Табылған шешімдер әр түрлі каркында өзгеретін массалардың заңдылығына байланысты әр түрлі болады.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. *Вашковьяк М.А.* Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел 1. Качественное исследование // Космич. исслед. 1981. Т.19, – № 1. С. 5 – 18.

2. *Минглибаев М. Дж.* Динамика гравитирующих тел с перемеными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2012.–228 с.

3. *A.N. Prokopenya, M.Zh. Minglibayev, B.A. Beketauov.* Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses // International Journal of Non-Linear Mechanics (IJNM).–2014 (в печати).

4. *Minglibayev M., Beketauov B.* Secular perturbations in the three-body problem with variable masses. 8th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH'8). September 25 – 29, 2013, p. 36-37. Siedlce, Poland.

УДК 521.1

М.Дж. Минглибаев [1], Г.М. Маемерова[2]

[1] КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

[2] Астрофизический институт имени В.Г. Фесенкова, г.Алматы, Казахстан

К ПРОТОПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

Массалары айнымалы екіпланеталы үш дене мәселесі зерттеледі. Протопланеталардың массалары протокүннің массасынан әлқайда аз $m_1(t) << m_0(t)$, $m_2(t) << m_0(t)$ деп аламыз. Денелердің массаларының уақыт бойынша өзгеру заңдылықтары белгілі деп есептейміз. Массалар әр түрлі қарқында изотропты түрде өзгереді $\dot{m}_0 / m_0 \neq \dot{m}_1 / m_1$, $\dot{m}_0 / m_0 \neq \dot{m}_2 / m_2$, $\dot{m}_1 / m_1 \neq \dot{m}_2 / m_2$. Денелер материалдық нүктелер ретінде қарастырылады. Якоби координаталар жүйесіндегі қозғалыс теңдеулеріне сүйеніп, есеп Пуанкаре элементтерінің екінші жүйесінің аналогтарында сипатталады. Mathematica компьютерлік алгебра жүйесінің көмегімен, e_1, e_2, i_1, i_2 аз шамалардың екінші ретті дәрежесімен шектеліп, нақты символдық түрде ұйытқушы функция есептелді.

Массалары әр түрлі қарқында изотропты түрде өзгеретін екіпланеталы үш дене-нүкте мәселесінің ғасырлық ұйытқу теңдеулері алынды.

Two protoplanetary three-body problem with variable masses is investigated. It is assumed that the mass of the protoplanets much less than the mass of the proto-Sun $m_1(t) \ll m_0(t)$, $m_2(t) \ll m_0(t)$. *Laws of masses change over time of bodies are considered known. Masses change isotropically in different rates* $\dot{m}_0 / m_0 \neq \dot{m}_1 / m_1$, $\dot{m}_0 / m_0 \neq \dot{m}_2 / m_2$, $\dot{m}_1 / m_1 \neq \dot{m}_2 / m_2$. *Bodies are treated as material points. Based on the equations of motion in the Jacobi coordinates the problem described in the analogues of the Poincare second system. With the help of the computer algebra system Mathematica symbolically perturbing function is actually computed up to the second degree inclusive small quantities* e_1, e_2, i_1, i_2. *Equations of the secular perturbations are obtained for the protoplanetary three-body-points problem with masses changing isotropically in different rates.*

1 Введение.

Реальные космические тела – нестационарные. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах. В связи с этим, рассматривается задача трех тел с переменными массами, которая исследуется методами теории возмущений [1].

2 Постановка задачи. Уравнения движения в системе координат Якоби.

Рассматривается система взаимогравитирующих трех тел-точек: T_0 – протосолнце с переменной массой $m_0 = m_0(t)$, T_1 – внутренняя протопланета с переменной массой $m_1 = m_1(t)$ и T_2 - внешняя протопланета с переменной массой $m_2 = m_2(t)$. Выполняются условия

$$m_1(t) \ll m_0(t), \qquad m_2(t) \ll m_0(t). \tag{1}$$

Массы тел изменяются изотропно в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1}, \qquad \frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}, \qquad \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \tag{2}$$

Уравнения движения в координатах Якоби [1-3] записываются в виде

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = grad_{\,\vec{r}_1} U, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = grad_{\,\vec{r}_2} U - \mu_2 (2\dot{\nu}_1 \dot{\vec{r}}_1 + \ddot{\nu}_1 \vec{r}_1), \tag{3}$$

где

$$\mu_1 = \mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq const, \quad \mu_2 = \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq const,$$

приведенные массы

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right),$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \qquad r_1 / r_2 < 1,$$

$$r_{02}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2,$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2,$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \neq const, \quad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq const.$$

f - гравитационная постоянная. На основе уравнений движения (3) строится теория возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [1] для исследуемой задачи.

3 Уравнения движения в аналогах второй системы элементов Пуанкаре

Аналоги второй системы канонических элементов Пуанкаре $\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i$ определяются следующими формулами [1]

$$\begin{aligned}
&\Lambda_i = \tilde{\beta}_i \sqrt{a_i}, && \lambda_i = n_i[\phi_i(t) - \phi_i(\tau)] + \pi_i = l_i + \Omega_i + \omega_i,\\
&\xi_i = \sqrt{2\Lambda_i\left(1 - \sqrt{1 - e_i^2}\right)} \cos \pi_i, && \eta_i = -\sqrt{2\Lambda_i\left[1 - \sqrt{1 - e_i^2}\right]} \sin \pi_i,\\
&p_i = \sqrt{2\Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2}(1 - \cos i_i)} \cos \Omega_i, && q_i = -\sqrt{2\Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2}[1 - \cos i_i]} \sin \Omega_i.\\
&\pi_i = \Omega_i + \omega_i &&
\end{aligned} \tag{4}$$

где a_i, e_i, ω_i, Ω_i, i_i, $\phi_i(\tau_i)$ элементы орбиты – аналоги соответствующих кеплеровских элементов.

В аналогах второй системы элементов Пуанкаре (4) нерезонансном случая уравнения вековых возмущений имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Lambda}_i = 0, &\quad \dot{\xi}_i = \frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial \eta_i}, &\quad \dot{p}_i = \frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial q_i},\\
&\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial \Lambda_i}, &\quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial \xi_i}, &\quad \dot{q}_i = -\frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial p_i},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$
R^{*}_{1\,\text{âåê}} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)}\cdot\frac{\widetilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1 r_1^2}{2} + f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right)\right]_{\text{âåê}},
$$

$$
R^{*}_{1\,\text{âåê}} = \frac{1}{\gamma_2^2(t)}\cdot\frac{\widetilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + \tag{6}
$$

$$
+\frac{1}{\psi_2}\left[-\frac{b_2 r_2^2}{2} + f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right)\right]_{\text{âåê}} - \frac{1}{\psi_2}V_{\text{âåê}},
$$

$$
V_{\text{âåê}} = \mu_2[(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1)x_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1)y_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1)z_2]_{\text{âåê}},
$$

$$
b_1 = b_1(t) = \mu_1\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)},
$$

$$
b_2 = b_2(t) = \mu_2\frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)},
$$

$$
\widetilde{\beta}_1^2 = f\cdot\mu_1(t_0)m_1(t_0)m_0(t_0), \quad \widetilde{\beta}_2^2 = f\cdot\mu_2(t_0)m_2(t_0)[m_0(t_0) + m_1(t_0)],
$$

$$
\psi_i = \psi_i(t) = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)}.
$$

Из уравнений (5) следует, что исследование уравнений вековых возмущений сводится к решению следующей системы

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi}_i = \frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial \eta_i}, &\quad \dot{p}_i = \frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial q_i},\\
&\dot{\eta}_i = -\frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial \xi_i}, &\quad \dot{q}_i = -\frac{\partial R^{*}_{i\,\text{âåê}}}{\partial p_i}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$\Lambda_1 = \Lambda_1(t) = \Lambda_1(t_0) = \widetilde{\beta}_1\sqrt{a_1} = \sqrt{f\,\mu_1(t_0)m_1(t_0)m_0(t_0)}\sqrt{a_1(t_0)} = const\ ,$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_2(t) = \Lambda_2(t_0) = \widetilde{\beta}_2\sqrt{a_2} = \sqrt{f\,\mu_2(t_0)m_2(t_0)[m_0(t_0) + m_1(t_0)]}\sqrt{a_2(t_0)} = const\ . \tag{8}$$

В настоящей работе получены уравнения (7) в явном виде.

4 Уравнения вековых возмущений

Для написания в раскрытом виде правой части уравнений (7) необходимо выразить возмущающие функции (6) через аналоги второй системы элементов Пуанкаре (4). В настоящей работе в разложении в ряд возмущающей функции сохранены слагаемые с точностью до второй степени включительно малых величин e_1, e_2, i_1, i_2.

Уравнения вековых возмущений для эксцентрических элементов ξ_i, η_i имеют вид

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial F^{*}_{1\text{век}}(\xi_i,\eta_i,t)}{\partial \eta_1}, \qquad \dot{\eta}_1 = -\frac{\partial F^{*}_{1\text{век}}(\xi_i,\eta_i,t)}{\partial \xi_1},$$
$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial F^{*}_{2\text{век}}(\xi_i,\eta_i,t)}{\partial \eta_2}, \qquad \dot{\eta}_2 = -\frac{\partial F^{*}_{2\text{век}}(\xi_i,\eta_i,t)}{\partial \xi_2}, \tag{9}$$

а для облических элементов p_i, q_i принимают следующий вид

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial F^{*}_{1\text{век}}(p_i,q_i,t)}{\partial q_1}, \qquad \dot{q}_1 = -\frac{\partial F^{*}_{1\text{век}}(p_i,q_i,t)}{\partial p_1},$$
$$\dot{p}_2 = \frac{\partial F^{*}_{2\text{век}}(p_i,q_i,t)}{\partial q_2}, \qquad \dot{q}_2 = -\frac{\partial F^{*}_{2\text{век}}(p_i,q_i,t)}{\partial p_2}, \tag{10}$$

где

$$F^{*}_{1\text{век}}(p_i,q_i,t) = \psi^{*}_1(t)F(p_i,q_i), \qquad F^{*}_{2\text{век}}(p_i,q_i,t) = \psi^{*}_2(t)F(p_i,q_i),$$

$$\psi^{*}_1(t) = -\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_1}, \qquad \psi^{*}_2(t) = -\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_2},$$

$$F(p_i,q_i) = K^{*}_1(p_1^2 + q_1^2) + K^{*}_2(p_2^2 + q_2^2) + K^{*}_3(p_1p_2 + q_1q_2). \tag{11}$$

$$K_1^* = \frac{1}{\Lambda_1}, \quad K_2^* = \frac{1}{\Lambda_2}, \quad K_3^* = -\frac{2}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}},$$

B_1 - коэффициент Лапласа. Решения систем дифференциальных уравнений вековых возмущений (9)-(10) можно получить численно и аналитически [2, 3].

В настоящей работе, согласно допущению, в разложении возмущающей функции ограничиваемся второй степенью включительно малых величин e_i, i_i. Поэтому, также ограничиваясь с точностью до второй степени включительно малых величин e_i, i_i в формулах (11) имеем

$$p_i = \sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \cos \Omega_i, \qquad q_i = -\sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \sin \Omega_i. \tag{12}$$

Отсюда

$$\Lambda_i \sin^2 i_i(t) = p_i^2 + q_i^2, \qquad tg\,\Omega_i(t) = -q_i/p_i, \tag{13}$$

Аналитические соотношения (12), (13) полностью описывают изменение со временем орбитальных элементов $i_i(t), \Omega_i(t)$ при произвольных законах изменения масс (1)-(2).

5 Заключение.

Проблема исследована в аналогах второй системы переменных Пуанкаре. С помощью системы аналитических вычислений *Mathematica*, вычислено полное выражение возмущающей функции в протопланетной задаче трех тел с массами изменяющимися изотропно в различных темпах, в котором только выражение $m_1 m_2 / r_{12}$ состоит из 684 слагаемых.

На основе полученной возмущающей функции, впервые получены уравнения вековых возмущений рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений.

Результаты настоящей работы можно использовать при анализе влияния эффектов переменности масс на динамическую эволюцию нестационарных протопланетных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Минглибаев М.Дж.* Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение (LAP LAMBERT ACADEMIC Publishing, Германия 2012).

2. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Programming and Computer Software Vol. 40 (2014), p. 79-85

3. *Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Applied Mathematical Sciences Vol. 7 (2013), p. 4439-4454.

УДК 531

А.М. Нугуманов, И.К. Мамырбаева
Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина,
г. Астана, Казахстан

КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С КОНДЕНСАТОРОМ В НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Мақалада тұйықтаушы контурында конденсаторы бар бір ұшы демпферлі бекітілген ішектің стационар емес магнит өрісіндегі тербелістері жайлы есеп қойылып, тербеліс теңдеулері құрылған. Магниттік өріс периодты өзгерген жағдайда коэффициенттері тұрақты болатын қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі табылып, қорытындылар жасалған.

The problem setting was considered in this article and the oscillations' equations of a string with damped fastening at one of the ends with condenser at closed circuit have been obtained in a dynamic magnetic field. For special case of periodic variation of magnetic field have been the systems of ordinary differential expressions with constant coefficients obtained. The conclusions have been made.

В [1] содержится теория электромагнитного воздействия на колебания континуальных систем: струны, стержня, пластинки, ограниченной и неограниченной жидкости. Разработаны методы расчета частот, факторов затухания и амплитудных форм, характеризующих колебания этих систем в различных случаях.

В данной задаче рассмотрены линейные колебания электропроводящей струны во внешнем нестационарном магнитном поле при наличии в замыкающем контуре конденсатора.

Пусть закрепленные концы струны замкнуты идеальной электрической цепью, содержащей конденсатор емкости *C*. Образованный при этом электрический контур для простоты будем считать прямоугольным с размерами, указанными на рисунке 1.

Сопротивление проводов по сравнению с емкостным сопротивлением мало. Считается, что напряжение на конденсаторе U_c равно напряжению