

# МЕХАНИКА

Общий физический практикум

*Второе издание*

*Учебное пособие*

Алматы  
«Қазак университеті»  
2014

УДК 531(075.8)  
ББК 22.2я73  
М 55

*Рекомендовано к изданию Ученым советом  
физико-технического факультета  
и РИСО КазНУ им. аль-Фараби*

**Рецензенты:**

член-корр. НАН РК, профессор **В.Н. Косов**  
доктор физико-математических наук, профессор **К.М. Мукашев**  
доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Архипов**

**Коллектив авторов:**

С.И. Исатаев, И.Н. Корзун, А.С. Аскарова и др.

**М 55 Механика.** Общий физический практикум. Второе издание: учебное пособие/ С.И. Исатаев, И.Н. Корзун, А.С. Аскарова и др. – Алматы: Қазақ университеті, 2014. – 209 с.

**ISBN 978-601-04-0462-5**

Учебное пособие составлено в соответствии с действующими университетскими программами по общему курсу физики для студентов физических и технических специальностей. Второе издание, исправленное и дополненное, содержит описания 17 лабораторных работ по разделу “Механика”. Каждая работа включает краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки, рабочее задание, а также методику проведения экспериментов и обработки их результатов.

Пособие может быть использовано в высших учебных заведениях для физических и физико-технических специальностей.

**УДК 531(075.8)**

**ББК 22.2я73**

ISBN 978-601-04-0462-5

© Исатаев С.И. и др., 2014  
© КазНУ им. аль-Фараби, 2014

~

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном пособии приведены описания лабораторных работ по механике по курсу физического практикума. Эти работы методически разработаны и поставлены для учебного процесса на физическом факультете КазНУ им. аль-Фараби под руководством профессора Исатаева Совета Исатаевича.

Второе издание, исправленное и дополненное, было отредактировано И.Н. Корзун и В.В. Кашкаровым.

Издание содержит описания 17 лабораторных работ по разделу “Механика”. Каждая работа включает краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки, рабочее задание, а также методику проведения экспериментов и обработки их результатов.

## ВВЕДЕНИЕ

Основная задача физического практикума – количественное изучение физических явлений, воспитание у студентов навыков самостоятельной исследовательской работы и грамотного измерения физических величин. Студенты во время лабораторного занятия самостоятельно проводят физические опыты, знакомясь при этом с важнейшими измерительными приборами, приобретают навыки производить точные измерения и грамотно обрабатывать полученные результаты.

### **Физические измерения**

Во время проведения опытов производятся самые различные измерения.

*Измерение есть нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.* В физическом практикуме измерения проводятся с целью установления функциональной зависимости между двумя и более величинами.

Существует несколько видов измерений. При классификации их обычно исходят из характера зависимости измеряемой величины от времени, условий, определяющих точность результата измерений, и способов выражения этих результатов.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения разделяются на *статические, при которых измеряемая величина остается постоянной*, например, измерение геометрических размеров тела, постоянного давления и т.д., *динамические, в процессе которых измеряемая величина изменяется*, например, измерение амплитуды затухающих колебаний, пульсация скорости и т.д.

По способу получения результатов измерения разделяют на *прямые, косвенные, совокупные и совместные*.

*Прямые измерения – это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно с помощью измерительного прибора.*

В этом случае значение физической величины определяется при непосредственном контакте измерительного прибора с объектом, т.е. количественное значение искомой величины определяется

по показаниям прибора, сразу, без дальнейшей обработки результатов. Например, измерение размеров тела с помощью микрометра, времени – секундомером и т.д. Прямые измерения можно выразить формулой  $x = Q$ , где  $x$  – искомая величина, а  $Q$  – значение, непосредственно получаемое из опытных данных. Прямые измерения широко применяются в машиностроении, технологических процессах и т.д.

*Косвенные измерения – это измерения, при которых искомую величину определяют на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.*

Косвенные измерения можно описать формулами

$$x = f(Q_1, Q_2, Q_3, \dots),$$

где  $x$  – значение искомой величины;

$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  – значения величин, измеренных прямым способом.

Примерами косвенных измерений могут служить определение объема тела по прямым измерениям его геометрических размеров, нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения. Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно найти в результате прямого измерения. Роль косвенных измерений особенно велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например, размеров астрономического или внутриатомного порядка.

*Сокоупные измерения – это производимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомую величину определяют решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин.* Примером сокоупных измерений является определение массы отдельных гирь набора (калибровка) по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь.

Пусть, например, необходимо произвести калибровку разновеса, состоящего из гирь массой 1, 2, 2\*, 5, 10 и 20 кг (звездочкой отмечена гиря, имеющая то же самое номинальное значение). Ка-

либровка состоит в определении массы каждой гири по одной образцовой гире, например, по гире массой 1 кг. Для этого проведем измерения, меняя каждый раз комбинацию гирь (цифры показывают массу отдельных гирь,  $1_{об}$  означает массу образцовой гири в 1 кг):

$$\begin{aligned}1 &= 1_{об} + a, \\1 + 1_{об} &= 2 + b, \\2^* &= 2 + c, \\1 + 2 + 2^* &= 5 + d \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

Буквы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  означают грузики, которые приходится прибавлять или отнимать от массы гири, указанной в правой части уравнения. Решив эту систему уравнений, можно определить значение массы каждой гири.

*Совместные измерения* – это производимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для нахождения зависимостей между ними. В качестве примера совместных измерений можно назвать измерение электрического сопротивления при  $20^{\circ}\text{C}$  и температурных коэффициентов измерительного резистора по данным прямых измерений его сопротивления при различных температурах.

По условиям, определяющим точность результата, измерения делятся на три класса:

1. *измерения максимальной возможной точности, достижимой при существующем уровне техники*; к ним относятся эталонные измерения, измерения физических постоянных;

2. *контрольно-поверочные измерения, погрешность которых не должна превышать некоторое заданное значение*; к ним относятся измерения, проводимые лабораториями госнадзора для контроля над соблюдением государственных стандартов;

3. *технические измерения, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений*; к ним относятся измерения, проводимые в научно-исследовательских работах, в производстве и др.

#### ***Единицы измерения физических величин***

Поскольку физические величины находятся между собой в функциональной связи, нельзя устанавливать их единицы измерения произвольно. Произвольно установлены единицы измерения семи физических величин, называемых основными единицами в

СИ. Это единицы измерения следующих физических величин: длина (метр), масса (килограмм), время (секунда), температура (Кельвин), сила тока (Ампер), сила света (кандела), количество вещества (моль).

Международная система единиц включает в себя две дополнительные к основным единицам, это единицы для измерения плоского (радиан) и телесного (стерадиан) углов. Единицы измерения остальных физических величин находятся из соотношений, определяющих эти величины. Поэтому их называют производными величинами.

### ***Погрешности измерений***

Измерить значение физической величины с абсолютной точностью невозможно. Потому что, во-первых, не существует такого точного прибора, во-вторых, возможности органов чувств человека ограничены. Поэтому, когда идет речь об измеренной величине, необходимо указывать погрешность данного измерения.

По природе возникновения погрешности делятся на систематические, случайные и промахи.

*Факторы, постоянные или закономерно изменяющиеся в процессе измерительного эксперимента, например, начальное отклонение стрелки прибора от нуля, являются систематическими погрешностями.* Систематические погрешности подразделяются на приборные, методические и погрешности метода обработки данных.

### ***Приборные погрешности***

Точность измерения любого измерительного прибора ограничена. Погрешности приборов, предназначенных для производственных целей (амперметров, вольтметров, потенциометров и т.д.) определяются их классами точности. Класс точности обычно выражается в процентах. Например, амперметр с классом точности 0,2% определяет значение силы тока, соответствующего полной шкале, с погрешностью, не превышающей 0,2%.

Класс точности прибора, независимо от положения стрелки, показывает минимальную относительную погрешность, а относительная погрешность измеряемой величины увеличивается с приближением стрелки к началу отчета шкалы. Поэтому при измерениях нужно стараться работать во второй половине шкалы. Немаловажно, под каким углом смотреть на стрелку при отсчитывании

показания прибора. Чтобы свести к минимуму погрешности, нужно смотреть на стрелку прибора под прямым углом, т.е. перпендикулярно шкале.

### ***Методические погрешности***

К таким погрешностям относятся, например, погрешности методики измерения. Например, неучет силы трения вала в лабораторной работе №3 при определении момента инерции диска динамическим методом или проверка реальной жидкостью (водой) уравнения Бернулли, полученного для идеальной жидкости.

### ***Погрешности методики обработки результатов***

Они возникают вследствие неправильной или несовершенной методики при определении искомой величины путем вычислений и при определении самих погрешностей.

При увеличении числа измерений систематические погрешности не уменьшаются. Для их уменьшения используются более точные приборы и наиболее совершенные методики измерения и обработки данных.

### ***Случайные погрешности***

*Случайные погрешности – это составляющие погрешности измерения, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.* К ним можно отнести, наряду со случайными изменениями напряжения в электросети, температуры в лаборатории и др. факторы, связанные с несовершенством органов чувств человека и его навыков. В процессе измерения значение и знак случайной погрешности не остаются постоянными. Чтобы уменьшить случайную погрешность, нужно:

- 1) уменьшить влияние внешних факторов;
- 2) проводить измерения внимательно и тщательно;
- 3) увеличить число опытов.

### ***Промахи***

*Грубые погрешности (промахи) – погрешности измерения, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях.* Они возникают вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. При обнаружении грубых погрешностей такие измерения отбрасывают.

Способы нахождения погрешностей прямых измерений по-



дробно описаны в лабораторной работе №1, поэтому здесь мы их не рассматриваем, и перейдем к методике нахождения погрешностей косвенных измерений.

### ***Нахождение погрешностей косвенных измерений***

Рассмотрим несколько частных случаев соотношений двух или нескольких величин, связанных между собой функционально.

1. Рассмотрим сумму или разность двух величин:

$$A = B \pm C . \quad (1)$$

Наиболее вероятными значениями величин  $B$  и  $C$  являются их среднеарифметические значения  $\langle B \rangle$  и  $\langle C \rangle$ . Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают среднеарифметическое значение.

Наилучшее значение величины  $A$  равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых:

$$A = \langle B \rangle \pm \langle C \rangle . \quad (2)$$

Среднеквадратичная погрешность  $S_A$ , если величины  $B$  и  $C$  независимы, находится по формуле:

$$S_A = \sqrt{S_B^2 + S_C^2} , \quad (3)$$

иначе говоря, складываются не сами погрешности, а их квадраты.

2. Пусть искомая величина равна произведению или частному двух других:

$$A = B \cdot C \quad \text{или} \quad A = B/C . \quad (4)$$

Наиболее вероятные значения величины  $A$  находим по формулам:

$$A = \langle B \rangle \cdot \langle C \rangle \quad \text{или} \quad A = \frac{\langle B \rangle}{\langle C \rangle} . \quad (5)$$

Относительные среднеквадратичные погрешности произведения и частного независимых величин находятся по формуле:

$$\frac{S_A}{A} = \sqrt{\left(\frac{S_B}{\langle B \rangle}\right)^2 + \left(\frac{S_C}{\langle C \rangle}\right)^2}. \quad (6)$$

3. Рассмотрим произведение нескольких величин в различных степенях:

$$A = B^\alpha \cdot C^\beta \cdot E^\gamma \dots \quad (7)$$

Относительная среднеквадратичная погрешность величины  $A$  при независимых  $B, C, E, \dots$  находится по формуле:

$$\left(\frac{S_A}{A}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{S_C}{C}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{S_E}{E}\right)^2 + \dots \quad (8)$$

4. Приведем общую расчетную формулу. Пусть

$$A = f(B, C, E, \dots), \quad (9)$$

где  $f$  – произвольная функция величин  $B, C, E$  и т.д.

Тогда наилучшее значение  $A$  будет:

$$A_{\text{наил}} = f(\langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle E \rangle, \dots). \quad (10)$$

Среднеквадратичная погрешность  $A$  находится по формуле:

$$S_A^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 S_B^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2 S_C^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)^2 S_E^2 + \dots \quad (11)$$

Обозначение  $\frac{\partial f}{\partial B}$  имеет обычный смысл частной производной функции  $f$  по  $B$ , т.е. производной, при нахождении которой все остальные аргументы, кроме  $B$ , считаются постоянными. Частные производные следует вычислять при наилучших значениях аргументов  $B_{\text{наил}}, C_{\text{наил}}, E_{\text{наил}}$  и т.д.

Рассмотрим некоторые следствия, которые могут быть получены из анализа формул, приведенных выше.

1. Следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Так, толщину стенки

трубы плохо определять, вычитая ее внутренний диаметр из внешнего (и, конечно, деля результат пополам). Относительная погрешность измерения при этом сильно увеличивается, так как измеряемая величина – в нашем случае толщина стенки – мала, а ошибка в ее определении находится путем сложения погрешностей измерения обоих диаметров и поэтому возрастает.

2. Следует определять все измеряемые величины с приблизительно одинаковой относительной погрешностью. Так, если объем тела измерен с погрешностью 1%, то для определения плотности тратить силы и время на измерение массы тела с погрешностью 0,01% в этом случае не имеет смысла.

3. При вычислении погрешности произведения степенных функций нужно обратить внимание на член с высокой степенью. Согласно приведенной выше формуле (8) относительная погрешность сомножителя прямо пропорциональна квадрату его степени. В связи с этим отдельными членами можно пренебречь.

В реальных опытах систематические и случайные погрешности присутствуют одновременно. Обычно они являются независимыми, поэтому полную погрешность можно определить по следующей формуле:

$$S_{полн}^2 = S_{случ}^2 + S_{сист}^2 . \quad (12)$$

#### ***Приближенные вычисления и правила округления***

В процессе выполнения лабораторной работы приходится измерять несколько величин с различной точностью. Если величины, входящие в формулу, имеют различные погрешности, то нужно обратить внимание, в первую очередь, на величину с максимальной погрешностью. Тогда при определении общей погрешности не стоит углубляться в вычисление погрешности величин, точности которых многократно превосходит величину с максимальной погрешностью. Иногда их просто отбрасывают.

Точность вычисления искомой величины должна быть в пределах точности измерений. Когда точности вычислений намного превосходят точности измерений, это считается скорее недостатком работы, нежели преимуществом. Поэтому важно знать основные правила округления.

### ***Правила округления и приближенного вычисления***

Округляя приближенное число, нужно отбрасывать последние цифры, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5 и прибавлять единицу к предыдущей цифре, если первая из отбрасываемых цифр больше 5. Если же первая из отбрасываемых цифр равна 5, то имеется два варианта. Если предыдущая цифра нечетная, то к ней прибавляется единица, если четная – ничего не прибавляется.

Например:  $a = 21,314 \approx 21,31$ ;  $\pi = 3,141593 \approx 3,1416$ ,

$\pi = 3,141593 \approx 3,14$ ;  $l = 12,15 \text{ м} \approx 12,2 \text{ м}$ ;  $t = 5,25 \text{ с} \approx 5,2 \text{ с}$ .

Сама запись значения физической величины несет информацию о степени погрешности. В самом деле, если все цифры написанного числа истинны, то цена последней цифры дает точность измерения или вычисления. Например:  $t = 5,021000 \text{ с}$ , тогда в записи времени погрешность можно оценить приблизительно как 1 мкс.

Теперь о значащих цифрах. Значащими цифрами называются все верные цифры, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, в числе 0,000205 имеется три значащие цифры. Первые четыре нуля слева – незначащие, нуль между двойкой и пятёркой – значащий. В числе 2300 – четыре значащие цифры. Запись  $6,1 \cdot 10^3$  означает, что значащих цифр только две (шестёрка и единица).

В окончательной записи погрешность измерения принято выражать числом с одной или двумя значащими цифрами. Две цифры удерживают при наиболее точных измерениях, а также, если цифра старшего разряда числа, выражающего погрешность, равна трём или меньше трёх. При этом для младшего разряда применяют только цифру 5.

Однако нужно заметить, что при промежуточных выкладках для того, чтобы погрешности округления не слишком искажали результаты, нужно удерживать по три-четыре значащие цифры в зависимости от выполняемых вычислительных операций.

### ***Некоторые рекомендации к выполнению лабораторной работы***

Весь процесс выполнения лабораторной работы условно можно разделить на четыре этапа.

1. *Подготовительный этап.* Каждая лабораторная работа физического практикума посвящена изучению конкретного физического явления или процесса, закономерности которого предстоит

выявить. На вводном занятии физического практикума всем студентам дается тема лабораторной работы, которую на следующем занятии студент обязан выполнить. Для этого он дома (в библиотеке) должен ознакомиться с теорией данной работы, устройством установки (по чертежам) или экспериментальной модели и ходом выполнения экспериментальной части лабораторной работы. Основным источником информации является методическое описание к лабораторной работе. Оттуда студент конспектирует название и цель работы, краткую теорию рассматриваемой задачи, описания установки, ход выполнения работы и методы математической обработки полученных результатов. На занятие физического практикума студент с собой приносит чертежные инструменты, миллиметровую бумагу, многофункциональный калькулятор и др.

2. *Экспериментальная часть.* Этот этап физического практикума проводится непосредственно в учебной лаборатории. К эксперименту допускаются студенты, подтвердившие хорошую подготовленность к выполнению работы. Необходимые в работе приборы, инструменты и детали выдает лаборант. Измерения проводятся студентом **самостоятельно**. Студент вносит в лабораторный журнал табличные данные физических постоянных, параметры установки и данные эксперимента. По окончании эксперимента преподаватель проверяет правильность измерений, если все правильно, то расписывается в журнале. После подписи преподавателя вносить какие-либо изменения в таблицу данных **запрещается**.

3. *Математическая обработка результатов эксперимента.* В этой части вычисляют искомую величину, строят графики процессов, находят погрешности измерения и проводят анализ полученных результатов. В анализе результатов нужно обратить внимание на причины, оказывающие влияние на результаты опытов.

4. *Защита результатов лабораторной работы.* В этой окончательной части студент обосновывает полученные им результаты перед преподавателем путем собеседования. Он рассказывает о теории данного вопроса, выводит окончательную формулу, отвечает на вопросы, приведенные в конце описания.

#### ***Графический способ обработки данных***

В экспериментальной физике графики используются для различных целей. Например:

- для определения величин;

- для наглядного описания процесса;
- для нахождения эмпирического соотношения между величинами;
- для сравнения результатов эксперимента с данными теории и других авторов и др.

Графики рисуют на линейной или логарифмической миллиметровой бумаге. При определении функциональной зависимости принято откладывать значения аргумента вдоль оси абсцисс, а значения функции – вдоль оси ординат. Перед построением графиков необходимо уточнить минимальное и максимальное значения величин по осям абсцисс и ординат и выбрать наиболее удобный масштаб. Результаты эксперимента на графике принято отображать значками, а теории – сплошной линией. Если привести на одном и том же графике линии, соответствующие разным режимам одного процесса, это дает наглядное представление о динамике изменения процесса в зависимости от параметров режима. Оптимально подбирая масштаб, нужно добиться, чтобы экспериментальные точки на графике располагались по всей плоскости рисунка.

Обычно точки на графике располагаются по определенной закономерности. Если какая-либо точка не подчиняется этой закономерности (лежит в стороне), нужно насторожиться: либо имеет место интересный эффект, либо – грубая погрешность. Если измерение выполнено правильно, то окрестности данной точки исследуются более подробно, с целью выяснения эффекта.

По размерам символов на графике можно судить о погрешностях измерения.

Размеры символов графика определяются выражением:

$$\frac{l}{2} = \pm S.$$

Здесь  $l$  – линейный размер символов.

При построении графиков нужно стараться придать линейный характер зависимостям, поскольку линейная функциональная зависимость величин легко «прочитывается» и из нее достаточно просто получить эмпирическую зависимость. Рассмотрим несколько способов линеаризации зависимостей.

1. Пусть процесс описывается квадратичной функцией. Рассмо-

трим закон падения тел, который описывается формулой:

$$S = \frac{gt^2}{2}.$$

Если откладывать по осям графика  $S$  и  $t$ , то точки лягут на параболу, которую провести на глаз почти невозможно. Но если откладывать по осям  $S$  и  $t^2$ , или  $\sqrt{S}$  и  $t$ , или  $\ln S$  и  $\ln t$ , то график приобретает вид прямой линии.

В общем случае, приведя квадратичную зависимость к виду  $y = ax + b$ , можно определить неизвестные постоянные  $a$  и  $b$ .

2. Пусть процесс описывается степенной зависимостью  $y = x^n$ .

Прологарифмируем обе стороны этой формулы:

$$\ln y = n \ln x.$$

Если по осям отложить переменные  $\ln y$  и  $\ln x$ , то получим прямую линию.

#### **Метод наименьших квадратов**

В общем случае многие сложные выражения можно привести к линейному виду:

$$y = ax + b. \quad (13)$$

Параметры  $a$  и  $b$  этой зависимости можно найти аналитическим способом, используя опытные данные. Пусть на опыте получено значение  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), соответствующее значению  $x_i$ . Тогда значения  $a$  и  $b$  в формуле (13), соответствующие наиболее точной зависимости  $y_i$  и  $x_i$ , можно найти по «методу наименьших квадратов».

Если подставить опытные значения  $x_i$  и  $y_i$  в (13), из-за погрешностей в измерениях  $x_i$  и  $y_i$  равенство (13) обычно не выполняется, т.е.

$$y_i - (ax_i + b) \neq 0. \quad (14)$$

Возведём эту разность в квадрат. Далее найдём сумму квадратов этих разностей для всех измерений:

$$D = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (15)$$

По «методу наименьших квадратов» для параметров  $a$  и  $b$ , которые соответствуют наиболее точной аппроксимирующей линейной зависимости между величинами  $y$  и  $x$ , в формуле (15)  $D$  должно иметь минимальное значение. Поэтому, чтобы найти такие значения параметров  $a$  и  $b$ , из уравнения (15) найдем частные производные от  $D$  по  $a$  и  $b$  и приравняем полученные выражения нулю.

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n \{ [y_i - (ax_i + b)] \cdot x_i \} = 0. \quad (17)$$

Отсюда:

$$\sum_{i=1}^n y_i - nb - a \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - b \sum_{i=1}^n x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \quad (19)$$

Решая полученную систему уравнений, можно найти значения параметров  $a$  и  $b$  для наиболее точной аппроксимирующей линейной зависимости:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (20)$$



$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (21)$$

Если линейная зависимость проходит через начало координат:

$$y = ax, \quad (22)$$

тогда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (23)$$

Метод наименьших квадратов позволяет найти погрешности параметров линейной зависимости, определяемых по формулам (20) и (21):

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n-2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n(n-2)} - \frac{\left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n(n-2) \left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \right]}, \quad (24)$$

$$S_a^2 = \frac{n S_0^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \quad (25)$$

$$S_b^2 = \frac{S_0^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}. \quad (26)$$

Здесь  $S_0$  – средняя квадратичная погрешность отдельного измерения,

$S_a$  и  $S_b$  – средние квадратичные погрешности параметров линейной зависимости  $y = ax + b$ .

## Лабораторная работа № 1

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ

**1.1 Цель работы:** ознакомиться с методами обработки результатов прямых измерений.

#### 1.2 Краткое теоретическое введение

##### 1.2.1 Погрешности измерений и их классификация.

Допустим, что истинное значение некоторой величины есть  $x_0$ . Измеряя эту величину, как правило, получают результат, отличный от  $x_0$ . Если измерение выполняется неоднократно, то результаты измерений не только отличаются от  $x_0$ , но в большинстве случаев различны и между собой. Обозначим результаты измерений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда разность

$$\Delta x_i = x_i - x_0, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

называется *абсолютной погрешностью измерения*. Она выражена в единицах измеряемой величины.

При классификации погрешностей по их свойствам различают погрешности *систематические, случайные и промахи*.

*Систематической* погрешностью измерения называется составляющая погрешности измерения, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины. Например, шкала измерительной линейки неравномерна, капилляр термометра имеет в различных участках различный диаметр, весы неравноплечие, стрелка амперметра при отсутствии тока не стоит на нуле и прочие. Эти погрешности, как правило, можно учесть, а поэтому устранить введением поправки к измеренному значению (учесть деление, на котором стоит стрелка амперметра при отсутствии тока и каждый раз вычитать его из показаний прибора). Систематическую погрешность измерения экспериментально можно обнаружить либо сопоставлением данного результата с результатом измерения этой же величины, но полу-

ченным другим методом, либо путем использования более точных средств измерений. Однако обычно систематические погрешности оценивают путем теоретического анализа условий измерения, основываясь на известных свойствах средств измерений.

*Промахи* – следствие неправильных действий экспериментатора или неисправностей аппаратуры. Это, например, описка при записи результатов наблюдения, неправильно снятое показание прибора и т.д. При обнаружении промахов их исключают из расчетов.

*Случайные погрешности* – погрешности, изменяющиеся случайным образом. При этом различия между результатами отдельных измерений индивидуально непредсказуемы, а закономерности проявляются лишь при большом числе измерений.

1.2.2 Методы обработки результатов прямых измерений, содержащих случайные погрешности.

Пусть в одних и тех же условиях проделано  $N$  измерений и  $x_i$  – результат  $i$ -го измерения. Наиболее вероятное значение измеряемой величины – ее *среднеарифметическое значение*:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (1.2)$$

Величина  $\langle x \rangle$  стремится к истинному значению  $x_0$  измеряемой величины при  $N \rightarrow \infty$ . *Средней квадратичной погрешностью* результата отдельного измерения называется величина

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle x \rangle - x_i)^2}{N-1}} . \quad (1.3)$$

При  $N \rightarrow \infty$   $S_N$  стремится к постоянному пределу  $\sigma$ :

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N . \quad (1.4)$$

Величина  $\sigma^2$  называется *дисперсией* результатов измерений.

На практике часто бывает необходимо определить погрешность среднего арифметического.

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$  – результаты отдельных измерений, причем каждое из них характеризуется одной и той же дисперсией. Среднее арифметическое ряда измерений определяется по формуле:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N} + \dots + \frac{x_N}{N}. \quad (1.5)$$

Тогда дисперсия этой величины определяется как

$$\sigma_{\langle x \rangle}^2 = \frac{\sigma^2}{N^2} + \frac{\sigma^2}{N^2} + \dots + \frac{\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}, \quad (1.6)$$

таким образом,

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (1.7)$$

Аналогично

$$S_{\langle x \rangle} = \frac{S_N}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle x \rangle - x_i)^2}{N(N-1)}}. \quad (1.8)$$

Средняя квадратичная погрешность среднего арифметического равна средней квадратичной погрешности отдельного результата, деленной на корень квадратный из числа измерений. Это фундаментальный закон возрастания точности при росте числа наблюдений.

Вероятность того, что истинное значение находится внутри некоторого интервала от  $\langle x \rangle - \Delta x$  до  $\langle x \rangle + \Delta x$ , называется *доверительной вероятностью*  $\alpha$  (коэффициентом надежности, надежностью), а интервал – *доверительным интервалом*. При достаточно большом значении  $N$  доверительному интервалу  $\langle x \rangle \pm \sigma_{\langle x \rangle}$  соответствует  $\alpha = 0,68$ , интервалу  $\langle x \rangle \pm 2\sigma_{\langle x \rangle}$  соответствует  $\alpha = 0,95$ , интервалу  $\langle x \rangle \pm 3\sigma_{\langle x \rangle}$  соответствует  $\alpha = 0,997$ .

Мера  $\sigma$  приближения измеренного значения величины  $x$  к истинному значению  $x_0$  определяется физической сущностью измеряемой величины, а также физическими и конструктивными прин-

ципами, заложенными в методику измерений, поэтому бесконечное увеличение числа измерений не дает заметного увеличения точности.

Так как нет смысла стремиться к очень большому числу измерений, то при проведении эксперимента проводят ограниченное число опытов. Однако при этом для заданной надежности  $\alpha$  доверительный интервал, измеренный в долях  $\sigma$ , оказывается заниженным. Возникает вопрос, как изменяется надежность в зависимости от числа измерений? Зависимость эта сложна и не выражается в элементарных функциях.

Множители, определяющие величину интервала в долях  $S_{\langle x \rangle}$  в зависимости от  $\alpha$  и  $N$ , называются *коэффициентами Стьюдента*, обозначаются через  $t_{\alpha, N}$  и находятся из таблиц коэффициентов Стьюдента (таблица Приложения).

Доверительный интервал  $\Delta x$  рассчитывается по формуле:

$$\Delta x = t_{\alpha, N} \cdot S_{\langle x \rangle}. \quad (1.9)$$

Конечный результат представляется в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \quad \text{при } \alpha = k\%. \quad (1.10)$$

Очевидно, что при  $\alpha = 0,68$   $t_{\alpha, N} > 1$ , но при  $N \rightarrow \infty$   $t_{\alpha, N} \rightarrow 1$ .

В инженерных расчетах принято использовать доверительную вероятность  $\alpha = 0,95$ . Погрешность, соответствующая  $\alpha = 0,95$ , называется *стандартной погрешностью*.

При  $\alpha = 0,95$   $t_{\alpha, N} > 2$ , но при  $N \rightarrow \infty$   $t_{\alpha, N} \rightarrow 2$ .

Для оценки точности эксперимента рассчитывают относительную погрешность результата. Относительная погрешность – это погрешность, выраженная в долях среднего значения измеренной величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}.$$

Часто ее выражают в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% . \quad (1.11)$$

Разобьем весь набор результатов измерений на интервалы. Из всех  $N$  измерений выберем минимальное и максимальное значения  $x_{min}$  и  $x_{max}$ . Число интервалов  $K$  будет равно частному от деления  $(x_{min} - x_{max})$  на  $L$ , где  $L$  – шаг интервала:

$$K = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} .$$

Шаг интервала в данной работе должен быть целым числом и выбираться так, чтобы число интервалов было не меньше 8 и не больше 20. Нумеруются интервалы следующим образом:

1-й интервал  $[x_{min} \div (x_{min} + L)[$ ,

2-й интервал  $[(x_{min} + L) \div (x_{min} + 2L)[$ ,

$k$ -й интервал  $[(x_{min} + (k - 1)L) \div (x_{min} + kL)[$ .

Если по оси абсцисс отложить номера интервалов, а по оси ординат – число измерений  $n_i$ , результаты которых попадают в данный интервал, то получится эмпирический график распределения числа измерений по интервалам, называемый *гистограммой* (рис.1.1.). При большом числе измерений отношение  $n_i/N$  характеризует вероятность появления значений измеряемой величины в данном интервале с шагом  $L$ . Если  $n_i/N$  разделить на величину

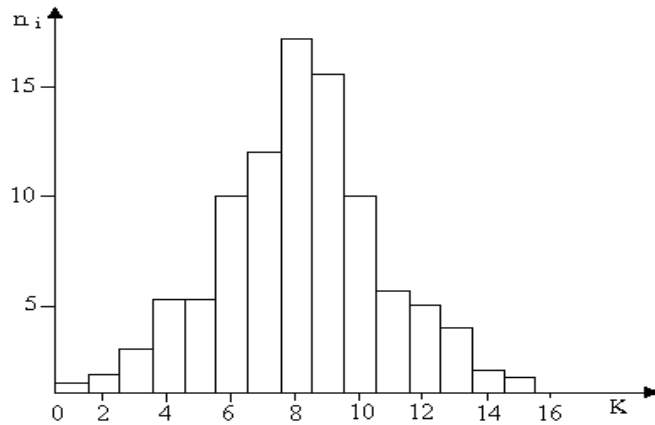
шага интервала  $L$ , то значение величины  $y_i = \frac{n_i}{NL}$  будет характе-

ризовать относительное число благоприятных случаев в единичном интервале. Диаграмма, построенная для  $y_i$ , показывает распределение *плотности вероятности* по интервалам и называется *приведенной гистограммой*. Она имеет вид, показанный на рис. 1.2.

Теперь представим себе, что измерения продолжают до тех пор, пока число измеренных значений не станет очень большим. Шаг интервала  $L$  можно сделать очень малым (при условии, что измерительный прибор обладает достаточной чувствительностью),

и все же в каждом интервале будет много измерений. При этом  $y_i$  можно рассматривать как непрерывную функцию от  $x$ . Если теперь вместо приведенной гистограммы построить график зависимости  $y = f(x)$ , который дает долю измерений  $n_i$ , попадающих в единичный интервал при непрерывном изменении  $x$ , то получится гладкая кривая, называемая кривой распределения.

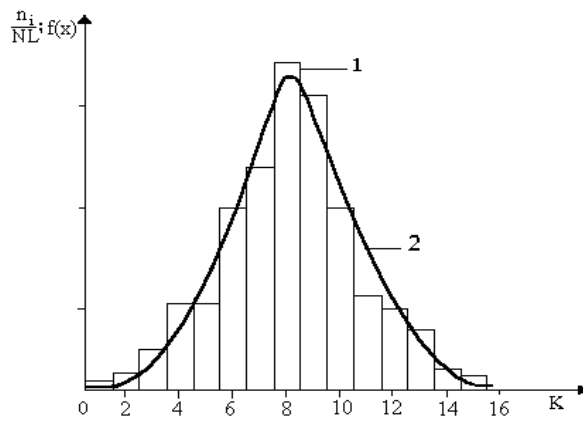
Функция  $y = f(x)$  соответственно называется *плотностью распределения*.



**Рис.1.1.** Распределение числа импульсов по интервалам (гистограмма)

Ее смысл состоит в том, что произведение  $f(x)dx$  ( $dx$  – дифференциал независимой переменной) дает долю полного числа измерений  $n_i / N$ , приходящуюся на интервал от  $x$  до  $x + dx$ . Иначе говоря,  $f(x)dx$  есть вероятность того, что отдельное случайно выбранное значение измеряемой величины окажется в интервале от  $x$  до  $x + dx$ .

Форму приведенной гистограммы, получаемой при небольшом числе опытов, нельзя предсказать заранее. Но теория вероятности позволяет вычислить форму предельной гладкой кривой, к которой стремятся гистограммы при неограниченном увеличении числа опытов. Эта предельная кривая носит название *кривой Гаусса* (рис.1.2.).



**Рис. 1.2.** Распределение плотности вероятности по интервалам:  
1 – при конечном числе измерений (приведенная гистограмма);  
2 – кривая Гаусса

Распределение, соответствующее предельной кривой, называют нормальным (гауссовым) распределением. Оно описывается функцией распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.12)$$

где  $\sigma^2$  – как уже сказано выше, является дисперсией;  $\sigma$  характеризует разброс измерений относительно среднеарифметического значения и называется *стандартным отклонением* или *средне-квадратичной погрешностью*.

Функция Гаусса является нормированной, т.е.  $f(x)$  удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.13)$$

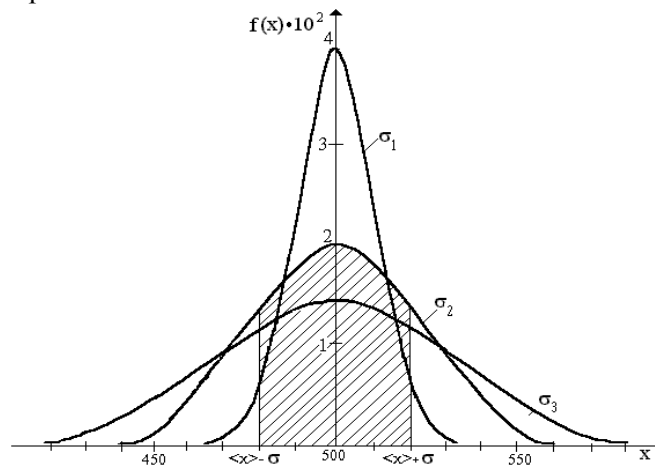
Интеграл имеет бесконечные пределы. Это означает, что измеряемая величина с вероятностью 1 (или 100%) лежит в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , или то, что нахождение измеряемой величины в этих пределах является событием достоверным. Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами (см. рис. 1.2.):

- симметрична относительно  $\langle x \rangle$ ,
- достигает максимального значения в точке  $\langle x \rangle$ ,



– быстро стремится к нулю, когда  $|x_i - \langle x \rangle|$  становится большим по сравнению с  $\sigma$ .

На рис. 1.3. изображены кривые распределения, соответствующие различным  $\sigma$ . Из этого рисунка видно, что при малом  $\sigma$  кривая уже, а максимум выше, что соответствует более доброкачественным измерениям.



*Рис. 1.3.* Кривые распределения Гаусса для различных значений  $\sigma$ :  $\sigma_1=10$ ,  $\sigma_2=20$  и  $\sigma_3=30$ ;  $\langle x \rangle = 500$ .

### 1.3 Методика выполнения работы

1.3.1 Приборы и принадлежности: пересчетный прибор СП-100, секундомер.

1.3.2 Пересчетный прибор СП-100 дает возможность измерить число подаваемых на его вход импульсов за любое время, протекающее с момента нажатия клавиши “Пуск” до ее отпуска. Импульсы подаются на пересчетную схему СП-100 с генератора переменного напряжения с частотой  $\nu = 100$  Гц. Следовательно, в среднем, число регистрируемых импульсов за 1 с, колеблется около 100.

В работе измеряется число импульсов за 5 с. Измерения проводятся 100 раз.

#### 1.4 Порядок выполнения работы

1.4.1 Включите СП-100. Подождите 15 мин., пока он прогреется.

1.4.2 Измерьте число импульсов  $x_i$ , регистрируемое счетчиком за  $t = 5$  с. Повторите измерения 100 раз. Измерения занесите в таблицу 1.1.

Таблица 1.1.

**Число импульсов, регистрируемых  
пересчетным прибором СП-100 за 5 секунд**

№	$x_i$	$\Delta x_i$	$\Delta x_i^2$	№	$x_i$	$\Delta x_i$	$\Delta x_i^2$	№	$x_i$	$\Delta x_i$	$\Delta x_i^2$
1				34				67			
2				.				.			
.				.				.			
.				.				.			
33				66				100			

1.4.3 Вычислите среднеарифметическое значение  $\langle x \rangle$  из всех результатов.

1.4.4 Вычислите отклонения отдельных измерений  $\Delta x_i$  и их квадраты  $\Delta x_i^2$ , внесите их в ту же таблицу.

1.4.5 Вычислите среднеквадратичную погрешность результата отдельного измерения по формуле (1.3). Вычислите по формуле (1.8) среднюю квадратичную погрешность среднего арифметического.

1.4.6 Вычислите доверительный интервал для заданной преподавателем надежности и запишите окончательный результат согласно формуле (1.10.). По формуле (1.11) рассчитайте относительную погрешность эксперимента.

1.4.7 Определите  $x_{min}$  и  $x_{max}$ , разбейте этот промежуток на интервалы и пронумеруйте их.

1.4.8 Определите, к какому интервалу относится отдельное измерение.

1.4.9 Просуммируйте число измерений ( $n_i$ ), попавших в каждый интервал, занесите эти числа в таблицу 1.2.

1.4.10 Постройте гистограмму.

1.4.11 Постройте приведенную гистограмму.

1.4.12 Вычислите значения функции плотности вероятности для значений  $\frac{x_{maxj} - x_{minj}}{2} - \langle x \rangle$ , где  $j$  – номер интервала, т.е. для середины каждого интервала, и занесите эти значения в таблицу 1.2.

Таблица 1.2.

**Данные для построения гистограммы и кривой Гаусса**

Номер интервала ( $j$ ): $j=1\dots k$	$n$	$\frac{n_j}{NL}$	$x_{min} + (j - \frac{1}{2})L -$ $- \langle x \rangle = \Delta x$	$\xi = \frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}$	$e^{-\xi}$	$f(x)$
1						
2						
.						

1.4.13 Постройте кривую Гаусса на том же графике, где вы построили приведенную гистограмму.

**1.5 Вопросы для самопроверки**

1.5.1 Дайте определение абсолютной и относительной погрешности.

1.5.2 Как классифицируются погрешности по свойствам?

1.5.3 Какими свойствами обладает нормальное распределение случайных погрешностей?

1.5.4 Какая надежность соответствует стандартному отклонению?

1.5.5 Какому  $\sigma$  из двух ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ) соответствуют более добротные измерения?

**1.6 Литература**

1.6.1. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие / Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

1.6.2. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

1.6.3. Кубышкина В.Д. Основные методы математической обработки результатов физического эксперимента. – Алма-Ата: КазГУ, 1974.

## Лабораторная работа № 2

### ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН, ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

**2.1 Цель работы:** освоить методы измерения линейных величин, оценить точность этих измерений; освоить методику обработки результатов косвенных измерений.

#### 2.2 Краткое теоретическое введение

2.2.1 В большинстве физических исследований (в том числе и лабораторных работах) интересующая нас величина непосредственно не измеряется. Вместо нее мы измеряем некоторые другие величины  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , а затем вычисляем величину  $y$ , которая является известной функцией этих величин:  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Наиболее вероятным значением функции является значение, полученное при подстановке в нее средних арифметических значений прямых измерений

$$\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle, \dots$$

Оценку погрешностей прямых измерений см. в работе №1.

2.2.2 Погрешности измерений являются малыми величинами (их квадраты лежат за пределами точности измерения), поэтому для расчета погрешности измерений можно пользоваться аппаратом дифференциального исчисления. При косвенных измерениях возможны следующие случаи.

1.  $y$  есть функция одной переменной, т.е.  $y = f(x)$ . В этом случае можно с достаточной точностью написать:

$$\sigma_y = f'(x)\sigma_x. \quad (2.1)$$

Если умножить на коэффициент Стьюдента обе части равенства, то

$$\Delta y = f'(x)\Delta x, \quad (2.2)$$

где  $\Delta x$  – доверительный интервал для заданной вероятности  $\alpha$ .

2. Если  $y$  является функцией нескольких переменных

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , для которых известны  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$ , то

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \sigma_{x_N}\right)^2}$$

или

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i}\right)^2}, \quad (2.3)$$

где  $\partial f / \partial x_i$  – частная производная функции по аргументу  $x_i$ ;

$\sigma_{x_i}$  – стандартные отклонения отдельных аргументов.

Для вычисления доверительного интервала функции можно воспользоваться формулой:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}. \quad (2.4)$$

Если доверительные интервалы всех прямых измерений определены с одинаковой надежностью, тогда надежность определения функции будет равна надежности, с которой определены аргументы. Окончательный результат измерения записывают в виде:

$$y = \langle y \rangle \pm \Delta y \quad \text{при } \alpha = k\%,$$

где  $\alpha$  – выбранная надежность.

2.2.3 В частных случаях вместо формулы (2.4.) для нахождения погрешности косвенного измерения можно применить другую формулу. Если функция  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$  имеет вид произведения, отношения или степенной функции, то удобнее сначала определить относительную погрешность. Например, если

$$y = \frac{A \cdot x_1^n \cdot x_2}{x_3^m},$$

то

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{n\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{-m\Delta x_3}{x_3}\right)^2}. \quad (2.5)$$

В частном случае, если все показатели степени измеряемых величин равны 1, формула (2.5) примет вид:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2 + \dots}, \quad (2.6)$$

т.е. для таких функции относительная погрешность равна корню квадратному из суммы квадратов относительных погрешностей прямых измерений.

2.2.4 Напомним, что доверительный интервал прямых измерений может быть определен по формуле:

$$\Delta x = t_{\alpha, N} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}},$$

где  $x_i$  – результат отдельного измерения;

$N$  – количество измерений величины;

$t_{\alpha, N}$  – коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности.

На первый взгляд может показаться, что при беспредельном увеличении числа измерений погрешность может стать сколь угодно малой. Это, конечно, не так. Сколь угодно малыми могут стать только случайные погрешности измерения, но не приборные и не систематические погрешности. Сколько бы измерений мы ни делали линейкой, цена наименьшего деления которой 1 мм, получить погрешность измерения менее чем 0,5 мм мы не сможем. Поэтому на вопросе о количестве измерений, которые нужно провести, следует остановиться. Никогда нельзя ограничиваться однократным измерением. Если при трех измерениях значения измеренных величин будут одинаковыми, измерения следует прекра-

туть, и погрешность измерения будет равна приборной погрешности, которая определяется половиной цены наименьшего деления или по классу точности прибора.

Если же между результатами измерения есть расхождения, то число измерений должно быть таким, чтобы случайная погрешность измерения стала меньше приборной. Зная ее величину, нетрудно найти необходимое число измерений, гарантирующее малое влияние случайной погрешности на точность результатов. При степени надежности 0,95 (доверительной вероятности) для того, чтобы случайная погрешность имела значение не больше стандартного отклонения ( $\Delta x/\sigma = 1$ ), надо сделать не менее 7 измерений. В дальнейшем во всех работах, где число измерений не оговаривается особо, необходимо число измерений взять равным 7.

Если при математической обработке результатов измерений доверительный интервал оказывается одного порядка с приборной погрешностью, то полная погрешность рассчитывается по формуле

$$\Delta x_{\text{полн}} = \sqrt{\Delta x_{\text{сл.}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2} . \quad (2.7)$$

Если же одна из погрешностей окажется в три и более раз меньше, то ее не учитывают.

2.2.5 В некоторых случаях условия проведения эксперимента являются невоспроизводимыми (например, при изучении интенсивности космического излучения). В этом случае значение функции рассчитывается каждый раз до получения результатов. Затем по этим результатам определяется среднее арифметическое значение, и погрешность рассчитывается как для прямых измерений. В этом случае говорят, что результаты обрабатываются по методу прямых измерений.

В лаборатории механики мы также сталкиваемся с невоспроизводимыми опытами. Например, в работе по определению скорости пули с помощью баллистического маятника невозможно добиться попадания пули в одну и ту же точку мишени.

2.2.6 В настоящей работе познакомимся с методикой обработки косвенных измерений на примере определения объема тел правильной геометрической формы. Объем рассчитывается по результатам измеренных линейных размеров.

2.2.7 В науке и технике для определения длин и расстояний используется много приборов, обеспечивающих измерение их с различной точностью. Широко применяется для измерения длин масштабная линейка с нониусом. Нониусом называется дополнение к масштабу (линейному или круговому), позволяющее повысить точность измерения в 10, 20 раз. Линейный нониус – это маленькая линейка с делениями, которая может скользить вдоль масштабной линейки. Деления нониуса наносятся так, что  $(m - 1)$  делению основного масштаба соответствует  $m$  делений нониуса (см. рис. 2.1.)

Цена деления основного масштаба известна, пусть она равна  $a$  (обычно  $a = 1 \text{ мм}$ ). Обозначим цену деления нониуса  $x$ , тогда  $x \cdot m = a(m - 1)$ ,

откуда

$$x = \frac{m - 1}{m} \cdot a = a - \frac{a}{m}.$$

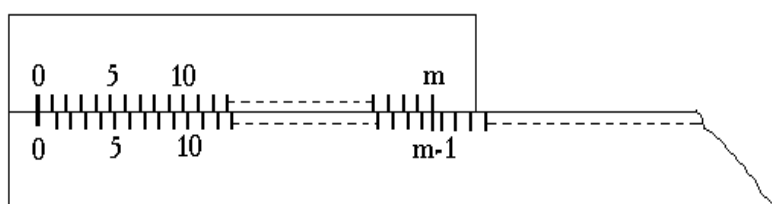


Рис. 2.1. Линейный нониус

Разница между ценой деления масштаба и нониуса называется точностью нониуса:

$$a - x = a - \left( a - \frac{a}{m} \right) = \frac{a}{m}. \quad (2.8)$$

Для измерения размера предмета совместим его начало с нулевым делением масштабной линейки, нониус приложим к концу предмета. Тогда длина предмета равна:

$$L = ka + \Delta L,$$



где  $k$  – номер ближайшего деления основного масштаба, расположенного слева от «0» нониуса (см. рис. 2.2).

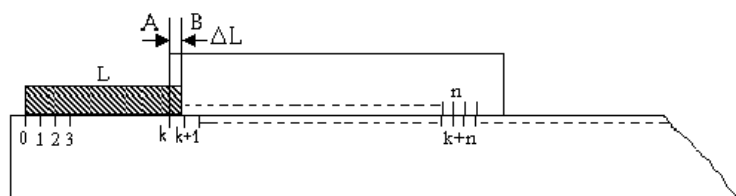
Так как цена деления нониуса не равна цене деления масштаба, то обязательно найдется деление нониуса  $n$ , которое ближе всего совпадает с некоторым делением масштаба, тогда, как видно из рис. 2.2,

$$\Delta L = na - nx = na - n\left(a - \frac{a}{m}\right) = \frac{a}{m} \cdot n.$$

Следовательно,

$$L = ka + \frac{a}{m}n, \quad (2.9)$$

т.е. длина отрезка, измеряемого с помощью нониуса, равна числу целых делений основного масштаба, умноженному на цену его деления, плюс номер деления нониуса, совпадающего с некоторым делением основного масштаба, умноженный на цену деления нониуса.



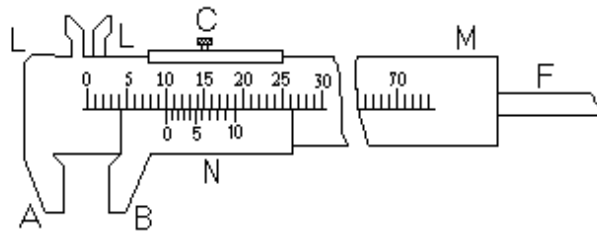
**Рис. 2.2.** Линейный нониус с предметом

Точность нониуса обычно указывается на измерительном приборе. Погрешность результатов измерений, проводимых с помощью нониуса, равна точности нониуса.

### 2.2.8 Штангенциркуль.

Линейные нониусы применяются в конструкциях штангенциркуля. Штангенциркуль (рис.2.3.) состоит из миллиметрового масштаба  $M$  (шкалы прибора), жестко связанного с ножкой  $LA$ . Вдоль масштаба может перемещаться нониус  $N$ , с которым жестко связана вторая ножка  $LB$  и рейка  $F$  прибора. Подвижная часть штангенциркуля снабжена зажимным винтом  $C$ . Когда между ножками  $A$  и  $B$  отсутствует зазор, нулевые деления нониуса и

шкалы совпадают.



**Рис. 2.3.** Штангенциркуль: *LA* – неподвижная ножка, *LB* – подвижная ножка, *C* – зажимной винт, *M* – масштаб, *N* – нониус

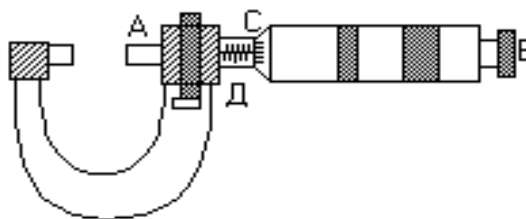
Для промера наружных размеров предмет вводят между ножками *A* и *B*, которые сдвигают до соприкосновения с предметом. Затем закрепляют подвижную ножку зажимом *C* и производят отсчет. Число целых миллиметров отсчитывается непосредственно по шкале прибора до нулевой метки нониуса, число долей миллиметра – по нониусу, как это было описано выше. При внутренних промерах употребляют ножки *LL*, для измерения глубины – рейку *F*. Штангенциркули изготавливают с нониусом  $n = 10, 20, 50$  делений.

#### 2.2.9 Микрометр.

Для более точных измерений применяют микрометрические инструменты. Они бывают нескольких типов: микрометр для наружных измерений, микрометрический глубиномер и микрометрический нутромер.

Микрометр для наружных измерений (рис. 2.4.) состоит из толстого стержня, жестко соединенного со скобой. В полость стержня ввинчен микрометрический винт *A*. При измерении предмет зажимается между неподвижным стержнем и подвижным торцом микрометрического винта *A*. Микровинт вращают, держа за трещетку *B*. Вместе с микровинтом вращается барабан *C*, перемещаясь при этом поступательно относительно стержня. Отсчетное устройство микрометра состоит из двух шкал. Горизонтальная шкала стержня представляет собой двойную шкалу с ценой деления  $1\text{ мм}$ , нанесенную по обе стороны продольной черты таким образом, чтобы верхняя была сдвинута относительно нижней на половину

деления. Цена деления шкалы барабана может быть установлена следующим образом. Пусть число делений круговой шкалы барабана  $n = 50$ . Шаг микровинта  $h = 0,5 \text{ мм}$ , т.е. одному полному обороту микровинта (и барабана) соответствует линейное перемещение края барабана на  $0,5 \text{ мм}$ .



**Рис. 2.4.** Микрометр: А – винт, В – головка винта, Д – основная шкала, С – барабан со шкалой.

Цена деления круговой шкалы:

$$a = h/n = 0,5/50 = 0,01 \text{ мм} .$$

Отсчет производится следующим образом: по горизонтальной шкале стержня отсчитывается размер измеряемого предмета с точностью до  $0,5 \text{ мм}$ . Сотые доли миллиметра отсчитываются по круговой шкале барабана. Полученные результаты складываются. Число сотых долей соответствует делению шкалы, расположенному против черты на стержне. Порядок отсчета одинаков для всех типов микрометрических инструментов.

### 2.3 Порядок выполнения работы

2.3.1 Приборы и принадлежности: штангенциркуль, микрометр, исследуемые тела.

2.3.2 Познакомьтесь с устройством штангенциркуля, определите цену деления основного масштаба и точность нониуса.

2.3.3 Познакомьтесь с устройством микрометра. Определите цену деления основной шкалы и барабана.

2.3.4 Научитесь пользоваться этими измерительными приборами. Подберите измерительные приборы, с помощью которых будете измерять линейные размеры. При этом руководствуйтесь тем,

что нам необходимо получить как можно большую точность измерений.

2.3.5 Измерьте линейные размеры предмета, результаты запишите в таблицу 2.1.

Таблица 2.1.

**Линейные размеры исследуемого тела**

№	$a_i, \text{мм}$	$b_i, \text{мм}$	$c_i, \text{мм}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
	$\langle a \rangle =$	$\langle b \rangle =$	$\langle c \rangle =$

2.3.6 Вычислите средние значения каждого линейного размера, внесите в ту же таблицу.

2.3.7 Вычислите отклонение каждого измеренного значения от среднего и внесите в таблицу 2.2., образец которой приводится ниже.

Таблица 2.2.

**Данные для расчета погрешностей**

№	$\Delta a_i, \text{мм}$	$\Delta a_i^2, \text{мм}^2$	$\Delta b_i, \text{мм}$	$\Delta b_i^2, \text{мм}^2$	$\Delta c_i, \text{мм}$	$\Delta c_i^2, \text{мм}^2$
1						
2						
·						
·						
7						

2.3.8 Вычислите среднюю квадратичную погрешность среднего арифметического  $S_{\langle x \rangle}$  для каждого линейного размера по формуле

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle x \rangle - x_i)^2}{N(N-1)}} \text{ . (см. работу №1).}$$

2.3.9 Определите доверительный интервал для выполненного

числа измерений и степени надежности  $\alpha = 0,95$  для каждого линейного размера.

2.3.10 Определите полную погрешность для каждого линейного размера с учётом приборной погрешности измерительного инструмента.

2.3.11 Запишите окончательный результат для каждого линейного размера в виде:  $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$  при  $\alpha = 0,95$ .

2.3.12 Вычислите относительную погрешность каждого линейного размера.

2.3.13 Определите абсолютную и относительную погрешности измерения объема, подобрав для этого более подходящую формулу (см. формулы (2.4) или (2.6)).

2.3.14 Запишите окончательный результат для объема.

## 2.4 Вопросы для самопроверки

2.4.1. Как рассчитывается точность нониуса?

2.4.2. Чему равна приборная погрешность микрометра, штангенциркуля?

2.4.3. Приведите примеры прямых и косвенных измерений.

2.4.4. Какие методы вычисления погрешностей косвенных измерений вы знаете?

2.4.5. Чему будет равна абсолютная погрешность измерения, если случайная погрешность равна нулю?

## 2.5 Литература

2.5.1. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

2.5.2. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

2.5.3. Физический практикум. Механика и молекулярная физика: учебное пособие. Белянкин А.Г., Мотулевич Г.П. и др.; Под ред. Ивереновой В.И. – М.: Наука, 1967. – 352 с.

2.5.4. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.: Энергия, 1978. – 261 с.

## Лабораторная работа № 3

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ДИСКА

**3.1 Цель работы:** используя закон сохранения механической энергии, определить момент инерции диска двумя методами: динамическим и методом колебаний.

#### 3.2 Краткое теоретическое введение

3.2.1 Основное уравнение динамики вращательного движения.

Основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси, в проекции на эту ось, имеет вид:

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \beta, \quad (3.1)$$

где  $M$  – проекция на ось вращения моментов сил, действующих на тело;

$I$  – момент инерции тела относительно этой же оси;

$\beta = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение.

Так как ось вращения неподвижна, то угловая скорость вращения меняется только по величине. При постоянном моменте действующих сил угловое ускорение – величина постоянная, т.е. вращение тела является равноускоренным или равнозамедленным.

3.2.2 Момент инерции тела.

Момент инерции тела – физическая величина, аналогичная массе при поступательном движении, т.е. характеризует инертность тела при вращательном движении. Момент инерции твердого тела относительно оси зависит от распределения массы тела относительно этой оси, но не зависит от характера движения тела.

Моментом инерции материальной точки относительно какой-либо оси называется произведение её массы на квадрат расстояния до этой оси:

$$I = mr^2.$$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси называется сумма моментов инерции всех элементарных масс  $m_i$  тела относительно этой же оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 .$$

Для тела, плотность которого равна  $\rho$ , момент инерции может быть вычислен путём интегрирования:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV .$$

Если момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, равен  $I_C$ , то момент инерции  $I$  относительно любой другой параллельной оси может быть вычислен на основании теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I = I_C + md^2 ,$$

где  $d$  – расстояние между осями.

Пользуясь уравнением (3.1) и определив момент действующих сил и угловое ускорение, можно вычислить момент инерции тела. Часто в экспериментальных работах тело приводится во вращение или колебание с помощью груза, падающего с некоторой высоты. Потенциальная энергия падающего груза переходит в кинетическую энергию падающего груза и кинетическую энергию вращательного движения тела. Используя закон сохранения механической энергии при условии малых потерь на трение, можно вычислить момент инерции тела. Этот способ используется в данной работе.

### 3.3 Экспериментальная установка и методика измерений

#### 3.3.1 Приборы и принадлежности:

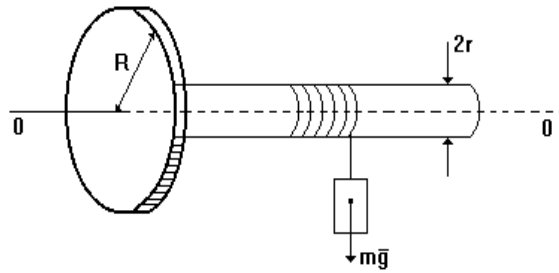
- диск, укрепленный на горизонтальной оси;
- секундомер;
- штангенциркуль;

- набор грузов;
- массивный шар.

### 3.3.2 Определение момента инерции диска динамическим методом.

В работе используется установка, схема которой изображена на рис.3.1.

Диск вместе с валом насажен на горизонтальную ось  $OO$ , относительно которой он вращается. Ось  $OO$  совпадает с осью симметрии диска, поэтому диск находится в состоянии безразличного равновесия. К валу диска прикреплена нить, на конце которой закрепляются грузы, создающие вращающий момент.



**Рис.3.1.** Схема экспериментальной установки для определения момента инерции диска динамическим методом

Если нить намотать на вал, груз поднимется на некоторую высоту  $h$ , система получит запас потенциальной энергии, равный произведению силы тяжести груза на высоту его подъема.

При освобождении диска груз начнет опускаться, приводя диск во вращение. Потенциальная энергия поднятого груза преобразуется в кинетическую энергию поступательного движения груза и вращательного движения диска.

Закон сохранения механической энергии запишется в виде:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3.2)$$

где  $h$  – расстояние, пройденное грузом от начала движения до падения на платформу;



$v$  – линейная скорость поступательного движения груза в момент касания платформы;

$\omega$  – угловая скорость вращения диска в момент касания платформы грузом.

Линейная скорость поступательного движения груза совпадает с линейной скоростью вращательного движения точек, находящихся на поверхности вала (при условии отсутствия проскальзывания нити).

Угловая скорость вращения этих точек совпадает с угловой скоростью вращения диска и определяется из известного соотношения:

$$\omega = v / r ,$$

где  $r$  – радиус вала.

Используя уравнение (3.2), можно показать, что движение груза будет равноускоренным. Перепишем уравнение (3.2), вводя обо-

значение  $\gamma = \frac{I}{mr^2}$  :

$$mgh = \frac{mv^2}{2}(1 + \gamma) .$$

Отсюда получим:

$$h = \frac{v^2}{2g}(1 + \gamma) .$$

Сравнив это выражение с формулой для пути при равноускоренном движении  $h = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ , видим, что

$$a = \frac{g}{\gamma + 1} = const .$$

Применим теперь законы равноускоренного движения:

$$h = \frac{at^2}{2}, v = \frac{2h}{t}, v = \omega r, \omega = \frac{2h}{tr}, \quad (3.3)$$

с начальным условием:  $v = 0, \omega = 0$  при  $t = 0$ .

Подставив значения  $v$  и  $\omega$  в формулу (3.2), получим выражение для определения момента инерции диска (вместе с валом):

$$mgh = \frac{4mh^2}{2t^2} + \frac{4Ih^2}{2t^2r^2} = \frac{2mh^2}{t^2} + \frac{2Ih^2}{t^2r^2}.$$

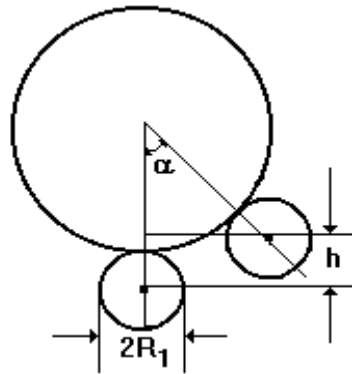
Отсюда найдём:

$$I = \frac{mr^2(gt^2 - 2h)}{2h}. \quad (3.4)$$

### 3.3.3 Определение момента инерции диска методом колебаний.

В работе используется установка предыдущего упражнения, на ободе диска которой укреплен массивный шар (рис. 3.2).

Первоначально диск с шаром находятся в состоянии устойчивого равновесия. Если систему вывести из этого состояния (повернуть диск на небольшой угол ( $\alpha \leq 8^\circ$ )), возникнут колебания системы "диск-шар" с периодом  $T$  вокруг горизонтальной оси.



**Рис.3.2.** Схема экспериментальной установки для определения момента инерции диска методом колебаний

Пренебрегая моментом сил трения, можно написать уравнение движения диска с шаром в следующем виде:

$$(I + I_1) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m_1 g (R + R_1) \sin \alpha, \quad (3.5)$$

где  $I$  – момент инерции диска с валом относительно оси вращения  $OO$ ,

$I_1$  – момент инерции шара относительно оси вращения  $OO$ , вычисляемый по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_1 = \frac{2}{5} m_1 R_1^2 + m_1 (R + R_1)^2, \quad (3.6)$$

где  $R$  и  $R_1$  – радиусы диска и шара соответственно;

$m_1$  – масса шара;

$\alpha$  – угол отклонения диска от положения равновесия.

При малых углах отклонения можно принять  $\sin \alpha \approx \alpha$  и уравнение (3.5) примет вид:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{m_1 g (R + R_1)}{I + I_1} \alpha = -\omega_0^2 \alpha, \quad (3.7)$$

если ввести обозначение  $\frac{m_1 g (R + R_1)}{I + I_1} = \omega_0^2$ .

Как известно, решением такого дифференциального уравнения будет гармоническая функция

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.8)$$

где  $\alpha_0$  – угловая амплитуда колебаний;

$\varphi$  – начальная фаза;

$\omega_0$  – циклическая частота колебаний:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m_1 g (R + R_1)}{I + I_1}}. \quad (3.9)$$

Измерив период колебаний диска с шаром  $T_0$  и зная массу  $m_1$  и радиус  $R_1$  шара, из формул (3.6) и (3.9) найдем момент инерции диска относительно оси вращения:

$$I = m_1 \left[ \frac{g T_0^2}{4\pi^2} (R + R_1) - \frac{2}{5} R_1^2 - (R + R_1)^2 \right]. \quad (3.10)$$

### 3.4 Порядок выполнения работы

3.4.1 Определение момента инерции диска динамическим методом.

3.4.1.1 Ознакомьтесь с установкой. В отверстие для закрепления шара необходимо закрутить болт до упора (для уравнивания диска относительно оси вращения).

3.4.1.2 Штангенциркулем измерьте диаметры валов  $2r_1$  и  $2r_2$  (большого и маленького), диаметр диска  $2R$ , толщину диска  $a$ , диаметр шара  $2R_1$ . Результаты измерений занесите в таблицу 3.1. Плотность  $\rho$  материала (сталь) диска и шара указана в спецификации установки.

Таблица 3.1

#### Линейные размеры установки и плотность материала диска и шара

№	$2r_1, \text{мм}$	$2r_2, \text{мм}$	$2R, \text{мм}$	$a, \text{мм}$	$2R_1, \text{мм}$	$\rho, \text{кг/м}^3$
1						
2						
3						
	$\langle 2r_1 \rangle =$ $= \dots \text{мм}$	$\langle 2r_2 \rangle =$ $= \dots \text{мм}$	$\langle 2R \rangle =$ $= \dots \text{мм}$	$\langle a \rangle =$ $= \dots \text{мм}$	$\langle 2R_1 \rangle =$ $= \dots \text{мм}$	

3.4.1.3 Закрепите один из грузов на конце нити (200÷500 г). Одновременно с пуском секундомера освободите систему и определите время  $t$  падения груза с высоты  $h$  на платформу (отсчет вы-

соты производить от нижнего основания груза). Опыт произведите не менее пяти раз. Результаты измерений занесите в таблицу 3.2.

Таблица 3.2.

**Время падения груза массой  $m$  с высоты  $h = \dots$  м,  
масса держателя  $m_0 = \dots$  кг.**

№	$m = \dots$ г		$m = \dots$ г		$m = \dots$ г		$m = \dots$ г	
	$r_1$ $t, c$	$r_2$ $t, c$	$r_1$ $t, c$	$r_2$ $t, c$	$r_1$ $t, c$	$r_2$ $t, c$	$r_1$ $t, c$	$r_2$ $t, c$
1								
2								
·								
5								
	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$	$\langle t \rangle =$

3.4.1.4 Определите численное значение момента инерции диска по формуле (3.4). Результаты вычислений занесите в таблицу 3.3.

3.4.1.5 Вычислите погрешность результата по методу прямых измерений.

Таблица 3.3.

**Результаты вычисления момента инерции диска**

$r,$ $м$	$m + m_0,$ $кг$	$\langle t \rangle,$ $с$	$I_{z_2},$ $кг \cdot м^2$	$\langle I \rangle,$ $кг \cdot м^2$	$\Delta I_3,$ $кг \cdot м^2$	$\Delta I^2,$ $кг^2 \cdot м^4$

3.4.1.6 Вычислите момент инерции диска по его геометрическим размерам, зная радиус диска  $R$ , толщину диска  $a$ , плотность  $\rho$  материала диска.

3.4.1.7 Сравните полученные результаты. Объясните причины возможных расхождений.

- 3.4.2 Определение момента инерции диска методом колебаний.
- 3.4.2.1 Снимите с нити груз. Укрепите на ободе диска шар.
- 3.4.2.2 Выведите систему из положения равновесия и определите время 20÷30 колебаний при одном и том же значении начальной амплитуды колебаний  $\alpha_0$ , указанном преподавателем. Опыт повторите 5÷6 раз. Результаты измерений занесите в таблицу 3.4.
- 3.4.2.3 Рассчитайте по формуле (3.10) момент инерции диска.
- 3.4.2.4 Рассчитайте погрешность по методу прямых измерений.
- 3.4.2.5 Сравните экспериментальные результаты, полученные различными методами. Объясните причины возможных расхождений.

Таблица 3.4.

**Результаты измерений и вычислений.**

Число колебаний  $n = \dots$ ,

начальная амплитуда колебаний  $\alpha_0 = \dots$

№	$t, c$	$T, c$	$I, кг \cdot м^2$	$\langle I \rangle, кг \cdot м^2$	$\Delta I, кг \cdot м^2$	$\Delta I^2, кг^2 \cdot м^4$
1						
2						
.						
5						

**3.5 Вопросы для самопроверки**

3.5.1. Запишите уравнение движения тел при поступательном и вращательном движении и обоснуйте корректность использования формулы  $a = \beta r$ .

3.5.2. Что называется моментом инерции тела относительно оси? Какой физический смысл имеет эта величина? От чего зависит момент инерции?

3.5.3. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.

3.5.4. Почему при определении момента инерции диска динамическим методом движение системы будет равноускоренным?

3.5.5. В методе колебаний для определения момента инерции диска применяется теория малых колебаний. Какие упрощения при этом допускаются?

3.5.6. Перечислите причины, дающие погрешность в эксперименте. Скажется ли на точности измерений колебание и вращение груза при его движении, а также неуравновешенность диска?

3.5.7. Выведите формулу для нахождения момента инерции диска динамическим методом.

3.5.8. Выведите формулу для нахождения момента инерции диска методом колебаний.

### **3.6 Литература**

3.6.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

3.6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

3.6.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

3.6.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

3.6.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

3.6.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

3.6.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

### **3.7 Задание на учебно-исследовательскую работу студента (УИРС)**

3.7.1 Цель исследований:

– глубже изучить основные причины, влияющие на точность экспериментального определения значения момента инерции диска;

– экспериментально проверить зависимость периода колебаний маятника от амплитуды колебаний;

– определить более точное значение момента инерции диска с учетом влияния трения и зависимости периода колебаний от амплитуды.

3.7.2 Изучение влияния момента сил сопротивления.

При определении значения момента инерции диска по формуле (3.4.) не учитывался момент силы трения. Предлагается выполнить

измерения и вычисления, аналогичные п.п.4.4.2 – 4.4.4 и 4.4.7 – 4.4.8 в работе №4 «Изучение основного закона динамики вращательного движения», чтобы учесть влияние момента сил сопротивления при определении момента инерции диска динамическим методом.

3.7.3 Изучение влияния амплитуды на период колебаний.

3.7.3.1 При не очень малых значениях амплитуды угла отклонения ( $\alpha_0 \geq 5^0$ ) в уравнении (3.5) значение  $\sin \alpha$  нельзя заменить значением его аргумента  $\alpha$ .

В этом случае необходимо решать нелинейное уравнение:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{m_1 g(R + R_1)}{I + I_1} \sin \alpha. \quad (3.11)$$

По-прежнему (см. формулу (3.9)) введем обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{m_1 g(R + R_1)}{I + I_1}$$

и проинтегрируем по углу уравнение (3.11). При интегрировании отсчет удобно вести от максимального значения  $\alpha_0$ , когда скорость маятника равна нулю:  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$  при  $t = 0$ .

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d^2\alpha}{dt^2} d\alpha = -\omega_0^2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha. \quad (3.12)$$

Преобразуем подинтегральные выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} d\alpha &= \frac{d^2\alpha}{dt^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{2} d \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \\ \sin \alpha \cdot d\alpha &= -d(\cos \alpha). \end{aligned}$$

С учетом этих преобразований из (3.12) получим:

$$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = 2\omega_0^2 (\cos \alpha - \cos \alpha_0). \quad (3.13)$$



Перепишем его в виде:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}} = \sqrt{2}\omega_0 dt. \quad (3.14)$$

Воспользуемся формулой преобразования и введем новую переменную:

$$\sin \theta = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)}. \quad (3.15)$$

Тогда уравнение (3.14) примет вид:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \cdot \sin^2 \theta}} = \omega_0 dt. \quad (3.16)$$

При интегрировании этого уравнения примем, что при  $t = 0$  маятник проходит положение равновесия, т.е.  $\alpha = 0$ , через четверть периода  $t = \frac{T}{4}$   $\alpha = \alpha_0$ , следовательно, на основании (3.15)

при  $t = 0$   $\theta = 0$ , а при  $t = \frac{T}{4}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

С учетом этого проинтегрируем (3.16) по времени от 0 до  $t = \frac{T}{4}$ , по  $\theta$  от нуля до  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\omega_0 \int_0^{T/4} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \cdot \sin^2 \theta}}. \quad (3.17)$$

Из (3.17) с учетом (3.9) получим:

$$T = 4 \sqrt{\frac{I + I_1}{m_1 g (R + R_1)}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \cdot \sin^2 \theta}}. \quad (3.18)$$

Как видно из (3.18), в общем случае период колебаний любого физического маятника зависит от амплитуды колебаний  $\alpha_0$ . Только при  $\alpha_0 \rightarrow 0$  получим:

$$T_0 = 4 \sqrt{\frac{I + I_1}{m_1 g (R + R_1)}} \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_1}{m_1 g (R + R_1)}}.$$

Здесь  $T_0$  – период колебаний физического маятника с бесконечно малой амплитудой колебаний, для которых справедливо допущение:

$$\sin \alpha \approx \alpha.$$

Интеграл в правой части формулы (3.18) называется полным эллиптическим интегралом Лежандра первого рода.

Этот интеграл может быть представлен в виде ряда:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right], \quad (3.19)$$

где

$$k = \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right). \quad (3.20)$$

При определении момента инерции диска по методу колебаний в формулу (3.10) нужно подставлять значение периода колебаний маятника  $T_0$  с бесконечно малой амплитудой. В действительности мы подставляем в эту формулу значение  $T$ , определенное при колебаниях с конечной амплитудой  $\alpha_0$ .

Следовательно, для более точного определения момента инерции диска необходимо учесть влияние амплитуды колебаний на его период.

### 3.7.3.2 Порядок выполнения работы.

– Укрепите шар на ободе диска и совместите стрелку указателя угла поворота диска с нулем в положении устойчивого равновесия диска с шаром.

– Отклоните диск от положения равновесия на угол  $\alpha_{0H} = 5^\circ$  и отпустите без начальной скорости. Найдите период колебаний по

измерениям времени 30 колебаний 3÷5 раз. Одновременно отметьте и запишите конечную амплитуду колебаний  $\alpha_{ок}$ . Данные занесите в таблицу.

– опыты повторите, увеличивая начальную амплитуду  $\alpha_0$  через  $5^0 \div 10^0$ , до углов  $\alpha_0 = 70^0 \div 80^0$ .

– По результатам опытов вычислите среднюю амплитуду колебаний  $\langle \alpha_0 \rangle = \frac{\alpha_{он} + \alpha_{ок}}{2}$  для каждого опыта и среднее значение периода колебаний для них

$$\langle T \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N}$$

и постройте график зависимости периода колебаний  $\langle T \rangle$  от среднего значения амплитуды колебаний  $\langle \alpha_0 \rangle$ .

– Для каждого значения  $\alpha_0$ , при котором проведен эксперимент, вычислите относительное изменение периода колебаний маятника из (3.18) и (3.19):

$$f(\alpha_0) = \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \quad (3.21)$$

– Поделите экспериментальные значения периода колебаний для каждого значения  $\alpha_0$  на величину  $f(\alpha_0)$ , найдите среднее значение периода  $T_0$  из всех опытов.

– Подставив найденное из предыдущего пункта значение  $T_0$  в формулу (3.10), вычислите момент инерции диска и сравните полученное значение  $I$  с его значением, вычисленным без учета влияния амплитуды колебаний на его период.

### 3.8 Дополнительная литература

3.8.1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

## Лабораторная работа № 4

### ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

**4.1 Цель работы:** экспериментально проверить выполнение основного закона динамики вращательного движения на крестообразном маятнике Обербека.

#### 4.2 Краткое теоретическое введение

При вращении материальной точки массы  $m_i$  по окружности радиуса  $r_i$  момент ее импульса в проекции на ось вращения равен:  $L_i = m_i v_i r_i$ . Линейная скорость движения  $v_i$  связана с угловой скоростью  $\omega$  соотношением:  $v_i = \omega r_i$ , поэтому  $L_i = m_i r_i^2 \omega$ . Если вокруг оси  $O$  вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью  $\omega$ , то  $L = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega$ , где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину  $\omega$ , как одинаковую для всех материальных точек, можно вынести из-под знака суммы, тогда получится:

$$L = I\omega, \quad (4.1)$$

где

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (4.2)$$

Величина  $I$ , равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения, называется моментом инерции системы относительно этой оси. *Момент инерции* тела – физическая величина, аналогичная массе при поступательном движении, т.е. характеризует инертность тела при вращательном движении. Момент инерции твердого тела относительно оси зависит от распределения массы тела относительно этой оси, но не зависит от характера движения тела.

В случае непрерывного распределения массы знак суммы заменяется знаком интеграла, и формула (4.2) примет вид:

$$I = \int_m r^2 dm.$$

Учитывая (4.1), основной закон динамики вращательного движения в проекции на ось вращения можно записать:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = M, \quad (4.3)$$

где  $M$  – проекция суммарного момента внешних сил на ось вращения.

Это уравнение называется уравнением моментов.

Легко видеть, что при вращательном движении роль действующей силы  $\vec{F}$  играет момент силы  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}],$$

т.е. векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  точки приложения силы на эту силу  $\vec{F}$ .

В частном случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси уравнение (4.3.) переходит в следующее:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M \quad (4.4)$$

или

$$I \cdot \beta = M. \quad (4.5)$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение  $\beta$  равно моменту внешних сил относительно той же оси. Сопоставляя уравнение (4.5) и второй закон Ньютона, можно заметить, что момент инерции твердого тела при вращении играет такую же роль, как масса тела при поступательном движении. В работе предлагается убедиться в том, что для данного распределения масс относительно оси вращения при изменении момента силы  $M$  угловое ускорение изменяется так, что сохраняется пропорциональность между этими

величинами. Коэффициент пропорциональности равен моменту инерции  $I$ .

### 4.3 Описание установки и методика выполнения работы

4.3.1 Установка представлена на рис. 4.1. Маятник Обербека состоит из четырех спиц, укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. На ту же втулку насажены два шкива различных радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . Вся эта система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции системы можно менять, передвигая цилиндры  $m_1$  вдоль спиц.

Момент сил создается грузом  $m$ , привязанным к нити  $H$ , которая намотана на один из шкивов. Если момент сил трения  $M_{тр}$ , приложенный к оси маятника, мал по сравнению с моментом силы натяжения нити, то проверка уравнения (4.5) не представляет труда. Действительно, измеряя время  $t$ , в течение которого груз из состояния покоя опустится на расстояние  $h$ , можно легко найти ускорение  $a$  груза в проекции на координатную ось, совпадающую с направлением движения груза:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (4.6)$$

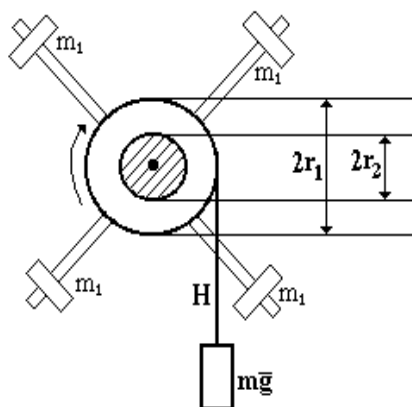


Рис. 4.1. Маятник Обербека

Ускорение  $a$  связано с угловым ускорением  $\beta$  (при отсутствии проскальзывания нити относительно обода шкива) очевидным соотношением

$$a = r \cdot \beta, \quad (4.7)$$

где  $r$  – радиус шкива.

Если  $T$  – сила натяжения нити, то

$$M = rT. \quad (4.8)$$

Силу натяжения нити можно найти из уравнения движения груза:

$$ma = mg - T, \quad T = m(g - a).$$

Тогда

$$M = r \cdot m(g - a). \quad (4.9)$$

4.3.2 Момент сил трения  $M_{mp}$  обычно оказывается довольно великим и зависит от скорости вращения. Поэтому  $M_{mp}$  способен существенно исказить результаты опыта, однако в первом приближении можно принять момент сопротивления постоянным и не зависящим от скорости. Тогда с учетом момента сил трения уравнение (4.5) запишется в виде:

$$M - M_{mp} = I\beta. \quad (4.10)$$

Задача с учетом зависимости от скорости момента сил сопротивления рассмотрена в разделе УИРС.

#### 4.4 Порядок выполнения работы

4.4.1 Прежде чем начинать эксперимент, рекомендуется маятник несколько раз привести во вращение, каждый раз давая ему возможность остановиться, для того, чтобы убедиться в его сбалансированности. Измерьте линейные размеры установки, и результаты измерений занесите в таблицу 4.1. Здесь  $r$  – радиус шки-

ва, на который намотана нить;  $h$  – высота, с которой падает груз;  $l$  – длина образующей полого цилиндра;  $R_1$  – внешний радиус полого цилиндра;  $R_2$  – его внутренний радиус;  $R$  – расстояние между осью вращения и центром масс полого цилиндра.

Таблица 4.1

**Результаты измерения линейных размеров установки**

$N^{\circ}$	$2r, \text{мм}$	$h, \text{мм}$	$l, \text{мм}$	$2R_1, \text{мм}$	$2R_2, \text{мм}$	$R, \text{мм}$
1						
2						
3						
	$\langle 2r \rangle =$	$\langle h \rangle =$	$\langle l \rangle =$	$\langle 2R_1 \rangle =$	$\langle 2R_2 \rangle =$	$\langle R \rangle =$

4.4.2 Укрепив на нити  $H$  некоторый груз массы  $m$ , измерьте время  $t$  падения груза с высоты  $h$ . Повторите опыт 5-7 раз. Результаты эксперимента занесите в таблицу 4.2.

4.4.3 Повторите п. 4.4.2. для 4-5 различных значений массы груза  $m$ .

4.4.4 Усредните найденные значения  $t$  для каждой массы  $m$ . Определите ускорение  $a$  для этой массы по формуле (4.6). Вычислите соответствующие угловые ускорения  $\beta$  и моменты силы  $M$  по формулам (4.7) и (4.9). Результаты занесите в таблицу 4.2.

Таблица 4.2

**Результаты измерений и вычислений для маятника без цилиндров на крестовине, масса держателя  $m_0 = \dots$  кг**

$m+m_0, \text{кг}$	$t, \text{с}$	$\langle t \rangle, \text{с}$	$a, \text{м/с}^2$	$\beta, \text{с}^{-2}$	$T, \text{Н}$	$M, \text{Нм}$
$m_0$						
$m+m_0$						

4.4.5 Закрепите цилиндры на стержнях и повторите эксперименты, описанные в пунктах 4.4.2-4.4.3, результаты эксперимента занесите в таблицу 4.3.



4.4.6 Проведите для маятника с дополнительными цилиндрами вычисления соответственно п. 4.4.4 и результаты занесите в таблицу 4.3.

Таблица 4.3.

**Результаты измерений и вычислений для маятника с дополнительными цилиндрами на крестовине, масса держателя  $m_0 = \dots$  кг**

$m+m_0, \text{ кг}$	$t, \text{ с}$	$\langle t \rangle, \text{ с}$	$a, \text{ м/с}^2$	$\beta, \text{ с}^2$	$T, \text{ Н}$	$M, \text{ Н·м}$
$m_0$						
$m+m_0$						

4.4.7 Проведите обработку результатов эксперимента по методу наименьших квадратов. Учитывая наличие момента силы трения, основной закон динамики вращательного движения можно записать в виде:

$$\beta = \frac{M - M_{mp}}{I}.$$

Эту зависимость удобнее представить следующим образом:

$$M = I\beta + M_{mp} \text{ или } y = Ax + B,$$

где принято:  $y = M$ ,  $x = \beta$ ,  $A = I$ ,  $B = M_{mp}$ .

Определение коэффициентов  $A$  и  $B$  проводится методом наименьших квадратов по следующим формулам:

$$I = A = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad M_{mp} = B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Вычисления удобно проводить, используя таблицу 4.4.

Таблица 4.4.

**Данные для вычисления параметров линейной зависимости  $y = Ax + B$**

№	$x_i$ $\beta$	$y_i$ $M$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1				
2				
.				
$n$				
	$\sum_{i=1}^n x_i =$	$\sum_{i=1}^n y_i =$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i =$

Вычисления проведите для маятника без цилиндров и с дополнительными цилиндрами.

4.4.8 Результаты измерений и вычислений представьте в виде графиков (отдельно для ненагруженного и нагруженного маятников), откладывая по оси абсцисс величину  $\beta$ , а по оси ординат – величину  $M$ . По найденным методом наименьших квадратов параметрам линейной зависимости  $A$  и  $B$  проведите прямые линии, которые должны наилучшим образом описывать эксперимент.

4.4.9 Зная значения момента инерции маятника с цилиндрами  $I$ , момента инерции маятника без цилиндров  $I_0$  и используя свойство аддитивности момента инерции, вычислите момент инерции одного цилиндра относительно оси вращения:

$$I_{\text{цил}} = \frac{I - I_0}{4}. \quad (4.11)$$

4.4.10 Вычислите теоретическое значение момента инерции  $I_C$  полого цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его образующей по формуле:

$$I_C = \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_1 (R_1^2 + R_2^2), \quad (4.12)$$

где  $R_1$  – внешний радиус полого цилиндра;

$R_2$  – внутренний радиус полого цилиндра;

$l$  – длина образующей цилиндра;

$m_1$  – масса цилиндра.

4.4.11 Пользуясь теоремой Гюйгенса-Штейнера, вычислите момент инерции одного цилиндра относительно оси вращения маятника:

$$I_{\text{цвл}} = I_C + m_1 R^2, \quad (4.13)$$

где  $R$  – расстояние между осью вращения маятника и осью, проходящей через центр масс полого цилиндра параллельно оси вращения маятника.

4.4.12 Сравните вычисленное по формуле (4.13) значение момента инерции  $I_{\text{цвл}}$  одного цилиндра относительно оси вращения маятника с полученным из эксперимента в п. 4.4.9 (формула (4.11)).

4.4.13 Укажите возможные причины погрешностей эксперимента.

#### 4.5 Вопросы для самопроверки

4.5.1. Сформулируйте и запишите основной закон динамики вращательного движения.

4.5.2. Что понимают под моментом инерции тела относительно некоторой оси?

4.5.3. Какая формула упрощает расчет момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс?

4.5.4. При каком условии мы имеем право считать линейное ускорение точек на ободе шкива равным ускорению поступательного движения груза?

4.5.5. Укажите направление момента силы, угловой скорости и углового ускорения маятника при его вращении.

4.5.6. Можно ли определить момент инерции маятника, используя закон сохранения механической энергии?

4.5.7. Можно ли в условиях данного эксперимента считать цилиндры, закреплённые на стержнях, материальными точками?

#### 4.6 Задание на УИРС

4.6.1 Цель УИРС: определить более точное значение момента инерции крестообразного маятника (Обербека) и цилиндров, учитывая зависимость момента сил трения от скорости.

4.6.2 При определении момента инерции крестообразного маятника  $I_0$  и маятника с грузами  $I$  по формуле (4.10) предполагается, что момент сил трения не зависит от скорости вращения маятника и равен максимальному моменту сил трения покоя.

В действительности момент сил трения зависит от скорости вращения маятника и при больших скоростях вращения может достигать значений, гораздо больших значений момента сил трения покоя.

Поэтому при более точных измерениях необходимо учитывать зависимость момента сил трения от скорости вращения маятника.

Предположим, что в первом приближении момент сил трения растёт с ростом скорости вращения по линейному закону:

$$M_{mp} = M_0 + k\omega, \quad (4.14)$$

здесь  $M_0$  – максимальный момент сил трения покоя;

$k$  – коэффициент пропорциональности;

$\omega$  – угловая скорость вращения маятника.

Тогда уравнение движения имеет вид:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = m(g - a)r - M_0 - k\omega. \quad (4.15)$$

Здесь  $r$  – радиус шкива;

$m$  – масса подвешенного на нити груза.

Линейное ускорение падения груза и угловое ускорение маятника связаны соотношением (4.7) или  $a = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$ , после подстановки этого выражения в (4.15) последнее запишется в виде:

$$\frac{d\omega}{mgr - M_0 - k\omega} = \frac{dt}{I + mr^2}. \quad (4.16)$$

Интегрируя это уравнение и имея в виду, что при  $t = 0$   $\omega = 0$  (в начальный момент вращения маятника отсутствует), получим:

$$\omega = \frac{mgr - M_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{I + mr^2}} \right). \quad (4.17)$$

Отсюда видно, что благодаря зависимости момента сил трения от скорости вращения при  $t \rightarrow \infty$  угловая скорость вращения стремится к максимальному значению

$$\omega_{\max} = \frac{mgr - M_0}{k}. \quad (4.18)$$

Продифференцировав (4.17) по времени, получим выражение для линейного ускорения груза:

$$a = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgr - M_0}{I + mr^2} \cdot r e^{-\frac{kt}{I + mr^2}}. \quad (4.19)$$

Из этого выражения видно, что ускорение груза максимально в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$a_0 = \frac{mgr - M_0}{I + mr^2} \cdot r \quad (4.20)$$

и экспоненциально убывает, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Путь, проходимый падающим грузом за время  $t$ , найдем по формуле:

$$h = \int_0^t \omega \cdot r dt = \frac{mgr - M_0}{k} r \left[ t - \left( 1 - e^{-\frac{kt}{I + mr^2}} \right) \frac{I + mr^2}{k} \right]. \quad (4.21)$$

Введём обозначение:  $\frac{kt}{I + mr^2} = x$  и представим экспоненту  $e^{-x}$  в виде ряда:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Так как в условиях нашего опыта  $\frac{kt}{I + mr^2} \ll 1$ , ограничимся первыми 4-мя членами ряда. Тогда уравнение (4.21) принимает вид:

$$h = a_0 \frac{t^2}{2} - \frac{a_0^2}{(mgr - M_0)r} \cdot \frac{kt^3}{6}. \quad (4.22)$$

Для определения неизвестных величин  $a_0$  и  $k$  для одного и того же груза  $m$  измерим время падения груза  $t_1$  и  $t_2$  для двух разных высот  $h_1$  и  $h_2$ :

$$h_1 = \frac{a_0 t_1^2}{2} - \frac{a_0^2}{(mgr - M_0)r} \cdot \frac{kt_1^3}{6},$$

$$h_2 = \frac{a_0 t_2^2}{2} - \frac{a_0^2}{(mgr - M_0)r} \cdot \frac{kt_2^3}{6}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$a_0 = 2 \frac{h_2 t_1^3 - h_1 t_2^3}{t_2^2 t_1^3 - t_1^2 t_2^3}, \quad (4.23)$$

$$k = \frac{3}{2} (mgr^2 - M_0 r) \frac{(h_1 t_2^2 - h_2 t_1^2)(t_1^2 t_2^3 - t_2^2 t_1^3)}{(h_1 t_2^3 - h_2 t_1^3)^2}. \quad (4.24)$$

Подставляя значение ускорения из формулы (4.23) в (4.20), по-

лучим окончательную формулу для определения момента инерции крестообразного маятника (Обербека):

$$I = (mgr - M_0) \frac{rt_1^2 t_2^2}{2} \frac{t_1 - t_2}{h_2 t_1^3 - h_1 t_2^3} - mr^2. \quad (4.25)$$

#### 4.7 Порядок выполнения работы

4.7.1 Увеличивая нагрузку на нить  $H$ , найдите минимальное значение  $m_0$ , при котором маятник начинает вращаться. Оцените величину момента сил трения покоя  $M_0$ .

4.7.2 Укрепите цилиндры на спицах маятника на таком же расстоянии от оси, как при выполнении упражнения 4.4.5. Подвесьте на нити один из грузов.

4.7.3 Измерьте 5÷7 раз время  $t_1$  падения груза с высоты  $h_1$  и  $t_2$  с высоты  $h_2$  ( $h_2 \approx 2h_1$ ).

4.7.4 Определите средние значения времен  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$  по результатам п. 4.7.3.

4.7.5 Подставьте найденные значения  $t_1, t_2, h_1, h_2$ , а также значение  $M_0$ , найденное по данным опыта из 4.7.1, в формулу (4.25) и найдите момент инерции маятника  $I$  с четырьмя цилиндрами.

4.7.6 Снимите цилиндры со стержней маятника и повторите эксперименты, аналогичные пп.4.7.3-4.7.4. По результатам опытов, используя формулу (4.25), найдите момент инерции маятника  $I_0$  без дополнительных грузов ( $M_0$  берите из пункта 4.7.1).

4.7.7 Найдите момент инерции одного груза относительно оси вращения маятника, используя формулу (4.11), и сравните результаты опытов с результатами теоретических расчетов по формуле (4.13) и с результатами, полученными без учета зависимости момента сил трения от скорости вращения.

4.7.8 По формуле (4.24) вычислите коэффициент сопротивления  $k$ , конечную угловую скорость по формуле (4.17) и определите значение момента сил сопротивления к концу падения грузов. Сравните полученные значения момента сил сопротивления со значением момента сил трения покоя  $M_0$ .

#### 4.8 Вопросы для самопроверки

4.8.1. Попробуйте ответить на вопрос, почему момент сил сопротивления должен зависеть от скорости вращения.

4.8.2. Насколько обосновано предположение о пропорциональности момента сил сопротивления скорости вращения маятника в первой степени?

4.8.3. Попробуйте вывести расчетные формулы для случая, когда

$$M_{mp} = M_0 + k\omega^2.$$

#### 4.9 Литература

4.9.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

4.9.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

4.9.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

4.9.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

4.9.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

4.9.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

4.9.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.



## Лабораторная работа № 5

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНА КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**5.1 Цель работы:** экспериментальная проверка закона колебаний физического маятника при малой угловой амплитуде; освоение метода определения ускорения силы тяжести с помощью физического маятника.

#### 5.2 Краткое теоретическое введение

##### 5.2.1 Период колебаний физического маятника.

Физическим маятником называется твердое тело произвольной формы, укрепленное на неподвижной горизонтальной оси (не проходящей через его центр масс) и способное совершать колебания под действием силы тяжести относительно этой оси.

В состоянии устойчивого равновесия физического маятника линия, проходящая через точки подвеса  $O$  и центра масс  $C$ , направлена вертикально (см. рис.5.1).

Если маятник (рис.5.1) отклонить от положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$  и отпустить, то он будет совершать колебательное движение под действием момента силы тяжести относительно оси вращения. Проекция на ось вращения момента силы тяжести равна:

$$M = -mga \sin \alpha , \quad (5.1)$$

где  $m$  – масса маятника;

$g$  – ускорение свободного падения;

$a$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до центра масс  $C$ .

Основной закон динамики вращательного движения для физического маятника в проекции на ось вращения имеет следующий вид (см. Приложение):

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mga \sin \alpha , \quad (5.2)$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения.

Если угол отклонения достаточно мал ( $\alpha < 5^\circ$ ), то можно приближённо принять  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Тогда, вводя обозначение

$$\frac{mga}{I} = \omega_o^2, \quad (5.3)$$

уравнение движения маятника (5.2) можно привести к виду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_o^2\alpha = 0. \quad (5.4)$$

Решением данного дифференциального уравнения является гармоническая функция:

$$\alpha = \alpha_o \sin(\omega_o t + \varphi_o), \quad (5.5)$$

где  $\alpha_o$  – угловая амплитуда колебания (в радианах);

$\varphi_o$  – начальная фаза колебания;

$\varphi = \omega_o t + \varphi_o$  – фаза колебания в данный момент времени.

Выясним физический смысл введённой нами величины  $\omega_o$ . Так как функция  $\sin \varphi$  является периодической с периодом, равным  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$ , то время  $T = t_2 - t_1$ , необходимое для совершения одного полного колебания, можно найти из условия:

$$(\omega_o t_2 + \varphi_o) - (\omega_o t_1 + \varphi_o) = 2\pi,$$

откуда

$$\omega_o(t_2 - t_1) = \omega_o T = 2\pi. \quad (5.6)$$

Таким образом, время  $T$  одного полного колебания, называемое *периодом колебаний*, определяется выражением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} . \quad (5.7)$$

Число колебаний в единицу времени называется *частотой* и обозначается  $\nu$ . Тогда

$$\nu = 1/T .$$

*Круговой (или циклической) частотой* называется число колебаний за время  $2\pi$  секунд, то есть круговая частота равна:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu .$$

Из сравнения с формулой (5.7) видно, что введенная нами выше величина  $\omega_0$  есть не что иное, как круговая частота.

Сравнивая выражение (5.7) с формулой для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} , \quad (5.8)$$

можно сделать вывод, что математический маятник, у которого длина равна

$$l_0 = \frac{I}{ma} , \quad (5.9)$$

будет иметь тот же период колебаний, что и данный физический маятник.

Величина  $l_0$  называется *приведенной длиной* физического маятника.

Приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника с периодом колебаний, равным периоду колебаний данного физического маятника.

### 5.2.2 Центр качания.

Точка, которая лежит на прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс, и находится на расстоянии приведенной длины от точки подвеса, называется центром качания (рис. 5.1., точка  $O'$ ).

По теореме Гюйгенса-Штейнера (см. Приложение к лабораторной работе №12) момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен

$$I = I_C + ma^2, \quad (5.10)$$

где  $I_C$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной произвольной оси;

$a$  – расстояние между осями.

Подставив в это равенство выражение (5.9) и разрешив его относительно  $l_0$ , получим:

$$l_0 = \frac{I_C + ma^2}{ma} = a + \frac{I_C}{ma}. \quad (5.11)$$

Из этой формулы видно, что приведенная длина равна сумме расстояния от точки подвеса до центра масс  $a$  и некоторой добавки  $\frac{I_C}{ma}$ , то есть центр качания  $O'$  лежит ниже центра масс  $C$  (см. рис. 5.1).

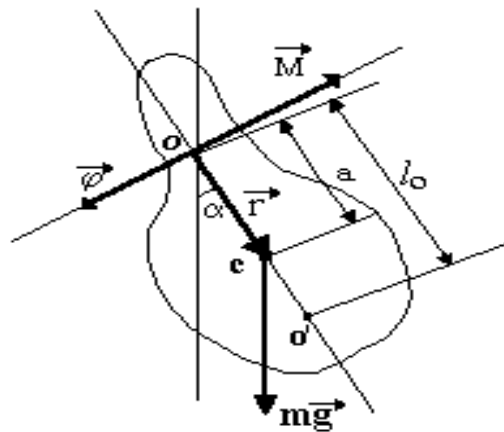
Обозначим расстояние от центра масс  $C$  до центра качания  $O'$  через  $b$ , тогда

$$b = \frac{I_C}{ma}.$$

Отсюда  $a = \frac{I_C}{mb}$ .

Подставив эти выражения в (5.11), будем иметь:

$$l_o = b + \frac{I_c}{mb}. \quad (5.12)$$



**Рис. 5.1.** К выводу уравнения колебаний физического маятника

Из соотношений (5.11) и (5.12) видно, что если маятник подвесить за центр качания, то период колебаний не изменится. Таким образом, при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится центром качания, т.е. точка подвеса и центр качания обратимы.

5.2.3 Зависимость периода колебаний физического маятника от расстояния между точкой подвеса и центром масс.

Подставив (5.10) в (5.7), получим зависимость периода  $T$  колебаний физического маятника от расстояния  $a$  между точкой подвеса  $O$  и центром масс  $C$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g} + \frac{I_c}{mga}}. \quad (5.13)$$

На рис. 5.2. качественно изображена зависимость  $T$  от  $a$ , которая описывается формулой (5.13). При  $a \rightarrow 0$  (точка подвеса при-

ближается к центру масс) период колебаний  $T$  стремится к бесконечности, что соответствует безразличному равновесию. С удалением точки подвеса от центра масс период колебаний  $T$  маятника сначала уменьшается, а затем снова возрастает и при дальнейшем увеличении  $a$  опять стремится к бесконечности.

В случае  $a \rightarrow \infty$  вторым слагаемым под корнем в выражении (5.13) можно пренебречь по сравнению с первым, тогда будем иметь:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Последняя формула соответствует периоду колебаний математического маятника. Действительно, условию  $a \rightarrow \infty$  соответствует пренебрежение размерами самого маятника по сравнению с расстоянием  $a$  от точки подвеса до центра масс – это и есть определение математического маятника.

Период колебаний физического маятника принимает минимальное значение при некотором расстоянии  $a^*$  от точки подвеса до центра масс. Найти это расстояние  $a^*$  и соответствующий ему период колебаний  $T_{\min}$  можно из условия экстремума:

$$\left. \frac{dT}{da} \right|_{a=a^*} = 0.$$

Отсюда, используя (5.13), получим следующие выражения:

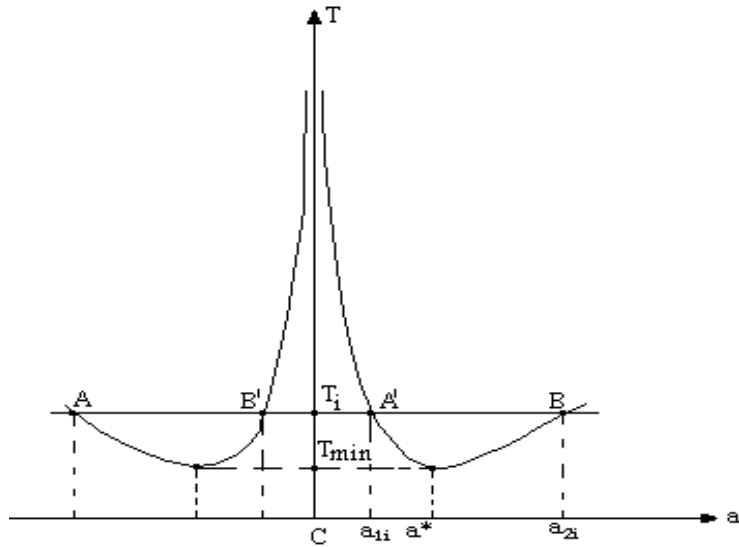
$$a^* = \sqrt{\frac{I_C}{m}}, \quad T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{4I_C}{mg^2}}. \quad (5.14)$$

5.2.4 Метод определения ускорения свободного падения с помощью стержневого маятника.

Предлагаемый метод определения ускорения силы тяжести основан на использовании формулы (5.8):

$$g = \frac{4\pi^2 l_0}{T^2}. \quad (5.15)$$

Приведенная длина  $l_0$  определяется графически с помощью экспериментально полученной зависимости периода колебаний физического маятника от расстояния между точкой подвеса и центром масс, качественно изображенной на рис. 5.2. Как видно из рисунка, эта кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно оси ординат (ось  $T$ ).



**Рис.5.2.** Зависимость периода  $T$  колебаний физического маятника от расстояния  $a$  между центром масс и точкой подвеса

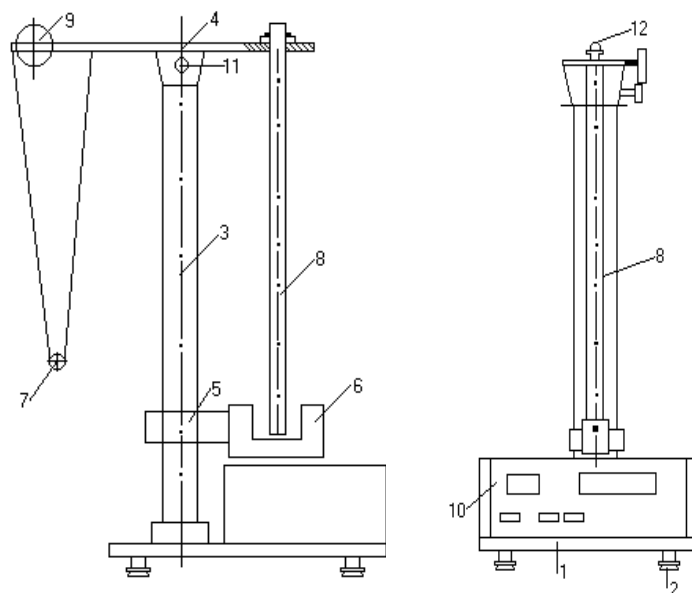
### 5.3 Описание экспериментальной установки.

Приборы и принадлежности: стержневой маятник, электронный секундомер.

Общий вид универсального маятника представлен на рис. 5.3. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют провести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка 3, на которой зафиксированы верхний кронштейн 4 и нижний кронштейн 5 с фотоэлектрическим датчиком 6. С одной стороны кронштейна 4 находится физический маятник 8, выполненный в виде стального стержня длиной 590 мм и диаметром 10 мм, на котором фиксируется призматический подвес 12.

На стержне через 10 мм выполнены кольцевые канавки для точной фиксации подвеса, который можно перемещать вдоль стержня и закреплять на любой канавке с помощью винта.

Нижний кронштейн 5 с фотоэлектрическим датчиком 6 можно также перемещать вдоль колонки 3 и устанавливать в таком положении, чтобы конец стержня 8, пересекая световой луч датчика, не соударялся с кронштейном 5.



**Рис. 5.3.** Универсальный маятник

На лицевой панели прибора расположены кнопки управления:  
«сеть» – выключатель сети;  
«сброс» – сброс показаний секундомера и запуск нового отсчета времени и числа периодов колебаний;  
«стоп» – остановка отсчета времени и периодов колебаний, а также цифровых индикаторов количества периодов и полного времени колебаний.

Электронная схема прибора позволяет производить отсчет числа периодов колебаний от 0 до 100 и времени колебаний с помощью цифрового электронного секундомера в пределах от 0 до 100 с с погрешностью  $\pm 0,001$  с.



## 5.4 Порядок выполнения работы

### 5.4.1 Подготовка к измерениям:

– установите нижний кронштейн 5 в крайнее нижнее положение, а вершину призмы подвеса на четвертую от края канавку кольцевой проточки стержня 8 так, чтобы нижний конец стержня проходил в разрезе фотодатчика 6;

– подключите прибор к питающей сети;

– нажмите кнопку «СЕТЬ», проверьте наличие свечения лампы фотодатчика 6 и высвечивание нулей на цифровых индикаторах.

### 5.4.2 Проведение измерений.

#### 5.4.2.1 Предварительный опыт.

– Отклоните стержень 8 от вертикального положения равновесия на небольшой угол и отпустите. Стержень должен свободно совершать колебания, пересекая световой луч фотодатчика 6. Начальное угловое отклонение  $\alpha_0$  нужно брать как можно меньше, однако его нельзя сделать сколь угодно малым – необходимо, чтобы за  $10 \div 20$  периодов колебаний они ещё не затухали настолько, что световой луч датчика перестанет периодически прерываться колеблющимся стержнем.

– Нажмите и отпустите кнопку «СБРОС». Проверьте визуально работу секундомера и счётчика числа колебаний, который должен срабатывать на каждое второе пересечение луча фотодатчика. После отсчета  $10 \div 20$  колебаний остановите измерения нажатием кнопки «СТОП».

– Повторите опыты при различных углах отклонения  $\alpha_0$  и подберите такой угол, при дальнейшем уменьшении которого период колебаний не изменяется. В дальнейших измерениях следует придерживаться этого угла.

#### 5.4.2.2 Основные измерения.

– Подготовьте таблицу для записи результатов измерений, предусмотрев колонки для записи:

1) номера  $i$  кольцевой проточки, напротив которого установлена призма подвеса;

2) расстояния  $a_i$  от точки подвеса до центра масс;

3) 3-х измерений времени  $t_i$  10 периодов колебаний и среднего значения  $\langle t_i \rangle$ ;

- 4) периода  $T_i$  колебаний;  
 Число необходимых измерений – 25.

Таблица 5.1.

**Результаты измерений периода колебаний  
 физического маятника**

№	$i$	$a_i, \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$\langle t \rangle, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$
1							
2							
...							

– Перемещая призму подвеса последовательно на одну проточку (10 мм), двигаясь к центру масс, проведите измерения времени 10 периодов колебаний маятника по 3 раза для каждого положения призмы подвеса. Занесите результаты в таблицу 5.1. Кронштейн 5 также надо перемещать вверх так, чтобы нижний конец стержня пересекал луч фотодатчика.

**5.5 Математическая обработка результатов измерений**

5.5.1 По средним значениям  $\langle t_i \rangle$  определите период колебаний  $T_i$  и занесите эти значения в таблицу 5.1.

5.5.2 Постройте график зависимости периода колебаний  $T_i$  от расстояния  $a_i$  между точкой подвеса и центром масс, используя все экспериментальные точки.

5.5.3 Постройте в более крупном масштабе (увеличив масштаб  $T$  в 20÷50 раз) отдельно область зависимости  $T = f(a)$ , в которой одному и тому же периоду  $T_i$  отвечают два значения величины  $a_i$ .

5.5.4 Проведя 5÷6 горизонтальных прямых, найдите значения  $a_{1i}$  и  $a_{2i}$ , соответствующие точкам пересечения этих прямых с графиком  $T = f(a)$  и определите приведённые длины  $l_{0i} = a_{1i} + a_{2i}$  для каждого значения  $T_i$ . Данные занесите в таблицу 5.2.

Таблица 5.2.

**Вычисление ускорения свободного падения**

$T,$ $c$	$a_1,$ $m$	$a_2,$ $m$	$l_0,$ $m$	$g_s,$ $m/c^2$	$\langle g \rangle_s,$ $m/c^2$	$\Delta g, m/c^2$	$\Delta g_s^2,$ $m^2/c^4$

5.5.5 Подставив полученные значения  $l_{0i}$  и  $T_i$  в формулу (5.15), найдите экспериментальные значения ускорения свободного падения.

5.5.6 Определите среднее значение  $\langle g \rangle$  и доверительный интервал  $\Delta g$  по методу прямых измерений для заданной доверительной вероятности.

5.5.7 Сравните полученное значение с табличным для города Алматы ( $g = 9,804 m/c^2$ ).

5.5.8 Используя формулу для момента инерции тонкого стержня относительно оси вращения, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс:

$$I_C = \frac{ml^2}{12},$$

(где  $m$  – масса стержня, а  $l$  – его длина), рассчитайте по формулам (5.14) теоретическое значение минимального периода колебаний  $T_{мин}$  и соответствующее ему расстояние  $a^*$  от точки подвеса до центра масс; сравните их с полученными на графике.

**5.6 Вопросы для самопроверки**

5.6.1. Дайте определение физического и математического маятников.

5.6.2. Как выглядят кривые зависимости периода колебаний от расстояния  $a$  между точкой подвеса и центром масс для математического и физического маятников, изображенные на одном и том же графике? Объясните, почему именно так?

5.6.3. Каков физический смысл термина "приведенная длина физического маятника"?

5.6.4. Каким образом может влиять масса и форма подвеса маятника на его движение? Приведет ли учет наличия подвеса к увеличению или уменьшению периода колебаний?

5.6.5. Объясните, почему кривая зависимости периода  $T$  колебаний от величины  $a$  на рис.5.2. симметрична относительно центра масс, хотя сам физический маятник такой симметрией может и не обладать?

### 5.7 Литература

5.7.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

5.7.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

5.7.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

5.7.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

5.7.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

5.7.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

5.7.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

### Приложение

Основным уравнением движения твердого тела, закрепленного в точке, является уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (\text{П1})$$

где  $\vec{L}$  – момент импульса тела относительно точки закрепления;

$\vec{M}$  – момент внешних сил относительно той же точки.

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеем:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (\text{П2})$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения;  
 $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости вращения.

Поэтому, подставляя (П2) в (П1), получим основное уравнение вращательного движения в следующем виде:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}. \quad (\text{П3})$$

Принимая во внимание, что, по определению,  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  есть угловое ускорение  $\vec{\beta}$ , уравнение (П3) запишем в виде:

$$I\vec{\beta} = \vec{M}.$$

Существует лишь одна сила (если пренебречь трением), создающая момент относительно оси вращения – это сила тяжести, приложенная к центру масс, поэтому

$$\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}], \quad (\text{П4})$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $O$ , расположенной на оси вращения, в центр масс тела (на рис. 5.1.  $|\vec{r}| = a$ ).

Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас в соответствии с правилом правого буравчика (правой руки), примененного для векторного произведения (П4).

Проекция  $M$  вектора  $\vec{M}$  на ось вращения равна:

$$M = -mga \sin \alpha. \quad (\text{П5})$$

Знак "минус" в выражении (П5) показывает, что эта проекция имеет отрицательное значение в соответствии с выбранным направлением углового перемещения при отклонении от положения равновесия.

Таким образом, уравнение (П3), записанное в проекции на ось вращения, примет вид:

$$I\beta = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mga \sin \alpha$$

или в других обозначениях:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0, \quad (\text{П6})$$

где  $\ddot{\alpha}$  – вторая производная по времени от угла поворота вокруг оси вращения (угловое ускорение);

$\omega_0^2 = \frac{mga}{I}$  – положительная постоянная.

Уравнение (П6) описывает колебания физического маятника вокруг неподвижной оси вращения.

## Лабораторная работа № 6

### ИЗУЧЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ БЕРНУЛЛИ

**6.1 Цель работы:** изучение закономерностей стационарного движения несжимаемой маловязкой жидкости по трубе переменного сечения, проверка применимости формулы Бернулли и исследование влияния сил вязкого трения на падение полного давления по длине канала.

#### 6.2 Краткое теоретическое введение

Движение жидкостей или газов называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости (или газа) называется потоком. В гидроаэромеханике жидкость и газ рассматривают как сплошную среду, непрерывно распределённую в пространстве, не вдаваясь в подробности молекулярного строения вещества.

Описание движения жидкости (или газа) можно сделать двумя способами. Можно проследить за движением каждой индивидуальной частицы жидкости, т.е. указать положение и скорость этой частицы в каждый момент времени. Этот способ описания движения жидкости называется методом *Лагранжа*.

Но можно поступить и иначе, как это сделал впервые *Л. Эйлер*. Можно указать величины и направления скоростей различных частиц жидкости, которые проходят через одну и ту же точку пространства в различные моменты времени.

Если задать величину и направления скоростей частиц во всем пространстве в данный момент времени, то мы получим *поле скоростей*. Тогда в каждой точке пространства будет указан вектор скорости той частицы жидкости, которая проходит через эту точку в данный момент времени. Течение называется *стационарным*, если скорость в каждой точке пространства не меняется со временем. Если вектор скорости жидкости зависит от координат и времени, т.е. если скорости частицы жидкости меняются в пространстве и во времени, то такое движение жидкости называется *нестационарным*. Если жидкость течёт слоями, не перемешиваясь, такое течение называется *ламинарным*. Если слои перемешиваются, те-

чение называется *турбулентным* или *вихревым*. Турбулентное течение всегда нестационарное.

В гидродинамике для удобства расчетов вводятся понятия *линии тока* и *трубки тока*.

Линия, касательная к которой в любой точке указывает направление скорости частицы жидкости, проходящей в рассматриваемый момент времени через точку касания, называется *линией тока*. При стационарном движении жидкости линия тока со временем не изменяется и совпадает с траекториями движения частиц жидкости. Линии тока в жидкости можно сделать видимыми, пустив в неё струю краски или подмешав какие-либо заметные взвешенные частицы.

В движущейся жидкости возьмем произвольный замкнутый контур  $C$  и через его точки проведем линии тока (рис. 6.1.).

Совокупность линий тока, проведенных через все точки контура  $C$ , образует трубчатую поверхность, называемую *трубкой тока*. Скорости частиц жидкости направлены по касательной к поверхности трубки тока, поэтому частицы жидкости не пересекают боковую поверхность. Трубка тока ведет себя как боковая поверхность жесткой трубки, внутри которой течет жидкость.

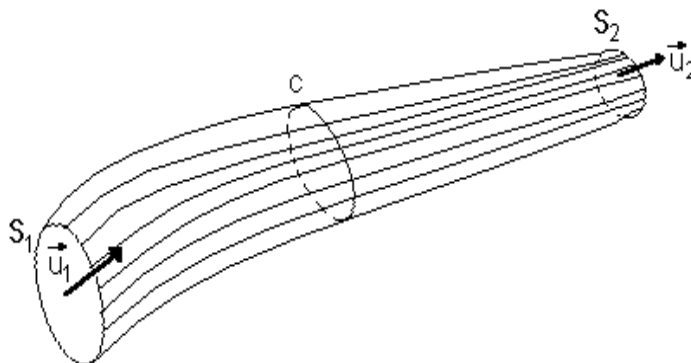


Рис. 6.1. Трубка тока

Если поперечное сечение трубки тока достаточно мало, то можно считать, что скорость жидкости одинакова по сечению и направлена вдоль оси трубки тока.

Масса жидкости, протекающая за время  $dt$  через поперечное сечение трубки, определяется выражением:



$$dm = \rho S u dt, \quad (6.1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  
 $S$  – площадь нормального сечения трубки тока;  
 $u$  – скорость течения жидкости.

В случае стационарного течения масса жидкости, протекающая в единицу времени через любые сечения данной трубки тока, будет одной и той же.

Если взять два сечения трубки, площади которых равны  $S_1$  и  $S_2$ , то можно написать:

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2. \quad (6.2)$$

Эта формула выражает один из основных законов гидродинамики – закон сохранения массы или уравнение неразрывности.

Если жидкость несжимаема, т.е.  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , то закон сохранения массы дает соотношение:

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad (6.3)$$

или

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (6.4)$$

Скорость течения жидкости в одной и той же трубке тока тем больше, чем уже поперечное сечение трубки.

Изучение движения реальных жидкостей и газов представляет сложную задачу. Для простоты рассматривают модель идеальной, т.е. невязкой жидкости, в которой пренебрегают силами внутреннего трения. Единственные силы, которые могут действовать на поверхность выделенного объёма идеальной жидкости – это силы нормального давления.

Рассмотрим стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Применим к этому течению закон сохранения механической энергии. При этом пренебрегаем тепло-

обменом, который может происходить между потоком жидкости и окружающей средой.

Выделим в жидкости узкую трубку тока и рассмотрим часть жидкости, занимающую объем  $MNDC$  (рис. 6.2). За время  $\Delta t$  эта часть жидкости переместится на малое расстояние  $\Delta l_1$  и займет объем  $M_1N_1D_1C_1$ . Вычислим работу  $A$ , совершаемую силами давления при перемещении выделенного объема жидкости из положения  $MNDC$  в положение  $M_1N_1D_1C_1$ . При этом силы давления, действующие на боковую поверхность трубки тока перпендикулярно к перемещению, работы не совершают. На левое сечение трубки тока с площадью  $S_1$  действует давление  $p_1$ , и при перемещении сечения из положения  $MN$  в положение  $M_1N_1$  силы давления совершают положительную работу

$$A_1 = p_1 S_1 \Delta l_1 = p_1 S_1 u_1 \Delta t, \quad (6.5)$$

где  $\Delta l_1 = u_1 \Delta t$  – расстояние, на которое переместилось левое сечение за время  $\Delta t$ .

Силы давления  $p_2$ , действующие на сечение  $CD$ , направлены навстречу движению потока и при перемещении правого сечения с площадью  $S_2$  из положения  $CD$  в положение  $C_1D_1$  совершают отрицательную работу:

$$A_2 = -p_2 S_2 \Delta l_2 = -p_2 S_2 u_2 \Delta t. \quad (6.6)$$

Полная работа, совершаемая силами давления при перемещении выделенного объема жидкости в трубке тока из положения  $MNDC$  в положение  $M_1N_1D_1C_1$ , будет равна:

$$A = A_1 + A_2 = p_1 S_1 u_1 \Delta t - p_2 S_2 u_2 \Delta t. \quad (6.7)$$

По закону сохранения механической энергии эта работа должна быть равна приращению полной механической энергии  $\Delta E$  выделенной части жидкости за время перемещения:

$$A = \Delta E. \quad (6.8)$$

Так как мы рассматриваем стационарное движение жидкости, механическая энергия незаштрихованной части объёма жидкости не изменится. Поэтому  $\Delta E$  равно разности энергии жидкости в объёмах  $CDD_1C_1$  и  $MNN_1M_1$ , которые соответствуют массе жидкости, протекающей через сечение  $CD$  за время  $\Delta t$  :

$$\Delta m_2 = \rho u_2 S_2 \Delta t$$

и протекающей через сечение  $MN$  за то же время  $\Delta t$  :

$$\Delta m_1 = \rho u_1 S_1 \Delta t .$$

Механическая энергия массы  $m$  жидкости состоит из суммы ее кинетической энергии  $\frac{mu^2}{2}$  и потенциальной энергии в поле силы тяжести  $mgh$  . Следовательно, приращение механической энергии выделенного объёма жидкости равно:

$$\Delta E = \frac{\Delta m_2 u_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 - \left( \frac{\Delta m_1 u_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1 \right) . \quad (6.9)$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  – высоты центров масс  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$  , которые отсчитываются от определенного начального уровня (рис. 6.2.).

На основании закона сохранения массы должно быть:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m ,$$

$$\rho u_1 S_1 \Delta t = \rho u_2 S_2 \Delta t = \rho u S \Delta t . \quad (6.10)$$

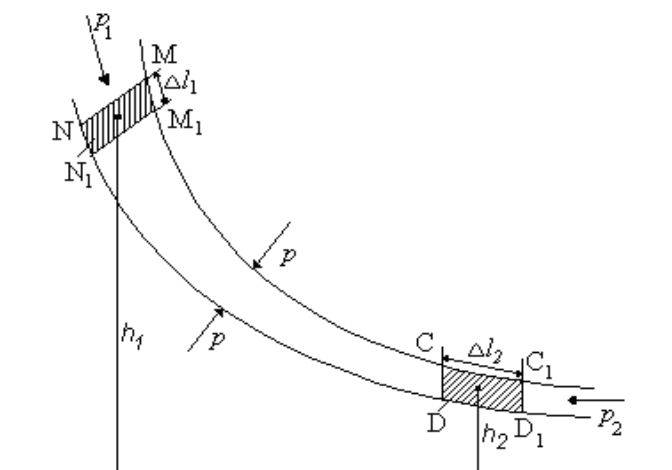
Подставляя значения  $A$  и  $\Delta E$  из (6.7) и (6.9) в (6.8), получим:

$$\Delta m_2 \left( \frac{u_2^2}{2} + g h_2 \right) - \Delta m_1 \left( \frac{u_1^2}{2} + g h_1 \right) = p_1 S_1 u_1 \Delta t - p_2 S_2 u_2 \Delta t . \quad (6.11)$$

Учитывая выражение (6.10), сокращая на  $\Delta t$  и перенося члены с одинаковыми индексами в одну сторону равенства, окончательно имеем:

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + \rho g h_2 . \quad (6.12)$$

Эта формула впервые была получена петербургским академиком Д. Бернулли в 1738 году и называется *уравнением Бернулли*.



**Рис. 6.2.** К выводу уравнения Бернулли

Формула (6.12) выведена нами для двух произвольных сечений трубки тока. Это возможно, если сумма трех величин, входящих в уравнение Бернулли, остается постоянной по всей длине трубки тока. Следовательно, для любого сечения трубки тока при стационарном течении идеальной жидкости выполняется равенство:

$$p + \frac{\rho u^2}{2} + \rho g h = const . \quad (6.13)$$

Первый член  $p$  называется *статическим* давлением, второй член  $\frac{\rho u^2}{2}$  называется *динамическим* давлением или *динамическим напором*, третий член  $\rho g h$  называется *нивелирным* давлением.

Уравнение Бернулли можно рассматривать как закон сохранения механической энергии в движущейся жидкости или газе.

Если жидкость движется по горизонтальному каналу, то нивелирное давление не изменяется и уравнение Бернулли имеет вид:

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2}. \quad (6.14)$$

Таким образом, при движении жидкости по горизонтальной трубке сумма статического и динамического давлений сохраняет постоянное значение для любого сечения трубки тока. При движении идеальной жидкости трубку тока можно заменить трубкой из твердого материала. Следовательно, для идеальной жидкости, движущейся в трубке переменного сечения, уравнение Бернулли также справедливо. Однако при движении реальной (вязкой) жидкости в трубке появляются силы вязкого трения, действующие со стороны стенок трубы на поток жидкости. Поэтому при движении вязкой жидкости полное давление по длине трубы будет уменьшаться. Только для маловязких жидкостей (вода, бензин и др.) и на небольших участках длины трубопровода можно приближенно считать справедливым уравнение Бернулли.

На основании уравнения неразрывности (6.3) и уравнения (6.14) приходим к выводу о том, что при движении жидкости по трубе переменного сечения жидкость течет медленно в широких сечениях и быстро в узких сечениях, а статическое давление жидкости, действующее на стенку трубы, больше в широком сечении и меньше в узком сечении трубопровода.

### 6.3 Описание установки и порядок выполнения работы

6.3.1 Схема лабораторной установки показана на рис. 6.3 (а). Она состоит из бака 1, обеспечивающего постоянство уровня налитой в бак жидкости; трубки переменного сечения 2; блока кранов 3, который служит для регулировки расхода жидкости по трубке 2 и

для изменения направления течения по этой трубке; батареи манометров 4 для измерения статических давлений в трех поперечных сечениях трубки и мерной колбы 5, служащей для измерения расхода жидкости по трубке 2.

Схема блока кранов приведена на рис. 6.3 (б). При повороте ручки 6 блока против часовой стрелки до предельного положения жидкость течёт по трубке 2 слева направо. Поворот ручки в другую сторону меняет направление течения на противоположное.

Нижняя ручка 7 блока кранов предназначена для регулирования расхода жидкости.

Диаметры сечений, в которых производится измерение статического давления жидкости, указаны на рис. 6.4. Нумерация сечений трубки производится согласно направлению течения жидкости в трубке 2. Так, если течение направлено от максимального сечения к минимальному, то

$d_1 = 12,0 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 4,0 \text{ мм}$ ,  $d_3 = 6,0 \text{ мм}$ . При противоположном направлении  $d_1 = 6,0 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 4,0 \text{ мм}$ ,  $d_3 = 12,0 \text{ мм}$ . Опыты начинают при течении в трубке от максимального сечения к минимальному.

6.3.2 Приступая к выполнению работы, откройте кран 8 водопровода и наберите воду в бак 1. При этом кран 7 должен находиться в закрытом состоянии. Когда уровень воды в баке достигнет кромки сливной воронки, установленной внутри бака, вода начнет выливаться через сливную трубку 9. После этого постепенно поворачивайте ручку крана 7, чтобы высота жидкости в средней манометрической трубке находилась в пределах  $50 \div 100 \text{ мм}$  шкалы. Кран 7 отрегулируйте так, чтобы вода вытекала также из сливного шланга 9 в раковину, и поплавков 10 находился на постоянной высоте, соответствующей нижней метке на его штоке. При выполнении этих условий движение жидкости в трубке переменного сечения будет стационарным, и уровни жидкостей в манометрических трубках не будут меняться со временем.

Перед началом опытов подготовьте таблицу 6.1 для записи результатов измерений.

6.3.3 Используя мерную колбу 5 и секундомер, определите время  $\tau$  истечения заданного объема воды  $Q$  и запишите показания манометрических трубок  $h_i$ . Опыт повторите  $3 \div 5$  раз (данные вне-

сите в таблицу 6.1) и определите среднее значение секундного расхода жидкости по формуле:

$$\langle q \rangle = \frac{Q}{\langle \tau \rangle}.$$

6.3.4 По среднему значению секундного расхода вычислите среднюю скорость течения воды в каждом сечении трубки по формуле:

$$u_i = \frac{\langle q \rangle}{S_i},$$

где  $S_i = \frac{\pi d_i^2}{4}$  – площади поперечных сечений трубки.

6.3.5 Статические давления в поперечных сечениях трубки переменного сечения определяются по высоте столба жидкости в манометрических трубках 4, отсчитываемой от оси трубки 2 переменного сечения:

$$p_i = \rho g h_i,$$

где индекс  $i = 1, 2, 3$  соответствует номерам поперечных сечений;

$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды;

$g = 9,804 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Если значение  $h_i$  подставим в метрах, то давление получим в Паскалях.

Таблица 6.1.

### Результаты измерений

№	$h_1,$ мм	$h_2,$ мм	$h_3,$ мм	$\tau_1,$ с	$\tau_2,$ с	$\tau_3,$ с	$\langle \tau \rangle,$ с	$q, \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$
1								
2								
3								

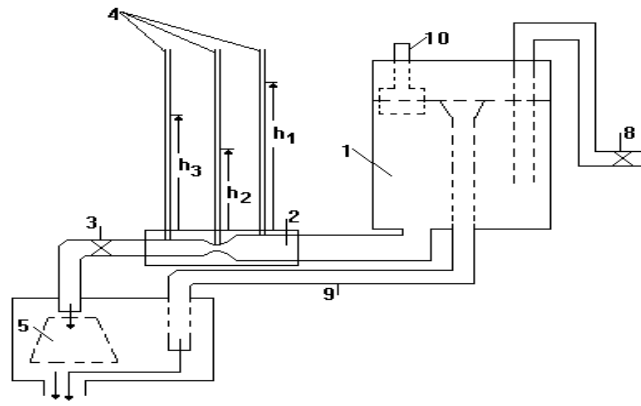


Рис. 6.3 (а). Схема лабораторной установки

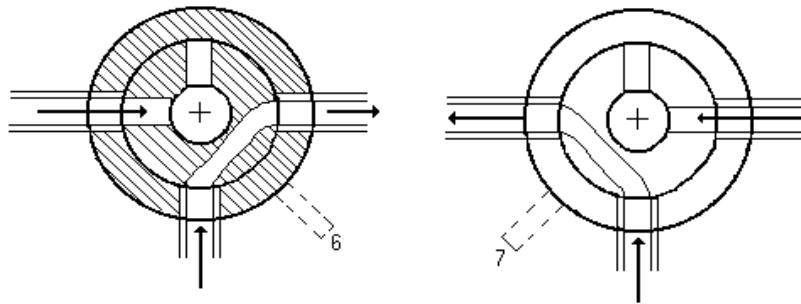
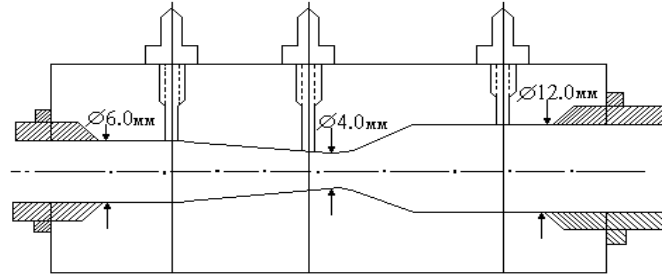


Рис. 6.3(б). Схема блока кранов



3-е сечение 2-е сечение 1-е сечение ←  $\vec{u}$  —  
 1-е сечение 2-е сечение 3-е сечение —  $\vec{u}$  →

Рис. 6.4. Канал переменного сечения



Таблица 6.2.

**Результаты вычислений для проверки  
уравнения Бернулли**

Режимы	$q, \frac{м^3}{с}$		1 сечение	2 сечение	3 сечение
1 режим		$h, мм$			
		$p, Па$			
		$u, м/с$			
		$\frac{\rho u^2}{2}, Па$			
		$p_n, Па$			
2 режим		$h, мм$			
		$p, Па$			
		$u, м/с$			
		$\frac{\rho u^2}{2}, Па$			
		$p_n, Па$			
3 режим		$h, мм$			
		$p, Па$			
		$u, м/с$			
		$\frac{\rho u^2}{2}, Па$			
		$p_n, Па$			

6.3.6 Для каждого сечения трубки вычислите динамический напор  $\frac{\rho u_i^2}{2}$ .

6.3.7 Вычислите для каждого сечения полное давление  $p_{ni} = p_i + \frac{\rho u_i^2}{2}$ . Результаты вычислений занесите в таблицу 6.2.

Сравните значения полного давления для трех сечений трубки 2, проверив тем самым применимость формулы Бернулли (6.14) для нашей установки.

6.3.8 Повторите упражнения п. 6.3.3-6.3.7 для двух других режимов течения жидкостей (с другими расходами жидкости).

6.3.9 Объясните полученные результаты.

#### **6.4 Вопросы для самопроверки**

6.4.1. Запишите и объясните физический смысл уравнения неразрывности и уравнения Бернулли.

6.4.2. Как измерить статическое давление движущейся жидкости в трубке?

6.4.3. Как найти среднюю скорость течения жидкости в сечении канала?

6.4.4. Если известна разность статических давлений в двух сечениях и диаметры этих сечений, можно ли по ним определить скорость течения жидкости в одном из этих сечений? Выведите формулу для расчета скорости для этого случая, используя уравнение Бернулли и уравнение неразрывности.

6.4.5. Какое давление измеряется с помощью манометрических трубок 4: абсолютное давление или избыточное над атмосферным давлением?

6.4.6. Вычислите давление столба воды высотой в 1 метр в Паскалях.

#### **6.5 Литература**

6.5.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

6.5.2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

6.5.3. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

#### **6.6 Задание на УИРС**

##### **6.6.1 Цель УИРС.**

По измерениям полного давления в сечениях трубки переменного сечения изучить зависимость гидравлического сопротивления конфузоров (сужающийся участок трубопровода) и диффузоров (расширяющийся участок трубопровода) от степени расширения и сужения площади сечения и числа Рейнольдса.

##### **6.6.2 Краткая теория.**

Как было указано в первой части работы, уравнение Бернулли строго справедливо только для движения идеальной жидкости. При движении вязкой жидкости часть энергии потока тратится на совершение работы против сил трения, вследствие чего полное давление потока уменьшается в направлении течения жидкости.

Поэтому вместо формулы (6.14) при движении жидкости по горизонтальной трубке переменного сечения уравнение Бернулли необходимо записать в виде:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} &= p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + \Delta p_{12} \\ p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} &= p_3 + \frac{\rho u_3^2}{2} + \Delta p_{23} \end{aligned}, \quad (6.15)$$

где  $\Delta p_{12}$  – потери полного давления между сечениями 1 и 2 за счет сопротивления;

$\Delta p_{23}$  – потери полного давления за счет сопротивления между сечениями 2 и 3 трубки переменного сечения.

Здесь считаем, что течение направлено от максимального сечения к минимальному.

Потери полного давления по длине канала зависят от многих причин. При движении вязкой жидкости по трубке постоянного сечения потери давления обусловлены только силами трения на стенках канала. При движении жидкости в сужающемся канале (конфузор) потери также обусловлены, в основном, вязким трением. При движении жидкости в расширяющемся участке трубы (диффузор) потери полного давления обусловлены не только вязким трением, но потерей энергии на образование хаотического вихревого (турбулентного) движения жидкости в результате частичного отрыва потока от стенок канала (образования области вихревого течения). Причем область вихревого течения и его интенсивность будет тем больше, чем больше степень расширения диффузора

$$n_d = \frac{S_{вых}}{S_{вх}}, \quad (S_{вых} > S_{вх}),$$

где  $S_{вых}$  и  $S_{вх}$  – площади поперечных сечений на выходе и на входе диффузора.

Сопротивление конфузора зависит в основном от площади его боковой поверхности и очень слабо от степени сужения:

$$n_K = \frac{S_{\text{вх}}}{S_{\text{вых}}}, \quad (S_{\text{вх}} > S_{\text{вых}}).$$

В гидродинамике принято выражать сопротивление диффузоров и конфузоров через их гидравлические коэффициенты сопротивлений и скоростной напор потока в узком сечении:

$$\Delta p_K = \xi_K \frac{\rho u_{\text{узк}}^2}{2}, \quad (6.16)$$

$$\Delta p_D = \xi_D \frac{\rho u_{\text{узк}}^2}{2}, \quad (6.17)$$

где  $\xi_K$  и  $\xi_D$  – гидравлические коэффициенты сопротивления конфузора и диффузора;

$u_{\text{узк}}$  – средняя скорость потока в узком сечении канала переменного сечения.

Для наших опытов на установке, если течение направлено от 1-го сечения к 3-му, то участок трубы между сечениями 1 и 2 соответствует конфузорному течению, а участок трубы между сечениями 2 и 3 – диффузорному.

Тогда с учетом (6.16) и (6.17) из формулы (6.15) получим:

$$\Delta p_{12} = \xi_K \frac{\rho u_2^2}{2} = p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} - p_2 - \frac{\rho u_2^2}{2}, \quad (6.18)$$

$$\Delta p_{23} = \xi_D \frac{\rho u_2^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} - p_3 - \frac{\rho u_3^2}{2}. \quad (6.19)$$

Введя обозначения полных давлений

$$p_{1n} = p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2}; \quad p_{2n} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2}; \quad p_{3n} = p_3 + \frac{\rho u_3^2}{2}, \quad (6.20)$$

из (6.18) и (6.19) найдем коэффициенты гидравлического сопротивления конфузора:

$$\xi_K = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\rho u_2^2 / 2} \quad (6.21)$$

и диффузора:

$$\xi_D = \frac{P_{2n} - P_{3n}}{\rho u_2^2 / 2}. \quad (6.22)$$

В общем случае  $\xi_K$  и  $\xi_D$  зависят от числа Рейнольдса (определяющего режим течения) и степени сужения (конфузор) или расширения (диффузор). В данной работе предлагается исследовать эту зависимость.

#### 6.6.3 Порядок выполнения работы.

6.6.3.1 Для определения гидравлического коэффициента сопротивления конфузора  $\xi_{K1}$  и диффузора  $\xi_{D1}$  в зависимости от числа Рейнольдса при движении жидкости от сечения 1 в сторону сечения 3 трубки переменного сечения необходимо использовать данные опытов при выполнении первой части работы согласно пп.6.4.1-6.4.3. При этом степень сужения конфузора  $n_{K1} = 9,00$ ; степень расширения диффузора  $n_{D1} = 2,25$ .

6.6.3.2 С помощью блока кранов поменяйте направление течения жидкости по трубке переменного сечения в противоположную сторону и повторите эксперимент, указанный в пп.6.4.1-6.4.3. Здесь индексы 1, 2, 3 соответствуют сечениям  $d_1 = 6,0 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 4,0 \text{ мм}$ ,  $d_3 = 12,0 \text{ мм}$ . Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 6.3.

6.6.3.3 Вычислите по данным п. 6.6.3.2 гидравлические коэффициенты сопротивления:

$$\xi_{K2} = \frac{p'_{1n} - p'_{2n}}{\rho u_2'^2 / 2} \quad \text{и} \quad \xi_{D2} = \frac{p'_{2n} - p'_{3n}}{\rho u_2'^2 / 2}.$$

Здесь степень расширения диффузора  $n_{д2} = 9.00$ ; степень сужения конфузора  $n_{к2} = 2.25$ .

Результаты вычислений из пунктов 6.6.3.1-6.6.3.3 занесите в таблицу 6.3.

6.6.3.4 По данным опыта постройте на одном рисунке графики зависимости

$$\xi_K = f(n_K, Re), \xi_D = f(n_D, Re)$$

и сделайте выводы.

Число Рейнольдса рассчитывается по диаметру и скорости узкого сечения  $u_2$ .

Таблица 6.3

### Результаты вычислений

Ре- жим	Конфузор			Диффузор		
	$n = \frac{S_1}{S_2}$	$\xi_K = \frac{P_{1П} - P_{2П}}{\rho u_2^2 / 2}$	$Re = \frac{\rho u_2 d_2}{\eta}$	$n = \frac{S_2}{S_3}$	$\xi_D = \frac{P_{2П} - P_{3П}}{\rho u_2^2 / 2}$	$Re = \frac{\rho u_2 d_2}{\eta}$
1						
2						
3						
4						
5						

### 6.7.4 Литература для УИРС

6.7.4.1. Повх И.Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. – Л.: Машиностроение, 1974.

6.7.4.2. Яблонский В.С. Краткий курс технической гидромеханики. – М.: Физматгиз, 1961.

## Лабораторная работа № 7

### НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК

**7.1 Цель работы:** ознакомиться с проявлением сил трения при качении тел; определить экспериментально коэффициент момента силы трения качения для пар шарик – плоскость, изготовленных из разных материалов.

#### 7.2 Краткое теоретическое введение

В технике особое внимание уделяется силам, возникающим при качении цилиндра (колеса) или шара по плоскости. Эти силы, называемые силами трения, можно разделить на три рода: собственно трение качения, трение скольжения и трение покоя (или трение сцепления). Последний род сил – трение покоя (или сцепления) – отличается от двух других тем, что не связан с обязательным переходом механической энергии в тепло.

Сила трения скольжения возникает при поступательном движении (проскальзывании) тела относительно плоскости. Работа этой силы, направленной против вектора относительной скорости, всегда отрицательна и приводит к переходу механической энергии в тепло.

Однако, как показывает опыт, качение цилиндра (шара) по плоскости без скольжения также сопровождается потерями механической энергии. Эти потери обусловлены работой силы трения качения. При качении цилиндр (шар) плоскость деформируются под действием сил нормального давления. Если эти деформации упругие, то силы взаимодействия между телом и плоскостью будут совершенно симметричны относительно вертикальной плоскости  $AB$ , проходящей через ось цилиндра. Тогда результирующая всех сил упругой деформации поверхности соприкосновения будет направлена вертикально, и момент этих сил относительно оси цилиндра будет равен нулю (рис.7.1). Никаких сил трения качения в этом случае не возникает.

В случае неупругих деформаций (как это всегда бывает на практике), силы, действующие на цилиндр со стороны поверхности соприкосновения, уже не будут симметричны относительно плоскости  $AB$  ввиду остаточных деформаций (рис.7.2). Поэтому равно-

действующая этих сил обязательно имеет горизонтальную составляющую, направленную против движения. Момент этих сил относительно оси цилиндра не равен нулю и приводит к замедлению вращательного движения.

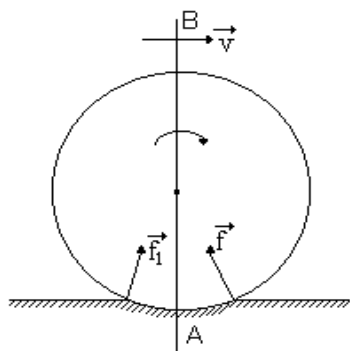


Рис. 7.1.

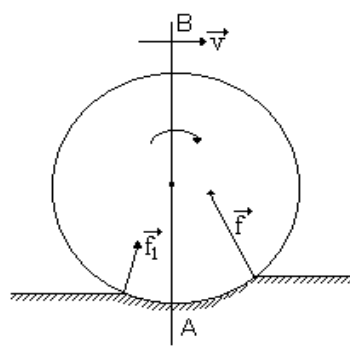


Рис. 7.2.

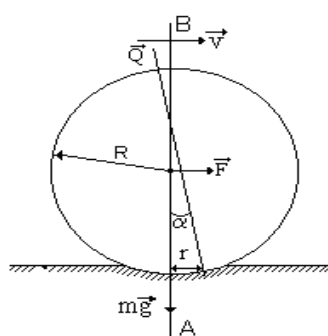


Рис. 7.3.

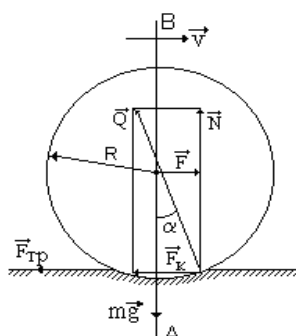


Рис. 7.4.

Из характера замедленного (как поступательного, так и вращательного) движения цилиндра по горизонтальной плоскости можно сделать вывод, что равнодействующая  $\vec{Q}$  сил деформации, приложенных к цилиндру, должна иметь горизонтальную составляющую  $\vec{F}_k$ , направленную назад. Кроме того, точка приложения этой силы должна находиться впереди плоскости  $AB$  (рис.7.3), причем линия



действия силы  $\vec{Q}$  должна проходить выше оси цилиндра, в противном случае момент этой силы относительно оси приводил бы к ускорению вращательного движения, что в данном случае невозможно. Горизонтальная компонента силы  $\vec{Q}$  представляет собой силу трения качения  $\vec{F}_k$ , которая замедляет (если нет других внешних сил) поступательное движение центра масс цилиндра.

Обычно связь между силой трения качения  $\vec{F}_k$  и другими величинами определяют опытным путем.

Предположим, что к оси цилиндра, катящегося по горизонтальной плоскости без проскальзывания (рис.7.4), приложена внешняя горизонтальная сила  $\vec{F}$ , уравновешивающая силу трения качения  $\vec{F}_k$ :  $\vec{F} + \vec{F}_k = 0$ . Движение цилиндра в этом случае, как поступательное, так и вращательное, будет происходить равномерно, без ускорений. Это возможно лишь тогда, когда сумма всех внешних сил равна нулю и сумма моментов всех этих сил также равна нулю.

Условие равенства нулю равнодействующей всех внешних сил:

$$\vec{Q} + m\vec{g} + \vec{F} = 0; \quad (7.1)$$

для компонент можно записать так:

$$Q \cdot \cos \alpha = mg, \quad (7.2)$$

$$Q \cdot \sin \alpha = F_k, \quad (7.3)$$

где  $\alpha$  – угол наклона вектора силы  $Q$  к вертикали;

$F_k$  – сила трения качения.

Дополним уравнения (7.2), (7.3) условием равенства нулю момента внешних сил относительно оси цилиндра:

$$RF_k = rQ \cos \alpha, \quad (7.4)$$

где  $R$  – радиус цилиндра;

$r$  – расстояние от точки приложения силы  $Q$  до вертикальной плоскости  $AB$ , проходящей через ось цилиндра.

Силы  $\vec{F}$  и  $m\vec{g}$  не создают момента относительно оси цилиндра и поэтому в равенстве (7.4) отсутствуют.

Учитывая малость деформаций,

$$\text{при } r \ll R \text{ и } \sin \alpha \approx |r/R \ll 1| \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1,$$

равенства (7.2) – (7.4) можно записать так:

$$Q = mg, \quad Q \cdot \alpha = F_k, \quad F_k \cdot R = r \cdot Q,$$

откуда

$$F_k = Q \cdot r/R = m \cdot g \cdot r/R. \quad (7.5)$$

Обычно в таблицах дают значения величины  $r$  и говорят не о силе трения качения  $F_k$  (7.5), а о моменте силы трения качения:

$$M = F_k R = N \cdot r. \quad (7.6)$$

Здесь  $M$  – момент силы трения качения, который равен произведению силы нормального давления  $N$  на  $r$ .

В данном случае  $N = Q = mg$ .

Величину  $r$  называют коэффициентом момента силы трения качения. Обратите внимание, что  $r$  имеет размерность длины!

Опыты показывают, что величина  $r$  в известных пределах практически не зависит от скорости и радиуса цилиндра, а определяется материалами, из которых изготовлены цилиндр и плоскость.

Зная  $r$  для данной пары материалов, всегда можно определить силу трения качения:

$$F_k = r \cdot N/R \quad (7.7)$$

по известному радиусу  $R$  цилиндра и силе  $N$  нормального давления на плоскость.

Рассмотрим теперь один из методов экспериментального определения коэффициента момента силы трения качения.

Пусть на катящийся по плоскости без проскальзывания шар (рис. 7.4) действует внешняя потенциальная сила  $\vec{F}$ , направленная параллельно плоскости. Запишем систему уравнений движения шара:

$$ma = F - F_k, \quad (7.8)$$

$$I\beta = F_k R - rN. \quad (7.9)$$

Здесь  $m$  – масса шара;  
 $R$  – радиус шара;  
 $I$  – момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс;  
 $a$  – ускорение поступательного движения шара;  
 $\beta$  – угловое ускорение вращения вокруг центра масс;  
 $F_k$  – горизонтальная составляющая силы реакции опоры (сила трения качения);  
 $N$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры;  
 $r$  – коэффициент момента силы трения качения.

Уравнение (7.8) – это второй закон Ньютона для поступательного движения шара, а (7.9) – уравнение для вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

К системе уравнений (7.8) – (7.9) необходимо добавить условие отсутствия проскальзывания шара относительно поверхности:

$$v = \omega R, \quad (7.10)$$

где  $v$  – скорость движения центра масс шара;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения шара.

Отсюда следует связь для ускорений:

$$a = \beta R. \quad (7.11)$$

Используя эту формулу, в системе уравнений (7.8) – (7.9) можно исключить угловое ускорение  $\beta$ :

$$ma = F - F_k, \quad (7.12)$$

$$\gamma ma = F_k - N \cdot (r/R). \quad (7.13)$$

Здесь  $\gamma = I/(mR^2)$ .

Складывая уравнения (7.12) и (7.13), получим:

$$m(1 + \gamma) \frac{dv}{dt} = F - N \frac{r}{R}. \quad (7.14)$$

Здесь мы записали ускорение  $a$  как производную по времени от скорости  $v$  центра масс шара.

Умножим последнее уравнение на  $v$ , тогда после преобразований получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + U \right) = -Nv \left( \frac{r}{R} \right) = -\frac{r}{R} N \frac{dx}{dt}. \quad (7.15)$$

Здесь учтено, что

$$mv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right), \quad \gamma m \frac{v^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad dU = -Fdx,$$

$U$  – потенциальная энергия шара в поле консервативной силы  $F$ .

Выражение, стоящее под знаком производной по времени в формуле (7.15), представляет собой механическую энергию шара, включающую кинетическую энергию поступательного движения

$$E_{kn} = \frac{mv^2}{2},$$

кинетическую энергию вращения

$$E_{kв} = \frac{I\omega^2}{2}$$

и потенциальную энергию шара в поле консервативной силы  $F$ :

$$U = -\int F \cdot dx.$$

Правая часть (7.15) представляет собой мощность, развиваемую силой трения качения.

Таким образом, можно записать, что изменение полной механической энергии шара равно работе сил трения:

$$\Delta E = -(r/R)NS. \quad (7.16)$$

Здесь  $S$  – пройденный шаром путь.

Последнюю полученную формулу (7.16) можно использовать для экспериментального определения коэффициента момента силы трения качения  $r$ .

Полную механическую энергию шара в установке с наклонным маятником можно записать через угол  $\varphi$  максимального отклонения от положения равновесия следующим образом:

$$E = mgl(1 - \cos \varphi) \cos \varepsilon, \quad (7.17)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;

$l$  – длина нити подвеса;

$\varepsilon$  – угол наклона плоскости маятника к вертикали.

Выражение (7.17) представляет собой максимальную потенциальную энергию маятника в поле силы тяжести.

Используя тригонометрические формулы и условие малых углов отклонения маятника от положения равновесия ( $\varphi \ll 1$ ), выражение (7.17) можно преобразовать к виду:

$$E = 2mgl \sin^2(\varphi/2) \cdot \cos \varepsilon \approx mgl(\varphi^2/2) \cdot \cos \varepsilon. \quad (7.18)$$

Пусть маятник совершил  $n$  полных колебаний. Сила трения качения при этом совершит работу:

$$A = -(r/R)mgS \sin \varepsilon = (r/R) \frac{\varphi_k + \varphi_n}{2} 4ln \cdot \sin \varepsilon, \quad (7.19)$$

где  $S = \frac{\varphi_k + \varphi_n}{2} 4ln$  – полный путь, пройденный маятником за  $n$  периодов.

Амплитуда колебаний маятника изменится за это время от начального угла  $\varphi_n$  до конечного  $\varphi_k$ .

Формулу (7.16) теперь можно записать в виде:

$$mgl \frac{\varphi_k^2 + \varphi_n^2}{2} \cos \varepsilon = -2 \frac{r}{R} nl(\varphi_k + \varphi_n) \sin \varepsilon.$$

Отсюда после математических преобразований можно получить окончательное выражение для расчета коэффициента  $r$  момента силы трения качения по известным значениям начального  $\varphi_n$  и конечного  $\varphi_k$  углов отклонения маятника и числа полных колебаний  $n$ :

$$r = R \frac{\varphi_n - \varphi_k}{4n} \operatorname{ctg} \varepsilon. \quad (7.20)$$

### 7.3 Описание экспериментальной установки

Общий вид установки "Наклонный маятник FPM-07" изображен на рис. 7.5.

К основанию 2, оснащеному четырьмя ножками с регулируемой высотой, прикреплен электронный секундомер 1, измеряющий количество и время колебаний. В основании закреплена труба 3, на которой смонтирован корпус 4 с червячной передачей. Червячная передача соединена с кронштейном 5, на котором закреплены шкала 6 и шкала 7. В кронштейне закреплена колонка 8, на которой подвешен на нити шар с водилкой 9. В кронштейн 5 по направляющим вставляются пластины 10 из разных материалов.

Для наклона маятника используется вороток 11. На кронштейне 5 закреплён фотоэлектрический датчик 12. Для замены шара его необходимо свинтить с водилки и навинтить новый.

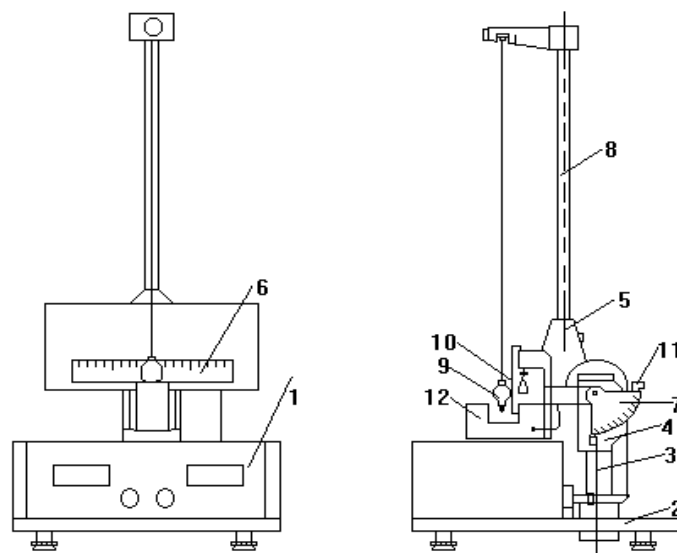


Рис. 7.5. Экспериментальная установка

## 7.4 Порядок выполнения работы

### 7.4.1 Экспериментальная часть.

#### 7.4.1.1 Подготовка к измерениям.

Для подготовки прибора к работе необходимо:

- проверить, подключено ли заземление;
- произвести горизонтальное выравнивание прибора так, чтобы при угле наклона маятника к вертикали  $\varepsilon = 0$  шар едва касался плоскости вставки 10, а положение нити маятника соответствовало нулевому делению на шкале 6;
- подключить прибор к питающей сети;
- нажать клавишу «СЕТЬ», проверить наличие свечения лампы фотоэлектрического датчика и высвечивание нулей на цифровых индикаторах числа колебаний и секундомера;
- проверить работу секундомера и счетчика колебаний, отклонив маятник на небольшой угол и запустив схему кнопкой «СБРОС» (останов счета – кнопка «СТОП»).

#### 7.4.1.2 Проведение измерений.

Установите угол наклона маятника к вертикали  $\varepsilon = 30^0$ .

Отклоните шар от положения равновесия на угол  $\varphi = 5^0 \div 10^0$  и отпустите его. Шар начнет совершать колебания около положения равновесия. Когда максимальное угловое отклонение окажется совпадающим с одной из линий шкалы 6, нажмите клавишу «СБРОС», одновременно отмечая угол начального отклонения по шкале 6.

Запишите это показание в таблицу 7.

Наблюдайте уменьшение амплитуды колебаний маятника на той же стороне шкалы 6, где был снят начальный отсчет. Когда максимальный угол отклонения уменьшится приблизительно в два раза, нажмите клавишу «СТОП» (желательно это сделать в тот момент, когда нить подвеса маятника при максимальном отклонении будет снова расположена прямо против одного из делений на шкале отсчета углов).

Запишите значение конечного угла отклонения маятника и число полных колебаний в таблицу 7. Повторите подобные измерения  $5 \div 7$  раз.

Проделайте предыдущие измерения для углов наклона маятника к вертикали  $\varepsilon = 45^0$  и  $\varepsilon = 60^0$ .

Занесите результаты измерений в таблицу 7.

Таблица 7.

**Результаты измерений и вычислений**  
**Радиус шара  $R = \dots м$**

$\varepsilon$	$\varphi_n$	$\varphi_k$	$n$	$r, м$	$\langle r \rangle, м$	$\Delta r, м$	$\Delta r^2, м^2$
$30^0$							
$45^0$							
$60^0$							



#### 7.4.2 Математическая обработка полученных результатов.

Из полученных данных для каждого опыта рассчитайте значение коэффициентов  $r$  момента силы трения по формуле (7.20).

Найдите среднее значение  $r$  и доверительный интервал по методу прямых измерений отдельно в каждой серии экспериментов для определенного угла наклона маятника к вертикали.

Какие выводы можно сделать из полученных результатов?

#### 7.5 Вопросы для самопроверки

7.5.1. Какие виды сил трения вам известны?

7.5.2. В чем основная особенность силы трения покоя?

7.5.3. Каков механизм силы трения качения?

7.5.4. Может ли сила трения (покоя, скольжения, качения) быть направленной по движению тела? Приведите примеры.

7.5.5. В каких случаях можно использовать закон сохранения механической энергии, несмотря на то, что присутствует сила трения?

7.5.6. Почему локомотивы (тепловозы, электровозы) делают массивными?

7.5.7. От чего зависит коэффициент момента силы трения качения?

7.5.8. Какие основные факторы могут ограничивать точность проведенного вами эксперимента?

#### 7.6 Литература

7.6.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

7.6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

7.6.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

7.6.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

7.6.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

7.6.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

7.6.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Лабораторная работа № 8

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

**8.1 Цель работы:** освоить экспериментальный метод определения моментов инерции тел относительно различных осей; ознакомиться с использованием понятий тензора инерции, эллипсоида инерции в теоретических расчетах.

#### 8.2 Краткое теоретическое введение

##### 8.2.1 Момент инерции.

Моментом инерции материальной точки относительно какой-либо оси называется величина, равная произведению ее массы  $m$  на квадрат расстояния  $R$  до этой оси:

$$I = m R^2. \quad (8.1)$$

Момент инерции механической системы относительно какой-либо оси определяется суммой моментов инерции материальных точек системы относительно этой оси:

$$I = \sum_i m_i R_i^2. \quad (8.2)$$

В твердых телах масса распределена непрерывно, поэтому сумму (8.2) необходимо заменить интегралом:

$$I = \int_m R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV, \quad (8.3)$$

где  $\rho$  – плотность материала твердого тела;  
 $V$  – объем тела.

Интегрирование должно производиться по всей массе или по всему объему твердого тела.

Как видно из (8.3), момент инерции механической системы зависит не просто от массы  $m$  системы, но *от распределения массы относительно выбранной оси*. Физический смысл момента инерции заключается в том, что он характеризует инертность тела к

изменению угловой скорости вращения. Таким образом, при вращательном движении момент инерции играет такую же роль, какую играет масса тела при поступательном движении.

Аналитическое вычисление интегралов типа (8.3) возможно лишь в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной геометрической формы такие интегралы могут быть найдены численными методами. Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, если использовать соображения подобия и симметрию, теорему Гюйгенса-Штейнера, понятие тензора инерции и т.д.

### 8.2.2 Тензор инерции.

Понятие тензора инерции можно ввести на основе следующего примера. Вычислим момент инерции твердого тела относительно произвольной оси  $AA'$  (рис. 8.1). Без ущерба для общности можно принять, что ось  $AA'$  проходит через начало координат. Разложим радиус-вектор  $\vec{r}$  элемента массы  $dm$  на составляющие  $\vec{d}$  вдоль оси  $AA'$  и  $\vec{R}$  перпендикулярно к ней:

$$\vec{r} = \vec{d} + \vec{R} .$$

Из определения (8.3) момента инерции получим:

$$I = \int R^2 dm = \int (r^2 - d^2) dm . \quad (8.4)$$

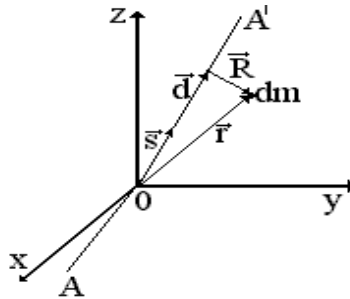


Рис. 8.1. К понятию тензора инерции

Пусть  $\vec{s}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $AA'$ , тогда

$$d = (\vec{r}, \vec{s}) = x \cdot s_x + y \cdot s_y + z \cdot s_z,$$

где  $s_x, s_y, s_z$  – декартовы компоненты единичного вектора, кроме того,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Учитывая эти соотношения, а также равенство

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1,$$

получим:

$$\begin{aligned} I &= \int (r^2 - d^2) dm = \int [x^2 + y^2 + z^2 - (xs_x + ys_y + zs_z)] dm = \\ &= I_{xx} s_x^2 + I_{yy} s_y^2 + I_{zz} s_z^2 + 2I_{xy} s_x s_y + 2I_{xz} s_x s_z + 2I_{yz} s_y s_z = \\ &= I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2I_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta + \\ &+ 2I_{xz} \cos \alpha \cdot \cos \gamma + 2I_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, образуемые осью  $AA'$  с декартовыми осями координат  $ox, oy, oz$ ;

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}; I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$  – постоянные, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm, & I_{xy} &= I_{yx} = -\int xy dm, \\ I_{yy} &= \int (x^2 + z^2) dm, & I_{xz} &= I_{zx} = -\int xz dm, \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm, & I_{yz} &= I_{zy} = -\int yz dm. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Совокупность девяти величин

$$I_{ij} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \quad (8.7)$$

образует тензор второго ранга и называется *тензором инерции* тела относительно точки  $O$ .

Как видно из (8.6), тензор инерции симметричен, т.е.  $I_{ij} = I_{ji}$  ( $i, j = x, y, z$ ), поэтому он полностью определяется заданием шести его компонент.

Выражение (8.5) можно записать в более компактной и симметричной форме:

$$I = \sum_i \sum_j I_{ij} s_i s_j. \quad (8.8)$$

Если для какой-либо координатной системы известны все шесть компонент тензора инерции, то по формуле (8.5) или (8.8) можно вычислить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через начало координат  $O$ . Именно этим определяется та важная роль, которую играет тензор инерции.

Рассмотрим конкретный пример. Выберем в качестве тела, для которого необходимо определить момент инерции, однородный параллелепипед со сторонами  $a, b, c$ .

Декартову систему координат ориентируем так, как показано на рис. 8.2.

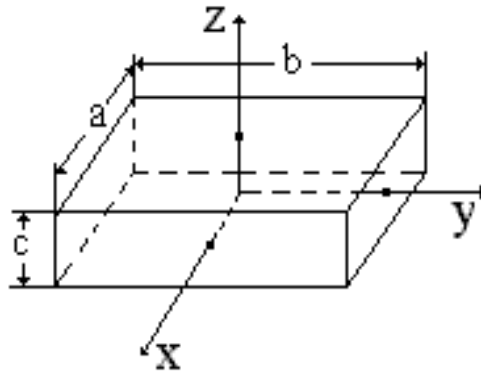


Рис. 8.2. Главные центральные оси инерции параллелепипеда

При таком выборе системы координат ее начало совпадает с центром масс параллелепипеда. Вычислим компоненты тензора

инерции в этой системе. Согласно формулам (8.6) имеем:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_V (y^2 + z^2) \rho \cdot dV = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx \cdot dy \cdot dz = \\
 &= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (y^2 + z^2) = \rho \cdot a \int_{-c/2}^{c/2} \left[ \frac{b^3}{12} + bz^2 \right] dz = \\
 &= \rho \cdot a \left[ \frac{b^3}{12} \cdot c + b \cdot \frac{c^3}{12} \right] = \frac{\rho(a \cdot b \cdot c)}{12} (b^2 + c^2) = \frac{m}{12} (b^2 + c^2). \quad (8.9)
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются и другие компоненты тензора (для их определения полезно воспользоваться симметрией). Они оказываются равными:

$$\begin{aligned}
 I_{yy} &= \frac{m}{12} (a^2 + c^2); & I_{zz} &= \frac{m}{12} (a^2 + b^2); \\
 I_{xy} &= I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0. \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

Теперь по формуле (8.5) можно вычислить момент инерции  $I$  параллелепипеда относительно любой оси, проходящей через начало координат  $O$ . При этом мы должны знать ориентацию этой оси относительно нашей системы координат, т.е. компоненты единичного вектора  $\vec{s}$ , направленного вдоль выбранной оси или, что им эквивалентно, косинусы направляющих углов  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Например, направим ось  $AA'$  через диаметрально противоположные вершины параллелепипеда (рис. 8.3.). Можно показать (используйте ваши знания тригонометрии), что

$$\begin{aligned}
 s_x &= \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\
 s_y &= \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\
 s_z &= \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (8.11)
 \end{aligned}$$

Теперь, согласно выражению (8.5), с учетом формул (8.9)-(8.11), получим:

$$\begin{aligned}
 I &= I_{xx} \cdot s_x^2 + I_{yy} \cdot s_y^2 + I_{zz} \cdot s_z^2 = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \\
 &+ \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \\
 &= \frac{m}{6} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (8.12)
 \end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить моменты инерции данного параллелепипеда относительно других осей.

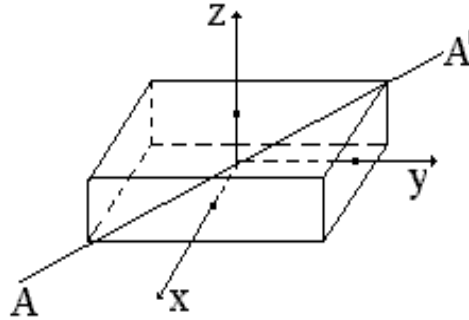


Рис. 8.3. К определению тензора инерции параллелепипеда

Параллелепипед с квадратным основанием и куб являются частными случаями рассмотренного нами параллелепипеда. Формулы для расчета моментов инерции таких тел упрощаются условиями  $a = b$  и  $a = b = c$  соответственно.

### 8.2.3 Эллипсоид инерции.

Формула (8.5) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Найдем уравнение поверхности, представляющей собой геометрическое место точек, расстояние которых от начала координат  $O$  определяется равенством  $r = 1/\sqrt{I}$ , где  $I$  – момент инерции твердого тела относительно оси, соединяющей начало координат с выбранной точкой поверхности.

Согласно построению, радиус-вектор произвольной точки по-

верхности определяются выражением  $\vec{r} = \frac{\vec{s}}{\sqrt{I}}$ , которое, с учетом уравнения (8.8), приводит к уравнению искомой поверхности:

$$\sum_i \sum_j I_{ij} \cdot r_i \cdot r_j = 1$$

или

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1. \quad (8.13)$$

Эта поверхность второго порядка является *эллипсоидом*. Она называется *эллипсоидом инерции* тела относительно точки  $O$ .

Если точка  $O$  совпадает с центром масс тела, соответствующий эллипсоид инерции называется *центральным*. Главные оси центрального эллипсоида инерции называют *главными центральными осями* самого тела. Если координатные оси направить вдоль главных осей эллипсоида инерции, недиагональные элементы тензора инерции обращаются в нуль и тензор приводится к диагональному виду. Эти координатные оси называются также *главными осями* тензора инерции. Они, очевидно, жестко связаны с телом. Точно так же жестко связан с твердым телом и его эллипсоид инерции.

Для динамики вращательного движения твердого тела существенна симметрия не самого тела, а симметрия соответствующего ему эллипсоида инерции. Все тела с одинаковыми эллипсоидами инерции динамически эквивалентны.

### 8.3 Описание экспериментальной установки и методика выполнения работы

Экспериментальная установка "Крутильный маятник FPM-05" представлена на рис. 8.4. Как видно из этого рисунка, на основании 2, оснащенном четырьмя ножками с регулируемой высотой, укреплен секундомер 1. В основании закреплена колонка 3, на которой при помощи прижимных винтов крепятся кронштейны 4, 5 и 6.

Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 7. На кронштейне 5 закреплена стальная плита 8, которая служит основанием фотоэлектрическому датчику 9, электромагниту 10 и угловой шкале 11. Электромагнит 10 может изменять положение на плите, и



стрелка, прикрепленная к электромагниту, указывает на шкале его положение по отношению к фотоэлектрическому датчику.

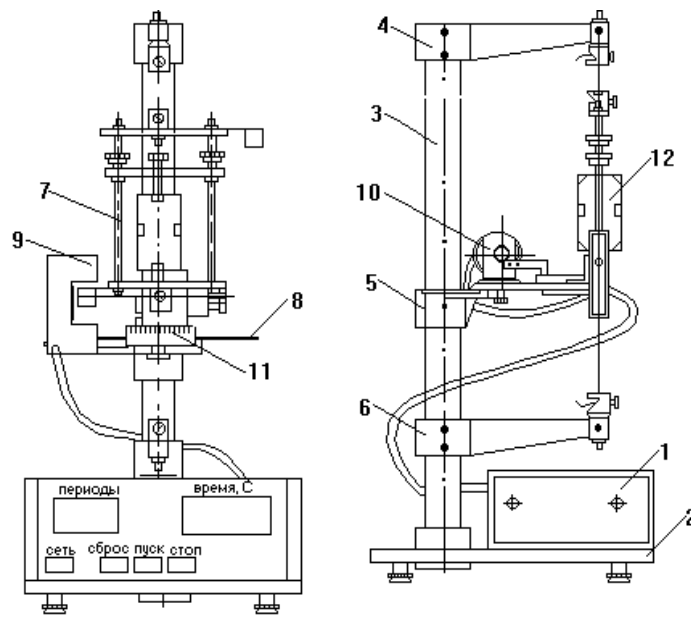


Рис. 8.4. Крутильный маятник

Конструкция рамки позволяет закреплять в ней твердые тела 12, отличающиеся друг от друга по внешним размерам. Тела крепятся при помощи подвижной балки, которая перемещается по направляющим между неподвижными стержнями. Подвижная балка фиксируется при помощи гаек на зажимных втулках, расположенных на ней.

Данная установка позволяет экспериментально определять моменты инерции различных тел методом крутильных колебаний. Суть этого метода заключается в следующем. Период колебаний  $T$  крутильного маятника с исследуемым телом определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{k}}, \quad (8.14)$$

где  $I' = I + I_p$ ;

$I_p$  – момент инерции пустой рамки маятника;  
 $I$  – момент инерции исследуемого тела относительно оси вращения маятника;  
 $k$  – модуль кручения проволоки, на которой подвешена рамка с телом.

Момент инерции  $I$  исследуемого тела можно определить из выражения:

$$I = \frac{k}{4\pi^2} \cdot T^2 - I_p, \quad (8.15)$$

если значения  $k$  и  $I_p$  нам известны.

Эти значения можно определить экспериментально, если воспользоваться набором параллелепипедов из комплекта установки.

В комплект тел для установки входят куб со стороной  $a$  и параллелепипед высотой  $2a$ , в основании которого лежит квадрат со стороной  $a$ . Этот параллелепипед можно представить состоящим из двух кубов со стороной  $a$ , поэтому момент инерции  $I_{nC}$  такого параллелепипеда относительно оси, проходящей через его центр масс и направленной перпендикулярно к плоскости большой грани, равен удвоенному моменту инерции  $I_k$  куба относительно оси, параллельной ребрам куба и отстоящей от центра масс на расстояние половины ребра  $a/2$ :

$$I_{nC} = 2 \cdot I_k = 2 \left[ I_{kC} + m \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right], \quad (8.16)$$

где  $I_{kC}$  – момент инерции куба относительно оси, проходящей через его центр масс;

$m$  – масса куба с ребром  $a$ .

Для вывода формулы (8.16) была использована теорема Гюйгенса-Штейнера, связывающая момент инерции  $I_C$  твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс, с моментом инерции  $I$  этого же тела относительно оси, параллельной предыдущей и отстоящей от нее на расстояние  $R$ :

$$I = I_C + mR^2. \quad (8.17)$$

Запишем теперь выражения для периодов колебаний крутильного маятника соответственно:

без дополнительных тел (пустая рамка):

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{k}}, \quad (8.18)$$

с кубом, ось вращения которого перпендикулярна граням:

$$T_k = 2\pi\sqrt{\left[\frac{(I_p + I_{kC})}{k}\right]}, \quad (8.19)$$

с параллелепипедом, ось вращения которого проходит через центр масс и параллельна большим граням:

$$T_n = 2\pi\sqrt{\left[\frac{(I_p + I_{nC})}{k}\right]}. \quad (8.20)$$

Если провести измерения указанных периодов колебаний  $T_p$ ,  $T_k$ ,  $T_n$  на экспериментальной установке, то, используя систему уравнений (8.16)-(8.20), можно определить искомые выражения для момента инерции свободной рамки  $I_p$  и модуля кручения  $k$  проволоки подвеса маятника:

$$I_p = \frac{ma^2}{2} \cdot \frac{T_p^2}{T_n^2 + T_p^2 - 2T_k^2}, \quad (8.21)$$

$$k = \frac{2\pi^2 ma^2}{T_n^2 + T_p^2 - 2T_k^2}. \quad (8.22)$$

Теперь для определения момента инерции  $I$  тела с помощью крутильного маятника достаточно измерить период  $T$  его колебаний с закрепленным в рамке телом и рассчитать момент инерции  $I$  тела по формуле:

$$I = \frac{ma^2}{2} \cdot \frac{T^2 - T_p^2}{T_n^2 + T_p^2 - 2T_k^2}. \quad (8.23)$$

## 8.4 Порядок выполнения работы

### 8.4.1 Экспериментальная часть.

#### 8.4.1.1 Подготовка установки к работе.

Для подготовки экспериментальной установки к измерениям необходимо:

- проверить, подключено ли заземление;
- произвести горизонтальное выравнивание установки с помощью регулировочных винтов;
- включить сетевой шнур установки в розетку питающей сети;
- нажать клавишу «СЕТЬ», проверить, все ли индикаторы высвечивают цифру ноль, а также светится ли лампочка фотоэлектрического датчика.

#### 8.4.1.2 Порядок выполнения работы.

Отпустите клавишу «ПУСК», поворачивая рамку, приблизьте ее стрелу к электромагниту таким образом, чтобы электромагнитная сила зафиксировала положение рамки.

Нажмите клавишу «СБРОС». Нажмите клавишу «ПУСК». Рамка начнет совершать колебания. После 9-ти периодов колебаний нажмите клавишу «СТОП». Результат измерения времени 10 колебаний занесите в таблицу 8.1. Повторите измерения 5 ÷ 7 раз.

Таблица 8.1.

### Результаты измерений и вычислений

№	$t, c$	$\langle t \rangle, c$	$T, c$	$I_{\text{экс}}, кг \cdot м^2$	$I_{\text{теор}}, кг \cdot м^2$
Пустая рамка					
Куб					
Параллелепипед, в основании квадрат					
Параллелепипед, в основании прямоугольник					

Проведите измерения времени 10 колебаний куба и параллелепипеда с квадратом в основании относительно осей вращения, указанных в разделе 8.3, для определения постоянных установки  $k$  и  $I_p$ .

Проведите измерения времени колебаний маятника с закрепленными в его рамке телами. Измерения проведите для всех тел относительно всех различных осей вращения по схеме, указанной для измерения времени колебаний пустой рамки. Результаты занесите в таблицу 8.1, где укажите также параметры тела, с которым в данный момент выполняется эксперимент, и ось, относительно которой происходят крутильные колебания.

### 8.5 Математическая обработка результатов измерений

8.5.1 Из данных измерений определите средние периоды  $\langle T_p \rangle$ ,  $\langle T_k \rangle$  и  $\langle T_n \rangle$  колебаний маятника соответственно без тела, с кубом и с параллелепипедом относительно осей, указанных ранее.

Эти значения понадобятся для расчета моментов инерции по формуле (8.23).

Оцените погрешность проведенных измерений для периодов колебаний по методу обработки результатов прямых измерений.

8.5.2 Для всех тел и осей вращения рассчитайте средние периоды  $\langle T \rangle$  колебаний крутильного маятника.

8.5.3 По формуле (8.23) рассчитайте соответствующие моменты инерции  $\langle I \rangle$ .

8.5.4 По формулам, приведенным в кратком теоретическом введении, рассчитайте теоретические значения моментов инерции тел относительно осей вращения, использованных в опытах.

Используйте параметры исследуемых тел, приведенные в таблице 8.2.

Сравните результаты теоретических расчетов с экспериментально полученными значениями.

Таблица 8.2.

Параметры исследуемых тел

	масса, г	Размеры		
		а, мм	б, мм	с, мм
Тело 1	1884	40	60	100
Тело 2	1962	50	50	100
Тело 3	980	50	50	50

8.5.5 Для системы координат, приведенной на рис. 8.2., рассчитайте компоненты тензора инерции исследуемых тел.

Попытайтесь качественно изобразить эллипсоиды инерции для этих тел.

### **8.6 Вопросы для самопроверки**

8.6.1. Какие свойства физического тела характеризует его момент инерции?

8.6.2. Имеет ли смысл говорить о моменте инерции, не указывая оси, относительно которой он вычисляется?

8.6.3. Какая величина называется тензором инерции физического тела относительно точки?

8.6.4. В чем заключается практическая польза понятия тензора инерции?

8.6.5. Что характеризует эллипсоид инерции абсолютно твердого тела? Могут ли существовать разные физические тела, обладающие одинаковыми эллипсоидами инерции и наоборот?

### **8.7 Литература**

8.7.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

8.7.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

8.7.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

8.7.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

8.7.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

8.7.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

8.7.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Лабораторная работа № 9

### ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА

**9.1 Цель работы:** на основе измерения времени соударения шаров, используя законы сохранения импульса и механической энергии, определить модуль Юнга материала шаров, максимальную силу удара, максимальное давление в контактном «пятячке», радиус контактного «пятячка» и максимальную радиальную деформацию шаров.

#### 9.2 Краткое теоретическое введение

##### 9.2.1 Центральное абсолютно упругое соударение шаров.

При центральном абсолютно упругом соударении шаров сохраняются суммарный импульс и суммарная кинетическая энергия шаров до и после соударения. Если обозначить массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , скорости до соударения  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , после соударения  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}'_2$ , то

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2, \quad (9.1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2. \quad (9.2)$$

Решая эту систему уравнений, можно найти скорости шаров после соударения:

$$\vec{v}'_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 - (m_2 - m_1)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad (9.3)$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 - (m_1 - m_2)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.4)$$

При столкновении двух шаров одинаковой массы ( $m_1 = m_2 = m$ ) шары обмениваются скоростями:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_2, \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_1.$$

В частном случае, если до удара второй шар покоился, то после соударения остановится первый шар, а второй будет двигаться со скоростью первого шара до соударения.

### 9.2.2 Скорость соударения шаров.

Скорость, с которой правый шар ударяет находящийся в покое левый, можно найти из закона сохранения механической энергии. Центр масс шара при отклонении подвеса на угол  $\alpha$  поднимается на высоту  $h$ .

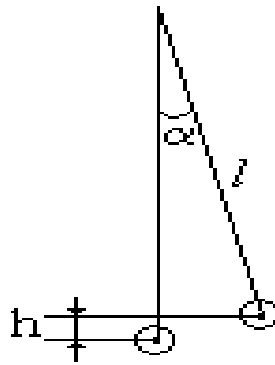


Рис. 9.1. К выводу формулы (9.5)

Из рис. 9.1 видно, что

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

При этом потенциальная энергия шара увеличивается на величину

$$E_n = mgh = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

которая переходит в его кинетическую энергию перед его соударением с неподвижным:

$$\frac{mv^2}{2} = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$



Отсюда найдем скорость шара:

$$v = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (9.5)$$

9.2.3 Зависимость времени соударения и силы удара шаров от свойств материала и размера шаров.

При упругом соударении двух шаров, начиная с момента их соприкосновения друг с другом, в местах соприкосновения происходят упругие деформации сжатия. Возникающие при этом силы упругости начинают уменьшать относительную скорость движения соударяющихся тел. В момент, когда относительная скорость сближения шаров уменьшится до нуля, сила упругой деформации тел достигнет наибольшего значения, что также соответствует наибольшему сближению центров шаров друг с другом и наибольшему значению площади соприкосновения шаров. При этом кинетическая энергия относительного движения шаров полностью переходит в энергию их упругой деформации.

После достижения наибольшего сближения шары, отталкиваясь друг от друга под действием силы упругой деформации, снова разлетаются в противоположные стороны со скоростями, определяемыми по формулам (9.3) и (9.4).

Для случая абсолютно упругого центрального соударения шаров, исходя из условия равенства кинетической энергии относительного движения до удара и потенциальной энергии упругих деформаций при наибольшем сближении шаров, А.Н. Динником получены следующие зависимости для определения параметров удара:

$$F = 1,2827 \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right)^3 \cdot v^6}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}}, \quad (9.6)$$

$$\delta = 1,2356 \sqrt[5]{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v^4}, \quad (9.7)$$

$$a = 0,9872 \sqrt[5]{\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right) \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)} \cdot v^2, \quad (9.8)$$

$$p_{\max} = 0,6285 \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^3 \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right) v^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^4}}, \quad (9.9)$$

$$t = 2,8662 \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right)^2}{v}}. \quad (9.10)$$

В этих формулах  $F$  – максимальная сила удара шаров в момент наибольшего сближения;  $\delta$  – абсолютное значение наибольшей линейной деформации шаров;  $a$  – радиус контактного круга «пятка» при наибольшей деформации;  $p_{\max}$  – максимальное давление в центре контактного круга;  $t$  – продолжительность соударения;  $R_1$  и  $R_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$  – радиусы и массы соударяющихся шаров;  $E_1$  и  $E_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов соударяющихся шаров;  $v$  – относительная скорость соударения шаров.

В случае, если шары изготовлены из одинакового материала и имеют одинаковые радиусы, формулы (9.6) □ (9.10) значительно упрощаются и приводятся к виду:

$$F = 7,705 \cdot \frac{\rho R^3 v}{t}, \quad (9.11)$$

$$\delta = 0,4308 \cdot v \cdot t, \quad (9.12)$$

$$a = 0,4122 \cdot \sqrt{v \cdot t \cdot R}, \quad (9.13)$$

$$p_{\max} = 21,66 \cdot \frac{\rho R^2}{t^2}, \quad (9.14)$$

$$t = 5,8432 R \cdot \sqrt[5]{\frac{(1 - \mu^2)^2 \rho^2}{E^2 \cdot \nu}}, \quad (9.15)$$

где  $\rho$  – плотность материала шара.

Значения коэффициента Пуассона для всех материалов лежат в интервале от 0 до 0,5; например, для стали  $\mu = 0,29$ .

Зная плотность  $\rho$  материала, радиусы  $R$  шаров, их относительную скорость  $\nu$  в момент удара, а также время  $t$  соударения шаров, из формулы (9.15) можно определить модуль Юнга для материала шаров:

$$E = 82,53 \cdot \sqrt{\frac{(1 - \mu^2)^2 \rho^2 R^5}{t^5 \nu}}. \quad (9.16)$$

Зная время соударения шаров, по формулам (9.11) □ (9.14) можно определить и все другие величины, характеризующие упругое взаимодействие шаров.

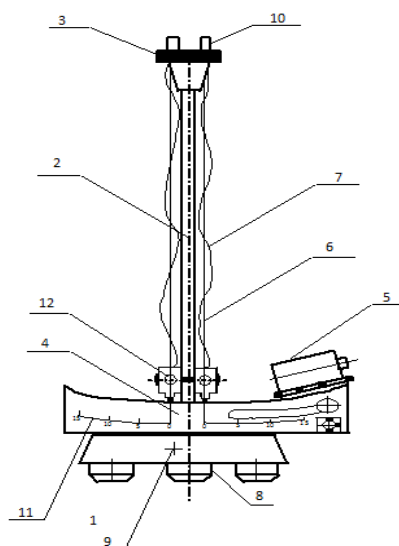
### 9.3 Описание установки и методика выполнения работы

#### 9.3.1 Экспериментальная установка.

Установка, представленная на рис. 9.1, включает в свой состав основание 1, вертикальную стойку 2, верхний кронштейн 3, корпус 4, электромагнит 5, нити 6 для подвески металлических шаров 12, провода 7 для обеспечения электрического контакта шаров с клеммами 10. Основание 1 снабжено тремя регулируемыми опорами 8 и винтом-барашком 9 для фиксации вертикальной стойки 2. Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы. На верхнем кронштейне 3, предназначенном для подвески шаров, расположены узлы регулировки, обеспечивающие их центральный удар, и клеммы 10. Корпус 4 предназначен для крепления шкалы 11 угловых перемещений. Электромагнит 5 предназначен для фиксации исходного положения одного из шаров 12. Металлические шары 12 выполнены попарно из алюминия, латуни и стали.

Для измерения времени соударения шаров используется электронный секундомер.

#### 9.3.2 Методика выполнения работы.



**Рис. 9.1.** Общий вид установки

### 9.3.2.1 Подготовка установки к измерениям.

- Вставьте шары в скобы подвесов.
- С помощью регулировочных опор выставьте основание 1 установки таким образом, чтобы нижние стрелки на скобах подвесов указывали на нули шкалы 11. Отрегулируйте положения шаров в вертикальной и горизонтальной плоскостях до совмещения между собой верхних стрелок на скобах подвесов. Регулировку производите изменением длины нитей подвесов шаров и изменением положения точек их крепления к кронштейну.
- Подключите клеммы 10 верхнего кронштейна и электромагнит 5 установки к электронному секундомеру при помощи кабелей.

### 9.3.2.2 Измерение времени соударения шаров.

- Включите секундомер (выключатель находится на задней стенке секундомера). При этом включается табло индикации и электромагнит.
- Закрепите правый шар с помощью электромагнита.
- Нажмите кнопку СТАРТ, шар начнет двигаться. Запишите в таблицу показания секундомера времени  $t$  соударения шаров. Нажмите кнопку СТОП.

#### 9.4 Порядок выполнения работы

9.4.1 Измерьте длину подвеса  $l$  и диаметр  $2R$  шаров 3÷5 раз. Занесите в таблицу 9.1.

9.4.2 Значения плотности  $\rho$  материала шаров и коэффициентов Пуассона  $\mu$  возьмите из справочника и занесите в таблицу 9.1.

Таблица 9.1

#### Линейные размеры установки и справочные данные

№	Материал	$l, м$	$\langle l \rangle, м$	$2R, м$	$\langle 2R \rangle, м$	$\rho, кг/м^3$	$\mu$

9.4.3 Установите электромагнит в крайнее правое положение. Отметьте угол отклонения шара по шкале 11 и занесите его в таблицу 9.2. Проведите измерение времени соударения шаров в соответствии с п. 9.3.2.2. Повторите измерения 3 ÷ 5 раз. Занесите результаты измерений в таблицу 9.2.

9.4.4 Передвигая электромагнит по шкале 11, повторите измерения времени соударения шаров для двух других начальных углов отклонения правого шара. Результаты занесите в таблицу 9.2.

Проведите подобные измерения для шаров, изготовленных из других материалов (по указанию преподавателя).

Таблица 9.2

#### Результаты измерений и вычислений

№	Материал	$\alpha, ^\circ$	$t, с$	$\langle t \rangle, с$	$v, м/с$	$E, Па$	$\langle E \rangle, Па$

9.4.4 По формуле (9.5) определите скорость шара  $v$  при соударении и занесите в таблицу 9.2.

9.4.5 По формуле (9.16) вычислите значение модуля Юнга  $E$

для каждого угла  $\alpha$  отклонения шара и занесите результаты в таблицу.

9.4.6 Найдите среднее значение модуля Юнга  $\langle E \rangle$  для данного материала шара.

9.4.7 По формулам (9.11) и (9.14) определите максимальную силу удара  $F$ , величину наибольшей линейной деформации  $\delta$ , радиус  $a$  контактного круга при наибольшей деформации шаров и максимальное давление  $p_{max}$ . Результаты занесите в таблицу 9.3.

Таблица 9.3

**Результаты измерений**

№	Материал	$\alpha, ^\circ$	$F, Н$	$\delta, м$	$a, м$	$p_{max}, Па$

**9.5 Вопросы для самопроверки**

9.5.1. Какое соударение называется абсолютно упругим?

9.5.2. Какие законы сохранения при этом выполняются?

9.5.3. Почему в выполняемой работе движущийся шар после соударения останавливается?

9.5.4. Почему силы, возникающие при ударе, такие большие?

**9.6 Литература**

9.6.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

9.6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

9.6.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

9.6.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

9.6.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

9.6.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

## Лабораторная работа № 10

### ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНО-БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**10.1 Цель работы:** используя законы сохранения механической энергии и момента импульса, определить скорость полета тела (снаряда) на установке с крутильно-баллистическим маятником.

#### 10.2 Краткое теоретическое введение

Прямое измерение скорости полета снарядов является трудной экспериментальной задачей, так как эта скорость достигает больших значений (например,  $800 \div 1000$  м/с для боевой винтовки). Поэтому большое распространение получили косвенные методы измерения. В одном из этих методов летящая пуля попадает в неподвижное тело значительно большей массы, испытывая при этом абсолютно неупругое столкновение. После столкновения тело начинает двигаться, причем его скорость движения значительно меньше скорости полета пули. Если измерить малую скорость движения тела, то можно вычислить и скорость полета пули, используя законы сохранения для изолированной системы взаимодействующих тел. Этот метод используется в предлагаемой работе, в которой моделируется экспериментальная задача определения скорости полета снарядов.

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 10. Крутильно-баллистический маятник выполнен в виде крестовины. На горизонтальном стержне 12 укреплены мишень 10 и два подвижных груза 11. Крестовина подвешена на стальной проволоке к кронштейнам 4 и 5. Для обеспечения абсолютно неупругого соударения на мишень наносится слой пластилина. Угол отклонения маятника после соударения отсчитывается по шкале 8.

Горизонтально летящее тело массы  $m$  попадает в мишень и застревает в ней. В результате удара маятник поворачивается вокруг своей оси на угол  $\varphi_0$ . Кинетическая энергия маятника с телом по мере закручивания нити маятника переходит в потенциальную энергию упругой деформации нити подвеса. Затем начинается обратный процесс перехода потенциальной энергии в кинетическую и т.д. Маятник совершает гармонические колебания, период  $T$  которых значительно больше времени  $t$  торможения пули в мишени:

$$T \gg t. \quad (10.1)$$

При условии (10.1) выполняется закон сохранения момента импульса, который в проекции на ось вращения маятника записывается для системы маятник-тело в виде:

$$mvr = (I + I')\omega_0, \quad (10.2)$$

где  $m$  – масса тела;

$v$  – скорость тела перед соударением;

$r$  – расстояние от линии полёта тела до оси вращения маятника (прицельное расстояние);

$I$  – момент инерции маятника;

$I'$  – момент инерции тела относительно оси маятника;

$\omega_0$  – угловая скорость вращения маятника непосредственно после соударения тела с мишенью.

В нашей установке  $I \gg I'$ , поэтому формула (10.2) упрощается:

$$mvr = I\omega_0. \quad (10.3)$$

Пренебрегая потерями на трение в установке, закон сохранения механической энергии маятника, после попадания в него снаряда, можно записать в виде:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{k\varphi_0^2}{2}, \quad (10.4)$$

где  $\frac{I\omega_0^2}{2}$  – кинетическая энергия маятника сразу после соударения;

$\frac{k\varphi_0^2}{2}$  – потенциальная энергия упругой деформации в момент максимального угла поворота маятника;

$k$  – модуль кручения нити;

$\varphi_0$  – максимальный угол поворота маятника.



В реальных случаях колебания маятника всегда затухающие (из-за трения о воздух и других причин). Поэтому формулой (10.4) можно пользоваться, если потери энергии за четверть периода малы по сравнению с запасом энергии маятника после соударения, т.е.

$$\frac{1}{4} E_n \ll \frac{k\varphi_0^2}{2}, \quad (10.5)$$

где  $E_n$  – потери энергии за период.

Чтобы убедиться в справедливости условия (10.5), достаточно измерить число  $N$  полных колебаний маятника, при которых начальная амплитуда колебаний маятника уменьшается вдвое.

Если окажется, что

$$N \gg 1, \quad (10.6)$$

то колебания затухают слабо и можно пользоваться формулой (10.4).

Решая совместно (10.3) и (10.4), получим формулу для определения скорости полёта тела:

$$v = \frac{\varphi_0 (kI)^{1/2}}{mr}. \quad (10.7)$$

Неизвестное произведение  $kI$  найдём из формулы для периода колебаний крутильного маятника, измерив его для двух значений момента инерции крутильного маятника.

Формула для периода колебаний крутильного маятника записывается в виде:

$$T = 2\pi\sqrt{I/k}. \quad (10.8)$$

Моменты инерции маятника для двух различных положений грузов ( $R$  и  $R_1$ ) рассчитываются по формулам:

$$I = I_0 + 2(I'_0 + MR^2), \quad (10.9)$$

$$I_1 = I_0 + 2(I'_0 + MR_1^2), \quad (10.10)$$

где  $I_0$  – момент инерции крестовины без грузов;

$I'_0 + MR^2$  – момент инерции груза 11, рассчитанный с использованием теоремы Гюйгенса-Штейнера (см. Приложение к лабораторной работе №12);

$M$  – масса груза 11.

Из формул (10.9) и (10.10) выразим  $I_1$  через  $I$ :

$$I_1 = I + 2M(R_1^2 - R^2).$$

Для положения грузов 11, соответствующего расстоянию  $R_1$ , период колебаний  $T_1$  будет равен:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{k}}.$$

Возведя последнее выражение в квадрат и подставив значение для  $I_1$ , получим:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_1}{k} = \frac{4\pi^2}{k} [I + 2M(R_1^2 - R^2)] = T^2 + \frac{8\pi^2}{k} M(R_1^2 - R^2),$$

откуда следует:

$$T_1^2 - T^2 = \frac{8\pi^2}{k} M(R_1^2 - R^2). \quad (10.11)$$

Используя далее (10.8), найдём:

$$T_1^2 - T^2 = \frac{4\pi M}{(kI)^{1/2}} (R_1^2 - R^2) T,$$

откуда:

$$\sqrt{kI} = \frac{4\pi M (R_1^2 - R^2) T}{T_1^2 - T^2}. \quad (10.12)$$

Подставив (10.12) в (10.7), получим окончательную формулу для скорости полёта тела:

$$v = \frac{\varphi_0}{r} \cdot \frac{4\pi M (R_1^2 - R^2) T}{m(T_1^2 - T^2)}. \quad (10.13)$$

### 10.3 Описание экспериментальной установки

Общий вид крутильно-баллистического маятника FPM-09 показан на рис. 10. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют выровнять прибор. В основании установлена колонка 3, на которой закреплены верхний кронштейн 4, нижний кронштейн 5 и средний кронштейн 6.

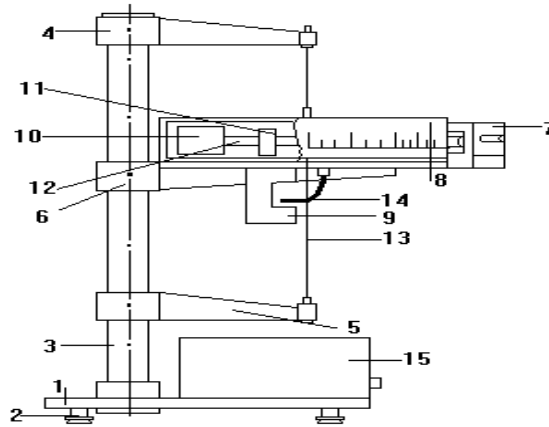


Рис. 10. Крутильно-баллистический маятник

К среднему кронштейну прикреплено устройство для стрельбы 7, а также прозрачный кожух с нанесенной на нем угловой шкалой

8 и фотоэлектрический датчик 9. Кронштейны 4 и 5 имеют зажимы для крепления стальной проволоки 13, на которой подвешен маятник, состоящий из мишени 10 с нанесённым на неё пластилином, двух перемещаемых грузов 11, стержня 12, водилки 14.

Фотоэлектрический датчик соединен разъемом с электронным секундомером 15.

На передней панели прибора имеются кнопки: «СЕТЬ» – для подключения сети питания; «СБРОС» – для сброса предыдущего показания и запуска секундомера на новое измерение; «СТОП» – для остановки режима измерения времени.

#### **10.4 Порядок выполнения работы**

##### 10.4.1 Экспериментальная часть.

##### 10.4.1.1 Подготовка к измерениям.

Для подготовки прибора к работе необходимо:

- проверить, подключено ли заземление;
- произвести горизонтальное выравнивание прибора;
- убедиться в том, что начальное положение крутильного маятника находится в пределах шкалы 8 отсчета угла поворота;
- проверить степень натяжения нити подвеса (она не должна провисать под крестовиной) и свободный ход маятника в пределах от  $-90^0$  до  $+90^0$ ;
- проверить положение водилки 14 относительно фотоэлектрического датчика: в начальном положении маятника водилка должна находиться в створе датчика 9;
- подключить прибор к питающей сети;
- нажать клавишу «СЕТЬ», проверить наличие свечения лампы фотоэлектрического датчика 9, высвечивание нулей на цифровых индикаторах;
- проверить работу электронного секундомера и счетчика колебаний, отклонив маятник на угол  $20^0 \div 30^0$  и запустив схему кнопкой «СБРОС» (остановка счета – кнопка «СТОП»).

##### 10.4.1.2 Проведение предварительных измерений.

Измерение периодов колебаний маятника.

Раздвиньте грузы 11 на максимальное расстояние  $R_1$  между центром масс грузов и осью вращения маятника.

Отклоните маятник на угол  $20^0 \div 30^0$  и проверьте выполнение условия (10.6). Для этого измерьте число  $N$  полных колебаний ма-

маятника, при которых начальная амплитуда колебаний маятника уменьшается вдвое.

Измерьте не менее 5 раз время нескольких ( $5 \div 10$ ) колебаний маятника при начальном отклонении  $20^\circ \div 30^\circ$  и занесите результаты в таблицу 10.1.

Повторите те же измерения при полностью сдвинутых грузах (при расстоянии от центра масс, равном  $R$ ), запишите их результаты в таблицу 10.1.

Таблица 10.1.

**Измерение периода колебаний маятника.**

Число колебаний  $N =$

№	$t, c$	$\langle t \rangle, c$	$T, c$	$t, c$	$\langle t \rangle, c$	$T, c$
	$R_1 =$			$R =$		
1						
2						
3						
4						
5						

Выключите электрическую схему прибора клавишей «СЕТЬ».

10.4.1.3 Проведение основных измерений.

Измерения проводятся при полностью сдвинутых грузах. Произведите  $5 \div 10$  выстрелов из устройства, фиксируя для каждого максимальный угол  $\varphi_0$  отклонения маятника по шкале 8 и прицельное расстояние  $r$  от точки попадания снаряда в мишень до оси вращения маятника. Результаты опытов занесите в таблицу 10.2.

Запишите массу снаряда и массу груза, в нашей установке они равны:  $m = (2,148 \pm 0,015) z$ ,  $M = (190,0 \pm 0,5) z$ .

Таблица 10.2.

**Результаты измерений и вычислений**

№	$\varphi_0, ^\circ$	$\varphi_0, рад$	$r, м$	$v, м/с$	$\langle v \rangle, м/с$	$\Delta v, м/с$	$\Delta v^2, м^2/с^2$
1							
2							
3							
4							
5							

10.4.2 Математическая обработка полученных результатов.

По формуле (10.13) рассчитайте скорость полёта снаряда в каждом опыте.

Найдите среднее значение скорости полёта снаряда и доверительный интервал по методу прямых измерений.

Найдите относительную погрешность результата.

### **10.5 Вопросы для самопроверки**

10.5.1. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом и неупругом взаимодействии тел?

10.5.2. Какие законы сохранения использованы в данной работе?

10.5.3. Почему нельзя определять скорость снаряда, приравнивая его кинетическую энергию потенциальной энергии упругой деформации нити подвеса при отклонении маятника на максимальный угол?

10.5.4. Какие упрощающие предположения использованы в данной работе?

10.5.5. Какие факторы могут повлиять на точность эксперимента?

10.5.6. Можно ли пользоваться приведенной теорией, если столкновение тела с мишенью происходит под углом, отличным от прямого?

10.5.7. Как изменяется момент импульса снаряда относительно оси маятника во время полета к мишени?

### **10.6 Литература**

10.6.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

10.6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

10.6.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

10.6.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

10.6.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

10.6.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

10.6.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Лабораторная работа № 11

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТЕЙ МЕТОДОМ СТОКСА

**11.1 Цель работы:** экспериментальное определение вязкости жидкости с помощью формулы Стокса, используемой для расчета силы сопротивления шара, падающего в жидкости.

#### 11.2 Краткое теоретическое введение

Тело, движущееся в жидкости, испытывает сопротивление со стороны той же жидкости. Частицы жидкости, примыкающие к поверхности, «прилипают» к ней из-за сил притяжения между молекулами жидкости и материала поверхности и поэтому движутся вместе с телом. Благодаря межмолекулярному взаимодействию молекулы, соседствующие с «прилипшими» молекулами, тоже приходят в движение. По мере удаления от поверхности скорость движения молекул падает. Так появляется сила трения между слоями жидкости.

Величина силы трения между двумя соседними слоями жидкости, движущимися вдоль оси  $x$  параллельно друг другу с разными скоростями, находится по закону вязкого трения Ньютона:

$$F_{тр} = \eta \left| \frac{dv(y)}{dy} \right| S, \quad (11.1)$$

здесь  $S$  – площадь слоя жидкости;

$\left| \frac{dv(y)}{dy} \right|$  – модуль градиента модуля скорости (рис. 11.1);

$\eta$  – динамическая вязкость жидкости.

Как следует из (11.1), вязкость  $\eta$  численно равна силе вязкого трения между слоями жидкости или газа, движущимися параллельно друг другу с разными скоростями, если площади этих слоёв равны единице, при единичном градиенте модуля скорости между слоями.

Размерность вязкости  $\eta$ :  $ML^{-1}T^{-1}$ .

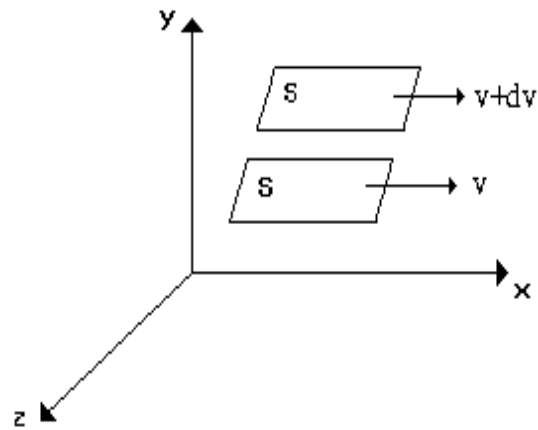
Единицы измерения  $\eta$  в СИ:  $[\eta] = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}) = \text{Па}\cdot\text{с}$ .

Величина  $\nu = \eta / \rho$  называется *кинематической вязкостью*.

Размерность кинематической вязкости  $\nu$ :  $L^2 T^{-1}$ .

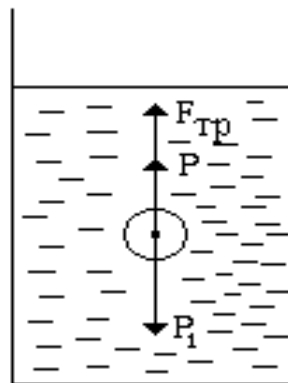
Единицы измерения  $\nu$  в СИ:  $[ \nu ] = \text{м}^2/\text{с}$ .

Вязкость жидкости зависит от её свойств и температуры.



*Рис. 11.1.* К определению силы вязкого трения

Рассмотрим силы, действующие на твердый шар, свободно падающий в жидкости (рис. 11.2).



*Рис. 11.2.* Силы, действующие на шар, падающий в жидкости



На шар, падающий в жидкости, действуют три силы:

$P_1$  – сила тяжести,

$P$  – выталкивающая сила,

$F_{\text{тр}}$  – сила сопротивления среды.

Введем следующие обозначения:

$r$  – радиус шара,

$v$  – скорость движения шара,

$\rho_1$  – плотность шара,

$\rho$  – плотность жидкости,

$\eta$  – вязкость жидкости,

$g$  – ускорение свободного падения.

Сила тяжести шара:

$$\vec{P}_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 \vec{g}. \quad (11.2)$$

Выталкивающая сила определяется по закону Архимеда:

$$\vec{P} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \vec{g}. \quad (11.3)$$

Если шар движется с малой скоростью (ламинарное обтекание) в неограниченной стенками жидкости, то сила сопротивления, обусловленная силами внутреннего трения, согласно закону Стокса, равна:

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}. \quad (11.4)$$

Запишем второй закон Ньютона ( $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$ ) в проекции на направление движения шара:

$$m \frac{dv}{dt} = P_1 - P - F. \quad (11.5)$$

Массу шара найдём по формуле:

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1. \quad (11.6)$$

Уравнение (11.5), используя (11.2) □ (11.4) и (11.6), приведём к виду:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9\eta}{2r^2\rho_1} \left[ \frac{2(\rho_1 - \rho)gr^2}{9\eta} - v \right]. \quad (11.7)$$

Разделяя переменные, получим:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left[ \frac{2(\rho_1 - \rho)gr^2}{9\eta} - v \right]} = \frac{9\eta}{2r^2\rho_1} \int_0^t dt. \quad (11.8)$$

Если в начальный момент ( $t = 0$ ) падения шара в жидкости его скорость равна  $v = v_0$ , то, интегрируя (11.8), получим:

$$v(t) = v_0 - (v_0 - v_0)e^{-t/\tau}, \quad (11.9)$$

где  $v_0$  – установившаяся скорость движения шара в жидкости;

$$\tau = \frac{2\rho_1 r^2}{9\eta} \quad (11.10)$$

называется релаксационным временем движения шара.

Если  $t \gg \tau$ , то шар в своем движении в вязкой жидкости достигает максимальной скорости:

$$v_0 = \frac{2}{9} \frac{\rho_1 - \rho}{\eta} gr^2. \quad (11.11)$$

При этом выполняется условие:  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ .

Используя (11.9), найдем зависимость пути шара в вязкой жидкости от времени:

$$x = \int_0^t v dt = v_0 t - \tau(v_0 - v_n)(1 - e^{-t/\tau}). \quad (11.12)$$

На рис. 11.3 приведена зависимость скорости и пройденного пути от времени для случая, когда начальная скорость движения шара в жидкости равна нулю ( $v_n = 0$ ).

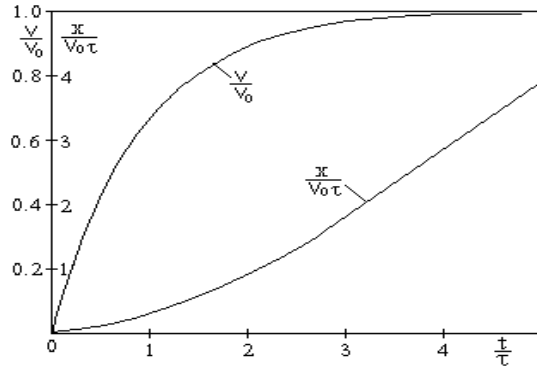


Рис. 11.3

Когда пройдет время

$$t_1 = 4,6\tau \approx \frac{\rho_1 R^2}{\eta} \quad (11.13)$$

от начала движения, скорость шара станет равной  $v_1 = 0,99 v_0$ . За это время шар успеет пройти путь  $x_1 \approx 3,6 v_0 \tau$ .

Если  $t > t_1$ , то шар будет двигаться в жидкости равномерно с постоянной скоростью  $v_0$ .

Если шар движется в сосуде с конечным поперечным сечением, то нужно учесть влияние стенок на движение шара. Если радиус цилиндрического сосуда равен  $R$ , то в силу сопротивления движению шара появляется поправка:

$$F = 6\pi\eta r v_0 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right). \quad (11.14)$$

В результате

$$v_0 = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho_1 - \rho}{\eta \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}. \quad (11.15)$$

Используя эту формулу, путем измерения установившейся скорости шара можно найти вязкость жидкости:

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho_1 - \rho}{v_0 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}. \quad (11.16)$$

Формула Стокса (11.4) для определения силы сопротивления, действующей на движущийся шар, справедлива только при  $Re < 0,5$ , где

$$Re = \frac{2v_0 r \rho}{\eta} \text{ – число Рейнольдса.} \quad (11.17)$$

При  $Re > 0,5$  сила сопротивления жидкости не подчиняется закону Стокса.

#### **Вкратце о природе числа Рейнольдса**

Свойства течения вязкой жидкости зависят от ее плотности  $\rho$ , динамической вязкости  $\eta$  или кинематической вязкости  $\nu$ . Они определяются также характерными для данного течения скоростью  $v$  и линейным размером тела  $d = 2r$ . Например, при движении шара в жидкости (или, наоборот, при обтекании неподвижного шара) характерной скоростью является скорость шара (или, соответственно, средняя скорость жидкости), а характерным размером – диаметр шара  $2r$ .

Из величин  $v, d, \rho, \eta$  (или  $\nu$ ) с помощью анализа размерностей

можно составить безразмерный комплекс, который называется числом Рейнольдса и обозначается через  $Re$ :

$$Re = \frac{2\rho v r}{\eta} = \frac{2v r}{\nu}.$$

Число Рейнольдса является одной из важных характеристик течения вязкой среды. От его значения зависит характер течения, которое может быть ламинарным или турбулентным.

### **11.3 Описание экспериментальной установки**

Установка состоит из двух прозрачных цилиндрических сосудов с касторовым маслом и глицерином. На сосудах через каждые 10 см нанесены горизонтальные метки для определения пути, пройденного шаром, движущимся в жидкости. Для измерений используются стальные шарики разных размеров.

### **11.4 Порядок выполнения работы**

11.4.1 Запишите в лабораторный журнал плотности жидкостей и материала, из которого изготовлены шарики, а также радиусы сосудов (спецификация установки).

11.4.2 При помощи микрометра измерьте диаметр каждого шарика (5 ÷ 7 шариков) 3 раза в разных местах.

11.4.3 Определите глубину жидкости, начиная с которой движение шара становится равномерным. Для этого нужно определить скорость движения шара на первом отрезке (10 см) и на втором отрезке (10 см); если эти скорости совпадают, то для дальнейших измерений точкой отсчета движения шара можно выбрать первую линию.

11.4.4 Измерьте с помощью секундомера время прохождения шаром расстояния, равного 60 см (или другое значение по заданию преподавателя) для каждой жидкости (касторовое масло и глицерин). Данные измерений внесите в таблицу 11.1.

11.4.5 По формуле (11.16) рассчитайте вязкость жидкости и занесите результаты вычислений в таблицу 11.1.

11.4.6 Рассчитайте погрешности полученного результата по методу прямых измерений.

Таблица 11.1

**Результаты измерений и вычислений**  
**Расстояние  $l$ , которое шарик проходит в жидкости:  $l = \dots$  м.**

$2r$ , м	$t$ , с	$v$ , м/с	$\eta$ , Па·с	$\langle \eta \rangle$ , Па·с	$\Delta \eta$ , Па·с	$\Delta \eta^2$ , Па <sup>2</sup> ·с <sup>2</sup>
Касторовое масло						
Глицерин						

11.4.7 Для того, чтобы оценить влияние стенок сосуда на движение шара, рассчитайте для одного из опытов вязкость, используя формулу (11.11), и сравните полученные результаты с вычисленными по формуле (11.16) (для каждой жидкости).

11.4.8 Для одного из опытов рассчитайте число Рейнольдса по формуле (11.17). Используя формулу (11.13), оцените время, за которое движение шара становится равномерным, и путь  $x_0 = v \cdot \tau$ , который проходит шар за это время (для каждой жидкости).

### 11.5 Вопросы для самопроверки

11.5.1. Что такое вязкость? Дайте определение вязкости, укажите единицу измерения в СИ.

11.5.2. От каких величин зависит вязкость жидкости?

11.5.3. Какие силы действуют на шар, движущийся в жидкости?

11.5.4. Почему, начиная с определенного момента времени, движение шарика становится равномерным?

11.5.5. Как влияет на движение шарика его диаметр и диаметр цилиндра, в котором он падает?

### 11.6 Литература

- 11.6.1. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.
- 11.6.2. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.
- 11.6.3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
- 11.6.4. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.
- 11.6.5. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

### 11.7 Задание на УИРС

#### 11.7.1 Краткая теория.

Как было указано в начале работы, формула Стокса

$$\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}_0$$

справедлива только для чисел Рейнольдса  $Re < 0,5$ .

На опыте для любого тела сила лобового сопротивления определяется по формуле:

$$F = C_x \cdot S_M \frac{\rho v_0^2}{2}, \quad (11.18)$$

здесь  $S_M$  – площадь миделевого поперечного сечения тела. Она равна площади самого большого сечения тела в направлении, перпендикулярном к направлению его движения. Для шарообразного тела  $S_M = \pi r^2$ .

$C_x$  называется *коэффициентом лобового сопротивления* тела.

Если сила сопротивления определяется по формуле Стокса, то

$$C_x = \frac{24}{Re}. \quad (11.19)$$

В диапазоне чисел Рейнольдса  $0,1 < Re < 10^3$  коэффициент лобового сопротивления шара определяется по формуле Клячко, полученной из опытных данных:

$$C_x = \frac{24}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{\text{Re}^{2/3}}{6} \right). \quad (11.20)$$

Цель учебно-исследовательской работы студентов – изучение движения шаров различного размера в вязкой жидкости; определение области чисел Рейнольдса, в пределах которой формула Стокса является применимой; определение зависимости коэффициента лобового сопротивления от числа Re по опытным данным.

Если шар движется в вязкой жидкости под действием силы тяжести равномерно, то сила сопротивления шара будет равна разности силы тяжести, действующей на шар, и силы Архимеда:

$$C_x \pi r^2 \frac{\rho v_0^2}{2} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_1 - \rho) g. \quad (11.21)$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho_1$  – плотности жидкости и материала шара соответственно;

$v_0$  – скорость установившегося движения шара.

Из этой формулы найдем:

$$C_x = \frac{8}{3} \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \cdot \frac{r g}{v_0^2}. \quad (11.22)$$

Определив скорости движения шаров радиуса  $r$  в вязкой жидкости, можно найти коэффициент лобового сопротивления по формуле (11.22).

#### 11.7.2 Порядок выполнения работы.

11.7.2.1 Определите скорости равномерного движения порядка десяти шаров с радиусами  $r \leq 10$  мм. Для достижения более точных результатов подберите 3-4 шарика с близкими размерами.

11.7.2.2 Определите коэффициенты лобового сопротивления для шариков, использованных в основной части работы и в последних измерениях, по формуле (11.22). Используя значение вязкости  $\eta$ , найденное с помощью маленьких шариков в основной



части работы, рассчитайте число Рейнольдса  $Re = \frac{2rv_0\rho}{\eta}$  для всех шаров. Результаты внесите в таблицу 11.2.

Таблица 11.2.

**Результаты измерений и вычислений  $C_x$**

№	$2r, м$	$t, с$	$v, м/с$	$C_x$	Re
1					
2					
...					
10					
...					

По полученным результатам постройте график зависимости  $\ln C_x = f(\ln Re)$ . На этом же графике постройте теоретическую зависимость  $\ln C_x = f(\ln Re)$  по формуле (11.19).

Из графика определите число Рейнольдса, соответствующее опытными данным, которые отличаются от значений, найденных по формуле (11.19), на 5 % и более.

**11.7.3 Дополнительная литература**

11.7.3.1. Хайкин С.Э. Физические основы механики. – М.: Физ-мат. лит., 1962.

11.7.3.2. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. – М.: Наука, 1964.

## Лабораторная работа № 12

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

**12.1 Цель работы:** освоить метод определения ускорения силы тяжести с помощью обратного маятника.

#### 12.2 Краткое теоретическое введение

12.2.1 Приведенная длина физического маятника.

*Физическим маятником* называется твердое тело произвольной формы, укрепленное на неподвижной горизонтальной оси (не проходящей через его центр масс) и способное совершать колебания под действием силы тяжести относительно этой оси.

Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$  и отпустить, то он будет совершать колебательное движение под действием момента силы тяжести относительно оси вращения (рис. 12.1).

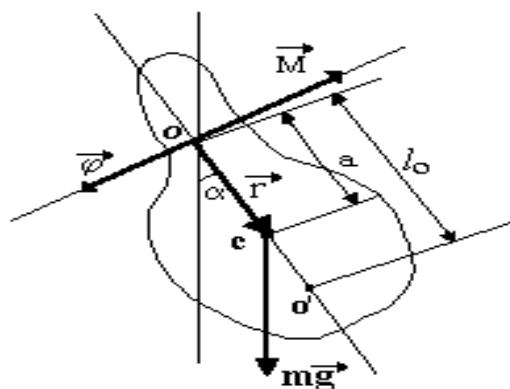


Рис. 12.1. Физический маятник

Уравнение моментов в проекции на ось вращения в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = -mga \sin \alpha, \quad (12.1)$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения;  
 $\alpha$  – угол отклонения маятника от положения равновесия;  
 $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  – угловая скорость;  
 $a$  – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Если угол отклонения мал, то с большой точностью выполняется равенство:

$$\sin \alpha \approx \alpha . \quad (12.2)$$

Кроме того,  $I = const$ , поэтому уравнение (12.1) можно переписать в виде (см. работу №5):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mga}{I}\alpha = 0 . \quad (12.3)$$

Введем обозначение:

$$\frac{mga}{I} = \omega^2 , \quad (12.4)$$

тогда уравнение (12.3) примет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0 . \quad (12.5)$$

Уравнение такого типа является уравнением гармонических колебаний, а его решение имеет следующий вид:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0) , \quad (12.6)$$

где  $\alpha_0$  – амплитуда колебания,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  – циклическая частота,

$T$  – период колебаний,

$\varphi_0$  – начальная фаза колебания.

Полученный результат означает, что при малых углах отклонения (когда справедливо приближение (12.2)) физический маятник совершает гармонические колебания, период которых равен  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Учитывая обозначение (12.4), это выражение можно переписать в виде:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (12.7)$$

Сравнивая выражение (12.7) с формулой для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

можно сделать вывод, что математический маятник, у которого длина

$$l_0 = \frac{I}{ma}, \quad (12.8)$$

будет иметь тот же период колебаний, что и данный физический маятник.

Величина  $l_0$  называется *приведенной длиной* физического маятника.

Приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника с периодом колебаний, равным периоду колебаний данного физического маятника.

#### 12.2.2 Центр качания.

Точка, которая лежит на прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс, и находится на расстоянии приведенной длины от точки подвеса, называется *центром качания*.

По теореме Гюйгенса-Штейнера (см. Приложение) момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен:

$$I = I_C + ma^2,$$

где  $I_C$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;

$a$  – расстояние между осями, оси должны быть параллельны.

Подставив это равенство в выражение (12.8) и разрешив его относительно  $l_0$ , получим:

$$l_0 = \frac{I_C + ma^2}{ma} = a + \frac{I_C}{ma}.$$

Из этой формулы видно, что приведенная длина равна сумме расстояния  $a$  от точки подвеса до центра масс плюс некоторая добавка  $\frac{I_C}{ma}$ , то есть центр качания лежит ниже центра масс (рис.12.1).

Основное свойство центра качания физического маятника состоит в том, что при подвесе маятника на ось, проходящую через этот центр, период колебаний не изменится. Таким образом, при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка становится центром качания, то есть точка подвеса и центр качания обратимы.

### **12.3 Метод определения ускорения свободного падения с помощью обратного маятника**

12.3.1 Принцип определения ускорения свободного падения.

Предлагаемый метод определения ускорения силы тяжести основан на использовании формулы (12.7).

Период колебаний  $T$  маятника может быть измерен с большой точностью, чего не удастся сделать для  $a$  и  $I$ . В рассматриваемом методе эти величины исключаются из расчетной формулы (12.7), чем достигается повышение точности экспериментального определения ускорения силы тяжести.

12.3.2 Приборы и принадлежности: обратный маятник, электронный секундомер.

12.3.3 Описание экспериментальной установки.

Для выполнения работы используют обратный маятник, устройство которого изображено на рис. 12.2.

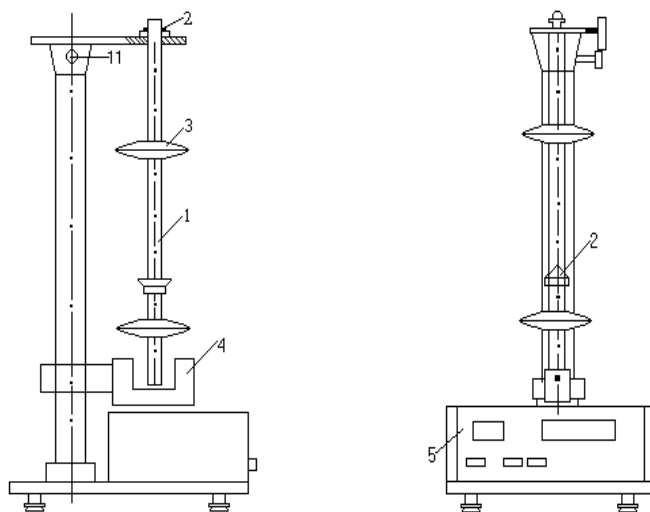


Рис. 12.2. Обратный маятник

Обратный маятник состоит из стального стержня 1, на котором укреплены две опорные призмы 2 и две чечевицы 3, одна из которых может перемещаться вдоль стержня. Маятник может быть подвешен с помощью одной из призм, поэтому он называется обратным. Точка подвеса совпадает с положением верхней призмы. При этом периоды колебаний при прямом и обратном подвешивании (соответственно  $T_1$  и  $T_2$ ) в общем случае не совпадают.

Положение подвижной чечевицы устанавливается при помощи шкалы с нониусом.

#### 12.3.4 Методика проведения эксперимента.

При перемещении чечевицы вдоль стержня момент инерции маятника меняется, следовательно, меняется и период колебаний. Экспериментально можно подобрать такое положение подвижной чечевицы, когда периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  совпадут. Это произойдет в том случае, когда расстояние между призмами (неизменное у данной установки) станет равным приведенной длине маятника, т.е. если вершина одной призмы становится точкой подвеса, а вершина другой – центром качания. При этом выполняется равенство:

$$T_1 = T_2. \quad (12.9)$$

### 12.3.5 Расчетные формулы.

По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_C + ma_1^2, \\ I_2 &= I_C + ma_2^2, \end{aligned} \quad (12.10)$$

где  $I_C$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси вращения.

С учетом формул (12.7) и (12.10) выражения для периодов колебаний маятника в прямом и обратном положении будут иметь следующий вид:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_2^2}{mga_2}}$$

или

$$T_1^2 mga_1 = 4\pi^2 (I_0 + ma_1^2),$$

$$T_2^2 mga_2 = 4\pi^2 (I_0 + ma_2^2).$$

Вычтем из первого равенства второе, и, при условии равенства периодов (12.9), получим:

$$mgT^2 (a_1 - a_2) = 4\pi^2 m (a_1^2 - a_2^2).$$

Отсюда имеем выражение для ускорения силы тяжести:

$$g = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)}{T^2}. \quad (12.11)$$

Период колебаний может быть измерен с большой точностью, так же, как и расстояние  $a_1 + a_2$  между вершинами призм, которое приводится в паспорте прибора. Этим сводится до минимума погрешность при определении  $g$ .

## 12.4 Порядок выполнения работы

12.4.1 Ознакомьтесь с конструкцией оборотного маятника.

Определите рабочий диапазон амплитуд, в пределах которого период колебания маятника не зависит от амплитуды. Для этого необходимо установить маятник на одной из опорных призм и, отклонив стержень от положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$ , определить период колебаний маятника  $T'$ , измерив время 100 колебаний. Число колебаний можно определить по электронному счетчику.

Затем, уменьшив амплитуду колебания в  $1,5 \div 2$  раза, таким же способом определите  $T''$ . Если  $T' = T''$ , то дальнейшие измерения производить при отклонении маятника в пределах  $\alpha$ . Если же  $T' \neq T''$  (расхождение более 0,1%), необходимо опять уменьшить амплитуду и повторить измерения.

12.4.2 Перемещая подвижную чечевицу через 1 см, определите период колебаний в прямом и обратном положениях маятника по 10 полным колебаниям. Положение чечевицы контролируйте по нониусу. Результаты занесите в таблицу 12.1.

Таблица 12.1

### Результаты измерения периода колебаний маятника в прямом и обратном положениях, $x$ – положение подвижной чечевицы

$x, \text{ см}$	Прямое положение		Обратное положение	
	$t, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	$t, \text{ с}$	$T, \text{ с}$

12.4.3 Постройте зависимости периода колебаний от положения чечевицы для прямого и обратного положений маятника на одном графике. Из графика определите положение чечевицы, при котором периоды колебаний в прямом и обратном положениях одинаковы.

12.4.4 Для найденного положения чечевицы определите более точный период колебаний в прямом и обратном положениях по 100 колебаниям. Измерения повторите 3 раза. Добейтесь совпадения  $T'$  и  $T''$  не хуже 0,1 %.



12.4.5 По средним значениям результатов измерений  $T$  вычислите ускорение силы тяжести.

12.4.6 Определите погрешность измерения  $g$  по формулам для косвенных измерений.

12.4.7 Определите относительную погрешность измерения  $g$ .

12.4.8 Сравните полученное значение с табличным значением для города Алматы ( $g = 9,804 \text{ м/с}^2$ ).

### 12.5 Вопросы для самопроверки

12.5.1. Дайте определение физического маятника. Чем он отличается от математического маятника? Под действием каких сил маятник совершает колебания?

12.5.2. Напишите выражение для момента импульса маятника относительно оси вращения.

12.5.3. Напишите выражение для момента силы тяжести относительно оси вращения.

12.5.4. Напишите уравнение движения, описывающее колебания физического маятника.

12.5.5. Что такое приведенная длина физического маятника?

12.5.6. Что представляет собой оборотный маятник? Каким конструктивным преимуществом для нахождения ускорения свободного падения обладает оборотный маятник по сравнению с другим физическим маятником?

12.5.7. Во всяком ли физическом маятнике имеется центр качания?

12.5.8. Как экспериментально определить приведенную длину оборотного маятника?

12.5.9. Как определяется погрешность при косвенных измерениях?

### 12.6 Литература

12.6.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

12.6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

12.6.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

12.6.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

12.6.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

12.6.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

12.6.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Приложение

### Теорема Гюйгенса-Штейнера

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Предполагается, что эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках  $O$  и  $A$ . Разобьем мысленно тело на элементарные массы  $dm$ . Радиусы-векторы одной из них, проведенные от осей  $A$  и  $O$  параллельно плоскости рисунка, обозначены  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}$  соответственно.

На рис. 12.3. изображен такой случай, когда элементарная масса  $dm$  лежит в плоскости рисунка. Тогда  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – радиус-вектор  $OA$ . Следовательно:

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{a}).$$

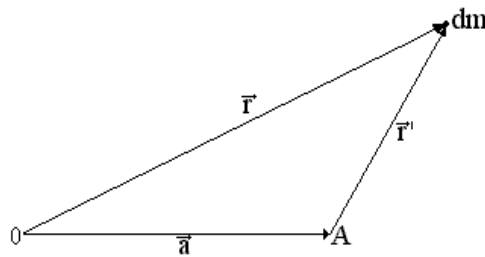


Рис. 12.3. К выводу теоремы Гюйгенса-Штейнера

Проинтегрируем это уравнение по массе:

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2(\vec{a} \int \vec{r} dm).$$

Интеграл слева есть момент инерции  $I_A$  тела относительно оси  $A$ , первый интеграл справа – момент инерции  $I_O$  относительно оси  $O$ . Последний интеграл можно представить в виде:

$$\int \vec{r} dm = m\vec{R}_C,$$

где  $\vec{R}_C$  – радиус-вектор центра масс  $C$  тела относительно  $O$ , точнее  $\vec{R}_C$  – есть слагающая радиус-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка.

Таким образом:

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\vec{a}, \vec{R}_C).$$

Допустим, что ось  $O$  проходит через центр масс тела  $C$ . Тогда  $\vec{R}_C = 0$ , и предыдущая формула упрощается, принимая вид:

$$I_A = I_C + ma^2.$$

Это важное соотношение называется *теоремой Гюйгенса-Штейнера*, которую можно сформулировать следующим образом:

*момент инерции  $I_A$  тела относительно некоторой оси равен моменту инерции  $I_C$  этого тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной выбранной, сложенному с величиной  $ma^2$ , где  $a$  – расстояние между осями.*

## Лабораторная работа № 13

### ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

**13.1 Цель работы:** исследование особенностей колебаний двух маятников, связанных упругой пружиной.

#### 13.2 Краткое теоретическое введение

13.2.1 Известно, что подвешенный к упругой пружине массивный груз или шарик, подвешенный к нити, которые могут совершать свободные малые перемещения относительно положения равновесия, являются простейшими системами, совершающими гармоническое колебательное движение. Частота свободных колебаний таких систем, называемых маятниками, определяется физическими свойствами системы и имеет для каждого маятника строго определенное значение. Например, круговая частота собственных колебаний пружинного маятника  $\omega = \sqrt{k/m}$ , математического маятника  $\omega = \sqrt{g/l}$ ,

где  $k$  – жесткость пружины;

$m$  – масса груза;

$l$  – длина математического маятника;

$g$  – ускорение свободного падения.

Большой интерес представляет изучение движения связанных систем со многими степенями свободы.

В данной лабораторной работе мы изучим движение связанных систем на примере двух связанных маятников.

Рассмотрим систему, состоящую из двух маятников, связанных между собой упругой связью. Маятники представляют собой массивные грузы, прикрепленные на концах легких стержней и способные совершать колебания в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса обоих маятников. Рассмотрим относительно простой случай, когда длины обоих маятников (расстояние от точки подвеса до центра масс груза) одинаковы:  $a_1 = a_2 = a$ , но массы грузов  $m_1$  и  $m_2$  не равны друг другу (рис. 13.1).

Предположим, что массы стержней пренебрежимо малы по сравнению с массами грузов, а линейные размеры грузов пренебрежимо малы по сравнению с длинами этих маятников.

Если малые углы отклонения маятников от положения равновесия обозначены через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то уравнения моментов для этих маятников имеют вид:

$$m_1 a^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -m_1 a g \varphi_1 - k d^2 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (13.1)$$

$$m_2 a^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -m_2 a g \varphi_2 + k d^2 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (13.2)$$

где  $k$  – коэффициент жесткости пружины;

$d$  – расстояние от точки подвеса маятника до места прикрепления пружины.

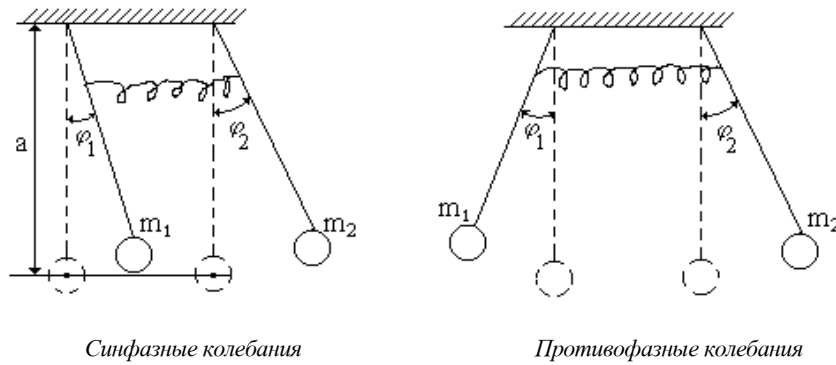


Рис. 13.1.

Для решения этой системы уравнений поделим обе их части на  $(m_1 + m_2)a^2$  и сложим их, тогда

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2}{m_1 + m_2} \right) = -\frac{g}{a} \left( \frac{m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2}{m_1 + m_2} \right). \quad (13.3)$$

Затем уравнение (13.1) поделим на  $m_1 a^2$ , (13.2) – на  $m_2 a^2$  и вычтем из первого второе:

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} = -\frac{g}{a}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{kd^2}{a^2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (13.4)$$

Введём обозначения:

$$\phi_1 = \frac{m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2}{m_1 + m_2}, \quad (13.5)$$

$$\phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (13.6)$$

Тогда уравнения (13.3) и (13.4) примут вид:

$$\frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -\frac{g}{a} \phi_1, \quad (13.7)$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = -\left[ \frac{g}{a} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{kd^2}{a^2} \right] \cdot \phi_2, \quad (13.8)$$

где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  называются *нормальными координатами системы* или *модами*. Из решения этих уравнений получаем соответствующие частоты мод колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{kd^2}{a^2}}. \quad (13.9)$$

Решения представляются в виде:

$$\phi_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad (13.10)$$

$$\phi_2 = B \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (13.11)$$

Подставляя эти значения в (13.5) и (13.6), решая их совместно, получим значения угловых отклонений маятников:

$$\varphi_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} B \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (13.12)$$

$$\varphi_2 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} B \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (13.13)$$

Значения  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  находятся из начальных условий. Как видно из (13.12) и (13.13), колебания каждого маятника связанной системы представляются как суперпозиция двух мод колебаний.

В случае двух одинаковых связанных маятников с массами  $m_1 = m_2 = m$  выражения (13.9), (13.12), (13.13) упрощаются и имеют вид:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{a} + \frac{2}{m} \cdot \frac{k d^2}{a^2}}, \quad (13.14)$$

$$\varphi_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{2} B \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (13.15)$$

$$\varphi_2 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{1}{2} B \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (13.16)$$

Первая мода соответствует синфазному колебанию двух связанных маятников. При этом связывающая их пружина не растягивается и не сжимается и никакого влияния не оказывает. Эта частота колебания  $\omega_1$  (первая мода) равна собственной частоте одного свободного маятника.

Вторая мода колебания  $\omega_2$  соответствует колебанию маятников в противофазе. В этом случае влияние пружины существенно.

Если длины  $a_1$ ,  $a_2$  и массы маятников  $m_1$ ,  $m_2$  не равны друг другу, то в общем случае решение задачи усложняется и требует знания уравнений Лагранжа из курса теоретической механики. Ввиду достаточной сложности этого расчета приведем лишь конечное выражение частот основных мод:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(b_1 + b_2 kd^2) \pm \sqrt{(b_1 + b_2 kd^2)^2 - 4b_0(c_0 + c_1 kd^2)}}{2b_0}}, \quad (13.17)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= m_1 m_2 a_1^2 a_2^2; \\ b_1 &= m_1 m_2 g a_1 a_2 (a_1 + a_2); \\ b_2 &= m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2; \\ c_0 &= m_1 m_2 a_1 a_2 g^2; \\ c_1 &= (m_1 a_1 + m_2 a_2) g. \end{aligned}$$

Из этого общего выражения (13.17) рассмотренные выше формулы (13.9) и (13.14) легко получаются как частные случаи.

13.2.2 Рассмотрим ряд частных случаев колебания связанных маятников.

13.2.2.1 Синфазные колебания маятников одинаковой длины.

Зададим начальные условия в таком виде: в момент времени  $t = 0$   $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$  и

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (13.18)$$

Подставляя (13.18) в (13.12) и (13.13), имеем:  $A = \varphi_0$ ,  $B = 0$ . Следовательно,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_1 t, \quad (13.19)$$

т.е. оба маятника колеблются с частотой первой (основной) моды.

13.2.2.2 Встречные колебания маятников одинаковой длины.

Пусть теперь при  $t = 0$   $\varphi_2 = -\varphi_1 = \varphi_0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = 0.$$

Тогда из (13.12) и (13.13) найдем:



$$A = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \varphi_0, \quad B = -2\varphi_0,$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \omega_1 t - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \omega_2 t, \\ \varphi_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \omega_1 t + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (13.20)$$

Отсюда видно, что маятники совершают зеркально-симметричные колебания с частотой  $\omega_2$  второй моды только при  $m_1 = m_2$ , т.е. при одинаковой массе грузов маятников.

При неравенстве масс маятники совершают сложные колебания с частотой биения  $\omega_b = \omega_2 - \omega_1$ .

$$\varphi_1 = \frac{2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \varphi_0 \cdot \cos \omega_2 t, \quad (13.21)$$

$$\varphi_2 = \frac{2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \omega_2 t.$$

При этом амплитуда у первого маятника изменяется

$$\text{от } \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \varphi_0 \quad \text{до } \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0,$$

а у второго

$$\text{от } \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0 \quad \text{до } \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0.$$

### 13.2.2.3 Биения.

Начальные условия примем в виде:

$$\varphi_1 = \varphi_0, \varphi_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Тогда, подставляя эти значения в (13.12) и (13.13), получим:

$$A = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \varphi_0, \quad B = \varphi_0,$$

$$\varphi_1 = \frac{2m_1\varphi_0}{m_1 + m_2} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cdot \cos \omega_2 t, \quad (13.22)$$

$$\varphi_2 = \frac{2m_1\varphi_0}{m_1 + m_2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Видно, что оба маятника совершают биения с частотой

$$\omega_{\delta} = \omega_2 - \omega_1.$$

При этом амплитуда первого маятника меняется от максимального значения  $\varphi_0$  до минимального значения

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0,$$

а амплитуда второго маятника изменяется от нуля до

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \varphi_0.$$

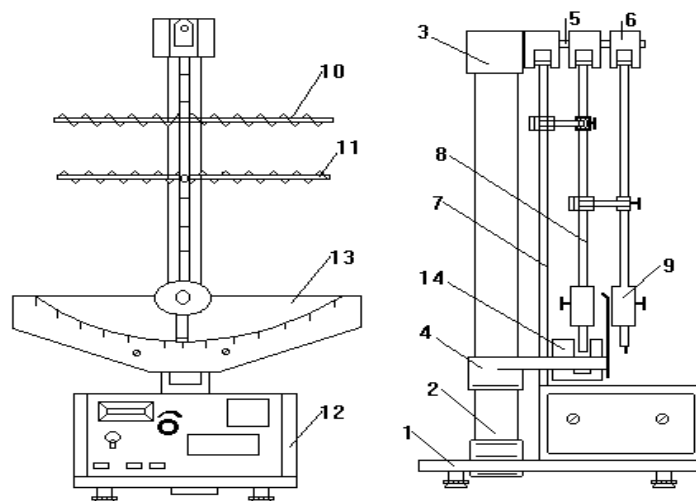
При равенстве масс маятников оба маятника совершают чистые биения.

В общем случае, когда  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  и  $m_1 \neq m_2$ , связанные маятники при любых начальных условиях совершают сложные колебания с биениями.

### 13.3.1 Описание экспериментальной установки.

Общий вид прибора FPM-13 представлен на рис. 13.2. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками, обеспечивающими выравнивание прибора.

В основании закреплена колонка 2. На колонке втулка 3 и кронштейн 4. На стержне 5 втулки находятся три подвески 6, на которых посредством шариковых подшипников подвешены два маятника и стержень 7, возбуждающий колебания. Маятник состоит из стержня 8 и перемещаемого груза 9.



**Рис. 13.2.** Прибор для исследования колебаний несвободных систем FPM-13. Общий вид

Маятники сопряжены друг с другом при помощи двух пружин 10, закрепленных в специальной С-образной обойме 11, которую можно перемещать вдоль стержней маятников. Возбуждение колебаний осуществляется при помощи приводного диска, закрепленного на вале электродвигателя. Электродвигатель через стержень 7, сопряженный при помощи двух пружин 10 со стержнем маятника, возбуждает его колебания. Электродвигатель находится в блоке управления и измерений 12. К нижнему кронштейну прикреплена угловая шкала 13, при помощи которой определяется амплитуда колебаний маятников. К нему также прикреплен фотоэлектриче-

ский датчик 14, световой поток которого пересекается стержнем одного из совершающих колебания сопряженных маятников.

На лицевой панели блока управления и измерений FPM-13 находятся следующие кнопки:

«СЕТЬ» – выключатель сети. Нажатие этой клавиши включает прибор. Об этом свидетельствует свечение цифровых индикаторов (высвечивающих цифру ноль) и свечение лампочки фотоэлектрического датчика.

«ВКЛЮЧЕНИЕ ДВИГАТЕЛЯ» – тумблер включения электродвигателя. Зажигается лампочка.

«ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» – потенциометр настройки скорости вращения двигателя.

«СБРОС» – сброс показаний электронного секундомера и запуск нового отсчета времени и числа периодов колебаний.

«СТОП» – окончание измерений времени и числа колебаний маятника.

### **13.4 Порядок выполнения работы**

#### **13.4.1 Подготовка к измерениям.**

Прибор готов к использованию непосредственно после включения сетевого напряжения и не нуждается в нагреве и установке условий работы.

Для приготовления прибора необходимо:

- проверить, заземлен ли прибор;
- проверить выравнивание прибора;
- проверить, выключен ли тумблер двигателя и находится ли потенциометр «частота колебаний» в крайнем левом положении (минимальная скорость вращения двигателя);
- подключить шнур прибора к питающей сети;
- нажать клавишу «СЕТЬ» проверяя, все ли индикаторы электронного секундомера высвечивают цифру «ноль», а также светится ли лампочка фотоэлектрического датчика;
- включить питание двигателя;
- плавно вращая ручку потенциометра «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ», проверить, работает ли двигатель и колеблются ли маятники;
- ручку потенциометра повернуть в крайнее левое положение и выключить электродвигатель.

13.4.2 Определение частоты синфазных и противофазных колебаний связанных маятников.

13.4.2.1 Запишите в лабораторный журнал спецификацию приборов и установки: значения массы грузов, размеров и масс стержней маятника и обоймы с пружинами.

13.4.2.2 Установите обоймы, крепящие пружины на верхней части стержней маятников, примерно на расстоянии  $d = 100$  мм от оси вращения, а грузы одинаковой массы на нижней части стержней для обоих маятников на одинаковом расстоянии  $l = 350 \div 450$  мм. Отклонив маятники в одну сторону на одинаковый угол около  $6^0$  и отпустив их, проверьте синфазность колебаний маятников. Если синфазность колебаний заметно нарушается при 10÷15 колебаниях, подрегулируйте маятники, перемещая груз одного из них вверх или вниз в небольших пределах.

13.4.2.3 Отклоните маятники в одну сторону на угол около  $6^0$  и отпустите их.

13.4.2.4 Нажмите кнопку «СБРОС», и после появления на индикаторе числа колебаний цифры 9 нажмите кнопку «СТОП», прибор зафиксирует время 10 полных колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу 13.1. Повторите измерения 5 ÷ 10 раз.

13.4.2.5 Отклоните маятники в противоположные стороны на одинаковые углы около  $6^0$  и, отпустив их одновременно, измерьте время 10 противофазных колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу 13.2. Повторите измерения 5 ÷ 10 раз.

Таблица 13.1

**Результаты измерений для синфазных колебаний**  
**Расстояние от точки подвеса до центра масс груза  $a = \dots$  м**  
**Число колебаний  $n = \dots$**

№	$t_{li},$ с	$T_{li},$ с	$\langle T_1 \rangle,$ с	$\Delta T_{li},$ с	$\Delta T_{li}^2,$ с <sup>2</sup>	$\omega_1,$ с <sup>-1</sup>	$T_{1Teop},$ с
1							
2							
3							
4							
5							

Таблица 13.2

**Результаты измерений для противофазных колебаний**  
**Расстояние от точки подвеса до центра масс груза  $a = \dots$  м**  
**Число колебаний  $n = \dots$**

№	$t_{2i}, c$	$T_{2i}, c$	$\langle T_2 \rangle, c$	$\Delta T_{2i}, c$	$\Delta T_{2i}^2, c^2$	$\omega_2, c^{-1}$
1						
2						
3						
4						
5						

13.4.2.6 Отклоните один из маятников от положения равновесия на угол около  $6^0$ - $10^0$ , а второй держите в положении равновесия. Отпустите одновременно маятники, измерьте и запишите время  $t \div 10$  биений и соответствующее число  $n$  колебаний маятника. Опыт повторите 5  $\div$  10 раз. Результаты занесите в таблицу 13.3.

Таблица 13.3

**Результаты измерений для биений**  
**Расстояние от точки подвеса до центра масс груза  $a = \dots$  м**  
**Число биений  $n_b = \dots$**

№	$t_i, c$	$\langle t \rangle, c$	$T_b, c$	$n$	$T, c$	$\langle T \rangle, c$	$\omega, c^{-1}$
1							
2							
...							

### 13.5 Обработка результатов измерений

13.5.1 По данным п. 13.4.2.4 найдите среднее значение периода синфазных колебаний и частоту первой моды  $\omega_1 = 2\pi/\langle T_1 \rangle$ , а также доверительный интервал для периода. Рассчитайте по формуле  $T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{a/g}$  теоретическое значение периода синфазных колебаний маятников и сравните его с экспериментальным значением.

13.5.2 По данным п. 13.4.2.5 определите среднее значение периода противофазных колебаний и частоту второй моды  $\omega_2 = 2\pi / \langle T_2 \rangle$ , а также доверительный интервал для периода.

13.5.3 По данным измерений п. 13.4.2.6 определите средний период биений  $T_6 = \frac{\langle t \rangle}{n_6}$ , где  $n_6$  – число биений за время  $\langle t \rangle$ .

Учитывая, что при чистом биении фаза маятника меняется на  $180^\circ$  каждый раз при достижении нулевой амплитуды, определите период сложных колебаний маятника по формуле

$$T = \frac{\langle t_i \rangle}{n + n_6 / 2}$$

и занесите в таблицу 13.3.

13.5.4 Найдите среднее значение периода  $\langle T \rangle$  и частоту сложных колебаний  $\omega = 2\pi / \langle T \rangle$ .

13.5.5 Рассчитайте по найденным из опыта значениям  $T_1$  и  $T_2$  период и частоту сложных колебаний по теоретическим формулам:

$$\frac{2}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}, \text{ или } T = \frac{2T_1T_2}{T_1+T_2}, \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),$$

а период и частоту биений по формулам

$$\frac{1}{T_6} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \text{ или } T_6 = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2}, \omega_6 = \omega_2 - \omega_1,$$

и сравните их с экспериментальными значениями  $\langle T \rangle$  и  $T_6$ .

13.5.6 Рассчитайте по данным опыта коэффициент связи между маятниками:

$$X = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}. \quad (13.23)$$

В общем случае коэффициент связи меняется от нуля до единицы в зависимости от жесткости пружины и расстояния от оси вращения до точки крепления пружин на стержне маятника. При отсутствии связи  $X = 0$  и при жесткой связи  $X = 1$ .

13.5.7 Сделайте выводы по выполненной работе.

13.5.8 Укажите возможные причины расхождений результатов расчета и эксперимента.

13.5.9 Укажите, как будут двигаться маятники, если массы грузов и длины маятников будут неодинаковыми.

### 13.6 Вопросы для самопроверки

13.6.1. Что такое синфазные и противофазные колебания связанных физических маятников?

13.6.2. Объясните механизм перехода энергии колебаний одного маятника к другому и наоборот (биения).

13.6.3. Что такое коэффициент связи маятников? Чем он определяется?

### 13.7 Задание на УИРС

13.7.1 Цель и задачи УИРС:

– вычислить более точные значения частот и периодов первой и второй моды колебаний, частоту и период биений с учетом реальных размеров физических связанных маятников;

– изучить колебания связанных маятников с различными длинами и разными массами;

– изучить влияние изменения связи маятников на их движение.

13.7.2 Для более точного определения периодов колебаний связанных маятников необходимо учесть влияние размеров и масс отдельных частей маятников на их движение.

Для реальных связанных маятников одинаковой длины и массы вместо уравнений (13.1) и (13.2) будем иметь:

$$I \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -(Ma + m_1 d + \frac{1}{2} m_0 l_0) g \cdot \varphi_1 - k d^2 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (13.24)$$

$$I \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -(Ma + m_1 d + \frac{1}{2} m_0 l_0) g \cdot \varphi_2 + k d^2 (\varphi_1 - \varphi_2),$$



где  $I = Ma^2 + m_1 d^2 + \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_0 l_0^2$  – момент инерции физического маятника,  $l_0 = 51$  см,  $m_0 = 77,5$  г – длина и масса стержня маятника,  $l_1 = 30$  см,  $m_1 = 1,5$  г – длина и полумасса обоймы с пружинами,  $M$  и  $R = 29$  мм – масса (указаны на самых грузах) и радиус цилиндрических грузов маятника,  $a$  и  $d$  – расстояния от оси вращения до центра массы цилиндрического груза и места крепления обоймы с пружинами на стержне соответственно.

Из совместного решения этих уравнений получим периоды синфазных и противофазных колебаний в виде:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{Ma^2 + m_1 d^2 + 1/2 \cdot MR^2 + 1/12 \cdot m_1 l_1^2 + 1/3 \cdot m_0 l_0^2}{(Ma + m_1 d + 1/2 \cdot m_0 l_0)g}}, \quad (13.25)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{Ma^2 + m_1 d^2 + 1/2 \cdot MR^2 + 1/12 \cdot m_1 l_1^2 + 1/3 \cdot m_0 l_0^2}{(Ma + m_1 d + 1/2 \cdot m_0 l_0)g + 2kd^2}}. \quad (13.26)$$

Подставляя значения  $T_1$  и  $T_2$  из этих формул в (13.23), найдем выражение для коэффициента связи маятников:

$$X = \frac{k d^2}{(Ma + m_1 d + 1/2 \cdot m_0 l_0)g + kd^2}. \quad (13.27)$$

Из этой формулы можно найти коэффициент жесткости пружины  $k$  через остальные величины.

13.7.3 Подставив в (13.25) и (13.26) значения масс и длин частей маятника, найдите расчетные значения периодов синфазных и противофазных колебаний  $T_1$  и  $T_2$ . Сравните полученные значения  $T_1$  и  $T_2$  с их экспериментальными значениями.

13.7.4 Измените расстояние  $a$  от оси вращения до центра массы груза одного из маятников и исследуйте характер колебаний связанных маятников.

13.7.5 Измените массу одного из маятников при одинаковых расстояниях  $a$  их центров масс до оси вращения и исследуйте характер колебаний связанных маятников.

13.7.6 Сравните результаты опытов по пунктам 13.7.4 и 13.7.5 с выводами теории по формулам (13.17) и (13.21).

### **13.8 Литература**

13.8.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

13.8.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

13.8.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

13.8.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

13.8.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

13.8.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

13.8.7. Лабораторный практикум по физике. Под ред. Барсукова К.А. и Уханова Ю.И. – М.: Высшая школа, 1988.

## Лабораторная работа № 14

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА МАШИНЕ АТВУДА

**14.1 Цель работы:** изучить законы прямолинейного движения тел; измерить ускорение свободного падения, используя законы равнопеременного движения.

#### 14.2 Краткое теоретическое введение

*Поступательным движением* твердого тела называется такое, при котором все его точки движутся по одинаковым траекториям. Таким образом, все точки твердого тела имеют одинаковые скорости и ускорения, а их траектории при наложении совпадают. Это определение эквивалентно следующему утверждению: любой отрезок, связанный с телом, при поступательном движении остается параллельным самому себе.

Таким образом, это движение полностью характеризуется заданием движения какой-либо одной точки тела. В качестве такой точки часто выбирается центр масс тела. В кинематическом рассмотрении задача поступательного движения твердого тела сводится к движению материальной точки, а силы можно считать приложенными к центру масс твердого тела.

14.2.1 Применим законы прямолинейного движения для грузов, подвешенных на нити, перекинутой через блок (см. рис. 14.1). Рассмотрим движение системы двух грузов массами  $M$  и  $M+m_1$ , прикрепленных к тонкой невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок. Ускорения грузов можно рассчитать на основании следующих рассуждений. На каждый груз будут действовать две силы – сила тяжести и сила натяжения нити, под действием которых грузы и будут двигаться (мы пренебрегаем силами трения). Если предположить, что нить нерастяжима, то ускорения правого и левого грузов будут равны по величине и противоположны по направлению. Если предположить, кроме того, что блок невесом, то натяжения нити будут одинаковы и справа, и слева. Ось  $ox$  направим вертикально вниз. На основании второго закона Ньютона в проекции на выбранное направление  $ox$  можно написать:

$$\begin{aligned}(M + m_1)a &= (M + m_1)g - T, \\ -Ma &= Mg - T,\end{aligned}\tag{14.1}$$

где  $a$  – ускорение грузов;

$T$  – натяжение нити;

$g$  – ускорение силы тяжести.

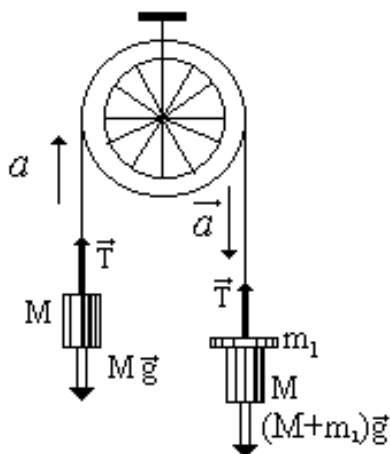


Рис. 14.1.

Решив эту систему уравнений, получаем:

$$a = g \frac{m_1}{2M + m_1},\tag{14.2}$$

$$T = gM \frac{2M + 2m_1}{2M + m_1} = gM \frac{1 + m_1/M}{1 + m_1/(2M)}$$

14.2.2 Для более точного рассмотрения задачи необходимо учесть тот факт, что блок имеет массу. В этом случае натяжения нитей по обе стороны блока будут различными. Если нить считать невесомой и нерастяжимой (что, безусловно, является упрощением), то система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(M + m_1)a_1 &= (M + m_1)g - T_2, \\
-Ma_1 &= Mg - T_1, \\
I\beta &= \gamma m_0 r^2 \beta = (T_2 - T_1) \cdot r,
\end{aligned}
\tag{14.3}$$

где  $I = \gamma m_0 r^2$  – момент инерции блока;

$m_0$  – масса блока;

$r$  – радиус блока;

$\beta$  – угловое ускорение;

$\gamma$  – коэффициент, зависящий от распределения массы в блоке.

При условии отсутствия проскальзывания нити по блоку выполняется равенство:

$$a_1 = \beta r .$$

Решение вышеприведенной системы уравнений дает ускорение:

$$a_1 = g \frac{m_1}{2M + m_1 + \gamma m_0} , \tag{14.4}$$

где  $a_1$  – ускорение системы с учетом массы блока.

В приведённых выше рассуждениях мы не учитывали силу трения. Учет силы трения приведет к уменьшению ускорения системы.

Из формулы (14.4) следует, что система будет двигаться с ускорением меньшим, чем ускорение свободного падения. Увеличение перегрузка  $m_1$  приводит к увеличению ускорения системы. Если же перегрузок  $m_1$  во время движения снять, то дальнейшее движение системы будет происходить с постоянной скоростью, равной скорости в момент снятия перегрузка.

### 14.3 Описание установки

Общий вид машины Атвуда изображен на рис. 14.2. На вертикальной стойке 1, закрепленной в основании 2, установлены три кронштейна: неподвижный нижний кронштейн 3 и два подвижных кронштейна – средний 4 и верхний 5, а также верхняя втулка 6.

Основание оснащено регулирующими ножками 7, которые позволяют произвести выравнивание положения прибора.

На верхней втулке с помощью роликового подшипника 9 закреплен легкий блок 10, а также электромагнит 11. Через блок перекинута нить 12 с привязанными к ее концам грузами 13 и 14.

Электромагнит, после подведения к нему питающего напряжения, при помощи фрикционной муфты удерживает систему блока с грузами в состоянии покоя.

Верхний и средний кронштейны можно перемещать вдоль стойки и фиксировать в любом положении, устанавливая таким способом длину пути равноускоренного и равномерного движений. Для определения этих расстояний на стойке имеется шкала 15 с миллиметровыми делениями. Все кронштейны имеют указатели положения, а верхний кронштейн – дополнительную черту, облегчающую точное согласование нижней грани поднятого груза с началом пути движения.

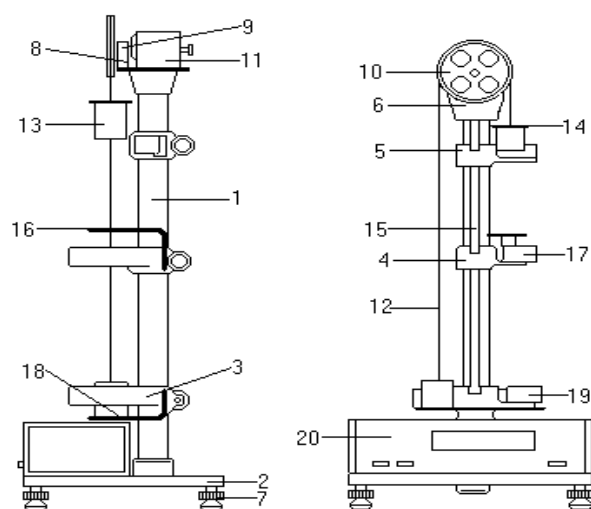


Рис. 14.2. Машина Атвуда

На среднем кронштейне закреплено кольцо 16 и первый фотоэлектрический датчик 17. Кольцо 16 снимает с падающего большого груза дополнительный перегрузок 14, а фотоэлектрический датчик в это время образует электрический импульс, сигнализирующий о начале равномерного движения системы. Оптическая ось

фотоэлектрического датчика (черта на его корпусе) находится на уровне указателя положения среднего кронштейна.

Нижний кронштейн оснащен двумя площадками 18 с резиновыми амортизаторами, в которые ударяют завершающие свое движение грузы, а также вторым фотоэлектрическим датчиком 19 с оптической осью на уровне указателя положения кронштейна. После пересечения этой оси нижней гранью падающего груза образуется электрический импульс, соответствующий концу пути между средним и нижним кронштейнами. Время прохождения этого пути измеряется с помощью миллисекундомера 20, прикрепленного к основанию прибора и подключенного к фотоэлектрическим датчикам 1 и 2.

#### 14.4 Порядок выполнения работы

14.4.1 Проверка формулы для скорости при равноускоренном движении  $v_k = \sqrt{2aS_{py}}$ .

Закрепите средний кронштейн 4 таким образом, чтобы путь равномерного движения грузов был равен 10 см. Записав в таблицу 14.1 пути равноускоренного  $S_{py}$  и равномерного  $S_p$  движений, измерьте 3÷5 раз время  $t$  равномерного движения грузов.

Изменяя положение среднего кронштейна 4 через 5 см до 30 см при  $m_1 = const$ , измерьте по 3÷5 раз время  $t$  для всех пар расстояний  $S_{py}$  и  $S_p$ .

Усредните время для каждого значения  $S_p$ . Учтя, что  $v_k = S_p / t_p$  – это конечная скорость равноускоренного движения, приобретаемая системой на пути  $S_{py}$ , и используя формулу  $v_k = \sqrt{2aS_{py}}$ , определите ускорение системы по экспериментальным данным:

$$a_{экс} = \frac{2S_{py}}{v_k^2}. \quad (14.5)$$

Результаты вычислений занесите в таблицу 14.1.

Постройте график зависимости конечной скорости  $v_k$  равноускоренного движения от  $\sqrt{2S_{py}}$ , используя данные таблицы 14.2.

Из графика определите ускорение  $a$  системы.

Вычислите ускорение системы, используя теоретическую формулу (14.2), и сравните его с полученным из графика.

Таблица 14.1.

**Результаты измерений и вычислений**

$S_{py}, м$	$S_p, м$	$m_1, з$	$t, с$	$\langle t \rangle, с$	$v_p = v_k, м/с$	$a_{экс}, м/с^2$		



Таблица 14.2.

## Данные для построения графика

$\sqrt{2S_{py}}, \text{ м}^{1/2}$	$m_1, \text{ г}$	$U_K, \text{ м/с}$	$a_{\text{экс}}, \text{ м/с}^2$	$a_{\text{теор}}, \text{ м/с}^2$

Используя данные таблицы 14.2, найдите средние значения  $a_{\text{экс}}$  для каждой из масс  $m_1$  перегрузка, внесите их в таблицу 14.3 и сравните с найденными из графика.

Таблица 14.3.

**Нахождение среднего значения ускорения  
для каждой из масс  $m_1$**

$m_1, \text{ г}$	$a_{\text{экс}}, \text{ м/с}^2$	$\langle a_{\text{экс}} \rangle, \text{ м/с}^2$	$\Delta a_{\text{экс}}, \text{ м/с}^2$	$\Delta a_{\text{экс}}^2, \text{ м}^2/\text{с}^4$	$S_{\langle a \rangle}, \text{ м/с}^2$	$\Delta_{\langle a \rangle}, \text{ м/с}^2$

Запишите окончательный результат для каждой из масс в виде:  $a_{\text{экс}} = \langle a_{\text{экс}} \rangle \pm \Delta a_{\text{экс}}, \text{ м/с}^2$ .

Найдите относительные погрешности результатов.

14.4.2 Измерение ускорения свободного падения.

Из формулы (14.2) определите ускорение свободного падения  $g$ , используя значения  $a_{\text{экс}}$  из таблицы 14.1.

$$g = \frac{2M + m_1}{m_1} a_{\text{экс}}.$$

Результаты вычислений занесите в таблицу 14.4.

Таблица 14.4.

**Расчет ускорения свободного падения**

$m_1, \text{ г}$	$S_p, \text{ м}$	$g_i, \text{ м/с}^2$	$\langle g \rangle, \text{ м/с}^2$	$\Delta g_i, \text{ м/с}^2$	$\Delta g_i^2, \text{ м}^2/\text{с}^4$	$S_{\langle g \rangle}, \text{ м/с}^2$	$\Delta g, \text{ м/с}^2$			

Запишите окончательный результат в виде:

$$g = \langle g \rangle \pm \Delta g, \text{ м/с}^2.$$

Найдите относительную погрешность результата.

Результат сравните с табличным значением ускорения свободного падения для данной широты.

#### **14.5 Вопросы для самопроверки**

14.5.1. Измерение какого параметра, на взгляд, вносит наибольшую погрешность?

14.5.2. Каким образом можно было бы в данной работе учесть тот факт, что блок обладает массой?

14.5.3. Каким образом можно было бы проверить 2-ой закон Ньютона?

14.5.4. Внесите ваши предложения по усовершенствованию установки и методики эксперимента.

#### **14.6 Литература**

14.6.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

14.6.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

14.6.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

14.6.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

14.6.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

14.6.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

14.6.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Лабораторная работа № 15

### ГИРОСКОП

**15.1 Цель работы:** изучить законы движения абсолютно твердого тела, закрепленного в точке, на примере быстро вращающегося осесимметричного волчка-гироскопа.

#### 15.2 Краткое теоретическое введение

*Абсолютно твердым телом* (далее АТТ) называется такое тело, расстояние между любой парой точек которого остается неизменным в условиях данной задачи. Число независимых параметров, необходимых для задания положения механической системы в пространстве, называется *числом степеней свободы механической системы*.

Нетрудно заметить, что АТТ имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение АТТ в пространстве характеризуется положением 3-х его точек, не лежащих на одной прямой. Каждая материальная точка имеет 3 степени свободы, кроме того, имеется три связи – это 3 неизменных расстояния между точками, таким образом, АТТ имеет:

$3 \times 3 - 3 = 6$  степеней свободы (рис. 15.1).

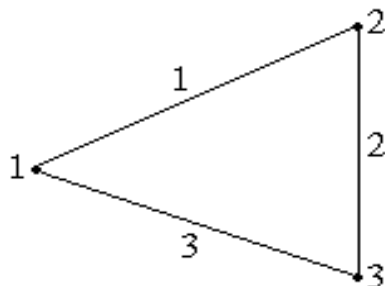


Рис.15.1.

Известно, что произвольное движение АТТ можно представить суперпозицией поступательного и вращательного движений. Для описания движения АТТ необходимо 6 уравнений: например, три уравнения для движения центра масс и три уравнения для описа-

ния вращения АТТ вокруг трёх осей, проходящих через центр масс.

Пусть на тело не действуют никакие силы (или сумма моментов внешних сил равна нулю). Будет ли тело сохранять в пространстве положение оси вращения, вокруг которой оно было первоначально раскручено? Оказывается, что это справедливо не для всякой оси вращения.

Свободное вращение АТТ возможно лишь вокруг центральных главных осей инерции твердого тела. Эти оси называются *свободными*. В курсе теоретической механики доказывается, что вращение тела будет устойчивым только относительно центральных главных осей с максимальным или минимальным моментом инерции. Вращение вокруг оси со средним моментом инерции неустойчиво.

Рассмотрим АТТ, закрепленное в одной точке. Такое тело не может двигаться поступательно, оно может лишь вращаться вокруг оси, проходящей через точку закрепления. Сама эта ось вращения может изменять свое положение в пространстве.

Уравнением движения для такого твердого тела является уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (15.1)$$

где  $\vec{L}$  – вектор момента импульса АТТ;

$\vec{M}$  – сумма моментов внешних сил относительно точки закрепления.

В общем случае связь вектора момента импульса  $\vec{L}$  твердого тела с угловой скоростью вращения  $\vec{\omega}$  является сложной, однако существует частный случай, когда эту связь можно считать прямо пропорциональной зависимостью:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (15.2)$$

Этот случай реализуется у гироскопа.

*Гироскопом* называется осесимметричное абсолютно твердое тело, быстро вращающееся вокруг своей оси симметрии.

Если угловая скорость вращения вокруг оси симметрии будет много больше, чем скорость поворота относительно других осей, то равенство (15.2) будет выполняться с достаточной точностью и вектор  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  будет всегда совпадать с центральной главной осью инерции гироскопа.

Если точка подвеса гироскопа совпадает с его центром масс (на практике это можно осуществить с помощью так называемой кардановой подвески), то на гироскоп не будет действовать момент внешних сил, и он будет сохранять направление оси вращения в пространстве. Такой гироскоп называется *свободным уравновешенным гироскопом*.

Допустим, что точка опоры гироскопа не совпадает с центром масс (см. рис. 15.2). Тогда сила тяжести  $m\vec{g}$  будет создавать момент  $\vec{M}$  относительно точки опоры. Под действием этого момента силы ось вращения гироскопа начнет поворачиваться и изменять свое направление в пространстве.

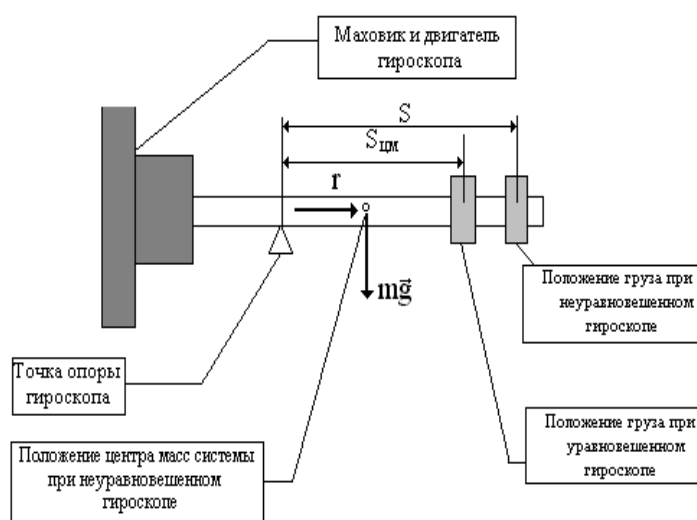


Рис. 15.2. Схема неуровновешенного гироскопа

Это движение оси гироскопа под действием момента внешних сил получило название *прецессии*.

Как же будет поворачиваться в пространстве ось вращения гироскопа? Если бы гироскоп не вращался, то его ось стала бы наклоняться вниз, стремясь принять вертикальное положение.

Наличие вращения гироскопа полностью изменяет картину его движения. Поскольку направление вектора изменения момента импульса

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt \quad (15.3)$$

совпадает с направлением вектора момента силы  $\vec{M}$ , а последний перпендикулярен вектору силы тяжести  $m\vec{g}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}], \quad (15.4)$$

то поворот оси вращения гироскопа будет происходить вокруг вертикальной (а не горизонтальной) оси, и вектор  $d\vec{L}$  будет перпендикулярен вектору момента импульса  $\vec{L}$ .

Определим угловую скорость прецессии гироскопа. За время  $dt$  вектор момента импульса  $\vec{L}$  повернется на угол  $d\varphi$ , тогда для модуля  $dL$  получим:

$$dL = M \cdot dt = L \cdot d\varphi, \quad (15.5)$$

откуда найдем угловую скорость прецессии  $\Omega$ ,

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{mg r}{I\omega}. \quad (15.6)$$

Здесь  $m$  – масса гироскопа;  
 $g$  – ускорение свободного падения;  
 $r$  – плечо силы тяжести относительно точки опоры;  
 $I$  – момент инерции гироскопа;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения гироскопа.

В результате прецессии гироскоп вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку опоры гироскопа, с угловой ско-

ростью  $\vec{\Omega}$ . При этом направление полной угловой скорости вращения  $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$  не совпадает с осью гироскопа, однако, ввиду того, что  $\omega \gg \Omega$ , это несовпадение незначительно, им можно пренебречь и считать, что равенство (15.2) выполняется точно.

Как видно из (15.6), для выполнения условия  $\omega \gg \Omega$  необходимо, чтобы угловая скорость вращения гироскопа была велика:

$$\omega \gg \sqrt{\frac{mgr}{I}}. \quad (15.7)$$

Характерной особенностью прецессии является то, что она не имеет инерции – прецессионное движение прекращается сразу с прекращением действия момента внешних сил, как это видно из (15.6).

Измерив на опыте скорости вращения  $\omega$  и  $\Omega$ , можно определить момент инерции гироскопа  $I$ :

$$I = \frac{mgr}{\omega\Omega} \quad (15.8)$$

и его кинетическую энергию вращения

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (15.9)$$

### 15.3 Описание экспериментальной установки

На рис. 15.3. изображен гироскоп, у которого на основании 1, оснащенном ножками с регулируемой высотой для выравнивания прибора, установлена колонка 2. На колонке закреплен кронштейн 3 с фотоэлектрическим датчиком угла поворота 4 и внешняя втулка подвижного контакта 5.

Подвижный контакт позволяет гироскопу вращаться вокруг вертикальной оси и обеспечивает питание электрическим током фотоэлектрического датчика угловой скорости 6 и двигателя 7.

Электрический двигатель смонтирован на кронштейне 8 таким образом, что может поворачиваться в вертикальной плоскости на неограниченный угол.



На валу двигателя находится маховик 9, защищенный экраном 1. Рычаг 11, закрепленный на корпусе двигателя, имеет нанесенную на него метрическую шкалу. На рычаге имеется груз 12, перемещением которого по рычагу можно уравновесить гироскоп на кронштейне 8 или создать момент силы тяжести относительно точки подвеса.

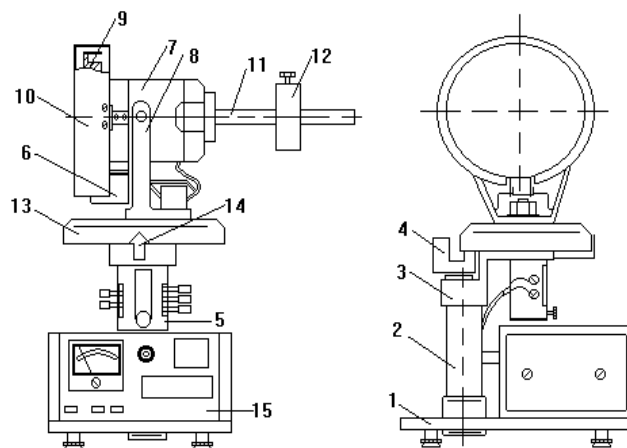


Рис. 15.3. Гироскоп

Угол поворота гироскопа вокруг вертикальной оси можно считывать с диска 13 с нанесенной угловой шкалой при помощи указателя 14. Диск 13 имеет по окружности отверстия через каждые  $5^{\circ}$ . Эти отверстия подсчитываются фотоэлектрическим датчиком угла поворота 4, информация об угле поворота поступает в блок управления и измерений 15, где высвечивается на табло.

Маховик 9 имеет аналогичные отверстия для работы электронной схемы измерения угловой скорости вращения гироскопа.

В блоке измерений 15 имеется секундомер, позволяющий совместно с информацией об угле поворота определять угловую скорость прецессии гироскопа.

## 15.4 Порядок выполнения работы

### 15.4.1 Экспериментальная часть.

#### 15.4.1.1 Подготовка к измерениям.

- Для подготовки прибора к работе необходимо:
- проверить, подключено ли заземление;
  - произвести горизонтальное выравнивание прибора по уровню;
  - проверить положение выключателя сети и ручки регулировки оборотов двигателя – они должны находиться в положении «ВЫКЛЮЧЕНО» (это особенно важно для ручки регулировки оборотов двигателя, которая должна находиться в крайнем левом положении!);
  - подключить прибор к питающей сети;
  - нажать клавишу «СЕТЬ», проверить наличие свечения ламп фотоэлектрических датчиков 4 и 6, высвечивание нулей на всех цифровых индикаторах;
  - включить питание двигателя (**ВНИМАНИЕ!** Регулятор оборотов двигателя «РЕГ. СКОРОСТИ» поворачивать **МЕДЛЕННО И ПЛАВНО** до начала вращения маховика. Во время работы с прибором производить **УВЕЛИЧЕНИЕ** скорости вращения маховика **МЕДЛЕННО И ПЛАВНО** во избежание выхода из строя предохранителя!);
  - проверить работу двигателя и индикатора угловой скорости вращения гироскопа.

#### 15.4.1.2 Проведение измерений.

С помощью ручки «РЕГ. СКОРОСТИ» установите частоту вращения гироскопа  $n_1 = 2000$  об/мин.

Перемещая груз 12 вдоль рычага 11 через каждый сантиметр, проведите по 3 измерения времени поворота гироскопа на фиксированный угол  $\varphi$  (не менее  $30^\circ$ ) для каждого положения груза.

Результаты измерений занесите в таблицу 15.1.

При этом необходимо учитывать направление вращения, т.е. угол  $\varphi$  поворота гироскопа по часовой стрелке заносить в таблицу со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Установите частоту вращения гироскопа  $n_2 = 4000$  об/мин и повторите проведенные измерения для новой скорости вращения. Результаты занесите в таблицу 15.1.

Таблица 15.1

**Результаты измерений**

№	$n, \text{об} / \text{мин}$	$\omega, \text{с}^{-1}$	$S, \text{см}$	$\varphi^0$	$\varphi, \text{рад}$	$t, \text{с}$	$\langle t \rangle, \text{с}$
1							
2							
3							
4							
5							
...							

**15.5 Математическая обработка полученных результатов**

По полученным данным для каждого положения груза рассчитайте угловую скорость прецессии гироскопа по формуле  $\Omega = \varphi / \langle t \rangle$  и занесите её в таблицу 15.2.

Таблица 15.2

**Результаты вычислений**

№	$\omega, \text{с}^{-1}$	$S, \text{см}$	$\Omega, \text{с}^{-1}$	$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\langle I \rangle, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
1						
2						
...						

На одном рисунке постройте графики зависимости угловой скорости прецессии  $\Omega$  от положения  $S$  груза 12 для двух разных частот вращения  $n_1$  и  $n_2$  гироскопа.

Определите из графиков положение груза  $S_{\text{цм}}$ , при котором гироскоп оказывается уравновешенным.

Для вычисления момента инерции  $I$  гироскопа формулу (15.8) запишем в виде:

$$I = \frac{mg(S - S_{\text{цм}})}{\Omega\omega}. \quad (15.11)$$

Здесь  $m$  – масса груза;

$g$  – ускорение свободного падения;

$S$  – положение груза на рычаге 11;

$S_{\text{цм}}$  – положение груза, соответствующее уравновешенному состоянию гироскопа;

$\omega$  – угловая скорость вращения гироскопа;

$\Omega$  – угловая скорость прецессии.

По формуле (15.11) рассчитайте значения момента инерции  $I$  гироскопа для каждого положения груза на рычаге и занесите результаты в таблицу 15.2.

Рассчитайте среднее значение момента инерции  $\langle I \rangle$  и доверительный интервал по методу прямых измерений. Найдите относительную погрешность результата.

Определите кинетическую энергию  $E_k$  вращения гироскопа для двух частот вращения  $n_1$  и  $n_2$ .

### 15.6 Вопросы для самопроверки

15.6.1. Какие оси вращения АТГ называются свободными? Относительно каких из них свободное вращение устойчиво?

15.6.2. Что называется гироскопом?

15.6.3. Что такое прецессия гироскопа и от чего она зависит?

15.6.4. При каких условиях можно считать, что вектор момента импульса гироскопа, мгновенная угловая скорость вращения и ось симметрии совпадают?

15.6.5. Что вам известно о практическом использовании гироскопов?

### 15.7 Литература

15.7.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

15.7.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

15.7.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

15.7.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

15.7.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

15.7.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

15.7.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Лабораторная работа № 16

### ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ МАКСВЕЛЛА

**16.1 Цель работы:** изучение плоского движения твердого тела; определение ускорения поступательного движения центра масс маятника Максвелла.

#### 16.2 Краткое теоретическое введение

##### 16.2.1 Плоское движение.

*Плоским называется движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях.* Движение тела в этом случае полностью определяется движением одного из его сечений в какой-либо из параллельных плоскостей, а положение тела в данном сечении – положением двух точек в этом сечении.

В плоском движении вектор угловой скорости всегда перпендикулярен плоскости движения и, следовательно, имеет постоянное направление. Поэтому, если ось системы координат, связанной с телом, провести перпендикулярно плоскости движения, то угловая скорость вращения всегда будет направлена вдоль этой оси, т.е.  $\omega_z = \omega$ ,  $\omega_x = \omega_y = 0$ . Для того, чтобы избежать учета центробежных моментов тензора инерции, целесообразно ось вращения провести через центр масс. Тогда необходимо принять во внимание лишь момент импульса относительно оси вращения:

$$L_z = I_{zz}\omega_z = I\omega, \quad (16.1)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения;  
 $\omega$  – угловая скорость вращения.

Индексы  $z$  ставить нет необходимости, поскольку ось  $z$  – единственная ось вращения.

Силы, действующие на тело, параллельны плоскости  $(x, y)$ , а моменты сил  $M_z$  перпендикулярны ей. Система уравнений движения твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{net}, \quad (16.2)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{net}, \quad (16.3)$$

где  $\vec{p}$  – импульс тела;

$\vec{F}_{net}$  – равнодействующая внешних сил;

$\vec{L}$  – момент импульса тела;

$\vec{M}_{net}$  – равнодействующая моментов внешних сил.

Для плоского движения эта система уравнений принимает вид:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{net}, \quad (16.4)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = M. \quad (16.5)$$

где  $\vec{v}_c$  – скорость центра масс тела;

$I$  – момент инерции тела;

$\omega$  – угловая скорость вращения.

### 16.2.2 Маятник Максвелла

Маятник Максвелла представляет собой диск, подвешенный на нитях, намотанных на его вал (рис. 16.1).

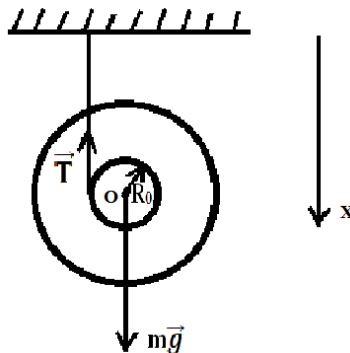


Рис. 16.1. Маятник Максвелла (вид сбоку)

Направим ось  $x$  вдоль направления поступательного движения маятника, т.е. вертикально вниз, а ось  $z$  – вдоль оси вращения маятника (на рисунке от нас).

На диск действуют две силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , и сила натяжения нитей  $\vec{T}$ .

В проекциях на оси  $x$  и  $z$  система уравнений (16.4) и (16.5) примет вид:

$$m \frac{dv_c}{dt} = mg - T, \quad (16.6)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = R_0 T, \quad (16.7)$$

где  $R_0$  – радиус вала диска, на который намотана нить.

Будем считать, что выполняется условие отсутствия проскальзывания нити, т.е.  $v_c = \omega R_0$ .

Решая систему уравнений (16.6) и (16.7), получим для ускорения центра масс маятника и силы натяжения нитей выражения:

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{g}{1 + \gamma}, \quad (16.8)$$

$$T = \frac{\gamma mg}{1 + \gamma}, \quad (16.9)$$

$$\gamma = \frac{I}{mR_0^2}. \quad (16.10)$$

Уравнения (16.6) и (16.7) и их решения (16.8) и (16.9) не описывают поведения маятника в нижней точке, когда происходит переброс нити с одной стороны на другую сторону вала. Диск про-

должает вращаться в прежнем направлении, но теперь нить не разматывается с вала, а наматывается на него. Для движения вверх также справедливы уравнения (16.6) и (16.7) и их решения (16.8) и (16.9). В процессе наматывания нити диск поднимается.

16.2.3 Определение теоретического значения ускорения движения центра масс маятника.

Теоретическое значение ускорения определяем по формуле (16.8). Для этого найдем фактор  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{I}{mR_0^2},$$

где  $I = I_O + I_D + I_K$  – момент инерции маятника;

$m = m_O + m_D + m_K$  – масса маятника;

$I_O = \frac{1}{2}m_O R_O^2$  – момент инерции вала маятника;

$I_D = \frac{1}{2}m_D R_D^2$  – момент инерции диска,  $R_D$  – радиус диска;

$I_K = \frac{1}{2}m_K(R_1^2 + R_2^2)$  – момент инерции кольца,  $R_1, R_2$  –

внешний и внутренний радиусы кольца;

$m_O, m_D, m_K$  – соответствующие массы.

### 16.3 Описание установки и методика эксперимента

#### 16.3.1 Описание установки.

Установка представлена на рис. 16.2 и включает в свой состав: основание 1, вертикальную стойку 2, верхний кронштейн 3, кронштейн 4 для установки фотодатчика, фотодатчик 5, диск 6 с валом, подвешенный на двух нитях 7, комплект из трех сменных колец с различными моментами инерции.

Основание 1 снабжено тремя регулируемыми опорами 8 и винтом-барашком 9 для фиксации вертикальной стойки 2.

Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир 12.

На верхнем кронштейне 3 размещаются электромагниты 10 и



узел 11 регулировки исходного положения маятника. Верхний кронштейн 3 имеет винт-барашек для крепления его на вертикальной стойке 2.

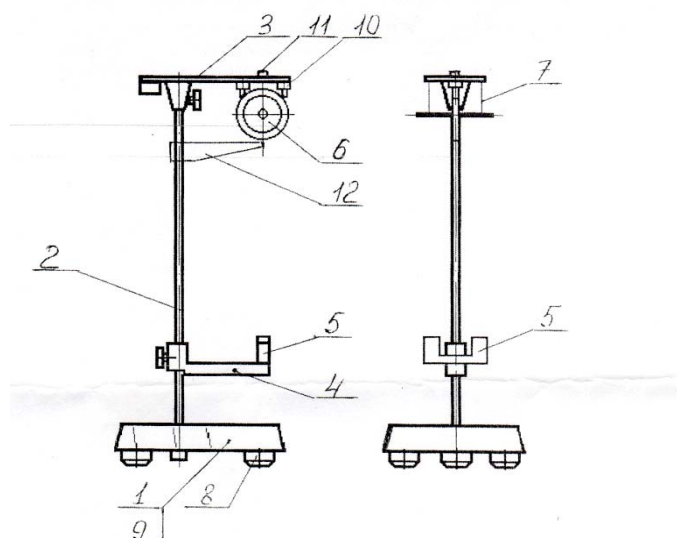


Рис 16.2. Общий вид установки

Кронштейн 4 имеет винт-барашек для крепления его и элементов фиксации фотодатчика на вертикальной стойке 2.

Установка укомплектована электронным секундомером.

#### 16.3.2 Методика эксперимента.

Установите нижний кронштейн 4 с фотодатчиком в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы верхняя плоскость кронштейна совпала с одной из рисок шкалы.

Закрепите одно из сменных колец на диске маятника.

Произведите регулировку положения основания при помощи регулировочных опор так, чтобы ось диска на бифилярном подвесе находилась в одной вертикальной плоскости с оптической осью фотодатчика.

Установите с помощью узла регулировки 11 необходимую длину бифилярного подвеса таким образом, чтобы нижний край сменного кольца маятника находился на  $4 \div 5$  мм ниже оптической

оси фотодатчика; при этом ось маятника должна занимать горизонтальное положение.

Подключите фотодатчик и электромагниты установки к электронному секундомеру при помощи кабелей.

Кнопкой «СЕТЬ», расположенной на задней стенке секундомера, включите его. При этом должны включиться табло индикации и электромагниты.

Вращая маятник по часовой стрелке (если смотреть на установку с правой стороны, рис.16.2), зафиксируйте его в верхнем положении при помощи дальнего от стойки электромагнита, при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на вал виток к витку. При вращении маятника против часовой стрелки фиксировать маятник необходимо при помощи ближнего к стойке электромагнита.

При помощи визира по шкале вертикальной стойки определите положение нижней точки маятника. Путь  $h$ , пройденный маятником от начального положения до момента пересечения оптической оси фотодатчика, определяется по шкале на стойке 2.

При нажатии кнопки «СТАРТ» электромагниты обесточатся, маятник начнет раскручиваться, таймер начнет отсчет времени, а в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Таймер зафиксирует время  $t$  движения маятника.

## 16.4 Порядок выполнения работы

### 16.4.1 Спецификация установки.

Масса вала  $m_O =$  кг;

масса диска  $m_D =$  кг;

масса кольца  $m_K =$  кг;

радиус вала  $R_O =$  м;

радиус диска  $R_D =$  м;

внешний радиус кольца  $R_1 =$  м;

внутренний радиус кольца  $R_2 =$  м;

фактор  $\gamma =$  .

Фактор  $\gamma$  рассчитайте по формуле (16.10) в соответствии с п. 16.2.3.

16.4.2 Проведите измерение времени  $t$  движения маятника 3÷5 раз в соответствии с п. 16.3.2 и занесите результаты в таблицу 16.

Таблица 16.

**Результаты измерений и вычислений**

№	$h, м$	$t, с$	$a, м/с^2$	$\langle a \rangle, м/с^2$	$\Delta a, м/с^2$	$\Delta a^2, м^2/с^4$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

16.4.3 Измените длину нитей маятника и повторите измерения в соответствии с п. 16.3.2.

16.4.4 Повторите проведенные эксперименты для других колец (по указанию преподавателя).

**16.5 Математическая обработка результатов**

16.5.1 Считая движение маятника равноускоренным, вычислите экспериментальное значение ускорения поступательного движения центра масс маятника по формуле:

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (16.11)$$

16.5.2 Найдите среднее значение ускорения для маятника с данным кольцом.

16.5.3 По методу прямых измерений рассчитайте среднюю квадратичную погрешность  $S_{\langle a \rangle}$  и доверительный интервал  $\Delta a$  для  $\langle a \rangle$ .

16.5.4 Запишите окончательный результат в стандартной форме:

$$a = (\langle a \rangle \pm \Delta a) м/с^2, \text{ при } \alpha = 0,95.$$

16.5.5 Найдите относительную погрешность результата.

16.5.6 Вычислите теоретическое значение ускорения  $a_{теор}$  маятника по формуле (16.8)

16.5.7 Сравните результаты эксперимента и расчета и сделайте соответствующие выводы.

### 16.6 Вопросы для самопроверки

16.6.1. Что понимается под плоским движением?

16.6.2. Запишите законы механики плоского движения.

16.6.3. Что представляет из себя маятник Максвелла?

16.6.4. Выведите теоретические формулы для ускорения маятника и силы натяжения нитей.

16.6.5. Представьте себе, что экспериментальная установка стоит на весах. Как будут изменяться показания весов во время движения маятника вниз и вверх?

### 16.7 Литература

16.7.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

16.7.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

16.7.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

16.7.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

16.7.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

16.7.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

16.7.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## Лабораторная работа № 17

### СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ

**17.1 Цель работы:** экспериментально проверить закон свободного падения тела в поле тяжести Земли; определить ускорение свободного падения.

#### 17.2 Краткое теоретическое введение

Ещё Галилей, бросая тела с высокой башни, обнаружил, что все они падают на Землю одновременно независимо от их массы. В 1969 году американские астронавты продемонстрировали, что птичье перо и молоток упали на поверхность Луны одновременно.

Но как именно движется тело, падая на Землю? Теория предсказывает, что тело будет иметь постоянное ускорение (сопротивление воздуха не учитывается). Это следует из двух законов: Закона Всемирного Тяготения:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (17.1)$$

и второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (17.2)$$

В законах (17.1) и (17.2) стоят разные массы одного и того же тела.

Первая характеризует свойство тела притягивать другие тела и называется гравитационная масса  $m_g$ .

Вторая характеризует инертные свойства тела и называется инертная масса  $m_u$ .

Законы (17.1) и (17.2) будут выглядеть так:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (17.3)$$

и

$$m_{u1} \vec{a}_1 = \vec{F}_{12}. \quad (17.4)$$

Отсюда для ускорения тела 1 получим:

$$\vec{a}_1 = -G \frac{m_{z1} m_{z2}}{m_{u1} r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (17.5)$$

Рассмотрим силу, действующую на тело с массой  $m_z$  вблизи поверхности Земли (на высоте  $h$  от её поверхности):

$$|\vec{F}| = G \frac{m_z \cdot M}{(R+h)^2},$$

здесь  $M$  – масса Земли;  
 $R$  – радиус Земли.

Поскольку высота  $h$  мала по сравнению с радиусом  $R$  Земли, можно упростить выражение для силы, действительно:

$$F = G \frac{m_z \cdot M}{(R+h)^2} = G \frac{m_z \cdot M}{R^2 (1+h/R)^2} = m_z g \frac{1}{(1+h/R)^2}$$

или

$$F \approx m_z g (1 - 2h/R).$$

В последних формулах мы обозначили через  $g$  величину

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Видно, что сила притяжения уменьшается с увеличением высоты тела над поверхностью Земли. Однако во многих случаях этой зависимостью можно пренебречь. Оценим разницу в силе притяжения тела, находящегося на высоте 1 километр над уровнем моря и на уровне моря.

$$\frac{F(h)}{F(0)} = \frac{1 - 2h/R}{1} \approx 1 - 2 \cdot 10^3 / 6.4 \cdot 10^6 \approx 1 - 3 \cdot 10^{-4}.$$

Сила отличается всего на 0,03%.

Значит, можно считать, что на тело вблизи поверхности Земли действует постоянная сила притяжения:

$$F = m_z g .$$

Используя второй закон Ньютона, получим:

$$m_u a = m_z g ,$$

откуда

$$a = \frac{m_z}{m_u} g .$$

Опыт показывает что:

*все тела независимо от их массы и строения вблизи поверхности Земли падают с одинаковым ускорением  $g$ , которое называется ускорением свободного падения.*

Значит, для всех тел отношение их гравитационной массы к инертной является постоянной величиной. Это позволяет ввести одну и ту же единицу измерения ( $кг$ ) для этих двух масс.

Тогда ускорение свободного падения тел вблизи поверхности Земли:

$$a = g .$$

### **17.3 Описание экспериментальной установки**

Экспериментальная установка состоит из вертикального стержня, закреплённого в основании прибора. На стержне расположен кронштейн с устройством для крепления шариков и контакты электронного секундомера для определения момента времени начала падения шарика. Шарик крепится снизу с помощью магнита, касаясь верхней частью трёх упоров, расположенных на кронштейне. Здесь же имеется скоба (красного цвета), при нажатии на которую магнит отпускает шарик, и последний начинает падать.

Кронштейн может перемещаться по вертикальному стержню и фиксироваться с помощью винта, расположенного на задней стороне.

На стержне имеется сантиметровая шкала, по которой можно определять вертикальное положение кронштейна.

В основании установки расположено устройство (красный

диск), фиксирующее момент падения на него шарика, и контакты для подключения электронного секундомера.

Время падения шарика с заданной высоты измеряется электронным секундомером. Секундомер управляется с помощью переключателя рода работ (ручка справа на передней панели) и тремя кнопками: START – для запуска начала измерений, STOP – для остановки, и RESET – для сброса показаний.

#### 17.4 Методика проведения эксперимента

Экспериментальная установка позволяет достаточно точно (до десятых долей миллисекунды) измерять время падения шарика, но не позволяет точно определять путь, пройденный шариком (цифры на шкале вертикального стержня дают расстояния от некоторой точки  $y_0$ , которая не совпадает с поверхностью, куда падает шарик).

Чтобы получить результат с максимальной точностью, поступим следующим образом.

Будем измерять время  $t$  падения шарика с некоторой точки, положение  $y$  которой определяется по шкале на вертикальном стержне. Путь  $h = y - y_0$ , пройденный падающим шариком, и время  $t$  его движения связаны следующей зависимостью:

$$h = \frac{gt^2}{2}. \quad (17.6)$$

Обработку результатов эксперимента проведём методом наименьших квадратов. Для этого приведём зависимость  $h$  от  $t$  к линейному виду  $y = a \cdot x + b$ , вводя новые обозначения:

$$y_0 = b; \quad h = y - b; \quad t^2 / 2 = x, \quad g = a.$$

Тогда формула (17.6) примет вид:

$$y = a \cdot x + b. \quad (17.7)$$

Параметры  $a$  и  $b$  этой линейной зависимости можно найти по



формулам, приведённым во введении к данному методическому пособию:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (17.8)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (17.9)$$

Здесь  $x_i, y_i$  находятся из эксперимента,  $n$  – число экспериментальных точек. Искомое ускорение свободного падения  $g$  равно параметру  $a$ .

## 17.5 Порядок выполнения работы

### 17.5.1. Экспериментальная часть.

#### 17.5.1.1. Подготовка к измерениям.

Подключите электронный секундомер к экспериментальной установке с помощью трёх цветных соединительных проводов, соединяя клеммы соответствующего цвета на приборе и на электронном секундомере.

Переведите переключатель рода работы электронного секундомера в режим измерения промежутков времени  $\Delta t_{AB}$  (в крайнее правое положение по часовой стрелке).

Подключите к электронному секундомеру блок питания (разъём расположен на задней стенке прибора) и включите его в сеть. На табло секундомера появятся цифры.

Нажмите кнопку RESET для сброса показаний.

Подведите шарик к кронштейну снизу, уперев его в три упора, и нажатием сверху на рычаг с магнитом зафиксируйте его.

Если показания секундомера изменились, сбросьте их, нажав на кнопку RESET.

Нажмите сверху с задней стороны стержня на красную скобу, при этом магнит отпустит шарик и последний начнёт падать, а секундомер начнёт измерение времени падения.

Падение шарика на основании прибора остановит электронный секундомер. На табло будет зафиксировано время падения шарика.

Повторите опыты несколько раз, чтобы убедиться в работоспособности установки и оценить случайный разброс времени падения шарика.

#### 17.5.1.2. Проведение измерений.

Установите кронштейн для крепления шарика в верхнее положение  $y$  (по шкале соответствующее показанию 90 см).

Измерьте три раза время падения шарика с установленной высоты и занесите результаты измерений в таблицу 17.1.

Опустите кронштейн на 5 см вниз и повторите три измерения времени падения шарика, заноса результаты в таблицу.

Проделайте опыты для 10 ÷ 15 положений кронштейна по высоте.

Таблица 17.1

#### Результаты измерений и вычислений

№	$y, \text{см}$	$t, \text{мс}$	$\langle t \rangle, \text{мс}$	$y, \text{м}$	$x = \langle t \rangle^2 / 2, \text{с}^2$
1					
2					
3					
4					
5					
6					

#### 17.6 Математическая обработка полученных результатов

Вычисления параметров линейной зависимости удобно проводить, используя таблицу 17.2.

Таблица 17.2.

#### Данные для вычисления параметров линейной зависимости $y = a \cdot x + b$

№	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1				
2				
.				
$n$				
	$\sum_{i=1}^n x_i =$	$\sum_{i=1}^n y_i =$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 =$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i =$

По формулам (17.8), (17.9) рассчитайте параметры  $a$  и  $b$ .

Результаты эксперимента представьте в виде графика  $y_i = f(x_i)$ . По найденным методом наименьших квадратов параметрам линейной зависимости  $a$  и  $b$  на этом же графике проведите прямую линию, которая будет наилучшим образом описывать эксперимент.

### **17.7 Вопросы для самопроверки**

17.7.1. Какое движение называется равноускоренным?

17.7.2. Почему ускорение свободного падения для всех тел одинаково?

17.7.3. Как зависит ускорение свободного падения от высоты вблизи поверхности Земли?

17.7.4. В чём преимущество метода наименьших квадратов при обработке результатов эксперимента?

17.7.5. От чего зависит ускорение свободного падения тела?

### **17.8 Литература**

17.8.1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: Учебник для физич. спец. вузов. – Изд. 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

17.8.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. – М.: Астрель, 2003. – 336 с.

17.8.3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 312 с.

17.8.4. Стрелков С.П. Механика. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 560 с.

17.8.5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

17.8.6. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие. Гольдин Л.Л., Игошин Ф.Ф., Козел С.М. и др.; Под ред. Гольдина Л.Л.. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 704 с.

17.8.7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – СПб.: Лань, 2005. – 106 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Приложение 1

#### Вязкость касторового масла

$t, ^\circ\text{C}$	10	20	30	40	50	60	70
$\eta, \text{мПа}\cdot\text{с}$	2420	986	451	231	125	74	73

#### Вязкость воды

$t, ^\circ\text{C}$	$\eta, \text{мПа}\cdot\text{с}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\eta, \text{мПа}\cdot\text{с}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\eta, \text{мПа}\cdot\text{с}$	$t, ^\circ\text{C}$	$\eta, \text{мПа}\cdot\text{с}$
0	1,7865	20	1,0019	50	0,5477	90	0,3155
5	1,5138	25	0,8909	60	0,4674	100	0,2829
10	1,3037	30	0,7982	70	0,4048		
15	1,1369	40	0,6540	80	0,3554		

#### Вязкость смеси глицерина с водой

Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$	Весовой процент глицерина	$\eta, \text{мПа}\cdot\text{с}$		
		$20^\circ\text{C}$	$25^\circ\text{C}$	$30^\circ\text{C}$
1,25831	100	1495,0	942,0	622,0
1,25576	99	1194,0	772,0	509,0
1,25317	98	971,0	627,0	423,0
1,25058	97	802,0	521,5	353,0
1,24798	96	659,0	434,0	295,8
1,24544	95	543,5	365,0	248,0
1,20571	80	61,8	45,72	34,81
1,12390	50	6,032	5,024	4,233
1,05804	25	2,089	1,805	1,586
1,02070	10	1,307	1,149	1,021

Приложение 2

**Плотность некоторых твёрдых тел и жидкостей**

Плотность некоторых элементов (20 <sup>0</sup> С)		Плотность некоторых жидкостей (20 <sup>0</sup> С)	
Элементы	$\rho$ , $10^3 \text{ кг/м}^3$	Жидкости	$\rho$ , $10^3 \text{ кг/м}^3$
Алюминий 1	2,70 2	Ацетон 3	0,792 4
Вольфрам	18,6-19,1	Вода	0,9982
Железо	7,87	Глицерин	1,260
Медь	8,93	Метиловый спирт	0,7928
Олово (серое)	5,8	Этиловый спирт	0,7893
Свинец	11,34		
Серебро	10,42-10,59		

Приложение 3

**Ускорение свободного падения на разных широтах**

$\varphi^{\circ}$	$g$ , м <sup>2</sup> /с	$\varphi^{\circ}$	$g$ , м <sup>2</sup> /с	$\varphi^{\circ}$	$g$ , м <sup>2</sup> /с
0	9,780300	35	9,797299	70	9,826061
5	9,780692	40	9,801659	75	9,828665
10	9,781855	45	9,806159	80	9,830257
15	9,783756	50	9,810663	85	9,831759
20	9,786337	55	9,815034	90	9,832360
25	9,789521	60	9,819141		
30	9,793213	65	9,822853		

Приложение 4

**Упругие постоянные**

Материал	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона $\mu$
Алюминий	70	0,34
Медь	130	0,34
Свинец	16	0,44
Сталь (железо)	200	0,29
Стекло	60	0,05



**Коэффициенты Стьюдента**

Число измерений	Доверительная вероятность	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
Значения коэффициентов Стьюдента														
2		0,16	0,33	0,51	0,73	1	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3		0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7	9,9	31,6
4		0,14	0,28	0,42	0,52	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5		0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6		0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7		0,13	0,27	0,4	0,55	0,72	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8		0,13	0,26	0,4	0,55	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9		0,13	0,26	0,4	0,54	0,71	0,9	1,1	1,4	1,8	2,3	2,9	3,4	5,0
10		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13		0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14		0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15		0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
100		0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4





## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Лабораторная работа №1 СТАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ .....	18
Лабораторная работа №2 ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН, ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ .....	28
Лабораторная работа №3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ДИСКА.....	38
Лабораторная работа №4 ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ .....	52
Лабораторная работа №5 ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНА КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА.....	65
Лабораторная работа №6 ИЗУЧЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ БЕРНУЛЛИ .....	79
Лабораторная работа №7 НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК .....	95
Лабораторная работа №8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА .....	106
Лабораторная работа №9 ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА.....	119

Лабораторная работа №10 ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНО-БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА.....	127
Лабораторная работа №11 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТЕЙ МЕТОДОМ СТОКСА .....	135
Лабораторная работа №12 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА.....	146
Лабораторная работа №13 ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ.....	156
Лабораторная работа №14 ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ НА МАШИНЕ АТВУДА.....	171
Лабораторная работа №15 ГИРОСКОП.....	180
Лабораторная работа №16 ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ МАКСВЕЛЛА .....	189
Лабораторная работа №17 СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ .....	197
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	204

Учебное издание

Исатаев Совет Исатаевич, Аскарлова Алия Сандыбаевна,  
Локтионова Ирина Владимировна, Омирбеков Женис,  
Ползик Владимир Всеволодович, Кашкаров Владимир Васильевич,  
Корзун Ирина Николаевна, Бердибаев Мансур Сейдахметович,  
Лаврищев Олег Александрович, Толеуов Газиз,  
Болегенова Салтанат Алихановна, Есеналина Кантай Акатаевна,  
Исатаев Мухтар Советович

**МЕХАНИКА**  
**Общий физический практикум**

Второе издание

*Учебное пособие*

*Выпускающий редактор З. Усенова*

*Редактор И. Тастаева*

*Компьютерная верстка Т.Е. Сапарова*

*Дизайн обложки: Р.Е. Скаков*

**ИБ №7193**

Подписано в печать 06.06. 2014. Формат 60x84 1 /16. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 14,5. Тираж 100 экз. Заказ №530.

Издательство «Казак университеті» Казахского национального  
университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71. КазНУ.

Отпечатано в типографии издательства «Казак университеті».