ [1]_q \times [2]_q \times \cdots \times [n]_q, & \text{if } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

We introduce the  $q$ -analog of a polynomial in the following way:

$$(x - a)_q^n := \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, \\ (x - a)(x - qa) \cdots (x - q^{n-1}a), & \text{if } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (1)$$

The  $q$ -gamma function  $\Gamma_q$  is defined by

$$\Gamma_q(n + 1) := [n]_q!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

For  $f : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < b \leq \infty$ , we define the  $q$ -derivative as follows:

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{(1 - q)x}, \quad x \in [0, b).$$

Clearly, if the function  $f(x)$  is differentiable at a point  $x \in (0, 1)$ , then  $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = f'(x)$ .

Let  $0 < a \leq b < \infty$ . The definite  $q$ -integral (also called the  $q$ -Jackson integral) of a function  $f(x)$  is defined by the formulas

$$\int_0^a f(x) d_q x := (1 - q)a \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k a). \quad (2)$$

Moreover, the improper  $q$ -integral of a function  $f(x)$  is defined by

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x := (1 - q) \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k f(q^k), \quad (3)$$

provided that the series on the right hand sides of (2) and (3) converge absolutely.

Suppose that  $f(x)$  and  $g(x)$  are two functions which are defined on  $(0, \infty)$ . Then

$$\int_0^{\infty} f(x) D_q(g(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j) (g(q^j) - g(q^{j+1})). \quad (4)$$

Let  $\Omega$  be a subset of  $(0, \infty)$  and  $\mathcal{X}_{\Omega}(t)$  denote the characteristic function of  $\Omega$ . For all  $z : 0 < z < \infty$ , we have that

$$\int_0^{\infty} \mathcal{X}_{(0,z]}(t) f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{q^i \leq z} q^i f(q^i) \quad (5)$$

and

$$\int_0^{\infty} \mathcal{X}_{[z,\infty)}(t) f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{q^i \geq z} q^i f(q^i). \quad (6)$$

Let  $1 < r, p \leq \infty$ . We consider the operator  $I_{q,n}$  the following form

$$I_{q,n} f(x) = \frac{1}{\Gamma_q(n)} \int_0^{\infty} \mathcal{X}_{(0,x]}(s) K_{n-1}(x, s) f(s) d_q s,$$

which is defined for all  $x > 0$ . where  $K_{n-1}(x, s) = (x - qs)_q^{n-1}$ .

Then the  $q$ -analog of the two-weighted inequality for the operator  $I_{q,n}$  of the form

$$\left( \int_0^{\infty} u^r(x) (I_{q,n} f(x))^r d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_0^{\infty} v^p(x) f^p(x) d_q x \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

which has several applications in various fields of science. Where  $C$  a positive constants independent of  $f$  and  $u(\cdot), v(\cdot)$  are positive real valued functions on  $(0, \infty)$ , i.e. weight functions.

For  $0 \leq m \leq n-1, m+1, n \in \mathbf{N}$ , we use the following notations:

$$Q_m^{n-1} = \left\{ \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(s) K_m^{p'}(z,s) v^{-p'}(s) d_q s \right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}} \right. \\ \times \left. \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) K_{n-m-1}^r(x,z) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{p}{p-r}} \right. \\ \times \left. D_q \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(s) K_m^{p'}(z,s) v^{-p'}(s) d_q s \right) \right\}^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$H_m^{n-1} = \sup_{z>0} \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) K_{n-m-1}^r(x,z) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \\ \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(s) K_m^{p'}(z,s) v^{-p'}(s) d_q s \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A^+(z) = \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) u^r(x) \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(t) K_{n-1}^{p'}(x,t) v^{-p'}(t) d_q t \right)^{\frac{r}{p'}} d_q x \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$A^-(z) = \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(t) v^{-p'}(t) \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) K_{n-1}^r(x,t) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{p'}{r}} d_q t \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

$$H_{n-1} = \max_{0 \leq k \leq n-1} H_k^{n-1}, A_q^+ = \sup_{z>0} A^+(z), A_q^- = \sup_{z>0} A^-(z), Q_{n-1} = \max_{0 \leq k \leq n-1} Q_k^{n-1}$$

Our main results read:

**Theorem 1.** *Let  $1 < r < p < \infty$ . Then the inequality (1) holds if and only if  $Q_{n-1} < \infty$ . Moreover,  $Q_{n-1} \approx C$ , where  $C$  is the best constant in (1).*

**Theorem 2.** *Let  $1 < p \leq r < \infty$ . Then the inequality (1) holds if and only if at least one of the conditions  $H_{n-1} < \infty$  or  $A_q^+ < \infty$  or  $A_q^- < \infty$  holds. Moreover,  $H_{n-1} \approx A_q^+ \approx A_q^- \approx C$ , where  $C$  is the best constant in (1).*

## References

- [1] W.A. Al-Salam, Some fractional  $q$ -integrals and  $q$ -derivatives. Proc. Edinb. Math. Soc. 2(15), 135-140 (1966/1967)

- [2] M. H. Annaby and Z. S. Mansour,  $q$ -fractional calculus and equations, Springer, Heidelberg, 2012.
- [3] G. Bangerezako, Variational calculus on  $q$ -nonuniform lattices, J. Math. Anal. Appl. 306 (2005), no. 1, 161-179.
- [4] P. Cheung and V. Kac, Quantum calculus. - Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, MI, USA, 2000.
- [5] T. Ernst, A comprehensive treatment of  $q$ -calculus. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.
- [6] T. Ernst, The history of  $q$ -calculus and a new method, Licentiate thesis, Uppsala university, 2001.
- [7] H. Exton,  $q$ -Hypergeometric Functions and Applications, Halstead Press, New York, 1983.
- [8] H. Gauchman, Integral inequalities in  $q$ -calculus. Comput. Math. Appl. 47 (2004), no. 2-3, 281-300.
- [9] F. H. Jackson, On  $q$ -definite integrals, Quart. J. Pure Appl. Math. 41 (1910), 193-203.
- [10] V. Kokilashvili, A. Meskhi and L.-E. Persson, Weighted Norm Inequalities for Integral Transforms with Product Kernels, Nova Science Publishers, New York, 2010.
- [11] V. Krasniqi, Erratum, Several  $q$ -integral inequalities, J. Math. Inequal. 5 (2011), no. 3, 451(Erratum to a paper in J. Math. Inequal 3(2009), no. 1, 115-121).
- [12] A. Kufner, L. Maligranda and L-E. Persson, The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results, Vydavatelský Servis, Plzeň, 2007.
- [13] Y. Miao and F. Qi, Several  $q$ -integral inequalities, J. Math. Inequal. 3 (2009), no. 1, 115-121.
- [14] M. S. Stankovič, P. M. Rajkovič and S. D. Marinkovič, On  $q$ -fractional derivatives of Riemann-Liouville and Caputo type, arXiv:0909.0387.
- [15] W. T. Sulaiman, New types of  $q$ -integral inequalities, Adv. Pure Math. 1 (2011), 77-80.

UDC: 519.2

Pya N.

*Nazarbayev University, School of Science and Technology,  
Department of Mathematical Sciences, Astana, Kazakhstan  
natalya.pya@nu.edu.kz*

**Additive regression for scaled t data with residual autocorrelation**

Generalized additive models (GAM) (Hastie and Tibshirani, 1990; Wood, 2006) are used extensively across environmental science, psychology and industry, for modelling flexible nonlinear relationship between a response variable and multiple covariates. GAMs suggest that the mean value of a response variable is linked to additive, possibly, nonlinear effects of explanatory variables through a known link function. The nonlinear effects are represented as unknown smooth functions of known covariates. The estimation of the smooth functions together with their degree of smoothness is the objective of model fitting. The standard GAM assumes that the response variables are independent random variables from the exponential family of distributions. The widespread application of GAMs is explained by their flexibility and the existence of reliable and efficient computational methods for their estimation. Many generalizations of GAMs have been proposed, such as modelling outside the exponential family setting, modelling multivariate response, modelling beyond the mean. Despite the availability of the generalizations, the current methodological framework for these models could be improved on adequate modelling of practical data sets. This paper provides additive modelling of data sets that are heavier tailed than normal distribution and also reveal short range temporal autocorrelation. The proposed approach is merged with the general GAM framework which is implemented in R.

### References

1. *Hastie T., Tibshirani R.* Generalized Additive Models. - New York: Chapman & Hall, 1990. — 339 p.
2. *Wood S.* Generalized Additive Models. An Introduction with R. - Boca Raton: Chapman & Hall, 2006. — 401 p.

Shaimardan, S .

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan  
serikbol-87@yandex.kz*

### Hardy-type inequality for Riemann-Liouville fractional integral operator in $q$ -analysis

The  $q$ -analysis has numerous applications in various fields of mathematics e.g dynamical systems, number theory, combinatorics, special functions, fractals and also for scientific problems in some applied areas such as computer science, quantum mechanics and quantum physics (see e.g. [1], [4], [6], [7], [8] and [9]). For the further development and recent results in  $q$ -analysis we refer to the books [2], [5] and [6] the references given therein.

Let  $1 < r, p \leq \infty$ . We consider the operator  $I_{q,n}$  the following form

$$I_{q,n}f(x) = \frac{1}{\Gamma_q(n)} \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,x]}(s) K_{n-1}(x, s) f(s) d_q s,$$

which is defined for all  $x > 0$ . where  $K_{n-1}(x, s) = (x - qs)_q^{n-1}$ .

Then the  $q$ -analog of the two-weighted inequality for the operator  $I_{q,n}$  of the form

$$\left( \int_0^\infty u^r(x) (I_{q,n}f(x))^r d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left( \int_0^\infty v^p(x) f^p(x) d_q x \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

which has several applications in various fields of science. Where  $C$  a positive constants independent of  $f$  and  $u(\cdot), v(\cdot)$  are positive real valued functions on  $(0, \infty)$ , i.e. weight functions.

For  $0 \leq m \leq n-1, m+1, n \in \mathbf{N}$ , we use the following notations:

$$\begin{aligned} Q_m^{n-1} &= \left\{ \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(s) K_m^{p'}(z, s) v^{-p'}(s) d_q s \right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}} \right. \\ &\quad \times \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) K_{n-m-1}^r(x, z) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{p}{p-r}} \\ &\quad \left. \times D_q \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(s) K_m^{p'}(z, s) v^{-p'}(s) d_q s \right)^{\frac{p-r}{pr}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m^{n-1} &= \sup_{z>0} \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) K_{n-m-1}^r(x, z) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \times \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(s) K_m^{p'}(z, s) v^{-p'}(s) d_q s \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

$$A^+(z) = \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) u^r(x) \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(t) K_{n-1}^{p'}(x, t) v^{-p'}(t) d_q t \right)^{\frac{r}{p'}} d_q x \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$A^-(z) = \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{(0,z]}(t) v^{-p'}(t) \left( \int_0^\infty \mathcal{X}_{[z,\infty)}(x) K_{n-1}^r(x, t) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{p'}{r}} d_q t \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

$$H_{n-1} = \max_{0 \leq k \leq n-1} H_k^{n-1}, \quad A_q^+ = \sup_{z>0} A^+(z), \quad A_q^- = \sup_{z>0} A^-(z), \quad Q_{n-1} = \max_{0 \leq k \leq n-1} Q_k^{n-1}$$

Our main results read:

**Theorem 1.** *Let  $1 < r < p < \infty$ . Then the inequality (1) holds if and only if  $Q_{n-1} < \infty$ . Moreover,  $Q_{n-1} \approx C$ , where  $C$  is the best constant in (1).*

**Theorem 2.** *Let  $1 < p \leq r < \infty$ . Then the inequality (1) holds if and only if at least one of the conditions  $H_{n-1} < \infty$  or  $A_q^+ < \infty$  or  $A_q^- < \infty$  holds. Moreover,  $H_{n-1} \approx A_q^+ \approx A_q^- \approx C$ , where  $C$  is the best constant in (1).*

## References

1. *Al-Salam, W.A.* Some fractional  $q$ -integrals and  $q$ -derivatives // Proc. Edinb. Math. Soc. — (1966/1967). —V.15. —P. 135–140.
2. *Annaby, M. H., Mansour, Z. S.*  $q$ -fractional calculus and equations // -Springer, Heidelberg.2012.
3. *Bangerezako, G.* Variational calculus on  $q$ -nonuniform lattices // J. Math. Anal. Appl.—2005. —V 306.—P. 161–179.
4. *Cheung P., Kac, V.* Quantum calculus// - Edwards Brothers, Inc.,Ann Arbor, MI, USA, 2000.
5. *Ernst, T.* A comprehensive treatment of  $q$ -calculus // -Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.
6. *Ernst, T.* The history of  $q$ -calculus and a new method // Licentiate thesis, Uppsala university, 2001.
7. *Exton, H.*  $q$ -Hypergeometric Functions and Applications // Halstead Press, New York, 1983.
8. *Gauchman, H.* Integral inequalities in  $q$ -calculus // Comput. Math. Appl. —2004.—V.47.—P. 281–300.

### 3 Алгебра, математическая логика и геометрия

УДК 512.554.38

Адашев Ж.К., Омиров Б.А.

*Институт математики при Национальном Университете Узбекистана, (29,  
Дурмон Йўли, 100125, Ташкент, Узбекистан)  
e-mail: adashevjq@mail.ru, omirovb@mail.ru*

#### Одномерные центральные расширения градуированных филиформных алгебр Лейбница

Центральные расширения алгебр Ли являются важным объектом в теории представлений и в приложениях в квантовой физике. Например, алгебра Гейзенберга является центральным расширением коммутативной алгебры Ли. Напомним, что в работах [1-2] центральные расширения были распространены на случай алгебр Лейбница и в частности, были описаны одномерные центральные расширения нуль-филиформных алгебр Лейбница и естественным образом градуированных филиформных алгебр Ли. В данной работе мы рассматриваем центральные расширения нуль-филиформных и естественным образом градуированных не Лиевых филиформных алгебр Лейбница.

**Определение 1.** [3] Алгебра  $L$  над полем  $F$  называется алгеброй Лейбница, если для любых элементов  $x, y, z \in L$  выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где  $[-, -]$  умножение в  $L$ .

В работе [4] было доказано, что произвольная  $n$ -мерная алгебра Лейбница максимального индекса нильпотентности изоморфна алгебре:

$$NF_n : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Приведем описание  $k$ -мерных центральных расширений алгебры  $NF_n$ .

**Предложение 1.** Произвольное  $k$ -мерное центральное расширение алгебры  $NF_n$  изоморфно одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$NF_n \oplus a_k; \quad NF_{n+1} \oplus a_{k-1}.$$

Напомним, что  $n$ -мерная алгебра Лейбница  $L$  называется филиформной, если  $\dim L^i = n - i$ ,  $2 \leq i \leq n$ .

Надо отметить, что филиформная алгебра является нильпотентной алгеброй нильиндекс которой совпадает с размерностью самой алгебры.

**Теорема 1.** [4] Любая  $n$ -мерная естественным образом градуированная комплексная не Лиевая алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} F_n^1 : [e_1, e_1] &= e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ F_n^2 : [e_1, e_1] &= e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$



где отсутствующие произведения равны нулю.

В работе [4] доказано, что в произвольной  $n$ -мерной комплексной филиформной алгебре Лейбница  $L$ , для которой градуированная алгебра изоморфна либо  $F_n^1$  либо  $F_n^2$ , существует базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в котором умножение алгебры  $L$  имеет один из следующих видов:

$$F_n^1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_2] = \sum_{k=4}^{n-1} \alpha_k e_k + \theta e_n, \\ [e_i, e_2] = \sum_{k=i+2}^n \alpha_{k+2-i} e_k, & 2 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

$$F_n^2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_2] = \sum_{k=4}^n \beta_k e_k, & [e_2, e_2] = \gamma e_n, \\ [e_i, e_2] = \sum_{k=i+2}^n \beta_{k+2-i} e_k, & 3 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

**Определение 2.** [5] Алгебра Лейбница  $L$  называется квази-филиформной алгеброй Лейбница, если  $L^{n-2} \neq \{0\}$  и  $L^{n-1} = \{0\}$ , где  $\dim L = n$ .

Пусть  $L$  – градуированная квази-филиформная  $n$ -мерная не Лиевая алгебра Лейбница. Если в алгебре  $L$  существует базис  $\{e_1, e_3, \dots, e_n\}$  такой, что  $[e_i, e_1] = e_{i+1}$  для  $1 \leq i \leq n-3$ , тогда алгебра  $L$  изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр Лейбница [5]:

$$NF_{n-2} \oplus \mathbb{C}^2; \quad F_{n-1}^1 \oplus \mathbb{C};$$

$$L_n^1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n + e_2, \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \end{cases} \quad L_n^2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n. \end{cases}$$

$$L_n^{1,\lambda} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \in \mathbb{C}, \end{cases} \quad L_n^{2,\lambda} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \in \{0, 1\}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_n, \end{cases}$$

$$L_n^{3,\lambda} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \in \{-1, 0, 1\}, \end{cases} \quad L_n^{4,\lambda} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \neq 0, \end{cases}$$

$$L_n^{5,\lambda,\mu} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \in \{1, 2\}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \mu e_n, & \mu \in \{1, 4\}, \end{cases} \quad L_n^6 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_2, \\ [e_{n-1}, e_n] = e_3. \end{cases}$$

Приведем классификацию одномерных центральных расширений алгебры  $F_n^1$ .

**Теорема 2.** Одномерное центральное расширение филиформной алгебры Лейбница  $F_n^1$  изоморфно одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$F_n^1 \oplus a_1; \quad F_{n+1}^1(0, \dots, 0, \alpha_4, \alpha_3), \quad \alpha_3, \alpha_4 \in \{0, 1\}; \quad L_{n+1}^{3,\lambda}; \quad L_{n+1}^{4,\lambda}; \quad L_{n+1}^{5,\lambda,\mu}; \quad L_{n+1}^1.$$

Следующий результат завершает классификацию одномерных центральных расширений естественным образом градуированных не Лиевых алгебр Лейбница.

**Теорема 3.** Одномерное центральное расширение филиформной алгебры Лейбница  $F_n^2$  изоморфно одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$F_n^2 \oplus a_1; F_{n+1}^2; F_{n+1}^2(0, \dots, 0, 0, 1); F_{n+1}^2(0, \dots, 0, 1, 0); L_{n+1}^{1,\lambda}; L_{n+1}^{2,\lambda}; L_{n+1}^2.$$

### Литература

1. Rakhimov I.S., Seyed J. L. and Mouna B. L. On Central Extensions of Nulfiliform Leibniz Algebras. International Journal of Algebra, vol. 3(6), 2009, p. 271 - 280.
2. Rakhimov I.S., Hassan. M.S. On one-dimensional Leibniz central extension of a filiform Lie algebra. Bull. Aust. Math. Soc., vol. 84, 2011, p. 205 – 224.
3. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math., vol.39, 1993, p. 269-293.
4. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сиб. Мат. Журнал, Том 42(1), 2001, с. 18-29.
5. Camacho L., Gómez J.R., González A.R., Omirov B.A. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Sym. Comp., 2009, vol. 44, p. 527-539.

Алексеева Л.А., Азиз Г.Н.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: alexeeva@math.kz, azizgulfariza@gmail.com*

## Обобщенные решения модифицированных уравнений Максвелла на основе их бикватернионного представления и их свойства

Процессы распространения электромагнитных волн в средах описываются уравнениями Максвелла (УМ). Особенности системы УМ позволяют записать их в комплексной форме, которую называют *гамильтоновой формой*, что в два раза уменьшает число уравнений и существенно упрощает процесс построения их решений [1]. Однако использование алгебры гиперкомплексных чисел, позволяет эту систему из 8 дифференциальных уравнений (два векторных и два скалярных) записать в виде лишь одного дифференциального уравнения. Это свойство УМ известно давно и имеет обширную библиографию.

Здесь с использованием дифференциальной алгебры бикватернионов рассмотрена система уравнений Максвелла, ее гамильтонова и бикватернионная формы. Бикватернионная форма УМ имеет нулевую компоненту в скалярной части бикватерниона напряженности ЭМ-поля и допускает модификацию. С введением комплексного скалярного  $\alpha$ -поля в бикватернион напряженности исследуются модифицированные бикватернионная форма, гамильтонова форма и соответственно модифицированная система уравнений Максвелла. При этом  $\alpha$ -поле связывает УМ в единую систему уравнений гиперболического типа. Хорошо известно, что этим свойством классическая система УМ не обладает.

Рассмотрены ударные электромагнитные волны как обобщенные решения биволновых уравнений [2], к которым принадлежит биформа уравнений Максвелла. Построены условия на скачки векторов напряженности ЭМ-поля на фронтах ударных волн с использованием

теории обобщенных функций на основе метода, предложенного в [3]. Показано, что на фронтах ударных волн модифицированных УМ вектора электрической и магнитной напряженности могут иметь продольную составляющую. Существование продольных ЭМ-волн давно обсуждается специалистами и предлагаются различные способы модификации УМ для их теоретического описания [4].

Проведена компьютерная реализация функционально-инвариантных решений однородной биформы модифицированных УМ в системе Mathcad, в том числе иллюстрирующие плоские продольные ЭМ-волны. Построены картины векторных полей электрической и магнитной напряженности, иллюстрирующие процессы распространения ЭМ-волн.

### Литература

1. Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения// Дифференциальные уравнения. Т.39. 2003.№6.С.769-776.
2. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations//Int.J. Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. Vol. 7. 2012. No 1. P. 19-39.
3. Алексеева Л.А. О единственности решений начально-краевых задач для уравнений Максвелла в случае ударных электромагнитных волн// Известия НАН РК. Физико-математическа.2001.№. 5. С.15-24.
4. Хворостенко Н.П. Продольные электромагнитные волны//Известия ВУЗов. Физика.-Вып 3.- 1992.-С. 24-29.  
УДК 510.67

Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш.

*Институт математики и математического моделирования  
Международный университет информационных технологий  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: vip.altayeva@mail.ru, b.kulpeshov.iitu.kz*

## Ортогональность семейства выпуклых компонент в циклически упорядоченных структурах

Пусть  $M = \langle M, =, < \rangle$  — линейный порядок. Если мы соединим два конца линейно упорядоченного множества  $M$  (возможно, это  $-\infty$  и  $+\infty$ ), то получим циклический порядок.

Более формально, *циклический порядок* описывается тернарным отношением  $K$ , которое удовлетворяет следующим аксиомам:

- (co1)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow K(y, z, x))$ ;
- (co2)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$ ;
- (co3)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow \forall t [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)])$ ;
- (co4)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \vee K(y, x, z))$ .

Настоящий доклад касается понятия *слабой циклической минимальности*, введенного в [1] и являющегося обобщением понятия *циклической минимальности*, первоначально исследованного в [2]. В работе приводится критерий неразличимости множества реализаций 1-типа для  $\aleph_0$ -категоричных слабо циклически минимальных структур (Теорема 2).

**Обозначение 1.** (1)  $K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x$ .

(2)  $K(u_1, \dots, u_n)$  обозначает формулу, говорящую, что все подкортежи кортежа  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$  (в возрастающем порядке) удовлетворяют  $K$ .

(3) Для попарно непересекающихся выпуклых множеств  $A, B, C$  мы пишем  $K(A, B, C)$ , если для любых  $a, b, c \in M$  всякий раз, когда  $a \in A, b \in B, c \in C$  мы имеем  $K(a, b, c)$ . Мы расширяем данное обозначение естественным образом, например, употребляя следующую запись  $K_0(A, b, C, D)$ .

**Определение 1.** [1] Пусть  $M$  — циклически упорядоченная структура.

(i) Пусть  $p \in S_1(\emptyset)$ . Будем говорить, что  $p$  является  $n$ -выпуклым, если для любого элементарного расширения  $N$  структуры  $M$   $p(N)$  является непересекающимся объединением  $n$  максимальных выпуклых множеств (которые называются *выпуклыми компонентами* множества  $p(N)$ ).

(ii) Будем говорить, что  $M$  является  $n$ -выпуклой, если каждый тип  $p \in S_1(\emptyset)$  является  $n$ -выпуклым, и мы говорим что  $Th(M)$  является  $n$ -выпуклой, если это имеет место для всех  $N \equiv M$ .

**Теорема 1.** [1] Пусть  $M$  — слабо циклически минимальная структура. Тогда существует  $t < \omega$  такой, что  $M$  —  $t$ -выпуклая.

Пусть  $M$  — не 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура. Тогда  $M$  является  $t$ -выпуклой для некоторого  $t \geq 1$ . В случае  $t = 1$  нетрудно понять, что существует  $\emptyset$ -определимый линейный порядок, относительно которого  $M$  является слабо о-минимальной структурой. Поэтому далее мы рассматриваем случай  $t > 1$ . Также заметим, что если  $M$   $t$ -выпуклая для некоторого  $t > 1$ ,  $M$  является не 1-транзитивной.

Пусть  $p \in S_1(\emptyset)$  — неалгебраический. Очевидно что  $p(M)$  не выпукло, и существует  $t > 1$  такой, что  $p(M)$  разбивается на  $t$  выпуклых компонент, т.е.  $p(M) = \cup_{i=1}^m U_i$ , где каждое  $U_i$  выпукло. Предположим, что  $K_0(U_1, \dots, U_m)$ . Будем говорить, что  $p(M)$  — 2-неразлично над  $\emptyset$ , если для любых  $\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a'_1, a'_2 \rangle \in [p(M)]^2$  таких, что  $a_1 \neq a_2, a'_1 \neq a'_2$  и выполняется следующее:

- (1) либо  $K(a_1, M, a_2) \subseteq U_i$  и  $K(a'_1, M, a'_2) \subseteq U_i$  для некоторого  $i \leq t$
  - (2) либо  $a_1, a'_1 \in U_i, a_2, a'_2 \in U_j$  для некоторых  $i, j \leq t$  с условием  $i \neq j$
- следует что  $tp(\langle a_1, a_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_1, a'_2 \rangle / \emptyset)$ .

Будем говорить, что  $p(M)$  —  $n$ -неразлично над  $\emptyset$  ( $n \geq 3$ ), если для любых  $n, k, n_1, \dots, n_k$  и  $i_1, \dots, i_k$  таких, что  $k \leq t, n_1 + \dots + n_k = n$  и  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t$ , и любых  $n$ -кортежей  $\bar{a} = \langle a_1^{i_1}, \dots, a_{n_1}^{i_1}; a_1^{i_2}, \dots, a_{n_2}^{i_2}; \dots, a_1^{i_k}, \dots, a_{n_k}^{i_k} \rangle, \bar{b} = \langle b_1^{i_1}, \dots, b_{n_1}^{i_1}; b_1^{i_2}, \dots, b_{n_2}^{i_2}; \dots, b_1^{i_k}, \dots, b_{n_k}^{i_k} \rangle \in [p(M)]^n$  таких, что  $a_j^{i_s}, b_j^{i_s} \in U_{i_s}$  для всех  $j \in \{1, \dots, n_s\}$  и  $s \in \{1, \dots, k\}$ ,  $K_0(a_1^{i_1}, \dots, a_{n_k}^{i_k})$  и  $K_0(b_1^{i_1}, \dots, b_{n_k}^{i_k})$ , следует что  $tp(\bar{a} / \emptyset) = tp(\bar{b} / \emptyset)$ .

Будем также говорить, что  $p(M)$  —  $n$ -неразлично над  $\emptyset$ , если для каждого  $n \in \omega$   $p(M)$  —  $n$ -неразлично над  $\emptyset$ .

Будем говорить, что неалгебраический 1-тип  $p$  имеет ранг выпуклости 1 ( $RC(p) = 1$ ), если не существует параметрически определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов в  $p(M)$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $M$  —  $\aleph_0$ -категоричная  $t$ -выпуклая слабо циклически минимальная структура,  $t > 1, p \in S_1(\emptyset)$  — неалгебраический,  $RC(p) = 1$ . Тогда каждая выпуклая компонента типа  $p$  является неразличимым множеством над  $\emptyset$ .

Пусть  $s \leq t$ . Будем говорить, что семейство выпуклых компонент  $\{U_1, \dots, U_s\}$  типа  $p$  слабо ортогонально над  $\emptyset$ , если каждый  $s$ -кортеж  $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in U_1 \times \dots \times U_s$  удовлетворяет одному и тому же типу над  $\emptyset$ . Будем говорить что семейство  $\{U_1, \dots, U_s\}$  ортогонально над  $\emptyset$ , если для любой последовательности  $(n_1, n_2, \dots, n_s) \in \omega^s$  каждый  $(n_1 + n_2 + \dots + n_s)$ -кортеж  $\langle a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n_1}; \dots; a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{n_2}; \dots; a_s^1, a_s^2, \dots, a_s^{n_s} \rangle \in (U_1)^{n_1} \times (U_2)^{n_2} \times \dots \times (U_s)^{n_s}$  с условием  $K_0(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n_1}; \dots; a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{n_2}; \dots; a_s^1, a_s^2, \dots, a_s^{n_s})$  удовлетворяет одному и тому же типу над  $\emptyset$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $M$  —  $\aleph_0$ -категоричная  $m$ -выпуклая слабо циклически минимальная структура,  $m > 1$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  — неалгебраический,  $RC(p) = 1$ . Тогда любое семейство  $\{U_1, U_2, \dots, U_s\}$  ( $s \leq m$ ) попарно слабо ортогональных выпуклых компонент типа  $p$  слабо ортогонально над  $\emptyset$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $M$  —  $\aleph_0$ -категоричная  $m$ -выпуклая слабо циклически минимальная структура,  $m > 1$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  — неалгебраический,  $RC(p) = 1$ , и пусть  $p(M) = \cup_{i=1}^m U_i$ , где каждое  $U_i$  является выпуклой компонентой типа  $p$ . Тогда любое слабо ортогональное над  $\emptyset$  семейство  $\{U_1, U_2, \dots, U_s\}$  ( $s \leq m$ ) ортогонально над  $\emptyset$ .

**Теорема 2.** Пусть  $M$  —  $\aleph_0$ -категоричная  $m$ -выпуклая слабо циклически минимальная структура,  $m > 1$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  — неалгебраический,  $RC(p) = 1$ . Тогда  $p(M)$  неразличимо над  $\emptyset \Leftrightarrow$  семейство всех выпуклых компонент типа  $p$  попарно слабо ортогонально над  $\emptyset$ .

### Литература

1. *B.Sh. Kulpeshov, H.D. Macpherson* Minimality conditions on circularly ordered structures // *Mathematical Logic Quarterly*. – 2005. – Vol. 51. – P. 377–399.
2. *H.D. Macpherson, Ch. Steinhorn* On variants of o-minimality // *Annals of Pure and Applied Logic*. – 1996. – Vol. 79. – P. 165–209.

УДК 510.67

Емельянов Д.Ю.

Новосибирский государственный университет  
(Россия, Новосибирск)

e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

### Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с унарной функцией. Пне связаны никаким термом

Исследуются алгебры распределений бинарных изолирующих формул [1] для теорий одноместных предикатов с унарной функцией.

Для произвольных значений  $n \in \omega$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$  обозначим через  $\mathfrak{B}_{n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$  алгебру  $\langle B_{n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}; * \rangle$  с носителем  $B_{n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset\}$ , задаваемую следующей таблицей:

·	0	1	2	3	...	$n$
0	{0}	{1}	{2}	{3}	...	$n$
1	{1}	{0} при $\lambda_1 = 2$ , {0, 1} при $\lambda_1 > 2$	{2}	{3}	...	{ $n$ }
2	{2}	{2}	{0, 1} при $\lambda_2 = 2$ , {0, 1, 2} при $\lambda_2 > 2$	{3}	...	{ $n$ }
3	{3}	{3}	{3}	{0, 1, 2} при $\lambda_3 = 2$ , {0, 1, 2, 3} при $\lambda_3 > 2$	...	{ $n$ }
...	...	...	...	...	...	...
$n$	{ $n$ }	{ $n$ }	{ $n$ }	{ $n$ }	...	{0, 1, ..., $n-1$ } при $\lambda_n = 2$ , {0, 1, ..., $n$ } при $\lambda_n > 2$

Очевидно, что  $\mathfrak{B}_{n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} \subset \mathfrak{B}_{n+1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}}$ .

Положим  $\mathfrak{B}_{\omega, (\lambda_i)_{i \in \omega}} \equiv \bigcup_{n \in \omega} \mathfrak{B}_{n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ .

**Теорема.** Пусть  $T$  — теория унара  $f$  с одноместными предикатами  $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$  — алгебра распределений бинарных изолирующих формул для типа  $p \in S^1(\emptyset)$ , не имеющего реализаций  $a$  и  $b$  с условием  $b = f^s(a)$  ни для какого  $s > 0$ . Тогда алгебра  $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$  задается ровно одной из следующих алгебр: либо  $\mathfrak{B}_{n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , где  $n \in \omega$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ , либо  $\mathfrak{B}_{\omega, (\lambda_i)_{i \in \omega}}$ .

Все алгебры, перечисленные в теореме, реализуются в классе теорий унаров.

Настоящая теорема вместе с результатом, анонсированным в [2], дает описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул теорий одноместных предикатов с унарной функцией над фиксированным 1-типом.

Данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4.

### Литература

1. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014.
2. Емельянов Д. Ю. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с унарной функцией // Материалы международной конференции “Мальцевские чтения”. — Новосибирск, 2015.

УДК 510.67

Замбарная Т.С.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: t.zambar@gmail.com*

## **Счётные модели теорий с линейным порядком**

Число счётных моделей теорий с  $\emptyset$ -определимым отношением линейного порядка изучалось в работах [1]-[3] и других.

Будет рассмотрено условие, похожее на двухместное отношение следования и доказано, что малая упорядоченная теория, обладающая формулой, называемой квази-следователем, имеет максимальное число счётных неизоморфных моделей.

### **Литература**

1. *Rubin M.* Theories of linear order // Israel J. Math. - 1974. - V. 17. - P. 392-443.
2. *Shelah S.* End extensions and numbers of countable models // The Journal of Symbolic Logic. - 1978. V. 43. - P. 550-562.
3. *Mayer L.* Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. - 1988. - V. 53. - P. 146-159.
4. *Alibek A., Baizhanov B.S.* Examples of countable models of weakly o-minimal theory // International Journal of Mathematics and Physics. - 2012. V. 3, №2. - P. 1-8.
5. *Alibek A.A., Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S.* Об одном условии максимальности числа счётных неизоморфных моделей полных теорий // Современная математика: проблемы и приложения: Сборник трудов международной научно-практической конференции, посвящённой научно-педагогической деятельности академика А.Д. Тайманова. - Алматы: Гылым ордасы. - 2013. С. 127-134.

УДК 620.9

Зоркальцев В.И.

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук  
(Россия, Иркутск)*

*e-mail: zork@isem.sei.irk.ru*

## **Наименее удаленные от начала координат точки линейных многообразий и полиэдров**

В докладе планируется представить результаты исследований свойств наименее удаленных от заданного вектора точек линейного многообразия и полиэдра (множества решений системы линейных неравенств) в  $R^n$  при различных определениях понятия «близость». К такой геометрической проблеме сводятся многие прикладные задачи и алгоритмы. Будут рассмотрены некоторые из них.

1. Оценка параметров зависимостей.
2. Выделение и прогнозирование составляющих временных рядов. Планируется проиллюстрировать это приложение на задачах выделения и прогнозирования тренда и сезонных колебаний.
3. Определение сбалансированных (удовлетворяющих заданной системе ограничений) решений максимально приближенных к желаемым несбалансированным решениям. В докладе планируется проиллюстрировать эту область приложений на двух моделях межотраслевого баланса.
4. Регуляризация. Вычислительные приемы повышения устойчивости получаемых решений к погрешностям счета и варьированию исходных данных. Поиск псевдорешений при противоречивых условиях.
5. Алгоритмы внутренних точек для решения задач математического программирования.

Отметим, что задача поиска наименее удаленных от заданной точки  $y$  в  $R^n$  векторов некоторого множества  $\tilde{S}$  из  $R^n$  равносильна проблеме поиска наименее удаленных от начала координат векторов множества  $S = \tilde{S} - y$ . Приведем три способа конкретизации этой проблемы в случае, когда  $S$  линейное многообразие  $R^n$ .

### 1. Минимизация штрафных функций. Обозначим

$$x(f) = \operatorname{arcm} \min \{f(x) : x \in S\}$$

точку минимума на линейном многообразии  $S$  функции  $f$ , значение которой интерпретируется как «штрафы» за отклонение вектора  $x$  от нулевого вектора.

Обозначим  $F$  множество дифференцируемых штрафных функций, которые в результате возрастающего дифференцируемого преобразования могут перейти в строго выпуклую функцию такую, что при любом  $x \in R^n$

$$\operatorname{sign} \nabla f(x) = \operatorname{sign} x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\operatorname{sign} \alpha$  знак вещественного числа  $\alpha$  равный: -1, если  $\alpha < 0$ ; 0, если  $\alpha = 0$ ; 1, если  $\alpha > 0$ .

Подмножеством  $F$  являются гельдеровские нормы

$$\rho_h^p(x) = \left( \sum_{j=1}^n |h_j x_j|^p \right)^{1/p},$$

где  $p > 1$  степенной коэффициент,  $h_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  весовые коэффициенты нормы.

Частным случаем гельдеровских норм при  $p = 2$  являются, евклидовы нормы, когда рассматриваемая проблема решается методом наименьших квадратов.

**2. Поиск парето-оптимальных решений многокритериальной проблемы минимизации абсолютных значений компонент векторов.** Множество таких решений обозначим

$$R = \left\{ x \in S : \nexists y \in S \quad \sum |y_j| < \sum |x_j|, \quad |y_j| \leq |x_j|, \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

**3. Поиск векторов с минимальными (не сужаемыми) носителями.** Носитель вектора обозначим  $J(x) = \{j : x_j \neq 0\}$ .

Векторы  $S$  с минимальными носителями обозначим

$$Q = \{q \in S : \nexists y \in S, \quad J(y) \subset J(q)\}.$$

Символом  $\subset$  обозначено соотношение строгого включения.



Приведем некоторые доказанные в [1] утверждения о свойствах и взаимосвязях введенных решений.

**Теорема 1.** При любом  $f \in F$  существует единственный вектор  $x(f)$ .

Множества решений задачи минимизации штрафных функций для всего введенного их класса и для подмножества евклидовых норм обозначим  $PF = \{x(f) : f \in F\}$ ,  $P_2 = \{x(\rho_h^2) : h_j > 0, j = 1, \dots, n\}$ .

**Теорема 2.**  $PF = P_2$ .

**Теорема 3.**  $clP_2 = R$ .

**Теорема 4.**  $Q \subseteq R$ .

**Теорема 5.**  $co Q = co R$ .

Здесь символами  $cl$  и  $co$  обозначены операции замыкания и построения выпуклой оболочки множества.

**Теорема 6.** Множество  $Q$  содержит конечное число векторов, не более чем  $C_n^m = n! / (m!(n-m)!)$ , где  $m$  размерность  $S$ .

Согласно теоремам 1-4 любое решение из рассматриваемых постановок с любой точностью может быть получено в результате использования только метода наименьших квадратов за счет выбора весовых коэффициентов. Это дает большие вычислительные и содержательные преимущества. В докладе планируется обсудить разные мотивы выбора весовых коэффициентов в методе наименьших квадратов применительно к указанным выше прикладным задачам. Планируется также рассмотреть возможности использования недифференцируемых штрафных функций, в том числе взвешенных октаэдрических и гельдеровских норм и обобщений на случай когда множество  $S$  является полиэдром [2].

Исследования выполняются при поддержке УФФН, грант № 15-07-07412а.

### Литература

1. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. - Новосибирск: Наука, 1995. - 283 с.
2. Зоркальцев В.И. Проекция точки на полиэдр. // ЖВМ и МФ. - 2013. - № 1. - С. 4-19.

УДК 510.54

Исахов Ас.А.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)

e-mail: asylissakhov@mail.ru

## Минимальные элементы в полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых семейств всюду определенных функций

Пусть  $F$  является семейством всюду определенных функций, вычислимых относительно оракула  $A$ , где  $\emptyset' \leq_T A$ . Нумерация  $\alpha : \omega \rightarrow F$  называется  $A$ -вычислимой, если бинарная функция  $\alpha(n)(x)$  является  $A$ -вычислимой, [1-3]. Если  $A$  – вычислимое множество, то мы имеем дело с семейством вычислимых функций и их классическими вычислимыми нумерациями, [4]. Семейство  $F$  называется  $A$ -вычислимой, если оно имеет  $A$ -вычислимую нумерацию. Частично упорядоченное множество  $\mathfrak{R}_A(F) = \langle \{deg(\alpha) | \alpha \in C_A(F)\}, \leq \rangle$ ,

где через  $C_A(F)$  обозначено множество всех  $A$ -вычислимых нумераций семейства  $F$ , называется полурешеткой Роджерса семейства  $F$ , [3].

Известно, что полурешетка Роджерса любого бесконечного  $\Sigma_{n+2}^0$ -вычислимого семейства множеств содержит бесконечно много минимальных элементов, и если семейство  $S \subseteq \Sigma_{n+2}^0$  имеет  $\Sigma_{n+2}^0$ -вычислимую нумерацию Фридберга, тогда  $S$  имеет бесконечно много попарно не эквивалентные положительные неразрешимые  $\Sigma_{n+2}^0$ -вычислимые нумераций и бесконечно много попарно не эквивалентные минимальные неположительные  $\Sigma_{n+2}^0$ -вычислимые нумераций, [2].

Используя обобщенные понятия вычислимости, введенные в [1–3] и основываясь на идеях из [2], мы получили следующие результаты:

Пусть  $F$  – бесконечное  $A$ -вычислимое семейство всюду определенных функций, где  $\emptyset' \leq_T A$ .

**Теорема 1 [5, 6].**  $F$  имеет бесконечно много попарно не эквивалентные  $A$ -вычислимые нумераций Фридберга.

**Теорема 2.**  $F$  имеет бесконечно много попарно не эквивалентные положительные неразрешимые  $A$ -вычислимые нумераций.

**Теорема 3.**  $F$  имеет бесконечно много попарно не эквивалентные минимальные неположительные  $A$ -вычислимые нумераций.

Из [2] также известно, что если семейство  $S \subseteq \Sigma_{n+2}^0$  содержит по крайней мере два множества  $X$  и  $Y$ , и  $\alpha$  является  $\Sigma_{n+2}^0$ -вычислимой нумерацией  $S$  такой, что множество  $\alpha^{-1}(X)$  вычислима относительно  $\emptyset'$ , то  $\text{deg}(\alpha)$  обладает минимальным покрытием.

**Теорема 4 [5, 7].** Если  $F$  содержит по крайней мере две функции, тогда  $F$  не имеет  $A$ -вычислимой главной нумерации.

**Теорема 5.** Если  $F$  содержит по крайней мере две функции, тогда степень любой  $A$ -вычислимой нумерации семейства  $F$  имеет минимальное покрытие.

### Литература

1. Гончаров С.С., Сорби А. Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. - 1997. - Т. 36, № 6. - С. 621-641
2. Бадаев С.А., Гончаров С.С. О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. - 2001. - Т. 40, № 5. - С. 507-522
3. Бадаев С.А., Гончаров С.С. Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. - 2014. - Т. 53, № 5. - С. 555-569
4. Ершов Ю.Л. Теория нумераций // Москва: Наука - 1977. - 416 с.
5. Issakhov A. Some computable numberings of the families of total functions in the arithmetical hierarchy // Bulletin of Symbolic Logic. - 2014. - V. 20, № 2. - С. 230-231
6. Исахов Ас.А. Нумерации Фридберга семейств всюду определенных функций в арифметической иерархии // Известия НАН РК. - 2014. - Т. 293, № 1. - С. 8-11
7. Исахов Ас.А. Некоторые свойства вычислимых нумераций семейств всюду определенных функций в арифметической иерархии // Вестник КазНУ. - 2014. - Т. 81, № 2. - С. 62-65

Касинов А.Н.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: kasinov07@gmail.com*

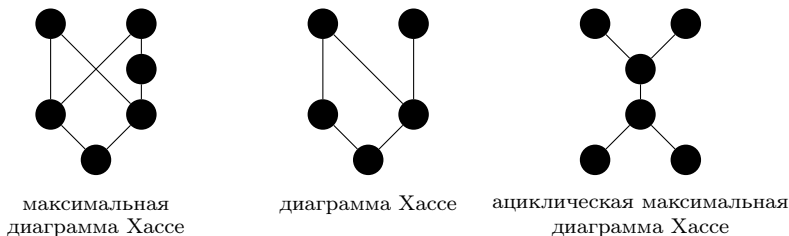
## Максимальные диаграммы Хассе

Частично упорядоченное множество (посет) – множество с бинарным отношением порядка. Диаграмма Хассе в посете – это граф, с транзитивным отношением порядка.

**Определение 1.** Посет  $P$  называется максимальным, если в посете между любыми двумя несвязными элементами нельзя дополнительно задать отношение.

**Определение 2.** Посет  $P$  называется ациклической диаграммой Хассе, если для любых несравнимых  $x, y \in P$ , одновременно не найдутся  $z$  и  $t$ , такие, что  $z \leq x, y \leq t$ .

**Пример 1.**

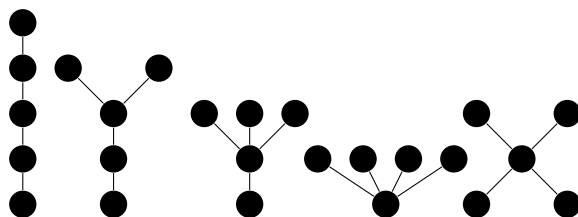


**Теорема.** Количество ациклических максимальных диаграмм Хассе с  $n$ -вершинами определяется следующей формулой

$$\frac{\frac{7+(-1)^{n+1}}{2} + (n-1)^2}{4}$$

**Пример 2.**

$n = 5$



## References

- [1] R. Stanley *Enumerative Combinatorics* // vol. 2, Cambridge University Press, New York/Cambridge, 1999.
- [2] R. Stanley *Acyclic orientations of graphs* // Discrete Math. - № 5 (1973), p. 171-178.

Конырханова А.А., Хисамиев Н.Г.

*Восточно-Казахстанский государственный технический университет им.Д.Серикбаева  
(Казахстан, Усть-Каменогорск)*

*e-mail: ErkeshanK@mail.ru*

## О вычислимых подгруппах групп $UT_n(Z[x])$

Пусть  $\omega$ —множество всех натуральных чисел,  $G$  —некоторая группа и  $v : \omega \rightarrow G$ — отображение  $\omega$  на  $G$ . Пара  $(G, v)$  называется нумерованной группой. Она называется вычислимо нумерованной группой, если существует алгоритм, который по любым числам  $n, m$  и  $s$  определяет справедливость равенств  $vn = vt$  и  $vn \cdot vt = vs$ . Группа  $G$  называется вычислимой, если существует такая её нумерация  $v$ , что пара  $(G, v)$  —вычислимо нумерованная группа. Подгруппа  $H$  нумерованной группы  $(G, v)$  называется вычислимой (вычислимо перечислимой), если множество  $v^{-1}H$  вычислимо (вычислимо перечислимо). В теории вычислимых групп основными проблемами являются: какие группы допускают вычислимые нумерации, какие её подгруппы, факторгруппы вычислимы, и т.д. В данном тезисе рассмотрены эти вопросы для группы  $UT_n(Z[x])$ , которая является классическим объектом алгебры.

Пусть  $S$  — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел и подгруппа  $G(S)$  группы  $UT_3(Z[x])$  порождена трансвекциями

$$t_{12}(sx^s) = \begin{pmatrix} 1 & sx^s & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{23}(sx^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & sx^s \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$t_{13}(x^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^n \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

где  $s \in S, n \in \omega$ .

**Теорема 1.** Пусть  $P$  — бесконечное подмножество простых чисел. Тогда факторгруппа  $\overline{G(P)} = UT_3(Z[x])/G(P)$  вычислима если и только если подмножество  $P$  вычислимо перечислимо.

**Следствие 1.** Для любого  $n \geq 3$  существует нормальная подгруппа  $G_n \triangleleft UT_n(Z[x])$  такая, что факторгруппа  $\overline{G}_n = UT_n(Z[x])/G_n$  не вычислима.

**Следствие 2.** Существует нормальная подгруппа  $N$  в  $UT_n(Z[x]), n \geq 3$ , такая, что для любой вычислимой нумерации  $\alpha$  группы  $UT_n(Z[x])$  подгруппа  $N$  не вычислима в  $(UT_n(Z[x]), \alpha)$ .

Пусть даны бесконечные подмножества простых чисел  $P, Q$  и  $P', Q'$  и взаимно однозначные отображения:

$$\alpha : P \rightarrow P', \beta : Q \rightarrow Q',$$

где  $\alpha(p) = p', \beta(q) = q', p \in P, q \in Q$ , а подгруппы  $G(P, Q)$  и  $G(P', Q')$  группы  $UT_3(Z[x])$  порождены соответственно трансвекциями  $t_{12}(x^p), t_{23}(x^q), p \in P, q \in Q$  и  $t_{12}(x^{p'}), t_{23}(x^{q'}), p' \in P', q' \in Q'$ . Тогда справедлива

**Теорема 2.** *Отображение*

$$\varphi : \{t_{12}(x^p), t_{23}(x^q) | p \in P, q \in Q\} \rightarrow \{t_{12}(x^{p'}), t_{23}(x^{q'}) | p' \in P', q' \in Q'\},$$

$$\varphi(t_{12}(x^p)) = t_{12}(x^{p'}), \varphi(t_{23}(x^q)) = t_{23}(x^{q'})$$

продолжается до изоморфизма групп

$$\varphi^* : G(P, Q) \rightarrow G(P', Q')$$

тогда и только тогда, когда справедлива эквивалентность:

$$p_i + q_i = p_r + q_r \Leftrightarrow p'_i + q'_i = p'_r + q'_r.$$

**Следствие 3.** Существует бесконечные подмножества простых чисел  $P$  и  $P'$  такие, что группы  $G(P, P)$  и  $G(P', P')$  не изоморфны.

**Следствие 4.** Существует бесконечное подмножество  $P$  простых чисел такое, что подгруппа  $G(P, P)$  является свободной нильпотентной группой степени 3.

**Следствие 5.** Существует бесконечное подмножество простых чисел  $P$  такое, что  $G(P, P)$  не является свободной нильпотентной группой степени 3.

Аналоги теоремы 2 и следствия 3–5 справедливы для любого  $n \geq 3$ . Пусть  $\gamma$ —геделева нумерация группы  $UT_n(Z[x])$ . Тогда справедлива

**Теорема 3.** Существует подгруппа  $G \leq UT_n(Z[x])$  такая, что множество  $\gamma^{-1}G$ —не вычислимо перечислимо.

Действительно, пусть  $P = \{p_k | k \in \omega\}$ —не вычислимо перечислимо множество простых чисел и группа  $G$  порождена трансвекциями  $t_{12}(p_k x^{p_k}), t_{23}(p_k x^{p_k}), t_{23}(x^{p_0})$ .

Допустим,  $\gamma^{-1}G$  — вычислимо перечислимо множество. Тогда  $\gamma^{-1}G'$  также вычислимо перечислимо, где  $G'$  — коммутант группы  $G$ . Справедлива следующая эквивалентность:

$$p_k \in P \Leftrightarrow [(t_{12}(p_k x^{p_k}), t_{23}(p_k x^{p_k})] \in G'.$$

Отсюда следует, что множество  $P$  вычислимо перечислимо. Получили противоречие. Теорема доказана.

**Теорема 4.** Любая абелева подгруппа группы  $UT_n(Z[x])$  вычислима.

### Литература

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. - Новосибирск (Сибирская школа алгебры и логики), Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1966.-360 с.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.- М.:Наука, 1996.-288 с.
3. Нуризинов М.К., Тюлюбергенов Р.К., Хисамиев Н.Г. Вычисляемые нильпотентные группы без кручения конечных размерностей// Сиб. мат. журнал.- 2014.- Т. 55, № 3.- С. 580-591.
4. Хисамиев Н.Г. О позитивных и конструктивных группах // Сиб. мат. журнал. -2012.- Т. 53, № 5.- С. 1133-1146.
5. Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивных матричных группах // Алгебра и логика.- 2004.-Т. 43, № 5.- С. 603-613.

Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., Емельянов Д.Ю.

*Международный университет информационных технологий, Институт математики и математического моделирования*

*(Казахстан, Алматы)*

*Институт математики СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет*

*(Россия, Новосибирск)*

*Новосибирский государственный университет*

*(Россия, Новосибирск)*

e-mail: b.kulpeshov.iitu.kz, sudoplat@math.nsc.ru, dima-pavlyk@mail.ru

### Задачи сопряжения, возникающие при линеаризации одной нелинейной задачи со свободными границами

В работах [1]–[9] исследуются распределения бинарных изолирующих и полуизолирующих формул, связывающих реализации типов. В настоящем докладе мы исследуем алгебры распределений бинарных изолирующих формул для  $\aleph_0$ -категоричных слабо о-минимальных теорий.

**Пример 2.** [10] Пусть  $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$  — линейно упорядоченная структура такая, что  $M$  есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов  $P_1$  и  $P_2$ , при этом  $P_1(M) < P_2(M)$ . Мы отождествляем интерпретацию  $P_2$  с множеством рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , упорядоченном как обычно, а  $P_1$  с  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , упорядоченном лексикографически. Символ  $f$  интерпретируется частичной унарной функцией с  $Dom(f) = P_1(M)$  и  $Range(f) = P_2(M)$  и определяется равенством  $f((n, m)) = n$  для всех  $(n, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

Можно понять, что  $M$  —  $\aleph_0$ -категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть  $p := \{P_1(x)\}$ ,  $q := \{P_2(x)\}$ . Очевидно что  $p, q \in S^1(\emptyset)$ .

Пусть  $\rho_{\nu(q)} = \{0, 1, 2\}$ ,  $\rho_{\nu(p)} = \{0, 3, 4, 5, 6\}$ . где

$$\theta_0(x, y) := x = y, \quad \theta_{q,1,q}(x, y) := x < y \wedge P_2(y), \quad \theta_{q,2,q}(x, y) := x > y \wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,3,p}(x, y) := x < y \wedge E(x, y) \wedge P_1(y), \quad \theta_{p,4,p}(x, y) := x > y \wedge E(x, y) \wedge P_1(y),$$

$$\theta_{p,5,p}(x, y) := x < y \wedge \neg E(x, y) \wedge P_1(y), \quad \theta_{p,6,p}(x, y) := x > y \wedge \neg E(x, y) \wedge P_1(y)$$

Тогда алгебра  $\mathfrak{F}_{\nu(q)}$  задаётся следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{1}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{2}

Для алгебры  $\mathfrak{F}_{\nu(p)}$  задающая таблица имеет следующий вид:

$\cdot$	0	3	4	5	6
0	{0}	{3}	{4}	{5}	{6}
3	{3}	{3}	{0, 3, 4}	{5}	{6}
4	{4}	{0, 3, 4}	{4}	{5}	{6}
5	{5}	{5}	{5}	{5}	{0, 3, 4, 5, 6}
6	{6}	{6}	{6}	{0, 3, 4, 5, 6}	{6}

Согласно задающим таблицам алгебры  $\mathfrak{F}_{\nu(p)}$  и  $\mathfrak{F}_{\nu(q)}$  являются коммутативными моноидами, причём моноид  $\mathfrak{F}_{\nu(q)}$  изоморфен ограничению моноида  $\mathfrak{F}_{\nu(p)}$  на множество  $\{0, 3, 4\}$ .

Слегка подправляя определение ранга выпуклости формулы, введенное в [11], будем говорить, что ранг выпуклости формулы  $\phi(x)$  является *бинарным* и обозначать его через  $RC_{bin}(\phi(x))$ , если параметрически определяемые отношения эквивалентности заменим на  $\emptyset$ -определяемые (т.е. бинарные). Тогда очевидно, что в произвольной  $\aleph_0$ -категоричной слабо  $o$ -минимальной теории  $RC_{bin}(p) < \omega$  для любого  $p \in S^1(\emptyset)$ .

Обозначим через  $\mathfrak{A}_n$  моноид, соответствующий типу, имеющему бинарный ранг выпуклости  $n$ , и будем называть его  $(P, \aleph_0, n)$ -*от-моноидом*.

**Теорема 1.** Пусть  $T$  —  $\aleph_0$ -категоричная слабо  $o$ -минимальная теория,  $r \in S^1(\emptyset)$ . Тогда  $\mathfrak{F}_{\nu(r)}$  —  $(P, \aleph_0, n)$ -от-моноид  $\Leftrightarrow RC_{bin}(r) = n$ .

Будем говорить, что алгебра  $\mathfrak{F}_{\nu(\{p,q\})}$  является *обобщенно коммутативной*, если существует взаимно однозначное отображение  $\pi : \rho_{\nu(p)} \rightarrow \rho_{\nu(q)}$ , свидетельствующее о том, что алгебры  $\mathfrak{F}_{\nu(p)}$  и  $\mathfrak{F}_{\nu(q)}$  изоморфны, и для любых  $l \in \rho_{\nu(p,q)}$ ,  $m \in \rho_{\nu(q,p)}$  имеет место  $\pi(l \cdot m) = m \cdot l$ .

**Теорема 2.** Пусть  $T$  —  $\aleph_0$ -категоричная слабо  $o$ -минимальная теория,  $p, q \in S^1(\emptyset)$ . Тогда алгебра  $\mathfrak{F}_{\nu(\{p,q\})}$  — обобщенно коммутативный моноид  $\Leftrightarrow RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$ .

## Литература

1. A. Pillay Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – Vol. 89, No. 4. – P. 666–672.
2. B.S. Baizhanov Orthogonality of one types in weakly  $o$ -minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov. – Novosibirsk : NSTU, 1999. – P. 5–28.
3. B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov On behaviour of 2-formulas in weakly  $o$ -minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Singapore, World Scientific : 2006. – P. 31–40.
4. S.V. Sudoplatov Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // J. Math. Sciences. – 2010. – Vol. 169, No. 5. – P. 680–695.
5. B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // SEMR. – 2012. – Vol. 9. – P. 161–184.
6. S.V. Sudoplatov Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk : NSTU, 2014. – 356 p.
7. I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // SEMR. – 2014. – Vol. 11. – P. 380–407.
8. S.V. Sudoplatov Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // SEMR. – 2014. – Vol. 11. – P. 408–433.
9. S.V. Sudoplatov Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for  $\aleph_0$ -categorical theories // International Math. Forum. – 2014. – Vol. 9, No. 21. – P. 1029–1033.

10. *H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 352. – P. 5435–5483.
11. *B.Sh. Kulpeshov* Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – Vol. 63. – P. 1511–1528.

УДК 510.67

Кунгожин А.М.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: kungozhin@gmail.com*

## Нахождение базисных тождеств одной алгебры нечеткой ЛОГИКИ

В данной работе мы изучаем алгебраическую систему  $A = \langle \mathbb{R}, \neg, \cdot, = \rangle$ , где основное множество состоит из действительных чисел, имеется одна унарная операция  $\neg x = 1 - x$  (*отрицание*), одна бинарная операция  $(\cdot)$  – обычное умножение. Отметим, что эти операции фундаментальны в нечеткой логике Заде [1], которая за последние 50 лет стала одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математики.

**Определение.** *Базисом* во множестве тождеств называется такое его подмножество, что любое тождество оказывается его логическим следствием.

Хорошо известна теорема Биркгофа [3] о полноте эквационального исчисления, согласно которой с помощью правила подстановки из системы тождеств и аксиом равенства можно получить все тождества, являющиеся логическими следствиями этой системы.

Тогда оказывается справедливой следующая теорема [2].

**Теорема.** *Система тождеств алгебры  $A$  не имеет конечного базиса.*

В настоящий момент автором проводятся попытки построить хотя бы один из таких базисов. Для этого находят все нетривиальные тождества от одной переменной заданной степени, а затем находят базисные тождества от нескольких переменных для них. Например, доказано, что не существует тождеств степени меньше 4. Для степени 4 найдены 3 нетривиальных независимых тождества.

### Литература

1. *L. Zadeh*, Fuzzy sets // Inform. and Control 8 (1965), p. 338-353.
2. *Кунгожин А.М.*, Неконечная базисуемость одной числовой системы // Алгебра и логика - т. 51, №1, 2012, стр. 82-95.
3. *G. Birkhoff*, On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc. - 31, № 4 (1935), 433-454.



Латкин И.В., Хисамиев Н.Г.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева  
(Казахстан, Усть-Каменогорск)

e-mail: lativan@yandex.ru, hisamiev@mail.ru

## Вычислимость нильпотентного произведения вычислимых абелевых групп без кручения

Напомним, что нильпотентное произведение  $A *_n B$  степени  $n$  групп  $A$  и  $B$  определяется как фактор группа свободного произведения  $A * B$  по подгруппе  $\gamma_{n+1}(A * B) \cap [A, B]$  [1], где  $\gamma_{n+1}G$  —  $(n + 1)$ -й член нижнего центрального ряда группы  $G$ , а  $[A, B]$  — взаимный коммутант подгрупп  $A$  и  $B$  в  $A * B$ . Поскольку подгруппы  $[A, B]$  и  $\gamma_{n+1}(A * B)$  вычислимо перечислимые в  $A * B$ , если группы  $A$  и  $B$  имеют позитивные нумерации [1,2], то гёделевская нумерация нильпотентного произведения  $A *_n B$ , построенная по этому представлению для таких сомножителей, — позитивная [2]. Вычислимость группы  $A *_n B$ , даже в случае, когда нумерации  $\alpha$  и  $\beta$  — вычислимые, а группа  $B$  — циклическая и  $n = 2$ , утверждать нельзя, как показывает пример из [3]. Тем не менее, справедливо следующее

**Предложение 1.** *Нильпотентное произведение  $A *_2 B$  степени 2 вычислимых абелевых групп  $A$  и  $B$  без кручения — конструктивизируемо.*

**Доказательство.** Для группы  $A$  возьмём произвольную вычислимую нумерацию (конструктивизацию). Выберем такую конструктивизацию группы  $B$ , в которой имеется алгоритм линейной зависимости, а значит и вычислимо перечислимый базис  $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$  [4,5]. Точнее, для всех  $k \in \omega$ , любых  $m_0, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$  из  $b_0^{m_0} \cdot \dots \cdot b_k^{m_k} = 1$  следует  $m_0 = \dots = m_k = 0$ ; и для каждого не единичного элемента  $b$  группы  $B$  найдутся такие  $m, m_0, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ , что  $b^m = b_0^{m_0} \cdot \dots \cdot b_k^{m_k}$ , т.е. элемент  $b$  представим как «линейная» комбинация базисных с рациональными коэффициентами:

$$b = (b_0^{m_0} \cdot \dots \cdot b_k^{m_k})^{m^{-1}}.$$

Если  $\text{НОД}(m, m_0, \dots, m_k) = 1$ , то такое представление для элемента  $b$  — единственное, в этом случае число  $m$  назовём *знаменателем* элемента  $b$ .

Рассмотрим описанную выше каноническую нумерацию  $A *_2 B$  построенную по этим нумерациям групп  $A$  и  $B$ . Поскольку нильпотентное произведение — это частный случай вербального произведения, и потому вполне регулярно, то оба сомножителя  $A$  и  $B$  изоморфно вкладываются в  $A *_2 B$  и имеют тривиальное пересечение с взаимным коммутантом  $[A, B]$ , который совпадает со всем коммутантом нильпотентного произведения [1]. В силу этого группы  $A$  и  $B$  можно отождествить с их копиями в  $A *_2 B$ , а каждый элемент  $g$  из  $A *_2 B$  эффективно и однозначно представить в виде

$$g = abc,$$

где  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in [A, B]$ , и  $g = 1$  равносильно тому, что  $a = b = c = 1$ .

Равенства  $a = 1$ ,  $b = 1$  проверяются непосредственно с использованием конструктивизаций групп  $A$  и  $B$ . Для проверки равенства  $c = 1$  находим представление элемента  $c$  в виде какого-либо произведения коммутаторов от элементов группы  $A$  и «линейных» комбинаций базисных элементов группы  $B$ , т.е. коммутаторов вида  $[a, (b_0^{m_0} \cdot \dots \cdot b_k^{m_k})^{m^{-1}}]$ .

Вспомним, что взаимный коммутант  $[A, B]$  нильпотентного произведения степени 2 абелевых групп  $A$  и  $B$  изоморфен их тензорному произведению  $A \otimes B$  как  $\mathbb{Z}$ -модулей [6], и если группы  $A$  и  $B$  не имеют кручения, то  $A \otimes B$  — такая же группа [7]. Поэтому  $c = 1$  равносильно тому, что  $c^k = 1$  при любом  $k > 1$ . Выберем  $k = \text{НОК}(n | n \in \mathbb{Z}, n \text{ встречается в качестве знаменателя в какой-то «линейной» комбинации при записи элемента } c)$ . Пусть  $B_1$  — подгруппа группы  $B$ , порождённая всеми элементами  $b_j$ , которые участвуют в записи элемента  $c$ . Так как  $A$  и  $B$  абелевы группы без кручения, то  $A \otimes B_1$  изоморфно подгруппе в  $A \otimes B$ , порождённой  $\{a \otimes b_j | a \in A, b_j \text{ участвует в записи элемента } c\}$  [7, теорема 60.6].

Таким образом,  $c = 1$  в группе  $[A, B]$  тогда и только тогда, когда  $c^k = 1$  в группе  $[A, B_1]$ . Но при выбранном  $k$  элемент  $c^k$  представляется уже в виде произведения коммутаторов вида  $[a, b_j]^t = [a^t, b_j]$ . Соберём в этом произведении в один блок все коммутаторы вида  $[a, b_j]$ , где  $b_j$  — одно и то же для всех коммутаторов данного блока. Ввиду того, что  $B_1$  — прямое произведение циклических групп  $(b_j)$ , и учитывая дистрибутивность тензорного произведения относительно прямых сумм [7], получаем, что  $c^k = 1$  равносильно тому, что произведение элементов каждого блока

$$[a(0), b_j] \cdot \dots \cdot [a(r), b_j] = [a(0) \cdot \dots \cdot a(r), b_j]$$

равно 1. А последнее верно, если и только если  $a(0) \cdot \dots \cdot a(r) = 1$  как элемент группы  $A$ , так как  $[A, \text{gp}(b_j)] \cong A \otimes \mathbb{Z} \cong A$  [7].

**Предложение 2.** *Тензорное произведение вычислимо перечислимо определённых абелевых групп без кручения — вычислимо.*

Этот факт был ранее доказан в [8] в несколько более общей форме, там же показано, что групп, имеющих элементы конечного порядка, это неверно. Он также следует из того, что если гёделевская нумерация тензорного произведения  $A \otimes B$  абелевых групп  $A$  и  $B$ , рассматриваемого как фактор прямого произведения по подходящей подгруппе [7], строится по позитивным нумерациям сомножителей, то эта нумерация является тоже позитивной. Согласно [7], абелева группа  $A \otimes B$  — без кручения, если  $A$  и  $B$  таковы, а потому она имеет вычислимую нумерацию [9].

## Литература

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
2. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 348 с.
3. Латжин И.В. Конструктивизируемые группы, нильпотентное произведение которых не конструктивизируемо // Тез. докл. VIII Всесоюз. конф. по мат. логике. — Москва, 1986. — С. 91.
4. Нуртазин А.Т. О конструктивных группах // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. по мат. логике. — Кишинёв, 1976. — С. 104.
5. Добрица В.П. Некоторые конструктивизации абелевых групп // Сиб. мат. ж. — 1983. — Т. 24, № 2. — С. 18–25.
6. MacHenry T. The tensor product and the 2-nd nilpotent product of groups // Math. J. — 1960. — V 73, № 1. — P. 134–145.
7. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. Т. 1. — 336 с.

8. Латкин И.В. О конструктивизируемости тензорного произведения модулей // Сиб. мат. ж. – 2002. – Т. 43, № 2. – С. 414–418.
9. Хисамиев Н.Г. Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. – 1986. – Т. 25, № 2. – С. 205–226.

УДК 514.7

Мажитова А.Д.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
(Казахстан, Алматы)

e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz

## Субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ с правоинвариантным распределением

Мы находим решения системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x; \quad \dot{p}_x = \frac{x}{(x^2+1)^2} (-xp_y + p_z)^2 + \frac{1}{(x^2+1)} (-xp_y + p_z)p_y, \\ \dot{y} &= -\frac{x}{(x^2+1)} (-xp_y + p_z); \quad \dot{p}_y = 0, \\ \dot{z} &= \frac{1}{(x^2+1)} (-xp_y + p_z); \quad \dot{p}_z = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с гамильтонианом  $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2(x^2+1)} (-xp_y + p_z)^2$  для субримановой задачи на трехмерной разрешимой группе Ли  $SOLV^+$ , представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

с левоинвариантной метрикой и с правоинвариантным распределением. Эта система имеет три первых интеграла:  $I_1 = H$ ,  $I_2 = p_y$ ,  $I_3 = p_z$ , значит эта система дифференциальных уравнений полностью интегрируема. Рассмотрим нормальные геодезические с начальными данными:  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ , и будем полагать, что  $H = \frac{1}{2}$ ,  $p_y = a$ ,  $p_z = b$ . Подставим эти выражения в гамильтониан и получим

$$1 = p_x^2 + \frac{1}{x^2+1} (-ax + b)^2. \quad (2)$$

Тогда верно следующее: Если  $p_x \equiv 0$ , то

$$x(t) = x_0 \quad y(t) = ct + y_0, \quad z(t) = dt + z_0,$$

где

$$d = \frac{-ax_0 + b}{x_0^2 + 1}, \quad c = -x_0 d.$$

Пусть  $p_x > 0$ , тогда из (2) выразим  $p_x$ , подставим его в первое уравнение системы (1) и найдем интеграл для переменной  $t$ :

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{(-ax+b)^2}{x^2+1}}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1} dx}{\sqrt{(1-a^2)x^2 + 2abx + 1 - b^2}}; \quad (3)$$

Этот интеграл в общем случае выражается в специальных эллиптических функциях

$$\begin{aligned}
 t = & \frac{1}{k} \mathbf{F}(\arccos m\xi, k) + p_1 \mathbf{\Pi}(\arccos m\xi, n, k) + p_2 \cdot \mathbf{E}(\arccos m\xi, k) + \\
 & + p_3 \cdot \frac{\xi \cdot \sqrt{(1 + \xi^2) \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 1} - \xi^2 \right)}}{1 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \xi^2} + \\
 & + p_4 \cdot \sqrt{A \left( \xi^2 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{-2} + B \left( \xi^2 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{-1} + C} + \\
 & + p_5 \cdot \arcsin \frac{2A \left( \xi^2 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{-1} + B}{p_6}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 m &= \sqrt{a^2 + b^2 - 1}, \quad n = \frac{b^2}{b^2 - a^2(a^2 + b^2 - 1)}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\
 p_1 &= \frac{a^2(a^2 + b^2 - 1)}{\sqrt{a^2 + b^2}(a^2(a^2 + b^2 - 1) - b^2)} \times \\
 & \times \left[ \frac{b^4 - a^2 + a^2 b^2}{a^2 b^2} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{2a^4(1 - a^2) - a^4 + a^2 b^2}{2(b^4(1 + a^2) + a^4(1 - a^2))} \right) - \frac{(a^2 + b^2)(3a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \right], \\
 p_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot (b^4 - a^4 + a^2 b^2)}{b^4(1 + a^2) + a^4(1 - a^2)}, \\
 p_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2(b^4 - a^4 + a^2 b^2)(a^2 + b^2 - 1)}{a^2(b^4(1 + a^2) + a^4(1 - a^2))}, \\
 p_4 &= -\frac{a\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{b^3(a^2 + b^2)(1 - a^2)}, \quad p_5 = -\frac{b^3\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{2a(a^2 - 1)^{3/2}}, \\
 p_6 &= b^4 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - 1}} \\
 A &= \frac{(a^2 + b^2)^2(1 - a^2)}{a^2 + b^2 - 1}, \quad B = \frac{(a^2 + b^2)(2(1 - a^2) - b^2)b^2}{a^2 + b^2 - 1}, \quad C = -b^4
 \end{aligned}$$

Функции  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  и  $\mathbf{E}$  являются эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода соответственно. Если в (4) сделать обратную замену переменной  $\frac{b}{a} \xi = \frac{x - \frac{b}{a}}{x + \frac{a}{b}}$ , а затем обратить его в эллиптических функциях, можно получить зависимость функции  $x$  от  $t$ , которые при подстановке в систему (1) дают уравнения геодезических.

### Литература

1. *Agrachev A. and Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. -2012. -Vol. 18, № 3. -P. 21-44.
2. *Мажитова А. Д.* Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Математические труды. -2012. - Т. 15, № 1. - С. 120-128.
3. *Mazhitova A. D.* Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group  $SOLV^-$  // Journal of Dynamical and Control Systems. -2012. - Vol. 18, № 3. - P. 309-322.
4. *Мажитова А. Д.* Нормальный субриманов геодезический поток на группе  $E(2)$ , порожденный левоинвариантной метрикой и правоинвариантным распределением // Сибирский математический журнал. Сентябрь-октябрь, -2014. Том 55, №5. -С. 1161-1166.

Макажанова Т.Х.

*Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова  
(Казахстан, Караганда)**e-mail: makazhanova48@mail.ru***Неподвижные точки отображений упорядоченных пространств**

Пусть  $X$  множество точек, бинарное отношение « $>$ » со свойствами

- 1)  $x > y \Rightarrow x \neq y$ ;
- 2)  $x > y, y > z \Rightarrow x > z$  назовём отношением порядка.

Отношение  $x \geq y$  равносильно тому, что  $x > y$  или  $x = y$ .

Множество  $X$  с отношением  $\geq$  назовём упорядоченным множеством и обозначим  $(X, \geq)$ .

Пусть  $A \subset (X, \geq)$ , будем говорить, что  $x$  - минимальный элемент в  $A$ , если  $x \in A$  и из условия  $a \in A$  и  $a \leq x$  следует, что  $x = a$ .

Множество  $(X, \geq)$  удовлетворяет условию минимальности, если любое непустое подмножество в  $(X, \geq)$  имеет минимальный элемент.

Пусть  $A \subset (X, \geq)$ ,  $x \in A$ ,  $x$  будет наибольшим элементом в  $X$ , если  $x \geq a \quad \forall a \in A$ .

Множество  $(X, \geq)$  линейно упорядочено, если  $x \geq y$  или  $y \geq x \quad \forall x, y \in X$ .

Линейно упорядоченное множество  $(X, \geq)$  называется вполне упорядоченным, если в нём выполнено условие минимальности.

Если  $(X, \geq), (Y, \geq)$  - упорядоченные множества,  $f : X \rightarrow Y$ , то  $f$  будет монотонно возрастающим, если  $f(x_1) \geq f(x_2)$  для  $x_1 \geq x_2$ .

Если  $f : X \rightarrow X$  и  $f(x) = x$ , то точка  $x$  называется неподвижной точкой отображения  $f$ .

Рассмотрим некоторые условия существования неподвижных точек отображений упорядоченных пространств.

**Предложение 1.** Пусть  $(X, \geq)$  удовлетворяет условию минимальности,  $f : X \rightarrow X$  и  $f$  монотонно возрастает;  $\exists x_0 \in X: f(x_0) \leq x_0 \Rightarrow f$  имеет неподвижную точку.

*Доказательство.* Образует последовательность:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Из монотонного возрастания отображения  $f$  имеем:

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

Из условия минимальности  $(X, \geq)$  получаем, что последовательность  $\{x_n\}_n$  имеет минимальный элемент  $x_{n_0}$ . Из построения последовательности следует, что  $x_{n_0+1} = f(x_{n_0}) \leq x_{n_0}$ , а так как  $x_{n_0}$  минимальный элемент последовательности  $\{x_n\}_n$ , то  $x_{n_0+1} = x_{n_0} = f(x_{n_0})$ , т.е.  $x_{n_0}$  - неподвижная точка  $f$ .

**Замечание 1.** Из доказательства получаем, что выполнение условия минимальности достаточно требовать для линейно упорядоченных подмножеств в  $(X, \geq)$ .

**Замечание 2.** Из доказательства следует, что для любого  $x_0 : f(x_0) \leq x_0$  существует неподвижная точка  $x \leq x_0$ .

**Замечание 3.** В качестве  $(X, \geq)$  можно брать вполне упорядоченное множество.

Рассмотрим приведённое в предложении 1 условие существования  $x_0 : f(x_0) \leq x_0$ .

Очевидно, оно выполняется в упорядоченном множестве  $(X, \geq)$ , имеющем наибольший элемент  $x_0 \geq x \quad \forall x \in X$ , а значит  $x_0 \geq f(x_0) \quad \forall f$ .

Согласно [1], для введённой в  $(X, \geq)$  левой топологии  $\tau_l$  и отображения  $f : (X, \tau_l) \rightarrow (X, \tau_l)$  имеем эквивалентность условия непрерывности  $f$  монотонному возрастанию  $f$ .

Направленным является множество  $(X, \geq)$  такое, что  $\forall x_1, x_2 \in X \exists x_3 \in X : x_3 \geq x_1, x_3 \geq x_2$ .

Направленность, очевидно, следует из линейной упорядоченности (а значит и вполне упорядоченности) множества.

В [2] показано, что направленное множество  $(X, \geq)$  такое, что  $(X, \tau_l)$  компактно, имеет наибольший элемент.

С учётом вышесказанного справедливо

**Предложение 2.** Пусть  $(X, \geq)$  направленное, удовлетворяющее условию минимальности множество;  $(X, \tau_l)$  - компактно,  $f : (X, \tau_l) \rightarrow (X, \tau_l)$  и  $f$  непрерывно  $\Rightarrow f$  имеет неподвижную точку.

### Литература

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. - Москва: Наука, 1968. - 272 с.
2. Макажанова Т.Х., Муканов А.А. Левая топология в упорядоченных пространствах. Компактность // Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». - Караганда: КарГУ, 2014. -С. 64.

УДК 512.542

### Ревин Д.О.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН (Россия, Новосибирск)

e-mail: revin@math.nsc.ru

### Обобщение теоремы Виланда о нильпотентных холловых подгруппах

Знаменитая теорема Силова утверждает, что для любой конечной группы  $G$  и любого простого числа  $p$

(1) группа  $G$  содержит  $p$ -подгруппу  $P$ , индекс которой не делится на  $p$ , и

(2) любая  $p$ -подгруппа группы  $G$  сопряжена с подгруппой из  $P$ .

(Напомним, что  $p$ -группой принято называть группу, порядок которой является степенью числа  $p$ , а  $p$ -подгруппа конечной группы, у которой индекс не делится на  $p$  и существование которой гарантирует теорема Силова, называется *силовской  $p$ -подгруппой*.)

Силовские  $p$ -подгруппы являются частным случаем т. н.  $\pi$ -холловых подгрупп. Пусть  $\pi$  — некоторое фиксированное множество простых чисел. Подгруппа  $H$  конечной группы называется  $\pi$ -холловой, если все простые делители ее порядка принадлежат  $\pi$  (т. е.  $H$  —  $\pi$ -группа), а ее индекс не делится на числа из  $\pi$ .

В соответствии с определением Х. Виланда говорят, что для конечной группы  $G$  справедлива  $\pi$ -теорема Силова, если

(1)  $G$  содержит  $\pi$ -холлову подгруппу  $H$  и

(2) в  $G$  любая  $\pi$ -подгруппа сопряжена с подгруппой из  $H$ .

Известная теорема Холла-Чунихина утверждает, что конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда для неё справедливы  $\pi$ -теоремы Силова при всех возможных  $\pi$ .

В 1954 году в работе [1] Виланд показал, что для конечной группы, обладающей нильпотентной  $\pi$ -холловой подгруппой, справедлива  $\pi$ -теорема Силова (напомним, что для конечной группы условие нильпотентности равносильно тому, что группа является прямым произведением своих силовских подгрупп). Таким образом, свойства нильпотентных холловых подгрупп полностью аналогичны свойствам силовских подгрупп. Результат Виланда 1954 года считается классическим. Он включен во многие известные учебники и монографии по конечным группам и играет в получении терем силовского типа исключительно важную роль.

В 1959 году [2] Виланд усилил свой результат, установив, что  $\pi$ -теорема Силова справедлива для конечной группы  $G$ , если для некоторых непересекающихся подмножеств  $\sigma$  и  $\tau$  множества  $\pi$  в группе  $G$  справедлива  $\sigma$ -теорема Силова и  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $G$  является прямым произведением  $\sigma$ -подгруппы и нильпотентной  $\tau$ -подгруппы.

В той же работе [2] Виланд спрашивает, можно ли ослабить требование нильпотентности  $\tau$ -подгруппы (которая, легко видеть, будет  $\tau$ -холловой подгруппой в  $G$ ), потребовав выполнения  $\tau$ -теоремы Силова для  $G$ .

Используя классификацию холловых подгрупп в конечных простых группах, Е.П.Вдовину, В.Го и автору [3] удалось получить положительное решение проблемы Виланда. Более точно, доказано следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел, причем  $\pi = \sigma \cup \tau$  для непересекающихся подмножеств  $\sigma$  и  $\tau$ , и конечная группа  $G$  содержит  $\pi$ -холлову подгруппу, являющуюся прямым произведением  $\sigma$ -подгруппы и  $\tau$ -подгруппы. Тогда для группы  $G$  справедлива  $\pi$ -теорема Силова если и только если для  $G$  справедливы одновременно  $\sigma$ - и  $\tau$ -теоремы Силова.

Понятно, что теорема Виланда 1959 года прямо вытекает из данного утверждения. Кроме того, поскольку нильпотентная холлова подгруппа является прямым произведением своих силовских подгрупп, а также с учетом теоремы Силова, из данного результата по индукции выводится теорема Виланда 1954 года.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 14-21-00065).

### Литература

1. Wielandt H. Zum Satz von Sylow // Math. Z. - 1954. - Т. 60, № 4. - С. 407-408.
2. Wielandt H. Zum Satz von Sylow, II // Math. Z. - 1959. - Т. 71, № 4. - С. 461-462.
3. Guo W., Revin D. O., Vdovin E. P. Confirmation for Wielandt's conjecture // сдано в J. Algebra.

Abdykassymova S.

*Institute of mathematics and mathematical modeling (Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: saule\_asan@hotmail.com*

## Assosymmetric operad is not Koszul

Assosymmetric algebras are defined by the following identities (see [1])

$$(a, b, c) = (a, c, b) = (b, a, c),$$

where  $(a, b, c) = a(bc) - (ab)c$  is associator. Free assosymmetric algebras was described in [3]. Dimensions of homogeneous components of free assosymmetric algebras can be calculated by combinatorial methods

**Theorem 1.** *Let  $F(q)$  be free assosymmetric algebra generated by  $q$  elements  $a_1, \dots, a_q$ . Let  $F_n(q)$  be a subspace of free assosymmetric algebra  $F(q)$  of degree  $n$  and  $F_n^{multi}$  be multi-linear part of  $F_n(n)$ . Then*

$$\begin{aligned} \dim F_n(q) &= \\ q^n + \binom{n+2q-1}{n} - \binom{q+1}{2} \binom{n+q-3}{n-2} - q \binom{n+q-2}{n-1} - \binom{n+q-1}{n}, \\ \dim F_n^{multi} &= n! + 2^n - \binom{n+1}{2} - 1. \end{aligned}$$

**Theorem 2.** *Assosymmetric operad is not Koszul.*

Dual operad to assosymmetric operad is generated by identities

$$\begin{aligned} [a, b]c + [b, c]a + [c, a]b &= 0 \\ (a, b, c) &= 0 \end{aligned}$$

Let  $d_n^!$  are dimensions of multilinear part of free algebra with such identities. Then

$$d_1^! = 1, d_2^! = 2, d_3^! = 5, d_4^! = 9, d_5^! = 9, d_6^! = 11, d_7^! = 13.$$

Generating functions of assosymmetric and dual assosymmetric operads looks like

$$\begin{aligned} G_{assym}(x) &= -x + 2x^2/2! - 7x^3/3! + 29x^4/4! - 136x^5/5! + O(x)^6, \\ G_{assym}^!(x) &= -x + 2x^2 - 5x^3/3! + 9x^4/4! - 9x^5/5! + O(x)^6. \end{aligned}$$

and

$$G_{assym}(G_{assym}^!(x)) = x + 3x^5/8 + O(x)^6 \neq x.$$

So, by Koszulity criterium ( [2] Proposition 4.14(b) ) assosymmetric operad is not Koszul.

### References

1. A.H. Boers, *On assosymmetric rings*, Indag. Math. (N.S.), **5**(1994), 9-27.
2. V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., **76**(1994), 203-272; Erratum: **80**(1995), 293; arXiv: 0709.1228.
3. I.R. Hentzel, D.P. Jacobs, L.A. Peresi, *A basis for free assosymmetric algebras*, J. Algebra, **183**(1996), 306-318.



Alexeyeva L.A.

*Institute of mathematics and mathematical modeling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: alexeeva@math.kz*

## **Biquaternionic wave equations and generalized solutions**

Here the biquaternionic wave (*biwave*) equation is studied on the basis of differential algebra of biquaternions and the theory of generalized functions. The generalized decisions of biwave equations with biquaternionic representation of its structural coefficient are considered in the Minkowski space  $\mathbb{M}$ :

$$\mathbf{A} \circ \nabla^\pm \mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \mathbb{M}, \quad (1)$$

Here *structural coefficient*  $\mathbf{F} = f + F$  is constant biquaternion. Biquaternionic production is defined as

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{B} = (f + F) \circ (b + B) = fb - (F, B) + fB + bF + [F, B],$$

$f$  and  $F$  are scalar and vector parts of biquaternion.

Biquaternionic differential operator

$$\nabla^\pm = \partial_\tau \pm i\nabla$$

are named *mutual bigradients*. Their action is defined like to biquaternionic multiplication:

$$\nabla^\pm \mathbf{B} \stackrel{\Delta}{=} (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (b(\tau, x) + B(\tau, x)) \equiv \partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B \pm i \operatorname{grad} b + \partial_\tau B \pm i \operatorname{rot} B$$

Special cases of this equation when  $\mathbf{A} = 1$ ,  $\mathbf{F} = 0$  or  $\mathbf{F} = f$  is imaginary complex number give biquaternionic representation of Maxwell and Dirac equations. They were studied by author earlier [1-3].

Non-stationary, harmonious and static solutions of this equation are constructed by the different its right part from the space of distributions. The properties of elementary solutions of Eq.(1) are studied and generated by them scalar and vector fields are considered.

This theory can be used for construction of solutions of the equations of charge-currents transformation under action of external electro-gravimagnetic fields for a one biquaternionic model of electro-gravimagnetic fields and their interactions, which was elaborated by author earlier [4,5].

### **References**

1. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов // Математический журнал, **10**(2010), N 1, 33-41; **10**(2010), N 4,5-13; **11**(2011), N 1, 33-41, **10**(2012) (see [www.math.kz](http://www.math.kz))
2. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов в уравнениях математической и теоретической физики // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике - **9** (2012).- № 2. - С.71-97
3. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Int.J. Clifford Analysis, Clifford algebras and applications - **7** (2012).- No 1.-P.19-39

4. Alexeyeva L.A. Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions // Ashdin publishing. Journal of Physical Mathematics. **1**(2009), article ID S090604.
5. Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравиманнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике - **6**(2009).- № 1.- С.122-134.

UDC 510.67

Baizhanov B.S., Yershigeshova A.D.

*Institute of mathematics and mathematical modelling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*baizhanov@hotmail.com, aisha.yershigeshova@gmail.com*

## Weak and almost orthogonality of types

We study the relations of weak and almost orthogonality of types. In the theorem below we proved that some conditions on weak orthogonality can save the property of non-homogeneity and keep the number of countable, non-isomorphic models. For any model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$ ,  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$  is called to be a *finite diagram* of  $\mathfrak{M}$ , it is the set of all types that realized in  $\mathfrak{M}$ .

**Theorem 1.** *Let  $\mathfrak{M}$  be a countable, non-homogeneous model of a small theory  $T$  and  $p(x) \in S(T)$  be a non-isolated type such that  $p(x)$  is weakly orthogonal to any non-isolated type  $q(y)$  from the finite diagram of  $\mathfrak{M}$ . Then the following conditions hold:*

- 1) *There exists a countable elementary extension  $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}(\bar{c})$ , such that  $\mathfrak{M}(\bar{c})$  is also non-homogeneous.*
- 2) *For any non-homogeneous  $\mathfrak{M}' \not\cong \mathfrak{M}$ , with equal finite diagrams  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$  we have  $\mathfrak{M}(\bar{c}) \not\cong \mathfrak{M}'(\bar{c})$ , and  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}'(\bar{c}))$ .*
- 3) *For any  $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{N} \models p(\bar{c})$  we have  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) \subseteq \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$*

By  $I(T, \omega)$  we denote the number of countable, non-isomorphic models of the theory. Notice, that if there exists a small theory  $T$ ,  $I(T, \omega) = \omega_1$ , then there is  $\mathfrak{D}(T) \subseteq S(T)$  so that

$$|\{\mathfrak{M}_{/\cong} \mid \mathfrak{M} \models T, \mathfrak{M} - \text{countable}, \mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(T)\}| = \omega_1$$

So, if there is a small theory  $T$  with  $I(T, \omega) = \omega_1$ , and there is a type  $p(x) \in S(T)$  such that for every such  $q(\bar{y}) \in \mathfrak{D}(T)$ ,  $p(x)$  is weakly orthogonal to  $q(\bar{y})$ , then the number of countable, non-isomorphic models  $I(T \cup p(\bar{c}), \omega) = \omega_1$ .

## References

1. Baizhanov B.S., Tazabekova N.S., Yershigeshova A.D., Zambarnaya T.S. Types in small theories // Mathematical Journal. - 2015. - V. 15, , № 1(55). - P. 38-56
2. Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian electronic mathematical reports. - 2012. - V. 9, - P. 161-184

Baizhanov S.S.

*Institute of mathematics and mathematical modelling (Kazakhstan, Almaty)**e-mail: Sayan-5225@mail.ru*

## Model completeness of the expansion of weakly o-minimal theories

Some preliminary definitions:

**Definition:**  $\mathfrak{M}$  is elementary substructure of  $\mathfrak{N}$ .  $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ . If  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  are structures of the same signature and for any formula  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ .

$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$  iff  $\mathfrak{N} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$

**Definition:** Theory  $T$  is said to be model complete, if for any two models  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ ,  $[\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}]$

**Definition:** Theory is said to be weakly o-minimal, if any definable set of any model of  $T$  is finite union of convex sets.

We will consider model complete weakly o-minimal theories. How does expansion works in this theories. When it preserves model completeness.

### References

1. *Baizhanov B.S., Tazarbekova N.S., Yerzhigeshova A.D., Zambarnaya T.S.* Types in small theories // *Mathematical Journal*, 2015, V. 15, №1(55). - p.38-56
2. *Baizhanov B.S.* Classification of one-types in weakly o-minimal theories and its corollaries // *The Journal of Symbolic Logic*, 1997 //

Biyarova N.B

*Suleyman Demirel University,  
(Kaskelen, Kazakhstan)**e-mail: nazira.biyarova@gmail.com*

## Definability of 2-types in weakly o-minimal theories

**The objective** of the thesis is to research and compare the properties of various kinds of orthogonality, non-orthogonality and definability of the 1 and 2-types in weakly o-minimal theories, which is one of the classes in the dependent theories. To find out the conditions to construct definability of the 2-type in weakly o-minimal theories.

**The task** of the thesis: To describe the concept of orthogonality, weakly orthogonality, almost orthogonality of the types in weakly o-minimal theories. To research the questions: would the non-orthogonal types be simultaneously definable or simultaneously non-definable, is it possible for an element over the model and a finite set to find non-orthogonal type of the some element over the model. This will help to construct the conditions on which definability of all 1-types over the model entails definability of the 2-type over the model.

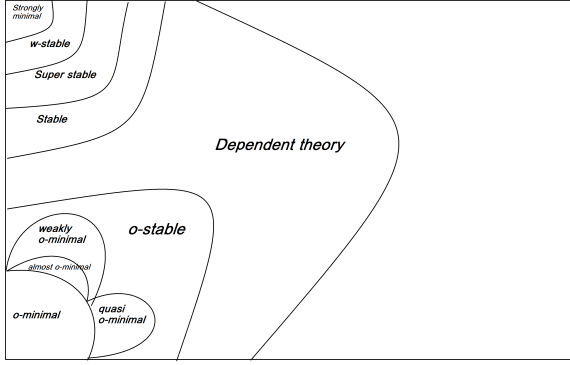


Figure 1: Model theory

**Definition 1.** It's said that  $\bar{\alpha}$  is **weakly orthogonal to the type  $q$**  if for any  $A$ -definable formula  $\psi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{\alpha})$  doesn't divide  $q(N) = \bigcap_{\theta \in q} \theta(N)$  and denote as  $\bar{\alpha} \perp^\omega q$  and, vice versa, it is said that  $\bar{\alpha}$  **isn't weakly orthogonal to the type  $q$**  if there exists  $A$ -definable formula  $\psi(\bar{x}, \bar{y})$  s.t.  $\psi(\bar{x}, \bar{\alpha})$  divides  $q(N)$  ( $\bar{\alpha} \not\perp^\omega q$ ).

This means that their realizations does not depend on each other. More precisely it means that any pair of  $(\alpha, \beta)$  can be moved from one place to another. There are two kinds of realizations:

1.  $p(x) \cup q(y) \cup \psi(x, y)$
2.  $p(x) \cup q(y) \cup \neg\psi(x, y)$

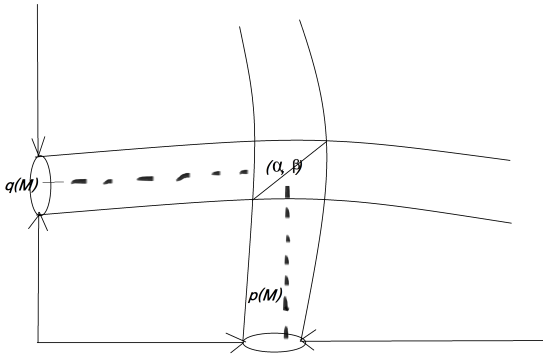


Figure 2: Complete

If  $p(x) \in S_1(A)$  and  $q(y) \in S_1(A)$ , then  $p(x) \perp^\omega q(y) \Leftrightarrow p(x) \cup q(y)$  is **complete 2-type**. See Fig., where  $p(M) = \bigcap_{\theta \in P} \theta(m)$ ,  $q(M) = \bigcap_{H \in q} H(m)$ .

**Definition 2.** If  $M (\langle M; =, <, \dots \rangle)$  is a model in weakly o-minimal theory and  $p, q \in S_1(A)$ ,  $A \subset M$ , we say the type  $p$  is **almost orthogonal** to the type  $q$  and denoted as  $p \perp_\omega q$ , if there is not exists  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$  such that  $\exists \bar{\alpha} \models p(M), \varphi(\bar{\alpha}, M) \subset q(M)$ .

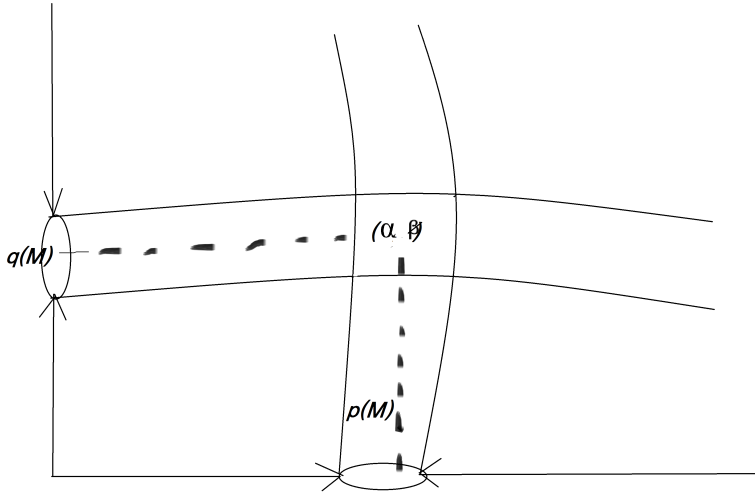


Figure 3: Complete

**Definition 3.** The type  $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ , where  $A \subseteq M$  from theory  $T$  is called **definable** if for any its formula  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  there exist another formula "controller"  $H_{\phi(\bar{x}, \bar{y})}(\bar{y}, \bar{m}) \forall \bar{a} \in A$  such that

$$\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p \iff M \models H_{\phi, p}(\bar{a}, \bar{m})$$

**Definition 4.** An n-type  $p(\bar{x})$  is called **complete** if it is maximal.

**Theorem 2.** Let  $A \subseteq M \models T$ ,  $T$ - weakly o-minimal theory,  $q$ -irrational 1-type over  $A$ . Then the following conditions are equivalent:

1.  $q$  is undefinable
2. There exists  $A$ -definable formula  $H(x, \bar{y})$  such that for any  $A$ -definable formula  $\theta(\bar{y})$  holds

$$[C(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q) \vee C(H(x, \bar{y}), \neg\theta(\bar{y}), q)].$$

As weakly o-minimal theory is the theory in which all of its subsets are union of finite numbers of convex subsets, further we have to define the cases where there will be definability of 2-types. To construct the definability of 2-type over the model  $M$ , every time we must take definable types and add to that one by one in this case, i.e.  $M \cup \alpha$ , it is sufficient to take definable 1-types.

**Definition 5.** The type is called **2-type** over  $A$  which is the subset of  $M$ , if there is a set of consistent formulas  $p(x_1, x_2) = p(x) \in L(A)$  such that for every finite subset  $p_0(x) \subseteq p(x)$  there are some elements  $b_1, b_2 \in M$  with  $M \models p_0(b_1, b_2)$ .

Theory  $T$  is called 2-type definable if the definable 1-type over a definable 1-type is definable. So, in order to find the definability of 2-types in weakly o-minimal theory.

### References

1. Shelah S. Stable theories // Israel Journal of Mathematics. -1969. -Vol. 7, -P. 187-202.
2. Van den Dries L. Remarks on Tarski's problem concerning  $(\mathbb{R}, +, *, \exp)$  // Logic Colloquium '82 / ed. G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja. Amsterdam: North-Holland, -1984, -P. 97-121.

3. Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures.1 // Trans. Amer. Math. Soc. -1986. -Vol. 295, -P. 565-592.
4. Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. -2000. -Vol. 352, -P. 5435-5483.
5. Baizhanov B. Definability of 1-types in weakly o-minimal theories // Siberian Advances in Mathematics. -2006. -V. 16. -2, -P. 1-33.
6. Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. -2000. -Vol. 352, -P. 5435-5483.

UDC 519.1

Dzhumadil'daev A.S., Bagdarov Y.A., Sultamuratov R.S.

*Institute of mathematics and mathematical modelling (Kazakhstan, Almaty),  
Almaty Kazakh - Turkish High School*

*e-mail: dzhuma@hotmail.com, bagdarov.e@gmail.com,  
nobel.mm@gmail.com*

## Symmetries of $n$ -trees

We consider rooted trees oriented from root to leafes. Say that a rooted tree  $t$  is  $n$ -tree, if in-degree for any vertex is  $n$ . For any vertex of  $n$ -tree we fix some numeration of its branches, say from left to right. Let  $\mathcal{T}_n$  be set of  $n$ -trees. Recall that partition of  $n$  is defined as a sequence non-increasing non-negative integers  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  such that  $\sum_i \lambda_i = n$ . Let  $l_i$  be number of components of a partition  $\lambda$ . Then  $\sum_i i l_i = n$ . For partitions we will use the following notations:  $\lambda \vdash n$  or  $\lambda = 1^{l_1} 2^{l_2} \dots n^{l_n}$ . Let  $\lambda = 1^{l_1} 2^{l_2} \dots n^{l_n}$  be a partition of  $n$ . Then for any vertex  $v$  the partition  $\mathbf{n}$  induces part of its branches. We allow for any vertex rotations of its branches in each components of this part. Let us endow set of  $n$ -trees by equivalence relation  $\sim_{\mathbf{n}}$  For  $n$ -trees  $t$  and  $t'$  say that  $t \sim_{\mathbf{n}} t'$ , if  $t'$  can be obtained from  $t$  by rotating branches. For  $n$ -tree  $t$  denote by  $[t]_{\mathbf{n}}$  an equivalence class under relation  $\sim_{\mathbf{n}}$ . Say that  $t$   $\mathbf{n}$ -commutative, if  $l_n = 1$ , i.e.,  $\lambda = n$ , say that equivalence class  $[t]$   $n$ -commutative.

Let  $M^\lambda$  be permutation module and  $C_\lambda$  is conjugacy class with shape  $\lambda$  (details see [1, §2.1 and §1.1]).

**Theorem.** Let  $T^{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}(x) = \sum_{k \geq 0} t_k x^k$  be generating function for  $(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})$ -commutative trees. Then

$$\begin{aligned} & \frac{T^{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}(x) - 1}{x} = \\ & = \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + n l_n = n} \langle M^{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}, C_{(1^{l_1}, \dots, n^{l_n})} \rangle \prod_{i=1}^n \frac{T^{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}(x)^{l_i}}{i^{l_i} l_i!}, \end{aligned}$$

where  $\langle M^{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}, C_{(1^{l_1}, \dots, n^{l_n})} \rangle$  is coefficient in the table of characters of permutation module  $M^\lambda$ .

Note that

$$p_{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})} = \sum_{j_1 + 2j_2 + \dots + n j_n = n} \langle M^{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}, C_{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})} \rangle m_{(1^{j_1}, \dots, n^{j_n})}$$

where  $p_\lambda$  is power sum symmetric function and  $m_\lambda$  is monomial symmetric function corresponding to  $\lambda$  (see [1, §4.6, th 4.6.3]).

Since  $\langle M^{(n)}, C_{(1^{l_1}, \dots, n^{l_n})} \rangle = 1$ , we obtain the following

**Corollary 1.** *Let  $T^{(n)}(x) = \sum_{k \geq 0} t_k x^k$  be generating function for  $n$ -commutative trees. Then*

$$\frac{T^{(n)}(x) - 1}{x} = \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = n} \prod_{i=1}^n \frac{T^{(n)}(x^i)^{l_i}}{i^{l_i} l_i!}.$$

Since  $\langle M^{(1^n)}, C_{(\lambda)} \rangle = n!$ , if  $\lambda = (1^n)$  and  $\langle M^{(1^n)}, C_{(\lambda)} \rangle = 0$ , if  $\lambda \neq (1^n)$ , takes place the following

**Corollary 2.** *The generating function  $T^{(1^n)}(x) = \sum_{k \geq 0} t_k x^k$  for  $1^n$ -commutative trees satisfies the functional equation*

$$\frac{T^{(1^n)}(x) - 1}{x} = T^{(1^n)}(x).$$

Recall that coefficients of the series  $T^{(1^n)}(x)$  corresponds to  $n$ -ary Catalan numbers  $\frac{1}{(n-1)k+1} \binom{nk}{k}$ .

**Example.** Let us give application of Theorem in case  $n = 3$ . Table of characters of permutation module  $M^\lambda$ :

	$C_{(1^3)}$	$C_{(1,2)}$	$C_{(3)}$
$M^{(3)}$	1	1	1
$M^{(1,2)}$	3	1	0
$M^{(1^3)}$	6	0	0

Generating function for non-planar ternary rooted trees, i.e., for (3)-commutative trees:

$$\begin{aligned} \frac{T^{(3)}(x) - 1}{x} &= \langle M^{(3)}, C_{(1^3)} \rangle \frac{T^{(3)}(x)^3}{6} + \langle M^{(3)}, C_{(1,2)} \rangle \frac{T^{(3)}(x)T^{(3)}(x^2)}{2} + \\ &+ \langle M^{(3)}, C_{(3)} \rangle \frac{T^{(3)}(x^3)}{3} = \frac{T^{(3)}(x)^3 + 3T^{(3)}(x)T^{(3)}(x^2) + 2T^{(3)}(x^3)}{6} \end{aligned}$$

Generating function for (1<sup>2</sup>2)-commutative trees:

$$\begin{aligned} \frac{T^{(1^2,2)}(x) - 1}{x} &= \\ &= \langle M^{(1^2,2)}, C_{(1^4)} \rangle \frac{T^{(1^2,2)}(x)^4}{24} + \langle M^{(1^2,2)}, C_{(1^2,2)} \rangle \frac{T^{(1^2,2)}(x)^2 T^{(1^2,2)}(x^2)}{4} = \\ &= \frac{T^{(1^2,2)}(x)^4 + T^{(1^2,2)}(x)^2 T^{(1^2,2)}(x^2)}{2} \end{aligned}$$

Generating function for planar ternary rooted trees, i.e., for (1<sup>3</sup>)-commutative trees:

$$\begin{aligned} \frac{T^{(1^3)}(x) - 1}{x} &= \langle M^{(1^3)}, C_{(1^3)} \rangle \frac{T^{(1^3)}(x)^3}{6} + \langle M^{(1^3)}, C_{(1,2)} \rangle \frac{T^{(1^3)}(x)T^{(1^3)}(x^2)}{2} + \\ &+ \langle M^{(1^3)}, C_{(3)} \rangle \frac{T^{(1^3)}(x^3)}{3} = T^{(1^3)}(x)^3 \end{aligned}$$

## References

1. *Sagan B.E.* The symmetric group: Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions, Second edition, Springer, 2001.-241 p.

Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N

*Kazakh-British Technical University**(Kazakhstan, Almaty)**Suleyman Demirel University**(Kazakhstan, Kaskelen)*

e-mail: nurlan.ismail@gmail.com

**Jordan elements in a free associative algebra**

Let  $X$  be a set, and  $\Phi$  a field of characteristic is not equal to 2, and  $A$  the free associative algebra on  $X$  over  $\Phi$ . The elements of the Jordan subalgebra of  $A$  generated by 1 and  $X$  are called Jordan elements. There is no criterion that enable one to determine whether an element of  $A$  is a Jordan element. But there is a well-known theorem of P. Cohn [1] concerning Jordan elements can be obtained when  $X$  has three or fewer elements. Also, D. Robbins [2] considered the space of simple Jordan elements  $G$ , which is defined to be the smallest subspace of  $A$  containing 1 and invariant under the Jordan multiplications by elements of  $X$  and obtained a criterion for determining whether an element of  $A$  is a simple Jordan element and gave a formula for the dimensions of the homogenous components of  $G$ . Let  $F_n$  be the multilinear part of  $A$  generated by  $n$  elements  $x_1, \dots, x_n$  of  $X$  over  $\Phi$ . We construct another subspace  $Str_n$  of  $F_n$  which consists of Jordan elements that are called *strong reversible* elements of  $F_n$ . There is a non-empty intersection between the space of simple Jordan elements and the space  $Str_n$ . We give a basis and dimension of  $Str_n$ . We then study  $S_n$ -module structure of  $Str_n$  over a field of characteristic zero.

For  $i \in \{0, \dots, n\}$ , let  $p_i$  be a linear operator  $p_i : F_n \rightarrow F_n$  defined by

$$p_i(x_1 \cdots x_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_{n-i} x_{n-i+1} \cdots x_n) = x_1 \cdots x_i x_{n-i} \cdots x_{i+2} x_{i+1} x_{n-i+1} \cdots x_n.$$

**Definition** Let  $Y \in F_n$ .  $Y$  is said to be *reversible* if  $p_0(Y) = Y$ , and *strong reversible* if  $p_i(Y) = Y$ , for any  $i$ .

**Example.**  $x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4 x_3 x_2 x_1$  is reversible, but not strong reversible, and  $x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4 x_3 x_2 x_1 + x_1 x_3 x_2 x_4 + x_4 x_2 x_3 x_1$  is strong reversible.

One can easily check that any Jordan element of  $A$  is reversible.

Let  $P = (id + p_{k-1}) \cdots (id + p_0)$  where  $id$  is the identity map.

**Theorem a.** If  $Y \in Str_n$ , then  $Y$  is a Jordan element of  $F_n$ .

**b.**

$$Str_{2k+1} = \Phi\{P(x_{i_1} \cdots x_{i_k} x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}} \cdots x_{2k+1}) \mid i_1 < i_{2k+1}, \dots, i_k < i_{k+2}\}$$

and

$$Str_{2k} = \Phi\{P(x_{i_1} \cdots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \cdots x_{2k}) \mid i_1 < i_{2k}, \dots, i_k < i_{k+1}\}.$$

**c.**  $\dim(Str_n) = \frac{n!}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$

**d.**  $Str_{2k+1} \cong \text{Ind}_{S_2^k \times S_1}^{S_{2k+1}} (\mathbf{1}_{S_2}^{\otimes(k)} \otimes \mathbf{1}_{S_1})$  as  $S_{2k+1}$ -module and

$Str_{2k} \cong \text{Ind}_{S_2^k}^{S_{2k}} (\mathbf{1}_{S_2}^{\otimes k})$  as  $S_{2k}$ -module, where  $S_2^k = S_2 \times \cdots \times S_2$  and  $\mathbf{1}_{S_i}$  is the trivial module of symmetric group  $S_i$  on  $i$  elements.



## References

1. *Cohn P.M.* On homomorphic images of special Jordan algebras // *Canad.J.Math.* -1954. 6. -P. 253-264
2. *Robbins D.P.* Jordan elements in a Free associative algebra I // *Journal of Algebra.* - 1971. 19. -P. 354-378

UDC 510.67

Yeshkeyev A.R.

*Karaganda State University  
(Kazakhstan, Karaganda)*

*e-mail: maira.math@gmail.com*

## Jonsson sets and model-theoretic properties of its closures

**Definition 1.** [1] A theory  $T$  is *Jonsson* if:

- (1) The theory  $T$  has infinite models;
- (2) The theory  $T$  is inductive;
- (3) The theory  $T$  has the joint embedding property (*JEP*);
- (4) The theory  $T$  has the property of amalgam (*AP*).

**Definition 2.** Jonsson theory  $T$  is called a *perfect theory*, if the semantic model is saturated.

Let  $L$  is a countable language of first order. Let  $T$  - Jonsson perfect theory complete for existential sentences in the language  $L$  and its semantic model will denote as  $C$  and  $Th(C) = T^*$ .

**Definition 3.** We say that a set  $X$  -  $\Sigma$ -definable if it is definable by some existential formula. The set  $X$  is called *Jonsson in theory  $T$* , if it satisfies the following properties:

- (1)  $X$  is  $\Sigma$ -definable subset of  $C$ ;
- (2)  $Dcl(X)$  is the support of some existentially closed submodel of  $C$ .

The set  $X$  is called *algebraically Jonsson in theory  $T$* , if it satisfies the following properties:

- (1)  $X$  is  $\Sigma$ -definable subset of  $C$ ;
- (2)  $Acl(X)$  is the support of some existentially closed submodel of  $C$ .

**Definition 4.** A existentially closed model  $M$  is said to be *minimal* if any subset of  $M$  definable using parameters is either finite or a complement of a finite one.

**Definition 5.** An algebraically Jonsson set  $A$  is said to be *independent* if  $acl(A) \neq acl(A')$  for any proper subset  $A' \subset A$ .

A maximal independent subset of a algebraically Jonsson set  $A$  is said to be a *basis* of  $A$ .

**Lemma 1.** Any two bases  $B$  and  $C$  of a algebraically Jonsson set  $A$  are of the same cardinality.

**Definition 6.** Let  $M$  be an existentially closed minimal model of theory  $T$  and let  $D \subseteq M^n$  be an infinite algebraically Jonsson set in theory  $T$ . We say that  $D$  is *minimal* in  $M$  if for any definable  $Y \subseteq D$  either  $Y$  is finite or  $D \setminus Y$  is finite. If  $\phi(\bar{v}, \bar{a})$  is the formula that defines  $D$ , then we also say that  $\phi(\bar{v}, \bar{a})$  is minimal.

We say that  $D$  and  $\phi$  are *strongly minimal* if  $\phi$  is minimal in any existentially closed extension  $N$  of  $M$ .

Let  $T$  - Jonsson theory,  $S^J(X)$  - the set of all existential complete  $n$ -types over  $X$ , consistent with  $T$ , for every finite  $n$ .

**Definition 7.** We say that a Jonsson theory  $T$  is  *$J - \lambda$ -stable* if, for any  $T$ -existentially closed model  $A$ , for any subset  $X$  of  $A$ ,  $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$ .

Let  $X$  Jonsson set and  $M$  is existentially closed model where  $\text{dcl}(X)=M$ . Let us consider  $Th_{\forall\exists}(M) = T_M$ .

**Lemma 2.**  $T_M$  will be Jonsson theory.

**Theorem 1.** Let  $T_M$  is as above. If  $\lambda \geq \omega$ , then the following conditions are equivalent:

- (1)  $T_M$  is  $J - \lambda$ -stable;
- (2)  $T^*$  is  $\lambda$ -stable.

Let  $T_M$  is as above.

**Theorem 2.** Then the following conditions are equivalent:

- (1)  $T_M^*$  is  $\omega$ -categorical;
- (2)  $T_M$  is  $\omega$ -categorical.

**Definition 8.** Let  $A, B \in E_T$  and  $A \subset B$ . Then  $B$  called algebraically prime model extension  $A$  in  $E_T$  if for any model  $C \in E_T$  such that  $A$  is isomorphically embedded in  $C$  then  $B$  isomorphically embedded in the  $C$ .

Let  $X$  is algebraically Jonsson set,  $\text{acl}(X)=M$ , formula which define the set  $X$  will be an existential strongly minimal formula.

**Theorem 3.** Then the following conditions are equivalent:

- (1)  $T_M^*$  is  $\omega_1$ -categorical;
- (2) any countable model of  $E_{T_M}$  has a prime algebraic extension in  $E_{T_M}$ .

Standard defined forcing companion  $(T)^f$  for theory  $T$ . It is forcing companion of the theory  $T$ .  $(T)^f = \{\varphi : T \Vdash \neg\neg\varphi\}$ .

**Theorem 4.** Let  $\lambda$  be an arbitrary infinite cardinal,  $T$  perfect Jonsson theory, complete for existential sentences. Then the following conditions are equivalent:

- 1)  $(T_M)^f$  is  $J - \lambda$ -stable;
- 2)  $T^*$  is  $\lambda$  - stable in the classical sense;

**Definition 9.** [2] Theory  $T$  is called *convex* if for any model  $\mathfrak{A}$  and for any family  $\{\mathfrak{B}_i | i \in I\}$  its substructures, which are models of the theory  $T$ , intersection  $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$  is model of theory  $T$ . It is assumed that this intersection is not empty. If this intersection is never empty, then the theory is said to be *strongly convex*.

**Definition 10.** [2] If the theory is strongly convex, then the intersection of all of its models is contained in some of its models. This model is called *the core model* of the theory.

**Definition 11.** [2] The model of the signature of this theory (hereinafter structure) is called *core* if it is isomorphic to a single substructure of each model of the theory.

**Theorem 5.** Suppose that the theory  $T$  is perfect Jonsson strongly convex theory and it is positively existentially complete. Then the following conditions are equivalent:

- (1) theory  $T^*$  has a core structure;
- (2) theory  $T_M$  has a core model.

**Theorem 6.** Let the theory  $T$  - strongly convex theory and perfect Jonsson, and it positively complete. Then  $\mathfrak{M}$  a core structure of the theory  $T^*$  if and only if the model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$  is a core model of theory  $T_M$  .

## References

1. Barwise J. (ed.) Handbook of Mathematical Logic. Part A: Model Theory. - Elsevier, 1977. - 1165 p.
2. Kueker D.W. Core structures for theories // Fund. Math. - 1975. -V. 89. -P. 155-171.

Mammadova G.H.

*Institute of Applied Mathematics, Baku State University  
(Azerbaijan, Baku)*

e-mail: *gamar.mamadova@gmail.com*

## About properties of two-parameter bilinear sequential machines

*In the paper the sufficient controllability conditions for two-parameter bilinear sequential machines are obtained.*

Let us consider the two-parameter bilinear sequential machine  $A$  (further BSM) described by the following equation of state and initial conditions

$$\begin{cases} s(t+1, \vartheta+1) = [A + u(t, \vartheta)G]s(t, \vartheta) + Bs(t, \vartheta+1) + Ds(t+1, \vartheta), \\ s(t, 0) = s(0, \vartheta) = w_0 \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $A, G, B, D - (n \times n)$  are matrices with components from  $GF(p)$ ,  $s$  is a  $(n \times 1)$  matrix, i.e.  $n$ -dimensional vector-column with components from  $GF(p)$ ,  $u$  is scalar.

**Definition 1.** Two-parameter BSM  $A$  which is in the initial state  $w_0$  is called quite controlled if there exists such natural number  $M$  that for any non-zero state  $s_1$  the family of controls  $\{u(k, l)\}$   $0 \leq k \leq M, 0 \leq l \leq M$  exists which transfers BSM from state  $w_0$  to state  $s_1$ .

Assume that control  $u(t, \vartheta)$  has range  $l$  with respect to parameter  $\vartheta$  if  $\vartheta = l$ . Let  $s_{w_0}(k, l)$  be the state of BSM  $A$  for  $(t, \vartheta) = (k, l)$ , initial state  $w_0$  and zero controls up to  $l-1$ -th range with respect to  $\vartheta$  if  $l \geq 1$  and  $s_{w_0}(k, 0) = w_0$ .

**Theorem 1.** In order that two-parameter BSM  $A$  to be quite controlled it is sufficient that for any  $l, 0 \leq l \leq n-1$

$$\text{rank}[Gs_{w_0}(n-1, l), BGs_{w_0}(n-2, l), \dots, B^{n-2}Gs_{w_0}(1, l), B^{n-1}Gs_{w_0}(0, l)] = n. \quad (2)$$

**Proof.** Let us find  $s(t, 1)$  for  $t \geq 1$

$$\begin{aligned} s(t, 1) &= [A + u(t-1, 0)G]s(t-1, 0) + Bs(t-1, 1) + Ds(t, 0) = \\ &= [A + u(t-1, 0)G]w_0 + Bs(t-1, 1) + Dw_0 \end{aligned}$$

Let's denote

$$\beta_{t-1}(w_0, 0) = [A + u(t-1, 0)G]w_0 + Dw_0.$$

We'll obtain

$$\begin{aligned} s(t, 1) &= \beta_{t-1}(w_0, 0) + Bs(t-1, 1) = \beta_{t-1}(w_0, 0) + B[\beta_{t-2}(w_0, 0) + Bs(t-2, 1)] = \\ &= \beta_{t-1}(w_0, 0) + B\beta_{t-2}(w_0, 0) + B^2s(t-2, 1) = \beta_{t-1}(w_0, 0) + B\beta_{t-2}(w_0, 0) + B^2\beta_{t-3}(w_0, 0) + \dots \\ &+ B^{t-1}\beta_0(w_0, 0) + B^t w_0 = \sum_{\alpha=1}^t B^{\alpha-1}\beta_{t-\alpha}(w_0, 0) + B^t w_0 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} s(n, 1) &= \sum_{\alpha=1}^n B^{\alpha-1}\beta_{n-\alpha}(w_0, 0) + B^n w_0 = \beta_{n-1}(w_0, 0) + B\beta_{n-2}(w_0, 0) + \dots \\ &+ B^{n-1}\beta_0(w_0, 0) + B^n w_0 = [A + u(n-1, 0)G]w_0 + Dw_0 + B[A + u(n-2, 0)G]w_0 + \\ &+ BDw_0 + \dots + B^{n-1}[A + u(0, 0)G]w_0 + B^{n-1}Dw_0 + B^n w_0 = u(n-1, 0)Gw_0 + \\ &+ u(n-2, 0)BGw_0 + \dots + u(0, 0)B^{n-1}Gw_0 + K(w_0), \end{aligned}$$

where  $K(w_0)$  does not depend on  $u$ .

Thus,

$$s(n, 1) - K(w_0) = u(n-1, 0)Gw_0 + u(n-2, 0)BGw_0 + \dots + u(0, 0)B^{n-1}Gw_0. \quad (3)$$

If

$$\text{rank}[Gw_0, BGw_0, \dots, B^{n-1}Gw_0] = n, \quad (4)$$

then system (3) is solvable for any  $s(n, 1)$ , i.e. BSM  $A$  is quite controlled. Let's compare (4) with (2). Since

$$s_{w_0}(n-1, 0) = s_{w_0}(n-2, 0) = \dots = s_{w_0}(0, 0) = w_0,$$

So we notice that (4) coincide with condition (2) for  $l = 0$ .

Thus, if (2) is fulfilled for  $l = 0$ , then the theorem has been proved.

Let (2) be not fulfilled for  $l = 0$ . Let's find  $s(t, 2)$  for  $t \geq 1$ .

$$\begin{aligned} s(t, 2) &= [A + u(t-1, 1)G]s(t-1, 1) + Bs(t-1, 2) + Ds(t, 1) = \\ &= [A + u(t-1, 1)G]s(t-1, 1) + D[\beta_{t-1}(w_0, 0) + Bs(t-1, 1)] + Bs(t-1, 2) = \\ &= [A + u(t-1, 1)G + DB]s(t-1, 1) + D\beta_{t-1}(w_0, 0) + Bs(t-1, 2). \end{aligned}$$

Let's denote

$$[A + u(t-1, 1)G + DB]s(t-1, 1) + D\beta_{t-1}(w_0, 0) + \beta_{t-1}(w_0, 1).$$

We'll obtain

$$\begin{aligned} s(t, 2) &= \beta_{t-1}(w_0, 1) + Bs(t-1, 2) = \beta_{t-1}(w_0, 1) + B[\beta_{t-2}(w_0, 1) + Bs(t-2, 2)] = \\ &= \beta_{t-1}(w_0, 1) + B\beta_{t-2}(w_0, 1) + \dots + B^{t-1}\beta_0(w_0, 1) + B^t w_0 = \sum_{\alpha=1}^t B^{\alpha-1}\beta_{t-\alpha}(w_0, 1) + B^t w_0. \end{aligned}$$

Then

$$s(n, 2) = \sum_{\alpha=1}^t B^{\alpha-1}\beta_{n-\alpha}(w_0, 1) + B^n w_0 = \beta_{n-1}(w_0, 1) + B\beta_{n-2}(w_0, 1) + \dots + B^{n-1}\beta_0(w_0, 1) + B^n w_0.$$

Let's accept that the controls of zero range with respect to  $\vartheta$  are equal to zero. Then  $\beta_k(w_0, 0)$  becomes the vector dependent on  $K$  and independent on controls of first range with respect to  $\vartheta$

$$\begin{aligned} s(n, 2) &= [A + u(n-1, 1)G + DB]s_{w_0}(n-1, 1) + B[A + u(n-2, 1)G + DB] \times \\ &\times s_{w_0}(n-2, 1) + \dots + B^{n-1}[A + u(0, 1)G + DB]s_{w_0}(0, 1) + B^n w_0 + K_1(w_0). \end{aligned}$$

Here  $K_1(w_0)$  does not depend on first range controls with respect to  $\vartheta$

$$\begin{aligned} s(n, 2) &= u(n-1, 1)Gs_{w_0}(n-1, 1) + u(n-2, 1)BGs_{w_0}(n-2, 1) + \dots \\ &\dots + u(0, 1)B^{n-1}Gs_{w_0}(0, 1) + K_2(w_0). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} s(n, 2) - K_2(w_0) &= u(n-1, 1)Gs_{w_0}(n-1, 1) + u(n-2, 1)BGs_{w_0}(n-2, 1) + \dots \\ &\dots + u(0, 1)B^{n-1}Gs_{w_0}(0, 1). \end{aligned}$$

If

$$\text{rank}[Gs_{w_0}(n-1, 1), BGs_{w_0}(n-2, 1), \dots, B^{n-1}Gs_{w_0}(0, 1)] = n, \quad (5)$$

then BSM  $A$  is quite controlled.

But (5) coincides with (2) for  $l = 1$ . Thus, if condition (2) is fulfilled for  $l = 1$ , then the theorem has been proved.

Now let (2) be fulfilled for some  $l \leq n - 1$ . Let's find  $s(t, l + 1)$  for  $t \geq 1$ . We have

$$s(t, l + 1) = [A + u(t - 1, l)G]s(t - 1, l) + Bs(t - 1, l + 1) + Ds(t, l).$$

Let's denote

$$[A + u(t - 1, l)G]s(t - 1, l) + Ds(t, l) = \beta_{t-1}(w_0, l).$$

We'll obtain

$$s(t, l + 1) = \beta_{t-1}(w_0, l) + Bs(t - 1, l + 1) = \beta_{t-1}(w_0, l) + B\beta_{t-2}(w_0, l) + \dots + B^{t-1}\beta_0(w_0, l) + B^t w_0.$$

Further

$$s(n, l + 1) = \beta_{n-1}(w_0, l) + B\beta_{n-2}(w_0, l) + \dots + B^{n-1}\beta_0(w_0, l) + B^n w_0.$$

Suppose that all controls up  $l - 1$ -th range with respect to  $\vartheta$  are equal to zero. Then

$$s(n, l + 1) = u(n - 1, l)Gs_{w_0}(n - 1, l) + u(n - 2, l)BGs_{w_0}(n - 2, l) + \dots + u(0, l)B^{n-1}Gs_{w_0}(0, l) + \tilde{K}(w_0),$$

where  $\tilde{K}(w_0)$  does not depend on controls of  $l$ -th range with respect to  $\vartheta$ .

Further

$$s(n, l + 1) - \tilde{K}(w_0) = u(n - 1, l)Gs_{w_0}(n - 1, l) + u(n - 2, l)BGs_{w_0}(n - 2, l) + \dots + u(0, l)B^{n-1}Gs_{w_0}(0, l)$$

and it is clear that the condition

$$\text{rank}[Gs_{w_0}(n - 1, l), BGs_{w_0}(n - 2, l), \dots, B^{n-1}Gs_{w_0}(0, l)] = n$$

Provides quite controllability of BSM. The theorem has been proved ( $M = n$ ).

**Remark 1.** Let's give recursion relations for determination of  $s_{w_0}(k, l)$ .

For  $l = 0$   $s_w(k, 0) = w_0$ . If  $l \geq 1$ , then

$$s_{w_0}(k, l) = \sum_{\alpha=1}^k B^{\alpha-1} \gamma_{k-\alpha}(w_0, l - 1) + B^k w_0,$$

where  $\gamma_{k-1}(w_0, l - 1) = As_{w_0}(k - 1, l - 1) + Ds_{w_0}(k, l - 1)$ .

**Remark 2.** For  $l = 0$  condition (2) has the simple form

$$\text{rank}[Gw_0, BGw_0, \dots, B^{n-1}Gw_0] = n. \quad (6)$$

For  $l = 1$  supposing in addition commutative of matrices  $B$  and  $G$ , we'll obtain

$$s_{w_0}(k, 1) = \sum_{\alpha=1}^k B^{\alpha-1} \gamma_{k-\alpha}(w_0, 0) + B^k w_0.$$

But

$$\gamma_{k-1}(w_0, 0) = As_{w_0}(k - 1, 0) + Ds_{w_0}(k, 0) = (A + D)w_0.$$

So

$$s_{w_0}(k, 1) = \sum_{\alpha=1}^k B^{\alpha-1}(A + D)w_0 + B^k w_0.$$

Substituting in (2), we have

$$\text{rank}[G(I + B + \dots + B^{n-2})(A + D)w_0 + GB^{n-1}w_0, BG(I + B + \dots + B^{n-3})(A + D)w_0 + BGB^{n-2}w_0, \dots, B^{n-2}G(A + D)w_0 + B^{n-2}GBw_0, B^{n-1}GBw_0].$$

Let's subtract the second column from the first, the third one from the second, ..., the  $n$ -th column from the  $n - 1$ -th one and we'll obtain

$$\text{rank}[G(A + D)w_0, BG(A + D)w_0, \dots, B^{n-2}G(A + D)w_0, B^{n-1}Gw_0] = n. \quad (7)$$

Therefore, (6) and (7) are simple, easily, verifiable sufficient conditions of controllability.

### Литература

1. Gill A. Linear sequential machines. M., " Nauka", 1975 (Russian).
2. Tarn I. J., Elliott D.L., Goka T. Controllability of discrete bilinear systems with bounded controls. // IEEE Trans. Automat. Control, 1973, vol 18, № 3, p.298-301.
3. Mamedova G.G. To the questions of controllability of homogeneous bilinear sequential machines. // Proceeding of IMM ANAS, V.IV(XII), 1996 (Russian).
4. Siap, H. Akin, M. E. Koroglu The reversibility of  $(2r + 1)$ -cyclic rule cellular automata // TWMS J. Pure Appl. Math., Vol 4, № 2, 2013, pp.215-225

UDC 510.67

Saulebayeva T.

*nstitute of mathematics and mathematical modelling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: tana2202@mail.ru*

## Countable models of almost o-minimal theories

Some preliminary definitions:

**Definition:**  $T$  is o-minimal if and only if for all models  $M$  of  $T$ , for all  $\theta(x, y^1, \dots, y^n)$  in the language of  $T$  and for all  $n$ -tuples  $m \in M^n$ ,  $\{x \in M : M = \theta(x, m)\}$  can be written as the union of finitely many points and intervals, the endpoints of which are in  $M \cup \{\pm\infty\}$ .

We will consider almost o-minimal theories and countable models. Examples of models of almost o-minimal theories. When models of almost o-minimal theories are countable.

### References

1. Sudoplatov S.V. Theories with finite number of countable models and polygonometries of groups. - Novosibirsk: 2006. - Number of pages 320.
2. L. Mayer "Vaught's conjecture for o-minimal theories" // The Journal of Symbolic Logic, vol.53 (1988).

Sudoplatov S.V.

*Sobolev Institute of Mathematics,  
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University  
(Russia, Novosibirsk)*

e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

## Criteria for Ehrenfeuchtness of disjoint $P$ -combinations and $E$ -combinations

Let  $P = (P_i)_{i \in I}$ , be a family of nonempty unary predicates,  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  be a family of relational structures such that  $P_i$  is the universe of  $\mathcal{A}_i$ ,  $i \in I$ , and the symbols  $P_i$  are disjoint with languages for the structures  $\mathcal{A}_j$ ,  $j \in I$ . The structure  $\mathcal{A}_P \equiv \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  expanded by predicates  $P_i$  is the  $P$ -union of the structures  $\mathcal{A}_i$ , and the operator mapping  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  to  $\mathcal{A}_P$  is the  $P$ -operator. The structure  $\mathcal{A}_P$  is called the  $P$ -combination of the structures  $\mathcal{A}_i$  and denoted by  $\text{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  if  $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_P \upharpoonright \mathcal{A}_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$ ,  $i \in I$ . Structures  $\mathcal{A}'$ , which are elementary equivalent to  $\text{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ , will be also considered as  $P$ -combinations.

By the definition, without loss of generality we can assume for  $\text{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  that all languages  $\Sigma(\mathcal{A}_i)$  coincide interpreting new predicate symbols for  $\mathcal{A}_i$  by empty relation.

Clearly, all structures  $\mathcal{A}' \equiv \text{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  are represented as unions of their restrictions  $\mathcal{A}'_i = (\mathcal{A}' \upharpoonright P_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$  if and only if the set  $p_\infty(x) = \{\neg P_i(x) \mid i \in I\}$  is inconsistent. If  $\mathcal{A}' \neq \text{Comb}_P(\mathcal{A}'_i)_{i \in I}$ , we write  $\mathcal{A}' = \text{Comb}_P(\mathcal{A}'_i)_{i \in I \cup \{\infty\}}$ , where  $\mathcal{A}'_\infty = \mathcal{A}' \upharpoonright \bigcap_{i \in I} \overline{P}_i$ , maybe applying Morleyzation. Moreover, we write  $\text{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I \cup \{\infty\}}$  for  $\text{Comb}_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  with the empty structure  $\mathcal{A}_\infty$ .

Note that if all predicates  $P_i$  are disjoint, a structure  $\mathcal{A}_P$  is a  $P$ -combination and a disjoint union of the structures  $\mathcal{A}_i$  [1]. In such a case the  $P$ -combination  $\mathcal{A}_P$  is called *disjoint*.

On the opposite side, if all  $P_i$  coincide then  $P_i(x) \equiv (x \approx x)$  and removing the symbols  $P_i$  we get the restriction of  $\mathcal{A}_P$  which is the combination of the structures  $\mathcal{A}_i$  [2, 3, 4].

Recall that a theory  $T$  is *Ehrenfeucht* if  $T$  is a complete first-order theory without finite models such that  $T$  has finitely many but more than one countable models. A structure  $\mathcal{A}$  is *Ehrenfeucht* if  $\text{Th}(\mathcal{A})$  is Ehrenfeucht.

**Theorem 1.** *If predicates  $P_i$  are pairwise disjoint, the languages  $\Sigma(\mathcal{A}_i)$  are at most countable,  $i \in I$ , and the structure  $\mathcal{A}_P$  is infinite then the theory  $\text{Th}(\mathcal{A}_P)$  is Ehrenfeucht if and only if the following conditions hold:*

- (a)  $I$  is finite;
- (b) each structure  $\mathcal{A}_i$  is either finite, or  $\omega$ -categorical, or Ehrenfeucht;
- (c) some  $\mathcal{A}_i$  is Ehrenfeucht.

Proof uses the notion of powerful type [5] and the local realizability property [3, 6] presented in any Ehrenfeucht theory.

Note that, by Theorem 1, if  $\text{Th}(\mathcal{A}_P)$  is Ehrenfeucht then  $\mathcal{A}_\infty$  is empty.

For an equivalence relation  $E$  replacing disjoint predicates  $P_i$  by  $E$ -classes we get the structure  $\mathcal{A}_E$  being the  $E$ -union of the structures  $\mathcal{A}_i$ . In such a case the operator mapping  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  to  $\mathcal{A}_E$  is the  $E$ -operator. The structure  $\mathcal{A}_E$  is the  $E$ -combination of the structures  $\mathcal{A}_i$  and denoted by  $\text{Comb}_E(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ . Similar above, structures  $\mathcal{A}'$ , which are elementary equivalent to  $\mathcal{A}_E$ , are denoted

by  $\text{Comb}_E(\mathcal{A}'_j)_{j \in J}$ , where  $\mathcal{A}'_j$  are restrictions of  $\mathcal{A}'$  to its  $E$ -classes. Considering an  $E$ -combination  $\mathcal{A}_E$  we identify  $E$ -classes  $A_i$  with structures  $\mathcal{A}_i$ .

For a structure  $\mathcal{A}_E$  the number of *new* structures with respect to the structures  $\mathcal{A}_i$ , i. e., of the structures  $\mathcal{B}$  which are pairwise elementary non-equivalent and elementary non-equivalent to the structures  $\mathcal{A}_i$ , is called the *e-spectrum* of  $\mathcal{A}_E$  and denoted by  $e\text{-Sp}(\mathcal{A}_E)$ . The value  $\sup\{e\text{-Sp}(\mathcal{A}') \mid \mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E\}$  is called the *e-spectrum* of the theory  $\text{Th}(\mathcal{A}_E)$  and denoted by  $e\text{-Sp}(\text{Th}(\mathcal{A}_E))$ .

The structure  $\mathcal{A}_E$  is called *e-saturated*, *e-universal*, or *e-complete*, if  $e\text{-Sp}(\mathcal{A}_E) = 0$ .

Clearly, any theory  $\text{Th}(\mathcal{A}_E)$  has an *e-saturated* model.

**Theorem 2.** *If the language  $\bigcup_{i \in I} \Sigma(\mathcal{A}_i)$  is at most countable and the structure  $\mathcal{A}_E$  is infinite then the theory  $T = \text{Th}(\mathcal{A}_E)$  is Ehrenfeucht if and only if  $e\text{-Sp}(T) < \omega$  (which is equivalent to  $e\text{-Sp}(T) = 0$ ) and for an *e-saturated* model  $\mathcal{A}_{E'} \models T$  consisting of  $E'$ -classes  $\mathcal{A}_j$ ,  $j \in J$ , the following conditions hold:*

- (a) *for any  $j \in J$ ,  $I(\text{Th}(\mathcal{A}_j), \omega) < \omega$ ;*
- (b) *there are positively and finitely many  $j \in J$  such that  $I(\text{Th}(\mathcal{A}_j), \omega) > 1$ ;*
- (c) *if  $I(\text{Th}(\mathcal{A}_j), \omega) \leq 1$  then there are always finitely many  $\mathcal{A}_{j'} \equiv \mathcal{A}_j$  or always infinitely many  $\mathcal{A}_{j'} \equiv \mathcal{A}_j$  independent of  $\mathcal{A}_{E'} \models T$ .*

If  $\mathcal{A}_E$  does not have  $E$ -classes  $\mathcal{A}_i$ , which can be removed, with all  $E$ -classes  $\mathcal{A}_j \equiv \mathcal{A}_i$ , preserving the theory  $\text{Th}(\mathcal{A}_E)$ , then  $\mathcal{A}_E$  is called *e-prime*.

For a structure  $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$  we denote by  $\text{TH}(\mathcal{A}')$  the set of all theories  $\text{Th}(\mathcal{A}_i)$  of  $E$ -classes  $\mathcal{A}_i$  in  $\mathcal{A}'$ . Clearly, the structure  $\mathcal{A}_E$  is *e-prime* if and only if

$$\text{TH}(\mathcal{A}_E) = \bigcap_{\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E} \text{TH}(\mathcal{A}').$$

Since any prime structure is *e-prime* (but not vice versa as the *e-primeness* is preserved, for instance, extending an infinite  $E$ -class of given structure to a greater cardinality preserving the elementary equivalence) and any Ehrenfeucht theory  $T$ , being small, has a prime model, any Ehrenfeucht theory  $\text{Th}(\mathcal{A}_E)$  has an *e-prime* model.

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan, Grant No. 0830/GF4.

## References

1. *Woodrow R. E.* Theories with a finite number of countable models and a small language. Ph. D. Thesis. - Simon Fraser University, 1976. - 99 p.
2. *Sudoplatov S.V.* Inessential combinations and colorings of models // Siberian Math. J. - 2003. - Vol. 44, No. 5. - P. 883-890.
3. *Sudoplatov S.V.* Classification of Countable Models of Complete Theories. Part 1. - Novosibirsk: NSTU, 2014. - 356 p.
4. *Sudoplatov S.V.* Classification of Countable Models of Complete Theories. Part 2. - Novosibirsk: NSTU, 2014. - 448 p.
5. *Benda M.* Remarks on countable models // Fund. Math. - 1974. - Vol. 81, No. 2. - P. 107-119.
6. *Sudoplatov S. V.* Powerful digraphs // Siberian Math. J. - 2007. - Vol. 48, No. 1. - P. 165-171.



Tazabekova N. S.

*Институт математики и математического моделирования  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: tazabekova.nargiz@gmail.com*

## Neighborhoods and the number of countable models

**Definition 6.** Let  $p(\bar{x})$  be some (may be incomplete)  $n$ -type over a set  $A \subseteq M$  in a model  $\mathcal{M}$  of theory  $T$ ,  $B$  be a set in the model  $\mathcal{M}$ . A neighborhood of  $B$  in  $p$  is the set  $V_{p,\mathcal{M}}(B)$  of all tuples  $\bar{c} \in M$  such that  $\mathcal{M} \models p(\bar{c})$  and there exists a tuple  $\bar{b} \in B$  and  $(tp(\bar{b}/A) \leftrightarrow tp(\bar{c}/A))$ -formula  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  with  $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})$ .

In particular, a neighborhood of  $\bar{a}$  in  $p$  is the set  $V_{p,\mathcal{M}}(\bar{a}) = \{\bar{b} \in p(M) \mid \text{there exists a } (tp(\bar{b}/A) \leftrightarrow tp(\bar{a}/A))\text{-formula } \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \text{ such that } \bar{b} \in \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \subset p(M)\}$ .

**Theorem 3.** *Let  $\mathfrak{M}$  be a countable saturated model of a small theory  $T$ ,  $A \subset_{finite} M$ ,  $p \in S(T(A))$ ,  $V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$  – non-definable for some (any) realization  $\bar{a}$  of  $p$ . If for any  $n < \omega$  for any tuples  $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n$  from  $p(M)$  such that for any  $i, j (1 \leq i \neq j \leq n)$ .  $V_{p,\mathfrak{M}}$*

$$V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_i) \cap V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_j) = \emptyset; V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_i) \cap V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \emptyset$$

*there is no formula  $\psi(\bar{x}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_2)$  such that  $\psi(M, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_2) \subset V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$  then  $I(T, \omega) \geq \omega$ .*

## References

1. A. Pillay Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. - 89 (1983) - pp. 666–672.
2. B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports - 2012, vol. 9 - pp. 161-184.
3. B.S. Baizhanov Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // J. Symbolic Logic - 66 (2001) - pp. 1382–1414.
4. S.V. Sudoplatov Classification of countable models of complete theories.
5. Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. - Vol. 92. - 1978. - 544 p.
6. Baizhanov B.S., Tazabekova N.S., Yershigeshova A.D., Zambarnaya T.S. Types in small theories // Mathematical Journal. - 2015. - V. 15, , № 1(55). - P. 38-56

Umbetbayev O.A.

*Institute of mathematics and mathematical modelling  
(Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: olzhas\_umbetbayev@mail.ru*

## Inessential expansions of Ehrenfeucht theories

**Definition.** A complete extension  $T_1 = T \cup p(\bar{c})$  of theory  $T$  of signature  $\Sigma$  to the signature  $\Sigma(\bar{c}) = \Sigma \cup \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  is called a inessential expansion of  $T$ .

Let  $I(T, \omega)$  - the number of countable nonisomorphic models of  $T$ ,  $I(T, \omega, p)$  - the number of countable nonisomorphic models of  $T$  realizing the type  $p$ ,  $I(T \cup p(\bar{c}), \omega)$  - the number of countable nonisomorphic models with inessential expansion of the theory  $T$ .

**Fact 1.** If  $\mathcal{M}$  is a countable  $\Sigma$ -structure, then expansions  $\Sigma(\bar{c})$  up to an isomorphism of  $\mathcal{M}$  has maximum a countable number of expansions up to a  $\Sigma(\bar{c})$ -structure.

**Fact 2.** If  $I(T \cup p(\bar{c}), \omega) > I(T, \omega)$ , then  $I(T, \omega) < \omega$  and  $I(T \cup p(\bar{c}), \omega) \leq \omega$ .

This means that an inessential expansion of a theory does not affect on increase of the number of models from the position of consideration of Vaught's Conjecture.

**Fact 3.** Let  $T$  be a complete small theory such that

1.  $I(T, \omega) > \omega$ ,
2.  $I(T, \omega) > I(T, \omega, p)$ ,

then the number of countable nonisomorphic models of  $T$  is greater than the number of countable nonisomorphic models with an inessential expansion of the theory  $T$ , i.e.  $I(T, \omega) > I(T \cup p(\bar{c}), \omega)$ .

Let  $T$  be a countable complete theory. Denote by  $S(T)$  the set of all complete types of  $T$ .

Two types  $p$  and  $q$  from  $S(A)$  are called not almost orthogonal if there exists an A-definable formula  $\phi(x, y)$ , such that for some (equivalently, for any)  $\alpha \in p(M)$

$$\emptyset \neq \phi(M, \alpha) \subset q(M).$$

The relation of not almost orthogonality of  $p$  and  $q$  is denoted by  $p \not\perp^a q$ .

Type  $p \in S(T)$  - powerful over an infinite family of types  $\Gamma = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\} \subset S(T)$ , if

$$p \not\perp^a q, \forall q \in \Gamma$$

All prime models over realizations of type  $p$  denote by  $\mathcal{M}_p$ , and all prime models over realizations of type  $q$  denote by  $\mathcal{M}_q$ .

**Definition.** The type  $q$  does not exceed  $p$  under the Rudin-Keisler preorder (written  $q \leq_{RK} p$ ), if  $\mathcal{M}_p \models q$ , that is  $\mathcal{M}_q$  is an elementary submodel of  $\mathcal{M}_p$  (written  $\mathcal{M}_q \preceq \mathcal{M}_p$ ).

Let denote  $q <_{RK} p \Leftrightarrow q \leq_{RK} p$  and  $p \not\leq_{RK} q$ . It means, that each model which realized type  $p$  also realized type  $q$ :  $\mathcal{M}_p \models q$ , and each model which realized type  $q$  omits type  $p$ :  $\mathcal{M}_q \not\models p$ , i.e.:

$$q <_{RK} p \Leftrightarrow p \not\perp^a q \text{ and } q \perp^a p$$

**Fact 4.** Let  $p_1 <_{RK} p_2 <_{RK} p_3 <_{RK} \dots <_{RK} p_n <_{RK} \dots$ , then  $I(T, \omega) \geq \omega$ .

**Definition.** For any model  $\mathcal{M} \models T$  denote by  $\mathcal{D}(\mathcal{M})$  the set of all complete types which are realized in  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \{p \mid p \in S(T), p \text{ is realized in } \mathcal{M}\}.$$

The set  $\mathcal{D}(\mathcal{M})$  is called the finite diagram of  $\mathcal{M}$ .

Denote the set of all finite diagrams of all models of  $T$  by  $\Delta$ :

$$\Delta = |\{D \mid \exists \mathcal{M} \models T, \mathcal{D}(\mathcal{M}) = D\}|$$

**Fact 5.** Let  $T$  small theory,  $I(T, \omega) > I(T \cup p(c), \omega)$ , then the following holds:

1. If there exists an infinite family of types  $\Gamma \subset S(T)$  and  $p$  powerful over  $\Gamma$  and for any  $B \subset \Gamma$  there exists a model  $\mathcal{M}_B$ , which realizes all types from  $B$  and omits all types from  $\Gamma \setminus B$ , then cardinality of set of all finite diagrams of models of the theory  $T$  is continuum:  $|\Delta| = 2^\omega$ .

2. If  $I(T, \omega) = \omega$  and there exists an infinite family of types  $\Gamma \subset S(T)$ ,  $\forall p_i \in \Gamma$   $p_1 <_{RK} p_2 <_{RK} p_3 <_{RK} \dots <_{RK} p_n <_{RK} \dots$ , then  $I(T, \omega, p_i) \geq 3$ .

3. If  $I(T, \omega) > \omega$  and  $|\Delta| = \omega$ , then the following holds:

3.1 (Baizhanov-Zambarnaya). There exists  $D_O \subset S(T)$  such that

$|\{\mathcal{M}/\cong \mid \mathcal{M} \models T, \mathcal{M} \text{ is countable non-homogenous } \mathcal{D}(\mathcal{M}) = D_O\}| = I(T, \omega)$ .

3.2 (Baizhanov - Yershigeshova). Let  $\mathfrak{M}$  be a countable, non-homogeneous model of a small theory  $T$ ,  $\mathfrak{N}$  be a countable saturated model ( $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ ) and  $p(x) \in S(T)$  be a non-isolated type such that  $p(x)$  is almost orthogonal to any non-isolated type  $q(y)$  from the finite diagram of  $\mathfrak{M}$  ( $q \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ )  $\forall q'(\bar{y}, \bar{z}) \supset q(\bar{y})$ , where  $q'(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ ,

$\forall \bar{\alpha} \models q$ , for  $p' \in S(\bar{\alpha})$  such that  $p \subset p'$  we have  $p' \perp^a q'(\bar{\alpha}, \bar{z})$ . Then the following conditions hold:

1) There exists a countable elementary extension  $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}(\bar{c}) \prec \mathfrak{N}$ , such that  $\mathfrak{M}(\bar{c})$  is also non-homogeneous.

2) For any non-homogeneous  $\mathfrak{M}' \not\cong \mathfrak{M}$ , with equal finite diagrams  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$  we have  $\mathfrak{M}(\bar{c}) \not\cong \mathfrak{M}'(\bar{c})$ , and  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}'(\bar{c}))$ .

3) For any  $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{N} \models p(\bar{c})$  we have  $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) \subseteq \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$

3.3 If  $I(T, \omega) = \omega_1$  and condition 3.1 holds, then  $I(T, \omega) = I(T \cup p(c), \omega)$ .

## References

1. Байжанов Б.С., Умбетбаев О.А. Некоторые вопросы несущественного обогащения теории и число счетных моделей // Тезисы докладов Международной конференций "Мальцевские чтения". - 2014. - С. 124-125

UDC 512

Zhakhayev B.K.

*Suleyman Demirel University*

*(Kazakhstan, Kaskelen)*

*e-mail: bekzat22@hotmail.com*

## Representations of Symmetric Group on 1 - asymmetric trees

An algebra with identity  $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$  is called *right commutative*. Let  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  be a set of generators and  $F(X)$  be a free right-commutative algebra on  $X$  and  $F_n^{multi}(X)$  is a multi-linear part of  $F(X)$ . We define left action  $S_n$  on the space  $F_n^{multi}(X)$  in a natural way. For example, if  $\sigma = (12)(34)(5) \in S_5$  and  $m = ((x_1 \cdot x_3) \cdot (x_2 \cdot (x_4 \cdot x_5))) \in F_5^{multi}$ , then

$$\sigma(m) = ((x_2 \cdot x_4) \cdot (x_1 \cdot (x_3 \cdot x_5))).$$

Basic elements of  $F_n^{multi}(X)$  can be generated by  $X$ -labelled rooted trees with  $n$  vertices ([3]). Set of all unlabelled rooted trees with  $n$  vertices is denoted as  $\mathbb{T}_n$ . Let  $M^T$  be subspace generated by unlabelled rooted  $T$  tree under action of symmetric group.

For several remarkable classes of algebras one can define multilinear parts by labelled rooted trees. Representations of symmetric group on spaces generated by rooted trees are studied for the following classes:

- anticommutative algebras ([1])
- right-symmetric algebras ([2])
- Novikov algebras ([5])
- Lie algebras ([6])
- bicommutative algebras ([4])

We consider similar problem on a class of right-commutative algebras. In introduce a class of so called 1-asymmetric trees and study module structures generated by 1-asymmetric trees. Note that module structures on class of all right-symmetric trees was studied in ([2]).

For vertices  $u$  and  $v$  of a tree  $T$  say that they are siblings if they have common father. For a vertex  $v$  and its subbranches  $b', b''$ , call that they are siblings if  $b' = b''$ . Siblings  $b_1, b_2, \dots, b_k$  are called *trivial with multiplicity  $k$*  if they coincide with one vertex tree:  $b_1 = b_2 = \dots = b_k = \text{point}$

**Definition** Rooted tree  $T \in \mathbb{T}_n$  is called 0-asymmetric, if all subbranches of each vertices in  $T$  are different. Rooted tree  $T \in \mathbb{T}_n$  is called 1-asymmetric, if all nontrivial subbranches of each vertices in  $T$  are different.

Now we color vertices of rooted tree  $T \in \mathbb{T}_n$  by colors, say  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , by the following algorithm.

- If two vertices are leaves with common father, then they have equal color,
- If two vertices have equal color, then they are leaves and they have common father.

Therefore we can correspond for each 1-asymmetric tree  $T \in \mathbb{T}_n$  its color

$$\text{color}(T) = \{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots\},$$

where  $k_i$  is multiplicity of colors  $a_i$  in  $T$ .

**Definition** Weight of 1-asymmetric tree  $T$  is defined by

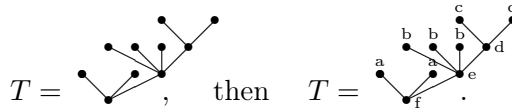
$$\omega(T) = \omega(\{k_1 a_1, k_2 a_2, \dots\}) = \text{sort}(k_1, k_2, \dots),$$

where  $k_i$  is multiplicity of color  $a_i \in \Omega$ .

**Example** Weight of 0 - asymmetric tree  $T \in \mathbb{T}_n$  is

$$\omega(T) = \omega(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = (1, 1, \dots, 1).$$

**Example** Let  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$  and



So,

$$\omega(T) = \omega(\{2a, 3b, 2c, 1d, 1e, 1f\}) = \text{sort}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = (3, 2, 2, 1, 1, 1).$$

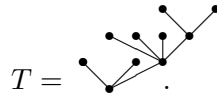
**Theorem** Let  $\lambda \vdash n$  and  $T$  is 1 - asymmetric rooted tree with  $n$  vertices. If  $\omega(T) = \lambda$ , then

$$M^T \cong M^\lambda,$$

where  $M^\lambda$  is permutation module for  $\lambda$ .

About permutation module  $M^\lambda$  for  $\lambda$  see ([7]).

**Example** Let



Then  $\omega(T) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ , and

$$M^T \cong M^{(3,2,2,1,1,1)}.$$

**Corollary** If  $T$  is 0 - asymmetric rooted tree with  $n$  vertices, then

$$M^T \cong \mathbb{C}S_n,$$

where  $\mathbb{C}S_n$  is group algebra of  $S_n$ .

### References

1. *Bremner M.* Classifying varieties of anti-commutative algebras // Nova J. Math. Game Theory Algebra. -1996. -V. 4 (2), -P. 119-127.
2. *Chapoton F.* Hyperarbres, arbres enracinés et partitions pointées // Homology, Homotopy and Applications. -2007. -V. 9 (1), -P. 193-212.
3. *Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C.* Trees, Free Right-symmetric algebras, Free Novikov algebras and identities // Homology, Homotopy and Applications. -2002. -V. 4 (2), -P. 165-190.
4. *Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M.* Free bicommutative algebras // Serdica Math. J. -2011. -V. 37 (1), -P. 25-44.
5. *Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A.*  $S_n$  - and  $GL_n$  - module structures on free Novikov algebras // Journal of Algebra. -2014. -V. 416, -P. 287-313.
6. *Kraskiewicz W., Weynman L.* Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element // Bayreuth. Math. Schr. -2001. -V. 63, -P. 265-284.
7. *Sagan B.E.* The symmetric group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 203, Springer Verlag New York. -2001. -241 p.

## 4 Математическая физика и математическое моделирование

УДК 532(02)

Құрмансейіт М.Б., Қалтаев А., Кульджабеков А.Б.

*Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Қазақстан, Алматы*

*kurmanseiit.maksat@gmail.com*

### Уранды жерасты шаймалау арқылы өндіру процессін ағын сызығы әдісімен модельдеу

**Есептің қойылымы.** Уран тау жыныстарында уранит деп аталатын күрделі оксит түрінде кездеседі. Оның кристалды торындағы молекулаларының құрылымы комплексті түрде байланысқан. Қышқылмен қышқылдандыру, уранит пен қышқылдың арасындағы реакция көп энергияны қажет ететін процесс болып келеді (эндотермиялық процесс) [1]. Жер асты шаймалау процессін сипаттайтын теңдеулер жүйесін химиялық модел қиындатады. Бұл модельді соңғы айырымдық схемамен шешу жоғарғы деңгейдегі технологияларды қажет етеді. Себебі, модель үш өлшемді кеңістікте және төрт химиялық компоненттерден тұрады. Осыған байланысты, ағын сызық моделін жиі қолданылады.

**Ағын сызық (Streamline) моделі.** Ағын сызық моделі мұнай саласында 1950 жылдан бастап қолданылып келе жатыр. Ағын сызық әдісі сұйық ағынының шешімінің 3D моделін ағын сызықтарының бойындағы 1D шешімдерінің жиынтығымен сипаттайды. 1D ағын сызық моделін таңдау, конвекция әсері жоғары болған ағынды модельдеуді өте тиімді шешім түріне алып келеді. Математикалық тұрғыдан бұл ағын сызығының жүріп өту уақытын координата айнымалысы ретінде алынады [4].

**Алынған нәтижелер.** Есептеулер, айдайтын және өндірілетін ұңғылар симметриялы түрде орналасқан етіліп, өткізгіштігі бар және жоқ орталарда жүргізілді. Шектік айырымдық әдіспен шешілген жылдамдықтар өрісінен ағын сызығының ізі салынды. Пластты толығымен жүріп өткен ағын сызығының уақыты әрдайым бақылауда болды. 1D тасымал теңдеуі бір қалыпты емес пласт кеңістігін ескере отырып жолды өткен уақытта есептелінген [3-5].

**Қорытынды.** Ағын сызық әдісі есептеуді айтарлықтай жеңілдетеді және ағын сызығының бойында анализ жасауға ыңғайлатады. Көп жағдайда 1D тасымал теңдеуінің аналитикалық түрде шешімін тауып 3D қойса болады. Пласттағы ұңғылар арасында бөлшектің таралуға кеткен уақытын бірден табуға мүмкіндік береді. Конвекциясы басымды болып келетін есептерді шешуге өте ыңғайлы, яғни кез-келген фильтрацияның есебіне қолдануға тиімді болып келетінін көз жеткіздік.

#### Қолданылған әдебиеттер

1. *Белецкий В.И., Богатков, Л.К.* Справочник по геотехнологии урана. - Москва: под ред. Д.И. Скороварова, 1997. -672 с.
2. *Данаев Н.Т., Корсакова Н.К., Пеньковский В.И.* Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пласта. - Алматы: Қазақ университеті, 2005. -180 с.

3. *AkhilDatta-Gupta, Michael J. King* Streamline simulation: Theory and Practice. - Society of Petroleum Engineers, 2007. -397 p.
4. *Bratvedt F.* A new front tracking method for reservoir simulation. - SPERE (1992) 7, 1, 107 p.
5. *Thiele M.R., Batycky R.P., Blunt M.J.* "A Streamline-Based 3D Field-Scale Compositional Reservoir Simulator" // SPE 38889 in Proceeding of SPE Annual Technical Conference. - San Antonio, Texas, October 1997.- p. 5 - 8

УДК 517.957

Абенов М.М.

*Казахская Академия транспорта и коммуникаций, Казахстан, Алматы*  
*abenov60@gmail.com*

## О континууме точных решений общего уравнения неразрывности

В задачах гидродинамики, общее уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Здесь:  $\rho(x, y, z, t)$  — неизвестная плотность,  $V_k(x, y, z, t), k = \overline{1, 3}$  — неизвестные компоненты скорости жидкости.

Уравнение (1) можно считать безразмерным, так как с помощью стандартных приемов (введение понятий характерной плотности и скорости, характерного размера, характерного времени течения жидкости) оно легко приводится к безразмерному виду.

Отметим, что уравнения того же вида имеют место и в других разделах физики: в теории волн, в электродинамике, в нерелятивистской квантовой механике и т.д.

Для простоты будем считать, что уравнение (1) задано в некоторой конечной четырехмерной области  $D$ .

Объект вида  $U = \{u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t), u_0(x, y, z, t)\}$ , компоненты которого являются действительными и непрерывно дифференцируемыми функциями в области  $D$ , будем называть четырехмерной функцией, а все множество таких функций обозначим  $M(D)$ . При таком подходе, любое решение уравнения (1) вида  $\{V_1, V_2, V_3, \rho\}$  может рассматриваться как некоторый элемент множества  $M(D)$ . Заметим, что относительно операции покомпонентного сложения и умножения на скаляр, это множество является линейным пространством. Далее, как показано в работах автора, существует бесконечномерное линейное подпространство  $M(D)$ , каждый элемент которого является четырехмерным аналогом известных функций из действительного и комплексного анализа. Причем компоненты любого элемента из подпространства  $J(D)$ , который мы назовем регулярной четырехмерной функцией, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial t} \quad (2)$$

Итак, имеем множество четырехмерных регулярных функций (мощности континуума), компоненты которых удовлетворяют соотношениям (2) в области  $D$ . Теперь запишем эти соотношения в следующей, эквивалентной форме:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial(-u_2)}{\partial y} + \frac{\partial(-u_3)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Отсюда, сравнивая (3) и (1), приходим к следующему утверждению.

**Теорема.**

Любой, регулярной в области  $D$  функции, соответствует точное решение уравнения неразрывности, определяемое из равенств:

$$\begin{aligned} \rho &= u_0(x, y, z, t), \\ \rho V_1 &= u_1(x, y, z, t), \\ \rho V_2 &= -u_2(x, y, z, t), \\ \rho V_3 &= -u_3(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) точное решение уравнения неразрывности определяется легко, через компоненты произвольной регулярной функции.

**Литература**

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. - М: Дрофа, 2003. - 840 с.
2. *Абенов М.М.* Решения системы уравнений Навье-Стокса. - Алматы: К-2, 2013. - 64 с.
3. *Абенов М.М.* Некоторые приложения спектральной теории функций бикомплексного переменного. - Алматы: К-2, 2013. - 54 с.

УДК 517.956

Абылкаиров У.У.

*Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*SAitzhanov@mail.ru*

**Классическая однозначная разрешимость начально-краевой задачи для квазистационарной системы Навье-Стокса неоднородной жидкости**

Многие математические проблемы теории уравнении Навье-Стокса неоднородной жидкости освящены в монографии С.Н.Антонцева, А.В.Кажихова, В.Н.Монахова [1]. Данная работа посвящена доказательству глобальной теоремы существования и единственности классического решения начально-краевой задачи для квазистационарной системы Навье-Стокса неоднородной жидкости. Некоторые теоретические вопросы связанные с численным анализом, методом аппроксимаций рассмотрены в работах автора [2],[3].

В настоящей работе, мы рассматриваем в ограниченной области  $\Omega \subset R^n (n \geq 2)$  уравнения Стокса

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta \vec{\vartheta} - \nabla p + \rho \vec{f} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{\vartheta} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ в } Q_T, \quad (1)$$

и уравнения для плотности среды



$$\partial_t \rho + (\vec{v} \nabla) \rho = 0, \text{ в } Q_T \quad (2)$$

с условием прилипания на границе  $\partial\Omega$  и начальным условием

$$\vec{v}|_{x \in \partial\Omega} = 0, \rho|_{t=0} = b(x), \quad (3)$$

где  $Q_T = \Omega \times [0, T]$ .  $\partial\Omega$  достаточно гладкая граница области  $\Omega$ , скажем, класса  $C^2$ , предполагается её неподвижность.

Справедливо следующая

**Теорема 1.** Пусть в трехмерной задаче (1)-(3) граница  $\Gamma = \partial\Omega \in C^{1,\gamma}$ , где  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $b(x) \in C^1(\Omega)$ . Тогда существует и причем единственное классическое решение задачи (1)-(3) на всей оси времени  $R$ .

В качестве метода доказательства, взят метод последовательного приближений, который является конструктивным. Этот метод применялся для уравнений гидродинамики, в частности, для уравнений Эйлера идеальной жидкости Н.М. Гюнтером и И.Л.Лихтенштейном. В настоящей работе внимание уделяется к обобщению и адаптацию этого метода к случаю нашей задачи (1)-(3). Плоские течения идеальной жидкости рассматривались значительно позднее В.И.Юдовичем [4] и Т.Като [5].

#### Литература

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. –315 с.
2. Абылкаиров У.У. Аппроксимация уравнений неоднородной жидкости // Неклассические уравнения математической физики. -Новосибирск, 1986. - С. 127-131.
3. Абылкаиров У.У. Периодические решение аппроксимаций неоднородной вязкой жидкости.// Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнением математической физики. – Новосибирск, 1988. – С. 3-12.
4. Юдович В.И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Журнал Вычислительной математики и матем. физики. – 1963. – Т.3, №6. – С. 1032-1066.
5. Kato T. On classical solutions of the two – dimensional nonstationary Euler equations // Arch. Rational Mech. and Analysis. – 1967. –V.25, №3. –P. 188-200.

УДК 517.956

Абылкаиров У.У., Айтжанов С.Е., Кайыржан М., Мырзахмедова Б.А.

*Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*SAitzhanov@mail.ru*

### Восстановление функций источника для параболического уравнения с переменными показателями нелинейностями

Исследуется обратная задача восстановления правой части для нелинейного параболического уравнения с интегральным переопределением. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственность решения обратной задачи. Построена

последовательность приближенных решений, с помощью полученной априорной оценки, доказана сильная сходимость построенной последовательности к искомому решению. Доказательство единственности обобщенного решения основана на полученной априорной оценке.

Рассмотрим в цилиндре  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  обратную задачу для нелинейного параболического уравнения, требуется определить функций  $u(x, t)$  и  $f(t)$  которые удовлетворяют:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \Delta u - a(x, t, u) |u|^{\sigma(x, t)-2} u + f(t) \lambda(x, t), \quad (1)$$

$$u = 0, \quad \text{на } \Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} u(x, t) \cdot K(x, t) dx = e(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $a = a(x, t, u)$ -функция Каратеодори, определенные для  $r \in R$  (измеримые по  $(x, t)$  при любом  $r \in R$  и непрерывные по  $r$  для почти всех  $(x, t) \in Q_T$ ),

$$\begin{cases} \forall (x, t, r) \in \bar{Q}_T \times R \\ 0 < a_0 \leq a(x, t, r) \leq a_1 < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

$\sigma = \sigma(x, t)$  предполагается измеримой функцией, определенной в  $Q_T$  и удовлетворяющей неравенству

$$\forall P = (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad 1 \leq \sigma^- \leq \sigma(P) \leq \sigma^+ < \infty \quad (6)$$

с заданными постоянными  $\sigma^-$  и  $\sigma^+$ . Функции  $\lambda(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $K(x, t)$  и  $e(t)$  заданы.

Краевые задачи определения коэффициентов или функции источника для параболического уравнения в предположении независимости искомых коэффициентов или функции источника либо от временной переменной, либо от пространственной переменной рассматривались в работах [1-5]. Численным исследованиям всевозможных задач математической физики, в том числе некорректным и обратным, посвящено множество работ: [1], [2], [4], [5] и литературы в них. Существование и единственность вырождающихся 'параболических' уравнений были рассмотрены в работах [6-8].

Обратную задачу (1)-(4) можно трактовать как задачу нахождения точных управлений  $f(t)$ , необходимых для достижения заданной или ожидаемой энергии  $e(t)$ .

**Определение.** Функции  $u(x, t)$  и  $f(t)$  называются обобщенным решением обратной задачи (1)-(3), если функции  $u(x, t) \in L_{\infty}(Q_T) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ ,  $u_t \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$  и  $f(t) \in L_2(0, T)$  удовлетворяют следующим интегральным тождествам

$$\begin{aligned} e'(t) = \int_{\Omega} K_t u dx + \mu \int_{\Omega} u \cdot \Delta K dx - \int_{\Omega} a(x, t, u) |u|^{\sigma(x, t)-2} u \cdot K dx + \\ + f(t) \int_0^1 \lambda \cdot K dx, \end{aligned} \quad (7)$$

для любых  $\xi(x, t) \in L_{\infty}(Q_T)$ ,  $\xi(x, t) \in L_{\sigma(x, t)}(Q_T)$ ,  $\xi(x, t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^0(\Omega)$ ,  $\xi(x, T) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[ -u \cdot \xi_t + \mu \nabla u \cdot \nabla \xi + a(x, t, u) |u|^{\sigma(x, t)-2} u \cdot \xi \right] dx dt = \\ = \int_{Q_T} f(t) \lambda \cdot \xi dx dt + \int_{\Omega} \varphi(x) \xi(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t) \in C^1(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap C(0, T; W_2^2(\Omega)), e(t) \in W_2^1(\Omega), \\ \lambda(x, t) \in C(\bar{Q}_T), \varphi(x) \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} K \cdot \lambda dx \neq 0, \text{ при } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (9)$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия (9) тогда существует единственное обобщенное решение  $u(x, t) \in V(Q_T), f(t) \in L_2(0, T)$  обратной задачи (1)-(4).

#### Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука. 1979.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шваццкий С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука. 1980.
3. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. 2000.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. -Новосибирск: Сибирское научное изд-во. 2009.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.:ЛКИ. 2009. 480 с.
6. Антонцев С.Н., Шмарев С.И. Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности // Фундаментальная и прикладная математика. - 2006. - Т. 12, № 4. - С. 3-19.
7. Antontsev S. N., Shmarev S. A model porous medium equation with variable exponents of nonlinearity: Existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.-2005.-Vol. 60, no. 3 (A).-P. 515-545.
8. Жиков В.В. Об одном подходе разрешимости обобщенных уравнений Навье-Стокса // Функциональный анализ и его приложения. -2009. -Т.43. -Вып.3. -С. 33-53.

УДК 517.946

Абылкаиров У.У., Хомпыш Х.

*Казахский Национальный университет им. ал-Фараби, Казахстан, Алматы*

*U.Abylkairov@gmail.com, konat\_k@mail.ru*

### Обратная задача для уравнений Кельвина-Фойгта

Данная работа посвящена актуальной проблеме раздела дифференциальных уравнений с частными производными-обратной задаче с интегральным условием переопределения. Исследование таких задач представляет интерес как с точки зрения развития общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, так и точки зрения приложения в математическом моделировании различных процессов. К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения по времени а также по пространственным переменным. Однако в подавляющем большинстве исследованы задачи для параболических

уравнений. В настоящей работе рассмотрена одна обратная задача для уравнения Кельвина-Фойгта с интегральным условием переопределения по времени. Уравнения Кельвина-Фойгта входит в классу уравнения соболевского типа. В основном для различных классов уравнений соболевского типа изучались вопросы существования и несуществования решений, единственности решений, вопросы, связанные с изучением свойств решений, обратные же задачи, линейные или нелинейные, изучены относительно слабо. Направлении, связанном с направлением настоящей работы, можно отметить статьи [1]-[4].

Пусть  $\Omega$  ограниченная области из пространства  $R^n$ ,  $n = 2, 3$  с гладкой границей  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $t$  есть число из интервала  $(0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$  есть ограниченный цилиндр.

Рассмотрим для уравнения описывавшие движение жидкости Кельвина-Фойгта [5]-[7]:

$$\vec{v}_t(x, t) - \chi \Delta \vec{v}_t(x, t) - \nu \Delta \vec{v}(x, t) + \nabla p(x, t) = f(x) \vec{g}(x, t) + \vec{h}(x, t), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

в цилиндре  $Q_T$  обратную задачу нахождения тройку неизвестных функции  $(\vec{v}, \nabla p, f(x))$  с начальным условием

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

граничным условием прилипания

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

и интегральными условиями переопределения

$$\int_0^T \vec{v}(x, t) w(t) dt = \vec{a}(x), \quad \int_0^T \nabla p(x, t) w(t) dt = \nabla b(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Здесь функции  $\vec{g}(x, t)$ ,  $\vec{h}(x, t)$ ,  $\vec{v}_0(x)$ ,  $\vec{a}(x)$ ,  $\nabla b(x)$ , и  $w(t)$  заданы, а вектор скорости жидкости  $\vec{v}(x, t)$ , градиент давления  $\nabla p(x, t)$  и коэффициент правой части  $f(x)$  неизвестные.  $\nu$  и  $\chi$  есть соответственно положительные коэффициенты вязкости и релаксации жидкости.

Существования и единственности слабого а также сильного решения прямой задачи (1)-(4) хорошо исследованы в работах А. П. Осолкова [6]-[7].

Предположим, что данные задачи удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned} (C1) \quad & \vec{v}_0(x) \in V(\Omega) \cap W_2^2(\Omega); \\ (C2) \quad & w(t) \in W_2^1([0, T]), \quad w(T) = 0; \\ (C3) \quad & |g(x, t)| \leq K_g < \infty, \quad \left| \int_0^T g(x, t) w(t) dt \right| \geq g_0 > 0, \quad (x, t) \in Q_T; \\ (C4) \quad & \vec{a}(x) \in V(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \quad \nabla b(x) \in L_2(\Omega); \\ (C5) \quad & \vec{h}(x, t) \in L_2(Q_T), \end{aligned} \quad (6)$$

Решение обратной задачи (1)-(5) понимается в следующем смысле.

**Определение.** Тройка функций  $(\vec{v}, \nabla p, f(x))$  называется сильным обобщенным решением обратной задачи (1)-(5) если

$$\vec{v} \in L_\infty(0, T; V \cap W_2^2(\Omega)) \cap W_2^1(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad \nabla p \in L_2(Q_T), \quad f(x) \in L^2(\Omega)$$

и удовлетворяет соотношению (1)-(5) почти всюду в соответствующей областей.

Используя известные результаты прямой задачи (1)-(4), доказывается существования и единственности сильного обобщенного решения обратной задачи (1)-(5).

**Теорема.** Пусть выполняются условия (C1)-(C5) и

$$\frac{2\|w_t\|^2 K_g^2 T}{\nu g_0^2} \left( \min \left\{ \frac{\theta^4}{\nu}, \frac{\theta^4 T}{2(\theta^2 + \chi)}, \frac{\nu \theta^2 T^2}{2(\theta^2 + 2\chi)} \right\} + \min \left\{ \frac{\chi T}{2}, \frac{\chi^2}{\nu} \right\} \right) < 1 \quad (7)$$

Тогда существует единственное сильное обобщенное решение обратной задачи (1)-(5). Где  $\theta$  есть константа из неравенства Пуанкаре-Фридрихса.

### Литература

1. *Аблабеков Б.С.* Обратные задачи для уравнения Бенджамена-Бона-Мохани// Инфор. техн. и обратные задачи рационального природопользования. -Ханты-Мансийск: Югор. НИИ Информ. технологий, -2005. -С. 6-9.
2. *Fedorov V. E., Urasaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equation// J. of Inverse and Ill-posed Problems. -2004. -V. 12.(4). -P. 387–395.
3. *Федоров В. Г., Иванова Н. Д.* Нелинейная обратная задача для системы Осколкова//Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач, тез. докл. -Новосибирск, -2011. -С.72.
4. *Khomysh Kh* Inverse Problem with Integral Overdetermination for System of Equations of Kelvin-Voight Fluids//Advanced Materials Research, -2013. -V. 705, -P. 15-20.
5. *Oskolkov A. P.* The uniqueness and solvability in the large of boundary value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers//Zap. Nauchn. Sem. LOMI, -1973. -V. 38. -P. 98-136.
6. *Oskolkov A. P.* Nonlocal problems for the equations of Kelvin-Voight fluids// Zap. Nauchn. Semin. POMI, -1992. -V.197, -P. 120-158.
7. *Oskolkov A. P.* Nonlocal problems for the equations of the Kelvin- Voight fluids and their  $\varepsilon$ - approximations// Zap. Nauchn. Sem. POMI, -1995. -V. 221, -P. 185-207.

УДК 519.63:532.13

Айда-заде К.Р., Кулиев С.З.

*Институт Систем Управления НАНА, Азербайджан, Баку*

*kamil\_aydazade@rambler.ru; copal@box.az*

## Определение коэффициента гидравлического сопротивления линейных участков нефтепровода при неустановившемся режиме движения \*

Нестационарное движение несжимаемой жидкости постоянной плотности  $\rho$  и вязкости  $\nu$  по линейному горизонтальному участку трубопровода длины  $l$  и диаметра  $d$  достаточно адекватно описывается следующей системой дифференциальных уравнений гиперболического типа:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \alpha \lambda \omega \right], \quad -\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \rho \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad x \in X = (0, l), t > t_0, \quad (1)$$

где  $p = p(x, t)$ ,  $\omega = \omega(x, t)$  – давление и скорость движения жидкости в точке трубопровода  $x \in (0, l)$  в момент времени  $t > t_0$ ;  $c$  – скорость распространения звука в

жидкости;  $\alpha$  – коэффициент линеаризации. Как известно [1], коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$  зависит от режима движения жидкости, т.е. от числа Рейнольдса  $Re = \omega d/\nu$  и относительной шероховатости внутренней поверхности участка трубопровода  $\varepsilon = k/d$ , где  $k$  – абсолютная шероховатость. Считая шероховатость различной для разных участков трубопровода, получаем, что величина  $\lambda$  является функцией от скорости  $\omega$  и точки трубы  $x$ , т.е.  $\lambda = \lambda(\omega, x)$ .

В работе предлагается постановка и численное решение задачи по определению коэффициента сопротивления линейного участка при конкретных условиях его эксплуатации и текущем состоянии его внутренней поверхности. Исходными данными для решения данной обратной задачи являются известные режимы давления и/или скорости движения жидкости, наблюдаемые в различных точках линейного участка трубопровода непрерывно или в дискретные моменты времени. Рассматриваемая задача определения функции коэффициента гидравлического сопротивления формулируется в рамках задачи оптимального управления системой с распределенными параметрами, а более точно задачи синтеза управления, т.к. текущее значение идентифицируемой функции зависит от текущего состояния процесса  $\omega(x, t)$  и точки трубопровода  $x \in (0, l)$ . Для численного решения задачи используется подход, основанный на отыскании оптимальных зональных значений параметров идентифицируемого коэффициента [1].

Предположим, что, исходя из априорной информации о процессе, известен диапазон реально возможных значений скорости движения жидкости в трубопроводе, т.е.  $\omega(x, t) \in \Omega = [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t > t_0$ , где  $\underline{\omega}$  и  $\bar{\omega}$  – известные предельные значения функции  $\omega(x, t)$ . Квантуем множества  $\Omega$  и  $X$  заранее заданными значениями  $\omega_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, L_\omega$ , и  $x_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, L_x$ , такими, что:

$$\underline{\omega} = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{L_\omega} = \bar{\omega}, 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{L_x} = l.$$

Предполагаем, что функция  $\lambda(\omega, x)$  является кусочно-постоянной относительно  $\omega$  и  $x$ , т.е.

$$\lambda(\omega, x) = \lambda_{ij}, \omega \in \Omega_i = [\omega_{i-1}, \omega_i), i = 1, 2, \dots, L_\omega, \quad (2)$$

$$x \in X_j = [x_{j-1}, x_j), j = 1, 2, \dots, L_x.$$

Рассмотрен также и более общий случай, когда функция  $\lambda(\omega, x)$  определяется посредством заранее заданного множества базисных функций, т.е.

$$\lambda(\omega, x) = \sum_{s=1}^M \lambda_{ij}^s \cdot \gamma_s(\omega), \omega \in \Omega_i, x \in X_j.$$

Таким образом, задача нахождения функции  $\lambda(\omega, x)$  заменяется задачей нахождения конечномерного вектора  $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i=1,2,\dots,L_\omega}^{j=1,2,\dots,L_x}$ . Для ее решения можно использовать численные методы оптимизации первого порядка. Для построения процедуры безусловной оптимизации первого порядка получены формулы для градиента целевого функционала относительно параметров вектора  $\Lambda$ . Доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Компоненты градиента целевого функционала рассматриваемой задачи на классе функций (2) определяются формулами

$$\frac{\partial J(\Lambda)}{\partial \lambda_{ij}} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \int_{T_s}^{\bar{T}_s + \Delta T} \int_{\Pi_{ij}^s(t; \Lambda)} \alpha \cdot \rho \cdot q(x, t) \cdot \omega(x, t; \Lambda) dx dt,$$

$$i = 1, 2, \dots, L_\omega, j = 1, 2, \dots, L_x,$$

$$\Pi_{ij}^s(t; \Lambda) = \{(a_k, b_k) \subset [x_{j-1}, x_j] : \omega_{i-1} \leq \omega(x, t; \Lambda) < \omega_i, \forall x \in (a_k, b_k), k = 1, 2, \dots\}, t \in [T_s + \Delta T, \bar{T}_s],$$

где  $q(x, t), v(x, t)$  являются решением сопряженной к (1) системы

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0, \quad \rho \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + c^2 \rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \alpha \rho \lambda q(x,t) = 0,$$

$$x \in [0, l], \quad t \in [\underline{T}_s + \Delta T, \bar{T}_s], \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Конкретный вид краевых и начальных условий определяется в зависимости от типа наблюдений за режимом движения жидкости. Здесь  $[\underline{T}_s, \bar{T}_s], s = 1, 2, \dots, N$ , – временные промежутки достаточно большой длительности, в которых проводились наблюдения за режимами перекачки;  $\Delta T$  – заданная длительность влияния начальных условий для каждого конкретного участка с учетом свойств перекачиваемой жидкости и геометрических размеров участка.

Для численного решения поставленной коэффициентно-обратной задачи разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты на примере решения тестовых задач.

*\*Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант №- EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1.*

### Литература

1. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
2. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Численное решение нелнейных коэффициентно - обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // ЖВМиМФ. – 2011. – Т.51, №5. –С.1-13.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

УДК 517.95

Айменова К.А.<sup>1</sup>, Иманбердиев К.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики и математического моделирования*

<sup>2</sup> *Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

<sup>1</sup> *aimenovak@gmail.com, <sup>2</sup> kanzharbek75ikb@gmail.com,*

## Об алгоритме решения некорректной задачи для уравнения Пуассона

В области  $\Omega = \{x, y | 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$  для уравнения Пуассона рассматривается граничная задача

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & \{x, y\} \in \Omega, \\ u|_{x=0} = \varphi_0(y), & u_x|_{x=0} = \varphi_1(y), \\ u|_{y=0} = \psi_0(x), & u_y|_{y=0} = \psi_1(x). \end{cases} \quad (1)$$

Задача (1) является некорректной [1, 2], так как условия на границе заданы только лишь на двух сторонах прямоугольника  $\Omega$ .

Будем предполагать, что данные граничной задачи (1) удовлетворяют условиям:

$$f \in L_2(\Omega), \varphi_0 \in H^1(0, 1), \varphi_1 \in L_2(0, 1), \psi_0 \in H^1(0, 2), \psi_1 \in L_2(0, 2). \quad (2)$$

В работе предлагается алгоритм приближенного решения некорректной граничной задачи (1) при условиях (2).

Для этой цели в соответствии к задаче (1) сформулируем следующую регуляризованную оптимизационную задачу по минимизации функционала:

$$\mathcal{J}_\alpha(u, p_1) = \int_0^1 |u_x(0, y) - \varphi_1(y)|^2 dy + \alpha \int_0^1 |p_1(y)|^2 dy, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (3)$$

на решениях граничной задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & \{x, y\} \in \Omega, \\ u|_{x=0} = \varphi_0(y), & u|_{x=2} = p_1(y), \\ u|_{y=0} = \psi_0(x), & u_y|_{y=0} = \psi_1(x), \end{cases} \quad (4)$$

где  $p_1(y) \in H^1(0, 1)$  – неизвестная функция управления, подлежащая определению, наряду с решением граничной задачи (4)  $u(x, y)$  из условия минимума функционала (3).

Решение задачи (3)–(4) обозначим:

$$\{\bar{u}(x, y) = u(x, y; \bar{p}_1(y)), \bar{p}_1(y)\} = \arg \min_{\{u, p_1\}} \mathcal{J}_\alpha(u, p_1),$$

где  $u(x, y; \bar{p}_1(y))$  – решение граничной задачи (4) при управлении  $p_1(y) = \bar{p}_1(y)$ .

Справедливо следующее

**Утверждение.** *Управление  $\bar{p}_1$  является оптимальным, тогда и только тогда, когда выполняется следующее тождество:*

$$\langle \mathcal{J}_{1\alpha p_1}(\bar{p}_1), p_1 - \bar{p}_1 \rangle = 0, \quad \forall p_1 \in H^1(0, 1), \quad (5)$$

т.е. производная по любому направлению  $p_1 - \bar{p}_1$  от функционала  $\mathcal{J}_{1\alpha}(p_1)$  равна нулю, где  $\mathcal{J}_{1\alpha}(p_1(y)) = \mathcal{J}_\alpha(u(x, y; \bar{p}_1(y)), \bar{p}_1(y))$ .

Используя условие оптимальности (5), предлагается следующий алгоритм приближенного решения некорректной задачи для уравнения Пуассона (1).

- 1) Зададим начальное приближение управления  $p_{1(0)}(y)$ ;
- 2) Решаем некорректную граничную задачу (4) при управлении  $p_1 = p_{1(0)}(y)$ . Для этого используем оптимизационный алгоритм [3, 4];
- 3) Вычисляем значение функционала (3);
- 4) Решаем следующую сопряженную задачу:

$$\begin{cases} -\Delta v = 0, & \{x, y\} \in \Omega, \\ v|_{x=0} = \bar{u}_x(0, y) - \varphi_1(y), & v|_{x=2} = 0, \\ v|_{y=1} = 0, & v_y|_{y=1} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Задача (6) также является некорректной, поэтому для ее решения будем использовать алгоритм из пункта 2);

- 5) Из условия оптимальности (5) находим новое приближение управления:

$$p_{1(1)}^\alpha(y) = \frac{1}{\alpha} v_x(2, y; p_{1(0)}(y));$$

- 6) Переходим к пункту 2), т.е. решаем задачу (3) при управлении  $p_1 = p_{1(1)}^\alpha(y)$  и находим функцию  $u_1^\alpha(x, y) = u(x, y; p_{1(1)}^\alpha(y))$ , и т.д.

В заключении будут приведены результаты численного решения задачи (1) при заданных функциях  $\{f, \varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}$ .



## Литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978, 352 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979, 142 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
4. Джениалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Аязбаева А.М. Об оптимизационном методе решения задачи Коши-Дирихле для уравнения Пуассона // Математический журнал, Алматы, 2009, Т. 9, № 4 (34), с. 26-34.

УДК 517.956

Айтжанов С.Е., Бекболат Б., Нурланова А.Н., Нурыкенова Ж.С.,  
Толеубеккызы К.

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы

SAitzhanov@mail.ru

### 'Разрушение' решения обратной задачи псевдопараболического уравнения

Рассматривается обратная задача для уравнения псевдопараболического типа. В ограниченном области для этой задачи получены достаточные условия разрушения их решений за конечное время. Показано влияние начальных данных условий на время разрушения, для чего использован энергетический метод.

Рассмотрим в  $Q = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, t > 0\}$  обратную задачу для псевдопараболического уравнения

$$u_t - \alpha u_{xxt} - \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_0 + \nu_1 |u_x|^p) u_x] + bu_x - c |u|^p u = f(t)g(x), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^l u g dx = 1 \quad (4)$$

где  $\alpha, \nu_0, \nu_1, b, c, p$  положительные постоянные,  $g(x)$  и  $\varphi(x)$  известные функций, которые удовлетворяют следующим

$$g(x) = \omega - \alpha \omega_{xx}, \varphi(x) \in H_0^1(0, l) \cap L_{p+2}(0, l), \quad (5)$$

$$\omega \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \cap L_{p+2}(0, l)$$

$$\int_0^l (\omega - \alpha \omega_{xx}) \omega dx = 1, \int_0^l (\omega - \alpha \omega_{xx}) \varphi(x) dx = 1. \quad (6)$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия (5), (6) а также

$$c \frac{2p+3}{p+2} \|\varphi\|_{p+2,\Omega}^{p+2} > 2\sqrt{\frac{c_4}{p}} \left( \|\varphi\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^2 + \frac{c_5}{c_4} \right) + \frac{\nu_0}{2} \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^2 + \tag{7}$$

$$+ \frac{\nu_1}{p+2} \|\varphi_x\|_{p+2,\Omega}^{p+2} - \frac{b^2}{2} \|\varphi\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1+\nu_0}{2\nu_0} \|\omega_x\|_{2,\Omega}^2 - \frac{\nu_1}{p+2} \|\omega_x\|_{p+2,\Omega}^{p+2} - \frac{c}{p+2} \|\omega\|_{p+2,\Omega}^{p+2},$$

где  $\Omega = (0, l)$ ,  $c_2$  и  $c_3$  зависят от  $\omega_x$  и  $\omega$ ,

$$c_4 = \max \left\{ \frac{4(p^2\nu_0^2 + c_2^2\nu_1^2(p+1)^2) + 2p^2}{\alpha p}; \right\}$$

$$\left\{ 2(p+2) \left( \frac{2b^2(p+2)}{\alpha p} + \frac{(3-p)c}{p+2} \left( \frac{c^{p+3}c_3^6\alpha^p(p+2)^p 4^{p-1}}{9(p+1)^3} \right)^{\frac{1}{3-p}} \right) \right\}, \quad c_5 = \frac{4\nu_0^2 + b^2\alpha p}{\alpha p} \|\omega_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Тогда обобщенное решение задачи (1)-(4) не существует глобального во времени.

### Литература

1. *Yaman M.* Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation // Journal of Inequalities and Applications. - 2012. - P. 274.
2. *Vasin V., Kamynin L.* On the asymptotic behaviour of solutions to inverse problems for parabolic equations // Sib. Math. J. -1997. Vol.38. -P. 647-662.
3. *Ramm A.G.* Inverse Problems, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, New York, 2005.
4. *Kamynin V.L., Franchini E.* An inverse problem for a higher order parabolic equation // Math. Notes. -1998. -Vol.64(5). -P. 590-599.
5. *Prilepko A.I., Orlovskii D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Dekker, New York, 2000.
6. *Riganti R., Savateev E.* Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation // Commun. Partial Differ. Equ. -1994. -Vol.19. -P. 1611-1628.
7. *Tkachenko D.S.* On an inverse problem for a parabolic equation // Math. Notes. -2004. -Vol.75(5). -P. 729-743.
8. *Guvnilir A.F., Kalantarov V.K.* The asymptotic behaviour of solutions to an inverse problem for differential operator equations // Math. Comput. Model. -2003. -Vol. 37. -P. 907-914.
9. *Eden A., Kalantarov V.K.* On global behaviour of solutions to an inverse problem for nonlinear parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. -2005. -Vol. 307. -P. 120-133.
10. *Mejvaci M.* Blow-up of solutions of pseudo-parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. -2009. -Vol. 352. -P. 629-633.
11. *Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В.* Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова // Изв. РАН. Сер. матем. -2014. -Т. 78(3). -С. 79–110
12. *Kalantarov V.K., Ladyzhenskaya O.A.* Formation of collapses in quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types // Zap. Nauchn. Semin. LOMI. -1977. -Т. 69. -С. 77-102.

13. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. -Москва: Наука, 1970.

УДК 517.956.4

Алимжанов Е.С.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*  
*aermek81@gmail.com*

## Задача Веригина с малым параметром

Рассмотрена задача Веригина [1] с малым параметром в пространстве Гельдера, которая состоит в определении функций  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ , удовлетворяющих параболическим уравнениям, а также  $\gamma(t)$  – свободной границы. В одном из условия сопряжения, заданной на свободной границе, содержится малый параметр при старшем члене. Такая задача рассмотрена впервые. Отметим, что в работе [2] Т. Youshan, F. Yi изучена двумерная задача Веригина с малым параметром, где малый параметр находится в другом граничном условии.

Будут доказаны существование, единственность и оценки решения с константой, не зависящей от малого параметра. Кроме того, будет установлено, что при предельном переходе  $\varepsilon \rightarrow 0$  исходная возмущенная задача стремится к невозмущенной, т.е. при  $\varepsilon = 0$ .

### Литература

1. *Веригин Н.Н.* Нагнетание вязких растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости основания гидротехнических сооружений // Изв. АН СССР, Отдел техн. наук, 1952. – С. 674-687.
2. *Youshan T., Yi F.* Classical Verigin problem as a limit case of Verigin problem with surface tension at free boundary, Appl. Math. – JCU 11B (1996), 307-322.

УДК 66.021:541.18

Аманбаев Т.Р., Тилеуов Г., Тулегенова Б., Бейсебаева А.

<sup>1</sup> *Институт математики и математического моделирования МОН РК,*  
*Казахстан, Алматы*

<sup>2</sup> *Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова,*  
*Казахстан, Шымкент*

*tulegen\_amanbaev@mail.ru*

## Моделирование процесса седиментации кластеров частиц с учетом

Дисперсные системы достаточно широко распространены в природе и современных технологиях. При этом зачастую дисперсные включения (агрегаты или кластеры, образованные агрегацией мелких частиц) обладают фрактальной структурой. В настоящее время описанию поведения фрактальных агрегатов посвящено большое количество работ, подробный обзор которых приведен в [1]. В последнее время с появлением повышенного интереса к наносuspension (жидкостям с наноразмерными частицами) ввиду их

уникальных свойств изучение процесса седиментации твердой фазы становится достаточно актуальным. Это связано с тем, что наносuspензии недостаточно стабильны, так как в силу различных причин частицы коагулируют и при достижении некоторого критического размера начинают осаждаться. Динамика суспензии с агрегируемой дисперсной фазой при отсутствии фрактальных свойств кластеров (но с учетом эффекта стесненности осаждения) изучена в [2], а особенности седиментации крупной частицы в суспензии с мелкодисперсной фракцией при отсутствии процессов межфракционного массопереноса обсуждаются в [3].

Цель данной работы - изучение влияния фрактальных свойств на параметры агрегата и процесс его седиментации. Рассмотрим коагулирующую дисперсную систему, в которой уже произошло разделение дисперсной фазы на две разномасштабные фракции. Следуя [3,4] примем следующие предположения: частицы из разных фракций существенно различаются по размерам; агрегаты (или крупные частицы) растут за счет присоединения мелких частиц; процесс коагуляционного роста мелких частиц до размера агрегатов имеет пренебрежимо малую скорость по сравнению с прямым обменом материалом между двумя фракциями. Агрегаты состоят из мелких частиц (промежутки которых заполнены жидкостью), сохраняют сферическую симметричность и не подвержены броуновскому блужданию. Фрагментация агрегатов не рассматривается. Из уравнений сохранения массы следует, что в пределе, когда все мелкие частицы объединились в кластеры, имеют место соотношения, которые связывают начальное (отмечены нижним индексом "0") и предельное (отвечает нижний индекс "s") состояния суспензии

$$\bar{r}_{2s} = \left(1 + \frac{\alpha_{1p0}\theta}{\alpha_{20}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{20}}\right)^{1/3}, \quad \alpha_{2s} = \alpha_{20} + \alpha_{1p0}, \quad (1)$$

$$\theta = \bar{\rho}_p^\circ / \bar{\rho}_2^\circ, \quad \bar{\rho}_2^\circ = 1 + \alpha_{2p}^\circ(\bar{\rho}_p^\circ - 1), \quad \bar{\rho}_p^\circ = \rho_p^\circ / \rho_l^\circ, \quad \bar{\rho}_2^\circ = \rho_2^\circ / \rho_l^\circ, \quad \bar{r}_2 = r_2 / r_{20}. \quad (2)$$

Здесь  $r_2$ ,  $\alpha_2$  - радиус агрегатов и их объемная доля в суспензии,  $\alpha_{1p}$  - объемная доля мелкой фракции,  $\rho_p^\circ$ ,  $\rho_l^\circ$  - истинные плотности дисперсной и несущей фаз,  $\rho_2^\circ$  - плотность кластера,  $\alpha_{2p}^\circ$  - объемная доля твердой фазы (мелких частиц) в составе агрегата (оставшуюся долю  $1 - \alpha_{2p}^\circ$  занимает жидкая фаза). В случае трехмерной фрактальной структуры имеем  $\alpha_{2p}^\circ = Ar_{2s}^{-m}$ ,  $m = 3 - D$ , где  $D$  - фрактальная размерность агрегата. Для детерминированной фрактальной структуры  $D \cong 1.7712$  [5]. Для диффузно-контролируемой агрегации, как отмечено в [1], фрактальная размерность агрегатов  $D \cong 1.75 - 1.78$ . В общем случае имеет место соотношение  $1 \leq D \leq 3$ .

Из (1), (2) для радиуса фрактального агрегата вытекает следующее уравнение:

$$\bar{r}_{2s}^3 = 1 + \left(\bar{\rho}_p^\circ \frac{\alpha_{1p0}}{\alpha_{20}}\right) \frac{1}{1 + A_1(\bar{\rho}_p^\circ - 1)\bar{r}_{2s}^{-m}}, \quad (\bar{r}_{2s} \geq 1). \quad (3)$$

Решая это неявное относительно  $\bar{r}_{2s}$  уравнение, получим зависимости параметров агрегата (их размеров, плотности, объемной доли твердого компонента в нем и т.п.) от начальной концентрации мелкой фракции.

В случае больших  $\bar{\rho}_p^\circ \gg 1$  ("плотные" частицы) уравнение (3) упрощается и примет вид

$$\bar{r}_{2s}^3 - \gamma \bar{r}_{2s}^m - 1 = 0, \quad \gamma = \alpha_{1p0} / (\alpha_{20} A_1), \quad m = 3 - D. \quad (4)$$

Отметим некоторые свойства полученного уравнения. В частности, не-трудно убедиться, что при  $D = 1$  значение  $\bar{r}_{2s}$ , удовлетворяющее уравнению (4), с ростом параметра  $\gamma$  стремится к  $\gamma$ . При  $D=3$  радиус кластера принимает свое наименьшее значение, равное  $(1+\gamma)^{1/3}$ . Также можно получить решение уравнения (4) для некоторых других значений  $D$ . В общем случае величину  $\bar{r}_{2s}$  из уравнения (4) в аналитическом виде выразить не удастся. Зависимости  $\bar{r}_{2s}$  от  $\gamma$  и фрактальной размерности кластера  $D$ , полученные численным

методом, показали, что с ростом параметра  $\gamma$  величина  $\bar{r}_{2s}$  также растет, а с увеличением фрактальной размерности она, наоборот, уменьшается. При этом установлено, что для значений параметра  $\gamma \gtrsim 5$  асимптотическая формула  $\bar{r}_{2s} \cong \gamma^{1/D}$  достаточно хорошо описывает полученные численным методом зависимости. Результаты расчетов скорости седиментации фрактальных агрегатов (с учетом их пористости и стесненности осаждения) показали, что фрактальный агрегат осаждается намного медленнее, чем твердая сфера или кластер с плотной упаковкой частиц. С ростом размера мелких частиц (составляющих агрегат) или размера кластера скорость его седиментации увеличивается.

### Литература

1. Ролдугин В.И. Свойства фрактальных дисперсных систем // Успехи химии. - 2003. - Т. 72, № 11. - С. 1027-1054.
2. Amanbaev T.R. Modeling of straitened sedimentation process in bidisperse suspension with interfractional coagulation // American Journal of Chemical Engineering. - 2014. - Vol. 2, № 2. - P. 14-20.
3. Аманбаев Т.Р. Влияние мелкодисперсной фракции на движение крупной частицы в суспензии // Журнал РАН. Теорет. основы химической технологии. - 2015. - Т. 49, №2. - С. 214-219.
4. Долгоносков Б.М. Кинетика коагуляции-фрагментации и равновесный спектр агрегатов в движущихся суспензиях // Журнал РАН. Теорет. основы хим. технологии. - 2001. - Т. 35, № 5. - С. 465-474.
5. Jullien R. Fractal aggregates // Comm. Cond. Mat. Phys. - 1987. - V. 13, No 4. - P. 177-205.

УДК 517.9

Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*  
*muvasharkhan@gmail.com*

## О разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода со спектральным параметром

Мы рассматриваем вопросы разрешимости особого интегрального уравнения вида

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(t + \tau)^2}{4a^2(t - \tau)}\right) + \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t - \tau}{4a^2}\right) \right\},$$

которое возникает при решении краевых задач для уравнения теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени.

**Теорема (основной результат) [1].** Неоднородное интегральное уравнение (1) разрешимо в классе функций, удовлетворяющих условию  $\sqrt{t} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0, \infty)$ , для каждой правой части  $\sqrt{t} \cdot f(t) \in L_\infty(0; \infty)$  и для каждого  $|\lambda| > 1$ . Соответствующее однородное уравнение имеет  $(N_1 + N_2 + 1)$ -собственных функций

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{p_k}{t} - \frac{t}{4a^2}\right) + \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(\frac{\lambda^2 - 1}{4a^2}t - \frac{\lambda\sqrt{-p_k}}{a}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2a\sqrt{-p_k} - \lambda t}{2a\sqrt{t}}\right), \quad -N_1 \leq k \leq N_2,$$

и общее решение неоднородного интегрального уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(t) = F(t) + \frac{\lambda^2}{4a^2} \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda^2(t-\tau)}{4a^2}\right) F(\tau) d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} C_k \varphi_k(t), \quad C_k - \text{const},$$

где

$$N_1 = \left[ (2\pi)^{-1}(\ln |\lambda| + \arg \lambda) \right], \quad N_2 = \left[ (2\pi)^{-1}(\ln |\lambda| - \arg \lambda) \right],$$

и функции  $F(t)$  определяется через заданную функцию  $f(t)$  и резольвенту

$$r(t, \tau) = \frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\lambda^n} \exp\left\{-n^2 \frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}.$$

### Литература

1. *Jenaliyev M., Amangaliyeva M., Kosmakova M., Ramazanov M.* On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // *Advances in Difference Equations.* - 2015. - V. 2015:71. - P. 1-14

УДК 519.63:532.13

Асадова Д.А.

*Институт Систем Управления НАНА, Азербайджан, Баку*

*jamilya\_babaeva@rambler.ru*

## Численный подход к исследованию нестационарных процессов в трубопроводах сложной закольцованной структуры

В данной работе приводится численный подход к решению системы с большим числом независимых трехточечных дискретных уравнений с нелокальными неразделенными краевыми условиями. На практике такого рода задачи возникают при численном исследовании дискретных моделей сложных процессов, в которых составляющие их подпроцессы, описываемые, в частности, разностными уравнениями, характеризуются тем, что в общих (узловых) точках отдельных подпроцессов невозможно измерить значение каждого параметра состояния в отдельности, но известны физические закономерности, которым должны удовлетворять значения параметров в узловых точках. Это приводит к неразделенности задания краевых условий для системы независимых дискретных уравнений, описывающих исходную дискретную модель. В реальной жизни такие задачи возникают при математическом моделировании процессов переноса электроэнергии

в сложных системах электропередач, нестационарного движения жидкости и газа в трубопроводных системах закольцованной структуры. Необходимо отметить, что непосредственное использование методов прогонки краевых условий для решения такого типа задач не эффективно, поскольку можно существенно ускорить их решение, используя специфику структуры задания условий.

Численный подход, предложенный в данной работе, основан на идее методов переноса краевых условий ([2], [3]) для решения систем независимых трехточечных дискретных уравнений, связанных только в узловых точках краевыми условиями. Получены формулы для осуществления переноса условий, приведены результаты численных экспериментов.

Рассмотрим систему независимых дискретных уравнений второго порядка, описывающую сложный дискретный процесс, состоящий из  $L$  взаимно независимых дискретных подпроцессов:

$$a^{si}y^{s^{i-1}} + b^{si}y^{si} + c^{si}y^{s^{i+1}} = d^{si}, \quad i = 2, \dots, N_s - 1, \quad s = 1, \dots, L. \quad (1)$$

Здесь значение  $y^{si}$  - определяет состояние  $s$ -го процесса в  $i$ -тый дискретный момент;  $i = 1, \dots, N_s$ ;  $s = 1, \dots, L$ ;  $a^{si}, b^{si}, c^{si}, d^{si}$  - ненулевые величины;  $N_s$  - число шагов  $s$ -го подпроцесса.

Рассматриваемые независимые дискретные уравнения связаны между собой неразделенными краевыми условиями вида:

$$\sum_{s=1}^L v_1^{is}y^{s1} + \sum_{s=1}^L v_2^{is}y^{s2} + \sum_{s=1}^L w_1^{is}y^{sN_s-1} + \sum_{s=1}^L w_2^{is}y^{sN_s} = R^i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Условия (2) могут быть записаны в более общем виде

$$V_1y^1 + V_2y^2 + W_1y^{N-1} + W_2y^N = R, \quad (3)$$

где введены следующие обозначения:  $V_1, V_2, W_1, W_2$  - заданные матрицы размерности  $M \times L$ ,  $R = (R^1, \dots, R^M)^*$  - заданный  $M$ -мерный вектор,  $y^1 = (y^{11}, y^{21}, \dots, y^{L1})^*$ ,  $y^2 = (y^{12}, y^{22}, \dots, y^{L2})^*$ ,  $y^{N-1} = (y^{1N_1-1}, y^{2N_2-1}, \dots, y^{LN_L-1})^*$ ,  $y^N = (y^{1N_1}, y^{2N_2}, \dots, y^{LN_L})^*$ .

К такого рода краевым задачам приводит, в частности, исследование следующих задач: расчет разветвленной электрической цепи с помощью законов Кирхгофа, когда для узлов и контуров электрической цепи составляются уравнения по первому и второму законам Кирхгофа относительно токов и падений напряжений; расчет сложных кольцевых трубопроводов, который также производится с применением электроаналогий законов Кирхгофа, при этом для каждого узла составляется баланс расходов, а для каждого кольца (контур)- баланс напоров ([1]). Сам процесс движения на каждом отдельном линейном участке описывается гиперболической системой двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка ([1], [4]). После применения метода прямых по какой-либо из переменных данные задачи приводятся к виду (1), (2).

Подход, предлагаемый к решению рассматриваемой задачи, основан на переносе краевых условий (2) в один конец: в левый или правый. Это означает, что соотношения (2) или (3) будут заменены эквивалентными им соотношениями, в которых будут отсутствовать векторы  $y^1, y^2$  при переносе условий в правый конец:

$$\tilde{W}_1y^{N-1} + \tilde{W}_2y^N = \tilde{R}, \quad (4)$$

что более подробно можно записать как:

$$\sum_{s=1}^L \tilde{w}_1^{is}y^{sN_s-1} + \sum_{s=1}^L \tilde{w}_2^{is}y^{sN_s} = \tilde{R}^i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Переносе условий в левый конец будут отсутствовать векторы  $y^{N-1}, y^N$

$$\tilde{V}_1 y^1 + \tilde{V}_2 y^2 = \tilde{R}, \quad (6)$$

эти условия можно записать в виде:

$$\sum_{s=1}^L \tilde{v}_1^{is} y^{s1} + \sum_{s=1}^L \tilde{v}_2^{is} y^{s2} = \tilde{R}^i, \quad i = 1, \dots, M. \quad (7)$$

После переноса условий в один конец будут получены системы (4), (5) или (6), (7), которые представляют собой системы  $M$  алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными:  $y^1, y^2$  или  $y^{N-1}, y^N$ . Решив эти системы и определив  $y^1, y^2$  или  $y^{N-1}, y^N$ , решение всей поставленной задачи достигается проведением несложных расчетов по явным рекуррентным формулам (задачи Коши) относительно отдельных дискретных уравнений (1).

В качестве иллюстрации рассмотрено решение модельной задачи, возникающей при конечноразностной аппроксимации системы уравнений с частными производными гиперболического типа, описывающей движение жидкости в трубопроводе сложной закольцованной структуры.

### Литература

1. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.
3. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys., 2014, Vol.54, №7, pp. 1096–1109.
4. Айда-заде К.Р., Асадова Д.А. Исследование переходных процессов в нефтепроводах // Автоматика и телемеханика, 2011, № 12, с. 156-172.

УДК 517.968.2

Ахманова Д.М., Мергембаева А.Ж., Шалдыкова Б.А.

*Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,*

*Казахстан, Караганды*

*danna.67@mail.ru*

## Об одном сингулярном интегральном уравнении Вольтерра второго рода

Ряд краевых задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений, а также краевые задачи для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра вида [1]-[4]

$$\mathbf{K}_{2\lambda} \nu \equiv (I - \lambda \mathbf{K}_2) \nu \equiv \nu(t) - \lambda \int_t^\infty K_2(\tau, t) \nu(\tau) d\tau = g_1(t), \quad t > 0, \quad (1)$$



где

$$K_2(\tau, t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega} \cdot \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \quad \omega < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Особенность данного класса уравнений заключается в том, что к нему не применим метод последовательных приближений, так как ядро интегрального уравнения (1) - функция  $K_2(\tau, t)$  обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty K_2(\tau, t) d\tau = 1 \quad (3)$$

Равенство (3) означает, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве суммируемых функций и определяемого ядром  $K_2(\tau, t)$ , равна единице. Это существенно отличает уравнение (1) от классических уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существует и единственно. Линии, описываемые уравнением  $|\lambda| = \exp(|\arg \lambda + 2k\pi|)$ , делят комплексную плоскость параметра  $\lambda$  на непересекающиеся области  $D_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , следующим образом:

$$D_{2n} = \{D_n^{(1)} \cap D_n^{(2)}\} \setminus \bigcup_{k=-1}^{2n-1} D_k, \quad D_{-1} = \emptyset, \quad D_{2n+1} = \{D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}\} \setminus \bigcap_{k=0}^{2n} D_k, \quad (4)$$

где

$$D_n^{(1)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[(2n+1)\pi - \arg \lambda]\}, \quad D_n^{(2)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[2n\pi + \arg \lambda]\},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ . Внешние части границ  $\partial D_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , областей  $D_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , обозначим соответственно через  $\Gamma_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Теорема 1. Значения  $\lambda \in D_0$  из (4) являются регулярными числами оператора  $\mathbf{K}_{2\lambda}(1)$ .

Теорема 2. Множество  $C \setminus D_0$  составляет характеристические числа оператора  $\mathbf{K}_{2\lambda}(2)$ . Причем, если  $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то  $\dim Ker(\mathbf{K}_{2\lambda}) = m$ ; и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений:

$$\nu_{\lambda k}(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1} [t^{1+\alpha/2} \cdot \exp(\frac{pk}{\alpha} \cdot t^\alpha)], \quad k = 1, \dots, \quad m = N_1 + N_2 + 1.$$

Общим решением неоднородного интегрального уравнения, равно как и уравнения (1), будет функция:

$$\nu_\lambda(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1} g(t) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} (c_k \cdot \nu_{\lambda k})(t), \quad t \in R_+,$$

где  $c_k$  - произвольные постоянные,  $k = 1, \dots, m$ .

### Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 205 с.
2. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. - М.: Наука, 2012. - 232с.
3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: Гылым, 2010. -334 с.
4. *Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. - 2011. - Vol. 52, № 1. - С. 1-12.

Джобулаева Ж.К.

*Институт математики и математического моделирования МОН РК,  
Казахстан, Алматы*

*zhanat-78@mail.ru*

## Классическое решение задачи с двумя малыми параметрами в граничных условиях для системы параболических уравнений

В работе рассматривается краевая задача с двумя малыми параметрами  $\kappa > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  в граничных условиях для системы параболических уравнений. Эта задача является линеаризованной задачей нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе, которая описывает процесс фазовых переходов (плавление, кристаллизацию) вещества, содержащего примесь. В работе мы найдем равномерные по  $\kappa$ ,  $\varepsilon$  оценки решения. Это позволяет доказать разрешимость нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе, получить решения задач при  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ;  $\kappa > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Классическая разрешимость задачи со свободной границей при  $\kappa = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  была исследована А.Г.Петровой [1] в одномерном случае и Г.И.Бижановой, Ж.Ф.Родригесом [2] — в многомерном случае.

Многомерные нелинейные задачи типа Стефана с малым параметром при скорости продвижения свободной границы изучены J.F. Rodrigues, V.A. Solonnikov, F. Yi [3], Г.И.Бижановой [4].

Пусть  $\Omega_1 = (0, \rho_0)$ ,  $\Omega_2 = (\rho_0, b)$ ,  $0 < \rho_0 < b$ ,  $b > 0$ ,  $\Omega_{jT} = \Omega_j \times (0, T)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\sigma_T = (0, T)$ ,  $\chi(\lambda)$  — гладкая срезающая функция, равная единице при  $|\lambda| \leq \delta_0$  и нулю при  $|\lambda| \geq 2\delta_0$  и имеющая оценку  $|d^m \chi / dx^m| \leq C_m \delta_0^{-m}$ ,  $\delta_0 = \text{const} > 0$ .

Требуется найти функции  $v_j(x, t)$ ,  $z_j(x, t)$ ,  $j = 1, 2$ , и  $\psi(t)$ , удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\begin{aligned} & \partial_t v_j - a_j(x, t) \partial_x^2 v_j - b_j(x, t) \partial_x v_j - d_j(x, t) v_j \\ & - \beta_j(x, t) \chi(x - \rho_0) D_t \psi = f_j(x, t) \quad \text{в } \Omega_{jT}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t z_j - a_{j+2}(x, t) \partial_x^2 z_j - b_{j+2}(x, t) \partial_x z_j - d_{j+2}(x, t) z_j \\ & - \beta_{j+2}(x, t) \chi(x - \rho_0) D_t \psi = g_j(x, t) \quad \text{в } \Omega_{jT}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

начальным условиям

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad v_j|_{t=0} = 0, \quad z_j|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega_j, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

граничным условиям

$$v_1|_{x=0} = p_1(t), \quad v_2|_{x=b} = p_2(t), \quad t \in \sigma_T, \quad (4)$$

$$z_1|_{x=0} = q_1(t), \quad z_2|_{x=b} = q_2(t), \quad t \in \sigma_T, \quad (5)$$

и условиям сопряжения на границе  $x = \rho_0$

$$(v_1 - v_2)|_{x=\rho_0} = \eta_0(t), \quad t \in \sigma_T, \quad (6)$$

$$(z_j - \gamma_j(t) v_j)|_{x=\rho_0} = \eta_j(t), \quad j = 1, 2, \quad t \in \sigma_T, \quad (7)$$

$$(\lambda_1(t)\partial_x v_1 - \lambda_2(t)\partial_x v_2)|_{x=\rho_0} + \kappa D_t \psi = \varphi_1(t), \quad t \in \sigma_T, \quad (8)$$

$$(k_1(t)\partial_x z_1 - k_2(t)\partial_x z_2)|_{x=\rho_0} - \varepsilon D_t \psi = \varphi_2(t), \quad t \in \sigma_T, \quad (9)$$

где  $a_j(x, t) \geq d_0 = \text{const} > 0$ ,  $a_{j+2}(x, t) \geq d_0 = \text{const} > 0$  в  $\bar{\Omega}_{jT}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\lambda_j(t) \geq d_1 = \text{const} > 0$ ,  $k_j(t) \geq d_1$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\kappa > 0, \varepsilon > 0$  малые параметры,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $D_t = d/dt$ .

Задача (1) – (9) является линеаризованной задачей нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе, которая описывает процесс фазовых переходов (плавление, кристаллизацию) вещества, содержащего примесь. Здесь  $v_1(x, t)$  и  $v_2(x, t)$  – температура жидкой и твердой фаз,  $z_1(x, t)$  и  $z_2(x, t)$  – концентрация примеси в жидкой и твердой фазах соответственно,  $\psi(t)$  – функция, описывающая свободную границу, которая разделяет эти фазы.

В настоящей работе доказано существование и единственность решения, установлена коэрцитивная оценка решения с константой, не зависящей от малых параметров, в пространствах Гельдера.

### Литература

1. Петрова А.Г. Локальная разрешимость термодиффузионной задачи Стефана // сб. "Динамика сплошной среды". 1982. Т. 58, С. 156-163.
2. Bizhanova G.I. and Rodrigues J.F. Classical solutions to parabolic systems with free boundary of Stefan type // Adv. Differential Equations. 2005. Т. 10, № 12. С. 1345-1388.
3. Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi F. On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems // Math. Ann.. 1999. Т. 315, С. 61-95.
4. Bizhanova G.I. On the Stefan problem with a small parameter // Banach Center Publications. Год 2008. Т. 81, С. 43-63.

УДК 517.968.2

Жанболова А.К.

Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,  
Казахстан, Караганды  
zhanbolova.aigerim@mail.ru

### Решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с нагрузкой в виде производной первого порядка

Рассмотрим в области  $D = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$  следующую граничную задачу для нагруженного уравнения теплопроводности [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = f(x, t), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (1)$$

(1) где  $\lambda$  - комплексный параметр,  $x_0 = \text{const}$ ,  $x_0 > 0$ ,  $f(x, t) \in C(D)$  - заданная функция. Решение уравнения (1) будет в следующем виде [2]:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \cdot F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (2)$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\}$$

- функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Учитывая, что  $u(\xi, \tau)|_{\xi=x_0}$  не будет зависеть от  $\xi$ , вычисляя внутренний интеграл в первом слагаемом равенства (2), получим

$$u(x, t) = \lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot u_\xi(\xi, \tau)|_{\xi=x_0} d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3)$$

Появившееся уравнение (3) дифференцируем по  $x$ , вместо  $x$  подставляем  $x_0$ , и введем следующие обозначения:  $u_x|_{x=x_0} = \mu(t)$ ,  $u_\xi(\xi, \tau)|_{\xi=x_0} = \mu(\tau)$ ,  $f_1(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right]_{x=x_0}$ . В этом случае интегральное представление (3) примет следующий вид [3]:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau = f_1(t). \quad (4)$$

(4) Данное уравнение имеет слабую особенность, т.е. является вольтерровым, поэтому оно имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Таким образом, доказана

Теорема. Если  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right]_{x=x_0} \in C(0, +\infty)$ , то задача (1) имеет единственное решение, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot [f_1(\tau) + \\ & + \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot x_0} \cdot \frac{\lambda^n}{n} \cdot (\tau - \psi)^{\frac{n}{2} - \frac{3}{4}} \cdot e^{-\frac{n^2 x_0^2}{8(\tau - \psi)}} \cdot W_{-\frac{n}{2} + \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{n^2 x_0^2}{4(\tau - \psi)}\right) \right\} f_1(\psi) d\psi] d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где  $W_{-\frac{1}{2}-2n, -\frac{1}{4}}$  - функция Уиттекера.

### Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. - М.: Наука, 2012. - 232с.
2. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФизМатЛит, 2001.-576 с.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.И.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: "Наука", 1973 - 736 с.

Жаркенов А.Б.

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,  
Казахстан, Астана*

*belkazk@mail.ru*

## Оценка сверху величины рыночного риска методом VaR

*VaR models measure deviation of target variables, such as P&L for market risk or credit losses for credit risk, at a given confidence level. In the memoir the methodology and calculation techniques for VaR are considered.*

*Ключевые слова: риск, стоимость под риском, VaR, доверительная вероятность, открытая валютная позиция*

Весьма важной, при формировании портфеля активов и управлении им, является необходимость *действительной диверсификации* портфеля. Автор портфельной теории Г. Марковиц высказал рекомендацию, широко известную в инвестиционном мире: «*Вас должна заботить не дисперсия [то есть, волатильность], а ковариация*» [2]. То есть, ковариации доходностей активов или взаимному изменению доходностей, при расчетах присваивается более высокий приоритет, чем волатильности доходности отдельных активов. На фоне указанных потребностей в более точном инструменте оценки возможных потерь появилась концепция стоимости под риском *Value at Risk*, или *VaR*.

*VaR — это показатель риска, который показывает, какую максимальную сумму денег может потерять портфель активов в течение определенного периода времени с заданной доверительной вероятностью. Уровень доверительной вероятности задается заранее и обычно равен 95% или 99%. Базельский банк международных расчетов рекомендует банкам рассчитывать 10-дневный VaR с доверительной вероятностью 99% для определения минимального уровня собственных средств.*

Дадим математическую формулировку понятия *VaR*. Для получения *VaR* задают:

а) *доверительную вероятность  $\alpha$*  (в некоторых случаях, в частности, для банков, эта величина может задаваться нормативно);

б) *промежуток времени  $T$* , соответствующий периоду образования возможных потерь.

Тогда *VaR с доверительной вероятностью  $\alpha$*  определяется как:

$$VaR = \inf\{l : Prob(L > l) \leq 1 - \alpha\}. \quad (1)$$

Например, если однодневный *VaR* валютной позиции банка составляет 10 млн тг. с доверительной вероятностью  $\alpha = 99\%$ , то это, в соответствии с формулой (1), *означает, что вероятность потерять больше 10 млн тг., в течение следующих 24 часов, не превосходит 1% ( $\leq 1 - \alpha = 1 - 99\%$ ).*

Методология *VaR* стала стандартом де-факто для оценки риска в практике работы финансовых институтов и одним из основных методов, которые используют надзорные органы. Это связано, во-первых, с тем, что *VaR* дает понятную, выраженную в деньгах, меру риска; во-вторых, с тем, что *VaR* можно использовать *для описания рыночного риска, связанного с любыми финансовыми инструментами*; в-третьих, используя концепцию *VaR*, можно легко формулировать требования к собственному капиталу финансовых организаций с учетом риска и, таким образом, контролировать финансовую устойчивость банков, страховых компаний, пенсионных фондов и т. п. В рассмотренном выше условном примере, однодневное резервирование под рисковую позицию должно составить 10 млн тг., так как вероятность потери большей суммы маловероятна (не более 1%).

Существуют разные методики расчета *VaR*. Все их можно разделить на две группы: *параметрические модели* и *непараметрические*. Модель называется *параметрической*, если известна функция распределения случайной величины потерь. В параметрической модели *it VaR* предполагается, что доходность финансовых активов подчиняется определенному вероятностному распределению, обычно, гауссовскому. Примером параметрического *VaR* являются «*Рискметрики*» банка *J. P. Morgan*, обнародованные им в 1994 году.

Параметрический *VaR* портфеля активов рассчитывается по формуле:

$$VaR_{\text{портф}} = P * \sigma * Z_{\alpha} \quad (2)$$

где,  $P$  — стоимость портфеля активов;

$\sigma$  — среднекв. отклонение доходности портфеля для периода времени  $T$ , для которого рассчитывается *VaR*;

$Z_{\alpha}$  — количество стандартных отклонений, соответствующих уровню доверительной вероятности  $\alpha$ .

Последняя величина используется на практике банками второго уровня при расчете *VaR* открытой валютной позиции. Тем самым, банк неявно использует параметрический *VaR* без достаточного основания ибо, фактически, банк априорно принимает допущение о гауссовском распределении вероятностей потерь.

Правильный подход состоит в том, что сначала, с заданным *уровнем значимости* должна быть проверена гипотеза о нормальном распределении вероятностей потерь. Поэтому мы предлагаем следующую последовательность построения *VaR-метода* для оценки стоимости потерь (банка):

1. На основе исторических статистических данных банка об изменении *фактических* цен или доходностей активов, входящих в портфель за предыдущие периоды времени, строим вариационный ряд;
2. С помощью полученного временного ряда вычисляем *частотные характеристики* (частоты) и строим *гистограмму частот*;
3. Задаем уровень значимости 0,01 и на основе критерия  $\chi^2$  Пирсона проверяем статистическую гипотезу о нормальном распределении вероятностей потерь при уровне значимости 0,01;
4. Если по результатам проверки статистической гипотезы при уровне значимости 0,01 она *не отвергается*, то считаем, что функция распределения вероятностей потерь имеет нормальное (гауссовское) распределение;
5. В этом случае применяется параметрическая *VaR-оценка* потерь, которая будет рассчитываться по стандартной формуле (2);
6. Если на шаге 3) гипотеза о нормальном распределении вероятностей потерь при уровне значимости 0,01 *отвергается*, то тогда, используя частотные характеристики и гистограмму частот, найденные на шаге 2), выводим вид *эмпирической функции распределения вероятностей потерь*;
7. Задаем доверительную вероятность  $\alpha = 0,99(99\%)$  и с помощью эмпирической функции распределения вероятностей по формуле (1) вычисляем *VaR-оценки* вероятных потерь.

Таким образом, если для *параметрического VaR* вычисления проводятся по известной, стандартной функции распределения, то в *непараметрической модели VaR* функцию распределения вероятностей находят индивидуально для конкретного портфеля активов. После этого, вычисления в обеих моделях производятся по известным формулам: (1) для *непараметрического VaR-метода* и (2) для *параметрического VaR-метода*. Добавим, что ковариации, о необходимости учета которых говорилось выше, появляются в расчетах при построении ковариационной матрицы доходностей активов. Так, при *VaR-оценке* открытой

валютной позиции банка, в расчетах вероятности потерь участвует ковариационная матрица взаимных курсов валютных пар  $KZT/USD$ ,  $KZT/EURO$ ,  $KZT/RUB$ .

### Литература

1. *Bessis J.* Risk Management in Banking. – Wiley, 2012
2. *Бернштейн П.* Фундаментальные идеи финансового мира. Эволюция. – М.: Альпина Бизнес Букс: Альпина Паблишерс, 2009. – с. 154.
3. *Бухвалов А.В., Дорофеев Е.А., Окулов В.Л.* Лекции по избранным вопросам классических финансовых моделей. – СПб.: Высшая школа менеджмента СПбГУ, 2010.

УДК 661.9:532.529

Исмаилов Б.Р., Исмаилов Х.Б

*ЮКГУ им. М.Ауэзова, Казахстан, Шымкент*

*ismaillb@mail.ru*

### Математическое моделирование процесса каталитического пиролиза синтеза углеродных нанотрубок с учетом концентрации промежуточных радикалов

Структура дифференциальных уравнений, применяемых при описании каталитического пиролиза позволяют включить в них выражения, учитывающие влияние промежуточных концентраций радикалов, соответственно этапам преобразования сырья до готового наноматериала [1-2]. С этой целью в систему уравнений изменения концентраций компонентов газовой фазы включены дополнительные члены  $\alpha_{i-1}C_{i-1} + \beta_{i+1}C_{i+1}$ , учитывающие влияние концентраций промежуточных радикалов:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nu_1 \frac{\partial C_i}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2} + \frac{D_i}{r} \frac{\partial C_i}{\partial r} + \alpha_{i-1}C_{i-1} + \beta_{i+1}C_{i+1} + J_i, \quad (1)$$

$$C_i(t = 0, x, r) = C_i^0(x, r), \quad (2)$$

$$C_i(x = 0, r) = C_i^L(r), \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$D_i \frac{\partial C_i}{\partial r} \Big|_{r=0} = \sum_{j=1}^{M_2} \nu_j^i W_j, \quad x = l_{ap}/2, \quad (5)$$

$$D_i \frac{\partial C_i}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad x \neq l_{ap}/2, \quad (6)$$

$$D_i \frac{\partial C_i}{\partial r} \Big|_{r=D_{ap}/2} = 0, \quad (7)$$

где  $l_{ap}$ ,  $D_{ap}$  - длина и диаметр аппарата;  $C_i^L$  - концентрация газового компонента;  $\sum_{j=1}^{M_2} \nu_j^i W_j$  - сумма скоростей образования и расходования  $i$ -компонента газовой фазы по реакциям на поверхности катализатора);  $\nu_j^i$  - стехиометрический коэффициент  $i$ -компонента газовой фазы в  $j$ -поверхностной реакции;  $W_j$  - скорость  $j$ -поверхностной реакции; (2) - начальные, а (3), (4), (5), (6), (7) - граничные условия для (1), учитывающие приток реагентов и приход-уход газофазных компонентов в результате реакций на катализаторе,

расположенного в центре аппарата. В работе доказана разрешимость модели (1)-(7), сходимость и устойчивость итерационного метода решения системы дифференциальных уравнений (1) по способу [3].

### Литература

1. *I.S. Nenaglyadkin, S.Yu. Tsavera, E.G. Rakov* // Mathematical simulation of catalitical pyrolysis for carbonnanotubes obtaining // 4th European Congress of Chemical Engineering, ECCE-4.-2003, Granada, Spain, Topic 10 Abstracts, Booc 9.-pp.161-162.
2. *Э.Г. Раков, Р.Р. Абашеев, Э.М. Кольцова и др.* Исследование пламенного синтеза углеродных нанотрубок // Сб.тез.докл. 1-Межд.конф. "Углерод: фундаментальные проблемы науки, материаловедение, технология". М., 2002.-Изд. МГУ им. М.В.Ломоносова, с.172.
3. *B.Ismailov, A.Urmatova, Kh.Ismailov* Mathematical Modelling and Calculation of Gas in Multistage Channals // Applied Mathematical Sciences. - 2013. - Vol. 7, №. 132. - P. 6571 - 6582.

УДК 517.956; 517.956.3

Кабдрахова С.С.<sup>1</sup>, Кадирбаева Ж.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Казахский национальный университет имени аль-Фараби*

<sup>2</sup> *Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*

*S\_Kabdrachova@mail.ru*

### Оценки сходимости модификации метода ломаных Эйлера решения линейного гиперболического уравнения с интегральными краевыми условиями

На  $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$  рассматривается полупериодическая краевая задача для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + C(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & P_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=0} + P_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} + P_0(x)u(x, t) \Big|_{t=0} + \\ & + \int_0^T \left[ L_2(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + L_1(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} + L_0(x, \tau)u(x, \tau) \right] d\tau + \\ & + S_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=T} + S_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} + S_0(x)u(x, t) \Big|_{t=T} = \phi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2) \\ & u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3) \end{aligned}$$

где функции  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$ ,  $C(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $L_i(x, t)$ ,  $P_i(x)$ ,  $S_i(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$  непрерывны соответственно на  $\bar{\Omega}$  и  $[0, \omega]$ , функция  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$  и функция  $\phi(x)$  непрерывна на  $[0, \omega]$ .

Пусть  $C(\bar{\Omega})$  -пространство непрерывных на функций  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . Для функции введем норму  $\|u\|_0 = \max_{\bar{\Omega}} |u(x, t)|$ .

Решением задачи (1)-(3) называется функция  $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$  которая имеет частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x} \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in C(\bar{\Omega})$ , удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2),(3).



В работах [1-2] были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи для систем гиперболических уравнений с интегральными краевыми условиями. В интегральном условии (2) присутствовали так же значения искомой функции на характеристиках  $t = 0, t = T$ . На основе метода параметризации и корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальной краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений.

В настоящем сообщении на основе метода модификации ломаных Эйлера [3] построен алгоритм нахождения приближенного решения, получены признаки однозначной разрешимости краевой задачи (1)-(3) и установлены оценки обеспечивающие сходимость модификации метода ломаных Эйлера к решению исходной задачи.

### Литература

1. Асанова А.Т. О краевой задаче для систем гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием // Матем. журнал, Алматы - 2006. - Т. 6, №4(22). - С.17-25.
2. Anar T.Asanova., Dulat S.Dzhumabaev Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal Mathematical Analysis and Applications, -2013, №402. -С. 167-178.
3. Кабдрахова С.С. Модификация метода ломаных Эйлера к решению полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения // Математический журнал, Алматы - 2008. Т. 8, №2(28).- С. 55-62.

УДК 519.624

Кабдрахова С.С., Темешева С.М.

*Институт математики и математического моделирования,  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*s\_kabdrachova@mail.ru, nur15@mail.ru*

### О начальном приближении для семейства нелинейных двухточечных краевых задач

На  $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$  рассматривается семейство краевых задач

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x, t, v), \quad v \in R^n, \quad (1)$$

$$g(x, v(x, 0), v(x, T)) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

где  $f : \bar{\Omega} \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $g : [0, \omega] \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$  непрерывны.

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации [1].

Производится разбиение  $[0, \omega] \times [0, T] = \bigcup_{r=1}^N \Omega_r$ , где  $N \in \mathbb{N}$ ,  $Nh = T$ ,  $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh)$ ,  $r = 1 : N$ . Вводятся функциональные параметры  $\lambda_s(x) \hat{=} v(x, sh)$ ,  $x \in [0, \omega]$ ,  $s = 0 : N$ , для нахождения начального приближения которых составляется система уравнений

$$h \cdot g(x, \lambda_0(x), \lambda_N(x)) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_{r-1}(x) + \int_{(r-1)h}^{rh} f(x, \tau_1, \lambda_{r-1}(x) + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(x, \tau_{\nu}, \lambda_{r-1}(x)) d\tau_{\nu} \dots) d\tau_1 -$$

$$-\lambda_r(x) = 0, \quad r = 1 : N. \quad (4)$$

Установлены условия на данные задачи (1), (2), при которых решение этой системы будет тем ближе к значениям решения задачи на линиях  $t = sh$ ,  $s = 0 : N$ , чем меньше  $h > 0$  и чем больше число повторных интегралов  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), используемых при составлении системы уравнений (3), (4).

По найденным  $\lambda_s(x)$ ,  $x \in [0, \omega]$ ,  $s = 0 : N$ , строится интерполяционный многочлен, тем самым по начальному приближению значений неизвестной функции  $v(x, t)$  на линиях разбиения области  $\bar{\Omega}$  можно построить начальное приближение  $v^{(0)}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{\Omega}$ , задачи (1), (2).

### Литература

1. Д.С. Джумабаев, С.М. Темешева. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. №1. С. 39-63.

УДК 519.1

Калиева А.К., Туленбаев К.М.

*КазИИТУ, Институт математики и математического моделирования,  
Казахстан, Алматы  
tulen75@hotmail.com*

## Математическая модель движения капсулы в пожаротушении

В нашей модели мы учитываем температуру воздуха, давление, геофизические факторы, ветер. Учет ветра очевиден, так как он векторно влияет на скорость движения капсулы. Влияние температуры и давления учитывается через закон сопротивления воздуха. При движении в атмосфере снаряд встречает молекулы воздуха, которые бьют по поверхности снаряда и трутся о нее, в результате чего возникают силы давления и трения, противодействующие его движению. Кроме того, за снарядом возникает область завихрений воздуха, в которой давление понижено, что тормозит полет снаряда. Суммируясь, все эти силы создают результирующую аэродинамическую силу сопротивления воздуха  $R$  [1]. Считается, что у правильно летящей капсулы с бромхладоном подъемная и боковая силы сравнительно малы. Подавляющее влияние на движение снаряда и на вид траектории оказывает сила лобового сопротивления  $R_x$ . На нее влияют массовая плотность воздуха, высота полета  $y$  и другие переменные. Например, чем выше температура воздуха тем меньше  $R_x$ , следовательно  $R_x$  меньше; поэтому дальность полета больше. Очевидно из курса физики, чем больше давление  $p$ , тем больше плотность. Следовательно  $R_x$  больше, поэтому дальность полета меньше. Задача: задается дальность  $X(m)$  и начальная скорость  $v_0$ , скорость продольного баллистического ветра  $w$ , температуры  $T$  и давления  $P$ . Необходимо определить необходимый угол вылета тела. Для точности определения данного угла необходим точный закон сопротивления воздуха. Разработка законов (функций) сопротивления воздуха имеет длительную историю. Этим занимались выдающиеся ученые, как Л. Эйлер, И. Ньютон и артиллеристы, и в результате проведения многочисленных полигонных стрельб были получены зависимости коэффициента лобового сопротивления от числа Маха, которые в сильной степени зависят от особенностей обтекания снаряда встречным потоком воздуха, т. е. главным образом от конфигурации головной части. Для получения адекватных результатов необходимо соответствующее математическое описание

закона сопротивления. Наиболее популярным в этом смысле длительное время являлся закон (функция) итальянского баллистика Франческо Сиаичи (1888 г.) в виде эмпирической формулы, важным достоинством которой является непрерывная зависимость от скорости снаряда.

В нашей модели закон Сиаичи будет точен для тупоголовых капсул с бромхладоном. В физической модели мы учитываем площадь мишкетного сечения снаряда, коэффициент лобового сопротивления и другие факторы. Исходя из физической модели, мы получаем следующую систему разностных уравнений [2] Учет ветра, температуры, давления мы производим через поправку на угол прицеливания.

### Литература

1. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Внешняя баллистика. М., 2005.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М. Мир, 1967.

УДК 62-529; 004-021; 004.896

Колесникова С.И.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет  
(Россия, Томск)*

*e-mail: skolesnikova@yandex.ru*

## Управление нелинейными многомерными объектами при выводе на заданное многообразие

Синтез систем управления нелинейными объектами является одной из ключевых проблем современной науки [1, 2]. Методы нелинейной адаптации на многообразиях (работы А.А. Красовского, А.А. Колесникова (метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР)), Г.В. Кондратьева, Astolfi A., Ortega R.) основаны, с одной стороны, на принципах направленной самоорганизации и декомпозиции нелинейных динамических систем; с другой стороны, на физических особенностях управляемого объекта [2]. Следует отметить, что формализм инвариантов для построения системы управления впервые применен Г.В.Щипановым, поставившим задачу синтеза «регулятора с полной компенсацией» из условия полной компенсации внешних возмущений.

Целью доклада является теоретическое обоснование алгоритма построения закона управления в скользящем режиме на многообразиях, обладающего свойством асимптотической устойчивости и робастности по отношению к неизвестной части в описании объекта.

**Постановка задачи.** В докладе рассматривается задача конструирования управления сложным объектом с плохо формализуемой правой частью в его описании:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta; u_j), j = \overline{1, m}; \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta), j = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  – вектор состояний,  $\Theta \in R^k$  – вектор параметров,  $u \in R^m$ ,  $m < n$  – вектор управления,  $f \in R^n$  – непрерывная (нелинейная) вектор-функция; компоненты вектора  $f_1, f_2, \dots, f_m$  неизвестны. Для объекта (1) ставится задача нахождения закона управления  $u(x)$ , обеспечивающего перевод объекта управления (1) из произвольного начального состояния  $x(0)$  в некоторой области фазового пространства в заданное состояние и его стабилизацию в некоторой окрестности целевого многообразия  $\Psi(x) = 0$ , где  $\Psi(x)$  –

специальным образом определенная макропеременная (функция, зависящая от координат объекта).

**Решение задачи.** Основные положения приведенного ниже алгоритма удобно рассмотреть на примере системы 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x); \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x) + u, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f_1$  – известная функция,  $f_2$  – неизвестная нелинейная функция.

Приведенный ниже алгоритм (назовем его АКАР+) синтезирует идеи четырех алгоритмов: 1) скользящего управления на многообразиях; 2) метода АКАР; 3) гарантирующего регулятора (А.А.Колесников); 4) алгоритма «бэкстепинг» (П.Кокотович).

**Алгоритм управления выводом на заданное многообразие объекта с неполным описанием.** Без ограничения общности основные положения алгоритма рассмотрим для объекта 2-го порядка (2).

1. Применение базового алгоритма АКАР для формирования принципиальной схемы системы управления:

$$u(x) = -\omega^{-1}(\Psi(x) + \omega(f_1(x) + f_2(x))).$$

2. Применение алгоритма гарантирующего регулятора: включение дополнительной переменной в уравнение, содержащее управление (для аппроксимации неопределенности  $f_2$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x); \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x) + u(x) + v(t); \\ \dot{v}(t) &= g(\Psi(x)), \end{aligned}$$

где  $f_1$  – известная функция,  $f_2$  – неизвестная нелинейная функция,  $g(x)$  – неизвестная (вообще говоря, нелинейная) функция, подлежащая далее определению;  $u(x)$  – АКАР – управление;  $v(t)$  – составляющая АКАР-управления для компенсации неопределенности  $f_2$ .

3. Применение алгоритма управления в скользящем режиме для определения закона  $g(x)$ . Выбор функции Ляпунова для системы, полученной на шаге 2 в виде:

$$V(t) = 0.5(\Psi^2 + v^2).$$

4. Вывод робастного и асимптотически устойчивого корректирующего АКАР-управления  $v(t)$ , гарантирующего отрицательность производной функции Ляпунова:

$$\dot{v}(t) = -\eta\Psi.$$

Итогом данного алгоритма применительно к объекту с описанием (2) будет система управления вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x); \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^{-1}\Psi(x) - f_1(x) + v(t); \\ \dot{v}(t) &= -\eta\Psi(x). \end{aligned}$$

Отметим, что алгоритм АКАР+ не требует знание границы неопределенности  $f_2$  (в отличие от базовых методов АКАР и управление в скользящем режиме).

Численные эксперименты на технических многомерных и нелинейных объектах (самолет-амфибия ( $n = 6$ ) и двумерная экономическая модель) показали, что свойства робастности и асимптотической устойчивости корректирующего АКАР-управления остаются в силе даже в нерасчетных условиях (при случайном шум (5-10 – процентном)).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-08-01015-а.

## Литература

1. Халлил Х.К. Нелинейные системы: монография. – СПб: Наука, 2000. - 562 с.
2. Колесников А.А. Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 504 с.

УДК 517.958:52/59

Коржымбаев Т.Т.

*Алматинский университет энергетики и связи, Казахстан, Алматы*  
tkorzhymbaev@gmail.com

### Анализ решения уравнений поступательно-вращательного движения послойно изменяемой Земли

При вычислении моментов инерции элементов модели послойно-изменяемой Земли воспользуемся распределением плотности внутри Земли, приведённым в работе [1]. Моменты элементов модели Земли определим по формуле [2]

$$J_{zz} = \iiint_V \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{8}{3} \pi \int_0^R \rho(r) r^4 dr \quad (1)$$

в предположении радиального распределения плотности  $\rho(r)$  [1].

Для приближённого вычисления интеграла (1) можно воспользоваться формулами трапеции или Симсона [3]. На основании таблицы I, с учётом моментов инерции для всей Земли [5]

$$\begin{aligned} A &= 8,01151964 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\ B &= 8,102855055 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\ C &= 8,039884391 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \end{aligned}$$

значения моментов инерции элементов модели послойно изменяемой Земли с вязкой астеносферной и жидким слоем ядра определены в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,381444219 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\ B_1 &= 0,382779635 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\ C_1 &= J = 0,409808971 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\ A_2 &= B_2 = C_2 = 5,965618 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2, \\ A_3 &= B_3 = C_3 = 1,143079 \cdot 10^{42} \text{ г} \cdot \text{см}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Ниже приведена таблица распределение плотности внутри Земли.

$i$	$r_i * 10^{-8}$	$\rho_i (/^3)$	$\rho_i * r_i^4 * 10^{-32}$ (*)
1	2	3	4
0	0	12,58	0
1	0,2	12,55	0,02008
2	0,4	12,53	0,320768
3	0,6	12,52	1,622592
4	0,8	12,58	5,128292
5	1,0	12,48	12,48
6	1,2	12,30	25,50528
7	1,4	12,05	46,29128
8	1,6	11,92	78,11891
9	1,8	11,77	123,5567
10	2,0	11,60	185,6
11	2,2	11,44	267,9888
12	2,4	11,23	375,2433
13	2,6	11,10	507,2433
14	2,8	10,89	669,3603
15	3,0	10,63	861,03
1	2	3	4
16	3,2	10,37	1087,373
17	3,4	10,09	1348,363
18	3,485	9,96	1469,164
19	3,485	5,53	815,7108
20	3,7	5,45	1021,417
21	4,0	5,31	1359,36
22	4,3	5,12	1750,426
23	4,6	4,96	2220,818
24	4,9	4,81	2772,869
25	5,2	4,67	3414,524
26	5,5	4,54	4154,383
27	5,7	4,36	4602,413
28	5,7	4,08	4296,292
29	5,8	3,95	4470,015
30	5,9	3,76	4556,127

При геофизических данных [4] и динамических параметрах (2) коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= b_{11}x_1 + b_{14}x_4 + A_1; & \dot{x}_2 &= b_{22}x_2 + b_{25}x_5 + A_2; \\
 \dot{x}_3 &= b_{33}x_3 + b_{36}x_6 + A_3; & \dot{x}_4 &= b_{41}x_1 + b_{44}x_4 + A_4; \\
 \dot{x}_5 &= b_{52}x_2 + b_{55}x_5 + A_5; & \dot{x}_6 &= b_{63}x_3 + b_{66}x_6 + A_6;
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

имеют значения

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= -1,655432837 \cdot 10^{10}, & b_{14} &= 2,04205740 \cdot 10^{-7}, \\
 b_{22} &= -1,652313352 \cdot 10^{10}, & b_{25} &= 2,041355119 \cdot 10^{-7}, \\
 b_{33} &= -1,591840475 \cdot 10^{10}, & b_{36} &= 2,027734428 \cdot 10^{-7}, \\
 b_{41} &= 1,798698213 \cdot 10^9, & b_{44} &= -1,024837968 \cdot 10^{-3}, \\
 b_{52} &= 1,798079325 \cdot 10^9, & b_{55} &= -1,024837967 \cdot 10^{-3}, \\
 b_{63} &= 1,786081862 \cdot 10^9, & b_{66} &= -1,024837940 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Вычисление корней характеристического уравнения системы (3) дают следующие

значения:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1,025199890 \cdot 10^{-3}, & \lambda_2 &= -1,655432837 \cdot 10^{10}, \\ \lambda_3 &= -1,025199890 \cdot 10^{-3}, & \lambda_4 &= -1,652313352 \cdot 10^{10}, \\ \lambda_5 &= -1,025199890 \cdot 10^{-3}, & \lambda_6 &= -1,591840475 \cdot 10^{10}.\end{aligned}\quad (5)$$

Все корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные, поэтому для системы (3) выполняется оценка

$$\|W(t, \tau)\| \leq \Phi_0 \exp[-\alpha(t-\tau)] \quad (6)$$

для любых  $0 \leq t \leq \tau < \infty$ , где  $\Phi_0$  и  $\alpha$  положительные постоянные, а под  $\|W(t, \tau)\|$  понимается норма матрицы Коши [6].

Итак, если матрица Коши удовлетворяет неравенству (6), то возмущение не накапливается, а возмущённые и невозмущённые движения стремятся к стационарному предельному режиму.

### Литература

1. *Anderson D.L., Hart R.S.* An Earth model based on free oscillations and body waves. *J. Geoph. Res.* // 1976. – Vol.81, No. 8. – P. 1461–1475.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основы курс теоретической механики. Ч. II. 6-е изд. – М.: Наука. – 1972. – 332 с.
3. *Мелентьев П.В.* Приближённые вычисления. – М.: Физматхиз. – 1962. – 336 с.
4. *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.* Общая теория вращения Земли. – М.: Наука. – 1984. – 254 с.
5. *Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.* Точное решение задачи о динамической равновесности Земли // *Вестник АН Каз. ССР*, 1975, №3, с. 20–29.
6. *Демин В.Г.* Применение теории В.В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных в задачах небесной механики // *Космические исследования*. – Т. 2, вып. 5. – 1965. – 716 с.

УДК 517.951

Кошанов Б.Д., Кулимбек Ж.К.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*

*koshanov@list.ru, k.zhazira.93@mail.ru*

### Внешняя трехмерная задача Дирихле для бигармонического уравнения

Для того, чтобы краевая задача для бигармонического уравнения в области  $D_e$ , внешней по отношению к ограниченной области  $D$  с кусочно-гладкой границей  $S$ , имела единственное решение, в постановке задачи помимо краевого условия следует добавить условие на бесконечности. Таким условием является требование регулярности решения на бесконечности.

**Определение 1.** В трехмерном случае функция  $u(x)$  называется регулярной на бесконечности, если при достаточно большом  $r \geq r_0$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , выполнены неравенства

$$|u| \leq \frac{A}{r}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \leq \frac{A}{r^2},$$

$$|\Delta u| < \frac{A}{r^3}, \left| \frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right| < \frac{A}{r^4},$$

где  $A > 0$  – некоторая постоянная.

Исследуется для уравнения Пуассона следующая задача Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f(x), |x| < 1, \\ u|_S &= \varphi_0(x), |x| = 1. \end{aligned}$$

Имеет место теорема.

**Теорема.** Функция Грина для внутренней [3] и для внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре представима в виде:

$$G_{2,3}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|y| - \frac{y}{|y|}}.$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u = -f(x), \quad x \in D_e, \quad (1)$$

$$u|_S = \varphi_0(x), \quad x \in S, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \varphi_1(x), \quad x \in S, \quad (3)$$

$$u \quad \text{регулярна на бесконечности.} \quad (4)$$

**Определение 2.** Будем называть классическим решением задачи (1)-(4) регулярную на бесконечности функцию  $u(x) \in C^{(4)}(D_e) \cap C(\bar{D}_e)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D_e$  и граничному условию (2)-(3).

Если функция  $f(x)$  финитна и непрерывна дифференцируема в  $D_e$ , а функция  $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$  непрерывна на поверхности  $S$ , то существует единственное классическое решение задачи (3)-(5) [1,2]:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_S \left( G \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \varphi_0(x) \frac{\partial \Delta G}{\partial n} \right) dS_x + \int_S \left( \Delta G \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS_x - \int_{D_e} G(x, y) f(y) dV_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Для того, чтобы построить функцию  $G(x, y)$ , достаточно решить задачу для гармонического слагаемого  $v(x, y)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 v = 0, \quad x \in D_e, \\ v|_S = -\frac{1}{4\pi r}, \quad x \in S, \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_S = \varphi_1(x), \quad x \in S, \\ v \implies 0 \quad \text{на бесконечности.} \end{array} \right. \quad (6)$$

## Литература

1. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. - Москва: Изд-во Московского ун-та, 1998.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
3. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008.- Т. 421, № 3. - С. 305-307.



Кошкарлова Б.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, Астана  
b-koshkarova@yandex.kz

### К задаче об истечении тяжелой жидкости из-под щита

Рассмотрена задача об истечении тяжелой жидкости из бесконечно длинного сосуда с косым плоским дном по схеме Мизеса [1]. Задача заключается в следующем: требуется найти аналитическую функцию  $V(z) = V_x(z) - iV_y(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$ , так, чтобы на всей границе области течения жидкости выполнялось условие обтекания

$$\operatorname{Re}[i dz V(z)] = 0, \quad (1)$$

а на свободной поверхности равенство

$$|V(z)|^2 = 1 - \varepsilon y, \quad (2)$$

где  $\varepsilon = \text{const} > 0$ .

В работе доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи, которая является следствием принципа сжатых отображений. В отличие от других авторов, исследовавших данную задачу, нами получено уравнение иного вида, структура которого, на наш взгляд, дает отчетливое представление о его связи с решением соответствующей задачи в случае невесомой жидкости. Здесь мы применяем метод, предложенный А. Игликовым [2], основанный на приведении поставленной задачи к эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению. Для этого область течения отображается на полукруг единичного радиуса параметрической переменной  $t$  с соответствием точек. Тогда условия (1), (2) остаются без изменения, но только теперь  $z = z(t)$ ,  $|t| < 1$ ,  $\operatorname{Im} t > 0$ , условие (1) выполняется на всей границе полукруга, а равенство (2) – на полуокружности  $t = e^{i\sigma}$ ,  $0 \leq \sigma \leq \pi$ . Функции  $V(t) = V(z(t))$ ,  $z = z(t)$  ищутся в виде

$$\begin{aligned} z'(t) &= z'_0(t)\psi(t), \\ V(t) &= t^\nu \varphi(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t)$  – аналитические функции в  $|t| < 1$ ,  $\operatorname{Im} t > 0$ ,

$$z'_0(t) = \frac{qt^{-\nu}}{\pi} \left( \frac{1}{t-h} + \frac{1}{th-1} - \frac{1}{t-e^{i\beta}} - \frac{1}{t-e^{-i\beta}} \right), \quad 0 \leq \beta \leq \pi,$$

здесь  $q$  – интенсивность потока жидкости,  $h$  – расстояние между стенками сосуда.

**Лемма 1.** Если функция  $\varphi(e^{i\sigma})$  неотрицательная и выполняется равенство  $|\varphi(e^{i\sigma})| = |\varphi(e^{-i\sigma})|$ , то задача (1)-(2) эквивалентна уравнению

$$\begin{aligned} dy &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 2h \cos \beta + h^2}{1 - 2h \cos \sigma + h^2} \cdot \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - \cos \beta} \times \\ &\times \frac{-\sin \left[ \nu \sigma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sqrt{1 - \varepsilon y} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \sigma}{2} d\theta \right]}{\sqrt{1 - \varepsilon y(e^{i\sigma})}} d\sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения (4) с учетом равенств (2) и (3) можно получить следующее уравнение

$$f(\sigma) = Af(\sigma), \quad (5)$$

где оператор  $Af(\sigma)$  имеет вид

$$\begin{aligned} Af(\sigma) &= 1 + \int_0^\sigma \frac{3\varepsilon q}{2\pi} \cdot \frac{1 - 2h \cos \beta + h^2}{1 - 2h \cos s + h^2} \cdot \frac{\sin s}{\cos s - \cos \beta} \times \\ &\times \sin \left[ \nu s - \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} \ln f(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - s}{2} d\theta \right] ds, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $f(\sigma) = |\varphi(e^{i\sigma})|^\beta$ .

Через  $C_{\mu,\rho}[0, 2\pi]$  обозначим весовое пространство функций, определенных и непрерывных в смысле Гельдера с показателем  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ , с весом  $\rho(\sigma)$ , здесь  $\rho(\sigma) = (\sigma - \beta)^\alpha |\alpha - (2\pi - \beta)|^\alpha$ ,  $\alpha$  - положительное число, с нормой

$$\|f\|_{\mu,\rho} = \max_{\sigma} |\rho f(\sigma)| + \sup_{\sigma_1 \neq \sigma_2} \frac{|\rho f(\sigma_1) - \rho f(\sigma_2)|}{|\sigma_1 - \sigma_2|^\mu}, \quad 0 \leq \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \leq 2\pi.$$

**Лемма 2.** Пусть  $f \in C_{\mu,\rho}[0, 2\pi]$ ,  $0 < \mu < 1$ , и  $\|f - 1\|_{\mu,\rho} \leq N$ . Тогда оператор  $Af(\sigma)$  удовлетворяет неравенствам

$$\|Af - 1\|_{\mu,\rho} \leq \varepsilon MN, \quad \|A(f_1 - f_2)\|_{\mu,\rho} \leq \varepsilon M_1 \|f_1 - f_2\|_{\mu,\rho},$$

где  $M, M_1$  - положительные постоянные, не зависящие от  $f(\sigma)$ .

**Теорема.** Пусть  $f \in C_{\mu,\rho}[0, 2\pi]$ ,  $0 < \mu < 1$ . Если выполняются условия

$$\varepsilon M < 1, \quad \varepsilon M_1 < 1,$$

то оператор  $Af$  переводит шар  $\|f - 1\|_{\mu,\rho} \leq N$  в себя и является сжимающим.

Следовательно, существует единственная функция  $f(\sigma)$  в этом шаре, удовлетворяющая уравнению (5), которая может быть найдена методом последовательных приближений.

### Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - Москва, 1977. - 545 с.
2. Игликов А. Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. - Алматы: Гылым, 1995. - 209 с.  
УДК 532.5

Куан М., Кудайкулов А.А.

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*kuankyzy.makpal@mail.ru, aziz.kudaikulov@gmail.com*

## Метод численного исследования течения несжимаемой жидкости в канале путём решения уравнений Навье-Стокса на основе схем высокого порядка точности

Схемы высокого порядка точности позволяют более точно численно решать уравнения в частных производных, такие как уравнения Навье-Стокса, Эйлера или Пуассона. Также эти схемы позволяют подавить численные диссипации, которые возникают в схемах первого порядка точности. Преимущество использования схем высокого порядка точности заключается еще и в том, что для реализации этих схем требуется меньше вычислительных ресурсов, т.к. эти схемы могут вычислять с хорошей точностью и на грубых сетках. Особенно важно правильно аппроксимировать конвективные члены, которые содержатся в уравнениях Навье-Стокса и Эйлера. В данной работе численно исследуется течение несжимаемой жидкости в канале путём решения уравнений Навье-Стокса на основе схем 2-го порядка точности по времени и по пространству. Для аппроксимации конвективных членов, используются TVD (Total variation diminishing) и ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы 2-го порядка точности.

### Литература

1. Роч П. Вычислительная гидродинамика. - Москва: Мир, 1980. - 618 с.
2. Chi-Wang Shu Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // NASA/CR-97-206253, ICASE Report No. 97-65, 1997.
3. Ami Harten High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // Journal of Computational Physics 135, 260–278 (1997).

УДК 517

Могульский А.А., Китапбаев Е.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*  
*erkin.msu@gmail.com*

## О постановке стохастических задач управления и задач об оптимальной остановке

Одним из главных приложений теории задач об оптимальной остановке является теория ценообразования американских опционов, которую можно описать следующим образом. Риск-нейтральное оценивание стало одним из самых мощных инструментов для аналитиков и трейдеров во всем мире. Этот метод используется, например, для определения цены европейского опциона (может быть исполнен только в указанную дату) как математическое ожидание по мартингальной мере. Однако владелец американского опциона может реализовать свое право на исполнение в любое время до истечения срока опциона, и, таким образом, задача ценообразования этих контрактов становится более сложной. Современная экономическая теория позволяет нам по-новому сформулировать эту проблему как задачу об оптимальной остановке. В докладе мы даем анализ постановки стохастических задач управления и задач об оптимальной остановке.

УДК 517.977

Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А.

*НИИ Математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы*  
*murzabekov-zein@mail.ru, aipanov@mail.ru*

## Моделирование линейных дискретных динамических систем с ограниченным управлением

**Введение.** Рассматривается дискретная задача оптимального управления линейными системами при наличии ограниченных управляющих воздействий. Конструирование различных дискретных процессов и алгоритмов управления, обладающих необходимыми для приложений свойствами с учетом ограниченных дискретных управляющих воздействий, приобретает все большее значение в теории и практике оптимального управления.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу дискретного управления, в которой процесс описывается линейным разностным уравнением:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + s(k), \quad (1)$$

$$k \in T = \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $x(k)$  – вектор состояния системы,  $x(k) \in R^n$ ;  $u(k)$  – вектор управления,  $u(k) \in U(k) \subset R^m$ ;  $s(k)$  – заданный вектор,  $s(k) \in R^n$ ;  $k$  – дискретное время, число шагов  $N$  задано.

Предполагается, что при построении управления используется информация о текущем моменте времени  $k$  и векторе состояния  $x(k)$ .

Пусть задан целевой функционал вида

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k)Q(k)x(k) + u^*(k)R(k)u(k)] + \frac{1}{2}x^*(N)Fx(N), \quad (3)$$

где  $Q(k)$  – неотрицательно определенная симметрическая матрица, а  $R(k)$ ,  $F$  – положительно определенные симметрические матрицы соответствующих размерностей.

Ставится задача: найти синтезирующее управление  $\tilde{u}(x(k), k)$  такое, что соответствующая ему пара  $(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k))$  удовлетворяет уравнению движения системы (1) и ограничениям на управление (2), для которой функционал (3) принимает минимальное значение.

**Решение задачи.** Для решения задачи оптимального управления (1)-(3) использован метод, основанный на применении множителей Лагранжа специального вида [1, 2].

Управление  $\tilde{u}(x(k), k)$  определяется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x(k), k) = & -[R(k) + B^*(k)P(k+1)B(k)]^{-1} \times \\ & \times \{B^*(k)[P(k+1)A(k)x(k) + q(k+1)] - \lambda_1(k) + \lambda_2(k)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где функция  $P(k+1)x(k+1) + q(k+1)$  обеспечивает выполнение ограничения в виде системы разностных уравнений (1), а функции  $\lambda_1(k)$ ,  $\lambda_2(k)$  – соответствующих ограничений, налагаемых на значения управления (2).

В работе предлагается метод конструирования регулятора для дискретных систем и соответствующий алгоритм управления, основанный на принципе обратной связи, с учетом заданных ограничений на значения управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант № 1625 / ГФЗ).

### Литература

1. Мурзабеков З.Н., Мурзабеков А.З. Оптимизация одного класса управляемых нелинейных систем на конечном отрезке времени // Проблемы информатики, ИВМ и МГ СО РАН. - 2012. - № 3. - С. 5-9.
2. Aiparov Sh.A., Murzabekov Z.N. Analytical solution of a linear quadratic optimal control problem with control value constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. - 2014. - V. 53, No. 1. - P. 84-91.

е УДК 517.9

Мустапокулов Х.Я.

Ташкентский Государственный Технический Университет, Ташкент, Узбекистан

mhy1506@yandex.ru

### Необходимые условия инвариантности относительно системы с распределенными параметрами

Цель изучения инвариантных множеств сводится к тому, чтобы как можно дольше удержать траекторию движения объекта в пределах заданного множества. В ранее изученных задачах достигнуты впечатляющие успехи, в основном, для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1].

В ограниченной области  $\Omega \subset R^n$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  рассматривается уравнение теплопроводности [1-3]

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Au(t, x), \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

где

$$Au(t, x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

с граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(x)u = \mu(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

здесь  $u = u(t, x)$  – неизвестная функция,  $T$  – произвольная положительная константа,  $u^0(\cdot) \in L_2(\Omega)$  – начальная функция. Управлениями являются измеримые функции  $\mu(\cdot, \cdot) \in L_2(S_T)$ , где  $S_T = \{(t, x) | t \in [0, T], x \in \partial\Omega\}$ .

В [1] доказано, что при любых  $\mu(\cdot, \cdot) \in L_2(S_T)$  и  $u^0(\cdot) \in L_2(\Omega)$  задача (1)–(3) имеет единственное решение  $u = u(t, x)$  в гильбертовом пространстве  $\dot{W}_2^{1,0}(Q_T)$ , где  $Q_T = \{(t, x) | t \in (0, T), x \in \Omega\}$ , состоящее из элементов пространства  $L_2(Q_T)$ , имеющих квадратично суммируемые по  $Q_T$  обобщенные производные  $u_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть  $\{\varphi_k\}_{k \in N}$  – полная ортонормированная в  $L_2(\Omega)$  система собственных функций краевой задачи на собственные значения для оператора  $A$ .

Известно, что эллиптический оператор  $A$  с граничным условием  $Pu(t, x) = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $x \in \partial\Omega$  имеет дискретный спектр, т.е. собственные значения  $\lambda_k$ , такие, что  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ,  $\lambda_k \rightarrow +\infty$ , и соответствующие собственные функции  $\varphi_k(x)$ ,  $x \in \Omega$ , составляющие полную ортонормированную систему в  $L_2(\Omega)$  [2].

Методом Фурье определяем решение задачи (1)–(3). Если через  $f_k(\cdot)$  обозначены коэффициенты Фурье функции  $f(\cdot)$  относительно системы  $\{\varphi_k\}$ , то решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( u_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \left[ \int_{\partial\Omega} \mu(\tau, s) \varphi_k(s) ds \right] e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right) \varphi_k(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \Omega.$$

Далее, через  $U$  обозначим совокупность управлений, которая уточняется ниже некоторым положительным числом  $\rho$ .

**Определение 1.** Мнозначное отображение  $D : [0, T] \rightarrow 2^R$ , где  $R = (-\infty, \infty)$ , называется сильно инвариантным относительно задачи (1)–(3), если для любых  $\langle u^0(\cdot) \rangle_{L_2(\Omega)} \in D(0)$  и  $\mu(\cdot, \cdot) \in U$  выполняется включение  $\langle u(t, \cdot) \rangle \in D(t)$  при всех  $0 < t \leq T$ , где  $\langle \cdot \rangle$  – соответствующая норма,  $u(\cdot, \cdot)$  – соответствующее решение задачи (1)–(3) [1].

**Определение 2.** Мнозначное отображение  $D : [0, T] \rightarrow 2^R$ , где  $R = (-\infty, \infty)$ , называется слабо инвариантным относительно задачи (1)–(3), если для любого  $\langle u^0(\cdot) \rangle \in D(0)$  существует управление  $\mu(\cdot, \cdot) \in U$  такое, что  $\langle u(t, \cdot) \rangle \in D(t)$  при всех  $0 < t \leq T$ , где  $\langle \cdot \rangle$  – соответствующая норма,  $u(\cdot, \cdot)$  – соответствующее решение задачи (1)–(3).

В данной работе исследуется слабая и сильная инвариантность постоянного многозначного отображения вида

$$D(t) = [0, b], \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $b$  – положительная константа.

Наша, дальнейшая цель является нахождений связи между параметрами  $T, b, \rho$  так, чтобы обеспечить сильную или слабую инвариантность многозначного отображения  $D(t)$ ,  $t \in [0, T]$  относительно задачи (1)–(3).

Пусть  $\langle u(\cdot, \cdot) \rangle = \|u(\cdot, \cdot)\|$  и  $U = \left\{ \mu(\cdot, \cdot) : \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left( \int_{\partial\Omega} \mu(t, x) \varphi_k(x) dx \right)^2} \leq \rho, t \in [0, T] \right\}$ .

Здесь  $\|u(\cdot, \cdot)\| = \sqrt{\int_0^T \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx dt} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T u_k^2(t) dt}$ .

**Теорема 1.** Если, либо  $\rho \leq \lambda_1 b$ ,  $T \leq 1$ , либо  $1 < \rho / (\lambda_1 b) \leq (1 - \sqrt{T} e^{-\lambda_1 T}) / (\sqrt{T} (1 - e^{-\lambda_1 T}))$

то многозначное отображение  $D(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , сильно инвариантно относительно задачи (1)–(3).

**Теорема 2.** Если  $2\lambda_1 \geq 1$  то многозначно Можно показать, что многозначное отображение  $D(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  слабо инвариантно относительно задачи (1)–(3).

#### Литература

1. Feuer A, Neymann M.  $\Omega$ – invariance in control systems with bounded controls . // Math.Anal.And Appl. (53) 1976. No. 2., P. 266-276.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. // М: Высшая школа, 1977 (in Russian).
3. Feuer A, Neymann M.  $\Omega$ – invariance in control systems with bounded controls . // Math.Anal.And Appl. (53) 1976. No. 2., P. 266-276.

УДК 517.925: [536.2+539.219.3]

Нахушев А.М., Нахушева В.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Россия, Нальчик

ipma@niipma.ru

### О качественных свойствах уравнения фрактального осциллятора

Развитие математической физики фракталов вызвало значительный интерес к ударно-волновым явлениям и системам фрактальной организации, совершающим колебания около положения устойчивого равновесия, – к фрактальным осцилляторам и моделирующим их уравнениям [1], [2].

Уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{u''(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} + \omega^\alpha u(t) = 0, \quad (1)$$

где  $1 < \alpha = \text{const} < 2$ ,  $\omega = \text{const} > 0$ ,  $0 < t \leq T$ ,  $T$  – расчетное время, F. Mainardi [3] назвал дробным осцилляционным уравнением.

Пусть:

$$D_{0t}^\alpha u(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} t^{k-\alpha} + \partial_{0t}^\alpha u(\tau),$$

$\alpha \in ]n-1, n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $u(t) \in AC^n[0, T]$ ;  $\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера;

$$\partial_{0t}^\alpha u(\tau) = D_{0t}^{\alpha-n} u^{(n)}(\tau)$$

– регуляризованная дробная производная порядка  $\alpha$  от функции  $u(t)$ .

Уравнение (1) эквивалентно следующему уравнению [1, с. 181]:

$$u''(t) + \omega^\alpha D_{0t}^\varepsilon u(\tau) = 0, \quad \varepsilon = 2 - \alpha. \quad (2)$$

Уравнение (2) было объектом исследования работы [4]. Оно находит применение к различным физическим процессам, в частности, к уравнению Буссинеска с разрывным по времени коэффициентом диффузии [5].

Непосредственным обобщением уравнения (2) является уравнение

$$D_{0t}^{\alpha-\beta} D_{0\tau}^\beta u(\eta) = \lambda u(t), \quad (3)$$

где  $\alpha \leq \beta \in ]n - 1, n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\lambda = \text{const}$ .

При  $\alpha = \beta \in ]1, 2]$  и  $\lambda = -\omega^\alpha$  уравнение (3) принимает вид

$$D_{0t}^\alpha u(\tau) + \omega^\alpha u(t) = 0, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (4)$$

и оно относится к классу уравнений, исследованных Барреттом [1, с. 98].

Уравнение (4) является частным случаем следующего нагруженного уравнения:

$$\partial_{0t}^\alpha u(\tau) + \omega^\alpha u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k u^{(k)}(0) t^{k-\alpha}, \quad (5)$$

где  $\gamma_k$  – заданные постоянные.

При  $\gamma_k = 1/\Gamma(1 + k - \alpha)$  уравнение (5) переходит в уравнение (4). Если же  $\gamma_k = 0$  для любого  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , то из (5) следует уравнение

$$\partial_{0t}^\alpha u(\tau) + \omega^\alpha u(t) = 0, \quad n - 1 < \alpha \leq n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Из (6) при  $n = 2$  получаем уравнение (1) в следующей форме записи:

$$\partial_{0t}^\alpha u(\tau) + \omega^\alpha u(t) = 0, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (7)$$

В теории уравнения (2) важную роль играют обобщенные тригонометрические функции:

$$\sin_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k+1}}{\Gamma(2 + \alpha k)}, \quad \cos_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)},$$

где  $z = x + iy$  – комплексное переменное.

Любое решение  $u(t)$  уравнения (7) представимо в виде

$$u(t) = u(0) \cos_\alpha(\omega t) + \frac{u'(0)}{\omega} \sin_\alpha(\omega t). \quad (8)$$

Формула (8) является основной моделью когерентных колебаний, движения частиц в атомах, в атомных ядрах, твердых телах.

Функция  $u(t) - u(0) \cos_\alpha(\omega t)$  с  $u'(0) \neq 0$  в отличие от функции  $u(t) - u(0) \cos(\omega t)$  при  $1 < \alpha < 2$  на временной оси может иметь лишь конечное число нулей.

### Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.
3. *Mainardi F.* Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena Chaos // Solitons and Fractals. 1996. V. 7, № 9. P. 1461-1477.
4. *Нахушев А.М.* Задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 302-311.
5. *Нахушева В.А.* О двух краевых задачах для линеаризованного уравнения Буссинеска смешанного типа с разрывным по времени коэффициентом диффузии // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 3. С. 35-40.

Нысанов Е.А., Сураган Д.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*

*nyssanb@mail.ru*

## **О математическом моделировании движения грунтовых вод и почвенной влаги**

В докладе проведен структурный и качественный анализ математических моделей движения грунтовых вод и почвенной влаги, учитывающих явления последствия и основанных на волновом уравнении и уравнении фрактальной диффузии. И решена проблема выхода за рамки традиционных математических моделей, базирующихся на локальных дифференциальных уравнениях и соответствующие им локальные начально-краевые задачи, которые, как правило, не гарантируют приемлемой адекватности реалии в случае систем с фрактальной структурой и (или) памятью. Научно обоснованно, что выход состоит в разработке на базе концепции фрактала, элементов дробного исчисления и пространственно-временной нелокальности математических моделей, учитывающих фрактальную во времени и в пространстве природу нелинейных явлений и процессов, само подобие фрактальных систем.

### **Литература**

1. *Нысанов Е.А.* Решение краевой задачи совместного течения воды в открытых каналах и пористой среде // Труды международной научной конференции "Современные проблемы математической физики и информационной технологии". - 2003. Ташкент.

УДК 532.543.541

Нысанов Е.А., Шоманбаева М.Т.

*Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова,*

*Казахстан, Шымкент*

*nyssanb@mail.ru*

## **Выбор оптимальной формы поперечного сечения открытых каналов с целью наибольшей транспортировки при установившемся течении вязких двухфазных сред**

**Введение.** За последние годы в гидромеханике достигнуты определенные успехи в области исследований динамики потоков в открытых руслах [1]. Однако эти модели не в полной степени охватывают физику процесса, так как вода, идущая на орошение, неоднородна и содержит определенные количества твердых частиц. Появление небольшого количества твердых частиц в потоке, как известно существенно изменяет характер и структуру процессов [2,3]. Поэтому задача по выбору оптимальной формы поперечного сечения открытых каналов с целью наибольшей транспортировки смеси отличается от транспортировки чистой воды, рассмотренной в работе [1].

**Постановка задачи.** Исходя из "взаимопроникающей" модели двухфазной среды определить оптимальное поперечное сечение открытого канала с максимальным



расходом, то есть с наибольшей транспортировкой потока для установившегося течения вязких двухфазных сред. При этом рассматриваются полуэллиптическое, полукруглое, параболическое и трапецидальное поперечные сечения, такой сравнительный анализ для двухфазной среды делается впервые.

**Методы решения.** Для решения полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими краевыми условиями использован численный метод среды MathCad.

**Основная часть.** Суть установившегося односкоростного течения двухфазных сред заключается в том, что вертикальной и поперечной составляющими скоростей фаз пренебрегаем. При этом можно предположить, что концентрации первой и второй фаз постоянны, то есть  $f_1 = const$ , следовательно, и  $f_2 = const$ . Это значит, что в данном случае в любой единице объема количество первой и второй фазы остается постоянным, не зависит от координат и времени. Так как рассматриваются несжимаемые среды, то из постоянства концентраций следует, что приведенные плотности

$$\rho_1 = const, \rho_2 = const$$

Как известно, течение в открытых каналах безнапорное, тогда из уравнений течения двухфазной среды [3] для этого случая будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{\rho_{1i}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\mu_1}{\rho_{1i}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{k}{\rho_{1i} f_1} (u_2 - u_1) = 0, \\ \frac{\mu_2}{\rho_{2i}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\mu_2}{\rho_{2i}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{k}{\rho_{2i} f_2} (u_1 - u_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

следовательно, свободная поверхность  $H = H_0 = const$ , где  $\rho_{ni}$  - истинная плотность  $n$ -ой фазы;  $u_n$  - продольная составляющая  $n$ -ой фазы;  $\mu_n$  - коэффициент вязкости  $n$ -ой фазы;  $k$  - коэффициент взаимодействия между фазами;  $x, y, z$  - продольная, вертикальная, поперечная координатные оси.

Рассмотрим граничные условия для получения системы уравнений (1). На дне и боковых стенках канала для скоростей фаз используем условие прилипания, то есть

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ при } z = \pm\varphi(y),$$

где  $\varphi(y)$  - функция, описывающая боковые стенки канала.

На свободной поверхности пренебрегаем силой трения воздуха для каждой фазы.

Таким образом, систему уравнений (1) решаем с граничными условиями:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ при } y = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \text{ при } y = H_0, \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ при } z = -\varphi(y), \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ при } z = \varphi(y), \end{cases} \quad (3)$$

Для выявления оптимальной формы поперечного сечения с целью наибольшей транспортировки потока решаем задачу (1), (2) и вычисляем расходы смеси для различной формы поперечных сечений. Далее сравнивая расходы смеси между собой при равных площадях определяем оптимальное сечение с максимальным расходом, то есть с наибольшей транспортировкой потока.

#### Выводы.

Сопоставление результатов расчета для каналов полуэллиптической, полукруглой, параболической и трапецидальной форм поперечного сечений при равных площадях

показало, что оптимальной формой, обеспечивающей максимальную пропускную способность является канал полукруглой формы, далее полуэллиптической, параболической и трапецидальной формы.

### Литература

1. Нысанов Е.А. Моделирование и методы расчета совместной задачи течения воды в открытых каналах и пористой среде при неполном насыщении. Монография. - Шымкент: ЮКГУ им.М.Ауезова, 2012. - 174 с.
2. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1,2. - М.:Наука, 1987. - 464 с.
3. Файзуллаев Д.Ф., Умаров А.И., Шакиров А.А. Гидродинамика одно - двухфазных сред и её приложения. - Ташкент: Фан, 1980. - 164 с.

УДК 517.95

Орумбаева Н.Т., Каршыгина Г.Ж.

*Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова,  
Казахстан, Караганды  
Orumbayevan@mail.ru*

### О корректных задач для нагруженных уравнений

В работе рассматривается краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Заданное в  $n$ -мерной области  $\Omega$  евклидова пространства  $R^n$  точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  (матричное или скалярное) уравнение

$$Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

называется нагруженным, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения  $u(x)$  на принадлежащих замыканию  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$  многообразиях, размерность которых строго меньше  $n$ . [1] - [3]. Нагруженное уравнение (1) называется нагруженным дифференциальным уравнением в области  $\Omega \in R^n$ , если оно содержит, хотя бы одну производную от искомого решения  $u(x)$  на принадлежащих многообразиях ненулевой меры. В работах [4] - [8] содержатся различные применения нагруженных уравнений как метода исследования задач математической физики, математического моделирования, физики фракталов, теории упругих оболочек, математической биологии и др. В работе [3] отмечено, что в основе математических моделей нелокальных физико-биологических процессов фрактальной организации, как правило, лежат нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка [6], [7]. Пусть  $R_+ = (0, \infty)$ . Рассмотрим в области  $Q = \{(x, t), x \in R_+, t \in R_+\}$  следующую краевую задачу:

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda [D_x^\nu u(x, t)]|_{x=t} = f(x), \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $D_x^\nu u$  - нагруженное слагаемое - дробная производная Римана-Лиувилля функции  $u(x, t)$  по переменной  $x$  порядка  $t$ , которая определяется равенством

$$D_x^\nu u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\nu\})} D_x^{[\nu]+1} \int_0^x \frac{u(\xi, t) d\xi}{(x - \xi)^{\{\nu\}}},$$

где  $[\nu]$ ,  $\{\nu\}$ - соответственно целая и дробная части числа  $\nu$ ,  $0 \leq \{\nu\} < 1$ , так что  $\nu = [\nu] + \{\nu\}$ . В данной работе рассматривается случай  $0 < \nu < 1$ , т.е.  $[\nu] = 0$ ,  $\{\nu\} = \nu$ . Также предполагаем, что  $\lambda \in \mathcal{C}$  - комплексный спектральный параметр,

$$f \in M(Q), (D_x \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) |_{x=t} \in M(R_+) \quad (3)$$

заданные функции,

$$M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q), \quad M(R_+) = L_\infty(R_+) \cap C(R_+).$$

Функция  $G(x, \xi, t - \tau)$ - функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности определяется соотношением:

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{4(t - \tau)}\right) \right\}.$$

Особенностью данной задачи является то, что спектральный параметр  $\lambda$  является коэффициентом нагруженного слагаемого, и точка нагрузки движется по линейному закону  $x = t$ .

Справедлива следующая

Теорема. Для любого значения  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\forall f \in M(Q)$ , (3) краевая задача (2) имеет единственное решение  $u(x, t) \in \mathfrak{U}$ .

### Литература

1. *Нахушев А.М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т.12, №1. С.103-108.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 205 с.
3. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. - М.: Наука, 2012. - 232с.
4. *Джесалмиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: Гылым, 2010. -334 с.
5. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. - 287 с.
6. *Пеху А.В.* Уравнение в частных производных дробного порядка. М.:Наука, 2005. - 199 с.
7. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. - 167 с.
8. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, - 5769 с.

Сакабеков А., Аужани Е., Исагали А.

*Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан, Алматы*

*a.sakabekov@kbtu.kz, erkawww@gmail.com, aizhan.issagali@nu.edu.kz*

## **Разрешимость начально-краевой задачи для одномерной нелинейной нестационарной системы моментных уравнений Больцмана при граничных условиях Максвелла-Аужана**

### Abstract

В работе доказана теорема о существовании и единственности решения начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана в третьем приближении при граничных условиях Максвелла-Аужана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным

In this article we put boundary conditions for arbitrary approximation of the onedimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations. We approximate microscopic Maxwell boundary condition for one-dimensional Boltzmann's equation. We formulate initial and boundary value problem for six-moment Boltzmann's system equations with Maxwell-Auzhan boundary conditions and prove the existence and uniqueness of the solution of the initial and boundary value problem for onedimensional nonstationary six-moment Boltzmann's system equations in the functions space that continuous on time and square summable on space variable.

Уравнение Больцмана эквивалентно бесконечной системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно моментов функции распределения частиц в силу полноты системы собственных функций линейризованного оператора [1]. Как правило, ограничиваются изучением конечной системы уравнений, так как решить бесконечную систему уравнений невозможно. Конечная система моментных уравнений для конкретной задачи с некоторой степенью точности заменяет уравнение Больцмана. Необходимо, также приближенно, заменить граничные условия для функции распределения частиц некоторым числом макроскопических условий для моментов, т.е. возникает задача постановки граничных условий для конечной системы уравнений, аппроксимирующих микроскопические граничные условия для уравнения Больцмана. Вопрос постановки граничных условий для конечной системы моментных уравнений можно разбить на две части: сколько условий надо наложить и как они должны быть получены. Из микроскопических граничных условий для уравнения Больцмана можно получить бесконечное множество граничных условий для любого типа разложения. Однако число граничных условий определяется не числом моментных уравнений, т.е. нельзя, например, брать столько граничных условий, сколько уравнений, хотя число моментных уравнений влияет на количество граничных условий. Кроме того, граничные условия должны быть согласованы с моментными уравнениями и полученная задача должна быть корректной.

Граничное условие Максвелла задано в виде интегрального соотношения между падающими на границу частицами и отраженными от границы частицами (при условии, что известна вероятность того, что частица, падающая на границу со скоростью  $v_i$  отлетит от нее со скоростью  $v_r$ ). Микроскопическое граничное условие Максвелла для одномерной нелинейной нестационарной системы моментных уравнений Больцмана в произвольном приближении аппроксимировано в работе [2]. Микроскопическое граничное условие Максвелла имеет вид

$$f^+(t, x, v_1, v_2, v_3) = \beta f^-(t, x, v_1, v_2, -v_3) + (1 - \beta)\eta \exp\left(-\frac{|v|^2}{2RT_0}\right),$$

$$(n, v) = (n, |v| \cos \theta) > 0, \quad x = -a \text{ или } x = a,$$

где  $f = f(t, x, v)$  - функция распределения частиц в пространстве по скорости и времени. Микроскопическое граничное условие Максвелла будем аппроксимировать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{(n,v)>0} (n, v) f_0(\alpha|v|) f_{2N+1}^+(t, x, v) g_{n,2l}(av) dv - \\ & - \beta \int_{(n,v)<0} (n, v) f_0(\alpha|v|) f_{2N+1}^-(t, x, v) g_{n,2l}(av) dv - \\ & - (1 - \beta)\eta \int_{(n,v)<0} (n, v) f_0(\alpha|v|) \exp\left(-\frac{|v|^2}{2RT_0}\right) g_{n,2l}(av) dv = 0 \end{aligned}$$

$2(n+l) = 0, 2, \dots, 2N$ ,  $x = -a$  или  $x = a$ , при  $k = 2N + 1$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{(n,v)>0} (n,v) f_0(\alpha|v|) f_{2N}^+(t,x,v) g_{n,2l+1}(av) dv - \\ & - \beta \int_{(n,v)<0} (n,v) f_0(\alpha|v|) f_{2N}^-(t,x,v) g_{n,2l+1}(-av) dv - \\ & - (1-\beta)\eta \int_{(n,v)<0} (n,v) f_0(\alpha|v|) \exp\left(-\frac{|v|^2}{2RT_0}\right) g_{n,2l+1}(-av) dv = 0 \end{aligned}$$

$2(n+l) + 1 = 1, 3, \dots, 2N - 1$ ,  $x = -a$  или  $x = a$ , при  $k = 2N$ , где  $n = (0, 0, 1)$  при  $x = a$  и  $n = (0, 0, -1)$  при  $x = -a$ ;  $f_0(\alpha|v|)$  – глобальное максвелловское распределение.

Начально-краевую задачу для шестимоментной системы уравнений Больцмана при граничных условиях Максвелла-Аужана [2] (чисто зеркальное отражение) запишем в векторно-матричной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = J_1(u, w)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A' \frac{\partial u}{\partial x} = J_2(u, w), t \in (0, T], x \in (-a, a), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), w|_{t=0} = w_0(x), x \in [-a, a], \quad (2)$$

$$(Aw^+ - Bu^+)|_{x=-a} = \beta(Aw^- + Bu^-)|_{x=-a}, t \in [0, T], \quad (3)$$

$$(Aw^+ + Bu^+)|_{x=a} = \beta(Aw^- - Bu^-)|_{x=a}, t \in [0, T], \quad (4)$$

где  $u = (f_{00}, f_{02}, f_{02})'$ ,  $w = (f_{01}, f_{03}, f_{11})'$ ,  $J_1(u, w) = (0, J_{02}, 0)'$ ,  $J_2(u, w) = (0, J_{03}, J_{11})'$ ,  $f_{ij}$  – моменты функции распределения частиц,  $J_{ij}$  – моменты интеграла столкновения частиц, представляют знаконеопределенную квадратичную форму

$$A = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}, B = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{2} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$A'$  – транспонированная матрица;  $u_0(x) = (f_{00}^0(x), f_{02}^0(x), f_{10}^0(x))'$ ,  $w_0(x) = (f_{01}^0(x), f_{03}^0(x), f_{11}^0(x))'$  – заданные начальные вектор функции. Матрицы  $A$  и  $B$  – невырожденные. Требуется найти решение системы уравнений (1), удовлетворяющих начальному условию (2) и граничным условиям (3) и (4). Для задачи (1)–(4) справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если начальные вектор-функции принадлежат пространству  $L^2[-a, a]$ , то задача (1)–(4) имеет единственное решение, принадлежащее пространству  $C([0, T]; L^2[-a, a])$ , причем

$$\|U\|_{C([0, T]; L^2[-a, a])} \leq C_1 \|U_0\|_{L^2[-a, a]},$$

где  $C_1$  – постоянная, не зависящая от  $U$ ,  $U = U(u, w)'$ ,  $U_0 = U(u_0, w_0)'$ ,  $T \sim O(\|U_0\|_{L^2[-a, a]}^{-1})$ .

## Литература

1. Сакабеков А. Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана. Алматы: Научно-издательский центр "Гылым", 2002, 276 стр.

2. *Sakabekov A., Auzhani Y.* Boundary conditions for the one-dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations. *AIP Journal of Mathematical Physics*, 55, 123507 (2014).

УДК 517.946

Сахаев Ш.С.

*Казахский Национальный университет им. ал-Фараби, Казахстан, Алматы*

*Sh\_Sahaev@mail.ru*

## Оценки решения одной задачи для стационарных систем уравнений магнитной гидродинамики

Вязкая несжимаемая проводящая жидкость заполняет ограниченный сосуд  $\Omega \subset R^3$  с идеально проводящей границей  $S$ . В  $\Omega$  задана внешняя сила  $\vec{f}(x)$ , действующая на жидкость, и электрический ток плотности  $\vec{j}(x)$ . Следует определить векторное поле скоростей  $\vec{v}(x)$  и давление  $p(x)$ , а также магнитное  $\vec{H}(x)$  и электрическое поля  $\vec{E}(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

Установившееся движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости описывается системой уравнений магнитной гидродинамики, состоящей из уравнений Навье-Стокса

$$-v \nabla^2 \vec{v}(x) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{\mu}{\rho} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} + \frac{1}{\rho} \nabla \left( p(x) + \frac{\mu}{2} |\vec{H}(x)|^2 \right) = \vec{f}(x), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x) = 0, \quad (2)$$

и уравнений Максвелла с исключенным током смещения

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) - \sigma (\vec{E}(x) + \mu (\vec{v} \times \vec{H})) = \vec{j}(x), \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H}(x) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(x) = 0 \quad (4)$$

при заданных  $\vec{f}(x)$  и  $\vec{j}(x)$ ,  $x \in \Omega_1$ .

Магнитная проницаемость жидкости  $\mu$ , проводимость  $\sigma$ , вязкость  $\nu$  и плотность  $\rho$  являются положительными постоянными. Задача состоит в нахождении решений уравнений (1)-(4) в области  $\Omega$ , удовлетворяющих следующим краевым условиям на  $S$ :

$$\vec{v}(x) = 0, \quad (5)$$

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{E}_r = 0, \quad (6)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя единичная нормаль к  $S_1$ , а  $\vec{E}_r = \vec{E} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{E})$ .

Существование обобщенного (слабого) решения задач доказано в [1, 2].

Как и в работе [1], успеху в исследовании этой задачи во многом способствует переход от классической постановки задачи к обобщенной, состоящей в том, что уравнения (2), (4), а так же условия на границе заменяются требованием принадлежности искомых вектор-функций некоторым функциональным гильбертовым пространством, а остальные уравнения – интегральными тождествами.

### Литература

1. *Сахаев Ш., Солонников В.А.* О некоторых стационарных задачах магнитной динамики в многосвязных областях // Записки научных семинаров ПОМИ, - 2011. -Т. 397. -С. 126-149.

УДК 517.95

Сахауева М.А.

Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы

e-mail: maira.math@gmail.com

## Задачи сопряжения, возникающие при линеаризации одной нелинейной задачи со свободными границами

Мы рассмотрим две модельные задачи сопряжения, которые возникают при линеаризации одной нелинейной задачи со свободными границами [1]. Через  $\overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_t$  обозначим пространство функций  $u(x, t) \in C_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_t$ , таких, что  $\partial_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0$ ,  $k = 0, 1$ .

Пусть  $D_1 := \{x | x_1 \in \mathbb{R}^1, x_2 < 0\}$ ,  $D_2 := \{x | x_1 \in \mathbb{R}^1, x_2 > 0\}$ . Обозначим через  $R$  — прямую  $x_2 = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ ,  $R_T = R \times (0, T)$ ,  $D_T^{(j)} = D_j \times (0, T)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Задача сопряжения 1.** Требуется найти функции  $v(x, t)$ ,  $u_1(x, t)$ ,  $\psi_1(x_1, t)$ , удовлетворяющие нулевым начальным данным по условиям

$$\begin{aligned} \partial_t v - a^2 \Delta v - b(\partial_t \psi_1 - a^2 \partial_{x_1}^2 \psi_1) &= f(x, t) \quad \text{в } D_T^{(2)}, \\ \partial_t u_1 - a_1^2 \Delta u_1 - b_1(\partial_t \psi_1 - a_1^2 \partial_{x_1}^2 \psi_1) &= f_1(x, t) \quad \text{в } D_T^{(2)}, \\ \partial_{x_2} v|_{R_T} &= \varphi_1(x_1, t), \\ \partial_t v - k_1 \partial_{x_1} v|_{R_T} - b \partial_t \psi_1 &= \varphi_2(x_1, t), \\ u_1|_{R_T} &= \varphi_3(x_1, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $a_1$  — положительные постоянные.

**Теорема 1.** Пусть  $a, a_1, b > 0$ . При любых функциях  $f(x, t), f_1(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}_t(D_T^{(2)})$ ,  $\varphi_1(x_1, t), \varphi_2(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_t(R_T)$ ,  $\varphi_3(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_t(R_T)$  задача (1) имеет единственное решение  $v(x, t), u_1(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_t(D_T^{(2)})$ ,  $\partial_t v(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_t(D_T^{(2)})$ ,  $\psi_1(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_t(R_T)$ ,  $\partial_t \psi_1(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_t(R_T)$ , для которого при всех  $t \leq T$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} &|v|_{D_t^{(2)}}^{(2+\alpha)} + |\partial_t v|_{D_t^{(2)}}^{(1+\alpha)} + |u_1|_{D_t^{(2)}}^{(2+\alpha)} + |\psi_1|_{R_t}^{(2+\alpha)} + |\partial_t \psi_1|_{R_t}^{(1+\alpha)} \leq \\ &\leq c_1 \left( |f|_{D_t^{(2)}}^{(\alpha)} + |f_1|_{D_t^{(2)}}^{(\alpha)} + |\varphi_1|_{R_t}^{(1+\alpha)} + |\varphi_2|_{R_t}^{(1+\alpha)} + |\varphi_3|_{R_t}^{(2+\alpha)} \right). \end{aligned}$$

**Задача сопряжения 2.** Требуется найти функции  $v(x, t)$ ,  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $\psi_2(x_1, t)$ , удовлетворяющие нулевым начальным данным, по условиям

$$\begin{aligned} \partial_t v - a^2 \Delta v - b(\partial_t \psi_2 - a^2 \partial_{x_1}^2 \psi_2) &= f(x, t) \quad \text{в } D_T^{(1)}, \\ \partial_t u_1 - a_1^2 \Delta u_1 - b_1(\partial_t \psi_2 - a_1^2 \partial_{x_1}^2 \psi_2) &= f_1(x, t) \quad \text{в } D_T^{(1)}, \\ \partial_t u_2 - a_2^2 \Delta u_2 - b_2(\partial_t \psi_2 - a_2^2 \partial_{x_1}^2 \psi_2) &= f_2(x, t) \quad \text{в } D_T^{(2)}, \\ u_j|_{R_T} &= \varphi_{3+j}(x_1, t), \quad j = 1, 2, \\ v|_{R_T} &= \varphi_6(x_1, t), \\ \lambda_1 \partial_{x_2} u_1 - \lambda_2 \partial_{x_2} u_2|_{R_T} + k_2 \partial_{x_1} \psi_2 + \kappa \partial_t \psi_2 &= \varphi_7(x_1, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты  $a, a_j, \lambda_j, j = 1, 2$ , — положительные постоянные.

**Теорема 2.** Пусть  $a_j, \lambda_j > 0$ ,  $b_j \kappa < 0$ ,  $j = 1, 2$ . При любых функциях  $f(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}_t(D_T^{(1)})$ ,  $f_j(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}_t(D_T^{(j)})$ ,  $\varphi_6(x_1, t), \varphi_{3+j}(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_t(R_T)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\varphi_7(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_t(R_T)$

задача (2) имеет единственное решение  $v(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(D_T^{(1)})$ ,  $u_j(x, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(D_T^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\psi_2(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(R_T)$ ,  $\partial_t \psi_2(x_1, t) \in \overset{\circ}{C}_x^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$ , для которого при всех  $t \leq T$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & |v|_{D_t^{(1)}}^{(2+\alpha)} + \sum_{j=1}^2 |u_j|_{D_t^{(j)}}^{(2+\alpha)} + |\psi_2|_{R_t}^{(2+\alpha)} + |\partial_t \psi_2|_{R_t}^{(1+\alpha)} \leq \\ & \leq c_2 \left( |f|_{D_t^{(1)}}^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^2 (|f_j|_{D_t^{(j)}}^{(\alpha)} + |\varphi_{3+j}|_{R_t}^{(2+\alpha)}) + |\varphi_6|_{R_t}^{(2+\alpha)} + |\varphi_7|_{R_t}^{(1+\alpha)} \right). \end{aligned}$$

### Литература

1. Сахауева М. А. Задача со свободными границами, возникающая при моделировании движения вязкой жидкости в трубе // Тезисы докладов Республиканской научной конференции (с участием зарубежных ученых) "Неклассические уравнения математической физики и их приложения". — Ташкент, Узбекистан. 23 – 25 октября 2014 г. — С.91–92.

УДК 51-77

Серовайский С.Я.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*  
serovajskys@mail.ru

## Математический анализ модели лечения антибиотиками зараженного организма

Рассматривается организм, который подвергается заражению бактериями. Численность бактерий растет сначала быстро, потом всё медленнее, пока не установится некоторое предельное значение численности бактерий. После этого начинается лечение организма каким-либо антибиотиком (бактерицидным, бактериостатическими или смешанного действия), и численность бактерий снижается. Однако в результате мутаций или плазмид, несущих ген устойчивости, появляются бактерии, не чувствительные к действию антибиотика ( $R$ -бактерии). По мере сокращения исходной популяции бактерий, чувствительной к действию антибиотика ( $S$ -бактерий), происходит значительный рост популяции  $R$ -бактерий. Со временем действие антибиотика сходит на нет, и лечение прекращается. В отсутствие антибиотика популяция  $R$ -бактерий оказывается менее жизнеспособной по сравнению с  $S$ -бактериями. Происходит постепенное вытеснение  $R$ -бактерий  $S$ -бактериями.

Для описания рассматриваемого процесса была предложена математическая модель, характеризующаяся двумя нелинейными дифференциальными уравнениями [1]. При незначительной модификации она имеет следующий вид

$$x'_s = \left[ \frac{a_s}{1 + s(t)x_s((x_s)^\theta - 1)} - b_s(x_s + x_r) \right] x_s + a_{sr}x_r - c(t)(x_s)^x, \quad (1)$$

$$x'_r = [a_r - b_r(x_s + x_r)]x_r + \left[ \frac{a_{rs}}{1 + s(t)x_s((x_s)^\theta - 1)} - b_s(x_s + x_r) \right] x_s. \quad (2)$$

Здесь функции  $x_s$ ,  $x_r$  характеризуют численности  $S$ -бактерий и  $R$ -бактерий,  $a_s$ ,  $a_r$  — их естественные приросты,  $b_s$ ,  $b_r$  — их чувствительность к ограниченности жизненного пространства,  $a_{sr}$ ,  $a_{rs}$  — частоты переходов от  $S$ -бактерий к  $R$ -бактериям и наоборот за счет мутаций или плазмид, несущих ген устойчивости,  $c(t)$ ,  $s(t)$  — концентрации



бактерицидного и бактериостатического антибиотиков в момент времени  $t$ ,  $\theta$ ,  $\chi$  – интенсивности бактерицидного и бактериостатического антибиотиков.

На стадии заражения организма антибиотика нет. Тогда менее жизнеспособная популяция  $R$ -бактерий отсутствует, т.е.  $x_r = 0$ . В этих условия уравнение (2) вырождается, а уравнение (1) сводится к известному уравнению Ферхюльста [2].

**Теорема 1.** *В отсутствии действия антибиотика и  $R$ -бактерий численность  $S$ -бактерий со временем стремится к значению  $a_s/b_s$ .*

Полученное предельное значение называется числом Ферхюльста и характеризует предельное количество бактерий данного типа, которое может существовать в данных условиях.

При использовании бактерицидного антибиотика имеем  $s = 0$ . При этом, учитывая, что влияние антибиотика является определяющим, систему (1), (2) можно аппроксимировать уравнениями

$$x'_s = a_{sr}x_r - c(t)(x_s)^X, \quad (3)$$

$$x'_r = [a_r - b_r(x_s + x_r)]x_r + a_{rs}x_s. \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Система (3), (4) имеет два положения равновесия: тривиальное, а также  $x_r = \frac{a_r}{b_r} \left( \frac{a_{sr}}{c} + 1 \right)^{-1}$ ,  $x_s = \frac{(a_r - b_r x_r)x_r}{b_r x_r - a_{rs}}$ .*

Отметим, что параметр  $a_{sr}$  достаточно мал, так что предельное значение  $x_r$  будет достаточно близко к числу Ферхюльста  $R$ -популяции, а в действительности оказывается ненамного меньше его. В то же время, учитывая малость параметра  $a_{rs}$ , заключаем, что предельное значение  $x_s$  будет примерно равно разности между числом Ферхюльста и предельным значения популяции  $R$ -бактерий.

При лечении бактериостатическим антибиотиком справедливо равенство  $c = 0$ . При этом система (1), (2) с достаточно большой степенью точности аппроксимируется системой

$$x'_s = -b_s(x_s + x_r)x_s + a_{sr}x_r, \quad (5)$$

$$x'_r = [a_r - b_r(x_s + x_r)]x_r. \quad (6)$$

**Теорема 3.** *Система (5), (6) имеет два положения равновесия: тривиальное, а также  $x_s = \frac{a_{sr}}{b_s}$ ,  $x_r = \frac{a_r}{b_r} - \frac{a_{ss}}{b_s}$ .*

На основе полученных результатов можно заключить, что в результате применения бактериостатического антибиотика со временем численность  $R$ -бактерий выходит на уровень, который немного меньше соответствующего числа Ферхюльста. В свою очередь, численность  $S$ -бактерий выйдет на уровень, примерно равный разности между числом Ферхюльста  $R$ -бактерий и их предельной численности.

Итак, применение обоих типов антибиотиков приводит примерно к одинаковым последствием. При этом популяция  $S$ -бактерий существенно сокращается, но не вымирает, а популяция  $R$ -бактерий возрастает до величины, равной разности между соответствующим числом Ферхюльста и предельной численности  $S$ -бактерий.

После прекращения лечения концентрация антибиотика полагается равным нулю. При этом система (1), (2) принимает следующий вид:

$$x'_s = [a_s - b_s(x_s + x_r)]x_s + a_{sr}x_r, \quad (7)$$

$$x'_r = [a_r - b_r(x_s + x_r)]x_r + a_{rs}x_s. \quad (8)$$

**Теорема 4.** *Система (7), (8) имеет два положения равновесия: тривиальное, а также достаточно малое значение  $x_s$  и значение  $x_r$ , равное разности между числом Ферхюльста для  $S$ -популяции и ее предельной численности.*

Согласно теореме 4 основная популяция бактерий восстанавливается, а численность бактерий, устойчивых к действию антибиотика падает до весьма незначительного уровня. Отметим, что, если пренебречь межпопуляционными переходами, то система (7), (8) сводится к классическим уравнениями конкуренции [2], для которых более жизнеспособный вид полностью вытесняет конкурента.

## Литература

1. *Pin A., Islamov R., Kasenov S., Nurseitov D., Serovajsky S.* Mathematical modeling of lung infection and antibiotic resistance / Abstracts of the ninth International Conference "Bioinformatics of Genome Regulation and Structure / Systems Biology". – Novosibirsk: Publ. House SR RAS, 2014. – P. 68.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии.– М., Ижевск, Ин-т компьютер. исслед, 2003. – 183 с.

УДК 53.04

Толеуханов А.Е., Калтаев А., Панфилов М.Б.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*Университет Лотарингии, Франция, Нанси*

*amankaznu@gmail.com*

### **Проведение численного и аналитического исследования кинетики химических реакций, вызываемых бактериями в пластовых условиях процесса самоорганизации в подземных хранилищах водорода**

Проблема подземного хранения газовой смеси водорода состоит в том, что в отличие от природного газа, водородная газовая смесь претерпевает химические изменения в процессе хранения, тем самым концентрация водорода и углекислого газа понижается, а концентрация метана растет. Было установлено, что эти изменения происходят из-за активности популяции метаногенных бактерий, обитающих в пласте. Эта химическая активность, вызываемая деятельностью бактерий, а также течение газа и воды в пласте вызывает явление самоорганизации такое, как появление автоволновых пространственных структур, динамика которых характеризуется множеством различных сценариев, в том числе возникновение хаоса и переход с одного сценария на другой. В настоящей работе предлагается разработать качественную теорию сценариев самоорганизации в подземных хранилищах водорода в зависимости от внешних и внутренних параметров. Разработка теории и компьютерных моделей переноса в подземном хранилище водорода будет строиться на базе связки теории многофазных композиционных течений в пористых средах с моделью динамики популяций бактерий, которая будет основана на механизме хемотаксиса (внутренний химический механизм, благодаря которому бактерии обладают способностью детектировать наличие питательных веществ на расстоянии и двигаться в этом направлении).

## Литература

1. *Panfilov M.*, Underground storage of hydrogen: self-organisation and methane generation, vol. 85, Transport in Porous Media (2010), P 841-865.
2. *Toleukhanov A., Panfilov M., Panfilova I., Kaltayev A.*, Bio-reactive two-phase transport and population dynamics in underground storage of hydrogen: natural self-organisation., In: Proc. ECMOR-XIII: 13th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 10–13 September 2012 Biarritz, France, Ed. EAGE, paper B09., (2012).

Туленбаев К.М., Отенов Н.О., Жумабеков А.В., Сайдулин А.А.,  
Муриддинов Е.М.

*Институт математики и математического моделирования, Казахская академия  
спорта и туризма, Казахстан, Алматы*

*tulen75@hotmail.com*

## Математическое моделирование в қазақша күрес

В национальной борьбе казакша күрес встречаются два борца, которые проводят различные приемы и контрприемы. По своему содержанию борьба казакша күрес близка по духу к самбо и дзюдо, но нет борьбы в партере, удушающих и болевых. В нашей статье мы сводим моделирование борьбы в казакша күрес к матричной игре игроков с нулевой суммой, которая рассматривается, как следующая абстрактная игра двух игроков [1].

Игрок А имеет  $m$  стратегий  $i = 1, \dots, m$ . Игрок В имеет  $n$  стратегий  $j = 1, \dots, n$ . каждой паре стратегий  $(i, j)$  поставлено в соответствие число  $a_{ij}$ , выражающее выигрыш игрока А за счет игрока В, если первый игрок выберет свою  $i$ -ю стратегию, а второй выберет свою  $j$ -ю стратегию. Каждый из игроков делает один ход: игрок А выберет свою  $i$ -ю стратегию, В свою  $j$ -ю стратегию, после чего игрок А получает выигрыш  $a_{ij}$ . На этом игра заканчивается. Рассмотрим матрицу выигрышей А.

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$

Основным в теории игр является понятие оптимальной стратегии игроков [2] В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из данных позиций, игрок А исследует матрицу выигрышей следующим образом: для каждого значения  $i$  определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока В

$$\min a_{ij}$$

то есть определяется минимальный выигрыш для игрока А при условии, при условии, что он применит свою  $i$ -ю стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. находится

$$\max \min a_{ij}$$

Особенности борьбы қазақша күрес приводят к тому, что размеры матрицы выигрышей небольшие  $m = 4$  и  $n = 3$  Действительно, в борьбе не все приемы проходят у конкретного борца. Иногда, говорят о "коронке", единственный прием у борца, который проходит почти с любым соперником. При подготовке к конкретной схватке, когда мы знаем соперника нашего борца, мы строим матрицу выигрышей, пользуясь экспертными оценками. Мы учитываем мнение не только личного тренера, но и нескольких экспертов-тренеров. Для каждого из четырех выбранных приемов, которые проходят у нашего противника, мы подбираем три контрзащитных приема. При процессе подготовки к борьбе, готовим нашего борца к проведению данных трех контрзащитных приема. Исходя из подготовки, мы корректируем нашу матрицу выигрышей.

## Литература

1. *Борисова С.П., Власова И.А., Коваленко А.Г.* Теория игр и исследование операций. Издательство Самарского Университета, 2006.
2. *Бержэ Л.* Общая теория игр нескольких лиц, ГИФМЛ, 1961

УДК 51-74

Шпади Ю.Р., Инчин П.А.

*Институт космической техники и технологий АО НЦКИТ, Казахстан, Алматы*  
*yu-shpadi@yandex.ru; paul.inchin@yahoo.com*

## Оценка температурного режима датчика феррозондового магнитометра

Рассматривается математическая модель установившегося температурного режима малого однородного тела сферической формы, движущегося вокруг Земли по круговой солнечно-синхронной орбите. Модель основана на методе энергетического баланса. Она учитывает поверхностный нагрев тела прямым и отраженным от Земли потоками солнечного излучения, потоком инфракрасного излучения Земли, а также внутренними источниками тепла постоянной мощности. Для расчета поверхностных тепловых потоков использованы методы, изложенные в [1].

Модель учитывает также наклон потока солнечного излучения к плоскости орбиты и вариации мощности солнечного излучения на различных участках орбиты тела [2].

Охлаждение тела происходит за счет собственного радиационного излучения в соответствии с законом Стефана-Больцмана.

Предлагаемая математическая модель применена для расчета температурного диапазона датчика феррозондового магнитометра, который конструктивно размещен вне платформы нано-спутника в открытом космосе. Полученные результаты расчета подтверждают, что диапазон изменения температуры датчика после выхода спутника на орбиту будет находиться внутри рабочего диапазона температур, указанного в его техническом паспорте.

## Литература

1. *Lamberto Dell'Elce* Thermal design of OUFTI-1 // Universite de Liege, Applied Sciences Faculty, 2011. – 122p.
2. *Edward J. Taylor* Orbit theory and applications, 1991.

Харин С.Н.

*Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан, Алматы**staskharin@yahoo.com***Математические модели электродуговой эрозии****РЕЗЮМЕ**

Механизмы дуговой эрозии в электрических контактах весьма многообразны и зависят от условий коммутации. Первый из них, который реализуется при малых токах с относительно низкой скоростью тепло- и массопереноса, происходит за счет испарения с поверхности электрода. Вторым механизмом, характеризующимся переносом в виде капель жидкого металла, происходит при больших токах и обусловлен газокинетическим и магнитным давлением на жидкометаллическую ванну. Однако, в ряде случаев объяснить экспериментально наблюдаемый жидкокапельный массоперенос действием одного лишь давления не представляется возможным. Поэтому предлагается новая гипотеза о термокапиллярном механизме выброса жидкого металла из ванны. Она основывается на эффекте Марангони, который проявляется при достаточно больших градиентах температуры в жидком металле и достаточно существенной температурной зависимости поверхностного натяжения жидкого металла (вольфрам, цирконий, молибден и т.д.). Четвертый механизм эрозии, связанный с выбросом твердых частиц контактного материала с отчетливой кристаллической структурой, может наблюдаться при импульсах тока большой амплитуды и короткой продолжительности. Он происходит в случае, когда возникающие в электроде термоупругие напряжения превышают предел прочности материала.

В работе представлены математические модели, описывающие каждый из четырех механизмов эрозии, и методы решения соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных в областях с неизвестными подвижными границами. Температурные поля и эрозионные характеристики определены как функции режимов коммутации и свойств контактного материала. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

**ИСПАРЕНИЕ**

В результате действия теплового потока дуги на поверхности электрода формируется зона жидкого металла, контактирующая с нерасплавленной твердой зоной, и в процессе дальнейшего нагрева электрода дугой жидкая зона начинает испаряться. Математическая модель, описывающая динамику плавления и испарения электродов, базируется на осесимметричной задаче Стефана с двумя свободными границами плавления и испарения. Скорость испарения может быть определена законом Ленгмюра

$$\gamma_1 \frac{\partial h_\nu}{\partial t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{T_1}} \exp\left(A - \frac{B}{T_1}\right) \quad (1)$$

где  $\Gamma = (2\pi R_T/M)^{1/2}$ ,  $R_T$  – газовая постоянная,  $M$  – молекулярный вес пара,  $A$  и  $B$  – константы испарения. В предположении, что доля теплового потока, входящего в электрод, которая потребляется на фазовый переход испарения, имеет нормальное радиальное распределение, эта задача может быть решена методом мажорантных функций [1]-[2].

**ЭРОЗИЯ В КАПЕЛЬНОЙ ФАЗЕ**

Наряду с испарением в ряде случаев возможен и другой механизм эрозии, которая происходит в виде жидких капель и наблюдается в области средних и больших токов.

Она обусловлена взаимодействием различных сил в жидкометаллической зоне, таких как электромагнитное и газокинетическое давление, поверхностное натяжение, а также взрывообразным разбрызгиванием газовых включений в жидком металле. Предыдущая математическая модель должна быть скорректирована в этом случае с учетом тепло- и массопереноса в поверхностном слое жидкого металла. Уравнение движения для жидкого металла может быть записано в виде

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} = \frac{1}{\gamma_1} \nabla P + \nu \Delta \bar{V} + \bar{F} \quad (2)$$

а уравнение неразрывности остается стандартным:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности должно быть заменено уравнением энергии

$$C\gamma \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot T \right) = \text{div} (\lambda \nabla T) + \rho j^2 \quad (4)$$

Здесь  $\bar{V}(V_r, V_z)$  означает вектор скорости жидкого металла,  $P$  – газокинетическое давление,  $\bar{F} = (\mu_0/\gamma_1)\bar{j} \times \bar{H}$  – электромагнитная сила,  $T(r, z, t)$  – температура,  $C, \gamma, \lambda, \rho, j, \nu$  и  $\mu_0$  – соответственно теплоемкость, плотность, теплопроводность, плотность тока, вязкость и магнитная проницаемость. Наряду с граничными условиями для температуры должны быть заданы аналогичные условия и для скорости.

Используя теорию подобия нетрудно показать, что характерное время процессов теплопереноса  $t_h$  много больше по сравнению с характерным временем гидродинамических процессов  $t_\nu$ . Следовательно, гидродинамическая часть рассматриваемых уравнений может быть решена независимо от тепловой с использованием квазистационарной аппроксимации, т.е. в предположении, что  $T_1, h_m$  и  $h_\nu$  являются фиксированными для данного времени  $t$ . Используя закон сохранения энергии, можно получить следующее приближение

$$\gamma_1 \left\| \bar{V}^2 \right\| + \nu \int_0^{t_A} \left\| \nabla \cdot \bar{V}^2 \right\| dt \cong W_M + W_V \quad (5)$$

где  $t_A$  – время горения дуги. Выражения для  $E_M, E_H, W_M, W_V$  даны в работе [3]. Соотношение (5) дает возможность сравнить каждое слагаемое в правой части (4), не решая дифференциальные уравнения, и оценить таким образом, какая сила ответственна в основном за механизм эрозии.

Модель становится более эффективной, если заменить всю жидкометаллическую область пограничным слоем вблизи поверхности испарения  $z = h_\nu(r, t)$ . Тогда поля температуры и скорости при испарении могут быть описаны системой уравнений

$$C_1 \gamma_1 \frac{\partial T_1}{\partial V_r \partial t} = \frac{\partial}{\partial V_r} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \rho_1 j_r^2, \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial F}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\mu_0}{\lambda_1} j_r H_\phi$$

решение которой численными методами не представляет трудностей. Это позволяет оценить величину эрозии в форме жидких капель, кинетическая энергия которых больше энергии поверхностного натяжения.

### ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЙ МЕХАНИЗМ ЭРОЗИИ

В ряде случаев объяснить измеренные значения капельной эрозии как следствие движения жидкого металла от центра пятна к его периферии под действием электромагнитного и газокинетического давления не представляется возможным, особенно для таких тугоплавких металлов как вольфрам, молибден, цирконий и т.д. В этом случае эрозионный механизм можно объяснить действием термокапиллярного эффекта Марангони, который вызывает интенсивное конвективное течение в узком поверхностном слое жидкого расплава за счет температурной зависимости поверхностного натяжения жидкого металла. Чтобы учесть этот эффект, необходимо скорректировать

представленную выше модель конвективного тепло- и массообмена путем введения специального граничного условия, описывающего термокапиллярные силы, которые вызывают радиальные напряжения на поверхности жидкого металла:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} = - \frac{d\sigma}{dT_1} \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad z = h_r(r, t) \quad (7)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Кроме этого, в правые части уравнений (2) и (5) должны быть добавлены слагаемые  $E_\sigma$  и  $W_\sigma$ , ответственные за термокапиллярный эффект.

В этом случае аналог термокапиллярного числа Рейнольдса  $Re = W_{10} h_0 \gamma_1 / \mu$ ,  $W_{10} = \left| \frac{d\sigma}{dT_1} \right| \frac{T_m - T_0}{\alpha \mu}$ , числа Прандтля  $Pr = \frac{\sigma \mu}{\lambda_1}$  и числа Марангони  $Ma = Re \cdot Pr$  играют ключевую роль.

Расчеты показывают, что скорость движения термокапиллярной конвекции  $V_r$  на поверхности расплава достаточна для выброса жидкого металла из расплава только термокапиллярными силами без учета электродинамического и газокINETического давлений.

### ЭРОЗИЯ В ТВЕРДОЙ ФАЗЕ

В ряде случаев на поверхности электродов могут наблюдаться очаги пластической деформации и микротрещины. Это происходит тогда, когда коэффициент сосредоточенности теплового источника дугового разряда достаточно велик ( $\alpha_i \geq 10^7 m^{-2}$ ), а длительность импульса мала. При этом вблизи контактной поверхности за весьма малые времена возникают очень большие градиенты температуры (тепловой удар), которые являются причиной возникновения в теле электрода термоупругой волны и напряжений, превышающих предел прочности контактного материала и вызывающих выброс частиц, отколотых от поверхности электрода. Природа тепловых напряжений существенно зависит от плотности тока в контактной зоне. При плотности тока порядка  $10^8 A/m^2$  и выше рост температуры обусловлен действием джоулевых источников тепла в зоне стягивания линий тока, в то время как при плотности  $10^7 A/m^2$  и ниже превалирует поверхностный дуговой поток тепла. Температурное поле, создающее термоупругие напряжения вследствие джоулевого нагрева, может быть описано уравнением теплопроводности

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \nabla T) + \rho \cdot j^2, \quad r > 0, \quad z > 0 \quad (8)$$

Плотность тока в импульсном режиме определяется из решения уравнения Пуассона для электрического потенциала в виде [2]:

$$j(r, z, t) = \frac{\delta t}{4\pi f r} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) \quad \eta = \left[ \frac{z^2 + (r - f)^2}{z^2 + (r + f)^2} \right]^{1/4} \quad (9)$$

где  $\delta$  – скорость роста тока,  $f = f(t)$  – радиус дугового пятна, увеличивающегося во времени. Решение уравнения (8) с граничным условием в виде теплового потока  $P_0 t$ , поступающего в электрод из дуги, хорошо известно [2]. Используя это решение и термоупругий потенциал, можно найти компоненты напряжений. Расчеты показывают, что термоупругие напряжения, соответствующие этой модели, существенны лишь при больших скоростях нарастания тока ( $\beta \geq 10^7 A/sec$  для вольфрама и  $\beta \geq 10^9 A/sec$  для меди). Максимум напряжений в этом случае возникает на краю контактного пятна ( $z = 0$ ,  $r = f(t)$ ), где плотность тока и тепловых источников также максимальны, в то время как в центре пятна напряжения значительно ниже, что видно из уравнения (9).

В случае преобладания поверхностных тепловых источников распределение напряжений носит обратный характер: их максимум находится в центре пятна. В этом случае для описания температурного поля в электроде может быть использована сферическая модель Хольма, более простая и удобная по сравнению с цилиндрической. Она состоит в замене плоского кругового контактного пятна радиуса  $f$  полусферой идеальной проводимости с

радиусом  $b = f\sqrt{2}$ , что обеспечивает адекватность температурных полей в обеих моделях. Граничное условие на контактной полусфере записывается в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(b, t)}{\partial r} = P_0 t \quad (10)$$

Главные компоненты тензора напряжений в квазистатическом приближении определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} - \frac{2E\alpha_0}{1-\mu} \frac{1}{r^3} \int_b^r x^2 T(x, t) dx, \\ \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\psi\psi} = \frac{2E\alpha_0}{1-\mu} \left[ \frac{1}{r^3} \int_b^r x^2 T(x, t) dx - T(r, t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если  $\sigma_y$  – предел прочности материала электрода, то простейшее условие, исключающее растрескивание, имеет вид  $|\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}| < \sigma_y$ . Используя это неравенство, можно вычислить характерный размер области  $l_0$ , подверженной воздействию термоупругой волны до затухания и приводящей к выбросу материала электрода в твердой фазе.

### Литература

1. *Kharin S.N.* Mathematical Model of Electrical Arc Dynamics Based on Axisymmetrical Stefan Problem with Two Free Boundaries // *Mathematical Journal*, № 1, Almaty, 2001, pp. 34-46
2. *Kharin S.N.*, Mathematical Model of Arc Erosion in Electrical Contacts // *Proc. 16-th Int. Conf. on Electrical Contacts*, Loughborough, England, 1992, pp. 205-209
3. *it Kharin S.N.*, Thermo-capillary Mechanism of Contact Erosion During Arcing // *Proc. 15-th Int. Conf. of Electrical Contacts*, Montreal, Canada, 1990, pp. 37-43

УДК 622.276

Хусаинов И.Г.

*Стерлитамакский филиал "Башкирского государственного университета",  
Россия, Стерлитамак  
ivt30@mail.ru*

### Моделирование релаксации давления в полости при ее опрессовке введением газа

Работа посвящена исследованию релаксации давления в полости, окруженной насыщенной газом пористой средой, после ее опрессовки. Получено интегральное уравнение, описывающее процесс релаксации давления в полости формы трещины. Исследованы зависимости динамики релаксации давления от коллекторских характеристик пористой среды. Результаты исследования могут быть использованы при контроле коллекторских характеристик прискважинной зоны. В частности, по темпу релаксации давления в полости можно определить пористость, проницаемость и трещиноватость окружающей пористой среды.

В исходном состоянии ( $t < 0$ ) давление газа во всем пористом пласте вокруг полости постоянно и равно  $p'_0$ , а сама полость заполнена газом. В момент времени  $t = 0$  в полость дополнительно вводится газ и давление в ней мгновенно достигает значения  $p_0$ . Далее за счет фильтрации газа в окружающее пористое пространство давление в полости стремится к значению  $p'_0$ .



При описании этих процессов скелет пористой среды считается несжимаемым и однородным, а коэффициент вязкости газа не зависящим от температуры и давления. В рамках вышеизложенных допущений, учитывая, что изменение массы газа в полости происходит только за счет фильтрации газа через стенки полости в окружающую пористую среду, запишем уравнение сохранения массы газа в следующем виде [1]:

$$\frac{d\rho_g}{dt} = \frac{1}{a}\rho_g v, \quad (1)$$

где  $a$  - толщина трещины;  $\rho_g$  - плотность газа;  $v$  - скорость фильтрации газа через стенки полости.

Давление в окружающей полости пористой среде будем описывать с помощью уравнения пьезопроводности

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{k}{m\mu_g} \frac{\partial}{\partial x} \left( p' \frac{\partial p'}{\partial x} \right), a < x < \infty. \quad (2)$$

Здесь  $\mu_g$  - коэффициент динамической вязкости газа;  $p'$  - давление газа вокруг полости;  $m$  и  $k$  - коэффициенты пористости и проницаемости окружающей полости пористой среды.

Учитывая, что в исходном состоянии давление газа во всем пористом пласте вокруг полости постоянно и равно  $p'_0$ , начальное условие для уравнения (2) запишем в виде:

$$p' = p'_0, (t = 0, x > a). \quad (3)$$

На стенке полости выполняется условие равенства давлений справа и слева

$$p' = p(t), (t > 0, x = a). \quad (4)$$

где  $p(t)$  - давление внутри полости.

Второе граничное условие для уравнения (2) имеет вид:

$$p' = p'_0, (t > 0, x \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Для фильтрации газа в пористой среде вокруг полости используем закон Дарси:

$$v' = -\frac{k}{\mu_g} \frac{\partial p'}{\partial x}, a < x < \infty, \quad (6)$$

где  $v'$  - скорость фильтрации газа вокруг полости. Для скорости выполняется условие:

$$v' = v, (t > 0, x = a).$$

Для замыкания системы уравнений, считая, что газ является калорически совершенным, запишем связь текущих значений плотности и давления в полости:

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^\gamma, \quad (7)$$

где  $\gamma$  - показатель политропы,  $\rho_{g0}$  - начальное значение плотности газа в полости.

После некоторых преобразований получим интегральное уравнение, описывающее эволюцию давления внутри полости:

$$p = p_0 - \frac{k\gamma}{2a\mu_g\sqrt{\pi\kappa_g}} \int_0^t \frac{(p(t'))^2 - (p'_0)^2}{\sqrt{t-t'}} dt'. \quad (8)$$

В результате численных исследований уравнения (8) установлено:

- время релаксации давления в полости имеет обратную зависимость от коэффициента проницаемости;
- разница между решениями, полученными двумя способами линеаризации уравнения пьезопроводности, уменьшается с уменьшением начальной депрессии;
- решение системы в безразмерном виде зависит лишь от безразмерного начального давления в полости  $P_0$ ;
- пористость окружающей полости пористой среды слабо влияет на темп релаксации давления в полости.

## Литература

1. Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Хафизов Р.М. Динамика восстановления давления в "вакуумированной" скважине // ПММ. - 2009. - Т. 73, № 4. - С. 615-621.

УДК 517.95

Шаймарданова М.Н.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*  
*makpal.shaimardanova@gmail.com*

### **Решение нерегулярной задачи для параболического уравнения с производной по времени в граничном условии**

Изучена нерегулярная краевая задача для параболического уравнения при рассогласовании начальных и краевых данных.

При исследовании разрешимости начально-краевых задач большую роль играют решения соответствующих модельных задач в явном виде, то есть решения, полученные в виде свертки заданных функций с функций Грина.

В работе построено решение модельной задачи в явном виде, установлен порядок сингулярности решения в окрестности начального момента времени и границы области краевой задачи для параболического уравнения при полном рассогласовании начальных и граничных данных. Полученные результаты могут быть применены при исследовании подобных задач, задач со свободной (неизвестной) границей для параболических уравнений.

## Литература

1. Бижанова Г.И. Применение интегральных преобразований к решению краевых задач параболических уравнений. — Алматы, 1997. - 52 с.
2. Бижанова Г.И. Решение в пространствах Гелдера краевых задач для параболических уравнений при рассогласовании начальных и краевых данных - Алматы // Современная математика. Фундаментальные направления.— 2010. — Т.36. — С. 12–30.
3. Бижанова Г.И. Classical solution of nonregular conjunction problem for the heat equation - Алматы, 2010 год. - Математический журнал.Том 10. С.37–48.
4. Римский-Корсаков Б.С. Элементы операционного исчисления - Москва, 1958 год. - 122 с.

Бдрысова А., Кудайкулов А.А.

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*almawonok@mail.ru, aziz.kudaikulov@gmail.com*

## **Обзор алгоритмов реализации метода объема жидкости для отслеживания положения границы раздела двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей**

Существуют множество примеров в котором необходимо отслеживать положение границы раздела двух сред. Одно из применений это нахождение величины и направления силы поверхностного натяжения, которая возникает на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей. В данной работе дан обзор алгоритмов реализации метода объема жидкости для отслеживания положения границы раздела двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Представлены такие алгоритмы как SLIC (Simple Line Interface Calculation), алгоритм определения положения границы раздела из положения центра масс (The center of mass algorithm), метод центральных разностей (The central difference algorithm), метод Паркера и Юнга (Parker and Youngs' method), метод наименьших квадратов для определения положения границы раздела (LVIRA - Least squares volume-of-fluid interface reconstruction algorithm) и эффективный метод наименьших квадратов для определения положения границы раздела (ELVIRA - Efficient least squares VOF interface reconstruction algorithm). Также в данной работе вышеуказанные методы были применены для исследования течения двух несмешивающихся, несжимаемых и вязких жидкостей при малых числах Рейнольдса.

### **Литература**

1. *J.E. Pilliod Jr., E.G. Puckett* Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces // *Journal of Computational Physics* 199 (2004) 465–502.
2. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries // *Journal of Computational Physics* 39 (1981) 201-225.

UDC 517.956

Akhmetov B., Amanzholov T.E., Tungatarov M.S., Dzhomartov A.A.

*Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty*

*baha87meh@mail.ru*

## **One- and two-dimensional modeling of the solid to liquid phase change processes in solar thermal energy storages with phase change materials**

The process of solid to liquid phase change of certain materials occur in many industrial or natural processes, and one of the examples is the phase change of heat storage materials, also named as phase change materials (PCMs), during charging and discharging of a latent heat storage. PCMs can absorb large amount of thermal heat without significant volume change during the melting process. Therefore, these features of them are attractive for the application in thermal

energy storage and passive thermal management. Thus, understanding these processes has motivated a large number of analytical, experimental and numerical studies over the last decades. Paraffin is considered as one of the efficient PCM materials for medium temperature latent heat storages. Current paper deals with numerical modeling of solid to liquid phase change of paraffin inside the already designed heat storage container. For the sake of understanding of the nature of the heat transfer process during melting of paraffin waxes, firstly, one dimensional numerical analysis are conducted and results validated by comparing them with analytical ones. Then, the process of phase change is modeled based on the approach validated for one dimensional case. The results show that the two dimensional modeling is numerically expensive and the mathematical model is quite sensitive to the little variations of input parameters. The mathematical model will be developed further based on finite volume methods.

UDC 517.956

Baikonys A., Nysanov E., Nemchenko M.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty*

*anuar@mail.ru*

## **On a mathematical model of unsteady groundwater flow and programming in Matlab**

In this talk we show numerical results on Matlab related to the basic equations of the 2D model of unsteady groundwater flow in the unconfined aquifer with slightly changes of the aquitard surface. Matlab is an integrated numerical analysis package that makes it very easy to implement computational modeling codes. Our numerical methods is based on a first-order accurate Godunov-type finite volume scheme that utilizes Roe's approximate Riemann solver. Like the 1D case, the 2D code is highly simplistic: It is set up to model long groundwater flow action in a square "tank" with a flat bottom and no flow resistance. It wouldn't take much effort to update the model for variable topography and flow resistance. In addition, we also give an analysis of methods of linearization of the basic nonlinear equations of the 2D model of unsteady groundwater flow in the unconfined aquifer with slightly changes of the aquitard surface..

UDC 517.95

Bizhanova G.I.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty*  
*galina\_math@mail.ru*

## **Solution of the problems for the parabolic equations with small parameters in the boundary conditions**

There are studied two problems for the equations of parabolic type with small parameters at the principle terms in the boundary and conjunction conditions. It is established existence, uniqueness of the solutions of the problems in the Hölder spaces, the coercive estimates of the solutions with the constants independent on the small parameters are obtained. The convergence of the solutions of the perturbed problems to the solutions of the unperturbed ones as small parameters go to zero is proved.

There is shown that in these problems the boundary layers are not appeared.

UDC 517.9

Kalmenov Sh.T., Nysanov E., Maken A.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty*  
*alka.maken92@gmail.com*

## **Boundary and spectral properties of hydrodynamic potentials**

In this talk we study some boundary and spectral properties of hydrodynamic potentials. In particular, we present correct boundary value problem for the Stokes system. We show that this boundary value problem has a unique solution in a corresponding Sobolev space, which coincides with the hydrodynamic potential.

Also we consider the spectral geometry questions of the obtained boundary value problem.

### **References**

1. *Tynysbek Sh. Kalmenov, Ernazar Nysanov, Bolys Sabitbek* "On Isoperimetric Inequalities of Riesz Potentials and Applications," *Applied Mathematics*, Vol. 4 No. 7A, 2013, pp. 1-4.
2. *Tynysbek Sh. Kalmenov, Durvudkhan Suragan* Initial-boundary value problems for the wave equation, Vol. 2014 (2014), No. 48, pp. 1-6.

Karjanto N.<sup>1</sup> and van Groesen E.<sup>2</sup><sup>1</sup> *Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*<sup>2</sup> *University of Twente, Enschede, The Netherlands*<sup>1</sup>*natanael.karjanto@nu.edu.kz*

## Variational Methods for Waves on Finite Background

Amplitude amplification in nonlinear dispersive wave equations caused by nonlinear focussing of waves on a finite background is considered using variational formulation approach. A well known mathematical model of nonlinear Schrödinger (NLS) equation is implemented and a displaced phase-amplitude approach is derived from a variational perspective. It is observed that the potential energy in the Hamiltonian depends on the displaced phase only. Furthermore, observing to a particular time-independent phase, the corresponding oscillator equation for the wave signal at each position is autonomous. It turns out that the change of the displaced phase with respect to the position is the only driving mechanism for a large amplitude amplification factor. It is also interesting to remark that the corresponding solutions of the NLS equation in this special case are the well-known breather type of solutions.

### References

1. *van Groesen, E., Andonowati and Karjanto, N.* Displaced phase-amplitude variables for waves on finite background. *Physics Letters A.* 2006. **354**, № 4. P. 312-319.
2. *Karjanto, N. and van Groesen, E.* Derivation of the NLS breather solutions using displaced phase-amplitude variables. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> SEAMS-GMU Conference 2007.* 2008. P. 357-368. <http://arxiv.org/abs/1110.4704>
3. *Karjanto, N. and van Groesen, E.* Mathematical Physics Properties of Waves on Finite Background. In *Lang, S. P. and Bedore, S. H.* editors, *Handbook of Solitons: Research, Technology and Applications.* Hauppauge, New York: Nova Science Publishers, 2009. P. 501-539.

Kharin S.N., Kavokin A.A., Shpadi Yu.R.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modelling MES RK, Kazakhstan, Almaty**kavokin\_alex@yahoo.com*

## Mathematical model of time-dependent capacitance shunted electric arc

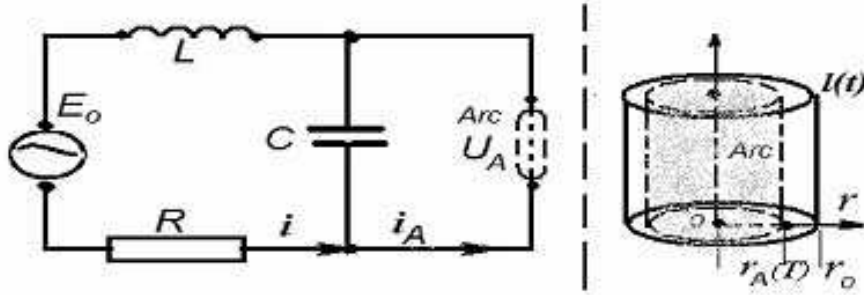
Mathematical model for estimation of current–voltage ( $C - V$ ) characteristics of electrical arc occurred in circuit by  $AC$  contacts opening is investigated. The model also allowed estimating life time and stability of arc and therefore an erosion of contacts, [1]. Scheme of circuit is represented on Figure 1, where:  $E_0$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$  are E.M.Force [V], Resistance [Ohm], Inductance [H] and Capacitance [F] of circuit respectively;  $i$  – total circuit current,  $i_A$  – arc current [A].

The system of differential equations describes the circuit  $C - V$  characteristics is as follow

$$L \frac{di}{dt} + Ri + U = E(t) \equiv e_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$C \frac{dU}{dt} = i - i_A,$$

where  $U = U_e + U_C$ ,  $U_e$  – total voltage of anode and cathode contraction and space charge zones,  $U_A$  – arc voltage.



**Fig. 1.** Schemes of the electric circuit and arc domain (right) used in math model.

The radial distribution of temperature of arc  $T(r, t)$  is calculated using heat equation in the domain  $0 < r < r_0$  including current conducting channel  $0 < r < r_A(t)$  and non-ionized zone  $r_A(t) \leq r < r_0$

$$c_\rho \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\sigma U_A^2}{l^2(t)} - W,$$

where  $c_\rho$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  – specific heat, density, thermal and electric conductivity respectively.  $W$  – heat leakage due to radiation in accordance with the Stefan-Boltzmann's law, [3]:

$$W = P_0 - \varepsilon_0(T - T_{env})^4.$$

The system of above equations is completed with Ohm's law for the arc domain of length  $l(t)$

$$i_A = \frac{2\pi U_A}{l^2(t)} \int_0^{r_A(t)} \sigma(T) \cdot r dr,$$

and proper initial and boundary conditions, [2].

The main peculiarity of this model is dependence of arc free boundary radius  $r_A(T)$  on temperature of gas ionization  $T^*$ :  $T(t, r_A) = T^*$ , and then strong depends of parameters  $(c_\rho, \lambda, \sigma)$  of system equations on temperature. For instance

$$\lambda(T) = \lambda_0(a_0 - T^4) + \frac{\lambda_1}{1 + a_1(T_1 - T)^2} + \frac{\lambda_2}{1 + a_2(T_2 - T)^2},$$

where unknown coefficients  $\lambda_i$ ,  $a_i$ ,  $T_i$ , ( $i = 0, 1, 2$ ), were determined from experimental data contributed from [3], using one of "best fit curve" techniques.

The numerical solution of the above model is obtaining using Runge-Kutta-Merson method with an automatic steps choice for ordinary differential equations of the model, and finite-differences iterative method for non-linear heat equation. Results of several numerical experiments showed in Table 1 enable to estimate depends of maximal temperature and life-time of arc on value of capacity  $C$ .

$C, \mu F$	$T_{max}, K$	$t_A, s$
1	$12 \cdot 10^3$	$7.5 \cdot 10^{-3}$
2	$13 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^{-3}$
10	$14.5 \cdot 10^3$	$2.5 \cdot 10^{-5}$

Table 1. Dependence of maximal temperature ( $T_{max}$ ), arc life-time ( $t_A$ ) on shunting capacitance  $C$

Analysis of solution showed that increasing of the capacitance leads to the rising of oscillation of voltage amplitude up to some threshold when the arc dies out at once after ignition or arcing doesn't arise at all. This phenomena may be connected, [1], with level of liquid-metal bridge energy which is sufficient or not for the transition from metallic arc phase to the gaseous one.

### References

1. *Kharin S.N., Sarsengeldin M.* Influence of Contact Materials on Phenomena in a Short Electrical Arc. //Trans Tech Publications. – Switzerland: Key Engineering Materials. – 2012. – Vol. 510–511. – P. 321–329
2. *Kharin S.N., Kavokin A.A., Spadi Yu.R.* The transient phenomena in capacitance shunted arc. Proc. Int. symp. on electrical contacts. ISECTA'93, Almaty, Kazakhstan, 1993, P.48–52.
3. *Engelsht V.S. et al.* Mathematical modelling of electrical arc. Frunze, Kirgizistan, –1983. –363p.

UDC 621.3

Kharin S.N., Mergenbayeva M.

*Kazakh-British Technical University,  
Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty  
staskharin@yahoo.com*

## Mathematical Model of the Thomson effect in a liquid electrical bridge

F. Llewellyn Jones suggested that Thomson effect may be responsible for the displacement of temperature maximum in molten metal contact bridge from its geometrical center towards anode or cathode dependently on the sign of Thomson coefficient [1]. The assumption of constancy of Thomson coefficient considered in the model [2]-[3] is correct for copper, silver, gold, however for such materials like tungsten, platinum, and molybdenum temperature dependence of Thomson coefficient is very important and can not be averaged. Let us consider a molten bridge between opening contacts consisting of three zones (Fig.1): visible part occupied the domain  $D_1[-l \leq z \leq l, 0 \leq r \leq y(z)]$  and hidden parts  $D_2$  and  $D_4$ . The domains  $D_3$  and  $D_5$  inside anode and cathode are occupied by the solid metal zone. As a rule the Fourier criterion for thermal processes in a bridge is sufficiently large ( $Fo = 10 \div 10^2$ ) to apply quasi-stationary model of temperature field. The axial component of heat transfer due to metallic heat conduction is much greater than radial components due to convection and radiation into ambient gas.



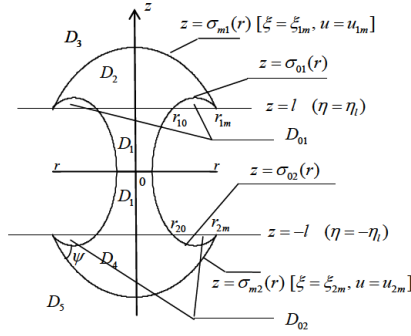


Fig. 1 The structure of molten metal bridge

Therefore the temperature field in the visible part of the bridge can be described by the quasi-stationary heat equation in the axial direction  $z$ . However the current density  $j = \frac{I}{\pi y^2(z)}$  is different for different  $z$ , as well as the density of heat flux. To take into account this fact we use for the temperature of the visible part of a bridge the heat equation for a body with variable cross-section:

$$\frac{1}{y^2(z)} \frac{d}{dz} [y^2(z) \frac{d\theta_1}{dz}] + \frac{\rho_{10}(1 + \alpha_1 \theta_1) I^2}{\pi^2 \lambda_1 y^4(z)} = 0$$

The heat equations for the domains  $D_2 - D_5$  can be written in the form

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} + \frac{\rho_{i0} j^2}{\lambda_i} (1 + \alpha_i \theta_i) = 0, i = 2, 3, 4, 5$$

The boundary conditions on the interfaces  $z = -l$  and  $z = l$  are the conditions of continuity of temperature and heat fluxes. On the interfaces  $z = \sigma_{m1}(r)$  and  $z = \sigma_{m2}(r)$  the temperature should be equal the value of the melting point. These unknown interfaces should be found from the condition of continuity of heat fluxes between liquid and solid zones. Finally the temperature  $\theta_3$  and  $\theta_5$  should vanish at infinity.

The shape of the bridge is unknown a priori and should be found using the principle of minimum of bridge surface tension energy, i.e. the minimum of the functional

$$W(y) = 2\pi l \int_{-l}^l ky(z) \sqrt{1 + y_z^2(z)} dz$$

Solving corresponding Euler-Lagrange equation we can find the shape of the bridge in the form

$$y(z) = \frac{B}{2} \exp\left(\frac{z}{A}\right) + \frac{A^2}{2B} \exp\left(-\frac{z}{A}\right)$$

The unknown constants  $A$  and  $B$  are defined using conditions of surface smoothness at the boundaries between visible and hidden parts of the bridge. Then we introduce instead of  $z$  the new dimensionless variable  $\eta$  by the formula

$$\eta = 2r_0 \int_{-l}^z \frac{dz}{y^2(z)}$$

that enables to get a linear equation for the bridge.

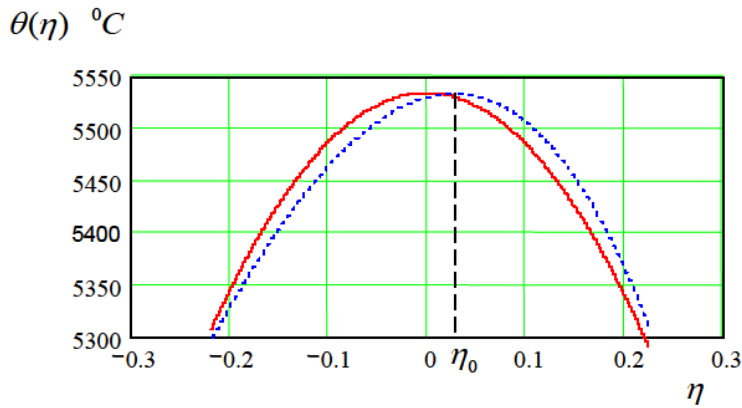


Fig. 2 Displacement of temperature maximum  $\eta = \eta_0$  towards anode due to Thomson effect

The solution of heat equations for hidden parts of the bridge and for solid zones can be obtained by use of ellipsoidal isotherms which enable us to reduce two-dimensional differential equations for radial and axial variables  $(r, z)$  to one dimensional equation for the ellipsoidal coordinate  $\xi$  defined by the equation  $\frac{r^2}{\xi^2 + r_0^2} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1$ , and then simplify equations again by introduction new dimensionless variable  $u = \arctan \xi / r_0$ . To get the solution satisfying the all boundary conditions the problem should be completed by two extra conditions. The first of them is the equality of the volume of bridge visible part  $D_1$  and volumes  $D_{01} + D_{02}$  stretched out of liquid pool on the contact surfaces. The second condition is the given wetting angle  $\psi$  between surfaces  $z = \sigma_{mi}(r)$  and  $z = \sigma_{0i}(r)$ . The analysis of this solution shows that displacement of temperature maximum in the bridge towards anode due to Thomson effect is about 10 % of the bridge length (Fig. 2). It shows a good agreement with experimental results observed by F.Llewelin Jones [1].

### References

1. *Llewelin Jones F.* "Matter Transfer and the Microscopic Molten Metal Bridge". - Swansea: Proc.of the 14<sup>th</sup> International Relay Conference, 1964. - 3-1 – 3-12 pp.
2. *Kharin S.N., Ghorri Q.K, Usman M.* "Significance of Thermoelectric Effects for the Bridge Transfer in Electrical Contacts ". - Islamabad: Proc. INMIC'97 IEEE Conf., 1997. - 9 - 13 pp.
3. *Kharin S.N.* "Temperature Displacement in Electrical Contacts due to Kohler and Thomson effects" . - Lodz, Poland: Proc. 9<sup>th</sup> International Conference on Switching Arc Phenomena (SAP-2001), 2001. - 190-195 pp.

Khariin S.N.<sup>1</sup>, Sagyndykuly Z.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Kazakh-British Technical University,*

<sup>2</sup>*Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty*

*staskharin@yahoo.com, magistr1@outlook.com*

## Mathematical model of welding at closure of electrical contacts

Welding during contact closure occurring due to arcing at the first contact touch after breakdown and explosion of a micro-asperity is weak because of very short arc duration. This micro-welding can be declutched as a rule easily by contact opening force. A more serious problem appears during contact bouncing or blow-open repulsion when arc ignites at opening and continues to burn up to final closure. An occurrence of welding depends on many factors including properties of contact material, structure of contact surface, circuit parameters, kinetic energy of a moving contact etc. However evolution of melting area on the contact surface is the main factor defining the probability of welding. The process of contact melting depends mainly on the dynamics of arc heat flux entering contact, which defines the transient temperature distribution in the contacts during arcing..

The region occupied by arc at contact closure can be considered as a cylindrical disk  $D_A : 0 \leq r \leq r_b(t), 0 \leq z \leq x(t)$  interacting with contact surface, which radius  $r_b(t)$  is much greater than contact gap  $x(t)$  (Fig. 1). This interaction results into phase transformations of contact material and formation of three zones:

1. The zone of evaporated material  $D_b : 0 \leq r \leq r_b(t), 0 \leq z \leq \sigma_b(r, t)$ , the zone of melted material  $D_m : \sigma_b(r, t) \leq z \leq \sigma_m(r, t)$  if  $0 \leq r \leq r_b(t), 0 \leq z \leq \sigma_m(r, t)$  if  $r_b(t) \leq r \leq r_m(t)$

and the solid zone

$D_s : \sigma_m(r, t) \leq z \leq \infty, \text{ if } 0 \leq r \leq r_m(t), 0 \leq z \leq \infty \text{ if } r_m(t) \leq r \leq \infty$

The contact temperature  $T_C(r, z, t)$  can be presented as the sum

$$T_C(r, z, t) = T_J(r, z, t) + T_S(r, z, t) \quad (1)$$

where  $T_J(r, z, t)$  and  $T_S(r, z, t)$  are the temperature components due to volumetric Joule heating and due to surface arc flux heating respectively. The expression for calculating of the first component is given above. It can be shown that the Joule component  $T_J(r, z, t)$  is important at the pre-arcing stage only, and it can be neglected after arc ignition. The expression for the second component can be found similarly in the form

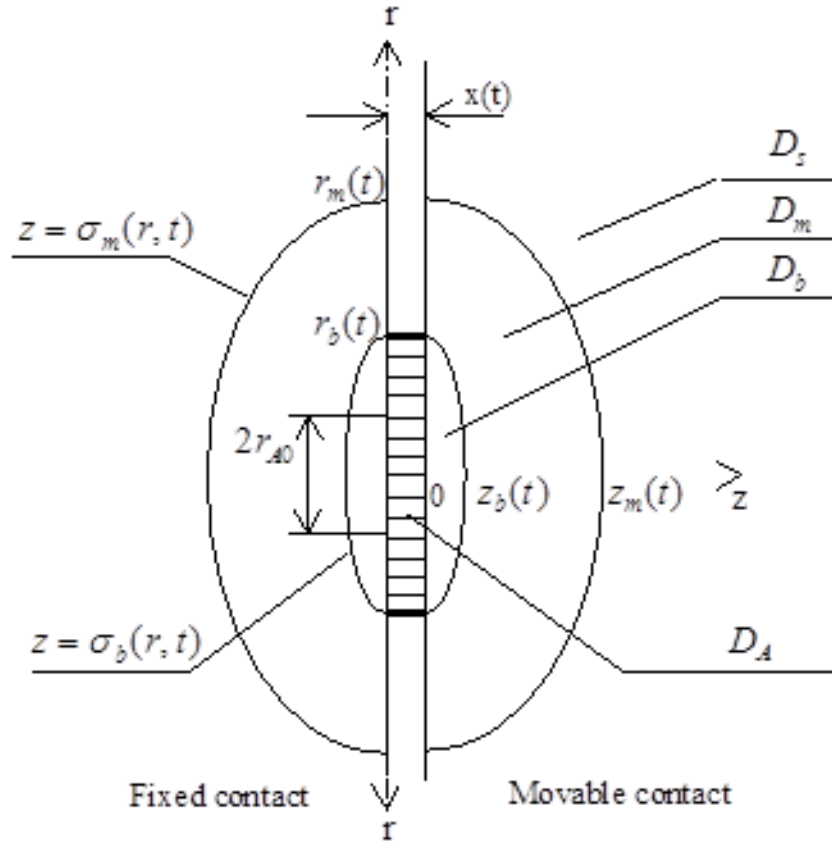
$$T_S(r, z, t) = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty [P_c(r_1, t_1) - P_b(r_1, t_1) - P_m(r_1, t_1)] G(r, r_1, z, t - t_1) r_1 dr_1 \quad (2)$$

Here  $P_c(r, t)$  is the total heat flux (power per unit area) entering the contact surface during arcing,  $P_b(r, t)$  and  $P_m(r, t)$  are portions of this flux consumed for evaporation and melting of contact material, which can be found by the expressions

$$P_b(r, t) = L_b \gamma \frac{\partial \sigma_b(r, t)}{\partial t}, P_m(r, t) = L_m \gamma \frac{\partial \sigma_m(r, t)}{\partial t} \quad (3)$$

where  $L_b$  and  $L_m$  are specific heat for evaporation and melting,  $\gamma$  is density of contact material. It reasonable to assume that the isothermal surfaces  $z = \sigma_b(r, t)$  and  $z = \sigma_m(r, t)$  are ellipsoids of revolution that can be found from the equations

$$\frac{r^2}{r_b(t)^2} + \frac{z^2}{z_b(t)^2} = 1, \frac{r^2}{r_m(t)^2} + \frac{z^2}{z_m(t)^2} = 1,$$



**Fig.1** The arc and contacts geometry: arc region  $D_A$ , evaporated zone  $D_b$ , solid zone  $D_s$

in other words

$$\sigma_b(r, t) = z_b(t) \sqrt{1 - r^2/r_b(t)^2}, \sigma_m(r, t) = z_m(t) \sqrt{1 - r^2/r_m(t)^2} \quad (4)$$

The functions  $r_b(t)$ ,  $z_b(t)$ ,  $r_m(t)$ , and  $z_m(t)$  should be found from the equations

$$T_C(r_b(t), 0, t) = T_b, T_C(0, z_b(t), t) = T_b, T_C(r_m(t), 0, t) = T_m, T_C(0, z_m(t), t) = T_m \quad (5)$$

(A.4.4)

where  $T_m$  is the melting temperature of the contact material.

If the heat fluxes  $P_c(r, t)$ ,  $P_b(r, t)$ ,  $P_m(r, t)$  obeys the normal Gauss's radial distribution

$$P_c(r, t) = P_c(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_A(t)^2}\right), P_b(r, t) = P_b(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_A(t)^2}\right), P_m(r, t) = P_m(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_A(t)^2}\right) \quad (6)$$

then the integral with respect to  $r$  in the formula (2) can be calculated and the expression for the contact temperature becomes more simple form

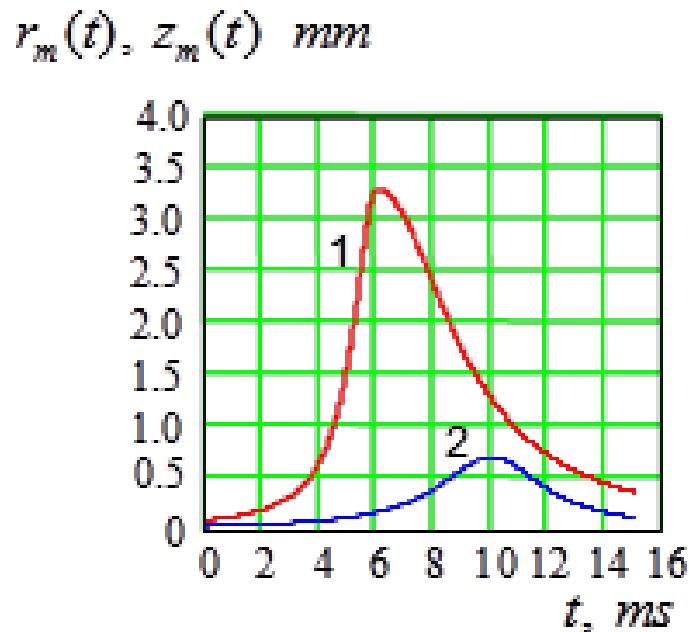
$$T_S(r, z, t) = \frac{a}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{[P_c(t_1) - P_b(t_1) - P_m(t_1)] r_A(t_1)^2}{[r_A(t_1)^2 + 4a^2(t - t_1)] \sqrt{t - t_1}} \exp\left[-\frac{z^2}{4a^2(t - t_1)} - \frac{r^2}{r_A(t_1)^2 + 4a^2(t - t_1)}\right] d\tau \quad (7)$$

The heat flux  $P_c(t)$  should be calculated taking into account positive components due to arc

radiation, electron (or ion) bombardment of anode (cathode) contact surface, inverse electrons from the arc column, and negative components due to power losses for evaporation, radiation, electron emission cooling and heat conduction inside the contact body. The expressions for all these components can be found in the paper [1]. However the model in considered case can be simplified because the information about current, voltage and displacement is available from experiment. Therefore it is more convenient to calculate power generated by arc  $W_A$  directly from the measured values of arc voltage  $U_A(t)$ , arc current  $I_A(t)$  and then arc heat flux entering contact is

$$P_c(t) = \frac{I_A(t) \cdot U_A(t)}{2\pi r_A^2(t)} \quad (8)$$

This expression is the final equation, which enables in the aggregate with other cited above equations to calculate dynamics of contact melting and welding area . It was used for calculation of dynamics of melting zone during blow-open repulsion which has been observed experimentally and described in [2]. Results of calculation at the conditions of [2] are presented in Fig. 2.



**Fig.2** Dynamics of radius and depth of melting zone

One can see that at the time of contact closure  $t=14$  ms the radius of the melted area is  $r_m = 0.5$  mm and its depth is  $z_m = 0.15$  mm. Thus the welding force is  $F_W = 37$  N, that is much greater than used spring force . Experimentally observed welding confirms this result.

#### References

1. *S.N.Kharin* "Mathematical Model of the Short Arc Phenomena at the Initial Stage", Proc. of 43-th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, 20 - 22 Oct., 1997, Philadelphia , USA , pp 289 – 305
2. *S.N. Kharin, H. Nouri, M. Bizjak* "Effect of Vapour Force at the Blow-open Process in Double-break Contacts", IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, March 2009, Vol. 32, № 1, 2009, pp. 180-190

UDC 519.63

Kitapbaev E., Baikonus A.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty*  
*erkin.msu@gmail.com*

## Optimal stopping theory as a part of stochastic control theory

In this talk we study optimal stopping theory as a part of stochastic control theory. We also give a formulation of stochastic control problems and optimal stopping problems related to modern issues of economics and finance. A connection between optimal stopping problems and free-boundary problems from PDE theory is discussed.

### References

1. *Kitapbaev E.* On the Lookback option with fixed strike // Stochastics. - 2014. -V. 86, № 2. -P. 510-526.

UDC 519.63

Nysanov E.A., Beketauov B.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty*  
*suragan@list.ru*

## Mathematical modelling for unsteady groundwater flow

In this talk we study the basic equations of the 2D model of unsteady groundwater flow in the unconfined aquifer with slightly changes of the aquitard surface. We also give an analysis of methods of linearization.

### References

1. *Bear J., Cheng A.H.* Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport. - Basel: Springer, 2010. - 256.

Sandybekova M., Tuimebayeva A.

*Taraz State University after M.Kh. Dulaty, Kazakhstan, Taraz**akner@mail.ru***On the reduction of boundary value problem for a loaded equation to an integral equation****Purpose of the study below.** Let  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ . Consider the following problem:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + \lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=t^{1/2}} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad (2)$$

 $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in C$  – setpoints, which has the following solution:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \int_0^t \int_0^\infty \left[ f(\xi, \tau) - \lambda u_{xx}(\tau^{1/2}, \tau) \right] G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= -\lambda \int_0^t \int_0^\infty u_{xx}(\tau^{1/2}, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (3) \end{aligned}$$

where

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{e^{b(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) \right\}.$$

Find the differentials of both sides of equality twice by  $x$  and suppose  $x = t^{1/2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= -\lambda \int_0^t \frac{\partial^2 u(\tau^{1/2}, \tau)}{\partial x^2} d\tau \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (4) \end{aligned}$$

We introduce the notation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\sqrt{t}} &= \varphi(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau &= f_1(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi &= k(t, \tau). \end{aligned}$$

Then the equation (4) can be written in the form:

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^t k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f_1(t).$$

We compute

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \int_0^\infty \frac{e^{b(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] \right\} d\xi =$$

$$= \frac{2 \cdot e^{b(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-\eta^2} d\eta = e^{b(t-\tau)} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right);$$

Thus

$$k(t, \tau) = -\frac{\sqrt{t} \cdot e^{b(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot \exp \left( -\frac{t}{4(t-\tau)} \right).$$

Problem (1) is reduced to an integral equation

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot \exp \left( -\frac{t}{4(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (5)$$

where  $\mu(t) = e^{-bt}\varphi(t)$ , which will be the subject of further study.

Yermukanova B.N.<sup>1</sup>, Zhexembay L.<sup>2</sup> and Karjanto N.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Department of Economics, School of Humanities and Social Sciences Nazarbayev University, Kazakhstan, Astana*

<sup>1</sup>*binur.yermukanova@nu.edu.kz,*

<sup>2</sup>*laila.zhexembay, natanael.karjanto@nu.edu.kz*

## Boundary value problems in Black-Scholes equation

A well-known model in quantitative finance of Black-Scholes equation will be presented. It deals with pricing of options. In 1977, Myron Scholes together with Fischer Black were awarded a Nobel Prize in economics for the formulation of stock options formula through 'new method of determining the value of derivatives'. This model has significant implications, theoretical and practical, since finance plays a great role in economies around the world. Black-Scholes model is widely used for American options as well as for European options and thus it has a wide variety of applications. The method of separation of variables is implemented to the Black-Scholes equation and the option price depends only on the stock price only, for which it satisfies the Cauchy-Euler equation. By choosing an appropriate Ansatz, an exact solution of the Cauchy-Euler equation, and thus the Black-Scholes equation, is obtained. Depending on the choice of parameter values, the risk-free interest rate and the volatility of the stock, three types of solutions are presented. Furthermore, by imposing various boundary conditions, different set of eigenvalues and their corresponding eigen-functions are also obtained.

### References

1. *Black F. and Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 1973. V. **81**, № 3. P. 637-654.
2. *Bohner M. and Zheng Y.* On analytical solutions of the Black Scholes equation. *Applied Mathematical Letters*. 2009. V. **22**, P. 309-313.
3. *Jarrow R.* In honor of the Nobel Laureates Robert C. Merton and Myron S. Scholes: A partial differential equation that changed the world. *The Journal of Economic Perspectives*. 1999. V. **13**, № 4. P. 229-248.



## 5 Информационные технологии и вычислительная математика

УДК 517.9; 519.6

Акыш А.Ш.

*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

*e-mail: akysh41@mail.ru*

### Метод расщепления для нелинейного уравнения Каца

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Каца [1] относительно функции распределения  $f = f(t, x, v)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{J}(f) - f\mathbf{S}(f); f(0, x, v) = \varphi(x, v); f(t, x, v) = f(t, x + 1, v), \quad (1)$$

$$\mathbf{J}(f) = \nu \int_V \int_{\Sigma} f' f'_1 g(\theta) d\theta dv_1; \quad \mathbf{S}(f) = \nu \int_V \int_{\Sigma} f_1 g(\theta) d\theta dv_1;$$

$t \in [0, T]$ ;  $x \in G \equiv [0, 1]$ ;  $v \in V \equiv (-\infty, +\infty)$ ;  $\theta \in \Sigma \equiv [-\pi, +\pi]$ ;  $g(\theta) = g(-\theta)$  – вероятность столкновения; скорости после столкновения определяются соотношениями:  $v' = v \cos \theta + v_1 \sin \theta$ ;  $v'_1 = -v \sin \theta + v_1 \cos \theta$ ;

$$f = f(t, x, v); f_1 = f(t, x, v_1); f' = f(t, x, v'); f'_1 = f(t, x, v'_1).$$

Начальная функция  $\varphi(x, v)$  такая, что

$$\varphi(x, v) > 0 \wedge \varphi(x, v) \in C(G \times V), \quad \varphi(x, v) = \varphi(x + 1, v).$$

Задача (1) решается методом расщепления из [2]:

$$(f^{n+1/3} - f^n)/\tau = -f^{n+1/3} \mathbf{S}(f_1^{n+1/3}), (f^{n+2/3} - f^{n+1/3})/\tau = \mathbf{J}(f^{n+1/3}), \quad (2)$$

с начальным условием в (1) и

$$(f^{n+1} - f^{n+2/3})/\tau + v(\partial f^{n+1}/\partial x) = 0,$$

с периодическим граничным условием в (1).

### Литература

1. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. - Москва: Наука, 1967. - 176 с.
2. Акыш А.Ш. Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана // Сиб. журн. вычисл. математики/РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск. -2013. -Т. 16. № 2. -С. 123-131. // Numerical Analysis and Application, -2013, vol. 6, № 2, pp. 111-118.

Баканов Г.Б., Дильман Т.Б.

*Кызылординский государственный университет имени Коркыт ата, Республика  
Казахстан, Кызылорда**e-mail: Gbakan58@mail.ru***Об одной задаче интегральной геометрии для некоторого семейства кривых**

Задачи интегральной геометрии состоят в нахождении функции или более сложной величины (дифференциальной формы, тензорного поля и т.п.), определенной на некотором многообразии, через ее интегралы по некоторому семейству подмногообразий меньшей размерности.

Новый период развития интегральной геометрии начался в 1966 году. Впервые М.М.Лаврентьевым и В.Г.Романовым [1] было доказано, что ряд обратных задач для гиперболических уравнений сводятся к задачам интегральной геометрии. В дальнейшем В.Г.Романовым были получены теоремы единственности и оценки условной устойчивости решения задач интегральной геометрии для довольно общего семейства кривых на плоскости, инвариантного относительно группы вращения, а также для семейств кривых и гиперповерхностей в  $n$ -мерном пространстве, инвариантных относительно параллельных переносов этих объектов вдоль некоторой плоскости.

В дальнейшем теория задач интегральной геометрии получила развитие в работах Ю.Е.Аниконова, А.Л.Бухгейма, В.Р.Кирейтова, М.В.Клибанова, А.Х.Амирова, В.А.Шарафутдинова и других авторов [1]. В данной работе рассматривается следующий класс задач интегральной геометрии: о восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями (задачи интерпретации данных сейсморазведки, электроразведки, акустики и задачи компьютерной томографии).

В данной работе рассматривается следующая задача интегральной геометрии: в области  $0 \leq z \leq H$  трехмерного пространства  $x, y, z$  задано семейство плоских кривых  $L(x, y, z, \alpha)$  типа параболы с вершинами в точках  $(x, y, z)$  и опирающихся двумя концами на плоскость  $z = 0$ . Плоскости, содержащие кривые из  $L(x, y, z, \alpha)$ , предполагаются перпендикулярными плоскости  $z = 0$ . Пусть  $(\xi_k, \eta_k, \zeta)$  - текущие координаты кривой из семейства  $L(x, y, z, \alpha)$ :

$$\begin{aligned}\xi_k &= x + (-1)^k \sqrt{z - \zeta} [1 + \phi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)] \cos \alpha, \\ \eta_k &= y + (-1)^k \sqrt{z - \zeta} [1 + \phi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)] \sin \alpha, \quad 0 \leq \zeta \leq z.\end{aligned}$$

По заданной функции  $f(x, y, z, \alpha)$  из уравнения

$$f(x, y, z, \alpha) = \int_0^{r(x, y, z, \alpha)} \sum_{k=1}^2 u(\xi_k, \eta_k, \zeta) d\zeta$$

нужно определить функцию  $u(x, y, z)$ . Здесь  $r = r(x, y, z, \zeta, \alpha) = \sqrt{z - \zeta} [1 + \phi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)]$  означает длину проекции кривой из заданного семейства на плоскости  $z = 0$ . Аналогичная постановка задачи интегральной геометрии, когда кривые инвариантны к сдвигу по переменным  $x$  и  $y$ , исследована в работе [2]. В данной работе рассматриваемые кривые инвариантны к сдвигу лишь по переменной  $z$ .

Доказано следующая теорема единственности решения.

**Теорема 1.** Пусть функция  $\phi(x, y, \tau, \alpha)$  трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным и удовлетворяет условиям

$$\phi(x, y, -\tau, \alpha) = \phi(x, y, \tau, \alpha), \phi(x, y, 0, \alpha) = 0,$$

$$\|\tau_1\phi(x, y, \tau_1, \alpha) - \tau_2\phi(x, y, \tau_2, \alpha)\|_C \leq q\|\tau_1 - \tau_2\|_C, q < 1.$$

Тогда решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в достаточной малой области в классе финитных функций  $u(x, y, z)$  с носителем  $\Omega = \{(x, y)\} \subset R^2$ , принадлежащих  $L_2(\Omega)$  по  $x, y$ , а по переменной  $z$  удовлетворяющей условию  $|u(x, y, z)| \leq Me^{az}$ , если  $z \geq 0$ ;  $u(x, y, z) \equiv 0$ , если  $z < 0$ , постоянные  $M > 0, a > 0$ .

### Литература

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.:Наука, 1980.-286 с.
2. Алексеев А.А. Об одной задаче интегральной геометрии в трехмерном пространстве // Единственность, устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики и анализа. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.- с. 3-15.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.:1984.-296 с.
4. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. - М.:Физматгиз, 1959.-232 с.

УДК 517.988.68

Баканов Г.Б., Турмаганбет К.А.

*Кызылординский государственный университет имени Коркыт ата, Республика  
Казахстан, Кызылорда*

*e-mail: Gbakan58@mail.ru, with\_gold\_heart@inbox.ru*

### Необходимое и достаточное условие существования решения одномерной дискретной обратной задачи

В работе [1] показано, что одномерная обратная задача геоэлектрики в квазистационарном приближении сводится к следующей обратной задаче: определить непрерывную функцию  $Q(x)$  из соотношений

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - Q(x)U, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$U(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \delta(x), \quad x \in R \quad (2)$$

$$U(0, t) = g(t), \quad \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Вводя функцию  $V(x, t) = \partial \bar{U} / \partial t$ , рассмотрим следующую обратную задачу: найти непрерывную функцию  $Q(x)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - Q(x)V, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$V(x, 0) = \delta(x), \quad \frac{\partial V}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in R, \quad (5)$$

$$V(0, t) = \frac{df}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Обобщенное решение задачи Коши (4)-(5) имеет следующий вид [2]

$$V(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \tilde{V}(x, t), \quad (7)$$

$$V(x, t) \equiv 0, \quad 0 < t < |x|. \quad (8)$$

Тогда из (7)-(8) следует, что функция  $\tilde{V}(x, t)$  удовлетворяет следующим соотношениям

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} - Q(x) \tilde{V}(x, t) - \frac{1}{2} Q(x) [\delta(x+t) + \delta(x-t)], \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\tilde{V}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in R \quad (10)$$

$$\tilde{V}(0, t) = \frac{df}{dt}, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Пусть  $T$  – положительное фиксированное число,  $N > 2$  – произвольное натуральное число и  $h = T/N$ . Обозначим

$$\tilde{v}_i^k = \tilde{v}(ih, kh), \quad q_i = q(ih), \quad f^k = f(kh).$$

Пусть

$$\tilde{f}_0^k = f_0^k - \delta_k^h,$$

где  $\delta_k^h$  – дискретный аналог дельта - функции Дирака:

$$\delta_k^h = \begin{cases} \frac{1}{h}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad f_0^k = \begin{cases} \frac{1}{h}, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1 \\ \frac{f^{|k|+1} - f^{|k|-1}}{2h}, & k = \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Поставим следующую дискретную обратную задачу: найти сеточную функцию  $q_i$  из соотношений

$$\tilde{v}_{i\bar{i}} = \tilde{v}_{x\bar{x}} - q_i \tilde{v}_i^k - \frac{1}{2} q_i (\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h), \quad k \geq 1, \quad i \in Z, \quad (12)$$

$$\tilde{v}_i^0 = 0, \quad \tilde{v}_i^1 = 0, \quad i \in Z, \quad (13)$$

$$\tilde{v}_0^0 = 0, \quad \tilde{v}_0^1 = 0, \quad \tilde{v}_0^k = \tilde{f}_0^k, \quad k > 1. \quad (14)$$

**Теорема 2.** *Предположим, что решение дискретной обратной задачи (12) - (14) существует. Тогда для каждого  $i = 2, 3, \dots, N$  система уравнений*

$$\tilde{\omega}_i^k + h \sum_{j=1}^{i-1} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0^{k-j} & \tilde{f}_0^{k+j} \\ t & t \end{bmatrix} \tilde{\omega}_i^j + h \tilde{f}_0^k \tilde{\omega}_i^0 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0^{k-i} & \tilde{f}_0^{k+i} \\ t & t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq k < i, \quad i = \overline{2, N}$$

однозначно разрешима.

**Теорема 3.** *Если для каждого  $i = 2, 3, \dots, N$  система уравнений*

$$\tilde{\omega}_i^k + h \sum_{j=-i+1}^{i-1} \tilde{\omega}_i^j \tilde{f}_0^{k-j} = -\frac{1}{2} [\tilde{f}_0^{k-i} + \tilde{f}_0^{k+i}], \quad 0 \leq |k| < i$$

однозначно разрешима относительно  $\tilde{\omega}_i^k$ , то решение дискретной обратной задачи (12)-(14) существует и единственно.

В теоремах 1 и 2 сеточная функция  $\tilde{\omega}_i^k$  определяется по формуле

$$\tilde{\omega}_i^k = \omega_i^k - \frac{1}{2}(\delta_{k+i}^h + \delta_{k-i}^h),$$

а сеточная функция  $\omega_i^k$  является решением следующей вспомогательной задачи:

$$\frac{\omega_i^{k+1} - 2\omega_i^k + \omega_i^{k-1}}{h^2} = \frac{\omega_{i+1}^k - 2\omega_i^k + \omega_{i-1}^k}{h^2} - q_i \omega_i^k, \quad i \geq 1, \quad k \in Z$$

$$\omega_0^k = \delta_k^h, \quad \omega_1^k = \frac{1}{2}(\delta_{k+1}^h + \delta_{k-1}^h) + \frac{h^2}{2} q_0 \delta_k^h, \quad k \in Z$$

### Литература

1. Романов В. Г., Кабанихин С. И. Обратные задачи геоэлектрики. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
2. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
4. Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 167 с.

УДК 004.056.5

Бияшев Р.Г., Нысанбаева С.Е., Бегимбаева Е.Е.

*Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,  
Алматы, Казахстан*

*e-mail: brg@ipic.kz, snyssanbayeva@gmail.com, enlik\_89@mail.ru*

## Модификация схемы цифровой подписи DSA

Одним из способов повышения криптостойкости алгоритмов шифрования и цифровой подписи (ЦП) является увеличение размеров общесистемных параметров для этих алгоритмов. На сегодняшний день рассмотрены различные предложения и модели криптографических систем, в частности с открытым ключом. Они имеют практическую значимость.

В докладе представляется модифицированная система цифровой подписи, построенная на базе алгоритма DSA и непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС). В известных в литературе моделях цифровой подписи длина модуля преобразования составляет порядка 1024 бит, вместе с ним увеличивается длина ключа до такой же длины. В связи с этим увеличивается вычислительная сложность криптографических преобразований, но уменьшается скорость вычислений. Решение задачи повышения скорости вычисления и уменьшения длины ключа возможно при разработке модификации схемы ЦП с открытым ключом на базе НПСС.

Система счисления в остаточных классах или полиномиальные системы счисления в остаточных классах (полиномиальных СОК), модулярная арифметика являются синонимами НПСС. Отличие НПСС от классических СОК состоит в том, что в НПСС основаниями выбираются неприводимые многочлены над полем  $GF(2)$ , т.е. с двоичными коэффициентами. В работе [1] разработаны арифметика НПСС с полиномиальными

основаниями и ее приложения к задачам повышения достоверности. Определены правила выполнения арифметических операций в НПСС и восстановления многочлена по его остаткам.

Вначале производится модификация алгоритма DSA, в которой вместо двух модулей используется один модуль (простое число)  $p$ . Затем разрабатывается модифицированная схема цифровой подписи на базе НПСС. Использование НПСС позволяет уменьшить длину ключей, повысить стойкость и эффективность непозиционных криптографических алгоритмов [2]. Формируется НПСС с рабочими основаниями  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$ , степени которых равны соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_S$ . В соответствии с китайской теоремой об остатках все эти основания должны быть различными, в том числе и тогда, когда они имеют одну степень. Основной диапазон в НПСС определяется многочленом степени  $m$ , равным произведению всех рабочих оснований. Степень  $m$  есть сумма степеней  $m_i$  рабочих оснований, где  $i = 1, 2, \dots, S$ . Для каждого из рабочих оснований выбираются соответствующие порождающие полиномы  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_S(x)$ . Порождающие полиномы являются аналогом примитивных элементов в конечном поле по модулю простого числа. Секретный ключ отправителя  $b$  выбирается из диапазона  $[1, 2^m]$ . Вычисляется значение открытого ключа  $\beta(x) : \beta(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_S(x))$ . В алгоритме DSA процедура вычисления хэш-значения по алгоритму SHA, в модифицированном алгоритме ЦП на базе НПСС будет использована процедура вычисления хэш-значения в НПСС. Полиномы  $\gamma(x)$  и  $\sigma(x)$  представляются в непозиционном виде как последовательности вычетов от их деления на основания НПСС:

$$\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \dots, \gamma_S(x)), \sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_S(x)).$$

Цифровой подписью для сообщения  $M$  является пара многочленов  $(\gamma(x), \sigma(x))$ .

Для разработанного модифицированного алгоритма формирования ЦП разработан соответствующий ему алгоритм проверки цифровой подписи [3].

Модификация алгоритма асимметричной системы цифровой подписи с использованием НПСС позволит повысить криптостойкость алгоритма и увеличить эффективность вычислений. Полученные результаты компьютерного моделирования модифицированных криптосистем на базе НПСС позволят выработать рекомендации по их надежному использованию и генерации полных секретных ключей.

### Литература

1. *Бияшев Р.Г.* Разработка и исследование методов сквозного повышения достоверности в системах обмена данными распределенных АСУ: Дис. на соискание уч. степ. докт. тех. наук. - М., 1985. - 328 с.
2. *Bijashev R.G., Nyssanbayeva S.E.* Algorithm for Creation a Digital Signature with Error Detection and Correction // Cybernetics and Systems Analysis. - 2012. № 4. -PP. 489-497
3. *FIPS FIPS PUB 186, Digital Signature Standard (DSS).*, 2009. - 119 p.

Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е., Капалова Н.А., Хакимов Р.А.

*Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК,  
Алматы, Казахстан*

*e-mail: brg@ipic.kz, sultasha1@mail.ru, kapalova@ipic.kz, relessar@gmail.com*

## Моделирование программной реализации непозиционного алгоритма шифрования

Описывается модель программной реализации системы симметричного шифрования с заданной криптостойкостью. Эта криптосистема разработана на базе непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС) и предназначена для использования в инфокоммуникационных системах при хранении и передаче информации [1-4]. Синонимы НПСС - модулярная арифметика, системы счисления в остаточных классах (СОК). В НПСС основания - это неприводимые многочлены над полем  $GF(2)$ . Система шифрования включает два алгоритма - зашифрования (получения криптограммы) и расшифрования. Суть разработанной непозиционной криптосистемы состоит в следующем. При шифровании открытого электронного сообщения (или его блока) заданной длины  $N$  бит формируется вначале НПСС. Для этого из множества всех неприводимых многочленов степени не выше значения  $N$  выбираются полиномиальные основания

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x). \quad (1)$$

над полем  $GF(2)$  степени  $m_1, m_2, \dots, m_S$  соответственно. Все эти основания должны быть различными. Основным рабочим диапазоном этой непозиционной системы является многочлен  $P_S(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_S(x)$  степени  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_S$ . В НПСС любой многочлен  $F(x)$  степени меньше  $m$  имеет единственное представление в виде последовательности остатков (вычетов) от его деления на основания (1):

$$F(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_S(x)). \quad (2)$$

где  $F(x) \equiv \alpha_i(x) \pmod{p_i(x)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ . Позиционное представление этого многочлена при хранении и передаче информации восстанавливается по его непозиционному виду (2)[3].

Затем сообщение длины  $N$  бит интерпретируется как последовательность остатков от деления некоторого многочлена (который обозначим также  $F(x)$ ) соответственно на основания НПСС (1) степени не выше  $N$ . Эти основания выбираются из числа всех неприводимых полиномов степени от  $m_1$  до  $m_S$  из условия выполнения уравнения:

$$k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_S m_S = N. \quad (3)$$

В уравнении (3) число оснований степени  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$  определяются неизвестными коэффициентами  $k_i$ ,  $0 \leq k_i \leq n_i$ ,  $n_i$  - количество всех неприводимых многочленов степени  $m_i$ ,  $0 \leq m_i \leq N$ ,  $S = k_1 + k_2 + \dots + k_S$  - число всех выбранных оснований НПСС. Каждое решение (3) задает одну систему оснований НПСС, в которой учитывается также порядок расположения оснований.

В предложенном алгоритме шифрования процедуре зашифрования предшествуют этапы формирования НПСС и генерации ключа (псевдослучайной последовательности - ПСП) длины  $N$  бит. Затем шифруемое сообщение интерпретируется в виде (2). ПСП также интерпретируется как последовательность  $G(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_S(x))$ ,  $G(x) \equiv \beta_i(x) \pmod{p_i(x)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ . Тогда криптограмма рассматривается как некоторая функция  $H(F(x), G(x))$ :  $H(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_S(x))$ , где  $H(x) \equiv \omega_i(x) \pmod{p_i(x)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ . Секретность нетрадиционного алгоритма шифрования характеризуется полным ключом, который определяется всевозможными вариантами

выбора оснований НПСС и псевдослучайной последовательности (ключа) длины  $N$  бит. В системе шифрования для получения криптограммы и ее расшифрования используется непозиционный метод [4]. Элементы последовательности вычетов  $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_S(x)$  в криптограмме - это наименьшими остатками от деления произведений  $\alpha_i(x)\beta_i(x)$  на соответственные рабочие основания  $p_i(x)$ , т.е. в качестве функции  $H(F(x), G(x))$  используется операция умножения:  $\alpha_i(x)\beta_i(x) \equiv \omega_i(x) \pmod{p_i(x)}, i = 1, 2, \dots, S$ .

Таким образом, в рассмотренной модели алгоритма шифрования полным ключом является выбранная система рабочих оснований  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$ , ключ  $G(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_S(x))$  и инверсный к нему ключ для расшифрования  $G^{-1} = (\beta_1^{-1}(x), \beta_2^{-1}(x), \dots, \beta_S^{-1}(x))$ . Криптостойкость системы шифрования для сообщения заданной длины  $N$  бит определяется секретностью полных ключей. Получена формула криптостойкости.

Исследование криптоалгоритма показало, что применение полиномиальной СОК с двоичными коэффициентами позволяет существенно повысить эффективность шифрования за счет распараллеливания вычислительных процедур по каждому из оснований НПСС и специфики арифметики систем счисления в остаточных классах. Для программной реализации этой системы шифрования предложена модель, которая состоит из 2-х блоков: формирования полных секретных ключей шифрования и системы шифрования электронных сообщений с заданной криптостойкостью.

В 1-м блоке реализуются процессы генерации и хранения полных ключей для зашифрования и расшифрования. В нем основными являются следующие процедуры: 1. вычисление и хранение неприводимых многочленов; 2. выбор и хранение систем оснований для электронных сообщений различной длины; 3. вычисление псевдослучайной последовательности с использованием алгоритма генерации ПСП; 4. формирование из полученной ПСП ключей  $G(x)$  разной длины для реализации алгоритма шифрования и их хранение; 5. вычисление и хранение ключей  $G^{-1}(x)$ , инверсных к  $G(x)$ ; 6. запись в базу данных (БД) полных ключей - конкретных систем оснований, ключей  $G(x)$  и  $G^{-1}(x)$ ; 7. вычисление значений криптостойкости по полным ключам систем шифрования и их запись в БД полных ключей. Во 2-м блоке основными процедурами являются: выбор полного ключа из базы данных по заданной криптостойкости; зашифрование сообщения заданной длины из  $N$  бит; расшифрование криптограммы. Разработан комплекс программ, реализующий указанные процедуры обоих блоков. В блоке полных ключей созданы базы данных неприводимых многочленов с двоичными коэффициентами и секретных ключей, т.к. полный ключ состоит из стандартного секретного ключа (сгенерированной ПСП).

Представленные научно-исследовательские работы выполнены в рамках грантового финансирования Министерства образования и науки Республики Казахстан.

### Литература

1. Акушский, И.Я., Юдицкий. Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. - М.: Советское радио, 1968. - 439 с.
2. Бияшев Р.Г. Разработка и исследование методов сквозного повышения достоверности в системах обмена данными распределенных АСУ: Дис. на соискание уч. степ. докт. тех. наук. - М., 1985. - 328 с.
3. Бияшев Р.Г., Нысанбаева С.Е. Алгоритм формирования электронной цифровой подписи с возможностью обнаружения и исправления ошибки // Кибернетика и системный анализ. - 2012. - Т. 48, № 4. - С. 14-23.
4. Нысанбаев Р.К. Криптографический метод на основе полиномиальных оснований



УДК 519.62.64

Даирбаева Г.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы

lazarat.dairbayeva@mail.ru

## Численное решение обратной задачи для уравнения Гельмгольца

В данной работе предложен метод продолжения решения уравнения Гельмгольца в зону недоступности методом, основанном на решении специальным образом сформулированной обратной задачи. Предложенный метод позволяет "просвечивать" акустическим способом различные объекты. В качестве модельных примеров рассмотрены объекты прямоугольной формы. Предполагается, что на границе или внутри объекта располагаются излучающая и приемная антенны, а на одной из границ области имеется возможность проводить дополнительные измерения. В результате решения задачи продолжения удастся восстановить значение решения уравнения Гельмгольца в зоне недоступности. Решение задачи продолжения осуществляется путем замены этой задачи на некоторую специальную обратную задачу, которая численно решается на основе сочетания метода конечных элементов [1] и метода оптимизации [2].

**Постановка задачи.** Рассмотрим волновое уравнение в области  $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ , где  $\Omega \subset R^2 = \{(x, y)\}$ :

$$\varepsilon v_{tt} = \Delta v - j^c,$$

где  $\varepsilon > 0$ . Пусть функции  $v, j^c$  допускают разделение переменных:

$$v(x, y, t) = u(x, y)T(t), \quad j^c(x, y, t) = f_1(x, y)T(t),$$

и положим  $T(t) = e^{i\omega t}$ .

Сделав преобразование  $v = ue^{i\omega t}$ , получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1.$$

где  $\omega_1 = \varepsilon\omega^2$ .

В области  $\Omega = (-b, b) \times (-b, b)$  рассмотрим начально-краевую задачу

$$\Delta u + \omega_1 u = f_1, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(-b, y) = f(y), \quad y \in (-b, b), \quad (2)$$

$$u_x(-b, y) = 0, \quad y \in (-b, b), \quad (3)$$

$$u(x, -b) = u(x, b) = 0, \quad x \in (-b, b), \quad (4)$$

где  $f_1(x, y) = \theta(a - |x|)\theta(a - |y|)$  при  $|x| \leq a, |y| \leq a$  - источник, расположенный в центре области  $\Omega$ . Задача (1)-(4) является некорректной, например, при  $\omega_1 = 0$  хорошо известен пример Адамара.

Введем обозначения для подобластей области  $\bar{\Omega}$

$$G_1 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : -b \leq x \leq -d, \quad -b \leq y \leq b\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : -d \leq x \leq d, \quad -b \leq y \leq b\},$$

$$G_3^+ = \{(x, y) \in \Omega : -a \leq x \leq a, \quad a \leq y \leq c\},$$

$$G_3^- = \{(x, y) \in \Omega : -a \leq x \leq a, \quad -c \leq y \leq -a\},$$

$$G_3 = G_3^+ \cup G_3^-,$$

$$G_4 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} : d \leq x \leq b, \quad -b \leq y \leq b\}.$$

Здесь  $G_3^+, G_3^-$  являются антеннами.

Диэлектрическая проницаемость в антеннах принимает следующие значения

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } (x, y) \in G_3, \\ \varepsilon_2, & \text{если } (x, y) \in G_2 \setminus G_3, \\ \varepsilon_3, & \text{если } (x, y) \in G_1 \cup G_4. \end{cases}$$

На решение задачи (1)-(4) наложим условия склейки

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 u_x(a-0, y) &= \varepsilon_2 u_x(a+0, y), & y \in [a, c] \cup [-c, a], \\ \varepsilon_2 u_x(-a-0, y) &= \varepsilon_1 u_x(-a+0, y), & y \in [a, c] \cup [-c, a], \\ \varepsilon_1 u_x(x, c-0) &= \varepsilon_2 u_x(x, c+0), & x \in [-a, a], \\ \varepsilon_2 u_x(x, -c-0) &= \varepsilon_1 u_x(x, -c+0), & x \in [-a, a], \\ \varepsilon_3 u_x(-d-0, y) &= \varepsilon_2 u_x(-d+0, y), & y \in [-b, b], \\ \varepsilon_2 u_x(d-0, y) &= \varepsilon_3 u_x(d+0, y), & y \in [-b, b], \end{aligned} \quad (5)$$

#### Литература

1. *Larry J. Segerlind* Applied finite element analysis. - New York: United States Copyright, 1984. - 411 p.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.

УДК 025.4.03; 002.6:004.65

Дарибаев Б.С., Ахмед-Заки Д.Ж., Иманкулов Т.С.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*e-mail: beimbet.daribaev@gmail.com*

### Высокопроизводительные вычисления на мобильных платформах

В последнее время развитие мобильных технологий является одним из самых распространенных сегментов мировой промышленности и, как следствие, эти технологии развиваются с огромной скоростью. Мобильные процессоры представляют собой полноценные вычислительные единицы, которые могут быть использованы как в качестве дополнительных потоков для вычислительных кластеров, так и в одном блоке каждая нить будет работать только с разделяемой памятью, известно, что у разделяемой памяти очень высокая пропускная способность, и здесь не надо каждый раз обращаться к глобальной памяти. Это дает ощутимую производительность. В оптимизированном параллельном алгоритме для вычисления выходного массива функция ядра объявляет временной массив в разделяемой памяти, и устанавливает его значение со значением входного массива и, в дополнение к этому, устанавливает граничные значения из соседних блоков. И тогда при вычислении уравнения каждый раз вызывает входной массив не из глобальной памяти, а из разделяемой памяти. За счет высокой пропускной способности разделяемой памяти, ускоряется время расчета программы. При получении граничных значений из соседних блоков, нужно правильно подобрать индексы для того, чтобы работать с правильными данными. для самостоятельного расчета задач, требующих относительно малых ресурсов. Часто в производстве появляется необходимость для запуска задачи в оперативном режиме для внесения изменений в рабочей системе. Такая необходимость может возникнуть в различных областях. Данная статья описывает идею использования графического процессора (GPU) мобильного устройства для вычислительных целей.

Использование мобильных технологий для расчетов обусловлено увеличением вычислительных возможностей и простоты использования для малых задач в отсутствие доступа к традиционным вычислительным мощностям. На стадии разработки была использована задача несмешивающегося вытеснения нефти (модель Баклея-Леверетта). Для распараллеливания на видеокарте была использована технология CUDA (Compute Unified Device Architecture) разработанная компанией NVIDIA [1]. Данная технология обеспечивает платформу для параллельных вычислений и модель программирования для распараллеливания с использованием любой современной видеокарты NVIDIA. Взаимодействие устройства и программного обеспечения, разработанных одним производителем обеспечивает высокую производительность распараллеливания на GPU. До прошлого года на мобильных устройствах было невозможно запускать приложения с применением технологии CUDA. Именно в 2014 году был представлен Nvidia Tegra K1 - первый мобильный процессор, поддерживающий технологию CUDA. Представленная программа была разработана и апробирована на Xiaomi MiPad – первом мобильном устройстве, работающем на данном процессоре. Для сравнения результатов на персональном компьютере используется видеокарта NVIDIA GeForce GTX 550Ti, обеспечивающей скорость вычислений 691 GFLOPS.

При параллельном алгоритме с использованием технологии CUDA сетка разбивается на блоки, где сами блоки имеют несколько нитей, и каждая нить вычисляет один узел, то каждый блок может копировать данные в разделяемую память, после чего каждый узел отдельного блока выполняет расчет и сохраняет рассчитанные данные в глобальную память. Для расчета в каждой подобласти, нужно использовать данные из соседней подобласти, т.е. нужно скопировать граничные данные из глобальной памяти [2].

До появления процессора NVIDIA Tegra K1 на мобильных устройствах невозможно было запустить программу на больших расчетных сетках. Идея создания параллельных программ на мобильных устройствах - показать гидродинамический расчет всегда и везде, при этом за малое количество времени. Эту идею можно развивать до распределения задач на нескольких мобильных устройствах по беспроводной или иной сети. Во время тестирования поставленной задачи, произведены сравнения результаты расчетов последовательной и параллельной программы на мобильном устройстве и персональном компьютере. Результаты тестирования показали, что, для сетки с размером 128x128x128 время вычисления параллельного алгоритма на персональном компьютере равна 21.07 секунд, а на мобильном устройстве 42.845 секунд (Таблица 1).

Table 1: Время расчета (сек.) вычисления давления в модели Баклея-Леверетта на разных сетках и устройствах (размер блока 8x8x8)

Протестированные алгоритмы	16x16x16	32x32x32	64x64x64	128x128x128
Параллельный алгоритм (персональный компьютер)	0,010	0,150	2,229	21,070
Параллельный алгоритм (мобильное устройство)	0,177	0,802	5,625	42,845
Последовательный алгоритм (персональный компьютер)	0,042	1,125	19,198	185,611

Сравнивая соотношение времени расчета на мобильных устройствах и персональном компьютере, при увеличении размера сетки, их соотношение уменьшается (Рисунок 1).

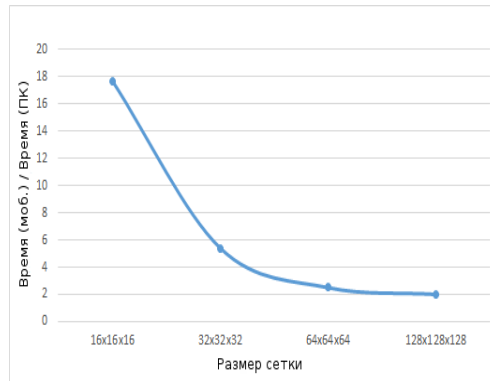


Figure 1: Соотношение времени расчета на мобильном устройстве и персональном компьютере

В статье приведены результаты тестирования параллельного численного решения задачи трехмерного случая модели Баклея-Левеверетта с использованием технологии CUDA на мобильных устройствах. С помощью этих тестов можно сделать множество выводов. Прежде всего, как уже было сказано ранее, мобильные устройства превращаются в значительные вычислительные мощности. Несмотря на то, что представленная работа направлена на демонстрацию одного отдельного приложений ничего не мешает представить аналогичное приложение, работающее на нескольких устройствах и использующее сеть для обмена данными. Во введении было упомянуто существование подобных систем и представленные результаты позволяют сделать, по крайней мере, первичные выводы об эффективности такой системы. А именно эффективность распараллеливания на GPU по сравнению с одним процессором дает хорошие предпосылки на высокую производительность гетерогенного распараллеливания с использованием графических процессоров мобильных устройств. Здесь под гетерогенным распараллеливанием понимается распараллеливание, использующее принципы и CPU (распределения данных между устройствами) и GPU (обработка данных на одной) распараллеливания [3].

В некоторых случаях увеличение скорости сравнимо с производительностью аналогичной программы на видеокарте персонального компьютера, что, в свою очередь, доказывает, что мобильные технологии в настоящее время являются самостоятельными вычислительными мощностями. Эта работа является первым шагом на пути к реализации функциональных возможностей, которые дадут специалистам возможности решить целый ряд задач в любых условиях на мобильных платформах.

### Литература

1. *Sanders J., Kandrot E.* CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming. – 2010. – 312 p.
2. *Иноземцева Н.Г., Перепёлкин Е.Е., Садовников Б.И.* Оптимизация алгоритмов задач математической физики для графических процессоров. – 2012. – 240 с.
3. *Wilt N.* CUDA Handbook: A Comprehensive Guide to GPU Programming // The Paperback. – 2013. – 528 p.

Иманбаев К.С., Биярова А.О., Махсут Г.

*Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан**e-mail: imanbaev@mail.ru*

## Обучение нейронных сетей при решении модельного уравнения в частных производных

При решении многих задач, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных, используются приближенные методы, например, метод Галеркина [2]. Одним из таких подходов приближения решения являются нейронные сети [3].

Целью данной работы является исследование особенности обучения нейронных сетей при решении модельного уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + b \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = f(t, x), (t, x) \in Q_T = (0, T) \times G, G = (0, 1), \quad (1)$$

$$b = \text{const} > 0,$$

с начальными и граничными условиями

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), x \in \bar{G}; u(t, x)|_{x=0} = \varphi(t), t \in [0, T]. \quad (2)$$

Для построения нейронных сетей используем радиально- базисные функций. Основным моментом идеи использования радиально- базисных функций при решении задач является аппроксимация решения с помощью функций специального вида, зависящих от расстояния. Одними из таких функций являются радиально- базисные функции Гауссовского типа, основным свойством которых являются принятие ненулевых значений только вокруг определенного центра имеющего локальный характер.

Радиально-базисные нейронные сети имеют следующие параметры сети: веса, центры и ширина. Эти параметры позволяют обеспечивать более простое отображение характеристик моделируемого процесса.

Для обучения нейронных сетей при решении модельного уравнения в частных производных можно использовать бессеточные схемы и методы использующие конечно-разностные аппроксимации уравнения. В нашей работе используется бессеточный метод в котором расположение нейронов и контрольных точек, где допускается их нахождения в произвольных точках области, где ищется решение или даже вне такой области. Радиально-базисная нейронная сеть представляет собой сеть с одним скрытым слоем. Свойство скрытого слоя определяется преобразованием входного вектора с использованием радиально-базисных функций. В общем случае также могут использоваться радиально-базисные функции. В качестве радиально-базисных функции будут использованы Гауссиан, который имеет вид для  $i$ -го нейрона:

$$\varphi_i(x) = \exp(-r_i^2/a_i^2),$$

где  $X$ -входной вектор с координатами  $(x, y)$ ,  $r_i$  - радиус,  $r_i = ((x - x_{ci})^2 + (y - y_{ci})^2)^{1/2}$ ,  $r_i = \|x - c_i\|$ ,  $c_i = (x_{ci}, y_{ci})$ ,  $c_i$  - вектор центра радиально-базисной функций,  $r_i$  - расстояние от центра  $c_i$   $i$ -го вектора до точки  $(x, y)$ ,  $c_i$  - вектор центра радиально- базисной функций,  $a_i$  - параметр, называемый шириной нейрона.

Искомые приближения решения исходной задачи представим в виде

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x),$$

где  $w_i$  - вес, связывающий выходной нейрон,  $c_i$  - ом нейроном скрытого слоя, а  $N$  - количество нейронов. Задачей обучения сети при решении задачи является нахождение

весов, расположения центров и ширины нейронов, которые приближают решение к решению исходной задачи.

Для оценки приближения применяем функционал ошибки. Функционал ошибки  $K(c, a, w)$  определяется как сумма квадратов невязок:

$$K(c, a, w) = \sum_{i=1}^M \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t_i, x_i} + b \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t_i, x_i} - f(t, x) \Big|_{t_i, x_i} \right]^2 + \\ + \lambda \sum_{i=M+1}^K [u(0, x_i) - u_0(x_i)]^2 + \mu \sum_{i=K+1}^L [u(t_i, 0) - \varphi(t_i)]^2. \quad (3)$$

Для обучения сети используем градиентный алгоритм обучения, минимизирующий функционал  $K(c, a, w)$  путем настройки весов  $w_i$ , центров  $c_i$  и ширины  $a_i$ .

### Литература

1. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970.
2. *Ладыженская О.А.* О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей // Зап. научн. сем. ПОМИ. - 2003. - Т. 306. - С. 92-106.
3. *Горбаченко В.И.* Нейрокомпьютеры в решении краевых задач теории поля. - М.: Радиотехника. - 2003. - 336 с.
4. *Kansa E.J.* Motivation for using radial basis functions to solve PDEs // <http://uahtitan.uah.edu/kansaweb.html>

УДК 519.62.64

Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Шолпанбаев Б.Б.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск, Россия;*

*Институт математики имени С.Л.Соболева Сибирского Отделения РАН,  
Новосибирск, Россия;*

*Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан;*

*e-mail: Bahtygerey@mail.ru*

### Численное решение задачи продолжения при наличии локализованных объектов

Во многих обратных задачах искомые неоднородности расположены на некоторой глубине под слоем среды. Одной из главных помех при локализации подземных объектов является верхняя часть грунта, лежащая над искомыми объектами. В таких случаях важными являются задачи продолжения геофизических полей с земной поверхности в сторону залегания неоднородностей. Задачи продолжения электромагнитных полей с части границы относятся к некорректным задачам.

Рассмотрим некорректную задачу продолжения как обратную к следующей прямой (корректной) задаче [1,2].

В области  $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$ , где

$$\Delta(L_x) = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\},$$

требуется определить  $u(x, y, t)$  по заданным  $q(x, y)$  и  $g(y, t)$  из соотношений:

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, t) \in \Delta(L_x) \quad (1)$$

$$u_x(0, y, t) = g(y, t), \quad y \in (0, L_y), t \in (0, 2L_x); \quad (2)$$

$$u(x, y, x) = q(x, y), \quad x \in (0, L_x), y \in (0, L_y); \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0, \quad (x, t) \in \Delta(L_x). \quad (4)$$

В **прямой задаче** (4) — (6) требуется определить  $u(x, y, t)$  по заданным  $q(x, y)$  и  $g(y, t)$ .

**Обратная задача** заключается в определении функции  $q(x, y)$  из соотношения (4)—(6) по дополнительной информации:

$$u(0, y, t) = f(y, t). \quad (5)$$

Численные расчеты проведены для трех различных сред: с одной неоднородностью, с двумя неоднородностями и тремя неоднородностями, расположенными на глубине 6 м. (Рисунок 1)

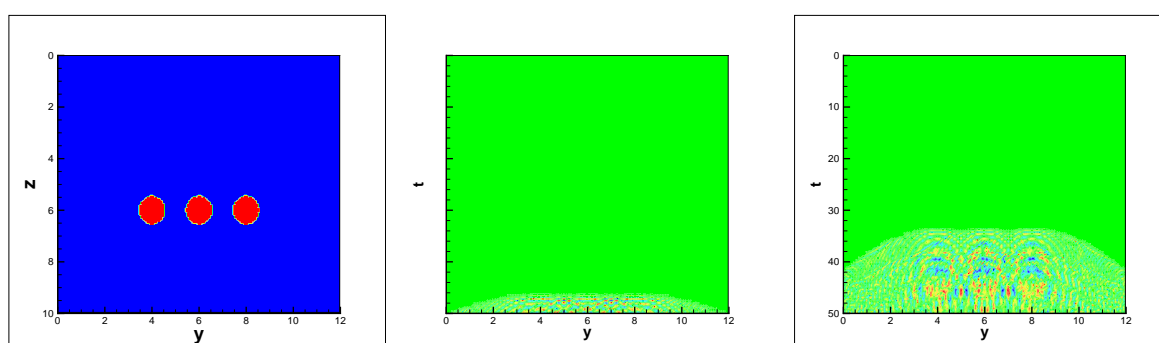


Figure 1: Сверху — среда с тремя неоднородностями. Слева — наблюдаемое аномальное поле на границе  $z = 0$ . Справа — наблюдаемое аномальное поле на глубине  $z = 3$  м.

Параметры среды  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma = 0.01$ , значения параметров внутри неоднородностей  $\varepsilon = 20$ ,  $\sigma = 0.001$ . Результаты расчетов показывают, что продолжение электромагнитного поля на глубину  $h$  в сторону залегания неоднородностей позволяет точнее установить их количество и местоположение.

Более того, полученные данные подтверждаются данными полученными с помощью георадара Лоза-В [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания"

### Литература

1. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. —Новосибирск: СибНИИ, 2008.—460 с.
2. *Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т.* Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. — Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006. —426 с.
3. *Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Нурсеитов Д.Б., Шолтанбаев Б.Б.* Задача продолжения для уравнения электродинамики. // Вестник КазНУ имени аль-Фараби. Серия «Физико- математические науки». — 2013. — №4(79). — С. 66-84.

Климов В.С., Климов А.С.

*ФГБОУ ВПО «Тольяттинский государственный университет», Тольятти, Россия*

*e-mail: KlimovV@gmail.ru*

## **Применение нейронных сетей для диагностики качества контактной сварки**

Контактная сварка является основным процессом для соединения листового материала: на эту технологию приходится более 30% общего объема производства сварных конструкций [1]. Процесс контактной сварки проходит под действием большого числа возмущений, среди которых можно выделить ток шунтирования, колебание напряжения питающей сети, несоосность электродов и их износ. Их воздействие может привести к снижению прочности сварного соединения, поэтому актуальной можно прицель работы - создание надежной системы диагностики качества сварных соединений.

Для поиска параметров, по которым можно было бы судить о динамике изменения сопротивления участка «электрод-электрод», была построена математическая модель работы тиристорного контактора [2]. В данной работе было показано, что измеряя в процессе сварки угол  $\alpha$  открытия тиристоров и длительность  $\lambda$  их включенного состояния можно параметрически определять коэффициент мощности  $\cos\phi$  в каждом периоде сварки.

Измеренные значения коэффициента мощности в каждом периоде сварки не позволяют напрямую оценить качество сварки. Для того чтобы найти взаимосвязь между качеством сварки и динамикой изменения коэффициента мощности, предложено задействовать искусственный интеллект, функционирующий за счет нейронной сети Хэмминга.



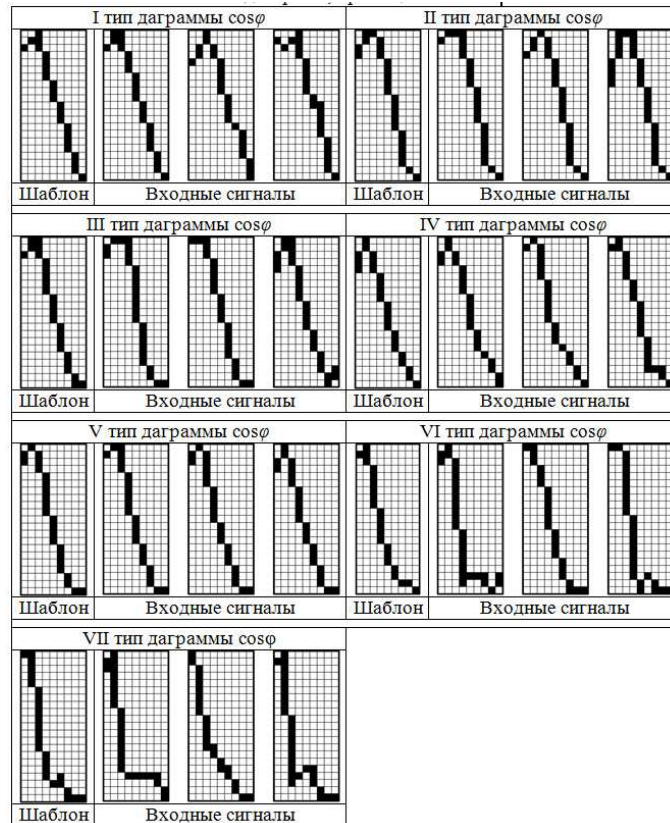


Figure 1: Примеры классификации сигналов, поданных на вход нейронной сети, к шаблонам диаграмм, хранящихся в ее памяти

Идея работы сети состоит в сравнении образа динамики изменения коэффициента мощности тестируемого соединения с образами шаблонных сварных соединений с известными прочностными характеристиками. Если установлено соответствие с шаблонным соединением, прочностные характеристики которого удовлетворяют заданным критериям качества, то текущее соединение считают качественным. Образы представляют собой биполярные матрицы, в которых закодирована информация об изменении коэффициента мощности в процессе сварке. Сеть должна выбрать образец с минимальным расстоянием Хэмминга до неизвестного входного сигнала, в результате чего будет активизирован только один выход сети, соответствующий этому образцу.

Были проведены эксперименты по сварки стали 08кп с толщиной пакета 0,8+0,8 мм на различных значениях сварочного тока от 6 кА до 9,5 кА, с шагом в 0,5 кА, сила сжатия электродов составляла 3 кН. Полученные в результате экспериментов биполярные матрицы использовались нейронной сетью Хэмминга как прототипы устойчивости, т.е. все образы, поданные на вход нейронной сети, будут классифицированы к одному наиболее близкому из этих 7 шаблонов (рис. 1).

Для того, чтобы выявить взаимосвязь между шаблонами и качеством сварки были проведены испытания на разрыв этих семи соединений. Выяснилось, что на токе 6 кА происходит непровар; прочность на разрыв соединения, полученного при сварке на токе 6,5 кА составляет 6,1 кН, на токе 7 кА - 6,57 кН, на токе 7,5 кА - 6,8 кН, на токе 8 кА - 7,14 кН; на токе 8,5 кА - 7,3 кН, на токах 9 кА и 9,5 кА прочности приблизительно равны 7,34 кН.

Для проверки работы нейронной сети в условиях действия возмущающих факторов были проведены дополнительные эксперименты со сваркой заготовок на случайно

выбранных значениях сварочного тока в диапазоне от 6,5 кА до 11 кА, полученный образцы нейронная сеть Хэмминга классифицировала к шаблонам, полученным ранее, затем проводились испытания на разрыв. Прочность соединений на разрыв колеблется не более чем на 0,35 кН от прочностных значений тех соединений, образцы которых использовались нейронной сетью в качестве эталонных.

### Литература

1. Орлов Б.Д. Контроль точечной и роликовой электросварки. - Москва : Машиностроение, 1973. - 304 с.
2. Климов А.С. Параметрическая стабилизация контактной сварки // Проблемы машиностроения и автоматизации. - 2010. - № 2. - С. 104-109.

УДК 519.1

Латкина Л. П.

*Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева  
(Усть-Каменогорск, Казахстан)*

*e-mail: ludalat@yandex.ru*

### Графы, вершины которых составляют одну орбиту

Рассматриваются простые (обыкновенные) графы [1]. Регулярные графы степени 0, 1 и 2 — это, соответственно, пустые графы  $O_n$ , графы состоящие из отдельных ребер  $m * K_2$  и простые циклы  $C_n$ . Все вершины таких графов, очевидно, составляют орбиту группы  $AutG$  (далее — орбита) [1]. Регулярные графы степени не менее 3 могут состоять из нескольких орбит. Определение орбит таких графов является сложной задачей.

Напомним, что подмножество всех вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $A$ , называется *окружением* вершины  $A$  графа  $G$ , и обозначается  $N(A)$  [1]. Подмножество всех вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $A$ , в графе  $\bar{G}$  дополнительном к графу  $G$ , будем называть *антиокружением* вершины  $A$  графа  $G$ , и обозначать  $AN(A)$ .

Обозначим пересечение окружений вершин  $A$  и  $B$  как  $N(A, B) = N(A) \cap N(B)$ , а пересечение их антиокружений —  $AN(A, B) = AN(A) \cap AN(B)$ .

**Определение 1.**[2] *Дополненный список смежности  $D(A)$  вершины  $A$  состоит из двух столбцов. В первом столбце находится  $|N(A)|$  строк. Каждая строка этого столбца начинается маркером одной из вершин  $X \in N(A)$ , затем после разделителя указываются маркеры всех вершин из пересечения окружений  $N(A, X)$ . Во втором столбце находится  $|AN(A)|$  строк. Здесь в каждой строке записывается маркер одной из вершин  $Y \in AN(A)$ , за которым, как и в первом столбце, указываются маркеры всех вершин из пересечения антиокружений  $AN(A, Y)$ .*

*Во всех дополненных списках смежности каждую строку первого и второго столбцов заменяем числом, равным количеству маркеров вершин составляющих её. В результате получаем шаблон  $Sh(A)$  дополненного списка смежности вершины  $A$  графа  $G$ .*

Выделяя вершины графа в определённые орбиты, необходимо знать о связях вершин не только в количественном выражении, но и структуру связей вершин со всеми типами вершин графа. Эта информация хранится в индексированных списках смежности вершин.

**Определение 2.**[2] *Индексированный список смежности  $ID(A)$  вершины  $A$  — это дополненный список смежности  $D(A)$  вершины  $A$  с указанием в верхних индексах  $y$*

маркеров вершин номеров их классов, полученных после сравнения шаблонов дополненных списков смежности вершин или шаблонов индексированных списков.

*Шаблон индексированного списка смежности  $ShI(A)$  вершины  $A$  — это индексированный список смежности  $ID(A)$  вершины  $A$  без указания маркеров вершин.*

Наша цель — доказать, что все вершины графа составляют одну орбиту, если после работы модифицированного алгоритма Визинга-Назарца [2] (далее — алгоритма из [2]) они получили одинаковые шаблоны индексированных списков смежности.

**Лемма 1.** *Пусть все вершины связного графа  $G$  после завершения работы алгоритма из [2] попали в один класс. Если выделить любые две вершины присвоением им индекса 2, то после повторного применения алгоритма из [2] один из новых классов будет состоять только из этих выделенных вершин.*

**Лемма 2.** *Пусть все вершины связного графа  $G$  после завершения работы алгоритма из [2] попали в один класс, а после выделения произвольных вершин  $A$  и  $B$  и повторной прогонки алгоритма из [2] появились  $M$  классов, один из которых — класс №1 состоит из вершин  $A$  и  $B$ . Тогда можно выделить две вершины  $C$  и  $D$  индексом №( $M + 1$ ) из любого класса мощности более трех, имеющие такое симметричное расположение маркеров вершин  $A$  и  $B$  в своих индексированных списках смежности, что после прогонки алгоритма из [2] вершины  $A$  и  $B$  останутся в классе №1, хотя многие другие классы распадутся на более мелкие подклассы.*

**Теорема.** *Пусть все вершины связного графа  $G$  после завершения работы алгоритма из [2] попали в один класс, тогда для любых двух произвольно выбранных вершин  $A$  и  $B$  существует автоморфизм  $\varphi$  графа  $G$  такой, что имеет место  $\varphi(A) = B$  и  $\varphi(B) = A$ , поэтому все вершины графа составляют одну орбиту.*

*Идея доказательства.* Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные вершины графа  $G$ . Будем считать, что выбранные вершины смежны, иначе перейдем к рассмотрению дополнительного графа  $\bar{G}$ . Присвоим маркерам этих вершин индекс 2. Прогоним алгоритм из [2]. В итоге мы получим разбиение всех вершин графа на классы. По лемме 1 вершины  $A$  и  $B$  и только они образуют класс №1.

Если все полученные классы имеют мощность не более трёх, то по теореме 3 из [3] существует автоморфизм  $\varphi$  графа  $G$  такой, что  $\varphi(A) = B$  и  $\varphi(B) = A$ .

Если какой-то класс оказался мощности более трех, то по лемме 2 в нём выбираем две вершины  $C$  и  $D$  такие, что вершины  $A$  и  $B$  после завершения алгоритма из [2] останутся в одном классе №1. Остальные классы, выделенные на предыдущем этапе, подразобьются на подклассы.

Если не все полученные классы имеют мощность не более трёх, то повторяем выделение пар вершин графа  $G$  в этих классах до тех пор, пока все получаемые алгоритмом из [2] классы не будут иметь мощность не более трех. Так как вершин в графе  $G$  всего  $n$ , то через некоторое число шагов (не более  $n/2$ ) мы получим разбиение на классы мощности не более трех.

Работа выполнена при поддержке Комитета науки МОН РК (грант 0929/ГФЗ).

### Литература

1. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М: Наука, 1990. – 384 с.
2. Латкина Л. П. Дополненный список смежности вершин и алгоритм разбиения на орбиты // Совместное издание «Вестник ВКГТУ». – 2013. – № 3. и «Вычислительные технологии» СО РАН. – 2013. – Т. 18, № 4. – С. 211–219
3. Латкина Л. П. Графы, орбиты которых содержат не более чем три вершины. // Вестник КарГУ, сер. Математика. – 2015. – № 2(78). – Принято в печать.

Мансурова М.Е., Алимжанов Е.С., Кашкымбай И.Ж.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*e-mail: mansurova01@mail.ru*

## **Применение технологии MapReduce Hadoop для сжатия RDF данных**

Вопросами разработки и создания информационно-поисковых систем, которые способны в автоматическом режиме осуществлять поиск и извлечение новой информации из слабоструктурированных данных для научного сообщества, занимаются различные исследовательские группы [1-3]. При этом в качестве инструментальных средств разработки в этих системах используются такие технологии, как JSP, JavaScript, PHP, сервер баз данных MySQL. При бесспорных достоинствах этих систем с увеличением объемов обрабатываемых данных наблюдается заметное снижение их производительности. На сегодняшний день в связи с ростом объемов обрабатываемой информации актуальными являются вопросы организации высокопроизводительных вычислений для работы в Семантической паутине. Причем, технологии распределенных вычислений [4-6] оказались наиболее эффективными, что объясняется их высокой масштабируемостью, гибкостью и высокой производительностью. В данной работе для обработки слабоструктурированных данных предлагается применение модели высокопроизводительных распределенных вычислений MapReduce. На основании теоретических и экспериментальных результатов исследований в данной области [5-6] можно утверждать, что алгоритмы сжатия и распаковки RDF словарей, масштабируемые распределенные рассуждения для извлечения информации из Семантической паутины наиболее успешно реализовываются с помощью модели распределенных вычислений MapReduce. При этом технология MapReduce Hadoop позволяет программисту сосредоточиться на логике обработки, вопросы реализации распределенных вычислений, отказоустойчивости, балансировки нагрузки решаются на уровне технологии.

Семантическая паутина содержит миллиарды утверждений, которые реализованы при помощи модели данных RDF (Resource Description Framework, среда описания ресурса). Для лучшего хранения и обработки больших объемов данных и высокой производительности RDF приложений должны использоваться методы сжатия данных. Параллельные алгоритмы, реализованные с применением технологии MapReduce, эффективны для сжатия и распаковки большого количества данных RDF [5-6]. Один из наиболее часто используемых методов для сжатия данных основан на словарях кодирования. В словаре кодирования каждый элемент в наборе данных заменяется числовым идентификатором. С использованием соответствующего словаря, данные могут быть распакованы в исходную несжатую форму. Из-за своей простоты, этот метод сжатия широко используется в различных областях.

В данной работе реализован параллельный алгоритм сжатия и распаковки данных RDF с применением технологии MapReduce на основе подхода Дж. Урбани и др. [5]. Алгоритм, использующий метод создания словарей кодирования с поддержкой исходной структуры данных, реализован на платформе Hadoop. В качестве модельного примера в среде для построения баз знаний Protege была построена онтология на тему синтаксиса RDF моделей. В результате получен документ в формате .rdf данной онтологии, который в дальнейшем была дополнен в среде Sesame для хранения и обработки данных RDF.

Далее, была написана программа для параллельного алгоритма с помощью словаря кодирования на языке Java в интегрированной среде разработки Eclipse. В ходе работы были использована библиотека Jena - специальная Java среда для работы с RDF данными. В результате выполнения программы получены 2 файла, один - со словарем с терминами и соответствующими кодами, другой - с сжатыми RDF данными. Параллельный алгоритм создания словаря кодирования на MapReduce состоит из 3 этапов. Первый этап заключается в нахождении популярных термов во входном файле, и внесение их в словарь. Так как обычно RDF данные большие по объему, на этом этапе обрабатывается только часть входного файла. На втором этапе производится разбиение утверждений на отдельные термы, затем производится кодирование. В ходе разбиения запоминаются идентификаторы утверждений (statement) и соответствующее место термина в триплете. Далее термы кодируются: если терм уже находится в словаре, то он заменяется числовым идентификатором, если термина в словаре нет, то этот терм вносится в словарь и для него определяется новый числовой идентификатор. На третьем этапе выполняется реконструкция утверждений. Закодированные термы собираются в тройки-утверждения. Данный метод сжатия данных в дальнейшем может быть использован в различных приложениях, предназначенных для хранения и анализа RDF данных, проведения логических рассуждений.

В дальнейшем планируется продолжить исследования в данном направлении и разработать механизм логического вывода, позволяющий выполнять рассуждения (Reasoning). В ходе реализации данного механизма будут решаться вопросы предобработки данных, предотвращения избыточного дублирования данных, а также другие вопросы, связанные с особенностями представления RDF данных.

#### Литература

1. <http://groups.csail.mit.edu/haystack/>
2. *Шокин Ю.И., Федотов А.М., Бараннин В.Б.* Проблемы поиска информации. - Новосибирск: Наука, 2010. 110 с.
3. *Петренко А.И., Оленович Е.* Компьютерные облака в Грид технологиях // Труды 12-ой Международной конференции "Системний аналіз та інформаційні технології" (САІТ-10). - К.: УНК "ИПСА" НТУУ "КПИ", 2010.
4. *J. Urbani, S. Kotoulas, J. Maassen, F. Van Harmelen, H. Bal.* OWL reasoning with WebPIE: calculating the closure of 100 billion triples // The Semantic Web: Research and Applications, P. 213-227.
5. *J. Urbani, J. Maassen, N. Drost, F. Seinstra, H. Bal.* Scalable RDF data compression with MapReduce // Concurrency and Computation: Practice and Experience 25 (1), P.24-39.
6. *Jorge Gonzalez Lorenzo, Jose Emilio Labra Gayo, Jose Maria Alvarez Rodriguez.* Applying MapReduce to Spreading Activation Algorithm on Large RDF Graphs // Communications in Computer and Information Science Volume 278, Springer, 2013. P. 601-611.

Новикова А.О., Барсуков А.А., Минаев А.С.

ФГБОУ ВПО «Тольяттинский государственный университет» (Россия, Тольятти)

e-mail: nelenivec777@mail.ru

## Математическое моделирование работы нейронных сетей в приложениях прогнозирования исхода судебных дел

Для обеспечения судебной деятельности РФ применяются такие информационные системы как Гарант (разработчик НПП "Гарант-сервис университет"), ГАС Правосудие (разработчик ФГУП НИИ "Восход"), КонсультантПлюс (разработчик "КонсультантПлюс" НПО ВМИ), и др. Их функциональность направлена на автоматизацию документооборота и архивирование судебных решений, но при этом отсутствуют инструменты для смыслового анализа материалов дела.

Цель данного исследования - разработка математических алгоритмов для анализа материалов дела и прогнозирования исхода судебного разбирательства.

Гипотеза исследования - математический аппарат нейронной сети можно применить для оценки особенностей судебных дел. Современный уровень развития нейронных сетей таков, что они обладают возможностью обучения и обобщения предыдущих прецедентов на неизвестные ранее случаи [1]. Если в качестве прецедентов понимать судебные решения, вступившие в законную силу, то обученная на их основе нейронная сеть теоретически может предсказывать исход похожих судебных разбирательств.

На основе этой идеи был разработан следующий алгоритм функционирования системы прогнозирования судебных решений, основанный на математическом аппарате нейронной сети Хэмминга. Сначала из материалов дела выделяются критерии (например, состояние здоровья обвиняемого, наличие судимости), которые прямо или косвенно могут повлиять на исход дела. Полученные критерии преобразуются в биполярные сигналы, которые подаются на вход обученной нейронной сети. Выработанный нейронной сетью выходной сигнал преобразуется в понятный для конечного пользователя вид - текст прогноза судебного решения.

Выбор типа нейронной сети, используемой для прогнозирования судебного решения, зависит от категории анализируемых правонарушений. Для правонарушений с малым количеством критериев, влияющих на исход дела, целесообразно использование рекуррентных нейронных сетей, например нейронной сети Хэмминга. К таким судебным делам относятся административные правонарушения и малая часть уголовных правонарушений (например, дорожно-транспортные происшествия, повлекшие тяжкий вред здоровью). Для анализа дел из других категорий требуется проведение дополнительных исследований по определению в каждом конкретном случае оптимального (с точки зрения точности функционирования) типа и структуры нейронной сети.

Нейронная сеть Хэмминга работает с данными, представленными в виде биполярного вектора, компоненты которого принимают значения либо "-1", либо "+1". Поэтому в данном исследовании используется алгоритм кодирования информации о критериях материалов дела в биполярные сигналы, представленный в работе Климова В.С. [2]. Для каждого критерия определяют список допустимых значений, а затем для каждого значения определяют набор биполярных сигналов. Объединив данные о критериях, можно получить биполярную матрицу, значения которой описывают особенности материалов судебного дела. Фактически значения полученной матрицы являются входными сигналами нейронной сети.

Предложенный алгоритм реализован в виде программного продукта. При этом применялся язык программирования C++, библиотека Qt (разработчики Qt Project и компания Digia, Финляндия). Хранение материалов дела и их критериев структурировано в формате XML (рис. 1).

В результате проведенных исследований было установлено, что разработанный алгоритм прогнозирования можно использовать на любом этапе судебного разбирательства, тем самым наблюдая за динамикой изменения прогнозов исхода дела. Добавляя критерии материалов дела, подаваемые на вход нейронной сети, можно определять рычаги влияния на благоприятность исхода дела. Путем изменения диапазона дел, используемых при обучении нейронной сети, можно настроить алгоритм на оценку прогнозов исхода дела в зависимости личности конкретного судьи.

Финансирование исследований осуществляется при поддержке федерального государственного учреждения "Фонд содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере" по программе "Участник молодежного научно-инновационного конкурса". А также при поддержке Фонда Михаила Прохорова (Благотворительный фонд культурных инициатив) по программе «Академическая мобильность».

```

LayerOut HemmingNetwork::calculate(const LayerOut & sample)
{
    LayerOut firstLayer;
    int iter = 0;
    for(int i = 0; i < _samplesCount; i++)
    {
        firstLayer.push_back(0);
        for(int j = 0; j < _weightsMatrix[i].second.size(); j++)
        {
            firstLayer[i] += sample[j] * (_weightsMatrix[i].second[j] / 2);
        }
        firstLayer[i] += _sampleSize / 2;
    }
    LayerOut secondLayer(firstLayer);
    writeIteration(secondLayer, iter);
    LayerOut prevSecondLayer(secondLayer);
    bool isChanges = true;
    float epsilon = 0.1f;
    while(isChanges)
    {
        float layerSumm = accumulate(secondLayer.begin(), secondLayer.end(), 0);
        for(int i = 0; i < secondLayer.size(); i++)
        {
            secondLayer[i] = thresholdFunc(secondLayer[i] - epsilon * layerSumm);
        }
        if(secondLayer == prevSecondLayer)
        {
            isChanges = false;
        }
        prevSecondLayer = secondLayer;
        iter++;
        writeIteration(secondLayer, iter);
    }
    return secondLayer;
}

```

Figure 1: Реализация нейронной сети Хэмминга на C++

## Литература

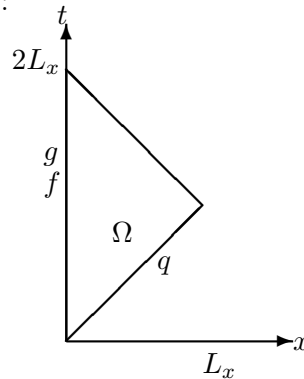
1. *Wasserman P.D.* Neural computing: Theory and Practice. - New York : Van Nostrand Reinhold Co, 1989. - 230 p.
2. *Климов В.С., Комиренко А.В.* Применение нейросетевых технологий распознавания образов для диагностики контактной сварки в производственной среде // Сварка и диагностика. - 2013. - № 2. - С. 40-44.

Нурсеитов<sup>1</sup> Д.Б., Касенов<sup>2</sup> С.Е.<sup>1</sup>Национальной научной лаборатории коллективного пользования информационных и космических технологий КазНТУ им. К.И. Сатпаева,<sup>2</sup>Казахский национальный аграрный университет, Алматы, Казахстан

e-mail: syrym.kasenov@mail.ru

**Численное решение задачи продолжения для уравнения акустики**

Рассмотрим задачу продолжения для уравнения акустики в области  $\Omega = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ :



$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\rho_x}{\rho} u_x \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t). \quad (3)$$

**Прямая и обратная задача**

Рассмотрим некорректную задачу (1)–(3), как обратную, к следующей прямой (корректной) задаче.

В области  $\Omega$  требуется определить  $u(x, t)$  по заданным  $q(x)$  и  $g(t)$  из соотношений:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\rho_x}{\rho} u_x, (x, t) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = g(t), t \in (0, 2L_x), \quad (5)$$

$$u(x, x) = q(x), x \in (0, L_x), \quad (6)$$

В **прямой задаче** (4)–(6) требуется определить  $u(x, t)$  по заданным  $q(x)$  и  $g(t)$ .

**Обратная задача** заключается в определении функции  $q(x)$ , из соотношений (4)–(6), по дополнительной информации о решении прямой задачи (4)–(6)

$$u(0, t) = f(t). \quad (7)$$

Для численного решения обратной задачи используем метод обращения разностных схем. Рассмотрим конечно-разностную схему данной задачи.

Построим в области  $\Omega$  сетку  $\omega_h$  с шагом  $h = l/N$ , где  $N$  — положительное целое число.

Тогда в сетке  $\omega_h = \{x = ih, t = kh; i = \overline{1, N-1}, k = \overline{i, 2N-i}\}$  запишем соответствующую разностную прямую задачу для уравнений акустики. Таким образом



задача (4)–(6) имеет следующий вид:

$$u_i^{k+1} + u_i^{k-1} = u_{i+1}^k + u_{i-1}^k - \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2(\rho_{i+1} + \rho_{i-1})} u_{i+1}^k + \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2(\rho_{i+1} + \rho_{i-1})} u_{i-1}^k$$

$$u_1^k = \frac{1}{2}(u_0^{k+1} + u_0^{k-1}) + h \cdot g^k$$

$$u_i^i = q_i,$$

$$u_0^k = f_k.$$

Для удобства введем новые обозначения:

$$a_{i+1} = \frac{\rho_{i+1} + 3\rho_{i-1}}{2(\rho_{i+1} + \rho_{i-1})},$$

$$b_{i-1} = \frac{3\rho_{i+1} + \rho_{i-1}}{2(\rho_{i+1} + \rho_{i-1})},$$

тогда получим

$$u_i^{k+1} + u_i^{k-1} = a_{i+1} u_{i+1}^k + b_{i-1} u_{i-1}^k \quad (8)$$

$$u_1^k = \frac{1}{2}(u_0^{k+1} + u_0^{k-1}) + h \cdot g^k \quad (9)$$

$$u_i^i = q_i, \quad (10)$$

$$u_0^k = f_k. \quad (11)$$

Учитывая (10) и поставляя  $k = i + 1$  в (8) получим следующее выражение

$$q_{i+1} = q_i + u_i^{i+2} - u_{i-1}^{i+1} \quad (12)$$

### Алгоритм решение обратной задачи

1. Вычисляем по формуле (11)

$$q_0 = u_0^0 = f_0.$$

2. Вычисляем по формуле (11)

$$q_1 = \frac{1}{2}(u_0^2 + u_0^0) + h \cdot g^1,$$

где  $u_0^2 = f_2$ .

3. Вычисляем по формуле (9)

$$u_0^4 = f_4;$$

по формуле (11)  $u_1^5$ ; по формуле (12)  $q_2$ .

4. И так далее вычисляем по формуле (9)

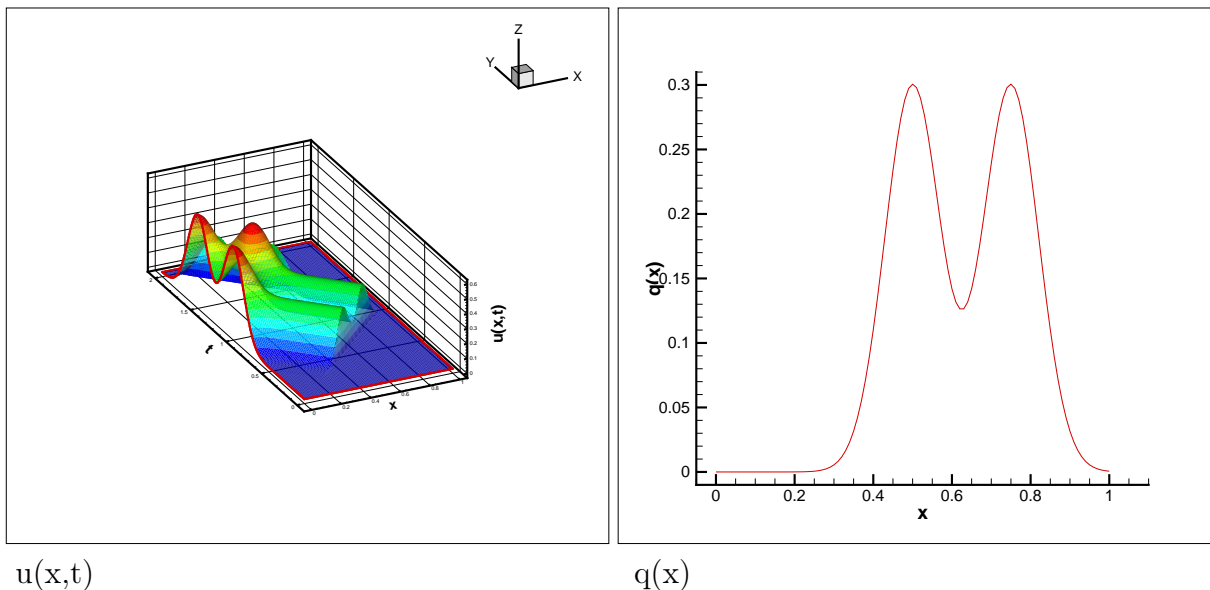
$$u_0^{2i} = f_{2i};$$

по формуле (11)  $u_1^{2i-1}$ ; по формуле (8)  $u_{i+1}^k$  вдоль характеристики; вычисляем по формуле (12)  $q_i$ .

### Вычислительный эксперимент

Проведем вычислительный эксперимент для

$$N = 100, h = 0.01, g(t) = 0, \rho(x) = e^{-\frac{(x-0.5)^2}{2b^2}}, b = 0.1, q(x) = 0.3 \left( e^{-\frac{(x-0.5)^2}{2b^2}} + e^{-\frac{(x-0.75)^2}{2b^2}} \right).$$



$u(x,t)$

$q(x)$

### Литература

1. *Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т.* Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. - Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006, 425 с.

УДК 311.1+519.2

Сулейманова Г. А.

*Кыргызско-Турецкий Университет Манас (Кыргызстан, Бишкек)*

*e-mail: gulnara312@gmail.com*

### Смешанный метод описательной статистики и построение гистограммы

Целью настоящей работы является описание смешанного метода исследования, позволяющего на основе единой группировки исходных данных решать задачи описательной статистики и построения гистограммы, которые назовем обобщенными (смешанными) задачами. Необходимость решения такого рода задач нередко возникает как на практике, так и в учебных исследованиях. Например, классический подход к фундаментальной задаче нахождения средних и построения гистограммы, назовем ее смешанной задачей, предусматривает разделение этой задачи на две отдельные типовые подзадачи: (1) нахождение средних величин; (2) построение гистограммы. Эти две отдельные задачи затем решаются по двум разным методам, в каждом из которых исходные данные группируются. Таким образом, группировка данных при решении смешанной задачи, описанной выше, производится дважды, что трудоемко. Возникает вопрос: можно ли смешанную задачу решить, группируя данные только один раз? Преимущества такого решения очевидны - это позволит снизить объем вычислений вдвое. По мнению автора такое решение возможно, поскольку оба метода решения типовых подзадач имеют в своем решении одинаковые части - группировку данных. В работе приводится решение обобщенной (смешанной) задачи классическими методами и смешанным методом. На

основе широко известных и популярных методов описательной статистики: stemplot и классическим методом построения гистограммы, описанными John Tukey и Richard Thomas соответственно приводится решение обобщенной задачи. В работе также приводится решение аналогичной задачи предлагаемым смешанным методом описательной статистики и построения гистограммы.

### Литература

1. *Rheta N. Rubenstein et and others* Functions, Statistics, and Trigonometry The University of Chicago School Mathematics Project, Teacher 's Edition by Foresman Scott. - 1992,844 с.
2. *Томас Р.* Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. - М.: Дело и Сервис, 1999, 432 с.
3. *Кыдыралиев С.К., Урмамбетов Б.М.* Сборник заданий по современной статистике. - Бишкек: АУЦА, , 2006. - 181 с.
4. *Anthony J. Onwuegbuzie, Nancy L. Leech* Linking Research Questions to Mixed Methods Data Analysis // The Qualitative Report . - 2006. - Т. 11, № 3. - С. 474-498.

УДК 378.147

Сыздыкова Р.А., Шаукенова К.С., Кауымбек И.С.

*Карагандинский государственный университет имени Е.А.Букетова  
(Казахстан, Караганды)*

*e-mail: orumbayevan@mail.ru, ShaukenovaK@mail.ru*

### Особенности подхода к проблеме использования информационных технологий на уроках математики

Анализ современной научно-методической литературы свидетельствует о тенденции все более широкого использования информационных технологий в преподавании математики. Информационные технологии, наиболее часто применяемые в учебном процессе, можно разделить на две группы: 1) технологии, ориентированные на локальные компьютеры (обучающие программы, компьютерные модели математических процессов, демонстрационные программы, компьютерные лаборатории, электронные задачки, контролирующие программы, дидактические материалы); 2) сетевые технологии, использующие локальные сети и глобальную сеть Интернет. Использование информационных технологий в качестве нового педагогического инструмента позволяет существенным образом повысить эффективность образовательного процесса, обуславливает новые методы и организационные формы учебной работы. Используя компьютер, учитель имеет возможности создавать свои наглядные пособия, диаграммы, графики, таблицы, презентации. Конкретными примерами использования информационных технологий является: - создание дидактических пособий для урока; - диагностика и обработка результатов педагогического процесса (таблица учета диагностики качества знаний по итогам контрольных, самостоятельных работ, составление ведомости успеваемости класса и др.); - знакомство с новинками в области преподавания математики с применением информационных технологий через Интернет. В настоящее время не вызывает сомнения актуальность и востребованность Интернета в процессе обучения школьников и студентов. Использование Интернет-ресурсов на уроках не должно представлять собой самоцель. Для того, чтобы правильно определить место и роль Интернета в обучении математике

необходимо найти для себя чёткие ответы на вопросы: для кого, для чего, когда, в каком объёме он должен использоваться. Как информационная система, Интернет предлагает своим пользователям многообразие информации и ресурсов. Базовый набор услуг может включать в себя: - электронную почту (e-mail); - телеконференции; - видеоконференции; - возможность публикации собственной информации, создание собственной странички (или сайта) и размещение её на Web-сервере; доступ к информационным ресурсам: -справочные каталоги; -поисковые системы; участие в различного рода конкурсах и олимпиадах; -разговор в сети (Chat). Эти ресурсы могут быть активно использованы на уроке, во внеурочной деятельности и при подготовке домашних заданий. У учащихся есть возможность послушать информацию, просмотреть её, закрепить при использовании различного вида Интернет-сервисов, тестов online. Умение пользоваться Интернетом необходимо в современном мире. Поэтому общение с учащимися по электронной почте, обмен заданиями-ответами стало востребованным на сегодняшний день.

### Литература

1. Чашук И.В. Компьютерные технологии на уроках математики. ito. bitpro.ru, 1998-1999.
2. Угринович Н. Информатика и информационные технологии 10-11: Москва. Бином. Лаборатория знаний, 2002г.

УДК 519.245

Шакенов К.К., Бакбердиева А.А.

*Казахский национальный университет имени аль - Фараби (Казахстан, Алматы)*

*e-mail: shakenov2000@mail.ru*

### Численные методы решения уравнения вероятности разорения компании для одной модели риска

В настоящее время теория риска находится в стадии интенсивного развития, к удовлетворению ее исследователей, и, возможно, к сожалению потенциальных ее потребителей, заинтересованных в возможности наискорейшего использования результатов теории. Актуальность проблем, связанных с теорией риска, вызвана ростом популярности страхового дела в мире.

В данной работе оценка вероятности разорения осуществляется в рамках классической модели риска. В классической модели риска с пуассоновским потоком ущербов интенсивности  $\lambda$ , поступающих в страховую компанию, со скоростью накопления платежей  $c$  и распределением ущербов  $D(u)$  при условии  $\frac{\lambda b}{c} < 1$  известно уравнение

$$R(x) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x D(x-u)R(u)du + \frac{\lambda}{c}F(x),$$

где  $F(x) = \int_x^\infty D(t)dt$ ,  $b = \int_0^\infty tD(t)dt$ , для вероятности  $R(x)$  разорения компании как функции от начального капитала  $x \geq 0$ . Известно, что является монотонно убывающей к 0 при  $x \rightarrow \infty$  функцией. Доказано, что для непрерывной функции  $F(x)$ ,  $x \geq 0$  интегральное уравнение для вероятности  $R(x)$  разорения имеет единственное решение в классе  $C$  функций, непрерывных на  $[0, \infty)$ . Это интегральное уравнение плохо решается классическими численными

методами в случае когда:  $D(x)$  распределение Парето,  $D(u) \equiv P(u) = 0$  при  $0 \leq u \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha}$  и  $P(u) = 1 - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha u}\right)^\alpha$  при  $u > \frac{\alpha - 1}{\alpha}$  с параметром  $\alpha = 3$ , с точностью не превосходящей 0.03,  $\lambda = 0.7$ ,  $c = 1$ , при  $x > 500$ . Мы решаем это интегральное уравнение с любой заданной точностью, для заданных параметров и для  $x > 500$  разными численными методами. Вычислительный эксперимент был поставлен методами Монте - Карло для параметров  $\lambda = 0.7$ ,  $c = 1$ , и для  $F(x) = 1$ , при  $x \leq k$ ,  $F(x) = \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$ , при  $x > k$ , также для распределения Парето, с параметрами  $\alpha = 2, 3, 5, 7$  и  $k > 0$ ,  $k = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ . Результаты вычислительного эксперимента вполне удовлетворительны. [1], [2], [3], [4].

### Литература

1. *Медведев Г.А.* Математические модели финансовых рисков. В 2-х частях. Часть 1: Риски из-за неопределенности процентных ставок. – Минск: Изд-во БГУ, 1999. – 255 с.
2. *Panjer H., Willmot G.* Insurance Risk Models. – Schaumburg: Society of Actuaries, – 1992. – 55 p.
3. *Новоселов А.А.* Моделирование финансовых рисков. Лекции для студентов Института математики Сибирского Федерального Университета. Архив 1998 год. – Красноярск: Изд-во СФУ, 1998. – 30 с.
4. *Pratt J.W.* Risk Aversion in the Small and in the Large. // *Econometrica.* – 1964. **32**, – P. 122 – 136.

УДК 517.958

Темирбекова Л.Н.

*Казахский национальный педагогический университет имени Абая  
(Казахстан, Алматы)*

*e-mail: laura-nurlan@mail.ru*

### Двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана

Исследование дискретных аналогов многомерных обратных задач необходимо прежде всего в силу их сильной некорректности. С подробной библиографией работ по двумерным коэффициентным обратным задачам для уравнения гиперболического типа можно ознакомиться в монографиях В.Г.Романова [1] и С.И. Кабанихина [2,3]. Отметим, что из результатов В.Г.Романова [1] для двумерной обратной задачи для гиперболического уравнения следует теорема о локальной однозначной разрешимости и теорема единственности в классе функции, аналитических по одной и непрерывных по другой переменной. В работе [2] показана, что дискретный аналог многомерной обратной задачи эквивалентен конечному набору систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим последовательность прямых задач [1-3]

$$u_{tt}^{(m)} = u_{xx}^{(m)} + u_{yy}^{(m)} + q(x, y)u^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

$$u^{(m)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(m)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \quad u_t^{(m)}|_{y=\pi} = u^{(m)}|_{y=-\pi}. \quad (2)$$

Предполагаем, что след решения прямой задачи (1) - (2) существует и может быть измерен. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию  $q(x, y)$  по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)-(2)

$$u^{(m)}(0, y, t) = f^{(m)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in Z \quad (3)$$

где  $R$  - множество вещественных чисел,  $Z$  - множество всех целых чисел,  $\delta$ - дельта-функция Дирака,  $m$ - некоторое фиксированное целое число,  $h(y) = e^{imy}$ . Здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые функции являются достаточно гладкими и  $2\pi$ -периодическими по переменной  $y$ . Необходимое условие существования решения (1)-(3) является следующим:

$$f^{(m)}(y, 0) = 0.$$

Используя известную методику [1], можно показать что обобщенное решение задачи Коши (1)-(2) имеет вид

$$u^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{imy}\theta(t - |x|) + \tilde{u}(x, y, t), \quad u^m(x, y, t) \equiv 0, \quad t < |x|, \quad (4)$$

где  $\theta(t)$ -функция Хевисайда.

$$\tilde{f}^m(y, t) = \tilde{f}^m(y, t) + 1/2e^{imy}[\theta(t) - \theta(-t)]$$

где  $\tilde{f}^m(y, 0) = 0$ .

Введем функцию

$$U^m(x, y, t) = \partial \tilde{u}^m / \partial t.$$

Обратная задача заключается в нахождении функций  $q(x, y)$ , удовлетворяющей следующим соотношениям

$$\frac{\partial^2 U^m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^m}{\partial y^2} - q(x, y)U^m, \quad x \in R, y \in R, t > 0, \quad (5)$$

$$U^m(x, y, 0) = \delta(x)e^{imy}, \quad \frac{\partial U^m}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \quad x \in R, y \in R, \quad (6)$$

$$U^m(0, y, t) = \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial t}(y, t), \quad \frac{\partial U^m}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad y \in R, t \geq 0. \quad (7)$$

Дискретный аналог обратной задачи (5)-(7) заключается в нахождении сеточной функций  $\tilde{q}_{i,j}$ :

$$v_{it}^m = v_{ix}^m + v_{iy}^m + 1/2[\delta_{i+k}^h + \delta_{i-k}^h][e^{imjh_1}]_{y\bar{y}} + e^{imjh_1}\tilde{q}_{i,j} - \tilde{q}_{i,j}(v_{i,j}^k)^m, \quad (8)$$

$$i \in Z, k \geq 1, j, m = \overline{1, 2N_1}, \quad (9)$$

$$(v_{i,j}^0)^m = 0, (v_{i,j}^1)^m = 0, i \in Z, j, m = \overline{1, 2N_1}, \quad (10)$$

$$(v_{0,j}^0)^m = 0, (v_{0,j}^1)^m = 0, (v_{0,j}^k)^m = (f_j^k)_{t^0}^m, k > 1, j, m = \overline{1, 2N_1}.$$

Пусть  $T$ - положительное число,  $N, N_1 > 3$ -натуральные числа,  $h = T/N, h_1 = T/N_1$ . Обозначим

$$v_{i,j}^k = v(ih, jh_1, kh), \quad \tilde{q}_{i,j} = \tilde{q}(ih, jh_1), \quad f = f(jh_1, kh),$$

$$(f_j^k)_{t^0} = (f_j^{k+1} - f_j^{k-1})/(2h), \quad v_x = (v_{i+1}^k - v_{i,j}^k)/h,$$

$$v_t = (v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1})/h, \quad v_{y\bar{y}} = (v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k)/h_1^2$$

и т.д. Сеточные функции  $\tilde{q}_{i,j}, v_{i,j}^k, 2N_1$  периодичны по дискретной переменной  $j$ .

### Литература

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М: Наука, 1984. - 263 с.
2. Кабанихин С.И., Баканов Г.Б. Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. - 1999. - Т. 40, № 2. - С. 307-324
3. Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шилленин М.А. Методы решения некорректных задач линейной алгебры. - Алматы: КазНПУ имени Абая, 2011. - 131 с.

Турар О.Н., Ахмед-Заки Д.Ж.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*

*e-mail: Turar\_Olzhass@mail.ru, Darhan.Ahmed-Zaki@kaznu.kz*

## Разработка модуля визуализации с использованием графической библиотеки NVIDIA OPTIX

При создании графического симулятора физических процессов немалое внимание должно быть уделено модулю визуализации данных результатов симуляции. Существует множество способов отображения результатов физических процессов, но наиболее востребованным среди специалистов является интерактивное графическое цветное отображение данных.

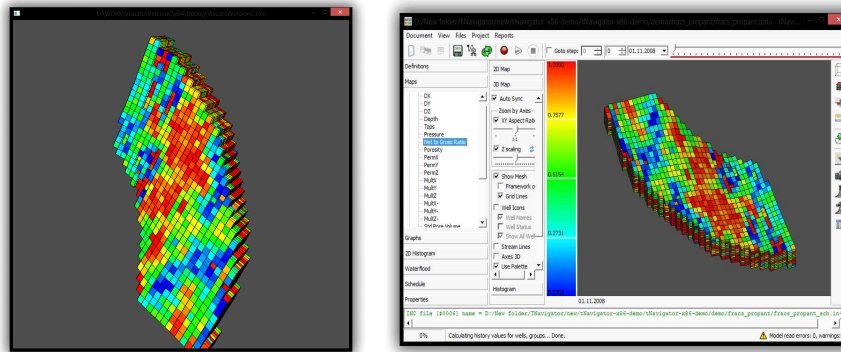


Figure 1: Модель простого пласта 33x33x11

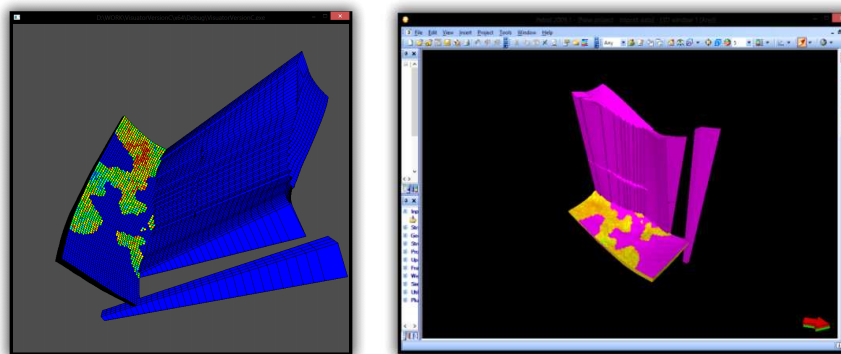


Figure 2: Сравнение неотредактированной модели месторождения Восточный Молдабек, нарисованного в программе Petrel и представленном модуле

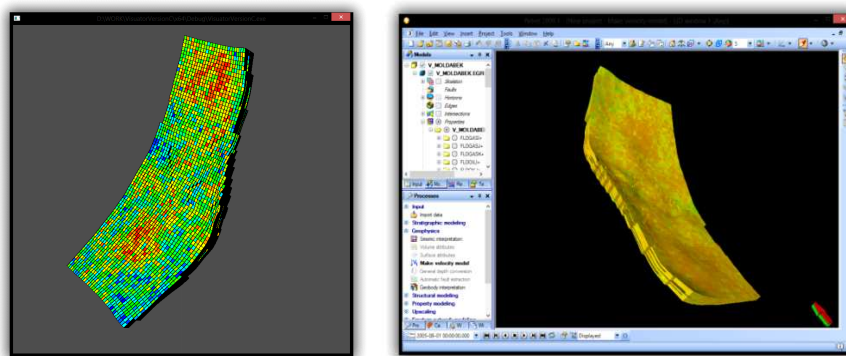


Figure 3: Снимки модели месторождения Восточный Молдабек без ячеек с нулевыми данными, нарисованного в программе Petrel и представленном модуле

Описываемый модуль должен будет использоваться как в виде приложения на устройстве, так и в виде программы работающей на платформе браузера, которые обязаны корректно отображать данные результатов расчетов проводимых на вычислительных кластерах с производительностью в несколько терафлопсов, например кластеров URSA и TPlatform механико-математического факультета Казахского Национального Университета. Статья направлена на освещение только визуализации.

Для реализации настольного модуля использовалась технология CUDA и алгоритм Ray Casting. Этот алгоритм широко используется для прорисовки сцен с таким количеством примитивов, что алгоритмы растеризации с любой степенью оптимизаций физически не могут визуализировать. Это имеет значение, когда количество примитивов в модели становится сравнимым, а то и превосходит количество пикселей на экране монитора [4].

Наиболее удачной технологией реализации описанных алгоритмов является технология параллелизации с использованием GPU. Поэтому для реализации поставленной задачи хорошо подходит технология CUDA, предоставляемая компанией NVIDIA и показывающая наибольшую эффективность на устройствах этой компании. Для самой визуализации используется фреймворк NVIDIA Optix Ray Tracing Engine [1], предоставляющий функционал для эффективного программирования различных вариаций алгоритма трассировки лучей.

**Примеры работы модуля.** На предыдущей странице приведены сравнения результатов работы представленного модуля визуализации и аналогичных визуализаторов программ Petrel [2] и tNavigator [3]. Для начала приведена визуализация простой модели пласта, имеющего размеры 33x33x11 и результат был сравнен с теми же данными прорисованными с использованием программы tNavigator (Рисунок 1-3). Здесь показаны данные песчаности NTG, принимающей значения в интервале [0; 1].

Красным цветом обозначены ячейки, имеющие наибольшие значения, а синим – наименьшие таким образом, что значения постепенно уменьшаются по мере «похолодания» цветов. Можно заметить, что рисунки в данном случае идентичны. Нужно отметить, что здесь и далее представлены рисунки на настольной версии модуля визуализации разрабатываемого программного пакета.

Далее приведены результаты визуализации модели участка Восточный Молдабек месторождения Кенбай [5] с АО "Разведка Добыча "Казмунайгаз". На рисунках 2 и 3 представлено сравнение результатов визуализации данных в программе Schlumberger Petrel (справа) и представленном модуле симулятора (слева).

### Литература

1. <http://groups.csail.mit.edu/haystack/>



2. NVIDIA®OptiX™ Ray Tracing Engine Programming Guide, Version 3.0. 2009-2012. NVIDIA Corporation.
3. Petrel E&P Software Platform - Schlumberger - [www.slb.com/petrel](http://www.slb.com/petrel)
4. Rock Flow Dynamics: tNavigator - [www.rfdyn.com/technology](http://www.rfdyn.com/technology)
5. A. S. Glassner. An introduction to Ray Tracing, - New York: Academic Press, 1989. - 113 p.
6. Анализ и оценка тепловых методов воздействия на прискважинную зону пласта месторождения Кенбай (участок Восточный Молдабек): отчет по НИР /АО "РАЗВЕДКА ДОБЫЧА "КАЗМУНАЙГАЗ". – Алматы, 2007. - 65 с.

УДК 519.7

Amirgaliev YE., Lovazov T., Mustafin S.

*Institute of Information and Computing Technologies (Kazakhstan, Almaty)*

*e-mail: lovazov.tahir@gmail.com*

## **About design problem of mobile robot**

The problem of designing mobile robots require solving problems from different areas of knowledge. One of the challenges of designing robots is a problem related to the management systems, resource-use equipment, which imposes a number of restrictions on the operation of systems. We consider the problem of increasing signal range. Suggested to control robotic systems use wireless data transmission technology, the technology of "cloud" computing, that allows o perform tasks on the server. During the work was created quite versatile software that allows using the devices available on mobile platforms. This allows making the transition to compact control systems. Development of significantly reducing the cost of purchasing the equipment and provides mobility management of robotic systems.

### **Литература**

1. Макаров И.М., Топчиев Ю.И. Робототехника: История и перспективы. - М.: Наука; Изд-во МАИ, 2003. - 349 с.

Erlangga Y.A

*Mathematics Department, Nazarbayev University, Kazakhstan, Astana**e-mail: yogi.erlangga@nu.edu.kz***Multilevel Krylov for Symmetric Singular Systems**

Define the two-level preconditioner [1]

$$P_N = I - AZE^{-1}Z^T + \lambda_n ZE^{-1}Z^T, \quad (1)$$

where  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $E = Z^T AZ$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , with  $\text{rank}(Z) = k$ , and  $\lambda_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|$ . We consider solutions of the consistent system  $Ax = b$ , where  $A$  is a symmetric, singular matrix of coefficients, by solving either  $P_N Au = P_N b$  (left precondition) or  $AQ_N \tilde{u} = b$  (right precondition), with  $Q_N = P_N^T$  and  $u = Q_N \tilde{u}$ . The coarse-grid matrix  $E$  in (1) is in general singular, but can be forced to be nonsingular by requiring  $\mathcal{N}(A) \not\subseteq \mathcal{R}(Z)$ .

Since  $P_N A$  and  $AQ_N$  are not symmetric, the preconditioned systems must be solved by a Krylov method for nonsymmetric system, like GMRES. Convergence of GMRES, however, is not guaranteed since  $P_N A$  or  $AQ_N$  is singular and, in general, not range-symmetric. They are range-symmetric if, for instance, columns of  $Z$  consists of orthogonal eigenvectors of  $A$  that are not associated with  $\lambda(A) = 0$ . In this case, the result of [2] guarantees that GMRES converges to the least-squares or pseudo-inverse solution. For general vectors used for columns of  $Z$ , one possible solution which can be extracted from a Krylov subspace is associated with the Drazin inverse of the singular matrix  $P_N A$  or  $AQ_N$ , via DGMRES [3].

In this talk, we shall present theoretical aspects of the multilevel Krylov for singular systems and some numerical results, in the two-level and multilevel setting (i.e., when  $E^{-1}$  is computed approximately and iteratively). The numerical results demonstrate mesh-independent convergence of the method, applied to, e.g., the Poisson equation with pure Neumann boundary conditions.

**References**

1. *Erlangga, Y.A., Nabben, R.*, Multilevel projection-based nested Krylov iteration for boundary value problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30**(3)(2008), pp. 1572–1595
2. *Brown, P.N., Walker, H.*, GMRES On (Nearly) Singular Systems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **18**(1)(1997), pp. 37–51.
3. *Sidi, A.*, DGMRES: A GMRES-type algorithm for Drazin-inverse solution of singular non-symmetric linear systems, *Linear Algebra and its Applications*, **335**(2001), pp. 189–204.

Lavrov E.A., Pasko N.B., Krivodub A.S.

*Sumy State University (Ukraine, Sumy)*

*e-mail: prof\_lavrov@mail.ru*

## Computer simulation of discrete human-machine interaction in automated systems

**Introduction.** From 50 to 80% of the accidents in production systems of different types, more than 64% of accidents in the sea fleet and 80% in aviation caused by errors of the human operator [1,2]. The aim of Research in the field of designing human-machine systems (HMS) is to reduce erroneous reaction of the human operator, to ensure acceptable conditions of work and to adapt the machine to the man-operator. The effectiveness of ergonomic research essentially depends on the ability to formalize the interaction between man and machine and to receive prompt assessment of options for activities to solve the optimization problem.

**Statement of the problem.** To develop an interactive system for simulating human-computer interaction in HMS.

**Results.** As a basic methodology was selected the functional-structural theory of HMS [2]. We obtained new mathematical models to ensure rapid computer simulation [2,3]:

- system analysis for HMS (component and morphological);
- language discrete human-computer interaction's description;
- automatic of the functional network;
- select optimal variant of human-computer interaction (in different formulations for different tasks of ergonomic - to determine the degree of automation, calculation of the number of operators, the choice of activity structures and methods of operations, the distribution of functions between operators, defining activities ergonomic quality assurance system and others.

We have implemented a computer technology, that allows to simulate interactively the HMS:

- to describe;
- to evaluate;
- to optimize  
interaction of operators with software and hardware tools in HMS.

**Approbation.** The results are used in the design and operation of processes in different systems:

- Flexible manufacturing systems;
- Safety management systems;
- Incident Management Systems;
- Telecommunication systems;

- Call-Centers and Contact-centers;
- E-learning systems,

and in the learning processes (courses “Modeling of processes and systems ” and “Ergonomics ”) in the Sumy National Agrarian University and Sumy State University.

#### References

1. *De Felice F., Petrillo A.* Methodological Approach for Performing Human Reliability and Error Analysis in Railway Transportation System. International Journal of Engineering and Technology, vol.3 (5), pp. 341-353, 2011.
2. *Adamenko A.N., Asherov A.T., Lavrov E.A.* Information controlling human-machine systems: research, design, testing, Reference book, Gubinsky A.I. and Evgrafov V.G., eds, Mashinostroyeniye, Moscow, 528 p., 1993 (in Russian).
3. *Lavrov E., Pasko N.* Ergonomics of flexible systems “man-computer ”. Use of semi-Markov process for the task of choice of man-operator. Proceedings of the International Scientific Conference “UNITECH 10 ”, University Publishing House “V.APRILOV ”, Gabrovo, Bulgaria, vol.1, pp. 444-451, 2010.

UDK 519.6

Skrzypacz Piotr

*School of Science and Technology, Nazarbayev University, Kazakhstan, Astana*

*e-mail: piotr.skrzypacz@nu.edu.kz*

### On the construction of $L_2$ -orthogonal elements of arbitrary order for Local Projection Stabilization

We construct  $L_2$ -orthogonal conforming elements of arbitrary order for the Local Projection Scheme (LPS).  $L^2$ -orthogonal basis functions lead to a diagonal mass matrix which can be advantageous for time discretizations. We prove that the constructed family of finite elements satisfies a local inf-sup condition. Additionally, we determine the size of the local inf-sup constant with respect to the polynomial degree. Our numerical tests show that the discrete solution is oscillation-free and of optimal accuracy in the regions away from the boundary layer.

#### References

1. *Schieweck Friedhelm, Skrzypacz Piotr* A local projection stabilization method with shock capturing and diagonal mass matrix for solving non-stationary transport dominated problems. Comput. Methods Appl. Math., 12(2):221-240, 2012.
2. *Matthies Gunar, Skrzypacz Piotr, and Tobiska Lutz* A unified convergence analysis for local projection stabilisations applied to the Oseen problem. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 41(4):713-742, 2007.

## 6 Механика и машиноведение

УДК 539.3

Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М.

*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,  
Казахстан, Алматы*

*alexeeva@math.kz, makpal111@gmail.ru*

### Метод обобщенных функций в краевых задачах динамики термоупругих стержней

*На основе метода обобщенных функций построены аналитические решения для класса стационарных краевых задач динамики термоупругого стержня при стационарных колебаниях и проведена компьютерная реализация решения двух краевых задач.*

Изучение термодинамических процессов в широко распространенных на практике стержневых конструкциях методом математического моделирования приводит к краевым задачам динамики термоупругих сред. Существуют различные модели термоупругих сред [1]. При изучении медленных динамических процессов чаще используется модель несвязанной термоупругости, в которой не учитывается влияние движения среды на ее температурное поле. Быстрые вибрационные процессы в конструкциях влияют на температурное поле в них. При изучении таких процессов следует использовать модель связанной термоупругости, которая здесь рассматривается для моделирования динамики термоупругих стержней.

**1. Постановка краевых задач.** Рассмотрим термоупругий стержень длины  $2L$ , который характеризуется плотностью  $\rho$ , жесткостью  $EJ$  и термоупругими константами  $\gamma, \eta$  и  $\kappa$  [1]. Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гипербола-параболических уравнений вида:

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1 &= 0, \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u(x, t)$  - компоненты продольных смещений,  $\theta(x, t)$  - относительная температура ( $\theta = T(x, t) - T(x, 0)$ ),  $T$  - абсолютная температура,  $c$  - скорость распространения упругих волн в стержне,  $\rho$  - погонная плотность,  $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$ . Предполагается, что на стержень действует периодическая во времени сила вида

$$F_1(x, t) = F_1(x) \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

а  $F_2 = (\lambda_0 \kappa)^{-1} W(x, t)$ ,  $W(x, t) = W(x) \exp(-i\omega t)$ , где  $W$  - количество выделенного (поглощенного) тепла на единицу объема за единицу времени,  $\lambda_0$  - коэффициент теплопроводности. Символ после запятой обозначает частную производную по указанной в индексе переменной ( $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$  и т.д.).

Термоупругое напряжение в стержне определяется формулой Дюамеля-Неймана:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta. \quad (3)$$

**Краевые условия** на концах стержня ( $x = x_1 = -L$ ,  $x = x_2 = L$ ) могут быть различными. Здесь сформулируем их для четырех краевых задач, обычно рассматриваемых в классической теории термоупругости [1]:

1КЗ

$$u(x_j, t) = w_j \exp(-i\omega t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

2КЗ

$$\sigma(x_j, t) = P_j \exp(-i\omega t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

3КЗ

$$u(x_j, t) = w_j \exp(-i\omega t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (6)$$

4КЗ

$$\sigma(x_j, t) = P_j \exp(-i\omega t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (7)$$

$w_j, \theta_j, P_j, q_j$  - комплексные амплитуды,  $\omega$  - частота колебаний. Наряду с ними можно поставить краевые задачи, когда на одном конце стержня задаются условия одной краевой задачи, а на втором - условия другой. Требуется найти решение этих задач.

В силу гармоничности по времени действующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде  $(u, \theta) = (u(x), \theta(x)) \exp(-i\omega t)$ , где комплексные амплитуды  $(u(x), \theta(x))$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} + \rho \omega^2 u - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x) &= 0, \\ \theta_{,xx} + i\omega \kappa^{-1} \theta + i\omega \eta u_{,x} + F_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим комплексные амплитуды решения, удовлетворяющие (8) и условиям (4,5,6,7) соответственно решаемой КЗ.

**2. Обобщенные решения краевых задач.** Для решения задачи использовалась теория обобщенных функций [2]. На ее основе, с использованием матрицы фундаментальных решений  $U(x, \omega)$ , получено аналитическое решение КЗ, которое имеет вид [3]: для  $|x| < L$

$$\begin{aligned} u(x) &= F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2 + \\ &+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (p_k - \tilde{\gamma} \theta_k) U_1^1(x - (-1)^k L, \omega) + u_k(\omega) U_{1,x}^1(x - (-1)^k L, \omega) \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (q_k + i\omega \eta w_k) U_1^2(x - (-1)^k L, \omega) + \theta_k(\omega) U_{1,x}^2(x - (-1)^k L, \omega) \right\} \quad (9) \\ \theta(x) &= F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (p_k - \gamma \theta_k) U_2^1(x - (-1)^k L, \omega) + w_k U_{2,x}^1(x - (-1)^k L, \omega) \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (q_k + i\omega \eta w_k) U_2^2(x - (-1)^k L, \omega) + \theta_k U_{2,x}^2(x - (-1)^k L, \omega) \quad (10) \end{aligned}$$

где свертки

$$F_j * U_k^j = H(L - \|x\|) \int_{-L}^L F_j(y) U_k^j(x - y, \omega) dy$$

(для сингулярных  $\hat{F}_1, \hat{F}_2$  следует пользоваться определением свертки [2]) Формулы (6) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи известны только четыре граничных значения комплексных амплитуд, для оставшихся четырех неизвестных краевых условий из этой системы нетрудно получить разрешающую систему уравнений, исходя из условий на концах стержня и асимптотических условий  $U$  и ее производной в нуле, которая имеет вид:

Здесь в нижних индексах за скобкой указаны значения  $x$ , для которого вычисляются выражения в скобках. Из этой системы легко построить линейную систему алгебраических

уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с известными.

Так, например, если известны на концах стержня температура и перемещения (КЗ 1), то неизвестными являются напряжения и тепловые потоки на концах стержня  $(p_1, p_2, q_1, q_2)$ . Тогда из (9) получим разрешающую систему из 4-х линейных алгебраических уравнений для определения остальных неизвестных краевых амплитуд. Определитель матрицы этой системы определяет спектр собственных термоупругих колебаний стержня. Это сложное трансцендентное уравнение, корни которого можно определять численно с помощью различных стандартных программ. В случае собственных колебаний существование решений и его единственность определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера. После определения недостающих граничных функций по формулам (9,10), (3), определяем перемещения, температуру в стержне.

В докладе будут представлены решения двух краевых задач 1 и 2, реализованные в системе MathCad, с графическими иллюстрациями.

#### Литература

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости - М.:Мир, 1970.
2. *Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М.* Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1. Стационарные колебания// Математический журнал.- Т. 14 (2014).№ 2. -С.5-20
3. *Алексеева Л.А.* Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1. Стационарные колебания // Известия НАН РК. Серия физико-математическая.-2014.№ 3.- С.144-152.

УДК 539.3

Алексеева Л.А.<sup>1</sup>, Душеналиев Т.Б<sup>2</sup>, Сарсенов Б.Т.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*

<sup>2</sup> *Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан, Бишкек*

<sup>3</sup> *Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Казахстан, Туркестан*

*alexeeva@math.kz, duishenaliev@mail.ru, sarsenovbak@mail.ru*

## Дифракция и преломление волн в упругом полупространстве с упругим поверхностным включением

Математическое моделирование процессов распространения и дифракции сейсмических волн в земной коре относится к актуальным проблемам геофизики и сейсмологии. Характерными для землетрясений являются возникновение в земной коре под действием тектонических напряжений глубинных трещин. При этом происходит скачкообразный сброс напряжений на трещине, порождающий нестационарные упругие волны, которые, дифрагируя на земной поверхности, порождают поверхностные волны, разрушительные для наземных сооружений.

Здесь разработана математическая модель для изучения таких явлений. Рассматривается контактная нестационарная краевая задача: упругое полупространство, на границе которого находится упругое тело с условиями жесткого контакта на границе раздела сред. Исследуется процесс дифракции и преломления волн, порождаемых сбросом напряжений на трещине в упругом полупространстве.

Для решения нестационарных задач в упругих средах одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т. Тарабриным [1]. В настоящей работе используется метод, развитый для решения контактных задач взаимодействия упругих тел в условиях плоской деформации [2]. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Для моделирования процесса сброса напряжений на трещине используются сингулярные обобщенные функции по методу, предложенному в [3].

Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругого полупространства и упругого тела при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине с использованием физико-механических параметров, типичных для горных пород и строительных сооружений. Построены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности и упругого тела и дифракционные картины полей скоростей и напряжений при отражении и преломлении ударных волн. Исследовано влияние параметров массива, глубины трещины и характера возникающих ударных волн на напряженно-деформированное состояние среды и упругого тела. Также изучено напряженно-деформированное состояние упругого тела (сооружения) в зависимости от расстояния до эпицентра.

### Литература

1. *Тарабрин Г.Т.* Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов // Строительная механика и расчет сооружений. - 1981. № 4. — С. 38–43
2. *Джусубаев С.С., Сарсенов Б.Т.* Динамическое напряженное состояние полосы при боковом импульсном давлении // Математический журнал. - 2003. — Т. 3, № 1(7). — С. 55–62
3. *Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш.* Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации // Математический журнал. - 2007. — Т. 7, № 2(25). — С. 19–31



Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К., Курманов Е.Б.

*Институт математики и математического моделирования МОН РК,  
Казахстан, Алматы**alexeeva@math.kz, zakir@math.kz, ergaly90@mail.ru***Волновая динамика среды Био при транспортных нагрузках,  
движущихся с дозвуковой скоростью**

Среди действующих источников генерации волн в сплошных средах особенно распространены *транспортные*, связанные с движущимися нагрузками, форма которых не меняется с течением времени. Этот класс задач является модельным при изучении воздействия на окружающую среду разнообразных транспортных либо транспортируемых объектов. При этом скорость их движения существенно влияет на тип дифференциальных уравнений движения, параметрически зависящих от отношения скорости движения нагрузки к скоростям распространения волн в среде. При дозвуковых скоростях движения этот класс задач в упругих средах исследовали Пожуев В.И., Кацуми В., Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. и др. [1-2]

Реальный породный массив представляет собой сложную многокомпонентную среду, поэтому математическое моделирование таких процессов на основе построения транспортных решений соответствующих систем уравнений и краевых задач в средах с усложненными свойствами и изучение их свойств весьма актуально. Существуют различные модели твердых пористых многокомпонентных сред, разработанные Био М., Рахматуллиным Х.А., Саатовым Я.У., Николаевским В.Н., Хорошуном Л.П. и др. Здесь рассматривается динамика однородной изотропной двухкомпонентной среды М.Био [3-4], состоящей из твердой и жидкой компонент.

Предполагается, что массовые силы, движущиеся с постоянной скоростью  $c$  вдоль оси  $x_3$ , в подвижной системе координат  $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3 + ct)$  не зависят от времени:  $G_i = G_i(x')$ . Искомые решения (перемещения)  $u_i$  обладают такой же структурой:  $u_i = u_i(x')$ . Вектор  $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$  размерности 6:  $u_i$  компоненты перемещения твердой фазы для  $i = 1, 2, 3$  и жидкости для  $i = 4, 5, 6$ . Аналогично для вектора массовых сил  $G$ . Уравнения движения рассматриваемой среды при действии транспортных нагрузок (в случае отсутствия вязкости жидкости) в подвижной системе координат  $x'$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + Q u_{k+3,ki} + G_i &= c^2 (\rho_{11} u_{i,33} + \rho_{12} u_{i+3,33}) \\ Q u_{k,ki} + R u_{k+3,ki} + G_{i+3} &= c^2 (\rho_{12} u_{i,33} + \rho_{22} u_{i+3,33}), \quad i, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda, \mu, Q, R$  - константы среды,  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  связаны с плотностями упругой компоненты и жидкости. Тип системы (1) существенно зависит от скорости транспортной нагрузки. Для случая *дозвуковой* нагрузки ( $c < \min\{c_1, c_2, c_3\}$ ,  $c_1, c_2$  - скорости распространения продольных волн,  $c_3$  - сдвиговой волны,  $c_2 < c_3 < c_1$ ) уравнения (1) являются эллиптическими.

Центральную роль при построении решений дифференциальных уравнений играют фундаментальные решения (тензор Грина). Для нестационарных уравнений Био фундаментальные решения ранее получены Л.А. Алексеевой, В.В. Шершневым [5].

Для построения фундаментальных решений транспортных уравнений Био (1) рассматривается действие сосредоточенных сил, описываемых сингулярными обобщенными функциями вида:  $G_i(x) = \delta_{ij} \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 + ct) = \delta_{ij} \delta(x')$ . Тензор Грина уравнений (1)

строится на основе прямого и обратного обобщенного преобразования Фурье. В случае дозвуковых нагрузок тензор Грина имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U_j^k &= b_{k3}\delta_{kj}/4\pi\mu\epsilon_3 - \\
 &-c_3^2 \sum_{l=1}^3 b_{kl} (x_3^2 x_k x_j - x_3(\delta_{k3}x_j + \delta_{j3}x_k)r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3}r^4) 4\pi\mu c^2 r^4 e_l - \\
 &-c_3^2 \sum_{l=1}^3 b_{kl} (e_l - m_l r) (\delta_{kj}r^2 - x_k x_j) 4\pi\mu c^2 r^4, k = 1, 2, 3, j = 1, \bar{6} \\
 U_j^k &= U_k^j, \quad k = 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, 3 \\
 U_j^k &= -\delta_{kj} |x_3| 2\rho_{22}c^2 + d_3\delta_{kj}/4\pi\mu\epsilon_3 - \\
 &-c_3^2 \sum_{l=1}^3 d_l (x_3^2 x_k x_j - x_3(\delta_{k3}x_j + \delta_{j3}x_k)r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3}r^4) /4\pi\mu c^2 r^4 e_l - \\
 &-c_3^2 \sum_{l=1}^3 d_l (e_l - m_l r) (\delta_{kj}r^2 - x_k x_j) /4\pi\mu c^2 r^4, k = 4, 5, 6, j = 4, 5, 6
 \end{aligned} \tag{2}$$

$e_q = \sqrt{m_q^2 r^2 + x_3^2}$ ,  $q = 3, l$ ,  $\xi^2 = \sum_{j=1}^3 \xi_j \xi_j$ , константы  $b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, d_1, d_2, d_3$  зависят от скоростей  $c_1, c_2, c_f, c_s$ .  $M_l = c/c_l$  ( $l = \bar{1}, \bar{3}$ )-числа Маха. При дозвуковой скорости нагрузки  $M_l < 1$ . Компоненты тензора  $U_j^k$  (2) имеют следующий физический смысл: при  $1 \leq j \leq 3$  это  $j$ -е компоненты перемещений твердой фазы, при  $4 \leq j \leq 6$  это ( $j - 3$ )-е компоненты перемещений жидкости от действия сосредоточенной силы вдоль  $i$ -ой оси координат (при  $1 \leq i \leq 3$ ) на твердую фазу или от действия силы вдоль ( $i - 3$ )-й оси (при  $4 \leq i \leq 6$ ) на жидкость.

В работе представлены графики перемещений (тензора Грина) среды для разных скоростей транспортной нагрузки, построены векторные поля перемещений жидкости и твердого скелета. Исследовано влияние скорости движения нагрузки на перемещения жидкой и твердой компоненты среды.

### Литература

1. *Watanabe Kazumi* Transient response of an inhomogeneous elastic solid to a moving torsional load in a cylindrical bore //Int. J. Solids and Struct. 1984. Vol. 20, No.4. P.359-376.
2. *Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.* Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука, 1989. 240 с.
3. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. Low frequency range //J. Acoust. Soc. Amer. -1956. -V.28, No.2. -P. 168-178
4. *Рахматуллин Х.А., Саатов Я.У., Филиппов И.Г., Артыков Т.У.* Волны в двухкомпонентных средах. Ташкент: Наука, 1974, 266 с.
5. *Алексеева Л.А., Шеринев В.В.* Фундаментальные решения уравнений движения среды Био // ДАН РК. -1994. №1. С.3-6.

Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы**alexeeva@math.kz, zakir@math.kz*

## Метод обобщенных функций в задачах динамики анизотропных упругих сред

Исследование динамики упругих сред в областях со сложной геометрией границ приводит к необходимости решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа. Эффективным методом решения таких задач является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ), который позволяет исходную дифференциальную задачу в области свести к решению системы ГИУ на ее границе, что позволяет понизить размерность решаемых уравнений, повысить устойчивость численных процедур их решения. Этот метод на основе теории потенциала хорошо развит для решения статических задач теории упругости, которые относятся к классу эллиптических уравнений, но непригоден для динамических задач, которые описываются системами гиперболического и смешанного типа.

В настоящей работе излагается Метод Обобщенных Функций решения начально-краевых задач теории упругости, основанный на теории обобщенных функций для псевдодифференциальных операторов [1,2], к которым относятся строго гиперболические системы второго порядка динамики упругих сред. Основные идеи МОФ для решения начально-краевых задач для волнового уравнения в многомерных пространствах изложены в [3], для решения нестационарных краевых задач динамики изотропных и анизотропных упругих сред использовались в [4-8].

МОФ позволяет свести исходную начально-краевую задачу к дифференциальным уравнениям в пространстве обобщенных вектор-функций и построить обобщенные решения в этом пространстве. Регулярные интегральные представления этих решений являются классическим решением. Исследование их предельных свойств на границах позволяет построить разрешающие ГИУ для определения неизвестных граничных функций, замыкающих решение задачи.

**1. Постановка задачи.** Уравнения движения анизотропной упругой среды описывается системой гиперболических уравнений вида [9]:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x, t) + G_i(x, t) = 0, \quad (x, t) \in R^{N+1}, \quad (1)$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml} \partial_m \partial_l - \delta_{ij} \partial_t^2, \quad i, j, m, l = \overline{1, N},$$

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{dm} = C_{ji}^{ml}, \quad (2)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_N)$ ,  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\delta_{ij} = \delta_j^i$  – символ Кронекера,  $C_{ij}^{ml}$  – матрица упругих констант, удовлетворяющая следующему условию строгой гиперболичности:

$$W(n, v) = C_{ij}^{ml} n_m n_l v^i v^j > 0 \quad \forall n \neq 0, \quad v \neq 0. \quad (3)$$

$x \in S^- \subset R^N$ ,  $S^-$  открытое ограниченное множество;  $(x, t) \in D^-$ ,  $D^- = S^- \times (0, \infty)$ ,  $D_t^- = S^- \times (0, t)$ ,  $t > 0$ ;  $D = S \times (0, \infty)$ ,  $D_t = S \times (0, t)$ .  $N = 2$  соответствует плоской деформации,  $N = 3$  – пространственной деформации

Перемещения  $u \in C(D^- + D)$ ,  $u$  – непрерывные дважды дифференцируемая вектор-функция почти всюду на  $D^-$ , за исключением, быть может, характеристических поверхностей ( $F$ ) в  $R^{N+1}$ , которым соответствуют подвижные волновые фронты ( $F_t$ ) в  $R^N$ , описывающие ударные волны. На них, в силу сплошности среды, перемещения непрерывны, но производные терпят скачки. Условия на фронтах ударных волн имеют вид [10]:

$$[u_i(x, t)]_{F_t} = 0 \Rightarrow [u_{i,t} m_l + c u_{i,l}]_{F_t} = 0, \quad (4)$$

$$\left[ \sigma_i^l m_l \right]_{F_t} = - [c u_{i,t}]_{F_t}. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_i^l = C_{ij}^{ml} u_{j,m}$ ,  $u_{i,m} = \partial_m u_i$ ,  $u_{i,t} = \partial_t u_i$ ,  $c$  - скорость движения фронта определяется решением характеристического уравнения системы (1):

$$\det \{ C_{ij}^{ml} \nu_m \nu_l - \nu_t^2 \delta_{ij} \} = 0, \quad (6)$$

где  $(\nu, \nu_t) = (\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_t)$  - вектор характеристической нормали, связанный со скоростью  $c$  соотношением

$$c = - \frac{\nu_t}{\|\nu\|}, \quad \|\nu\| = \nu_j \nu_j \quad (7)$$

Уравнение (6) имеет  $2N$  (с учетом кратности) действительных корней:  $c = \pm c_k(\nu)$ ,  $0 < c_k \leq c_{k+1}$ ,  $k = \overline{1, N}$  и, в общем случае, зависит от направления распространения волны.

Требуется определить решение системы (1), удовлетворяющее условиям (4)-(5), если известны начальные условия:

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- + S, \quad u_{i,t}(x, 0) = u_i^1(x), \quad x \in S^-; \quad (8)$$

и напряжения на границе

$$\sigma_i^l(x, t) n_l(x) = g_i(x, t), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Единственность решения поставленной начально краевой задачи теории упругости с учетом ударных волн доказана в [8].

**3. Постановка задачи в пространстве обобщенных функций. Динамический аналог формул Кирхгофа-Сомильяны.** Обозначим  $H_D^-(x, t) = H_S^-(x)H(t)$  - характеристическую функцию пространственно-временного цилиндра  $D^-$ , где  $H_S^-(x)$  характеристическая функция  $S^-$ . Если граница  $S$  гладкая, с непрерывной нормалью, то на ней доопределим  $H_S^-(x) = 0, 5$ .  $H(t)$  - функция Хевисайда. Введем обобщенные функции

$$\hat{u}(x, t) = u H_D^-(x, t), \quad \hat{G}_k(x, t) = G_k H_D^-(x, t) \quad (11)$$

Обозначим  $\hat{U}_i^k(x, t)$  - тензор Грина (матрица фундаментальных решений уравнений (1) при  $F_i = \delta_i^k \delta(x) \delta(t)$ ) и удовлетворяющий условиям излучения (построение  $U$  см. [7]). Введем также первообразную тензора Грина по  $t$ :

$$\hat{V}_i^k(x, t) = \hat{U}_i^k(x, t) * H(t) \Rightarrow \partial_t \hat{V}_i^k = \hat{U}_i^k \quad (12)$$

Здесь и далее символ " \* " означает полную свертку по  $(x, t)$ ; переменная под звездочкой соответствует неполной свертке только по  $x$  или  $t$  соответственно. Верна следующая теорема.

**Теорема 1.** Если  $u(x, t)$  - классическое решение первой (второй) краевой задачи, то обобщенное решение  $\hat{u}$  представимо в виде свертки:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = & U_i^k * \hat{G}_k + U_i^k * u_k^1(x) H_S^-(x) + \\ & + \partial_t U_i^k * u_k^0(x) H_S^-(x) + U_i^k * g_k(x, t) \delta_S(x) H(t) - \\ & - C_{kj}^{ml} \partial_l V_i^k * u_{j,t}(x, t) n_m(x) \delta_S(x) H(t) - C_{kj}^{ml} \partial_l V_i^k * u_j^0(x) n_m(x) \delta_S(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\delta_S$  - сингулярная обобщенная функция - простой слой на  $S$  [1], соответственно  $g_k(x, t) \delta_S(x) H(t)$  - простой слой на  $D$ .

Формула теоремы (при нулевых начальных данных) является динамическим аналогом формулы Сомильяны [9], которая выражает перемещения упругой среды через граничные значения напряжений и скоростей перемещений, что будет показано в докладе. В отсутствие границы (слагаемые со слоями исчезают), они дают решение задачи Коши для анизотропной упругой среды и являются обобщенным аналогом формул Пуассона ( $N = 2$ ) и Кирхгофа ( $N = 3$ ) задачи Коши для волнового уравнения [1].

Регулярное интегральное представление этого решения и сингулярные ГИУ для определения неизвестных значений перемещений на границе будут представлены в докладе.

## Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. 1981. 512с.

2. Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.- М.:Мир, 1986.- Т.1.- 462с.
3. Алексеева Л. А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. -Т.6.- №1(19).- 2006.- С.16-32.
4. Алексеева Л. А. Аналогии формул Кирхгофа и Сомильяны в плоских задачах эластодинамики// Прикладная математика и механика. -Т.55.- Вып.2.- 1991.- С.298-308.
5. Алексеева Л. А., Закирьянова Г. К. Динамические аналогии формул Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии. // Прикладная механика и математика. -1994.- Т.58.- №2. -С.197-202.
6. Alexeyeva L. A., Dildabayev Sh. A., Zakir'yanova G. K., Zhanbyrbayev A. B. Boundary integral equations method in two- and three dimensional problems of electrodynamics // Int. J. Computational mechanics.- 1996.- Vol.18.- No.2. -P.147-157.
7. Алексеева Л. А., Закирьянова Г. К. Фундаментальные решения гиперболических систем второго порядка // Дифференциальные уравнения.- 2001.- Т.37.- №4.- С.488-494.
8. Alexeyeva L. A., Zakir'yanova G. K. Generalized Solutions of Initial-Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems// Computational Mathematics and Mathematical Physics.- 2011.- Vol. 51.-No. 7.- 1194-1207 pp.
9. Новацкий В. Теория упругости.М:Мир.- 1975-.872с.
10. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах.- М.:Наука.- 1980.- 280с.

УДК 539.3

Алексеева Л.А., Сабаев Е., Сандыбаев Е.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*  
*alexeeva@math.kz, yerik.sabayev@mail.ru*

## **Математические модели динамики среды при образовании трещин**

Хорошо известно, что землетрясения связаны с процессом формирования под действием тектонических напряжений глубинных трещин в земной коре и возникновением магистральных трещин, сопровождающихся ударными волнами, которые вызывают катастрофические разрушения. Изучение процессов распространения и дифракции волн в деформируемых твердых средах методом математического моделирования связано с решением краевых задач механики деформируемого твердого тела с трещинами. Здесь с использованием моделей упругой и термоупругой среды разработаны математические модели динамики среды при возникновении трещин достаточно произвольных форм с учетом упругих и теплопроводных свойств породного массива. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения задач динамики упругой и термоупругой сред с трещиной при разном контактном взаимодействии берегов трещины и даны их регулярные интегральные представления.

Проведена в системе MathCad компьютерная реализация решений при нестационарном сбросе напряжений на трещине в упругой среде при плоской и пространственной деформации.

**1. Постановка задач.** Изотропная термоупругая среда характеризуется массовой плотностью  $\rho$ , упругими постоянными Ламе  $\lambda, \mu$ , и тремя термоупругими константами  $\gamma, \eta$  и  $\kappa$ . Ее движение описывает система уравнений [1]:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \gamma \theta_{,i} + F_i &= \rho \ddot{u}_i \\ \Delta \theta - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{j,j} + \frac{1}{\kappa} Q &= 0 \quad i, j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_i$  - компоненты вектора смещений,  $u_{N+1} = \theta$  - температура;  $F_i$  - компоненты массовой силы;  $Q$  - мощность теплового источника. Всюду символом после запятой обозначены производные по координатам:  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ ,  $\dot{u} = \partial u / \partial t$ . Тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  связан с компонентами смещений  $u_i$  и температурой  $\theta$  соотношением Дюамеля - Неймана:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} u_{k,l} - \gamma \theta \delta_{ij} = (\lambda u_{k,k} - \gamma \theta) \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

Система (1) смешанного гипербола-параболического типа, допускающая разрывные по производным решения на волновых фронтах  $F_t$ , на которых выполняются следующие условия на скачки [2,3]:

$$\begin{aligned} [u]_{F_t} = 0, \quad [\theta]_{F_t} = 0, \quad [\sigma_{ij} m_j]_{F_t} = -\rho c [\dot{u}_i]_{F_t}, \quad [(grad \theta, m)]_{F_t} = \eta [(\dot{u}, m)]_{F_t}, \\ [W(u, \theta, t)]_F = -c^{-1} [(\dot{u}, \sigma_{ij} m_i e_j) + \gamma \eta^{-1} \theta (grad \theta, m)]_F \end{aligned} \quad (3)$$

где  $m$  - волновой вектор,  $W(u, \theta, t) = 0,5 \left\{ \sigma_{ij} u_{i,j} + \rho \|\dot{u}\|^2 + \gamma \theta u_{j,j} + \gamma (\eta \kappa)^{-1} \theta^2 \right\}$  - плотность энергии.

Рассматривается неразвивающаяся трещина в предварительно напряженной среде, которая моделируется поверхностью Ляпунова  $S$  с краем,  $n(x)$  - единичная нормаль к  $S$ . Задан скачок напряжений на трещине, который, вообще говоря, зависит от скачка скоростей ее берегов:

$$n_j [\sigma_{ij}]_S = \chi_i [(\dot{u}, n)]_S, [\theta]_S, [(grad \vartheta, n)]_S \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

где  $\chi_i$  - известные функции, а скачки  $[(\dot{u}, n)]_S, [\theta]_S, [(grad \vartheta, n)]_S$  известны, либо связаны какими-то соотношениями, которые определяют модель трещины (свободная трещина, вязкий контакт берегов и т.п.). Эти связи позволяют моделировать различный тип взаимодействия берегов трещины, которая является нераскрывающейся (берега трещины в процессе взаимодействия не отходят друг от друга).

Представим напряженно - деформированное состояние среды в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^d, \quad u_i = u_i^0 + u_i^d, \quad t > 0 \quad (5)$$

где индексом 0 помечены статические напряжения и перемещения до момента образования трещины, а индексом d - динамическая часть напряжений и перемещений, возникающие вследствие сброса напряжений при возникновении трещины описывающие процесс распространения термоупругих волн в среде. Для них уравнения движения среды вне трещины имеют аналогичный (1) вид. Требуется определить  $u_i^d, \sigma_{ij}^d$ , удовлетворяющее нулевым начальным условиям, граничным условиям на скачки (3) и на берегах трещины (4).

**2. Обобщенное решение задачи.** Для построения решения задачи использовался метод обобщенных функций [3,4], который позволяет исходную краевую задачу записать в виде одной системы дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных вектор-функций, содержащих источники, описываемые сингулярными обобщенными функциями типа простых и двойных слоев на трещине. Используя  $\hat{U}_m^i$  - матрицу Грина уравнений (1) [4,5], которая удовлетворяет условиям излучения на бесконечности, построено обобщенное

решение в виде суммы свертков:

$$\hat{u}_m = -\hat{U}_m^i * \hat{F}_i - \frac{1}{\kappa} \hat{U}_m^{N+1} * Q + \hat{U}_m^i * [\sigma_{ij}]_S n_j \delta_S + C_{ij}^{kl} \hat{U}_{m,j}^i * [u_k]_S n_l \delta_S H(t) - \gamma n_i [\vartheta]_S \delta_S * \hat{U}_m^{N+1}, i - \quad (6)$$

$$\frac{1}{\kappa} Q * \hat{U}_m^{N+1} + (n_j [\vartheta]_S \delta_S(x)) * \partial_j \hat{U}_m^{N+1} - [(grad \vartheta - \eta \dot{u}_t, n)]_S \delta_S(x) * \hat{U}_m^{N+1}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{U}_{N+1}^i * \hat{F}_i + [\sigma_{ij}]_S n_j \delta_S * \hat{U}_{N+1}^i + ([u_k]_S n_l \delta_S) * C_{ij}^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{U}_{N+1}^i - \gamma n_i [\vartheta]_S \delta_S * \hat{U}_{N+1}^i - \quad (7)$$

$$-\frac{1}{\kappa} \hat{U}_{N+1}^{N+1} * Q + \hat{U}_{N+1}^{N+1} * [(grad \vartheta - \eta \dot{u}_t, n)]_S \delta_S - \partial_j \hat{U}_{N+1}^{N+1} * (n_j [\vartheta]_S \delta_S)$$

Здесь в правой части сингулярная обобщенная функция  $\delta_S$  и ее производные - простые и двойные слои на S [4] с плотностями, зависящими от скачка напряжений, перемещений, температуры и ее градиента на трещине. Интегральное представление этих свертков зависит от размерности задачи и вида тензора Грина, который при плоской деформации (N=2) описывается регулярными обобщенными функциями, а пространственном случае (N=3) - сингулярными.

**3. Аналитические представления решений.** Для термоупругой среды тензор Грина уравнений (1) удастся построить только в пространствах преобразования Фурье-Лапласа по времени. Построено интегральное представление обобщенного решения (6),(7) в этих пространствах. Для N=3 численные расчеты проведены для прямоугольной трещины при сбросе вертикальных напряжений на ней. В случае плоской деформации построены регулярные интегральные представления обобщенного решения при  $\kappa = 0$  или  $\gamma = 0$  (две модели несвязанной термоупругости). Компьютерная реализация построенных решений проведена в системе MathCad 15. В докладе будут представлены дифракционные картины векторных полей перемещений, наглядно демонстрирующие процессы распространения дилатационных и сдвиговых волн, при сбросе вертикальных и касательных напряжений на трещине в отсутствие и при наличии взаимодействия ее берегов.

### Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М: "Мир".- 1975.- 872с.
2. *Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65 № 2.С.334-345.
3. *Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N.* Shock thermoelastic waves as generalized solutions of thermoelasticity equations ISAAC 9-th Congress: abstracts. - Krakow, 2013. - PP. 19-20.
4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М: "Наука".- 1978.-318с.
5. *Купрадзе В.Г., Гегелиа Т.Г., Башлейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.М: "Наука".-1976.-664с.

Алимжанов А.М., Оздамирова Д.М., Джалимбетов С.Б.

*Институт механики и машиноведения им.академика У.А.Джолдасбекова,  
Казахстан, Алматы**Aivarmr@rambler.ru***Расчет НДС и устойчивости пород приконтурной зоны вертикальной скважины в неоднородном горном массиве с использованием полиномиальных функций**

**1. Расчет НДС пород приконтурной зоны вертикальной скважины в неоднородном горном массиве** Горный массив с вертикальной скважиной радиусом  $R_0$  моделируется невесомой плоскостью с круговым отверстием; при этом на бесконечности действуют сжимающие гидростатические усилия  $\gamma H$  с удельным весом горной породы  $\gamma$ , а по контуру скважины действует равномерное давление находящегося в ней бурового раствора  $\gamma_p H$  с удельным весом  $\gamma_p$ . Рассматриваемая глубина  $H$  та-кова, что вокруг скважины образуется полностью охватывающая ее зона неупругих деформаций (ЗНД). В области упругих деформаций массив принимается упругим, однородным, изотропным, в котором справедлив обобщенный закон Гука, а в ЗНД выполняются условия пластичности Кулона-Мора и соотношения деформационной теории пластичности. Задача решается в безразмерных полярных координатах  $r, \theta$  (все величины с размерностью длины отнесены к радиусу скважины, т.е. радиус скважины  $r = 1$ ).

Процесс бурения вертикальной скважины сопряжен с изменением механических свойств окружающего горного массива. Необходимо учитывать уплотнение и разрежение приствольных пород, их разупрочнение буровым раствором либо их укрепление за счет создания в приствольной зоне кольматационного экрана, увлажнение, растворение и другие про-цессы, влияющие на НДС и устойчивость стенок скважин [1-3]. Подобрать отдельную аналитическую функцию, которая бы позволила учесть изменение механических свойств пород приствольной зоны вследствие всех вышеперечисленных процессов, не представляется возможным. Поэтому необходимо задать неоднородность в наиболее общем виде с возможностью ее конкретизации в каждом отдельном случае посредством определенных аналитических, численных и графических приемов.

Нами в работе предлагается моделирование радиальной неоднородности механических свойств массива в области упругих деформаций в виде переменного (радиально неоднородного) модуля упругости пород  $E(r)$ , представленного произвольным образом в виде обобщенного полинома  $n$ -й степени  $\bar{P}_n(r)$  с неопределенными коэффициентами  $e_i$ :

$$E(r) = E_0 \bar{P}_n(r), \quad (1)$$

где  $E_0$  - значение модуля упругости в нетронутом массиве.

В ЗНД аналогично вводится переменный (радиально неоднородный) коэффициент сцепления пород  $K(r_0, r)$ , зависящий помимо радиуса  $r$  еще и от безразмерного радиуса ЗНД  $r_0$ . При этом функция  $K(r_0, r)$  также может представляться в виде обобщенного полинома  $n$ -й степени  $\bar{Q}_n(r_0, r)$ :

$$K(r_0, r) = K_0 \bar{Q}_n(r_0, r), \quad (2)$$

где  $K_0$  - значение коэффициента сцепления в однородном массиве.

В случае, когда распределение коэффициента сцепления пород не зависит от радиуса ЗНД  $r_0$ , имеем выражение  $K(r) = K_0 \bar{Q}_n(r)$ .

Для расчета НДС пород приконтурной зоны вертикальной скважины в неоднородном горном массиве решена осесимметричная задача в постановке плоской дефор-мации для



круговой цилиндрической полости (скважины). Получены выражения для компонент основного невозмущенного НДС пород приконтурной зоны вертикальной скважины в неоднородном горном массиве, содержащие полиномиальные функции.

Радиус ЗНД  $r_0$  существенно зависит от противодействия бурового раствора скважины  $\gamma_p H$  и определяется из трансцендентного уравнения, полученного через условия сопряжения на границе  $r_0$  :

$$f(r_0) = \gamma_p H, \quad (3)$$

Уникальность найденных решений и выражения (3) заключается в том, что они справедливы при любом распределении механических характеристик (1),(2). Функция  $E(r)$  в виде обобщенного полинома  $n$ -й степени с неопределенными коэффициентами  $e_i$  позволяет описать любое распределение модуля упругости породы вблизи вертикальной скважины с помощью метода конкретизации полинома, впервые предложенного в [4]. Метод [4] справедлив и для функции  $K(r_0, r)$ , которая также может быть представлена в виде обобщенного полинома  $n$ -й степени (2), поскольку для нее решения получены в квадратурах.

**2. Расчет устойчивости упругопластического равновесия приконтурной зоны вертикальной скважины в неоднородном горном массиве** Устойчивость упругопластического равновесия стенок вертикальной скважины в неоднородном массиве исследована с помощью положений теории устойчивости в механике горных пород (ТУМГП), разработанной М.Т.Алимжановым [1,2]. Согласно ТУМГП, необходимо найти критическое противодействие бурового раствора  $\gamma_p^* H$  на стенки скважины, при котором может произойти потеря устойчивости ее стенок (т.е. наряду с осесимметричной могут возникнуть и другие формы ее равновесия). Отметим, что в [2,3] исследована плоская и пространственная осесимметричная форма потери устойчивости равновесия стенок вертикальной скважины для однородного горного массива.

Рассматривается плоская потеря устойчивости равновесия стенок вертикальной скважины в рассматриваемом неоднородном горном массиве, при которой дополнительное решение ищется в виде [1,3]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 + \sigma_r', \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta', \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}', \\ u_r &= u_r^0 + u_r', \quad u_\theta = u_\theta^0 + u_\theta' \end{aligned} \quad (4)$$

В выражении (4) индексом нулик наверху отмечены компоненты основного невозмущенного состояния, а индексом штрих наверху - компоненты возмущений. Задача устойчивости сводится к нахождению характеристического уравнения (5), состоящего из компонент возмущений (дополнительных компонент НДС), позволяющего найти критический радиус ЗНД  $r^*$ , обеспечивающий устойчивость вертикальной скважины. Уравнение (5) представляет собой определитель четвертого порядка с элементами  $a_{ij}$ , который в случае нетривиального решения записывается в виде трансцендентного уравнения относительно радиуса  $r^*$  :

$$|a_{ij}| \quad (5)$$

Решение задачи устойчивости заключается в определении такого значения давления бурового раствора  $\gamma_p^* H$ , при котором компоненты возмущения могут быть отличны от нуля. В зависимости от вида выражения для дополнительных компонент перемещений (то есть от формы потери устойчивости) может быть получено бесконечное множество дополнительных решений, близких к основному. Нетривиальность каждого из этих решений приводит к характеристическому уравнению, позволяющему определить критическое противодействие бурового раствора в зависимости от параметра волнообразования  $m$ :  $\gamma_{pm}^* H = \gamma_p^*(m) H$ . Искомое давление есть наибольшее из всех значений  $\gamma_{pm}^* H$ . Численные расчеты показывают, что наибольшее критическое давление  $\gamma_{p1}^* H$  соответствует параметру  $m$ , равному 1, вне зависимости от характера неоднородности и находится из совместного решения трансцендентного уравнения (3) и характеристического уравнения (5).

Для буровиков-технологов величина  $\gamma_{p1}^* H$  позволяет на заданной глубине установить оптимальный удельный вес бурового раствора  $\gamma_{p1}^*$ , позволяющий с одной стороны избежать чрезмерных гидродинамических нагрузок на стенки ствола скважины, а с другой стороны - предотвратить потерю устойчивости равновесия стенок скважины со всеми вытекающими осложнениями.

### Литература

1. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. - Алматы: Изд-во Наука, 1982. - 272с.
2. Алимжанов М.Т. О постановке задач устойчивости стенок глубоких скважин // Доклады РАН. - 1992. - Т.325, Вып.3. - С.445-449.
3. Alimzhanov M.T. Methods of continuum nonlinear mechanics in problems of rock pressure control at drilling deep Holes// Advances in Mechanics, Int.Jour., Warsaw. - 1992. - Vol.15, №3-4. - P.41-69.
4. Алимжанов А.М. НДС и устойчивость стенок вертикальной скважины, имеющей кольматационный экран // Бурение и нефть. - 2008. №12. - С.16-19.

УДК 532.526

Бекетаева А.О., Елубаева Ш.М.

*Институт математики и математического моделирования МОН РК,  
Казахстан, Алматы  
azimaras@mail.ru*

### Метод предобуславливания для существенно дозвуковых течений

Численно моделируется трехмерное дозвуковое турбулентное течение с симметричным перпендикулярным вдувом круглых струй со стенок канала. Решение исходных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых моделью турбулентности, осуществляется с помощью алгоритма, построенного на основе ENO-схемы. Для ускорения сходимости итерационного процесс применяется метод предобуславливания, для чего в исходных уравнениях производится переход к вектору примитивных переменных. Ключевые слова: численное моделирование, дозвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье-Стокса.

#### Введение

Характерная черта моделирования низкоскоростных течений на основе сжимаемой формы уравнений Эйлера или Навье-Стокса состоит в возникновении неустойчивости численного решения, а также в уменьшении скорости сходимости итерационного процесса в связи с малой разницей между скоростями акустических и конвективных волн [1]. Предобуславливание (preconditioning) позволяет модифицировать разностные уравнения таким образом, что собственные значения якобиана (скорости распространения волн) модифицированной системы уравнений имели одинаковый порядок величины. Целью исследования настоящей работы является построение численного алгоритма для решения задачи вдува дозвуковых струй из круглых отверстий, расположенных симметрично на верхней и нижней стенках канала, перпендикулярно низкоскоростному потоку совершенного газа с применением метода предобуславливания. Решение исходных

осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса осуществляется с помощью алгоритма, построенного на основе ENO-схемы.

### Постановка задачи

Исходной является система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (E - E_v)}{\partial x} + \frac{\partial (F - F_v)}{\partial z} + \frac{\partial (G - G_v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)$$

Выражения для конвективных  $E, F, G$  и диффузионных  $E_v, F_v, G_v$  векторов потоков даны в [2]. Исходная система (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе  $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$  давление и полная энергия отнесены к значению  $\rho_\infty u_\infty^2$ , характерным размером длины является диаметр круглого отверстия струи.

### Граничные и начальные условия имеют следующий вид:

На входе, а также в качестве начальных данных задаются параметры потока; на нижней стенке условие прилипания; вблизи стенки задается пограничный слой; на струе - параметры струи; на верхней границе задается условие симметрии, на боковых границах и выходной границе задаются условия неотражения.

### Метод решения

Предварительно в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне струи, для более точного учета течения, вводится сгущение сетки с помощью преобразований [2]:

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(z), \quad \zeta = \zeta(y) \quad (2)$$

При этом система уравнений (1) в обобщенных координатах запишется в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}}{\partial \zeta} \quad (3)$$

где  $\tilde{U} = \frac{1}{J}U$ ,  $\tilde{E} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right)E$ ,  $\tilde{F} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)F$ ,  $\tilde{E}_{v2} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right)E_{v2}$ ,  $\tilde{E}_{vm} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right)E_{vm}$ ,  $\tilde{F}_{v2} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)F_{v2}$ ,  $\tilde{F}_{vm} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right)F_{vm}$ ,  $\tilde{G}_{v2} = \left(\frac{\zeta_y}{J}\right)G_{v2}$ ,  $\tilde{G}_{vm} = \left(\frac{\zeta_y}{J}\right)G_{vm}$ ,  $J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, z, y)}$  - якобиан преобразования,  $\tilde{E}_{vm}, \tilde{E}_{v2}$  - диффузионные члены, содержащие смешанные и вторые производные.

Линеаризованная система исходных уравнений (3) примет вид:

$$U_t + AU_\xi + BU_\eta + CU_\zeta = RHS, \quad (4)$$

где  $A = \frac{\partial E}{\partial U}$ ,  $B = \frac{\partial F}{\partial U}$ ,  $C = \frac{\partial G}{\partial U}$  - матрицы Якоби,  $RHS$  - правая часть системы (3).

В работе рассматривается переход от консервативных переменных  $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)/J$  к вектору примитивных переменных  $U_v = (\rho, u, v, w, T)/J$ . В этом случае матрицы перехода:  $M = \frac{\partial U}{\partial U_v}$ ,  $M^{-1} = \frac{\partial U_v}{\partial U}$ . Тогда система (4) относительно вектора  $U_v$  запишется следующим образом:

$$M\partial_t U_v + A_v\partial_\xi U_v + B_v\partial_\eta U_v + C_v\partial_\zeta U_v = RHS \quad (5)$$

где  $A_v = AM$ ,  $B_v = BM$ ,  $C_v = CM$ .

Процедура преобуславливания состоит в умножении члена, содержащего производную по времени на матрицу преобуславливания  $G_v$ :

$$G_v M \partial_t U_v + A_v \partial_\xi U_v + B_v \partial_\eta U_v + C_v \partial_\zeta U_v = RHS \quad (6)$$

После умножения на  $G^{-1}$ , где  $G = G_v M$ , система (6) перепишется в следующем виде:

$$\partial_t U_v + \tilde{A}_v \partial_\xi U_v + \tilde{B}_v \partial_\eta U_v + \tilde{C}_v \partial_\zeta U_v = RHS \quad (7)$$

здесь  $\tilde{H}_v = G^{-1}H_v$  ( $H = A, B, C$ ).

В работе используется матрица предобусловливания из работы [3] по версии Вайс - Смита:

$$G = \begin{pmatrix} 1/\beta'\gamma T & 0 & 0 & 0 & -\rho/T \\ u/\beta'\gamma & \rho & 0 & 0 & -\rho u/T \\ v/\beta'\gamma & 0 & \rho & 0 & -\rho v/T \\ w/\beta'\gamma & 0 & 0 & \rho & -\rho w/T \\ H/\beta'\gamma - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho[\gamma/(\gamma-1) - H/T] \end{pmatrix}$$

где  $\beta' = \beta/[1 + (\gamma-1)\beta]$ , а  $\beta$  является параметром по выбору, (в данной работе  $\beta = \text{MAX}(\text{MIN}(M^2, 1, 0), \beta_{\min}), \beta_{\min} \approx 3M_\infty^2$ )

Соответственно матрицы Якоби, определяться в виде:

$$\tilde{H}_v = \begin{pmatrix} \beta u & \rho T \gamma \beta k_x & \rho T \gamma \beta k_y & \rho T \gamma \beta k_z & 0 \\ \frac{k_x}{\rho} & u & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_y}{\rho} & 0 & u & 0 & 0 \\ \frac{k_z}{\rho} & 0 & 0 & u & 0 \\ \frac{Q(\gamma-1)(\beta-1)}{\rho\gamma} & k_x T \beta (\gamma-1) & k_y T \beta (\gamma-1) & k_z T \beta (\gamma-1) & u \end{pmatrix}$$

где  $Q = k_x u + k_y v + k_z w$ ,  $k = \xi, \eta, \zeta$ .

Собственные значения матриц примут вид:

$$\lambda(\tilde{H}_v) = \left( Q, Q, Q, \frac{(\beta+1)Q \pm S}{2} \right)$$

где  $S = \sqrt{Q^2(\beta-1)^2 + 4\beta c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}$  выбран таким образом, что если параметр  $\beta$  пропорционален  $Q^2$ , то для малых  $|Q|$ ,  $S$  пропорциональна  $Q$  и следовательно, все собственные значения будут иметь одинаковый порядок величины. Правые собственные вектора матриц запишутся следующим образом:

$$H_h = \begin{pmatrix} \rho(\lambda_+ - Q) & k_x & k_y & k_z & \frac{-2Y[(1-\beta)(-\lambda_+ Q + Q^2) + \beta c^2]}{\gamma[-\beta Q + \lambda_-]} \\ \rho(\lambda_- - Q) & k_x & k_y & k_z & \frac{-2Y[(1-\beta)(-\lambda_- Q + Q^2) + \beta c^2]}{\gamma[-\beta Q + \lambda_+]} \\ 0 & k_y & k_x & 0 & k_z \\ 0 & k_z & 0 & k_x & k_y \\ 0 & 0 & k_z & k_y & k_x \end{pmatrix}$$

Левые собственные вектора в направлении  $x$  задаются как :

$$H_h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho R} & -\frac{1}{\rho R} & 0 & \frac{2Y((1-\beta)[Q^2(1+\beta) - Q\lambda_- - Q\lambda_+] + \beta c^2)}{\gamma(\beta Q - \lambda_-)(\beta Q - \lambda_+)} & 0 \\ \frac{-\lambda_- + Q}{R} & \frac{-\lambda_+ + Q}{R} & 0 & \frac{2Y[(1-\beta)(Q^3 - Q^2\lambda_- - Q^2\lambda_+ + Q\lambda_- \lambda_+ + Q\beta c^2)]}{\gamma(\beta Q - \lambda_-)(\beta Q - \lambda_+)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где  $R = \lambda_- + \lambda_+$ ,  $Y = (\gamma-1)$ .

В соответствии с принципом построения ENO-схемы согласно работе [2] и после факторизации одношаговой конечно-разностной схемы для интегрирования по времени уравнения (7) получается следующее равенство:

$$\left\{ I + \Delta t \left[ \left( \hat{A}_v^+ + \hat{A}_v^- \right)^n \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{A}_v^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\mu}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\tilde{U}_1} \right] \right\} \times \quad (8)$$

$$\left\{ I + \Delta t \left[ \left( \hat{B}_v^+ + \hat{B}_v^- \right)^n \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{B}_v^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\mu}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \right] \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ I + \Delta t \left[ \left( \hat{C}_v^+ + \hat{C}_v^- \right)^n \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{C}_v^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\mu}_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \right] \right\} \tilde{U}^{n+1} = \\
& = \tilde{U}^n + \Delta t \left[ \frac{\partial \tilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v22}^n}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (2\tilde{E}_{vm}^n - \tilde{E}_{vm}^{n-1}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (2\tilde{F}_{vm}^n - \tilde{F}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (2\tilde{G}_{vm}^n - \tilde{G}_{vm}^{n-1}) \right] \\
& - \Delta t \left[ \left( \hat{A}_v^+ + \hat{A}_v^- \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi + D_\xi) + \left( \hat{B}_v^- + \hat{B}_v^- \right) \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta + D_\eta) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \hat{C}_v^+ + \hat{C}_v^- \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} (E_\zeta + D_\zeta) \right]
\end{aligned}$$

здесь  $\hat{A}^\pm = R \hat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1}$  -матрица, составленная из собственных значений матриц Якоби, причем  $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$

Аппроксимация членов, содержащих добавочные вектора высокого порядка точности имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_{i+1/2j}^- \left[ \left( \vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi \right)_{i+1j} - \left( \vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi \right)_{ij} \right] + \hat{A}_{i-1/2j}^+ \left[ \left( \vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi \right)_{ij} - \left( \vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi \right)_{i-1j} \right] = \\
& = R \hat{\Lambda}^- R_{i+1/2j}^{-1} [(\text{minmod} (\bar{E}_{\xi i+3/2j} \bar{E}_{\xi i+1/2j})) + \\
& \quad + \dot{m} (\Delta_- \hat{D}_{\xi i+3/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i+3/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{i+1j} \right| > \left| \Delta_+ \tilde{U}_{i+1j} \right| \\
& \quad + \dot{m} (\Delta_- \bar{D}_{\xi i+1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i+1/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{i+1j} \right| \leq \left| \Delta_+ \tilde{U}_{i+1j} \right|] \\
& \quad - (\text{minmod} (\bar{E}_{\xi i+1/2j} \bar{E}_{\xi i-1/2j})) + \\
& \quad + \dot{m} (\Delta_- \hat{D}_{\xi i+1/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i+1/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{ij} \right| > \left| \Delta_+ \tilde{U}_{ij} \right| \\
& \quad + \dot{m} (\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i-1/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{ij} \right| \leq \left| \Delta_+ \tilde{U}_{ij} \right|] + \\
& \quad + R \hat{\Lambda}^+ R_{i-1/2j}^{-1} [(\text{minmod} (\bar{E}_{\xi i+1/2j} \bar{E}_{\xi i-1/2j})) + \\
& \quad - \dot{m} (\Delta_- \hat{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-1/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{ij} \right| \leq \left| \Delta_+ \tilde{U}_{ij} \right| \\
& \quad - \dot{m} (\Delta_- \bar{D}_{\xi i+1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i+1/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{ij} \right| > \left| \Delta_+ \tilde{U}_{ij} \right|] \\
& \quad - (\text{minmod} (\bar{E}_{\xi i-1/2j} \bar{E}_{\xi i-3/2j})) + \\
& \quad - \dot{m} (\Delta_- \hat{D}_{\xi i-3/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-3/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{i-1j} \right| \leq \left| \Delta_+ \tilde{U}_{i-1j} \right| + \\
& \quad - \dot{m} (\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i-1/2j}) \quad \text{minmod} \left| \Delta_- \tilde{U}_{i-1j} \right| > \left| \Delta_+ \tilde{U}_{i-1j} \right|]
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\xi i+1/2} &= (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{2} \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right] \Delta_+ \tilde{E}_i, \\
\bar{E}_{\xi i-1/2} &= (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{2} \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right] \Delta_- \tilde{E}_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\xi i+1/2} &= (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{6} \left[ \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right] \Delta_+ \tilde{E}_i, \\ \bar{D}_{\xi i-1/2} &= (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{6} \left[ \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right] \Delta_- \tilde{E}_i, \\ \hat{D}_{\xi i+1/2} &= (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right) \right]_i + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right) \Delta_+ \tilde{E} \\ \hat{D}_{\xi i-1/2} &= (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right) \Delta_- \tilde{E}_i \quad , \end{aligned}$$

где  $\operatorname{minmod}(a, b) = \begin{cases} s \cdot \operatorname{min}(|a|, |b|) & \operatorname{sign}(a) = \operatorname{sign}(b) = s \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ ,

$$\dot{m}(a, b) = \begin{cases} a & |a| \leq |b| \\ b & |a| > |b| \end{cases}$$

Аппроксимация производных в конвективных членах, членах содержащих добавочные вектора высокого порядка, а также в членах, содержащих вторые и смешанные производные производится согласно [1]. Решение системы (8), осуществляется методом расщепления относительно вектора матричной прогонкой.

#### Литература

1. Волков К.Н. Предобусловливание уравнений Эйлера и Навье-Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктурированных сетках // Computational Mathematics and Mathematical Physics.- 2009.- Vol. 49.-No. 10.- pp.11868-1884.
2. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Численное исследование пространственного сверхзвукового течения совершенного газа при наличии поперечного вдува струй // Прикладная механика и техническая физика. - 2011.- Vol. 52.-No. 6.- pp.1-10.
3. Tom Pulliam, Dennis Jespersen Low-Mach Preconditioning Algorithm. www. people.nas.nasa.gov/jesperse/precon/lowmach.ps

УДК 539.3

Закирьянова Г.К.

*Институт математики и математического моделирования МОН РК,  
Казахстан, Алматы*

*zakir@math.kz*

### Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики анизотропных сред

Исследования динамики сплошных сред связаны со многими актуальными научно-техническими проблемами. Так, в связи с проблемами сейсмостойкого строительства важное значение имеет исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности подземных сооружений при распространении в среде сейсмических волн. С

математической точки зрения эти исследования приводят к задачам дифракции волн в средах, ослабленных полостями различной формы. При этом особое место занимают исследования распространения волн от сосредоточенных источников, приводящие к построению и исследованию решений уравнений при действии сил, описываемых обобщенными  $\delta$  - функциями различной размерности. Сложность проблемы для задач механики обусловлена тем, что движение сред описывается не одним уравнением, а системой уравнений, что требует построения решений для систем уравнений, порядок которых зависит от размерности пространства решений. Получаемые фундаментальные решения позволяют строить решения при действии в среде различных массовых сил [1]. Кроме того, эти решения используются для построения ядер разрешающих сингулярных граничных интегральных уравнений при решении краевых задач [2].

Для учета реальных свойств среды используются различные модели. В работе рассматривается анизотропная среда, которая по своим характеристикам приближена к реальным средам, в частности, горным породам. Распространение волн в такой среде подчинено более сложным закономерностям, чем в изотропной среде, а напряженно-деформированное состояние среды существенно зависит от степени ее анизотропии. Так, в средах с сильной анизотропией упругих свойств имеет место наличие лакун [3] - подвижных невозмущенных областей, ограниченных волновыми фронтами и расширяющихся с течением времени, и фронт волны резко отличается от классического, имеет сложную негладкую форму [4,5].

Уравнения движения анизотропной упругой среды есть система строго гиперболических уравнений с производными второго порядка:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x, t) + G_i(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml} \partial_m \partial_l - \rho \delta_{ij} \partial_t^2, \quad (2)$$

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}, \quad i, j, m, l = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где  $x \in R^N$  (в физических задачах  $N = 2, 3$ , соответствующих случаям плоской деформации и пространственному),  $\rho$  - плотность среды,  $G_i$  - массовые силы,  $\delta_{ij}$  - символ Кронеккера,  $C_{ij}^{ml}$  - матрица упругих констант, обладающая указанными выше свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов (3) и удовлетворяющих условию строгой гиперболичности  $W(n, v) = C_{ij}^{ml} n_m n_l v^i v^j > 0 \forall n \neq 0, v \neq 0$  (здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам в указанных выше пределах их изменения).

В [6] построены и изучены свойства тензора Грина  $U_j^k(x, t)$  - матрицы фундаментальных решений системы уравнений (1) при  $G_i = \delta_i^k \delta(x) \delta(t)$ , удовлетворяющей условиям излучения, для пространства произвольной размерности  $N$ . Для анизотропной (ортогруппной) упругой среды, находящейся в условиях плоской деформации, тензор Грина представляет собой сумму вычетов дробно-рациональных функций [4,7]:

$$U_j^k(x, t) = \frac{1}{\pi t} \text{Im} \sum_{q=1}^2 \frac{Q_{jk}(\zeta_q, 1, (x_1 \zeta_q + x_2)/t)}{Q_{,\zeta}(\zeta_q, 1, (x_1 \zeta_q + x_2)/t)},$$

где  $Q_{jj}(\cdot) = -L_{kk}(\cdot)$  в (2),  $Q_{jk}(\cdot) = L_{jk}(\cdot)$   $j \neq k$ ,  $\zeta_q$  - корни уравнения  $Q(\zeta, 1, (x_1 \zeta + x_2)) = Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2 = 0$ ,  $\text{Im} \zeta_q > 0$ .

Тензор Грина позволяет строить обобщенное решение системы (1) для произвольных массовых сил, действующих в среде. Так, в случае действия регулярных массовых сил компоненты поля перемещений есть интегральные представления:  $u_j(x, t) = \int_0^\infty d\tau \int_{R^3} U_{jk}(x - y, t - \tau) G_k(y, \tau) dV(y)$ . При исследовании процессов распространения волн от очага землетрясений, расстояние до которого существенно превышает его размеры, используются модели сосредоточенных источников в виде сингулярных обобщенных функций с точечным носителем (поль, диполь, мультиполь и др.) [8]. Поле перемещений при этом представляет собой свертку тензора Грина с соответствующим источником волн:  $u_j(x, t) = U_j^k(x, t) * G_k(x, t)$ , которую следует брать по

правилам определения свертки в теории обобщенных функций.

В работе приведены расчеты для тензора Грина различных анизотропных сред при действии сосредоточенных сил и моментов, диполя, картины волновых фронтов и амплитуды перемещений для различных сред при действии сосредоточенной импульсной силы.

### Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1981. - 512с.
2. *Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K.* Generalized Solutions of Initial-Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems// Computational Mathematics and Mathematical Physics.- 2011.- Vol. 51.-No. 7.- pp.1194-1207.
3. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961. - 400с.
4. *Rayton R.G.* Two-dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1971. - Vol.70.- P. 191 - 210.
5. *Закирьянова Г.К.* Динамика анизотропных сред при взрывных воздействиях // Материаловедение. - 2013.- №2- С.149-152.
6. *Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.* Фундаментальные решения гиперболических систем второго порядка // Дифференциальные уравнения.- 2001.- Т.37.- №4.- С.488-494.
7. *Закирьянова Г.К.* Граничные интегральные уравнения основных краевых нестационарных задач анизотропной среды // Изв. НАН РК. Сер. физ-мат. - 1993.- №5- Деп. в ВИНТИ 2.04.93 N 1146 -B93.
8. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. -М.: Мир, 1978. - 518с.

УДК 519.1

Калиева А.К., Туленбаев К.М.

*КазИИТУ, Институт математики и математического моделирования,  
Казахстан, Алматы  
tulen75@hotmail.com*

### Математическая модель движения капсулы в пожаротушении

В нашей модели мы учитываем температуру воздуха, давление, геофизические факторы, ветер. Учет ветра очевиден, так как он векторно влияет на скорость движения капсулы. Влияние температуры и давления учитывается через закон сопротивления воздуха. При движении в атмосфере снаряд встречает молекулы воздуха, которые бьют по поверхности снаряда и трутся о нее, в результате чего возникают силы давления и трения, противодействующие его движению. Кроме того, за снарядом возникает область завихрений воздуха, в которой давление понижено, что тормозит полет снаряда. Суммируясь, все эти силы создают результирующую аэродинамическую силу сопротивления воздуха  $R$  [1]



Считается, что у правильно летящей капсулы с бромхладоном подъемная и боковая силы сравнительно малы. Подавляющее влияние на движение снаряда и на вид траектории оказывает сила лобового сопротивления  $R_x$ . На нее влияют массовая плотность воздуха, высота полета  $y$  и другие переменные. Например, чем выше температура воздуха тем меньше  $R_x$ , следовательно  $R_x$  меньше; поэтому дальность полета больше. Очевидно из курса физики, чем больше давление  $p$ , тем больше плотность. Следовательно  $R_x$  больше, поэтому дальность полета меньше. Задача: задается дальность  $X(m)$  и начальная скорость  $v_0$ , скорость продольного баллистического ветра  $w$ , температуры  $T$  и давления  $P$ . Необходимо определить необходимый угол вылета тела. Для точности определения данного угла необходим точный закон сопротивления воздуха. Разработка законов (функций) сопротивления воздуха имеет длительную историю. Этим занимались выдающиеся ученые, как Л. Эйлер, И. Ньютон и артиллеристы, и в результате проведения многочисленных полигонных стрельб были получены зависимости коэффициента лобового сопротивления от числа Маха, которые в сильной степени зависят от особенностей обтекания снаряда встречным потоком воздуха, т. е. главным образом от конфигурации головной части. Для получения адекватных результатов необходимо соответствующее математическое описание закона сопротивления. Наиболее популярным в этом смысле длительное время являлся закон (функция) итальянского баллистика Франческо Сиаччи (1888 г.) в виде эмпирической формулы, важным достоинством которой является непрерывная зависимость от скорости снаряда.

В нашей модели закон Сиаччи будет точен для тупоголовых капсул с бромхладоном. В физической модели мы учитываем площадь миделевого сечения снаряда, коэффициент лобового сопротивления и другие факторы. Исходя из физической модели, мы получаем следующую систему разностных уравнений [2] Учет ветра, температуры, давления мы производим через поправку на угол прицеливания.

### Литература

1. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Внешняя баллистика. М., 2005.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М. Мир, 1967.

УДК 539.3

Мартынов Н.И., Рамазанова М.А.

*Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Алматы*  
 nikmar50@mail.ru

## Смешанная краевая задача обобщенной плоской деформации линейно-упругого тела в нелинейной теории упругости

Рассматривается смешанная статическая краевая (на части границы заданы усилия, на остальной части-перемещения) задача, решение которой дано, как решение задачи Келдыша-Седова для голоморфного вектора.

Под обобщенной плоской деформацией понимают деформацию, при которой прямоугольные координаты материальной точки до (снабжены значком  $^0$ ) и после деформации, связаны соотношениями:

$$x_1 = x_1^0(x_1^0, x_2^0, t), x_2 = x_2^0(x_1^0, x_2^0, t), x_3 = \lambda_3 x_3^0, \lambda_3 = const. \quad (1)$$

Плоской деформации отвечает случай  $\lambda_3 = 1$ . Введем комплексные координаты  $z$  до и после деформации  $\eta$ :

$$z = x_1^0 + ix_2^0, s = \bar{z} = x_1^0 - ix_2^0, x_1 = x_1^0 + u_1, x_2 = x_2^0 + u_2,$$

$$\eta = x_1 + ix_2, \bar{\eta} = x_1 - ix_2, w = u_1 + iu_2, \quad (2)$$

а также комплексные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0,5\left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - i\frac{\partial}{\partial x_2^0}\right), \quad \frac{\partial}{\partial s} = 0,5\left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} + i\frac{\partial}{\partial x_2^0}\right). \quad (3)$$

Здесь  $i$  - мнимая единица, а  $u_1, u_2$  - компоненты вектора перемещения. Общее решение обобщенной плоской деформации линейно-упругого (неогуковского сжимаемого) тела в работе [1] получено в виде:

$$U = \frac{1}{2}\{(\Omega_1 + \bar{\Omega}_1) + i(\Omega_2 + \bar{\Omega}_2) + \Theta\}, \quad \frac{E}{3}\eta = \{(\Omega_1 - \bar{\Omega}_1) + i(\Omega_2 - \bar{\Omega}_2) - \Theta\}, \quad (4)$$

где  $E$  - модуль упругости,  $U$  - комплексная функция напряжений,  $\Omega_1, \Omega_2$  - произвольные аналитические функции от  $z$ ,  $\theta$  - определенным образом построенная функция (в области  $D$  с границей  $\Gamma$ ) от объемных сил, такая, что [1]:

$$\Theta_z|_{\Gamma} = \Theta_s|_{\Gamma} = 0, \quad \Theta|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Соотношения (5) позволяют записать граничные условия, как граничные условия краевой задачи, в которой отсутствуют объемные силы [1].

Для первой и второй краевых задач граничные условия для голоморфного вектора  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$  на  $\Gamma$  записываются в виде [1]:

$$\text{1я кр. з.: } Re\Omega_1|_{\Gamma} = Re G, \quad Re\Omega_2|_{\Gamma} = Im G, \quad (U|_{\Gamma} = G) \quad (6)$$

$$\text{2я кр. з.: } Im\Omega_1|_{\Gamma} = \frac{1}{2}Im g, \quad Im\Omega_2|_{\Gamma} = -\frac{1}{2}Re g, \quad \left(\frac{E}{3}\eta|_{\Gamma} = g.\right) \quad (7)$$

Рассмотрим смешанную краевую задачу. Пусть замкнутый контур точками  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$  разделен на  $2m$  частей. Совокупность дуг  $(a_k, b_k)$  обозначим  $\Gamma_1$ , совокупность дуг  $(b_k, a_{k+1})$  -  $\Gamma_2$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $a_{2m+1} = a_1$ ). Пусть на  $\Gamma_1$  заданы усилия  $g_1$ , а на  $\Gamma_2$  заданы перемещения или величина  $\frac{E}{3}\eta|_{\Gamma_2} = g_2$ . Смешанную краевую задачу с учетом (6),(7) можно сформулировать следующим образом [2,3]: требуется определить голоморфный вектор  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$ , удовлетворяющий краевым условиям:

$$Re\Omega_1|_{\Gamma_1} = Re G_1, \quad Re\Omega_2|_{\Gamma_1} = Im G_1, \quad Im\Omega_1|_{\Gamma_2} = \frac{1}{2}Im g_2, \quad Im\Omega_2|_{\Gamma_2} = -\frac{1}{2}Re g_2, \quad (8)$$

за исключением точек разрыва  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$ , вблизи которых он почти ограничен (имеет интегрируемые особенности). Здесь  $\sigma_{0k}$ - элементарная длина дуги  $(a_k, b_k)$  в недеформируемом состоянии, отсчитываемая от точки  $a_k$ .

Пусть  $\Gamma$  действительная ось, что достигается с помощью конформного отображения области  $D^+$  на верхнюю полуплоскость. Тогда компоненты голоморфного вектора  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$  определяются, как решения двух краевых задач М.В. Келдыша - Л.И.Седова [2,3] для голоморфной функции  $F$ . Далее строятся физически обоснованные решения, как решения ограниченные вблизи всех точек разрыва  $a_k, b_k$  [2,3]:

$$F(z) = \frac{R(z)}{2\pi i} = \int_{\Gamma} \frac{l(\tau)d\tau}{R(\tau)(t-z)}, \quad R(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^m (z - a_k)(z - b_k)}, \quad (9)$$

при выполнении условий разрешимости:

$$\int_{\Gamma} \frac{l(\tau)}{R(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

Условия разрешимости (10) для компонент голоморфного вектора  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$  с учетом (8)- (10) можно записать в комплексном виде:

$$\sum_{k=1}^m 2C_k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau^{j-1}}{|R(\tau)|} d\tau + i \int_{\Gamma} \frac{\tilde{l}(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)} d\tau = 0, \quad \tilde{l}(\tau) = \{ 2\tilde{G}_1(\tau), \tau \in \Gamma_1, g_2(\tau), \tau \in \Gamma_2 \} \quad (11)$$

$$\tilde{G}_1(\tau) = 2i \int_{a_k}^{\tau} g_1(\tau) d\tau, \quad \tau \in (a_k, b_k), \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Нетрудно показать, что система уравнений (11) относительно  $C_k$  однозначно разрешима.

Тогда

$$\Omega_1(z) = \frac{R(z)}{4\pi i} \int \frac{h_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)}, \Omega_2(z) = -\frac{R(z)}{4\pi} \int \frac{h_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)}, \quad (12)$$

$$h_1(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} 2(G_1(\tau) + \bar{G}_1(\tau)), \tau \in \Gamma_1 \\ (g_2(\tau) - \bar{g}_2(\tau)), \tau \in \Gamma_2 \end{array} \right\}, h_2(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} 2(G_1(\tau) - \bar{G}_1(\tau)), \tau \in \Gamma_1 \\ (g_2(\tau) + \bar{g}_2(\tau)), \tau \in \Gamma_2 \end{array} \right\}.$$

Из (12) следуют соотношения:

$$U|_1 = G_1(\tau_0)|_1 = \frac{R(\tau_0)}{2\pi i} \int_2 \frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)}, \frac{E}{3}\eta \Big|_2 = g_2(\tau_0)|_2 = \frac{R(\tau_0)}{\pi i} \int_1 \frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)},$$

которые связывают между собой силовые  $G_1|_{\Gamma_1}$  и кинематические граничные условия  $g_2|_{\Gamma_2}$ , гарантирующих равновесие линейно - упругого тела.

### Литература

1. *Martynov N.I.* Boundary value problems for neo - hookean material in nonlinear elasticity // Science and world. - 2014. - № 9. - P. 25-31.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. - М.:ф.-м.л., 1962. - 599 с.

УДК 521.1+531.011

Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.

*Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы*  
minglibayev@mail.ru

## Новые уравнения движения неограниченной и ограниченной задачи трех тел и их точные решения

В работе предложен новый метод исследования классической неограниченной задачи трех тел и ее частного случае ограниченной задачи трех тел. На основе предложенного метода получены новые дифференциальные уравнения движения этих задач.

**Неограниченная задача трех тел.** Вводится новая *специальная не-инерциальная центральная прямоугольная система координат*. Начало новой системы координат совпадает с центром сил [1]. Получены базовые уравнения движения пространственной неограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1 = \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2, \quad \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2 = \ddot{\vec{r}}_3 - \vec{F}_3, \quad \ddot{\vec{r}}_3 - \vec{F}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1, \quad m_i \vec{F}_i = \vec{F}_i^*. \quad (1)$$

где  $\vec{F}_i^* = \text{grad}_{\vec{r}_i} U$ ,  $U$  - силовая функция задачи. Найдены инварианты центра сил в специальной неинерциальной центральной системе координат неограниченной задачи трех тел в первой форме

$$\frac{m_2 r_2 \sin \alpha}{\Delta_{12}^3} = \frac{m_3 r_3 \sin \gamma}{\Delta_{13}^3}, \quad \frac{m_1 r_1 \sin \alpha}{\Delta_{21}^3} = \frac{m_3 r_3 \sin \beta}{\Delta_{23}^3}, \quad \frac{m_1 r_1 \sin \gamma}{\Delta_{31}^3} = \frac{m_2 r_2 \sin \beta}{\Delta_{32}^3}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  - угол между  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ ,  $\beta$  - угол между  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_3$ ,  $\gamma$  - угол между  $\vec{r}_3$  и  $\vec{r}_1$ ,  $m_i$  - массы тел,  $\Delta_{ij}$  - расстояния между телами, а также во второй форме

$$m_1 \Delta_{32}^3 \vec{r}_1 + m_2 \Delta_{31}^3 \vec{r}_2 + m_3 \Delta_{21}^3 \vec{r}_3 = 0. \quad (3)$$

Используя найденные инварианты (3) выведена новая форма уравнения движения

$$\ddot{\vec{r}}_1 + \omega_1^2 \vec{r}_1 = \ddot{\vec{r}}_2 + \omega_2^2 \vec{r}_2, \quad \ddot{\vec{r}}_2 + \omega_2^2 \vec{r}_2 = \ddot{\vec{r}}_3 + \omega_3^2 \vec{r}_3, \quad \ddot{\vec{r}}_3 + \omega_3^2 \vec{r}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 + \omega_1^2 \vec{r}_1, \quad (4)$$

$$\omega_1^2 = \frac{fQ}{\Delta_{12}^3 \Delta_{13}^3}, \quad \omega_2^2 = \frac{fQ}{\Delta_{21}^3 \Delta_{23}^3}, \quad \omega_3^2 = \frac{fQ}{\Delta_{31}^3 \Delta_{32}^3}, \quad Q = m_1 \Delta_{32}^3 + m_2 \Delta_{13}^3 + m_3 \Delta_{12}^3,$$

$f$  - гравитационная постоянная.

**Ограниченная задачи трех тел.** Исходя из уравнения неограниченной задачи, при условии  $m_2 \ll m_3$ ,  $m_2 \ll m_1$ ,  $m_2 \approx 0$ , получено базовое уравнение движения ограниченной задачи трех тел в *специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил*

$$\ddot{\vec{r}}_2 = f \left( m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right) + \left[ \ddot{\vec{r}}_1 - f m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{r_{31}^3} \right], \quad (5)$$

где выражение в квадратных скобках определяется из решения задачи двух тел. Найден инвариант центра сил ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат в первой форме

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{m_1}{m_3} \left( \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{21}} \right)^3, \quad (6)$$

и во второй форме

$$m_1 \Delta_{23}^3 \vec{r}_1 + m_2 \Delta_{21}^3 \vec{r}_3 = 0. \quad (7)$$

Используя инварианты (6) получена новая форма уравнения движения ограниченной задачи трех тел

$$\ddot{\vec{r}}_2 + \frac{\mu_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} \vec{r}_2 = \vec{W}, \quad (8)$$

$$\mu_2 = f(m_3^{2/3} + m_1^{2/3} k^{1/3})^{3/2} / (1+k)^{1/2}, \quad \sigma_2^2 = k / (k+1)^2,$$

$$\vec{W} = \vec{W}(t) = -\frac{f(m_1 - km_3)\vec{r}_{31}}{(k+1)r_{31}^3} - \frac{2}{1+k} \left( \frac{\dot{k}}{1+k} \right) \dot{\vec{r}}_{31} - \frac{1}{1+k} \left( \frac{\ddot{k}}{1+k} - \frac{2\dot{k}^2}{(1+k)^2} \right),$$

где  $k = k(t) = r_3/m_1$  - параметр задачи. Исходя из решения новых форм уравнения движения (1),(4) и (5),(8) этих задач получены известные [2,3] и новые результаты. Найденны решения в виде равнобедренного треугольника при неравных массах у основания. В переменных Нехвилла найдены новые прямолинейные точки либрации. Некоторые результаты представлены к публикации.

Выведенные новые формы уравнения движения неограниченной задачи трех тел (1),(4) и ограниченной задачи трех тел (5),(8) отличаются от известных форм уравнения движения этих задач.

Новые базовые и другие уравнения движения в специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил могут быть исследованы различными известными методами. Исследования этих уравнений и развития предложенного метода для других задач является предметом дальнейших работ. Предварительные результаты были изложены в работах [4,5].

### Литература

1. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. - М.: Наука, 1967. - 524 с.
2. Маршал К. Задача трех тел. - Москва-Ижевск: Инст. компьют.иссл., 2004. - 640 с.
3. Себекей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. - М.: Наука, 1982. - 656 с.
4. Жумабек Т.М., Минглибаев М.Джс. Үш дене мәселесін арнаулы координаталар жүйесінде геометриялық тәсілдермен зерттеу // Жас ғалымдар жаршысы. - 2014. - Т. 83-91, № 4-12. - С. 8-10.

5. Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М. К классической задаче трех тел // II-международная научно-практическая конференция, посвященная 80-летию академика НАН РК Айталиева Ш.М.: Проблемы механики и строительства транспортных сооружений / Труды. - Алматы, КазАТК, 2015. - С. 456-458.

УДК 519.63

Моисеева Е.С.<sup>1</sup>, Найманова А.Ж.<sup>2</sup>, Бекетаева А.О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы,

<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования МОН РК,  
Казахстан, Алматы

k.moissejeva@gmail.com

## Построение ENO-схемы на неравномерной сетке для расчета сверхзвуковых течений

В настоящее время основным инструментом преодоления трудностей численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса при моделировании сверхзвуковых течений, таких как возникновение осцилляций и разрывов в решении, являются существенно неосциллирующие схемы – ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted essentially non-oscillatory) схемы. Обычно эти схемы применяются на равномерной сетке с использованием преобразования координат [1, 2], однако в последнее время появились работы [3, 4], в которых разрабатываются и изучаются схемы высокого порядка точности на неравномерной сетке.

Целью данной работы является разработка конечно-разностной ENO-схемы третьего порядка точности на неравномерной сетке. Способ построения ENO-схемы основан на методологии, предложенной авторами [5] для равномерной сетки. При этом для построения существенно неосциллирующей кусочно-полиномиальной функции интерполянт Ньютона третьей степени адаптируется для неравномерной сетки.

### Этапы построения ENO-схемы

Способ построения ENO-схемы третьего порядка точности подробно изложен авторами в [5]. Здесь будут показаны основные идеи построения данной схемы на примере одномерного невязкого случая.

Этап 1. Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0, \quad \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0$$

где  $A = \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial \vec{u}}$  матрица Якоби.

В полосе  $t_n \leq t < t_{n+1}$  значения функции  $\vec{u}(x, t_n)$  заменяются кусочно-постоянными, а именно, ее средними

$$\vec{v}_h = \bar{\vec{u}}_j = \frac{1}{h_j} \int_{I_j} \vec{u}(x, t_n) dx$$

где  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ ,  $\bar{h}_j = (h_j + h_{j-1})/2$ ,  $h_j = x_{j+1} - x_j$ .

Тогда искомая задача на этом малом отрезке по времени для  $\lambda > 0$  – собственного значения матрицы  $A$ , будет иметь вид

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$\vec{v}_h(x, t_n) = R(x; \bar{\vec{v}}^n),$$

где  $R(x; \bar{v}^n)$  есть кусочно-полиномиальная функция. Точное решение задачи (1) для достаточно малого  $\Delta t$  будет иметь вид

$$\vec{v}_h(t) = E(t - t_n)\vec{v}_h(t_n + 0)$$

где  $E(t)$  - оператор точного решения (1). Тогда

$$\vec{w}_j^{n+1} = \vec{v}_h(x, t_{n+1}) = \frac{1}{h_j} \int_{I_j} \vec{v}_h(x, t_n) dx \quad (2)$$

Этап 2. В терминах инвариантов Римана  $w = R^{-1}v$ , где  $R$  - собственный вектор матрицы для собственного значения  $\lambda$ , покомпонентная форма точного решения (1) в полосе  $t_n \leq t < t_{n+1}$  представляется следующим образом

$$w(x, t) = R(x - \lambda t; \bar{w}^n)$$

Тогда схема (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}_j^{n+1} &= \frac{1}{\bar{h}_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(x - \lambda t; \bar{w}^n) dx = \\ &= \frac{1}{\bar{h}_j} (H_m(x_{j+1/2} - \lambda t; W) - H_m(x_{j-1/2} - \lambda t; W)) \quad (3) \end{aligned}$$

где  $W(x)$  - первообразная для  $w(x)$ , а полином  $H_m(x; W)$  строится на основе формулы Ньютона третьей степени, алгоритм построения аналогичен работе [5]. Окончательное решение для положительных ( $\lambda > 0$ ) и отрицательных ( $\lambda < 0$ ) собственных значений матрицы Якоби запишется в виде:

$$\begin{aligned} \bar{w}_j^{n+1} &= \bar{w}_j^n - \sigma_j^+ \Delta_- \bar{w}_j^n - \sigma_j^+ \Delta_- \left[ \bar{h}_j (1 - \sigma_j^+) \limiter1 \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j}, \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) + \right. \\ &+ \left. \begin{array}{l} \left[ \bar{h}_j s_j (1 - \sigma_j^+) (1 - \bar{\sigma}_j^+) \limiter2 \left( d_j \Delta_- \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+1} \Delta_- \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{если } \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| \leq \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \\ \bar{h}_{j+1} \bar{h}_j (\sigma_j^+ - 1) (\sigma_j^+ + 1) \limiter2 \left( d_{j+1} \Delta_+ \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+2} \Delta_+ \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{если } \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| > \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \end{array} \right] \end{array} \right] \\ &- \sigma_j^- \Delta_+ \bar{w}_j^n - \sigma_j^- \Delta_+ \left[ \bar{h}_j (1 + \sigma_j^-) \limiter1 \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j}, \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) - \right. \\ &- \left. \begin{array}{l} \left[ \bar{h}_j \bar{h}_{j-1} (\sigma_{j-1}^- - 1) (\sigma_j^- + 1) \limiter2 \left( d_j \Delta_- \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+1} \Delta_- \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{если } \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \\ \bar{h}_j s_{j+1} (1 + \sigma_j^-) (1 + \bar{\sigma}_{j+1}^-) \limiter2 \left( d_{j+1} \Delta_+ \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+2} \Delta_+ \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{если } \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\sigma_j^\pm = \lambda^\pm \Delta t / h_j$ ,  $\lambda^\pm = (\lambda \pm |\lambda|) / 2$ ,  $\Delta_\pm w_j = \pm(w_{j\pm 1} - w_j)$ ,  $s_j = \bar{h}_j + \bar{h}_{j-1}$ ,  $d_j = 1 / (\bar{h}_j + \bar{h}_{j-1} + \bar{h}_{j-2})$ ,

а функции  $\limiter1(a, b)$  и  $\limiter2(a, b)$  являются ограничителями, соответствующие членам второго и третьего порядка точности, соответственно. Здесь в качестве ограничителей выбираются известные функции  $\dot{m}(a, b)$ ,  $\minmod(a, b)$  или  $superbee(a, b)$  [6].

После осуществления перехода от переменных  $\bar{w}^n$  - инвариантов Римана, к переменным  $v^n$ , схему (4) можно представить следующим отношением:

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \hat{A}_{j-1/2}^+ \Delta_- \vec{f}_j^m - \frac{\Delta t}{h} \hat{A}_{j+1/2}^- \Delta_+ \vec{f}_j^m \quad (5)$$

Здесь поток  $\vec{f}_j^m$  представляется в виде:

$$\vec{f}_j^m = \vec{f}_j + \vec{E}_j + \vec{D}_j,$$

где векторы  $\vec{E}_j$ ,  $\vec{D}_j$  определяются следующим образом (верхние индексы + и -

соответствуют положительным и отрицательным значениям матрицы Якоби):

$$\vec{E}_j^\pm = \pm \text{limiter1}(\vec{E}_{j-1/2}, \vec{E}_{j+1/2})$$

$$\vec{D}_j^+ = \begin{cases} \text{limiter2}(d_j \bar{D}_{j-1/2}^+, d_{j+1} \bar{D}_{j+1/2}^+) & \text{если } \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right| \\ \text{limiter2}(d_{j+1} \hat{D}_{j+1/2}^+, d_{j+2} \hat{D}_{j+3/2}^+) & \text{если } \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right| \end{cases}$$

$$\vec{D}_j^- = \begin{cases} \text{limiter2}(d_j \hat{D}_{j-3/2}^-, d_{j+1} \hat{D}_{j-1/2}^-) & \text{если } \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \\ \text{limiter2}(d_{j+1} \bar{D}_{j-1/2}^-, d_{j+2} \bar{D}_{j+1/2}^-) & \text{если } \left| \Delta_- \left( \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left( \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \end{cases}$$

где  $\bar{E}_{j-1/2} = \bar{h}_j \left( I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j-1/2}| \right) \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j}$ ,  $\bar{E}_{j+1/2} = \bar{h}_j \left( I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j+1/2}| \right) \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}}$ ,

$$\bar{D}_{j-1/2}^\pm = \bar{h}_j \alpha_j \left( I - \frac{\Delta t}{\alpha_j} |A_{j-1/2}| \right) \left( I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j-1/2}| \right) \Delta_\mp \left( \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right),$$

$$\bar{D}_{j+1/2}^\pm = \bar{h}_j \alpha_j \left( I - \frac{\Delta t}{\alpha_j} |A_{j+1/2}| \right) \left( I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j+1/2}| \right) \Delta_\mp \left( \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right),$$

$$\hat{D}_{j-1/2}^\pm = \bar{h}_j \bar{h}_{j\mp 1} \left( \frac{\Delta t}{h_{j\mp 1}} |A_{j-1/2}| - I \right) \left( \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j-1/2}| + I \right) \Delta_\mp \left( \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right),$$

$$\hat{D}_{j+1/2}^\pm = \bar{h}_j \bar{h}_{j\mp 1} \left( \frac{\Delta t}{h_{j\mp 1}} |A_{j+1/2}| - I \right) \left( \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j+1/2}| + I \right) \Delta_\mp \left( \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right),$$

Здесь  $\alpha_j = s_j$  для  $A^+$  и  $\alpha_j = s_{j+1}$  для  $A^-$ , а матрицы  $\hat{A}^\pm = A^\pm A^{-1}$ , причем  $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$ , где  $A^\pm = R \Lambda^\pm R^{-1} = R \left( \frac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2} \right) R^{-1}$ ,  $I$  – единичная матрица.

Тогда (5) можно рассматривать как одностороннюю схему с разностями против потока для следующего модифицированного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \hat{A}^+ + \hat{A}^- \right) \frac{\partial \vec{f}^m}{\partial x} = 0$$

Таким образом, в данной работе построена существенно - неосциллирующая ENO-схема третьего порядка точности на неравномерной сетке. Основное преимущество алгоритма заключается в том, что его модификация с равномерной на неравномерную сетку может осуществляться достаточно просто, а этапы построения ENO-схемы при этом соответствуют этапам построения схемы на равномерной сетке [5].

### Литература

1. Sun De-chuan, Hu Chun-bo, Cai Ti-min. Computation of supersonic turbulent flowfield with transverse injection // Appl. Math. Mech. English Edition. 2002. Vol. 23, No 1. P. 107–113
2. Amano R.S., Sun D. Numerical simulation of supersonic flowfield with secondary injection // The 24th Congress of ICAS. Yokohama, 2004.
3. Berger M.J., Aftosmis M.J., Murman S.E. Analysis of slope limiters on irregular grids // In 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting. Reno, NV, 2005. Paper AIAA 2005-0490.
4. X. Zeng A general approach to enhance slope limiters on non-uniform rectilinear grids // submitted to SIAM J. Sci. Comput. 2014
5. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Применение ENO-схемы (essentially nonoscillatory) для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, Специальный выпуск 4: Труды V Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям, Новосибирск, 6-8 февраля 2007 г. С. 17-25

6. Ye. Moissejeva, A. Naimanova Numerical simulation of the transverse hydrogen injection into a supersonic turbulent airstream // Proceedings of APM-2014. St.-Petersburg, Russia, 2014. P.358–365

УДК 531.3

Саспаева А.Д.

АО "Национальный центр космических исследований и технологий",  
Казахстан, Алматы  
asem.saspaeva@mail.ru

## Построение уравнения движения искусственного спутника Земли в гравитационных полях Земли и Луны

Перед нашей страной поставлена задача развивать собственную космическую программу весьма жестких условиях развития мировой космической деятельности. Задача определения параметров движения искусственного спутника Земли, является одной из основных задач, решаемых в ходе управления его полетом.

Решение задачи динамики спутника в данном случае сводится к построению дифференциальных уравнений движения по заданным первым интегралам и к определению в дальнейшем из них искомых сил и моментов, а также других параметров. Математическая модель движения спутника базируется на кинематических и динамических уравнениях Эйлера с учетом внешних сил.

Уравнения движения спутника относительно его центра масс записываются в виде

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = K(q)\nu \\ \frac{d\nu}{dt} = w(q, \nu, t) + U(q, \nu, t)u \end{cases}$$

где  $q = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$ - направляющие косинусы,  $\nu(p, q, r)$ -угловая скорость,  $w_1 = \frac{1}{A}(C-B)qr$ ,  $w_2 = \frac{1}{B}(A-C)pr$ ,  $w_3 = \frac{1}{C}(B-A)pq$ ,  $U(q, \nu) = \text{diag}(A^{-1}, B^{-1}, C^{-1})$ ,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -a_{33} & a_{32} \\ a_{33} & 0 & -a_{31} \\ -a_{32} & a_{31} & 0 \end{pmatrix}$$

Если известны первые интегралы уравнения движения спутника, тогда требуется определить соответствующий вектор обобщенных сил  $u$

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] = c_1 \\ f_2 &\equiv Aqa_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} = c_2 \\ f_3 &\equiv Cr = c_3 \end{aligned}$$

где  $A, B, C$ -главные центральные моменты инерции спутника,  $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3} = \text{const}$ , где  $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{f}_1$ ,  $f_1$ -возмущение Луны.

Множество значений вектора  $u$  определяется как общее решение системы полученной дифференцированием выражений в силу направляющих косинусов

$$S_{\nu i}u = h_{\nu i}, S_{\nu i} = \frac{\partial S}{\partial \nu_i}, h_{\nu i} = \frac{\partial h}{\partial \nu_i}$$

Тогда, согласно [3], восстанавливаемые функции можно определить как решение уравнений движения спутника.

$$\begin{aligned} Ap\dot{p} + (C-B)qr - 3\frac{\mu}{r^3}(C-B)a_{32}a_{33} &= 0 \\ Bq\dot{q} + (A-C)rp - 3\frac{\mu}{r^3}(A-C)a_{31}a_{33} &= 0 \\ Cr\dot{r} + (B-A)pq - 3\frac{\mu}{r^3}(B-A)a_{31}a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, по заданным первым интегралам восстановлены уравнения движения спутника, определено силовое поле, в котором движение спутника обладает указанными свойствами.



Следует отметить, что полученная система является необходимыми условиями осуществимости заданного движения для спутника Земли в гравитационных полях Земли и Луны. Полученные зависимости действующих сил через кинематические и динамические параметры спутника и построенные уравнения движения могут быть применены для решения задачи устойчивости и управления движениями спутника.

### Литература

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. - Москва: Наука, 1965. - 416 с.
2. *Акым Э.Л., Баженов И.К., Павлов В.П., Почукаев В.Н.* Поле тяготения Луны и движение ее искусственных спутников. - Москва: Машиностроение, 1984. - 288 с.
3. *Мухарлямов Р.Г.* Уравнения движения механических систем. - Москва: Российский университет дружбы народов, 2001. - 99 с.

Телтаев Б.Б., Айтбаев К.А.

*Казахстанский дорожный научно-исследовательский институт, Казахстан, Алматы*

### Конечно-элементное моделирование нестационарного температурного поля в автомобильной дороге

Нестационарная теплопроводность в плоском теле описывается дифференциальным уравнением параболического типа:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = \lambda \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} l_y + h(T - T_\infty) + q = 0 \quad (2)$$

где  $K_{xx}$  и  $K_{yy}$  - коэффициенты кондуктивной теплопроводности в направлениях осей координат, кВт/(°C) ;  $h$  - коэффициент конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающим воздухом, кВт/(°C) ;  $T$  - искомая температура поверхности тела, на которой происходит конвективный теплообмен, °C ;  $Q$  - источник тепла внутри тела, кВт/м<sup>3</sup>, - известная температура окружающего воздуха, °C ;  $l_x, l_y$  - направляющие косинусы;  $q$  - интенсивность теплового потока, кВт/м<sup>2</sup>. Конечно-элементный аналог уравнения (1) представлен в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K] \{T\} + \{F\} = 0 \quad (3)$$

где матрицы  $[K]$ ,  $[C]$  и вектор  $\{F\}$  представляют собой суммы вкладов каждого конечного элемента. Путем приближенной замены частной производной по времени ее конечно-разностным аналогом по центральной разностной схеме система дифференциальных уравнений (3) сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{T\}_1 = \left( [K] - \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{T\}_0 - 2 \{F\}^* \quad (4)$$

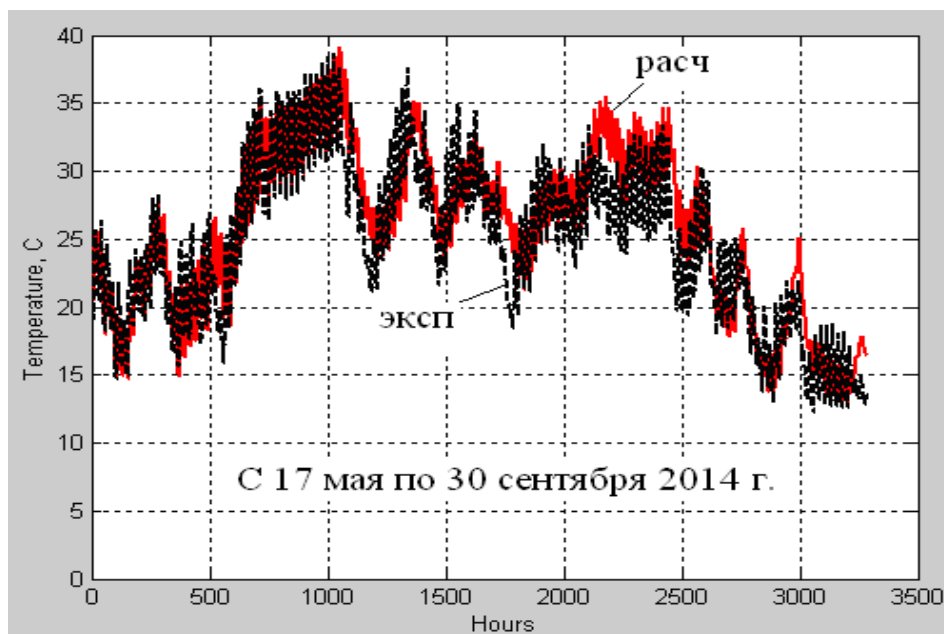
где  $\{F\}^* = \frac{1}{2} (\{F\}_1 + \{F\}_0)$ . Здесь векторы узловых тепловых нагрузок  $\{F\}_0$  и  $\{F\}_1$  относятся к моментам времени  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно, и определяются по формуле

$$\{F\} = \int_{S_1} q [N]^T dS - \int_{S_2} h T_\infty [N]^T dS \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что нестационарное температурное поле в конструктивных слоях автомобильной дороги формируется под действием суммарного теплового потока

$q$  , действующего на асфальтобетонное покрытие дорожной одежды, и величиной конвективного теплообмена между наружным воздухом и покрытием.

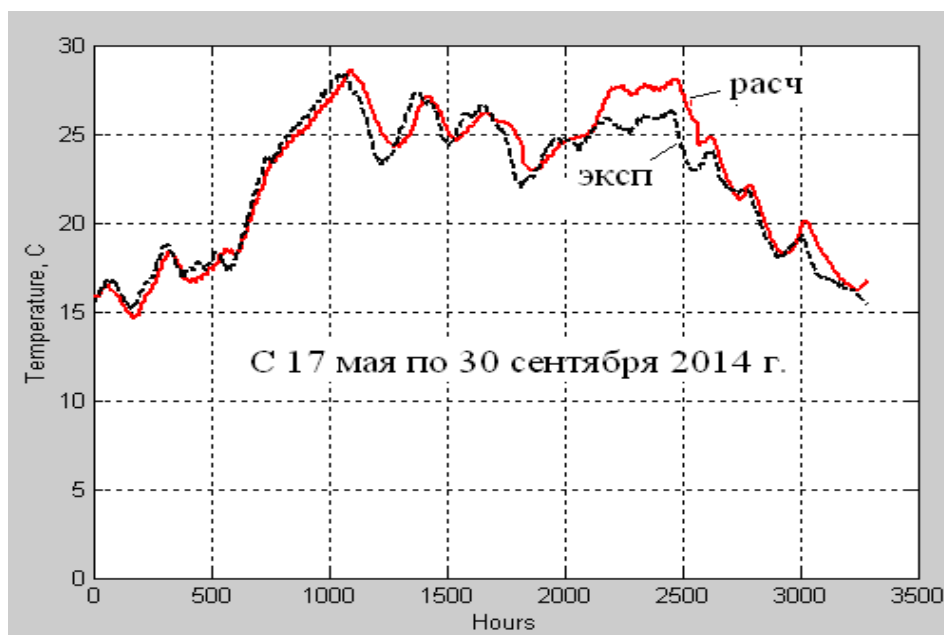
Разработана программа на математическом пакете MATLAB. Решены задачи о нестационарном температурном поле в автомобильных дорогах в климатических условиях южного, восточного и центрального регионов Казахстана. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.



а

Figure 1: Сравнение расчетных (расч) и экспериментальных (эксп) значений температуры на глубине =23 см.

На рисунках 1 и 2 приведены графики сравнения расчетных и экспериментальных данных об изменениях температуры на глубинах 23 см и 70 см. Натурный эксперимент проведен на участке дороги "Усть-Каменогорск-Зыряновск", км 0+075 с помощью датчиков температур, заложенных на различных глубинах в вертикальной скважине. Измерительный комплекс работает в автоматическом режиме, а результаты замеров температур, проводимых через каждый час, сохраняются в блоке памяти.



а

Figure 2: Сравнение расчетных (расч) и экспериментальных (эксп) значений температуры на глубине =70 см.

При конечно-элементном моделировании температурного поля были использованы теплотехнические характеристики дорожных материалов и грунтов экспериментальных участков. Для назначения краевых условий использованы значения температуры воздуха, замеренные в районе экспериментального участка во время проведения натурного эксперимента в указанный период. При расчете суммарного теплового потока  $q$  учтены географическая широта местности расположения экспериментального участка дороги и изменение длительности светового дня. При определении конвективной составляющей теплового потока также учитывается средняя скорость ветра.

Результаты исследования показали, что разработанная конечно-элементная модель с достаточной для практического применения точностью описывает нестационарное температурное поле в автомобильных дорогах в климатических условиях разных регионов Казахстана.

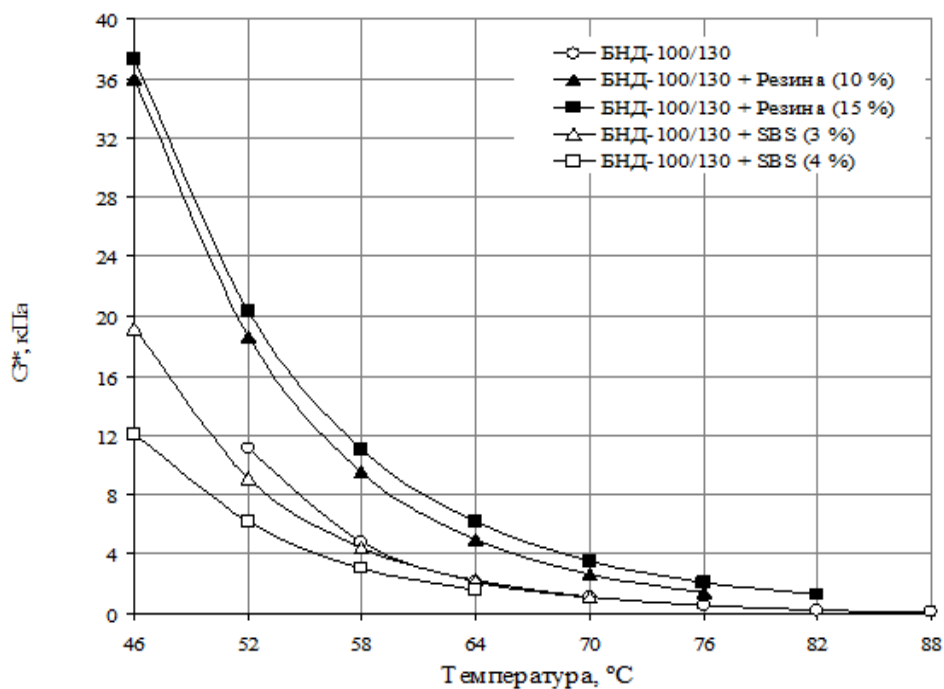
Телтаев Б.Б., Амирбаев Е.Д.

*Казахстанский дорожный научно-исследовательский институт, Казахстан, Алматы*

## **Высоко- и низкотемпературные механические характеристики битумных вяжущих**

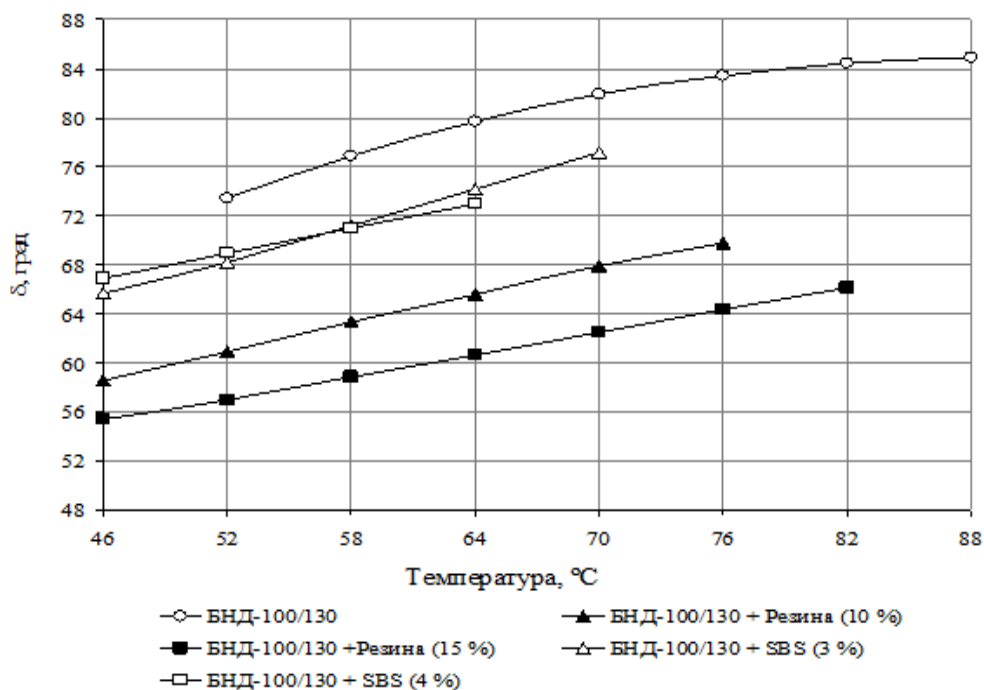
Во всем мире наиболее распространенным материалом дорожного покрытия является асфальтобетон, для приготовления которого в качестве вяжущего используется битум. Известно, что механические и другие характеристики битума изменяется в широких пределах в зависимости от температуры и длительности действия нагрузки. В настоящее время для улучшения механических характеристик битума его модифицируют путем добавки разных полимеров. В статье исследованы температурные зависимости механических характеристик битума марки БНД-100/130 и полимербитумных вяжущих,

полученных на его основе. Битум был произведен Павлодарским нефтехимическим заводом из сырой нефти Западной Сибири (Россия) способом прямого окисления. Полимербитумные вяжущие были приготовлены в лабораторных условиях путем добавки в чистый битум Резины (10 и 15 Испытание битумных вяжущих при высоких температурах было выполнено на динамическом сдвиговом реометре по стандарту США AASHTO T 315-2008, а при низких температурах - на реометре с изгибаемой балкой по стандарту AASHTO T 313-2008. Кратковременное и длительное искусственные старения битумных вяжущих осуществлены по стандартам США AASHTO T 240-2008 и ASTM 6521-2008 соответственно. На рисунке 1 и 2 показаны графики температурной зависимости комплексного динамического модуля и фазового угла испытанных битумных вяжущих после кратковременного старения. Из рисунка 1 видно, что модификация битума с SBS уменьшает его жесткость в температурном интервале 46:58 °С. Добавка резины существенно повышает жесткость вяжущего во всем температурном интервале. Рисунок 2 так же показывает высокий эффект модификации битума резиной. Добавка его в количестве 15 Графики зависимости жесткости битумных вяжущих после двойного (кратковременного и длительного) старения при длительности нагружения  $t=60$  с от температуры представлены на рисунке 3. Как видно, модификация битума резиной в количестве 15



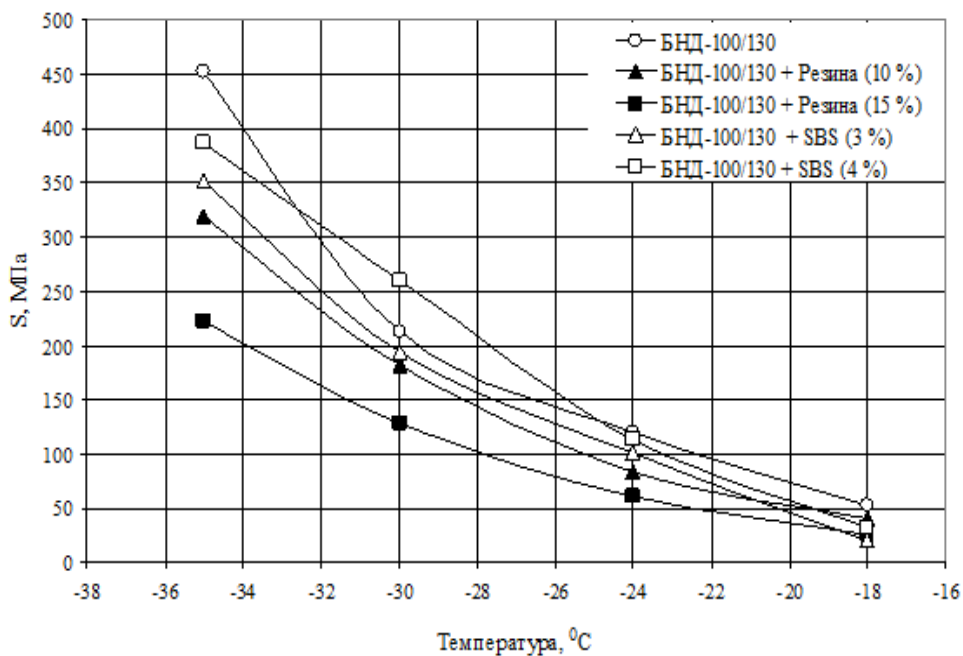
а

Figure 1: Зависимость комплексного сдвигового модуля вяжущих после кратковременного старения от температуры



а

Figure 2: Зависимость фазового угла вяжущих после кратковременного старения от температуры



а

Figure 3: Зависимость жесткости битумного вяжущего после двойного старения от температуры при  $t = 60$  с

Украинец В.Н., Гирнис С.Р.

*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Казахстан,  
Алматы**vitnikukr@mail.ru, girnis@mail.ru*

## Расчет перегонного тоннеля метрополитена на транспортную нагрузку

К настоящему времени научными, проектными и строительными организациями накоплен большой опыт успешной реализации самых сложных проектов подземного строительства. Созданы новые прогрессивные конструктивные решения подземных объектов, разработаны эффективные аналитические и численные методы их расчёта на большинство различных видов нагрузок и воздействий. Тем не менее, до сих пор практически отсутствуют действенные методы расчёта тоннелей на подвижные нагрузки от движущегося внутритоннельного транспорта (*транспортные нагрузки*), хотя мировая практика эксплуатации тоннелей свидетельствует о многочисленных повреждениях и разрушениях, которым они подвергаются вследствие их воздействия. Поэтому, наряду со статическим расчётом транспортных тоннелей, необходимо всестороннее изучение происходящих в них динамических процессов, актуальность которого обусловлена намечающейся в последние годы тенденцией в сторону увеличения скоростей транспортных средств.

В работе [1] получено аналитическое решение задачи о действии подвижной нагрузки на бесконечно длинную двухслойную круговую цилиндрическую оболочку в упругом пространстве. В настоящей работе решение [1] применяется для динамического расчета перегонного тоннеля метрополитена глубокого заложения при действии транспортной нагрузки. Разработана методика динамического расчёта напряженно-деформированного состояния тоннеля с учетом взаимодействия конструкции и окружающего массива, а также скорости движения подвижного состава.

Исследования проведены для тоннеля глубокого заложения, подкрепленный сборной тубинговой чугунной обделкой с радиусами наружной и внутренней поверхностей соответственно  $R_1 = 2,8$  м и  $R_2 = 2,55$  м. Обделка выполнена из 9 чугунных тубингов [2] в кольце (марка чугуна СЧ20: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 105$  МПа, плотность  $\rho = 7,2$  103кг/м<sup>3</sup> [3]) с заполнением закрепного пространства цементным раствором. Размеры тубинга (рис. 1): ширина  $b = 750$  мм, толщина спинки и ребер  $t = 35$  мм, высота ребер  $h = 215$  мм. Окружающий тоннель массив - суглинок ( $\nu = 0,35$ ,  $E = 0,51$  103МПа,  $\rho = 1,8$  103кг/м<sup>3</sup> [4-6]).

При расчете сборную обделку рассматриваем как двухслойную оболочку, используя метод "размазывания" ребер тубингов [9]. Согласно этому методу внешним слоем такой оболочки являются спинки тубингов, внутренним квазиоднородным слоем - сплошной слой, масса которого равна массе ребер тубингов, а толщина - высоте ребер. Значения плотности и модуля упругости материала эквивалентного тубинговым ребрам квазиоднородного слоя будут меньше, чем материала ребер (в нашем случае  $\rho = 1,152$  103кг/м<sup>3</sup>,  $E = 0,16$  105МПа). Контакт между обделкой и массивом здесь принимаем скользящим.

При моделировании действующей на обделку тоннеля вертикальной транспортной нагрузки от двух смежных вагонов в окрестности участка их сцепления полагаем, что она равномерно распределена по контактирующей с бетонным основанием пути поверхности

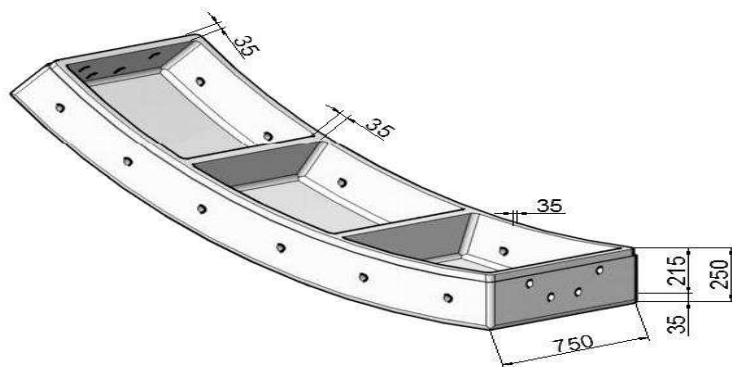


Figure 4: Тюбинг сборной обделки

обделки длиной 8,7 м, где  $P^\circ$  - интенсивность поверхностной нагрузки,  $r, \theta, \eta$  - связанная с нагрузкой подвижная цилиндрическая система координат).

Проведенные в работе [11] исследования показали, что при проектировании, расчете и эксплуатации тоннелей необходимо учитывать возможность перехода скорости  $c$  движения транспортной нагрузки через первую (низшую) критическую скорость  $c^*$ , вызывающую в тоннеле резонансные явления. Появляющиеся в этом случае незатухающие вдоль оси тоннеля колебания могут привести к его повреждению или разрушению. Минимум на дисперсионной кривой соответствует значению критической скорости  $c^* = 310 \text{ м/с}$ . Для данной конструкции безопасные, не вызывающие резонансных явлений и незатухающих колебаний в тоннеле, значения скоростей транспортной нагрузки ограничены интервалом  $0 < c < 310 \text{ м/с}$ .

Из анализа напряжённого состояния тоннеля следует, что компоненты напряжённого состояния наружной поверхности обделки и контактирующей с ней поверхности массива значительно отличаются. В частности, при переходе от поверхности обделки к поверхности массива абсолютные значения напряжений существенно снижаются. При этом на контактирующей с обделкой поверхности массива возникают только сжимающие напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{\eta\eta}$ , достигающие наибольших по абсолютной величине значений в пределах участка нагружения тоннеля. Здесь же, как показали расчёты, возникают наибольшие по абсолютной величине сжимающие радиальные напряжения  $\sigma_{rr}$  ( $\max \sigma_{rr} = 0,38P^\circ$ ). Таким образом, в пределах участка нагружения тоннеля массив подвергается наибольшему всестороннему сжатию, что может привести к его уплотнению (особенно в случае слабых грунтов) и, следовательно, - к оседанию тоннеля с отрывом верхней части обделки от массива. Анализ деформированного состояния тоннеля показывает, что положение и круговая форма поперечного сечения обделки меняются - сечение опускается, вытягиваясь по вертикали (рисунок 7). Указанные факторы могут оказать негативное влияние на конструкцию обделки.

Работа выполнена при поддержке гранта 0898/ГФ2, 0112РК02221 МОН РК.

#### Литература

1. Гирнис С.Р. Задача о бегущей внутри заключённого в тонкостенную обойму цилиндра нагрузке в упругом пространстве // Динамика исследования: материалы за IV Межд. науч. практ. конф. - София, 2008. - Т. 28. - С. 52-57.
2. ТУ 14-3-964-80. Тюбинги чугунные сооружений метрополитена. - М.: ИПК Издательство стандартов, 1980 - 64 с.
3. СНиП II.23.81. ТСтальные конструкции. - М.: Госстрой России, 1981. - 90 с.

4. *Красников Н.Д.* Динамические свойства грунтов и методы их определения. - Л.: Стройиздат, 1970. - 237 с.
5. *Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др.* Механика грунтов, основания и фундаменты. - М.: АСВ, 1994. - 527 с.
6. *Цытович М.А.* Механика грунтов. - М.: Высшая школа, 1983. - 288 с.
7. *СНиП 32-02-2003.* . Метрополитены. - Введ. 2004-01-01- М.: Госстрой России, 2004. - 25 с.
8. *СП 32-105-2004.* Метрополитены. Свод правил. - М.: Госстрой России, 2004. - 252 с.
9. *Бульчев Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. - М.: Недра, 1989. - 270 с.
10. *Украинец В.Н.* Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. - Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2006. - 123 с.
11. *Украинец В.Н., Гирнис С.Р.* Моделирование динамики тоннелей и трубопроводов глубокого заложения при действии транспортных нагрузок. - Павлодар: Кереку, 2010. - 138 с.

УДК 531.1+629.195

Шинибаев М.Д.<sup>1</sup>, Беков А.А.<sup>2</sup>, Акинбеков Е.К.<sup>3</sup>, Рахимжанов Б.Н.<sup>2</sup>,  
Бердалиев Д.Т.<sup>2</sup>, Умирбеков М.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> АО "Национальный центр космических исследований и технологий",  
Казахстан, Алматы,

<sup>2</sup> Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова,  
Казахстан, Шымкент

<sup>3</sup> Кокшетауский государственный университет им. Ш.Уалиханова,  
Казахстан, Кокшетау

e-mail: bekov@mail.ru

## Новый метод исключения "малых знаменателей" в задаче о движении резонансных

Известно, что резонансные явления, связанные с соизмеримостью частот взаимодействующих движений, приводят к "малым знаменателям" и большим математическим трудностям, связанным с расходимостью рядов теории возмущений из-за "малых знаменателей" [1- 3]. Пусть ИСЗ совершает неуправляемое движение (в околоземном пространстве) в поле тяготения Земли и Луны, тогда силовая функция задачи Хилла в геоцентрических координатах имеет вид [4]:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 + \frac{1}{2}(\nu' - \nu)z^2 \quad (1)$$

где  $\mu$  - гравитационный параметр,  $\nu$  и  $\nu'$  - постоянные параметры, обеспечивающие действительное движение перигея и узла орбиты,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $x, y, z$  - координаты ИСЗ.



Дифференциальные уравнения запишутся в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2)$$

Разлагая  $U$  в ряд Фурье, после интегрирования получим решение, которое в переменных  $x, y, z$  приводит к малым знаменателям.

Дифференциальные уравнения (2) с учетом (1) допускают интеграл площадей в основной плоскости

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C \quad (3)$$

и интеграл энергии

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(U + h) \quad (4)$$

где  $C, h$  - соответственно постоянные интеграла площадей и интеграла энергии.

Опираясь на интегралы (3), (4) перейдем от геоцентрических координат к переменным Хилла, тогда (2) примет вид [4]:

$$\frac{d^2W}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{W^4}\right)W - \frac{1}{(1+S^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2S}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{\beta}{W^4}\right)S = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu^2}{C^3}W^2 \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{\nu C^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(\nu - \nu')C^6}{\mu^4}, \quad \alpha = const, \quad \beta = const$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{C^2}W, \quad W = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad S = \frac{z}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\rho$  - проекция радиус-вектора  $\bar{r}$  на плоскость  $0xy$  (экватор Земли),  $S$  - тангенс широты,  $\vartheta$  - долгота.

Пусть орбита ИСЗ имеет малый наклон к плоскости  $0xy$ , тогда  $z \neq 0, z^2 \approx 0, S \neq 0, S^2 \approx 0$  и дифференциальное уравнение (5) примет вид:

$$\frac{d^2W}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{W^4}\right)W - 1 = 0 \quad (8)$$

или

$$d\vartheta = \frac{WdW}{\sqrt{-W^4 + 2W^3 + HW^2 + \alpha}}, \quad (9)$$

где  $H$  - постоянная интегрирования

$$H = \frac{2hC^2}{\mu^2},$$

В случае эллиптического типа движения [4]  $\alpha > 0, H < 0$ , поэтому (9) примет вид:

$$d\vartheta = \frac{WdW}{\sqrt{-W^4 + 2W^3 - HW^2 + \alpha}} \quad (10)$$

Для действительных движений подкоренной полином должен быть положительным

$$G_4(W) = -W^4 + 2W^3 - HW^2 + \alpha > 0 \quad (11)$$

В соответствии с теоремой Декарта [5] три смены знака и отсутствие одного члена в подкоренном полиноме, дает наличие трех положительных и одного отрицательного корня, пусть  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ , где  $\alpha_4$  - отрицательный корень. Подкоренной полином положителен на двух интервалах:

$$\text{А) } \alpha_4 < W < \alpha_3, \quad \text{В) } \alpha_2 < W < \alpha_1 \quad (12)$$

В соответствии с [5] справедливо следующее преобразование (11) к нормальной форме

Лежандра на интервале А:

$$d\vartheta = \mu_0 \frac{W d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$W = \frac{\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \varphi}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{43}} \cdot \frac{W - \alpha_4}{\alpha_1 - W} \quad (13)$$

где

$$0 < k^2 < 1, \quad \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i, \quad (k, i = 1, 2, 3, 4), \quad k^2 = \frac{\alpha_{43} \alpha_{12}}{\alpha_{13} \alpha_{42}},$$

$$\mu_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31} \alpha_{42}}}, \quad \text{при } W = \alpha_4, \quad \varphi = 0; \quad \text{при } W = \alpha_3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Видимо на нерезонансном участке движения  $\alpha_4 \leq W \leq \alpha_3$  и  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

На резонансном участке движения из выражения  $W = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}$  следует, что  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $W \rightarrow 0$ . Теперь из (13), найдем угол, который соответствует резонансу:

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{\alpha_{31} (-\alpha_4)}{\alpha_{43} \alpha_1}} \quad (14)$$

где  $\alpha_4 < 0$  Таким образом, переменные Хилла

$$W, \vartheta, \varphi$$

дают возможность исключения "малых знаменателей" в задаче о движении резонансных ИСЗ.

### Литература

1. Журавлев С.Г. Движение резонансных искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. - М., 1980. - Т.15. - С. 114-158.
2. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН.- 1963. - Т.ХУІІІ, вып.6(114), ноябрь-декабрь. - С. 92-191.
3. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями. - М.-Л.: Гостехиздат, -1947.
4. Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном потоке тяготения. - Алматы.- 2001.-128с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 973. - 832с.

Ногайбаева М.О., Кудайкулов А.К.

*Институт механики и машиноведения имени академика У.А. Джолдасбекова  
(Казахстан, г. Алматы)*

*e-mail: mnogaiabayeva@gmail.com, kudaykulov2006@mail.ru*

### Моделирование термо-механических процессов в стержнях, возникающих из-за наличия внутреннего точечного источника тепла, теплоизоляции и теплообмена

Несущие элементы конструкций современных перерабатывающих технологических линий, газогенераторных, тепловых и многих энергетических установок, работают при воздействии локальных температур, тепловых потоков, меняющихся по координатам и времени, теплообменов, теплоизоляции и внутренних точечных источников тепла. К тому

же эти несущие элементы являются стержнями ограниченной длины. Эти элементы одновременно испытывают воздействие разнородных видов источников тепла. Для надежной работы энергетических установок необходимо обеспечить термопрочности их стержневых несущих элементов. Поэтому разработка фундаментальных методов исследования термо-напряженно-деформированного состояния стержней с учетом одновременного наличия разнородных видов источников тепла являются весьма актуальной проблемой. Исходя из этого в данной работе рассмотрен стержень ограниченной длины  $L$  [см] с постоянной площадью поперечного сечения. Боковая поверхность стержня по всей ее длине считается теплоизолированной. Оба конца стержня жестко-защемлены. В середине стержня ( $x=L/2$ ) имеется внутренний точечный источник тепла. Через площади поперечных сечений, зашпеленных концов, стержня происходит теплообмен с окружающими этих площадей сред.

С учетом действующих источников тепла условия зашпеления физико-механических свойств материала стержня и пользуясь законом сохранения энергии, в сочетании локальных аппроксимационных сплайн функции второго порядка, получены аналитические решения задачи установившихся теплопроводности, определены величины удлинения стержня, возникшие сжимающие термоупругие усилия, а так же определены поля распределения всех составляющих деформации и напряжения.

Исходя из полученных решений видно, что применение фундаментальных законов сохранения энергии можно решить ряд прикладных инженерных задач установившегося термоупругости.

**Ключевые слова:** тепловое расширение, теплопроводность, упругость материала, термоупругость, термо-напряженно-деформированное состояние стержня.

#### Литература

1. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – Москва: Издательство «Мир», 1979.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. - 541с.
3. *Kudaykulov A.K., Myrzasheva A.N. Kenzhegulov B.Z.* Mathematical modeling of thermo mechanical processes in pivotal element of the design made from thermal stable infusible alloys // III конгресс всемирного математического общества тюркоязычных стран, секция №8, математическая модель, 30 июнь – 4 июль, 2009, г. Алматы. - с. 151.
4. *Кудайкулов А.К., Мырзашева А.Н., Кенжегулов Б.З.* Численное определение удлинение частично теплоизолированного стержня из жаропрочного сплава при наличии теплообмена, бокового теплового потока и осевой растягивающей силы // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2009» 18-21 сентябрь 2009г. - с. 233-238.
5. *Кудайкулов А.К., Мырзашева А.Н., Кенжегулов Б.З.* Математическая модель установившегося поля распределения температуры по длине стержня // Наука и новые технологии, №4, г. Бишкек, 2009. - с. 17-21.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. – М.: Издательство URSS, 2010. - 616 с.
7. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Издательство Наука, 1975.

Alibayeva K.A., Tungatarova M.S., Kaltayev A.

*Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty*

*karlygash.alibaeva@kaznu.kz*

## Verification of the mathematical and computer model of an ISL uranium minig process

In the present work, modeling of process of in-situ leach uranium mining by the sulfuric acid is studied. Mathematical model of the process is based on mass conservation equation, Darcy law, transfer equation of reagent concentration in liquid phase, transfer equation of mineral concentration in solid phase, and its transition to liquid phase.

Verification of the model is based on the full-scale experiment conducted in Budenovsk uranium deposit. In the work [4] a section of geological block covered by four mating hexagonal cells is considered. According to the data given in [4], the area of the section is 23.7 thousand  $m^2$ , its average productivity - 15.25  $kg/m^2$ , the total reserve - 363 tons.

All geotechnical parameters of deposit development and process steps in the simulation are considered according to the full-scale experiment. According to experimental data, the mineral extraction degree was 60.7 % at 1.4 Liquid-Solid ratio (L/S); and in the result of calculation the mineral extraction degree for this space of time was 62 % and  $L/S = 1.6$ .

The results of calculation quantitatively and qualitatively coincide with the results of full-scale experiment, which confirms the validity of the developed mathematical and computer models. In addition, the proposed model is a versatile tool for the simulation of geotechnological process of ISL uranium mining and can be used to determine the optimal scheme of well location and monitoring of existing deposits.

**Key words:** in-situ leaching (ISL), mineral extraction degree, verification, Liquid-Solid ratio (L/S), uranium deposit, full-scale model.

### References

1. Dobycha urana metodom podzemnogo vyshchelachivania. /pod red. *Mamilova V.A.* - M.: Atomizdat, 1980. - 248 p.
2. *Turayev N.S., Zherin Y.Y.* Khimiya i tekhnologiya urana. - Moscow: TNIIATOMINFORM, 2005.- 407 p.
3. *Danayev N.T., Korsakov N.K., Penkovskii V.I.* Massaperenos v priskvazhinnoi zone i elektromagnitnyi karotazh plastov. - Almaty: Kazakh universiteti, 2005.-180 p.
4. *Patrin A.P., Zabaznov V.L., Chistilin P.E.* Osnovnye rezultaty polnomasshtabnogo naturnogo opyta po PSV na uchastke #2 mestorozhdenie Budenovskoe // Sbornik dokladov V mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferensii "Aktualnye problemy uranovoi promyshlennosti". - Almaty, 2008. - P. 198-204.
5. *Fletcher K.* Numerical methods in fluid dynamics. - Moscow: Mir, -V. 1-2, 1991. - 552 p.

Beketaeva A.O., Shakhan N.S.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty**azimaras@mail.ru, shakhan-nurtoleu@mail.ru***Mathematical modeling of shock-wave structures in interaction of shocks with the boundary layers on the bottom and top walls**

Perpendicular injection of a sonic round jet from the bottom wall into supersonic turbulent flow in plane channel is studied in present work. The physics of phenomena of shock wave and vortices structures are well described in literature [1-2]. For simplicity almost all of the investigators for numerical simulation of this problem use symmetry boundary conditions for upper boundary. Here no-slip boundary condition is taken.

Mathematical modeling of considering problem is based on Favre-averaged two-dimensional Navier-Stokes equations for turbulent multicomponent gaseous mixture flow, written in dimensionless form. Two-parametrical  $k-\omega$  model of turbulence is taken as closure model. Constructed numerical algorithm of solving is based on WENO schemes.

Detailed study of flow structures is carried out. Flow separation and mixing intensity with respect to the diameter of nozzle are researched. Numerically is revealed, that besides of well-known shock-wave structures, formed from the interaction of bow shock with the boundary layers near the walls, the additional system of shock-wave structures and separation of flow at the same distance behind the jet downstream are appearing. The comparison with experimental data is made.

**References**

1. *Avduevsky V.S., Medvedev K.I., Polyansky M.N.* Interaction of supersonic flow with transverse jet blown through a round hole in the plate // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Fluid Mechanics. - 1970. № 5.-P. 193-197
2. *Spade F., Zukoski E.E.* Investigation of the interaction of the gaseous jet flowing out from the transverse slit with a supersonic stream // Rocket technics and astronautics. - 1968. № 2.-P. 16-25

Guo Xixiong, Cao Jun

*Mechanical Industrial Engineering Department, Ryerson University, Canada*

*jcao@ryerson.ca*

## **Mathematical modeling and numerical simulation of disastrous wind**

Mathematical modeling and computer-aided simulation of disastrous wind, such as tornado, is considered as an effective and economical approach for tornado characteristics investigation, but has been seldom conducted due to many numerical difficulties. The major challenge in this subject lies in the establishment of a set of physically-rational and yet mathematically-executable boundary conditions for the tornado scenario. Inspired by the success of immersed-boundary (IB) lattice Boltzmann method (LBM) in the research of fluid-structure interaction problems [1-2], this study proposes a new outlet of the IB-LBM framework for investigation of tornadic wind effects, featuring a novel interpretation of the Rankine-Combined Vortex Model (RCVM)[3-4] for tornado simulation.

Since a tornado is essentially considered as an airflow that simultaneously translates and rotates, and the translation of the tornado center towards a building can be reversely interpreted based upon the "relative motion" principle, RCVM is conceptually re-tailored in this study by the superposition of a "pinned" rotational airflow and a "virtual" translation of the building. As a result of this reinterpretation, the tornado-building interaction computationally unfolds as a building "marching" into a "pinned" tornadic wind background, so that the "virtual" translation of the building can be modeled by the IB approach while the rotational part of RCVM can be handily employed to describe both initial and boundary conditions of the tornado on a LBM computational domain.

The present LBM-based method is benchmarked in this study through simulation of a rotational airflow; then, with the aid of the IB strategy and the large eddy simulation (LES) model [5], a tornadic wind over a cylinder at a higher Reynolds number is investigated. The outcome of numerical experiments reported in this paper provide a number of general numerical suggestions that can benefit future tornadic wind simulations.

### **References**

1. *Feng Z. G., Michaelides E. E.* The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems. *Journal of Computational Physics*. 2004. 195(2), 602-628.
2. *Dupuis A., Chatelain P., Koumoutsakos P.* An immersed boundary-lattice Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder. *Journal of Computational Physics*. 2008. 227(9), 4486-4498.
3. *Selvam R.P., Millett P.C.* Computer modeling of tornado forces on buildings. *Wind and Structures*. 2003. 6(3),209-220
4. *Gorecki P., Selvam R.P.* Rankine combined vortex interaction with a rectangular prism. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2015. 29(1), 120-132.
5. *Hou S., Sterling J., Chen S., Doolen G. D.* A lattice Boltzmann subgrid model for high Reynolds number flows. *Fields Institution Communication*. 1996. 6, 151-166.

## Index

- Абдикайимова Г.А., 98, 151  
Абдикаликова Г.А., 19  
Абдурахитова Г.Е., 56  
Абдуллаев В.М., 21  
Абенов М.М., 215  
Абылаева А.М., 124  
Абылкаиров У.У., 216, 217, 219  
Абильдаева А.Д., 97  
Адашев Ж.К., 168  
Ахманова Д.М., 232  
Ахмед-Заки Д.Ж., 298, 319  
Ахметжанова М.М., 325  
Айда-заде К.Р., 221  
Айменова К.А., 223  
Айпанов Ш.А., 251  
Айсагалиев С.А., 23  
Айсагалиев С.А., 126  
Айтбаев К.А., 353  
Айтжанов С.Е., 217, 225  
Акыш А.Ш., 289  
Акинбеков Е.К., 360  
Акишев Г., 129  
Алдажарова М.М., 26  
Алдибеков Т.М., 26  
Алексеева Л.А., 170, 325, 327, 329, 331, 333  
Алимжанов А.М., 336  
Алимжанов Е.С., 227, 308  
Алтаева А.Б., 171  
Аманбаев Т.Р., 227  
Амангалиева М.М., 229  
Амирбаев Е.Д., 355  
Арепова Г.Д., 28  
Асадова Д.А., 230  
Аскарлов А.А., 131  
Атгаев А.Х., 29  
Аужани Е., 259  
Азиз Г.Н., 170  
Баканов Г.Б., 290, 291  
Бакбердиева А.А., 316  
Бакирова Э.А., 30  
Балкизов Ж.А., 31  
Бапаев К.Б., 33  
Барсуков А.А., 310  
Бегимбаева Е.Е., 293  
Бейсебаева А., 227  
Бекболат Б., 225  
Бекетаева А.О., 338, 349  
Беков А.А., 360  
Бектемесов М.А., 51  
Бердалиев Д.Т., 360  
Бердышев А.С., 34  
Бержанов А.Б., 36  
Билал Ш., 37  
Бимендина А.У., 132  
Биярова А.О., 301  
Бияшев Р. Г., 295  
Бияшев Р.Г., 293  
Бокаев Н.А., 133  
Даирбаева Г., 297  
Дарибаев Б.С., 298  
Даркенбаева Г.С., 137  
Дильман Т.Б., 290  
Душеналиев Т.Б., 327  
Джалимбетов С.Б., 336  
Дженалиев М.Т., 229  
Джобулаева Ж.К., 234  
Джумабаев Д.С., 43  
Елубаева Ш.М., 338  
Емельянов Д.Ю., 173, 182  
Эркебаев У.З., 93  
Ыдрысова А., 275  
Фалалеев Л.П., 149  
Гирнис С.Р., 358  
Хакимов Р.А., 295  
Халдыбаева И.Т., 98  
Халмухамедов А., 151  
Харин С.Н., 269  
Хасанов А.Х., 100  
Хисамиев Н.Г., 180  
Хисамиев Н.Г., 185  
Хомпыш Х., 219  
Хусаинов И.Г., 272  
Ибраева Г.Т., 85  
Игисинов С.Ж., 65  
Иманбаев К.С., 301  
Иманбаев Н.С., 49  
Иманбердиев К.Б., 223  
Иманкулов Т.С., 298  
Инчин П.А., 268  
Исагали А., 259  
Исахов Ас.А., 177  
Искакова Н.Б., 30  
Искакова У.А., 50  
Исмаилов Б.Р., 239

Исмаилов Х.Б., 239  
Кабанихин С.И., 51, 302  
Кабдрахова С.С., 240, 241  
Кабиден А.Д., 124  
Кабидолданова А.А., 53  
Кадирбаева Ж.М., 240  
Кайыржан М., 217  
Калиева А.К., 242, 344  
Кальменов Т.Ш., 28  
Калтаев А., 266  
Кангужин Б.Е., 56  
Капалова Н.А., 295  
Карыбаева Г.А., 96  
Каршыгина Г.Ж., 258  
Касенов С.Е., 312  
Касинов А.Н., 179  
Кашкымбай И.Ж., 308  
Кауымбек И.С., 315  
Кенжебаев К.К., 36, 58  
Китапбаев Е., 251  
Климов А.С., 304  
Климов В.С., 304  
Колесникова С.И., 243  
Конырханова А.А., 180  
Коржымбаев Т.Т., 245  
Космакова М.Т., 229  
Кошанов Б.Д., 60, 247  
Кошкарлова Б.С., 249  
Крицков Л.В., 63  
Куан М., 250  
Кудайкулов А.А., 250, 275  
Кудайкулов А.К., 362  
Кулиев С.З., 221  
Кулимбек Ж.К., 247  
Кулпешов Б.Ш., 171, 182  
Кульджабеков А.Б., 214  
Кунгожин А.М., 184  
Курманов Е.Б., 329  
Кусаинова Л.К., 138  
Латкина Л. П., 306  
Латкин И.В., 185  
Махсут Г., 301  
Макажанова Т.Х., 189  
Мансурова М.Е., 308  
Мартынов Н.И., 345  
Мажитова А.Д., 187  
Мергембаева А.Ж., 232  
Мырзахмедова Б.А., 217  
Минаев А.С., 310  
Минглибаев М.Дж., 347  
Мирзакулова А.Е., 26  
Могульский А.А., 251  
Моисеева Е.С., 349  
Мухамбетова А.А., 80  
Мухиддинов Е.М., 267  
Муратбеков М.Б., 64, 65, 67  
Мурзабеков З.Н., 251  
Мусилимов Б.М., 67  
Мустапокулов Х.Я., 252  
Нахушев А.М., 254  
Нахушева В.А., 254  
Найманова А.Ж., 349  
Назарова К.Ж., 68  
Нысанбаева С. Е., 295  
Нысанбаева С.Е., 293  
Нысанов Е.А., 256  
Ногайбаева М.О., 362  
Новикова А.О., 310  
Нурыкенова Ж.С., 225  
Нурланова А.Н., 225  
Нурсеитов Д.Б., 312  
Ойнаров Р., 140  
Омиров Б.А., 168  
Оразов И.О., 102  
Орумбаева Н.Т., 258  
Оспанов К.Н., 142  
Оспанова А.Б., 144  
Отенов Н.О., 267  
Оздамирова Д.М., 336  
Панфилов М.Б., 266  
Панкратова И.Н., 69  
Пирматов Ш.Т., 71  
Псху А.В., 73  
Рахимжанов Б.Н., 360  
Рамазанов М.И., 229  
Рамазанова Х.С., 74  
Рамазанова М.А., 345  
Ревин Д.О., 190  
Сабаев Е., 333  
Сабитбек Б., 75  
Сабитов К.Б., 76  
Сабитова Ю.К., 78  
Садыбеков М.А., 79  
Сахаев Ш.С., 262  
Сахаева М.А., 263  
Сайдулин А.А., 267  
Сакабеков А., 259  
Сарсенби А.М., 63  
Сарсенов Б.Т., 327  
Сартабанов Ж.А., 58, 80



- Саспаева А.Д., 352  
 Сеилханова Р.Б., 100  
 Сейлова Р.Д., 100  
 Серикбаев Д.А., 34  
 Серовайский С.Я., 264  
 Сыздыкова А.Т., 133  
 Сыздыкова Р.А., 315  
 Сидоров С.Н., 76  
 Сламжанова С.С., 82  
 Смаилов Е.С., 146  
 Судоплатов С.В., 182  
 Сулейманова Г. А., 314  
 Сураган Д., 75, 256  
 Шаймарданова М.Н., 274  
 Шаймерденова А.К., 56  
 Шакенов К.К., 316  
 Шалданбаев А.Ш., 102  
 Шалдыкова Б.А., 232  
 Шаукенова К.С., 315  
 Шыракбаев А.Б., 104  
 Шинибаев М.Д., 360  
 Шишленин М.А., 51, 302  
 Шолпанбаев Б.Б., 302  
 Шоманбаева М.Т., 102  
 Шоманбаева М.Т., 256  
 Шпади Ю.Р., 268  
 Тасмамбетов Ж.Н., 83  
 Телтаев Б.Б., 353, 355  
 Темешева С.М., 241  
 Темирбекова Л.Н., 317  
 Темиргалиев Н., 147  
 Тилеуов Г., 227  
 Тлеубергенов М.И., 85  
 Токибетов Ж.А., 87  
 Токмагамбетов Н.С., 132  
 Толеубеккызы К., 225  
 Толеуханов А.Е., 266  
 Торобек Б.Т., 88  
 Тулегенова Б., 227  
 Туленбаев К.М., 242, 267, 344  
 Турар О.Н., 319  
 Турмаганбет К.А., 291  
 Турметов Б.Х., 90  
 Турсунов Д.А., 93  
 Турсунов Э.А., 91  
 Тюреходжаев А.Н., 96  
 Украинец В.Н., 358  
 Утешова Р.Е., 97  
 Василина Г.К., 41  
 Закирьянова Г.К., 329, 331, 342  
 Замбарная Т.С., 175  
 Зикиров О.С., 48  
 Зоркальцев В.И., 175  
 Жанболова А.К., 235  
 Жапсарбаева Л.К., 45  
 Жаркенов А.Б., 237  
 Жумабек Т.М., 347  
 Жумабеков А.В., 267  
 Жуматов С.С., 46  
 Жунусова Ж.Х., 23  
 Қалтаев А., 214  
 Құрмансейіт М.Б., 214  
 Сандыбаев Е., 333  
 Умирбеков М.С., 360  
 Stanzhytskyi O.M., 118  
 Tungatarov A., 123  
 Abdykassymova S., 191  
 Abiev N.A., 105, 107  
 Akhmetov B., 275  
 Akzhigitov E.A., 109  
 Alexeyeva L.A., 193  
 Alibayeva K.A., 364  
 Amanzholov T.E., 275  
 Amirgaliev YE., 321  
 Assanova A.T., 109, 110  
 Bagdarov Y.A., 198  
 Baikonus A., 286  
 Baikonys A., 276  
 Baizhanov B.S., 194  
 Baizhanov S.S., 195  
 Beketaeva A.O., 365  
 Beketauov B., 286  
 Bekjan T., 152  
 Biyarova N.B., 195  
 Bizhanova G.I., 277  
 Bliev N.K., 154  
 Cao Jun, 366  
 Danilov V.Y., 112  
 Dzhomartov A.A., 275  
 Dzhumadil'daev A.S., 198, 200  
 Erlangga Y.A., 322  
 Guo Xixiong, 366  
 Imanchiev A.E., 110  
 Ismailov N., 200

Kairat A., 152  
 Kalmenov Sh.T., 277  
 Kalmenov T.Sh., 113, 114  
 Kaltayev A., 364  
 Kalybay A.A., 156  
 Karjanto N., 278, 288  
 Kassymov A., 113  
 Kavokin A.A., 278  
 Kharin S.N., 278, 280, 283  
 Kitapbaev E., 286  
 Kravets V.I., 112  
 Krivodub A.S., 323  
  
 Lavrov E.A., 323  
 Lavrova O.E., 118  
 Lovazov T., 321  
  
 Maken A., 277  
 Mammadova G.H., 203  
 Marchuk N.A., 112  
 Mergenbayeva M., 280  
 Mogilova V.V., 116  
 Mustafin S., 321  
  
 Nemchenko M., 276  
 Nursultanov, E.D., 158, 159  
 Nysanov E., 276, 277  
 Nysanov E.A., 286  
  
 Oralsyn G., 114, 117  
  
 Pasko N.B., 323  
 Persson, L.E., 161  
 Pya N., 165  
  
 Sagyndykuly Z., 283  
 Sandybekova M., 287  
 Saulebayeva T., 206  
 Shaimardan, S., 165  
 Shaimardan, S., 161  
 Shakhan N.S., 365  
 Shpadi Yu.R., 278  
 Skrzypacz Piotr, 324  
 Structure  
     *e*-prime, 208  
     new, 208  
 Sudoplatov S.V., 207  
 Suleimenov Zh., 118  
 Sultamuratov R.S., 198  
 Suragan D., 121  
  
 Tazabekova N. S., 209  
  
 Temirkhanova A.M., 156  
 Tikhonov, S.Y., 159  
 Tleukhanova, N.T., 158, 159  
 Tuimebayeva A., 287  
 Tungatarov M.S., 275  
 Tungatarova M.S., 364  
 Turtkulbayeva Z.O., 107  
  
 Umbetbayev O.A., 210  
  
 van Groesen E., 278  
  
 Yermukanova B.N., 288  
 Yershigeshova A.D., 194  
 Yeshkeyev A.R., 201  
  
 Zhakhayev B.K., 211  
 Zhexembay L., 288