Международная научная конференция

«Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы-2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ, ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КН МОН РК И ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КН МОН РК

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ИНФОРМАТИКА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

посвященная 80-летию академика НАН РК Блиева Назарбая Кадыровича
Алматы 15–16 октября 2015 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы – 2015

4. *Жуматов С.С.* Неустойчивость нелинейных систем управления в окрестности программного многообразия в критическом случае // Материалы Международной научно-проактической конференции "Теория функций, функциональный анализ и их приложения" посв. 60-летию члена- корр. АН КазССР Т.И.Аманова (Семей, 3-5 октября 2013). Семей. 2013. - Т.1.- С.259-263.

5. *Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчмвости и управления движением. - Алматы: Гылым, 1999. - 228 с.

6. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. - 1952. - Т. 10, в. 6. - С. 659-670.

7. *Якубович В.А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью// Сибирский мат. журнал, 1973. - Т. XIV, № 5. - С. 1100-1129.

УДК 517.927

Ж.Х. Жунусова, К.А. Досмагулова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: zhzhkh@mail.ru

Построение поверхности соответствующей солитонному решению

В данной работе рассматриваем простейшие аспекты солитонной иммерсии в смысле Фокаса-Гельфанда [1]. В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U задана, а матрица V выражается в терминах элементов матрицы U. Также нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются условием совместности системы линейных уравнений

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi.$$

В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией $P(x,t)$ определяемая следующими формулами $\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi$[1]. Поверхность определенная посредством $P(x,t)$ идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве определенной координатами
$x_j = P_j(x,t), \quad j = 1,2,3$. Репер на поверхности дается тройкой

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi, \quad N = \phi^{-1}J\phi,$$

где $J = \frac{[X,Y]}{|[X,Y]|}$, $\quad | X | = \sqrt{< X, X >}$. Здесь по определению

$$< X, Y > = -\frac{1}{2} tr(XY),$$

где X, Y являются некоторыми матрицами. Первая и вторая фундаментальные формы в смысле Фокаса-Гельфанда даются как

$$I = < X, X > dx^2 + 2 < X, Y > dxdt + < Y, Y > dt^2, \tag{1}$$

$$II = < \frac{\partial X}{\partial x} + [X, U], J > dx^2 + 2 < \frac{\partial X}{\partial t} + [X, V], J > dxdt + < \frac{\partial Y}{\partial t} + [Y, V], J > dt^2. \tag{2}$$

Функция иммерсии P может быть определена как

$$P = \gamma_0 \phi^{-1} \phi_\lambda + \phi^{-1} M_1 \phi = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j,$$

где M_1 является матричной функцией, определенной по λ, x, t. Здесь $f_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$ является базисом соответствующей алгебры, σ_j являются матрицами Паули и $[f_i, f_j] = f_k$. В этом случае, X, Y можно записать как

$$X = \gamma_0 U_\lambda + M_{1x} + [M_1, U], Y = \gamma_0 V_\lambda + M_{1t} + [M_1, V].$$

Пусть матрицы X, Y, J имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В этом случае элементы матрицы J выражаются через элементы матрицы X и Y в соответствии со следующими формулами

$$c_{11} = \frac{a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}}{| [X, Y] |}, \quad c_{21} = \frac{a_{21}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})}{| [X, Y] |},$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11})}{| [X, Y] |}, \quad c_{22} = \frac{a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}}{| [X, Y] |}. \tag{4}$$

Тогда первая фундаментальная форма (1) двухмерной поверхности будет $I = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2$, где

$$E = -\frac{1}{2}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2), \quad F = -\frac{1}{2}(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}), \tag{5}$$

$$G = -\frac{1}{2}(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2). \tag{6}$$

В качестве примера солитонного уравнения приводящего к такой иммерсии рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\beta|\psi|^2\psi = 0,$$

где $\beta = +1$, ψ является комплексной функцией. В этом случае, матрицы U, V имеют вид [2]-[4]

$$U = \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0, \; U_0 = i \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 + i|q|^2\sigma_3 - i\lambda \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_x \\ -q_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Рассмотрим частный случай иммерсии при $\gamma_0 = 1, \quad M_1 = 0$. В данном случае имеем

$$X = U_\lambda = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = V_\lambda = -i\begin{pmatrix} -\lambda & \bar{q} \\ q & \lambda \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}} \\ \frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

и $P = \phi^{-1}\phi_\lambda$. Чтобы вычислить явные выражения для функций иммерсии P рассмотрим односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности, которое имеет вид

$$\psi(x,t) = \rho\frac{1 + e^{i\theta}exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}, \qquad (9)$$

где $v = -\omega cos\frac{\theta}{2}$, $x_0 = \frac{1}{\nu_1}lni\gamma_1$; $\omega, \theta, \gamma_1, \nu_1$ являются некоторыми параметрами модели.

Теорема. Односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности соответствует поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда со следующими коэффициентами первой фундаментальной формы

$$E = \frac{\nu_1^2 exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}[\frac{4\rho^2 x^2}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4}(2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}) +$$

$$+\frac{4(e^{i\theta} - 1)^2[1 + \nu_1 x(1 - e^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\})]^2}{(1 + e^{i\theta}exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}],$$

$$F = \frac{2\rho^2\nu_1^2 vx exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^3} +$$

$$+\frac{4\nu_1^3 vx exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}(e^{i\theta} - 1)^2(e^{i\theta} - exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\} - 1)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4(1 + e^{i\theta}exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}\times$$

$$\times(1 + \nu_1 x - \nu_1 x e^{i\theta}exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}),$$

$$G = \frac{v^2\nu_1^2 exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4(1 + exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}[\rho^2(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2(1 +$$

$$+2exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^2 + \rho^2(e^{i\theta} - e^{-i\theta} - 2)^2 +$$

$$+\frac{4\nu_1^2 x^2(e^{i\theta} - 1)^2(e^{i\theta}exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\} - 1)^2}{(1 + e^{i\theta}exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}],$$

где $\lambda_1 = const$.

Таким образом, в данной работе найдена первая фундаментальная форма с соответствующими коэффициентами для интегрируемой поверхности соответствующей односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности. Определена Гауссовая и средняя кривизна данной поверхности.

Литература

1. *Ceyhan O., Fokas A.S., Gurses M.* Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations //J. Math. Phys., -2000. v.41, No 4, -pp. 2551–2270.

2. *Zhunussova Zh.* Nonlinear PDE as Immersions" //Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, -2015. ISBN 978-3-319-12576-3, -pp. 289–297.

3. *Zhunussova Zh.Kh.* Reconstruction of a soliton solution for a class of nonlinear equation //Abstracts of the sixth International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation," Antalya, Turkey, -2012. May 19–26, -p. 283.

4. *Zhunussova Zh.Kh.* About exact solution of the nonlinear equation. //Известия НАН РК, серия физико-математическая, -2010. No 3, -стр. 11–13.

УДК 517.75

Ж.М. Кадирбаева [1], К.Р. Момынжанова [2]

[1] Институт математики и математического моделирования МОН РК

[2] Казахский государственный женский педагогический университет

(Казахстан, Алматы)

e-mail: apelman86pm@mail.ru

О разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка

На $[0, T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2} = A_0(t)\frac{dz}{dt} + A_1(t)z + \sum_{i=1}^{m+1} M_i(t)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\theta_{i-1}} + \sum_{i=1}^{m+1} L_i(t)z(\theta_{i-1}) + f(t), \tag{1}$$

$$B_1z(0) + C_1z(T) = d_1, \tag{2}$$

$$B_2\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} + C_2\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=T} = d_2, \tag{3}$$

где функции $A_0(t)$, $A_1(t)$, $M_j(t)$, $Lj(t)$, $j = \overline{1, m+1}$, и n-вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, B_i, Ci, d_i, $i = 1, 2$ – некоторые заданные числа, $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Непрерывная функция $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, имеющая на $[0, T]$ непрерывные производные до второго порядка по t, называется решением краевой задачи (1) – (3), если она удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению второго порядка (1) и краевым условиям (2), (3).

Дифференциальные уравнения второго порядка являются основой большинства математических моделей, описывающих физические, химические, экономические и социально-биологические явления. Поэтому весьма актуальной и важной задачей является развитие аналитического аппарата теории уравнений второго порядка [1, 2]. Вместе с тем во многих разделах прикладной математики встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с нагружениями [3]. В последние годы продолжается интенсивное исследование нагруженных уравнений, связанное, в частности, с различными приложениями задач, ассоциированных с этими уравнениями. К последним относятся, например, задачи долгосрочного прогнозирования и