# Экономический солитон (2+1)-мерной нелинейной математической модели А1

**М.Н. Калимолдаев[1], А.В. Алексеева[2], К. Алимхан[3], Г.А. Амирханова[4]**

[1]*Инситут информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алматы, Казахстан, E-mail: mnk@ipic.kz*

[2]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан, E-mail:alexandra-aleks@mail.ru*

[3]*Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилёва, Астана, Казахстан, School of Science and Engineering, Tokyo Denki University, Saitama, Japan, E-mail:keylan@live.jp*

[4]*Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алматы, Казахстан, E-mail:gulshat.aa@gmail.com*

**Аннотация:** В данной статье рассмотрена (2+1)-мерная нелинейная математическая модель А1, обобщающая уравнение Кортевега-де Фриза. Показаны ее законы сохранения, рассмотрена вспомогательная линейная система, определено условие нулевой кривизны, которая связывает вспомогательную линейную систему с данной моделью. Решена прямая задача рассеяния для этой модели. По заданной функции определены составляющие матрицы рассеяния. В работе объяснен экономический смысл (2+1)-мерной нелинейной математической модели А1. Дано определение экономического солитона как решение данной математической модели. Описан экономический смысл метода прямой задачи рассеяния, соответствующий позитивному аналитическому подходу в экономике.

## 1. Введение

Солитоны возникают как частные регулярные локализованные устойчивые решения нелинейных эволюционных уравнений в частных производных, таких как уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение sine-Gordon и их многомерных аналогов.

Классическое уравнение Кортевега-де Фриза[1]

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$- достаточно гладкая вещественная функция, описывает как слабые гидромагнитные длинные волны в плазме и волны на воде [2] так и слабо нелинейные ионно-акустические волны сжатия в плазме [3]. Уравнение Кортевега-де Фриза называют универсальной математической моделью, поскольку оно описывает многие физические задачи о нелинейных волнах в различных физических средах.

Многомерные аналоги уравнения Кортевега-де Фриза также универсальны. Например, уравнение Кадонцева-Петвиашвили [4]

$$(u_{xxx} + 6uu_x + u_x + u_t)_x - u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

где $u = u(x,y,t)$ - достаточно гладкая функция, было получено для слабо нелинейных длинных волн в диспергирующих средах.

Таперт и Варма [5] и Нараянамурти и Варма [6] получили уравнение (2) при изучении распространения тепловых импульсах в твердых телах. Како и Роулендз получили уравнение (2) для двумерного распространения ионно-акустических солитонов [7].

Универсальная природа многомерных аналогов уравнения Кортевега-де Фриза позволяет абстрагироваться от конкретных физических условий и находить его новые многомерные обобщения, опираясь на свойства солитонных уравнений.

Известно, что солитонные уравнения обладают следующими свойствами [8].

1) Солитонное уравнение обладает бесконечным числом законов сохранения;
2) оно имеет решение в виде уединенных волн – солитонов;
3) если солитонное уравнение допускает решения типа уединенных волн, то оно должно допускать решения, представляющие собой нелинейную суперпозицию N уединенных волн при произвольном N;
4) оно также является точно интегрируемым в смысле бесконечномерного обобщения полностью интегрируемой гамильтоновой системы. Все известные солитонные уравнения имеют гамильтоновы структуры и бесконечный набор интегралов движения, находящихся в инволюции (т. е. скобка Пуасонна исчезает);
5) существует каноническое преобразование (метод обратной задачи рассеяния — МОЗР), которое трансформирует солитонное уравнение в бесконечную систему отдельных уравнений с переменными типа действие-угол каждое из которых может быть проинтегрировано тривиальным образом (из условия нулевой кривизны следует существование бесконечного числа законов сохранения);
6) оно обладает свойством Хироты, имеет билинейные формы, которое дает возможность построить N-солитонные решения (нелинейную суперпозицию N уединенных волн);
7) свойство Пенлеве (тест, который показывает, что данное нелинейное уравнение полностью интегрируемо).

Уравнение Веселова-Новикова [9]:

$$u_t = (uv)_z + (u\bar{v})_z + u_{zzz} + u_{\overline{zzz}}$$

где $v_z = -3u_z, z = x + iy, u = u(z,t)$ - достаточно гладкая функция, было получено как двумерное интегрируемое расширение уравнения Кортевега-де Фриза.

Нижник Л.П. предложил пространственную двумеризацию модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза [10]

$$u_t = u_{xxx} + u_{yyy} + (vu)_y + (wu)_x - \frac{1}{2}(v_y + w_x)u, \tag{4}$$

где $v_x = 3(u^2)_y, w_y = 3(u^2)_x, u = u(x,y,t)$ - достаточно гладкая функция. Уравнение (4) было найдено исходя из возможности существования для уравнения (4) пары Лакса, что в свою очередь, позволяет решить уравнение (4) методом обратной задачи рассеяния.

**2. (2+1)-мерная нелинейная математическая модель A1, обобщающая уравнение Кортевега-де Фриза.**

Алексеевой А.В. был представлен класс пространственно двумерных нелинейных математических моделй A1-A14 и AI-AXII [11], обобщающих классическое уравнение Кортевега-де Фриза (1).

В частности, (2+1)-мерное нелинейное уравнение A1 имеет вид [11]:

$$\Psi_t + \Psi_{xyy} + 2[\Psi^2]_y + [UV]_y = 0 \tag{5}$$

где $V_x = \Psi_y, U_y = \Psi_x, \Psi = \Psi(x,y,t)$ - достаточно гладкая комплексно-значная функция.

Интегрируемость (2+1)-мерного нелинейного уравнения А1 доказывает наличие иерархии вспомогательных линейных систем [12]:

$$\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi + \lambda^3 D\varphi, \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где $\lambda = \lambda(y,t),\ \lambda_t = \lambda\lambda_y$

$$\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \Psi \\ \overline{\Psi} & 0 \end{pmatrix},\ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\Psi_{xy} - 2\Psi^2 - \partial_x^{-1}(\Psi_y)\partial_y^{-1}(\Psi_x) \\ -\overline{\Psi}_{xy} - 2\overline{\Psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\Psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\Psi}_x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\Psi - \partial_x^{-1}(\Psi_y) \\ 2i\partial_x^{-1}\overline{\Psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\Psi}_y) & -i \end{pmatrix}$$

$$C = D = \ \dots \ = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\Psi \\ 2i\partial_x^{-1}\overline{\Psi} & -i \end{pmatrix}$$

Условия совместности вышеприведенных систем имеет вид:

$$U_0 t - Ax + [U_0, A] = 0,$$

где $[U_0, A] = U_{0,} A - AU_{0,}$

Уравнение (5) имеет билинейную форму Н1 [13]:

$$\left(D_x D_t + D_x^2 D_y^2\right)(\varphi \circ \varphi) = 0 \qquad (6)$$

где

$$(D_x D_t)(\varphi \circ \varphi) = 2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t),$$

$$\left(D_x^2 D_y^2\right)(\varphi \circ \varphi) = 2\left(\varphi_{xxyy}\varphi - 2\varphi_{xxy}\varphi_y + \varphi_{xx}\varphi_{yy} - 2\varphi_{xyy}\varphi_x + 2\varphi_{xy}^2\right),$$

$\varphi = \varphi(x,y,t)$ - достаточно гладкая комплексно-значная функция.

(2+1)-мерное нелинейное уравнение A1 является обобщением классического уравнения Кортевега-де Фриза (1).

(2+1)-мерная билинейная форма H1 (6) является обобщением классического оператора Хироты H [1]:

$$\left(D_x D_t + D_x^4\right)(f \circ f) = 0,$$

где

$$\left(D_x^m D_t^n\right)(F \circ G) = \left(\partial_x - \partial_{x'}\right)^m \left(\partial_t - \partial_{t'}\right)^n F(x,t) G\left(x',t'\right) /_{x'=x, t'=t} \tag{7}$$

f(x, t) — достаточно гладкая действительная функция. Билинейный оператор (7) обладает следующими свойствами [1]:

1) $D_x^m(a \circ 1) = \partial_x^m a$
2) $D_x^m(a \circ b) = (-1)^m D_x^m(a \circ b)$
3) $D_x^m(a \circ a) = 0,\ m = 2k+1,\ k \in Z$
4) $D_x^m D_t^n(e^{k_1 x - \omega_1 t} \circ e^{k_2 x - \omega_2 t}) = (k_1 - k_2)^m (\omega_2 - \omega_1)^n e^{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t}$

Ниже под $\ln\varphi$ будем понимать функцию $\ln\varphi = \ln|\varphi| + i\arg\varphi,\ -\pi < \arg\varphi < \pi$, т.е. главную часть многозначной функции

$$Ln\varphi = \ln|\varphi| + i\arg\varphi + 2k\pi,\ -\pi < \arg\varphi < \pi, k \in Z.$$

Следовательно, область значения функции $\varphi$ представляет собой один лист римоновой поверхности, т.е. комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной полуоси и выколотым началом координат.

Используя метод Хироты для (2+1)-мерного нелинейного уравнения A1 были построены 1-, 2- и N- солитонные решения [14].

1-солитонное решение (2+1)-мерного нелинейного уравнения A1:

$$\Psi = 2(\ln\varphi)_{xy}$$
$$\varphi = 1 + \exp\{\alpha x + \beta y - \alpha\beta^2 t + \gamma\},$$

где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ - достаточно гладкая комплексно-значная функция, $\alpha, \beta, \gamma$ - постоянные.

2-солитонное решение (2+1)- мерного нелинейного уравнения A1:

$$\Psi = 2(\ln\varphi)_{xy}$$
$$\varphi = 1 + \exp\{\eta_1\} + \exp\{\eta_2\} + \exp\{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}\};$$
$$\eta_j = \alpha_j x_j + \beta_j y - \alpha_j \beta_j^2 t + \gamma_j,\ j = \overline{1,2};$$
$$\exp\{A_{12}\} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{\alpha_1\alpha_2(\beta_1 - \beta_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)};$$

где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ - достаточно гладкая комплексно-значная функция, $\alpha, \beta, \gamma$ - постоянные, $\beta_1 \neq \beta_2$.

N-солитонное решение (2+1)-мерного нелинейного уравнения A1:

$$\Psi = 2(\ln\varphi)_{xy}$$

$$\varphi_N = \sum_{\mu^*=0,1} \exp(\sum_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \le i < j}^{N} \mu_i \mu_j A_{ij}),$$

где $\mu^*$ пробегает весь набор $\mu_j = 0,1;\ j = \overline{1,N}$;

$$\eta_j = \alpha_j x + \beta_j y - \alpha_j \beta_j^2 t + \gamma_j,\ \ j = \overline{1,N};$$

$$\exp\{A_{ij}\} = \frac{\beta_i - \beta_j}{\beta_i + \beta_j} \cdot \frac{\alpha_i \alpha_j (\beta_i - \beta_j) + (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i \alpha_j + \beta_j \alpha_i)}{\alpha_i \alpha_j (\beta_i + \beta_j) + (\alpha_i + \alpha_j)(\beta_i \alpha_j + \beta_j \alpha_i)}, \quad \beta_1 \ne \beta_2,$$

где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ - достаточно гладкая комплексно-значная функция, $\alpha, \beta, \gamma$ - постоянные.

В данной статье будут представлены законы сохранения (2+1)-мерной нелинейной математической модели А1, рассмотрена прямая задача рассеяния, показано приложение (2+1)-мерной математической модели А1 к нелинейным экономическим процессам и явлениям.

**3. Понятие солитона. Экономический солитон.**

Математически под солитонами понимают локализованную нелинейную волну, которая ведет себя как частица. Она взаимодействует с себе подобными и асимптотически восстанавливают свою первоначальную форму с возможным смещением фаз.

Солитоны изучают в океанах (блуждающие волны, цунами, вихревые солитоны), в твердых кристаллических телах (дислокации, доменные стенки), в магнитных материалах (солитоны в ферромагнетиках, электромагнитные солитоны), в волоконных световодах (оптический солитон, солитонные сети), в атмосфере Земли и других планет (солитон Россби, красное пятно Юпитера), в галактиках (черные дыры), в живых организмах (нервные импульсы, бризеры, интеллектоны, мемброны) и в экономике (экономический солитон).

Иногда солитон определяют как регулярное локализованное устойчивое решение нелинейного дифференциального уравнения [15].

Самые разнообразные системы, в том числе и социально-экономические могут представлять собой устойчивые локализованные формирования. В таких организационно экономических формах как теневая экономика и урбанистические маргинальные социумы проявляются характеристики солитона [16]. Коллективное поведение субъектов экономики имеет нелинейный волновой характер. Поэтому возникает вопрос обеспечения его структурной и локальной устойчивости [17]. Обе упомянутые выше формы устойчивы по отношению к внешним влияниям и обладают другими свойствами солитона. Отметим, что не каждое решение (2+1)-мерной нелинейной математической модели А1 является солитоном. Подобно этому не каждое коллективное образование имеет характеристики солитона.

Под экономическим солитоном понимают «форму поведения микросубъектов экономики, характерной чертой которой, является устойчивая склонность микросубъектов к определенным видам деятельности и непрерывное воспроизводство функциональных качеств данного коллективного формирования» [17]. Для образования солитона налагаются определенные условия на функцию $\Psi = \Psi(x,y,t)$, которая определяет поведение индивида. Волна вероятности — нелинейная волна, характеризующая поведение микросубъектов экономики. Тогда плотность вероятности

$\rho(x,y,t) = |\Psi(x,y,t)|^2$ определяет попадание индивида в определенную точку экономического пространства. Поэтому «в конкретной области экономического пространства солитоном в экономике можно считать устойчивую локализацию плотности вероятности попадания микроэкономических субъектов в эту область» [16].

## 4. Прямая задача рассеяния для (2+1)-мерной нелинейной математической модели A1.

Рассмотрим (2+1)-мерное нелинейное уравнение A1:

$$\Psi_t + \Psi_{xyy} + 2[\Psi^2]_y + [UV]_y = 0,$$
$$V_x = \Psi_y, U_y = \Psi_x$$

где комплекснозначная функция $\Psi = \Psi(x,y,t) \in C^{\infty}(R^1 \times R^1 \times R^1_+)$, $R^1$ - множество вещественных чисел, $R^1_+$ - положительная полуось, причем функция $\Psi(x,y,t)$ убывает вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$ [19].

Закон сохранения для (2+1)-мерного нелинейного уравнения A1 имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + divF = 0,$$

где $divF = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F2}{\partial y}$; $T$ - плотность, $F = (F_{1,}F_2)$- поток, по аналогии с потоком жидкости;

$$T = \Psi + C_1;$$
$$F_1 = \Psi_{yy} + C_2;$$
$$F_2 = 2\Psi^2 + UV + C_3,$$

$C_i$, $i = \overline{1,3}$ - произвольные постоянные.

Метод прямой задачи рассеяния для (2+1)-мерной нелинейной математической модели A1 состоит из следующих этапов.

1. Строится вспомогательная линейная система, пара Лакса для (2+1)-мерной нелинейной математической модели A1.
2. Определяется уравнение совместности вспомогательной линейной системы с (2+1)-мерной нелинейной математической модели A1, которая представляет собой условия нулевой кривизны.
3. Для первого уравнения вспомогательной линейной системы рассматривается спектральная задача.
4. По заданной функции находим составляющие матрицы рассения при фиксированных $y$ и $t$.
5. Используя 2-ое уравнение вспомогательной линейной системы мы восстанавливаем эволюцию составляющих матрицы рассеяния и дискретного спектра от переменных $y$ и $t$.

Итак, для (2+1)-мерной нелинейной математической модели A1 рассмотрим вспомогательную линейную систему вида

$$\begin{cases} \varphi_x = P\varphi \\ \varphi_t = Q_1\varphi + \lambda I\varphi_y \end{cases} \qquad (8)$$

где $\varphi = colon(\varphi_{1,}\varphi_2)$; $P = P_1 + \lambda P_2$

$$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Psi \\ \overline{\Psi} & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = A + \lambda \mathrm{B},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\Psi_{xy} - 2\Psi^2 - UV \\ -\overline{\Psi}_{xy} - 2\overline{\Psi}^2 - \overline{U}\overline{V} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\Psi - V \\ 2i\partial_x^{-1}\overline{\Psi} - \overline{V} & -i \end{pmatrix},$$

$\lambda_t = \lambda\lambda_y$ , $\lambda = \lambda(y,t)$- спектральный параметр, $\lambda = \xi_1 + i\xi_2$, $\operatorname{Re}\lambda = \xi_1$, $\operatorname{Im}\lambda = \xi_2$.

Условия совместности вспомогательной линейной системы (6) и (2+1)-мерной математической модели А1 (5) имеет вид:

$$P_1 t - Ax + [P_1, A] = 0,$$

где $[P_1, A] = P_1 A - AP_1$.

Быстрое убывание позволяет определить собственные функции $u, \overline{u}, v, \overline{v}$ со следующими граничными условиями при фиксированных $y$ и $t$

$$u \sim \begin{pmatrix} e^{-iRe\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \to -\infty$$

$$\overline{u} \sim \begin{pmatrix} e^{-iRe\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \to -\infty$$

$$v \sim \begin{pmatrix} 0 \\ e^{iRe\lambda x} \end{pmatrix} \text{ при } x \to +\infty$$

$$\overline{v} \sim \begin{pmatrix} -e^{-iRe\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \to +\infty$$

Для спектральной задачи

$$\varphi_x = P_1\varphi + \lambda P_2\varphi \qquad (9)$$

по заданным решениям $\varphi = \varphi(x, y, t)$ при фиксированных $y$ и $t$ будут найдены составляющие матрицы рассеяния:

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ \overline{b}(\overline{\lambda}) & -\overline{a}(\overline{\lambda}) \end{pmatrix}$$

Матрица $S(\lambda)$ характеризует функцию $\varphi$, $\frac{1}{a(\lambda)}$ - коэффициент прохождения, $\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$ - коэффициент отражения.

Далее будем опускать зависимость функций от $y$ и $t$.

Допустим, что $\varphi$ и $\overline{\varphi}$ являются решением спектральной задачи (9)

$$\varphi = \varphi(x,\mathrm{Re}\,\lambda) = colon(\varphi_1(x,\mathrm{Re}\,\lambda),\varphi_2(x,\mathrm{Re}\,\lambda)),$$
$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(x,\mathrm{Re}\,\lambda) = colon(\overline{\varphi}_1(x,\mathrm{Re}\,\lambda),\overline{\varphi}_2(x,\mathrm{Re}\,\lambda)).$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}W(\varphi,\overline{\varphi}) = 0,$$

где $W(\varphi,\overline{\varphi})$ - вронскиан $\varphi$ и $\overline{\varphi}$:

$$W(\varphi,\overline{\varphi}) = \varphi_1\overline{\varphi}_2 - \varphi_2\overline{\varphi}_1 .$$

Так как $W(u,\overline{u}) = -1$ и $W(v,\overline{v}) = 1$, то решения $v$ и $\overline{v}$ являются линейно независимыми, поэтому мы можем выразить функции $u$ и $\overline{u}$ через $v$ и $\overline{v}$:

$$u = a(\mathrm{Re}\,\lambda)\overline{v} + b(\mathrm{Re}\,\lambda)v$$
$$\overline{u} = -\overline{a}(\mathrm{Re}\,\lambda)v + \overline{b}(\mathrm{Re}\,\lambda)\overline{v}$$

или

$$\begin{pmatrix} u \\ \overline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\mathrm{Re}\,\lambda) & b(\mathrm{Re}\,\lambda) \\ \overline{b}(\mathrm{Re}\,\lambda) & -\overline{a}(\mathrm{Re}\,\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{v} \\ v \end{pmatrix}$$

при этом

$$a(\mathrm{Re}\,\lambda)\overline{a}(\mathrm{Re}\,\lambda) + b(\mathrm{Re}\,\lambda)\overline{b}(\mathrm{Re}\,\lambda) = 1.$$

Теперь установим аналитические свойства матрицы рассеяния.

Если $\Psi$ и $\overline{\Psi}$ абсолютно интегрируемы, т.е. $\Psi, \overline{\Psi} \in L_1$, то функции $u(x,\lambda)e^{i\lambda x}$ и $v(x,\lambda)e^{-i\lambda x}$ являются аналитическими в верхней полуплосткости, а функции $\overline{u}(x,\overline{\lambda})e^{-i\overline{\lambda}x}$ и $\overline{v}(x,\overline{\lambda})e^{i\overline{\lambda}x}$ - аналитические в нижней полуплоскости, где

$$u(x,\lambda) = colon(u_1(x,\lambda),u_2(x,\lambda)),$$
$$v(x,\lambda) = colon(v_1(x,\lambda),v_2(x,\lambda)).$$

Тогда функция

$$a(\lambda) = W(u(x,\lambda),v(x,\lambda)) = u_1(x,\lambda)v_2(x,\lambda) - u_2(x,\lambda)v_1(x,\lambda)$$

является аналитической в верхней полуплоскости, а функция

$$\overline{a}(\overline{\lambda}) = W(\overline{u}(x,\overline{\lambda}),v(x,\overline{\lambda})) = \overline{u}_1(x,\overline{\lambda})\overline{v}_2(x,\overline{\lambda}) - \overline{u}_2(x,\overline{\lambda})\overline{v}_1(x,\overline{\lambda})$$

аналитической в нижней полуплоскости.

Функции

$$b(\lambda) = -W(u(x,\lambda), \bar{v}(x,\bar{\lambda})),$$
$$\bar{b}(\bar{\lambda}) = -W(\bar{u}(x,\bar{\lambda}), v(x,\lambda))$$

- вообще говоря, не обладают аналитическими свойствами.

Для установления свойств аналитичности матрицы рассеяния представим функцию
$u(x,\lambda) = colon(u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda))$ в виде интегрального уравнения.

$$u_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} = 1 + \int_{-\infty}^{x} M(x,z_1,\lambda)u_1(z_1,\lambda)e^{i\lambda z_1}dz_1 \tag{10}$$

$$u_2(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \int_{-\infty}^{x} e^{2i\lambda(x-z_1)}\bar{\Psi}(z_1)u_1(z_1,\lambda)e^{i\lambda z_1}dz_1 \tag{11}$$

$$M(x,z_1,\lambda) = \bar{\Psi}(z_1)\int_{z_1}^{x} e^{2i\lambda(z_2-z_1)}\Psi(z_2)dz_2 . \tag{12}$$

Следуя [1] можно показать абсолютную сходимость, ограниченность функций $u_1(x,\lambda)e^{i\lambda z}$ , $u_2(x,\lambda)e^{i\lambda z}$ и их производных по переменным $\lambda$, что устанавливает аналитичность функций $u_1(x,\lambda)e^{i\lambda z}$ и $u_2(x,\lambda)e^{i\lambda z}$ в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$.

При $\Psi, \bar{\Psi} \in L_1$ и дополнительном условии на функции $\Psi$ и $\bar{\Psi}$:

$$\left|\bar{\Psi}(x)\right| \le Ce^{-2K|x|},$$
$$\left|\Psi(x)\right| \le Ce^{-2K|x|},$$

где $C, K$ $(K > 0)$ - константы, мы получаем аналитичность вектор-функций
$u(x,\lambda)e^{i\lambda x}$ , $v(x,\lambda)e^{-i\lambda x}$ и $a(\lambda)$ при всех $\mathrm{Im}(\lambda) > -K$, при этом вектор-функции
$\bar{u}(x,\bar{\lambda})e^{-i\bar{\lambda}x}$ и $\bar{v}(x,\bar{\lambda})e^{i\bar{\lambda}x}$ и $\bar{a}(\bar{\lambda})$ аналитичны при $\mathrm{Im}(\lambda) < K$. Кроме того $b(\lambda)$ и $\bar{b}(\bar{\lambda})$ являются аналитическими в полосе $-K < \mathrm{Im}(\lambda) < K$.

Для того чтобы, найти асимптотическое разложение при больших $\lambda$ в верхней полуплоскости, проинтегрируем (10)-(12) по частям, получим:

$$u_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} = 1 - \frac{1}{2i\lambda}\int_{-\infty}^{x}\bar{\Psi}(z_1)dz_1 + O(\lambda^2),$$
$$u_2(x,\lambda)e^{i\lambda x} = -\frac{1}{2i\lambda}\bar{\Psi}(x) + O(\lambda^{-2})$$
$$v_1(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \frac{1}{2i\lambda}\Psi(x) + O(\lambda^{-2})$$
$$v_2(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = -\frac{1}{2i\lambda}\int_{x}^{\infty}\bar{\Psi}(z)\Psi(z)dz + O(\lambda^{-2})$$

Для координат вектор-функций

$$\bar{u}(x,\bar{\lambda}) = colon(\bar{u}_1(x,\bar{\lambda}), \bar{u}_2(x,\bar{\lambda})),$$
$$\bar{v}(x,\bar{\lambda}) = colon(\bar{v}_1(x,\bar{\lambda}), \bar{v}_2(x,\bar{\lambda})),$$

для всех $\lambda$ лежащих в нижней полуплоскости получаем асимптотическое разложение

$$\overline{u}_1(x,\overline{\lambda})e^{i\overline{\lambda}x} = 1 - \frac{1}{2i\overline{\lambda}}\Psi(x) + O(\lambda^2)$$

$$\overline{u}_2(x,\overline{\lambda})e^{-i\overline{\lambda}x} = -1 - \frac{1}{2i\overline{\lambda}}\int_{-\infty}^{x}\Psi(z_1)\overline{\Psi}(z_1)dz_1 + O(\overline{\lambda}^2)$$

$$\overline{v}_1(x,\overline{\lambda})e^{-i\overline{\lambda}x} = 1 + \frac{1}{2i\overline{\lambda}}\int_{x}^{\infty}\Psi(z_1)\overline{\Psi}(z_1)dz_1 + O(\overline{\lambda}^2)$$

$$\overline{v}_2(x,\overline{\lambda})e^{-i\overline{\lambda}x} = -\frac{1}{2i\overline{\lambda}}\overline{\Psi}(x) + O(\lambda^{-2}).$$

Тогда при $|\lambda| \to \infty$ в соответствующих полуплоскостях имеем асимптотические разложения для $a(\lambda)$ и $\overline{a}(\overline{\lambda})$:

$$a(\lambda) = 1 - \frac{1}{2i\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(z_1)\overline{\Psi}(z_1)dz_1 + O(\lambda^2)$$

$$\overline{a}(\overline{\lambda}) = 1 - \frac{1}{2i\overline{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(z_1)\overline{\Psi}(z_1)dz_1 + O(\overline{\lambda}^{-2})$$

Если $\Psi$ и $\overline{\Psi}$ не слишком малы, то спектральная задача

$$\varphi_x = P_1\varphi + \lambda P_2\varphi$$

может иметь дискретные собственные значения, когда $a(\lambda)$ имеет нули в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}(\lambda) > 0$) и $\overline{a}(\overline{\lambda})$ имеет нули в нижней полуплоскости ($\mathrm{Im}(\lambda) < 0$).

Допустим, что $\Psi$ и $\overline{\Psi}$ убывают достаточно быстро при $|x| \to \infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|z_1|^n|\Psi(z_1)|dz_1 < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|z_1|^n|\overline{\Psi}(z_1)|dz_1 < \infty$$

для всех $n$. Тогда $a(\lambda), \overline{a}(\overline{\lambda})$, $b(\lambda)$, $\overline{b}(\overline{\lambda})$ являются целыми функциями. В этом случае мы можем продолжить $b(\lambda)$, $\overline{b}(\overline{\lambda})$ и получить $\gamma_k(\lambda) = b(\lambda_k)$ и $\overline{\gamma}_k(\overline{\lambda}) = \overline{b}(\overline{\lambda}_k)$. Тогда функции $a(\lambda), \overline{a}(\overline{\lambda})$ являются аналитическими в верхней и нижней полуплоскостях соответственно и на вещественной оси. Следовательно $a(\lambda)$ имеет только конечное число нулей при $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ [18].

Пусть $\lambda_k$, $k = \overline{1,N}$ - нули функции $a(\lambda)$ в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}(\lambda) > 0$), где $N$ - число связанных состояний. При $\lambda = \lambda_k$, $k = \overline{1,N}$ имеем связь:

$$u(x,\lambda) = \gamma_k(\lambda)v(x,\lambda),\ \gamma_k(\lambda) = b(\lambda_k),\ k = \overline{1,N}.$$

Пусть $\overline{\lambda}_k$, $k = \overline{1,N}$ - нули функции $\overline{a}(\overline{\lambda})$ в нижней полуплоскости. Тогда при

$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_k$, $k = \overline{1, N}$ имеем связанные состояния:

$$\bar{u}(x, \bar{\lambda}) = \bar{\gamma}_k(\bar{\lambda})\bar{v}(x, \bar{\lambda}),\ \bar{\gamma}_k(\bar{\lambda}) = \bar{b}(\bar{\lambda}_k),\ k = \overline{1, N}.$$

Используя второе уравнение вспомогательной линейной системы (8)

$$\varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + B\lambda\varphi, \tag{13}$$

где спектральный параметр $\lambda = \lambda(x, y, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\lambda_t = \lambda\lambda_y \tag{14}$$

восстановим зависимость матрицы рассеяния $S(\lambda)$ от переменных $y$ и $t$. Уравнение (14) имеет два решения:

$$\lambda(y, t) = \lambda_1 = const,$$
$$\lambda(y, t) = \lambda_2(y, t) = \frac{y + c_1 + ic_2}{t_0 - t},$$

где $c_1$, $c_2$, $t_0$ - некоторые вещественные постоянные.
Матрица рассеяния

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ \bar{b}(\bar{\lambda}) & -\bar{a}(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$$

в силу (13) удовлетворяет эволюционному уравнению

$$S_t = \lambda S_y \tag{15}$$

Откуда получаем эволюцию по $x$, $y$ и $t$ коэффициентов перехода и дискретного спектра

$$a(x, y, t, \lambda) = a(x, y + \lambda t, \lambda)$$
$$b(x, y, t, \lambda) = b(x, y + \lambda t, \lambda)$$
$$\gamma_j(x, y, t, \lambda_j) = \gamma_j(x, y + \lambda_j t, \lambda_j),\ j = \overline{1, N}.$$

Из (15) видно, что составляющие матрицы рассеяния $S(\lambda)$ удовлетворяют эволюционным уравнениям

$$b_t = \lambda b_y$$
$$a_t = \lambda a_y$$
$$(\gamma_j)_t = \lambda(\gamma_j)_y.$$

Таким образом для (2+1)-мерной нелинейной математической модели A1 мы построили вспомогательную линейную систему, условие нулевой кривизны, для первого уравнения вспомогательной линейной системы рассмотрели спектральную задачу, по заданной функции $\varphi$ определили составляющие матрицы рассеяния и дискретный спектр при фиксированных $y$ и $t$. Используя второе уравнение вспомогательной линейной системы, восстановили эволюцию данных матрицы рассеяния и дискретного спектра от переменных $y$ и $t$.

**5. Экономический смысл прямой задачи рассеяния для (2+1)-мерной математической модели A1.**

Пространственно двумерная нелинейная математическая модель A1 (5) адекватно описывает объективную реальность любого экономического явления или процесса. Известно [17], что поведение микросубъектов экономики имеет волновой характер. Здесь функция $\Psi = \Psi(x, y, t)$ - волновая функция, описывающая состояние микросубъекта экономики, $x, y$ - потенциалы коллективных экономических взаимодействий; $t$ - фактор времени, который выполняет функцию трансформационного параметра; $\rho(x,y,t) = |\Psi(x,y,t)|^2$ -плотность вероятности пребывания микроэкономического субъекта в данной точке экономического пространства в данный момент времени.

Волновая экономическая функция $\Psi = \Psi(x, y, t)$ равна амплитуде вероятности нахождения микроэкономического субъекта в конкретной точке экономического пространства в каждый момент времени $t$. Потенциалы коллективных экономических взаимодействий $x$ и $y$ представляют собой характеристику коллективного экономического поля, которое в свою очередь является результатом агрегирования индивидуальных экономических полей.

(2+1)-мерная нелинейная математическая модель A1 описывает такое изменение потенциалов $x$ и $y$, при котором собственные значения $\lambda_j$, $j = \overline{1, N}$ функции $\Psi = \Psi(x, y, t)$ удовлетворяют эволюционному уравнению $\lambda_t = \lambda\lambda_y$. Следовательно трансформация функции $\Psi = \Psi(x, y, t)$ задается изменением потенциалов коллективных взаимодействий $x$ и $y$. В свою очередь изменение потенциалов коллективного взаимодействия $x$ и $y$ обуславливается эволюцией функции $\Psi = \Psi(x, y, t)$.

Решение (2+1)-мерного нелинейной математической модели A1 методом прямой задачи рассеяния заключается в том, что по заданному исходному значению функции $\Psi = \Psi(x, y, t)$ восстанавливаются так называемые данные рассеяния, т.е. все собственные значения $\lambda_j$, $j = \overline{1, N}$ и составляющие матрицы рассеяния также будут изменяться. При этом солитон будет образовываться только в том случае, если функция $\Psi = \Psi(x, y, t)$ деформируется в соответствии с уравнением (5).

Если приложить метод прямой задачи рассеяния к экономической проблематике, то он будет соответствовать реализации позитивного подхода к экономической политике.

Так, в частности, требование оценить последствия реализации каких-либо предварительно заданных перманентных экономических действий, например, бюджета, формально соответствует решению прямой задачи рассеяния. Т.е. означает восстановление данных матрицы рассеяния по заданной заранее функции $\Psi = \Psi(x, y, t)$ на поле коллективных взаимодействий $x$ и $y$. Такая интерпритация метода прямой задачи рассеяния согласуется с позитивным аналитическим подходом в экономике.

**Заключение.**

Итак, мы рассмотрели (2+1)-мерную нелинейную математическую модель A1, обобщающую уравнение Кортевега-де Фриза. Показали ее законы сохранения, рассмотрели для нее вспомогательную линейную систему, определили условие нулевой кривизны, которая связывает вспомогательную линейную систему с данной моделью. Решили прямую задачу рассеяния для этой модели. По заданной функции определили составляющие матрицы рассеяния, восстановили эволюцию матрицы рассеяния от переменных $y$ и $t$.

Объяснили экономический смысл (2+1)-мерной нелинейной математической модели А1. Определили экономический солитон как решение данной математической модели. Объяснили экономический смысл метода прямой задачи рассеяния, соответствующий позитивному аналитическому подходу в экономике.

## Литература


1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.1987. 477с.
2. Gardner C.S. and Morikawa G.M. Similarity in the asymptotic behavious of collision free hydromagnetic wave and water waves. Report NYO-9082. Cjurant Inst of Math. Sciences. 1969.
3. Washimi M. And Taniuti T. Propagationof ion acoustic solitary waves of small amplitude. Phys. Rev. Lett. 1966. 17. 996-998.
4. Кадомцев Б.Б. Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией. ДАН СССР. 1970. 192. 753-756.
5. Tappert F. And Varma C.M. Asymptotic theory of self – trapping of heat pulses in solids. Phys. Rev. Lett. 1970.25. 1108-1111.
6. Narayanamyrti V. And Varma C.M. Nonlinear propagation of heat pulses in solids. Phys.Rev.Lett. 1970. 25. 1105-1108.
7. Kako M. And Rowland G. Two dimensional stability of ion acoustic solitons. Plasma Phisics. 1976. 18. 165-170.
8. А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. Пер. с англ.-М. 1989. 326с.
9. Веселов А.П., Новиков С.П. Конечнозначные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // ДАН СССР. 1984. Т.279, с.20.
10. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния гиперболических уравнений. Киев. 1991. 232с.
11. Alexeyeva A.V. (2+1) – dimensional analogs of the Korteweg-de Vries equation, International Journal of Contemorary Mathematics. 2012. Vol.3. 1-2. P.47-55.
12. Алексеева А.В. (2+1)-мерная модель Кортевега-де Фриза и её интегрируемость // Вестник МОН РК №3. 2006. с.12-15.
13. Алексеева А.В. Метод Хироты для (2+1)-мерной билинейной формы Н1 // Известия МОН РК. Серия физ.-матем. №5. 2012. с.27-33.
14. Алексеева А.В. N-солитонные решения (2+1) – мерного нелинейного уравнения А1 // Материалы X Международной заочной научно-практической конференции «Научная дискуссия: инновации в современном мире». 2013г. Москва. С.6-15.
15. Шикин Г. Основы теории солитонов в общей теории относительности. М., 1995. с.3.
16. Т.В. Огородникова. Экономический солитон как устойчивая форма коллективного волнового поведения микроэкономических субъектов. 2004г.
17. Т.В. Огородникова. Формализация солитона волны коллективного экономического поведения.
18. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H.Segur. The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems, Stud.Appl.Math, 1974, 53, pp.249-315.
19. Тахтаджан Л.А. Фадеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.1986. – 527с.