Сведение задачи исследования теплопроводности стержня к системе интегральных уравнений

Әлиасқар М.С.[1,2], Мазақова Ә.Т.[1,2], Бегалиева К.Б.[2], Мазаков Т.Ж.[1,2], Джомартова Ш.А.[1],
e-mail: 87071160626@mail.ru, aigerym97@mail.ru
[1]*КазНУ имени аль-Фараби*
[2]*Институт информационных и вычислительных технологий МНВО РК*

Аннотация. *Целью данной работы является исследование теплофизического состояния стержня постоянного сечения и ограниченной длины. Рассматривается трехмерное тело, постоянное поперечное сечение которого имеет форму квадрата. Предполагается, что левый конец стержня совпадает с началом координат и коэффициент теплообмена считается постоянным по всей поверхности стержня. Также предполагается, что стержень находится под воздействием точечной температуры и поверхностного теплообмена. Поставленная задача решается приведением к системе интегральных уравнений. Разработана программа нахождения распространения температуры по стрежню, которая помещает результаты численных расчетов в несколько файлов. Результаты численных расчетов в динамике (по времени) выводятся в виде таблицы и отображаются в виде одномерных графиков.*

Ключевые слова: *интегральное уравнение, теплопроводность, теплоизоляция, температура, энергия, MatLab.*

1. Введение

Стержни ограниченной длины применяются как несущие элементы современных реактивных и водородных двигателей, газогенераторных, атомных и тепловых электростанций, технологических линий перерабатывающей промышленности, энергетических установок космических кораблей. Несущие элементы этих установок работают при одновременном воздействии разнородных видов источников тепла. Поэтому разработка специальных методов и вычислительных алгоритмов и комплекса прикладных программ позволяющих исследовать установившегося теплофизического состояния стержней ограниченной длины находящихся под одновременным воздействием разнородных видов источников тепла является актуальной проблемой.

Существует несколько методов решения задач теплопроводности: аналитический, аналоговый, численный, графический и экспериментальный. Четыре из них исходят непосредственно из различных форм уравнений. Экспериментальным методом пользуются, когда остальные методы не дают результатов. Его применяют для определения теплофизических свойств, таких как теплопроводность и удельная теплоемкость [1].

Для решения задач теплопроводности в твердых телах сложной формы используются аналитические и численные методы. Решения возможны при известных краевых условиях, включающих начальное распределение температур в теле и граничные условия на поверхности тела, которые могут быть заданы одним из трех способов: температурой поверхности, тепловым потоком и коэффициентом теплоотдачи [2].

Температура является параметром, характеризующим энергию теплового движения частиц вещества. Следовательно, процесс распространения теплоты и его направление неразрывно связаны с распределением температуры внутри тела. В общем случае температура неодинакова в различных точках тела и зависит от времени: T = T(x, y, z, t).

По истечении значительного промежутка времени температура всех частей тела выравнивается и становится равной температуре среды (это справедливо для случая, когда объем среды значительно больше объема тела и ее температура во времени практически не меняется) [3].

2. Постановка задачи

Рассмотрим горизонтальный стержень ограниченной длины l_2 и постоянного поперечного сечения $S_{пс}$ = $l_1 * l_1$. Построим глобальную декартовую систему координат *Oxyz* (Рисунок 1).

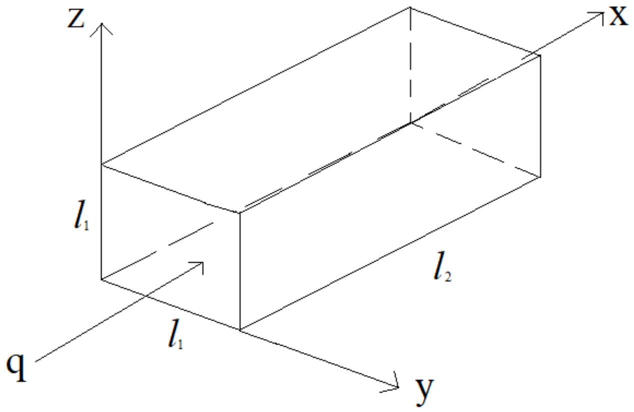

Рис 1. Общий вид металлического стержня с квадратным сечением

Распространение тепла в однородном стержне при отсутствии тепловых источников описывается следующим трехмерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

где a^2 - коэффициент температуропроводности.

$t_0 \le t \le t_1$ – промежуток времени, в течение которого изучается процесс теплопроводности стержня.

l_1– ширина и высота стержня; l_2– длина стержня;

x, y, z – пространственные переменные $0 \le y, z \le l_1$, $0 \le x \le l_2$,

$x_ц, y_ц, z_ц$ - центр стержня: $x_ц = l_2/2, y_ц = l_1/2, z_ц = l_1/2;$

D – параллелепипед $\{0 \le y, z \le l_1, 0 \le x \le l_2\}$, Г – граница D,

$Q = \{x, y, z, t | (x, y, z) \in D, \ \ t \in [t_0, t_1]\}$.

Дифференциальное уравнение в частных производных (1) является дифференциальным уравнением сохранения энергии для изохорного процесса переноса теплоты, или уравнением нестационарной теплопроводности.

Предполагается, что левый конец стержня совпадает с началом координат и коэффициент теплообмена считается постоянным по всей поверхности стержня. Также предполагается, что стержень находится под воздействием точечной температуры и поверхностного теплообмена.

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению (1) присоединить начальные и граничные условия.

В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом:

$$T|_{t=0} = q(M), \qquad M = (x, y, z) \in D. \tag{2}$$

Граничные условия зададим в виде

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma} = 0\ , \quad T\left(0, y_{ц}, z_{ц}, t\right) = q. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности совместно с начальными и граничными условиями полностью определяют задачу, т. е. зная геометрическую форму тела, начальные и граничные условия, можно дифференциальное уравнение решить до конца и, следовательно, найти поле температур в теле, $T(x, y, z, t)$ – функцию распределения температуры в любой момент времени t.

Функция $T(x, y, z, t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (2), а также начальному и граничным условиям.

Отсюда следует корректность исследуемой задачи, однако ввиду сложности изучаемых явлений решить аналитически дифференциальные уравнения в частных производных современными математическими методами чаще всего бывает очень трудно, а иногда и невозможно. Однако существует много методов решения, пригодных для практического использования. В этой связи предлагается сведение уравнения теплопроводности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Разработка вычислительного алгоритма

Покроем область D равномерной сеткой с шагами Δx, Δy и Δz по осям x, y и z соответственно. Запишем следующую разностно-дифференциальную аппроксимацию уравнения (2)

$$\frac{dT_{i,j,k}}{dt} = a^2\left(\frac{T_{i+1,j,k}-2T_{i,j,k}+T_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,k}-2T_{i,j,k}+T_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}-2T_{i,j,k}+T_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}\right), \tag{4}$$

$t \in [t_0,\ t_1]$, $i = \overline{2, nx-1}$, $j = \overline{2, ny-1}$, $k = \overline{2, nz-1}$,

$\Delta\mathrm{x} = l_1/nx$, $\Delta\mathrm{y} = l_1/ny$, $\Delta\mathrm{x} = l_2/nz$, nxyz=nx*ny*nz.

Здесь Δx–шаг и nx – количество точек разбиения вдоль оси Ox, Δy–шаг и ny–количество точек разбиения вдоль оси Oy, Δz–шаг и nz – количество точек разбиения вдоль оси Oz, индексы i, j, k – по координатам x, y и z соответственно[4].

Начальные условия (2) примут вид

$$T_{1,j,k}(t_0) = q_{i,j,k} \quad , \qquad i = \overline{1,nx}, j = \overline{1,ny}, k = \overline{1,nz}. \tag{5}$$

Граничные условия (3) аппроксимируем следующими дифференциальными уравнениями

$$\frac{dT_{1,j,k}}{dt} = 0, \frac{dT_{nx,j,k}}{dt} = 0, \frac{dT_{i,1,k}}{dt} = 0, \frac{dT_{i,ny,k}}{dt} = 0, \frac{dT_{i,j,1}}{dt} = 0, \frac{dT_{i,j,nz}}{dt} = 0, \tag{6}$$

$i = \overline{1,nx}, j = \overline{1,ny}, k = \overline{1,nz}.$

Введем вектор x размерности nxyz и матрицу A размерности nxyz*nxyz.

Элементы вектора x определим следующим образом:

$$x_p(\mathrm{t}) = T_{i,j,k}(\mathrm{t}), p = (i-1)*ny*nz + (j-1)*nz + nz \tag{7}$$

$i = \overline{1,nx}, j = \overline{1,ny}, k = \overline{1,nz}.$

Элементы матрицы A определяются через коэффициенты уравнения (4) и заданные шаги Δx, Δy, Δz по соответствующим осям.

Тогда исходная задача (2)-(4) сводится к следующей задаче Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{Ax}, \mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_0 \, , t \in [t_0, \ t_1] \tag{8}$$

Т.к. для системы дифференциальных уравнений (8) выполнены условия теоремы Коши, то для любых начальных состояний x_0 существует единственное решение $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$

Решение уравнения (8) можно представить в виде

$$x(t) = x(0) + \int_0^T Ax(\tau)d\tau \, , \ t \in [t_0, \ t_1] \, . \tag{9}$$

Уравнение (9) является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра второго рода [5]

$$y(t) = f(t) + \mu \int_0^t K(t,\tau)y(\tau)d\tau \, , \tag{10}$$

где

$$y(t) = x(t); f(t) = x(0); K(t,\tau) = A; \mu = 1. \tag{11}$$

<u>*Теорема 1*</u> [5]. Уравнение (10) имеет единственное непрерывное решение при любых начальных состояниях x_0. Это решение может быть найдено по формуле $x(t) = \left(E + At + \frac{1}{2}A^2 * t^2 \dots + \frac{1}{k!}A^k * t^k + \cdots\right) * f(t)$.

<u>Доказательство.</u> Для уравнения (10) обозначим оператор Вольтерра через

$Qy = \int_0^t K(t,\tau)y(\tau)d\tau.$

Определим повторное ядро оператора Вольтерра:

$Q^n y = \int_0^t K_n(t,\tau)y(\tau)d\tau,$

$K_n(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau, \quad R(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\tau,s).$

Пусть $M = \sup\limits_{0\le t,s\le T} |K(t,s)| \le \|A\|$. Тогда для повторных ядер справедливо $|K_n(t,s)| \le \frac{M^n * (t-s)^n}{(n-1)!}$.

Тогда решение уравнения (10) примет вид

$$y(t) = f(t) + \int_0^t R(t,\tau) f(\tau) d\tau \ . \tag{12}$$

Вместо $y(\tau)$ в (12) подставим $x(\tau)$.

Отсюда в силу независимости матрицы A от времени получим

$$x(t) = \left(E + At + \frac{1}{2}A^2t^2 \ldots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots\right) * f(t) \tag{13}$$

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Для достаточно больших k величина $\frac{1}{k!}\ \|A^k t^k\|$ становится малой и (13) можно переписать в виде

$$x(t) = \left(E + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} A^k t^k \ \right) * f(t),\ t \in [0,T]. \tag{14}$$

Теорема 2. Для любого $\varepsilon \ge 0$ существует номер r, такой что для всех $k > r$ справедливо $\frac{1}{k!}\ \|A^k T^k\| \ \le\ \varepsilon$.

Доказательство. Введем обозначения $\gamma = \|A\|\, T,\ \gamma_k = \frac{1}{k!}\gamma^k$. Рассмотрим ряд $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!}$. Вычислим $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\gamma}{k+1}$ =0. Т.к. $\rho \le 1$, то построенный ряд является сходящимся. Для любого $\varepsilon \ge 0$ существует номер r, такой что для всех $k > r$ справедливо $\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \ \le\ \rho + \varepsilon$.

Тогда $\frac{\gamma}{r+1} \le \varepsilon$ или $r = \left[\frac{\gamma}{\varepsilon}\right]$. (Целая часть от деления). Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Предложен следующий итерационный алгоритм решения:

1. По данным исходной задачи (1)-(3) строится матрица A
2. По начальным условиям (5) вычисляется вектор x_0
3. На основе сведения уравнения (8) к интегральному виду (9) и теорем 1-2 решается задача Коши (8)
4. Полученное решение выводится Rezult.txt и в файл GrafX.txt для последующей визуализации с помощью программного средства MatLab [6-7].

4. Численное решение задач при конкретных исходных данных.

Разработана программа нахождения распространения температуры по стрежню, которая помещает результаты численных расчетов в несколько файлов. Результаты численных расчетов в динамике (по времени) отображаются в виде одномерных графиков. Расчеты проведены при следующих исходных данных:

$l_1 = 1.0;\ l_2 = 10.0;\ \Delta t = 0.01;$

nx =10; ny= 6; nz= 6; $q = 200.$

На рисунке 2 представлен график распространения температуры по центру стержня в направлении X от начала координат в динамике.

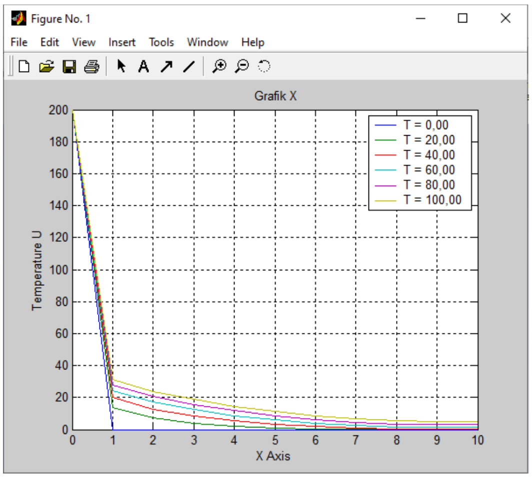

Рис 2. График распространения температуры по центру стержня в направлении X от начала координат

ВЫВОДЫ

Исследование уравнения теплопроводности стержня с квадратным сечением сведено к системе интегральных уравнений, для решения которой разработан соответствующий алгоритм.

В виде теорем доказаны свойства предлагаемого алгоритма.

Результаты численных расчетов не противоречат экспериментальным данным. Дополнительно результаты выводятся в текстовые файлы и обеспечивают построение одномерных изображений динамики температуры с помощью системы MatLab, для которого написана соответствующая программа.

Работа выполнена за счет средств программно-целевого финансирования научных исследований на 2021-2022 годы по проекту ИРН OR11465437 «Разработка национального электронного банка данных по научной зоологической коллекции Республики Казахстан, обеспечивающего их эффективное использование в науке и образовании».

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович Д.С., Суша О.Н., Коровкина Н.П., Кобринец В.П. Аналитический и численный методы решения уравнения теплопроводности //Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика, 2015, № 6. с.122-127

2. Вороненко Б.А., Крысин А.Г., Пеленко В.В., Цуранов О.А. Аналитическое описание процесса нестационарной теплопроводности. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 48 с.

3. Dede E.M., Yu Z., Schmalenberg P., Iizuka H. Thermal metamaterials for radiative plus conductive heat flow control // Applied Physics Letters, 2020. – 116(19). – DOI: 10.1063/5.0007574

4. Сиковский Д. Ф. Методы вычислительной теплофизики. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013.- 98 с.

5. Васильев А.Б., Тихонов Н.А., Интегральные уравнения. – М.: МГУ, 1989. - 156 с.

6. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. Matlab 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104с.

7. Дьяконов В.П. Matlab 6.0/6.1/6.5/6.5+SP1+Simulink 5/5. Обработка сигналов и изображений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 592 с.

Сведения об авторах

1. Әлиаскар Мағжан Сүндетұлы– докторант КазНУ имени аль-Фараби
2. Мазақова Әйгерим Талғатқызы – докторант КазНУ имени аль-Фараби
3. Бегалиева Каламкас Балтабековна – докторант КазНУ имени аль-Фараби
4. Мазаков Талгат Жакупович – доктор физ.-мат. наук, профессор КазНУ имени аль-Фараби, ГНС Института информационных и вычислительных технологий МОН РК
5. Джомартова Шолпан Абдразаковна - доктор технических наук, доцент КазНУ имени аль-Фараби