

# ВЕСТНИК

Восточно-Казахстанского государственного  
технического университета  
им. Д. Серикбаева

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Институт вычислительных технологий  
Сибирского отделения РАН

Вычислительные технологии  
Часть 1

С  
О  
В  
М  
Е  
С  
Т  
Н  
Ы  
Й  
  
В  
Ы  
П  
У  
С  
К

2013 ISSN 1560-7534  
Том 18 № 4


2013 Том 18 № 4

### Вычислительные Технологии

Главный редактор  
академик Ю.И. Шокин

Институт вычислительных технологий  
Сибирского отделения РАН

ISSN 1561-4212  
сентябрь, 2013 г.



Д. Серикбаев  
атындағы  
Шығыс Қазақстан  
мемлекеттік техникалық  
университетінің

**ХАБАРШЫСЫ**

**ВЕСТНИК**  
Восточно-Казахстанского  
государственного технического  
университета  
имени  
Д. Серикбаева

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ■ БЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

3

Блеутаева К.Б., Алдабергенова А.А. КОММЕРЦИАЛЬНЫЙ БАНКТЕРДИҢ ДЕПОЗИТ- ТИК ОПЕРАЦИЯЛАРЫНЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗІ . . . . .	97
Боқауев N., Mukanov Zh. ON THE INTEGRABILITY WITH WEIGHT OF MULTIPLE MULTIPLICATIVE TRANSFORMS . . . . .	101
Ван Е.Ю., Касперская А.А., Нурбаева Н.А., Карибаева М.К., Чурсин А.П. ИМИТАЦИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СРЕДЕ EXCEL НА ПРИМЕРЕ ОБЕЗВРЕЖИВАНИЯ И ЗАХОРОНЕНИЯ МЫШЬЯКСОДЕРЖАЩИХ ОТХОДОВ . . . . .	102
Варавин Е.В., Козлова М.В. АДАПТИРУЕМАЯ СИСТЕМА РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ . . . . .	109
Гуркин А.А. ШАГИ НА ПУТИ К ПОЛУЧЕНИЮ ПРЕСТИЖНОЙ РАБОТЫ В ПРОЕКТНОЙ КОМПАНИИ 1С . . . . .	118
Дракунов Ю.М., Шахворостова А.В., Абдураимов А.Е. СИНТЕЗ ПЛОСКОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА 3-ГО КЛАССА С ВЫСТОЕМ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА . . . . .	122
Емельянова М.Г., Зарубин Н.П. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ . . . . .	127
Жайнаков А.Ж., Курбаналиев А.Ы. ТЕХНОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНО- МАСШТАБНЫХ ПРОЦЕССОВ НАВОДНЕНИЯ МЕТОДАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ . . . . .	131
Жайнаков А., Усенканов Дж.О. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКЕ ЭЛЕКТРОДУГОВОЙ ПЛАЗМЫ . . . . .	133
Жапбасбаев У.К., Рамазанова Г.И., Pinho F. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА НЕФТЕСМЕСИ С ПОЛИМЕРНОЙ ПРИСАДКОЙ . . . . .	139
Жумагулов Б.Т., Данаев Н.Т., Ахмед-Заки Д.Ж. МОДЕРНИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АНАЛИЗА РАЗРАБОТКИ НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ - ИСАР-II . . . . .	149
Жумагулов Б.Т., Данаев Н.Т., Турар О.Н. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ, ПОСТРОЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ . . . . .	156
Жумагулов Б.Т., Жакебаев Д.Б., Асылбекұлы А. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МНОГОКОМПОНЕНТНУЮ ЖИДКОСТЬ . . . . .	165
Zhumagulov B., Issakhov A. MATHEMATICAL MODELLING OF THERMAL PROCESS TO THE AQUATIC ENVIRONMENT BY USING PARALLEL TECHNOLOGIES . . . . .	169
Жумагулов Б.Т., Исахов А.А., Хикметов А.К. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВАРИЙНЫХ РАЗЛИВОВ НЕФТИ НА КАСПИЙСКОМ МОРЕ С НЕСТАЦИОНАРНОГО ИСТОЧНИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИИ . . . . .	175
Жумагулов Б.Т., Масанов Ж.К., Ажиханов Н.Т. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ . . . . .	180
Иманкулов Т.С., Мухамбетжанов С.Т., Ахмед-Заки Д.Ж. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ПОЛИМЕРОМ . . . . .	183
Искаков К.Т. ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОРАДАРА ПО ИССЛЕДОВАНИЮ АРХЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ ПОКРЫТИЙ . . . . .	191

- [15] *Балтин В.А.* Гибридная модель параллельного программирования DVM/OpenMP // Авто-реферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Москва, 2008. – 122 с.
- [16] *Frankel D.* Model Driven Architecture. Applying MDA to Enterprise Computing. – Indiana: Wiley Publishing, 2003. – 567 p.
- [17] *Кларк Э., Грамберг О., Пелед Д.* Верификация моделей программ: Model Checking. – М.: МЦНМО, 2002. – 416 с.
- [18] *ursa.kaznu.kz*

УДК 681.5.015

## УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ, ПОСТРОЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

Б.Т. Жумагулов, Н.Т. Данаев, О.Н. Турар

Казахский национальный университет имени Аль-Фараби

**Abstract.** The solution of boundary value problems for the Poisson equation on the surface is an important task, allowing to apply a wide functionality of finite-difference methods in the areas and on the surfaces of complex shapes. The use of adaptive grids, even without strong gradients of solutions and other properties of a particular physical process that can lead to large errors, can greatly improve the accuracy of solutions because of possible severe bends and twists of the surface, affecting the value of the metric tensor, the components of which will be the coefficients of the differential elliptic equation.

**Keywords:** adaptive grids, surface, structured grids, Poisson equation.

**Андатпа.** Пуассон теңдеуі үшін шекаралық есептерді шығару күрделі пішінді аудандар және беттерде ақырлы-айырымдық әдістердің кең функционалын қолдануға мүмкіндік беретін өзекті мәселе болып табылады. Адаптивті торларды қолдану шешімнің күшті градиенттері және, сол сияқты үлкен кателіктерге әкеліп соғуы мүмкін, физикалық үрдіс ерекшеліктерін ескермегеннің өзінде компоненттері дифференциалды эллиптикалық теңдеудің коэффициенттері болып табылатын метрикалық тензорға ықпал жасайтын беттің кейбір бүгілулері мен оралуларының салдарынан айтарлықтай шешім дәлдігін жоғарылатуы мүмкін.

**Кілттік сөздер:** адаптивті торлар, бет, құрылымды торлар, Пуассон теңдеуі.

**Аннотация.** Решение краевых задач для уравнения пуассона на поверхности является актуальной задачей, позволяющей применять широчайший функционал конечно-разностных методов в областях и на поверхностях сложных форм. Использование адаптивных сеток, даже без учета сильных градиентов решений и других свойств конкретного физического процесса, способных привести к большим погрешностям, может сильно повысить точность решения из-за возможных сильных сгибов и кручений поверхности, влияющих на значения метрического тензора, компоненты которого будут являться коэффициентами дифференциального эллиптического уравнения.

**Ключевые слова:** адаптивные сетки, поверхность, структурированные сетки, уравнение Пуассона.

## Введение

Основной задачей, на раскрытие которой нацелена статья, является разработка конечно-разностной схемы на адаптивной сетке для решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Такая задача часто встречается в виде подзадачи при моделировании сложных физических явлений во многих прикладных областях. В статье рассматривается двумерная задача. Несмотря на такое упрощение, эта задача имеет достаточно широкий круг приложений в практике.

Переход к криволинейным координатам позволяет упростить расчет около криволинейных границ, так как в новых координатах область решения имеет прямолинейные границы. Кроме того, использование криволинейных координат позволяет сгущать расчетные сетки в областях больших градиентов решения. Этим можно добиться повышения точности численного решения.

Для математического изучения свойств разного рода физических явлений на сложных поверхностях и областях приходится применять метод координат и появляется необходимость применения аппарата тензорного анализа. Координатный метод позволяет осуществить параметризацию модели, в данном случае в основном геометрических построений, и применять определенные математические операции для корректного поведения различных дифференциальных операторов путем использования метрических тензоров поверхностей и многообразий.

## Построение адаптивной сетки на криволинейной области

Для решения поставленной задачи сначала будет построена криволинейная сетка на некоторой области, которая является образом аналогичного участка поверхности, заданной параметрически. Существует множество различных методов построения криволинейных структурированных сеток широко используемых в различных ситуациях для решения конкретных задач. В основном используются дифференциальные методы, но в большинстве случаев находят свои применения и методы построения сеток путем решения систем алгебраических уравнений. К примеру, алгебраические уравнения могут использоваться для получения начального приближения для многих итерационных дифференциальных методов построения адаптивных сеток потому, что каждая итерация производит некоторый слабый сдвиг ячеек сетки, дальнейшее сравнение и проверку выполнения условий сходимости. И очевидно, что при плохих начальных данных расположения узлов искомой сетки количество итераций выполняемых для сходимости модели может резко возрасти.

Эффективные методы построения адаптивных сеток это методы, основанные на решении дифференциальных задач второго порядка. Для решения этих задач необходимы граничные условия. В рассматриваемой задаче граничными условиями являются узлы сетки на границе области, которые сами по себе являются решением одномерного уравнения. Для получения значений параметрических координат узлов на границах была использована следующая одномерная задача:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \left( w(p) \frac{ds}{dq} \right) &= 0, \quad q \in (0, 1), \\ p(0) &= 0, \quad p(1) = l. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь сама кривая задается параметрически,

$$p = p(q), \quad q \in [0, 1] \quad (2)$$

а через  $s(p_j)$  обозначена длина дуги кривой  $\mathcal{L}$  от ее начала до узла  $x_j$ . Решение этой задачи позволит получить сгущение сетки заданное управляющей функцией  $w(x, y)$ .

Криволинейная сетка строится путем поиска некоторого отображения

$$x = x(q), \quad (3)$$

где  $x$  и  $q$  — векторы и  $x = (x^1, x^2)$ ,  $q = (q^1, q^2)$ ,  $x(q) = (x^1(q^1, q^2), x^2(q^1, q^2))$ .

Как упоминалось выше, далее нужно определить первое приближение для адаптивной сетки. Для этого был использован метод трансфинитной интерполяции (TFI-метод). При его использовании вычисление координат внутренних узлов производится с учетом расстановки узлов на всех четырех частях границы. Формулы трансфинитной интерполяции реализуются в два этапа. На первом этапе интерполируются значения координат узлов сетки с левой и правой границ:

$$x_{j_1, j_2}^* = (1 - q_{j_1}^1)x_{0, j_2} + q_{j_1}^1 x_{N_1, j_2}, \quad j_\alpha = 0, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4)$$

На втором этапе интерполируются значения координат узлов сетки с нижней и верхней границ:

$$x_{j_1, j_2} = x_{j_1, j_2}^* + (1 - q_{j_2}^2)(x_{j_1, 0} - x_{j_1, 0}^*) + q_{j_2}^2(x_{j_1, N_2} - x_{j_1, N_2}^*), \quad (5)$$

$j_\alpha = 0, \dots, N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $q^1$  и  $q^2$  параметры уже двумерной области. Легко проверить, что TFI-метод не изменяет расположение узлов на границе области [7].

После этого было реализовано два различных метода построения криволинейных сеток. Это классические методы эквираспределения и Годунова-Томпсона. Они были тщательно изучены, после чего реализованы и протестированы путем решения на построенной криволинейной сетке краевых задач для уравнений Пуассона и теплопроводности.

### Метод эквираспределения

Вначале мы получим дифференциальные уравнения метода эквираспределения. В двумерном случае принцип эквираспределения в разностной форме будет выглядеть так:

$$w(x_{j+1/2})S_{j+1/2} = \text{const}, \quad j_\alpha = 0, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

где  $S_{j+1/2}$  — площадь четырехугольной ячейки с вершинами  $x_{j_1, j_2}$ ,  $x_{j_1+1, j_2}$ ,  $x_{j_1+1, j_2+1}$ ,  $x_{j_1, j_2+1}$ ;  $w(x_{j+1/2})$  — значение заданной управляющей функции в центре  $x_{j+1/2}$  этой ячейки;  $j+1/2 = (j_1+1/2, j_2+1/2)$ . Координаты центра определяются как среднее арифметическое соответствующих координат четырех ее вершин. Из равенства (6) видно, что если сетка удовлетворяет принципу эквираспределения, то площади ячеек будут малы там, где  $w$  принимает большие значения, и наоборот, сетка будет иметь ячейки с большими площадями в той части, в которой функция  $w$  принимает малые значения.

Учитывая связь между элементарной площадью и первой квадратичной формой и дифференцируя формулу (6), выводится дифференциальное уравнение эквираспределения. Стоит отметить, что формула (28) получается аналогично и называется одномерным дифференциальным уравнением эквираспределения.

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{g_{22}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} - \frac{g_{12}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( -\frac{g_{12}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} + \frac{g_{11}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) = 0.$$

$$g_{11} = x_{q^1}^2 + y_{q^1}^2; \quad g_{22} = x_{q^2}^2 + y_{q^2}^2; \quad g_{12} = x_{q^1}x_{q^2} + y_{q^1}y_{q^2}. \quad (8)$$

определяются компонентами метрического тензора, а  $J$  — якобиан преобразования (3).

$$J = x_{q^1}y_{q^2} - x_{q^2}y_{q^1}, \quad (9)$$

Далее делается допущение, что искомая сетка является ортогональной, а значит, уравнение упрощается. С помощью метрического тензора условие ортогональности пишется следующим образом:

$$g_{12} = 0. \quad (10)$$

А уравнения эквираспределения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{g_{22}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{g_{11}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) = 0. \quad (11)$$

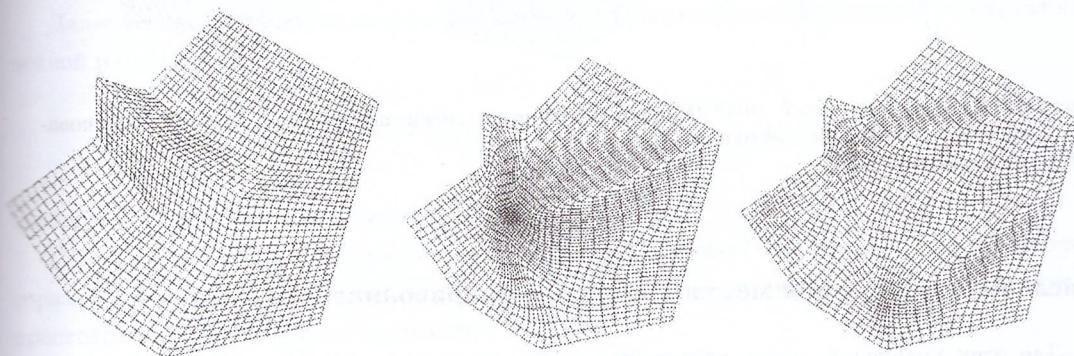


Рисунок 1 Пример сетки построенной методом трансфинитной интерполяции (слева); примеры построения сеток методом эквираспределения для различных управляющих функций

### Метод Годунова-Томпсона

Другой подход для построения двумерных неподвижных сеток с помощью дифференциального метода — это нахождение обратное для (3) отображение

$$q = q(x), \quad (12)$$

удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$\Delta q^\alpha \equiv \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial y^2} = P_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \Omega \quad (13)$$

и заданным на отдельных частях границы краевым условиям для искомой функции.

Криволинейность границы сильно усложняет численное решение поставленной задачи. Поэтому предпочтительнее находить прямое преобразование (3) при условии, что обратное преобразование (12) является решением уравнений (13). Для этого мы обращаем уравнение (13) заменяя

функцию в правой части уравнения следующим образом

$$P_\alpha = \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial q^\alpha}.$$

Обращенное уравнение примет следующий вид:

$$g_{22} \frac{\partial}{\partial q^1} \left( w \frac{\partial x}{\partial q^1} \right) + g_{11} \frac{\partial}{\partial q^2} \left( w \frac{\partial x}{\partial q^2} \right) - 2g_{12} w \frac{\partial^2 x}{\partial q^1 \partial q^2} = 0. \quad (14)$$

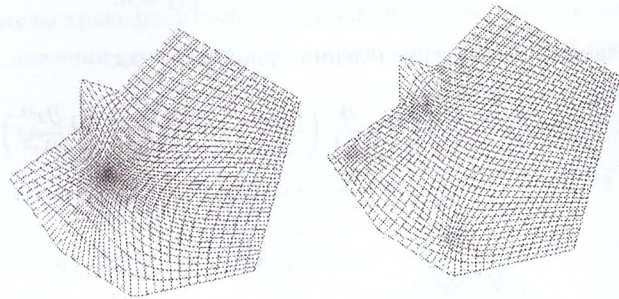
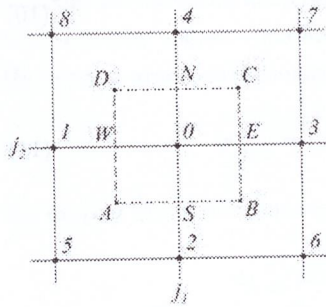


Рисунок 2 Девятиточечный шаблон для аппроксимации метода Годунова-Томпсона  
Рисунок 3 Пример сетки построенной методом Годунова-Томпсона

### Численная реализация методов построения криволинейных сеток

Для этих уравнений, после добавления к ним граничных условий, являющихся решением одномерного уравнения, делается аппроксимация второго порядка.

Далее приведена аппроксимация уравнения эквираспределения позволяющая найти внутренние точки сетки, полагая, что на границе области сетка уже построена. Будем предполагать, что сеточные функции  $J$  и  $g_{\alpha\alpha}$  определены в центрах ячеек:

$$J_{j+1/2} = (x^1_{q^1} x^2_{q^2} - x^1_{q^2} x^2_{q^1})_{j+1/2}.$$

$$(g_{11})_{j+1/2} = ((x^1_{q^1})^2 + (x^2_{q^1})^2)_{j+1/2}; \quad (g_{22})_{j+1/2} = ((x^1_{q^2})^2 + (x^2_{q^2})^2)_{j+1/2},$$

где через  $x^\alpha$  обозначены  $x$  и  $y$ ,  $\alpha = 1, 2$ ; а разностные производные  $(x^\alpha_{q^\beta})_{j+1/2}$  задаются выражениями

$$(x^\alpha_{q^1})_{j+1/2} = \frac{x^\alpha_2 + x^\alpha_3 - x^\alpha_1 - x^\alpha_4}{2h_1};$$

$$(x^\alpha_{q^2})_{j+1/2} = \frac{x^\alpha_4 + x^\alpha_3 - x^\alpha_1 - x^\alpha_2}{2h_2}.$$

Используя обозначение

$$(k_{11})_{j+1/2} = (wg_{22})_{j+1/2}; \quad (k_{22})_{j+1/2} = (wg_{11})_{j+1/2}.$$

разностную задачу Дирихле для нахождения координат внутренних узлов  $x_j$  можно сформулировать

равать следующим образом:

$$\Lambda x_j = 0, \quad q_j \in Q_h, \quad (20)$$

$$x_j = x(q_j), \quad q_j \in \partial \bar{Q}_h, \quad (21)$$

где  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , разностные операторы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  аппроксимируют со вторым порядком соответственно первый и второй дифференциальные операторы в левой части уравнения (11):

$$\Lambda_1 x_j = \frac{1}{h_1} \left( (k_{11})_{j_1+1/2, j_2} \cdot \frac{x_{j_1+1, j_2} - x_{j_1, j_2}}{h_1} - (k_{11})_{j_1-1/2, j_2} \cdot \frac{x_{j_1, j_2} - x_{j_1-1, j_2}}{h_1} \right); \quad (22)$$

$$\Lambda_2 x_j = \frac{1}{h_2} \left( (k_{22})_{j_1, j_2+1/2} \cdot \frac{x_{j_1, j_2+1} - x_{j_1, j_2}}{h_2} - (k_{22})_{j_1, j_2-1/2} \cdot \frac{x_{j_1, j_2} - x_{j_1, j_2-1}}{h_2} \right), \quad (23)$$

$$(k_{11})_{j_1 \pm 1/2, j_2} = \frac{1}{2} \left( (k_{11})_{j_1 \pm 1/2, j_2 + 1/2} + (k_{11})_{j_1 \pm 1/2, j_2 - 1/2} \right); \quad (24)$$

$$(k_{22})_{j_1, j_2 \pm 1/2} = \frac{1}{2} \left( (k_{22})_{j_1 + 1/2, j_2 \pm 1/2} + (k_{22})_{j_1 - 1/2, j_2 \pm 1/2} \right). \quad (25)$$

Далее используя следующую модификацию метода переменных направлений на случай нелинейной разностной задачи:

$$\frac{x_j^{n+1/2} - x_j^n}{\tau/2} = \Lambda_1^n x_j^{n+1/2} + \Lambda_2^n x_j^n; \quad \frac{x_j^{n+1} - x_j^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1^n x_j^{n+1/2} + \Lambda_2^n x_j^{n+1}. \quad (26)$$

находится расположение внутренних узлов искомого сетки.

По сравнению с этим методом реализация метода Годунова-Томпсона может быть выполнена гораздо проще и быстрее, поскольку уравнение может быть в ущерб скорости схождения решено простейшими итерационными методами.

Далее приведены окончательные формулы для коэффициентов, используемые в методе последовательной верхней релаксации

$$\left( \sum_{k=0}^8 \alpha_k x_k \right)_j = 0, \quad (27)$$

где  $k$  — локальный номер узла в девятиточечном шаблоне разностного уравнения (см. рис. 2, где узлу  $q_{j_1, j_2}$  присвоен номер 0, узлу  $q_{j_1-1, j_2} - 1$  и т. д.),

$$\alpha_1 = \frac{h_2}{h_1} (g_{22})_j w_W; \quad \alpha_3 = \frac{h_2}{h_1} (g_{22})_j w_E; \quad \alpha_2 = \frac{h_1}{h_2} (g_{11})_j w_S; \quad \alpha_4 = \frac{h_1}{h_2} (g_{11})_j w_N; \quad (28)$$

$$\alpha_0 = - \sum_{k=1}^4 \alpha_k; \quad \alpha_5 = \alpha_7 = -\frac{1}{2} (g_{12} w)_j; \quad \alpha_6 = \alpha_8 = \frac{1}{2} (g_{12} w)_j. \quad (29)$$

### Тестовая задача для уравнения Пуассона

С помощью этих аппроксимаций были численно построены сетки для нескольких областей. После чего для одной из них, а именно для квадрата, в котором сетка сгущалась к центру методом эквираспределения, была поставлена и решена тестовая задача для уравнения Пуассона. При этом сгущение происходило по значениям точного решения, с которым в конечном итоге



сравнивалось численное решение тестовой задачи. Точное решение представляется следующим образом:

$$\phi(x, y) = e^{-a^2(x^2+y^2)} \quad (30)$$

тестовая задача для уравнения Пуассона примет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) = \phi_{xx} + \phi_{yy} \quad (31)$$

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = \phi(x, y) \quad (32)$$

где  $\partial\Omega$  — граница области.

Чтобы иметь возможность решать это уравнение на криволинейной сетке необходимо произвести следующую замену переменных:

$$x = x(q^1, q^2) \quad y = y(q^1, q^2) \quad (33)$$

Тогда уравнение (31) придет к виду:

$$\left(u_{q^1} \frac{g_{22}}{J} - u_{q^2} \frac{g_{12}}{J}\right)_{q^1} + \left(u_{q^2} \frac{g_{11}}{J} - u_{q^1} \frac{g_{12}}{J}\right)_{q^2} = f(x(q^1, q^2), y(q^1, q^2)) \quad (34)$$

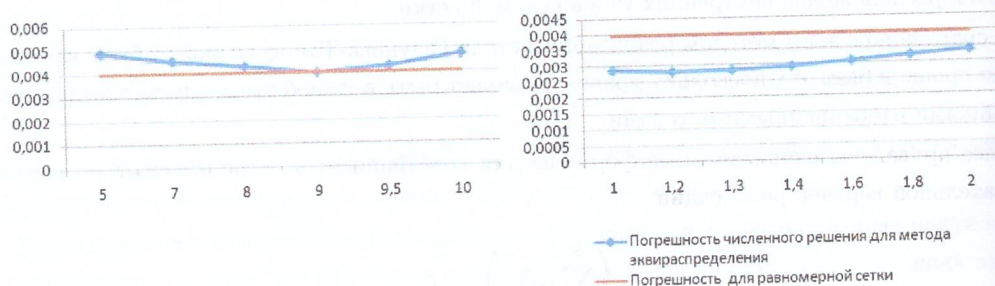


Рисунок 4 Сравнение погрешностей численного решения на равномерной сетке с сеткой построенной по управляющим функциям (35) (слева) и (36) (справа)

Уравнения (34) было аппроксимировано конечными разностями второго порядка, причем все коэффициенты и переменными использовались в целых узлах. После чего эта задача была решена методом последовательной верхней релаксацией. Тесты проводились по двум видам управляющей функции:

$$w(x, y) = 1 + \alpha\phi(x, y) \quad (35)$$

$$w(x, y) = 1 + \alpha|\nabla\phi(x, y)| \quad (36)$$

И, после проведения тестов с различными коэффициентами управляющей функции, были определены сетки, позволяющие получить наибольший выигрыш по точности. К примеру, в сетке 40 на 40 узлов погрешность численного решения на равномерной сетке была равна 0,0701, а на криволинейной — 0,040668.

## Уравнение Пуассона на поверхности

Для построения криволинейной сетки на поверхности достаточно построить ее на параметрической области поверхности. При этом, в качестве управляющей функции для криволинейной поверхности наряду с решением могут использоваться параметрические уравнения поверхности. Кроме того, в случае, когда значения управляющей функции заданы на поверхности, значения в параметрической области должны быть рассчитаны с помощью сложных функций.

В остальном же построение криволинейной сетки на поверхности мало чем отличается от построения сетки на произвольной области плоскости. Даже если речь идет о адаптивно строящейся сетке, то есть о сетке, построение которой происходит одновременно с решением задачи, в случае, когда точное решение неизвестно, а управляющая функция напрямую зависит от нее.

Гораздо более сложной проблемой можно назвать непосредственное решение задачи на криволинейной сетке на поверхности. Выше была представлен способ решения краевой задачи для уравнения Пуассона на криволинейной сетке. При этом, в качестве начального уравнения было взята классическая запись уравнения Пуассона на двумерной области. После чего была произведена замена переменных.

В случае решения задачи на поверхности в качестве начального уравнения взято уравнение Пуассона, в котором эллиптический оператор представлен в специальной записи для поверхности [?].

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left( \sqrt{a} a^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\beta} \right) \quad (37)$$

где  $a^{\alpha\beta}$  — контравариантные компоненты метрического тензора поверхности  $a$ ,  $\xi^\alpha$  — переменные параметрического представления поверхности,  $\alpha, \beta = 1, 2$ . В формуле (9) и в дальнейшем происходит суммирование по одинаковым индексам.

Замена переменных осуществляется аналогично (33)

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(q^1, q^2) \quad (38)$$

При замене переменных в новой системе координат частичные производные преобразуются следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^1} \quad (40)$$

где  $J$  — Якобиан преобразования пространства

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \end{vmatrix} \quad (41)$$

После преобразования уравнение Пуассона придет к виду

$$\frac{1}{\sqrt{a}J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \sqrt{aa}^{11} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) + \sqrt{aa}^{12} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) \right) - \quad (42)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a}J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \sqrt{aa}^{11} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) + \sqrt{aa}^{12} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) \right) + \quad (43)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \sqrt{aa}^{21} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) + \sqrt{aa}^{22} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) \right) - \quad (44)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a}J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \sqrt{aa}^{21} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) + \sqrt{aa}^{22} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} \frac{\partial u}{\partial q^2} - \frac{1}{J} \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) \right) = \quad (45)$$

$$= f(\xi^1(q^1, q^1), \xi^2(q^1, q^1)) \quad (46)$$

Постановка краевой задачи для этого уравнения и ее численное решение будет являться искомым решением уравнения Пуассона на поверхности. Само по себе прямое решение краевой задачи для уравнения Пуассона при использовании лапласиана (9) выдало бы корректный результат задачи на поверхности, но при этом появляется строгая ограниченность в выборе области, обусловленная параметрическим представлением поверхности, а также, в определенных случаях, неприемлемое снижение точности в местах резких сгибов и кручений.

## Заключение

В статье представлены шаги по построению криволинейных сеток и решению задач на них. Тщательно описаны два метода построения структурированных сеток на криволинейных областях: метод эквираспределения и метод Годунова-Томпсона. У этих методов есть свои отличительные черты, плюсы и минусы. К примеру, метод эквираспределения строит сетки приближенные к ортогональным, но при этом могут появиться ячейки с сильным сдвигом вдоль диагоналей или других линий, на которых сходятся небольшие области, состоящие из почти прямоугольных ячеек. А метод Годунова-Томпсона строит гладкие сетки, но может создать сильно разреженные ячейки при сильно искривленных границах. Кроме того, после описания их реализации приведен пример, в качестве тестовой задачи, решающей первую краевую задачу для уравнения Пуассона на сетке, построенной одним из этих методов. Показаны заметные улучшения точности при определенных начальных параметрах управляющей функции.

Описаны способы решения задачи на адаптивной сетке, построенной на поверхности. При этом основной упор делается именно на построении и использовании криволинейных сеток, поскольку использование только оператора Пуассона на поверхности для решения задачи может сильно повлиять на точность решения из-за топологии поверхности. Кроме того, использование криволинейных систем координат может быть очень хорошим вариантом для решения задач в областях со сложной формой границы.

На примере уравнения Пуассона описан принцип численного решения задач на криволинейных сетках. То есть, изначальное уравнение должно быть преобразовано путем замены переменных, после чего аппроксимировано и решено подходящими, чаще всего итеративными, численными методами.

## Список литературы

- [1] Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978.

- Глассер А. Г. и др. Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии / А. Г. Глассер, В. Д. Лисейкин, Ю. И. Шокин и др. Новосибирск: Наука, 2006.
- Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.
- Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Numerical grid generation, foundations and applications. New York: Elsevier Science Publisher, 1985.
- Лисейкин В. Д. Алгебраический метод построения разностных сеток. Новосибирск: НГУ, 2002.
- Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- Шокин Ю.И., Данаев Н.Т., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Лекции по разностным схемам на подвижных сетках: Часть 2. Алматы: Изд-во КазНУ им. аль-Фараби. 2008. 184 с.

УДК 532.544

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МНОГОКОМПОНЕНТНУЮ ЖИДКОСТЬ

Б.Т. Жумагулов, Д.Б. Жакебаев, А. Асылбекұлы

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

**Abstract.** Multivariable pulse impact on a multicomponent liquid, such as oil in a cylindrical region in which the propeller is carried out in order to obtain its light fractions, which is actively used in the production. In this project we present the mathematical modeling of the process. It has been determined the patterns of influence of multi-factor pulsed impact to heavy oil fractions by solving nonstationary filtered Navier - Stokes equations, the continuity equation, the equations for the concentration of given chemical kinetics in a cylindrical coordinate system with the help of large eddy simulation.

**Keywords:** Multifactorial pulsed effect on heavy oil fractions, the production of light oil fractions, modeling of chemical kinetics, dissipation of the vortex model.

**Аңдатпа.** Көпкомпонентті сұйыққа көпфакторлы импульстік әсер ету арқылы мұнайдың жеңіл фракцияларын алу мақсатында ішінде пропеллері бар цилиндрлік облыста жүзеге асырылады, ал мұндай құрылғылар белсенді түрде өндіріс салаларында қолданылады. Осы жұмыста көрсетілген процестің математикалық моделі келтірілген. Цилиндрлік координаталар жүйесінде ірі құйындар әдісін қолданып, стационарлық емес фильтрленген Навье-Стокс теңдеулерін, үзіліссіздік теңдеуін және химиялық кинетиканы ескере отырып жазылған концентрация теңдеулерін шешу арқылы мұнайдың ауыр фракцияларына көпфакторлы импульстік әсер ету заңдылықтары анықталды.

**Кілттік сөздер:** мұнайдың ауыр фракцияларына көпфакторлы импульстік әсер ету, мұнайдың жеңіл фракцияларын алу, химиялық кинетиканы моделдеу, құйынның диссипативті моделі.