



Ҳалқаро илмий конференция

Международная научная конференция

The International scientific conference



НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
имени МИРЗО УЛУГБЕКА



САМАРКАНДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени АЛШИПЕРА НАВОИ



ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ



САМАРКАНДСКИЙ ФИЛИАЛ
ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ

САМАРҚАНД
15-17 СЕНТЯБРЬ
2014

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА ИНФОРМАЦИОН ТЕХНОЛОГИЯЛАРНИНГ ДОЛЗАРБ МУАММОЛАРИ – АЛ-ХОРАЗМИЙ 2014

Конференция мақолалари

Тўплам № 1

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ – АЛЬ-ХОРЕЗМИ 2014

Труды конференции

Том № 1



MODERN PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES- AL- KHOREZMIY 2014

Transactions of the conference

Volume № 1

САМАРКАНД
15-17 СЕНТЯБРЯ
2014

SAMARQAND
15-17 SEPTEMBER
2014

"Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2014": Труды международной конференции (Том I). (15-17 сентября 2014 г., Ташкент). Главный редактор академик А.С. Садуллаев. – Ташкент, НУУз им. М. Улугбека 2014 г. -282 с.

Сборник содержит труды участников международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2014" и предназначены для студентов, магистров, докторантов, преподавателей ВУЗов, специалистов в области математики и информационных технологий.

Редакционная коллегия:

Главный редактор - академик А.С. Садуллаев.
Заместители главного редактора - проф., д.ф.-м.н. М. Арипов,
- проф., д.ф.-м.н. З. Хакимов.
Ответственные секретари - проф., д.ф.-м.н. К.С. Фаязов,
- проф., д.ф.-м.н. З.Х. Юлдашев.

Члены редакционной коллегии:

профессор Б.Ф. Абдурахимов (Национальный университет Узбекистана),
академик Ш.А. Аюпов (Национальный университет Узбекистана),
профессор Р.Р. Ашурев (Национальный университет Узбекистана),
профессор У. Бегимкулов (Головной научно-методический центр при МВССО РУз),
академик Т.Ф. Бекмуратов (ЦРПП и АПК при ТУИТ),
академик Н.Т. Данаев (Национальный университет Казахстана),
профессор З. Ибрагимов (Калифорнийский государственный университет, США),
профессор Г.И. Мухамедов (Национальный университет Узбекистана),
профессор А.Х. Мухиддинов (Ташкентский университет информационных технологий),
профессор М.А. Рахматуллаев (Ташкентский университет информационных технологий),
профессор М. Ruzhansky (Империал колледж, Лондон),
академик М.С. Салахитдинов (Национальный университет Узбекистана),
профессор У.Н. Ташкенбаев (Самаркандинский государственный университет),
профессор Б.А. Шоимкулов (Национальный университет Узбекистана),
профессор Р. Ярмухамедов (Институт ядерной физики АН РУз).

Техническая редакция: к.ф.-м.н. А.Т. Хайдаров,
к.ф.-м.н. М.Ш. Маматкулова,
к.ф.-м.н. Ф.А. Кабилжанова,
к.ф.-м.н. А.С. Матякубов,
к.т.н. Л.П. Варламова,
А.И. Тиллаев,
Ж.Р. Раимбеков,
Д.К. Мухамедиева,
А.Ю. Нурумова,
И.О. Хажиев,
Т.К. Хожиев,
К.С. Ахмедова,
З.Р. Рахмонов,
О.И. Сахобидинова,
Л.А. Тогаев.

Гапурова А.А. К свойствам одной нелинейной модели нелинейной диффузии с переменной плотностью	9
Далабаев У. Численное исследование характера подземной силы, действующей на цилиндрическую частицу в течении Куэтта	9
Жолдахмет М.К., Рахымова А.Т. Численный анализ выплытия газа через подземный водоносный резервуар	9
Кабилжанова Ф.А., Мукимов А. Асимптотика решений задачи теплопроводности для уравнения недивергентного вида	9
Кудайкулов А.А. Прямое численное моделирование течения однофазной жидкости в пористой среде с периодической микроструктурой	10
Матякубов А.С. Асимптотическое поведение автомодельных решений нелинейных систем параболического типа недивергентного вида	10
Маматкулова М. Ш. Моделирование интенсивных сжимающих и ударных нагрузений полупространства с учётом нелинейных свойств среды	10
Мирзоев А. А., Ходжаев Я.Д. Течения многофазных сред со сложной реологией учитывающие объемные содержания фаз	10
Мухамедиева Д.К. Автомодельное решение популяционной модели типа Колмогорова-Фишера с двойной нелинейностью	11
Мухамедиева Д.К. Кросс-диффузионные модели задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера и качественные свойства ее решения	11
Мухамбетжанов С.Т. Об одной модели теории фильтрации со свободными границами	11
Назиров Ш.А., Рожкова Е.В., Рахмонов К.С. Компьютерное построение	
аналитических решений распространения плоских волн в упругих анизотропных средах в условиях плоской деформации при помощи систем MAPLE	12
Нигманова Д.Б. К свойствам обобщенных решений одной нелинейной задачи Коши для нелинейной системы параболического типа с поглощением или источником	12
Назирова Э.Ш., Содиков Р.Т. Построение математических зависимостей для некоторых параметров пластовой среды	13
Рахмонов З.Р. Об одной многомерной нелинейной задачи фильтрации в неоднородной среде с нелокальным граничным условием	13
Садуллаева Ш.А. К локализации волновых решений одной системы взаимной реакции-диффузии с конвективным переносом и поглощением	13
Сахаев Ш.С., Хомпыш Х. Решение задачи сопряжения электродинамики	14
Ташпулатов Ф.А., Абдуллаева Н.Ф., Варламова Л.П., Сахобидинова О.И. К задаче об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду	14
Урунбаев Э. Математическая модель прямолинейного движения автомобиля с учетом угловой, боковой и продольной деформации шин	14
Узаков З.У., Кипчаков А.Х., Узакова Д.З. Математическое моделирование процессов двухфазной фильтрации	15
Утебаев Д., Москальков М.Н. Математическая модель двухфазной фильтрации	15
Юсупов Ю.С., Сагдуллаева Д.А., Адамбаев У. Численное решение связанный термодинамической пластической задачи основанной на деформационной теории	15
Хайиткулов Б.Х. Математическое моделирование задач нефтегазовых месторождений	15
Халджигитов А.А., Полатов А.М., Икрамов А.М. Численное моделирование физически нелинейных процессов деформирования композитных материалов	16
Хожиев Т.К. Об одном численном методе для решения систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка при краевых условиях IV рода и их реализации	16
Худаяров Б.А. Моделирование процессов нелинейного деформирования криволинейных участков вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкости	16
Хужаёров Б.Х., Сулаймонов Ф.У., Холияров Э.Ч. Задача определения кинетический коэффициент переноса вещества в двухзонной среде с учетом равновесной адсорбции	16
Хужаёров Б.Х., Сайдуллаев У.Ж. Фильтрование суспензий с учетом конвективного переноса частиц при пульсационных колебаний давления	17
Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Математическое моделирование процессов фильтрации суспензии в пористой среде с подвижной и малоподвижной жидкостью с учетом предельного супфазионного градиента давления	17

Каюмов Т., Исмоилов А. Учинчи тартибли чизиксиз оддий дифференциал тенглама ечимларининг асимптоталари ҳакида

СЕКЦИЯ №3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

- Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh. Method for solving of a boundary value problem at phase and integral constraints
- Abylkairov U.U., Zhensykbaev K.S., Khompysh Kh. Solvability of the initial-boundary value problem for stokes equation inhomogeneous fluids
- Berdyshev A.S., Karimov E.T. On a spectral properties of a boundary value problem with integral gluing condition for mixed type equation
- Zhunussova Zh.Kh. Construction of surface corresponding to domain wall solution
- Ganikhodzhaev R.N., Pirnapasov A.T. Quadratic homeomorphisms of the two-dimensional simplex and their trajectories
- Абулов М.О. Краевая задача для одного нелинейного уравнения третьего порядка
- Абулов М.О. О разрешимости смешанной задачи для одного нелинейного уравнения высокого порядка
- Абдуллаева З.Ш. Двухточечная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка
- Айпанов Ш.А., Мурзабеков З.Н. Решение задачи оптимального разворота космического аппарата при закрепленных концах траекторий
- Давлатов А., Тошпулатов Д. Хочкин-Хаксли түрнидаги тенгламалар системаси учун иккинчи чегаравий масалани интеграл тенгламалар системасига келтириши ҳакида
- Дуйшеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т. Применение метода бихарактеристик в контактной задаче динамики
- Ибрагимов А.А. Марковская игра большой матч в классе стационарных стратегий
- Игамбердиев Х.З., Абдурахманова Ю.М. Регулярное обобщенное оценивание состояния и совмещенный синтез систем управления динамическими объектами
- Игамбердиев Х.З., Зарипов О.О. Адаптивное оценивание состояния динамических объектов управления на основе концепций теории некорректных задач
- Кабидолданова А.А. О построении ограниченного управления для линейных систем
- Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной задаче с оператором дробного дифференцирования
- Каримов Э.Т. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа
- Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для вырождающегося уравнения четвертого порядка
- Маматов А.Р. О линейной максиминной задаче управления с подвижными краевыми условиями
- Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А. Конструктивный метод решения задачи оптимального быстродействия для линейных динамических систем
- Сакабеков А., Аужани Е. Смешанная задача для одномерной нелинейной нестационарной системы моментных уравнений Больцмана в пятом приближении при обобщенных граничных условиях Владимирова-Маршака
- Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для уравнения вязкоупругости в ограниченной области
- Тураев Р.Н. Об одной неклассической задаче со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений
- Уринов А.К., Маманазаров А.О. Краевая задача для смешанно-параболического уравнения с сингулярными коэффициентами
- Фаязов К.С., Хажиев И.О. Некорректные краевые задачи для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка
- Фаязов К.С., Худайберганов Я.К. Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка в пространстве
- Хасанов М.М., Салаев С.Р. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций

12. Stuart A. M. /MA L Math. Appl. Med. Biol. 10 149 (1993)
13. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition). – N.Y., Berlin, Heidelberg Springer Verlag, 2001. – 551 p.,
14. Aripov M. Approximate Self-similar Approach tu Solve Quasilinear Parabolic Equation // Experimentation, Modeling and Computation in Flow Turbulence and Combustion vol. 2. 1997, p. 19- 26.
15. Арипов М. Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач Ташкент, Фан, 1988, 137 с.
16. Белотелов Н.В., Лобанов А.И. Популяционные модели с нелинейной диффузией. // Математическое моделирование. –М.; 1997, №12, С. 43-56.
17. В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование -М.: Наука, 1976, 288 с.
18. Гаузе Г.Ф. О процессах уничтожения одного вида другим в популяциях инфузорий // Зоологический журнал, 1934, т.13, №1.
19. Aripov M., Muhammadiev J. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitatea din placeCityPitesti, Seria Matematica si Informatica. №3, 1999. pp. 19-40.
20. Aripov M.M. Muhammediyeva D.K. To the numerical modeling of self-similar solutions of reaction-diffusion system of the one task of biological population of Kolmogorov-Fisher type. International Journal of Engineering and Technology. Vol-02, Iss-11, Nov-2013. placecountry-regionIndia. 2013.
21. Арипов М.М. Мухамедиева Д.К. Подходы к решению одной задачи биологической популяции. Вопросы вычислительной и прикладной математики. -Ташкент. 2013. Вып.129. -С.22-31.
22. Мари Дж. Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. М., Мир,1983, 397 стр.
23. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, сер. Математика и механика, т. 1, 1-25.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Мухамбетжанов С.Т.

e-mail: saltan@math.kz

Аннотация. Работа посвящена исследованию математической модели неравновесной фильтрации, описывающей процесс вытеснения нефти полимерными растворами. Известно, что наличие активной примеси сводится к увеличению или уменьшению доли водной фазы в потоке. В одномерном случае рассматриваемая математическая модель изучена в работе [1]. В потоке активная примесь может находиться в трех состояниях: растворенной в воде, растворенной в нефти и адсорбированной на стенках паровых каналов.

Введение. Рассматривается случай вытеснения нефти полимерными растворами, т.е. полимер растворяется только в воде. Тогда содержание полимера в растворе увеличивает вязкость водной фазы, а с ростом количества адсорбированного полимерного вещества уменьшается фазовая проницаемость для воды.

1 Вывод уравнений. Введение дополнительного фактора (активной примеси) приводит к изменению системы уравнений двухфазной фильтрации, состоящей из уравнений баланса воды и нефти в потоке, обобщенного закона фильтрации Дарси и условия капиллярного равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot s \cdot \rho_1) + \operatorname{div} (\rho_1 \cdot \vec{u}_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot (1-s) \cdot \rho_2) + \operatorname{div} (\rho_2 \cdot \vec{v}_2) = 0,$$

$$\vec{v}_i = -k \frac{f_i}{\mu_i} \nabla p_i, i = 1, 2,$$

$$p_2 - p_1 = p_c(S)$$

где m, ρ_i, μ_i, f_i, k и $p_c(s)$ - соответственно пористость среды, плотности фаз, вязкости жидкости, относительные фазовые проницаемости, проницаемость среды и капиллярное давление.

В уравнениях (1) – (4) все основные характеристики жидкостей и пористой среды при введении активной примеси меняются, и система не является замкнутой. Исходя из результатов работы [1] для замыкания модели добавляется следующее уравнение относительно концентрации с-активной примеси

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot c \cdot s \cdot \rho_1 + m \cdot \varphi \cdot \rho_2 (1-s) + a(c)) = \operatorname{div} (D \cdot \nabla c - c \cdot \vec{v}_1 \cdot \rho_1 - \varphi \cdot \vec{v}_2 \cdot \rho_2) \quad (5)$$

где $\varphi(c), a(c)$ - соответственно массовые концентрации примеси в нефтяной фазе и адсорбированной примеси в единице объема пористой среды. В соотношении (5) при вытеснении нефти полимерными растворами функция $\varphi(c) = 0$, а функция $a(c)$, как правило, определяется через уравнение Ленгмюра или по закону Генри. Такое предположение не всегда оправдано. В частности, для мицеллярных растворов изотерма сорбции ПАВ в окрестности критической концентрации мицеллообразования c_* может быть немонотонной. Указанную трудность можно обойти введением следующей функции: $\chi(c) = 1$ при $c > c_*$, $\chi(c) = 0$ при $c < c_*$ и $\chi(c) \in [0, 1]$ при $c = c_*$. Тогда функцию $a(x, t)$ можно определить из следующего уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (\chi(c) - a), \quad (6)$$

где τ - время прибытия каждой молекулы в адсорбционный центр.

Лемма 1. Пусть $u \in W_p^1(Q)$, Q - ограниченная область в \mathbb{R}^k , $p > 1$, $A_\varepsilon = \{x \in Q | |u(x)| \leq \varepsilon\}$. Тогда $\nabla u = 0$ п.в. в A_0 .

Лемма 2. Пусть Q - ограниченная область в \mathbb{R}^k , $v_n, v, g \in L_p(Q)$, $p > 1$, $\forall x \in Q \setminus A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = f(x)$ и $\forall n \in N$, $|v_n(x)| \leq g(x)$, где $\operatorname{mes} A = 0$; $v_n \rightarrow v$ слабо в $L_p(Q)$. Тогда $v \geq f$ п.в. в Q .

2 Постановка задачи. Будем рассматривать фильтрационное течение с активной примесью в заданной конечной области Ω с кусочно-гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. В соответствии с различными видами граничных условий граница Γ может разбиваться на несколько связных компонент Γ^i . Пусть $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $S_T^i = \Gamma^i \times [0, T]$, n - внешняя нормаль к границе Γ . Следуя результатам работы [3] систему (1) – (6) можно представить в следующем виде:

$$m \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} (K_0 \cdot a_1 \cdot \nabla s - b \cdot \vec{v} + \vec{F}), \quad (7)$$

$$\operatorname{div} (K \cdot \nabla P + \vec{f}) = 0, -\vec{v} = K \cdot \nabla P + \vec{f}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \cdot c \cdot s + a) = \operatorname{div} (D \cdot \nabla c - c \cdot \vec{v}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (\chi(c) - a), \quad (10)$$

где функция $\chi(c)$ равна единице, если $c > c_*$, $\chi(c)$ равна нулю, если $c < c_*$ и принимает значения из промежутка $[0, 1]$, если $c = c_*$, m -пористость, $K = K_0(x)$ – тензор фильтрации для однородной жидкости, капиллярное давление обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial P_k}{\partial s} < 0 \text{ и } \frac{\partial P_k}{\partial c} \leq 0, \quad (11)$$

$$p = p_1 - \int \frac{\partial p_k}{\partial s} \frac{k_{02}}{k} d\xi + \rho_1 g h$$

– приведенное давление, остальные коэффициенты и функции определяются из следующих соотношений:

$$k = k_{01}(s) + k_{02}(s), \quad a_1 = -\frac{\partial p_k}{\partial s} \frac{k_{01} k_{02}}{k}, \quad \vec{F} = K_1 \int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s} \frac{k_{02}}{k} d\xi, \quad (11)$$

$$K = K_1 + K_2 = kK_0 = (k_{01} + k_{02})K_0, \bar{f} = K \int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s} \frac{k_{02}}{k} d\xi + K_2 \nabla p_k + K_2(\rho_2 - \rho_1) \vec{g}$$

Таким образом, требуется найти функции $\{s, p, \vec{v}, c, a\}$ (соответственно водонасыщенность, давление, скорость течения, концентрацию активной примеси, функцию адсорбции), определенные в Q_T , удовлетворяющие уравнениям (7)-(10), начальным:

$$s|_{t=0} = s_0(x), c|_{t=0} = c_0(x), a|_{t=0} = a_0(x), \quad (12)$$

а также следующим граничным условиям:

$\vec{v}\vec{n} = \vec{v}_1\vec{n} = 0$ – условие непротекания и для концентрации:

$$c(x, t) = 0 \text{ при } (x, t) \in S^0 = \Gamma^0 \times [0, T]. \quad (13)$$

$$p = p_0(x, t), s = s_0(x, t),$$

$$-D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \vec{v}_{1n} \cdot c = \vec{v}_{1n} \cdot \tilde{c} \text{ при } (x, t) \in S^2 = \Gamma^2 \times [0, T], \quad (14)$$

$$-(K\nabla p + \vec{f})\vec{n} \equiv \vec{v}\vec{n} = R(x, t), (x, t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0, T],$$

$$-(K_0 a_1 \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0)\vec{n} \equiv \vec{v}_1\vec{n} = bR(x, t), (x, t) \in S^1. \quad (15)$$

$$-D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \vec{v}_{1n} \cdot c = q_n \cdot c^* \text{ при } (x, t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0, T],$$

где q_n – заданный расход на единицу площади, \tilde{c} и c^* – известные значения концентрации примеси.

Всюду ниже предполагается, что все коэффициенты в системе уравнений (7)–(10) определены при всех (x, s, c) и имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка. В дальнейшем систему уравнений (7) – (10) с дополнительными условиями (12) – (15) будем называть задачей 1.

Определение. Ограниченнные измеримые в Q_T функции $s(x, t)$, $p(x, t)$, $c(x, t)$, $a(x, t)$ назовем обобщенным решением задачи 1, если

- а) $0 \leq s(x, t) \leq 1$, $0 \leq c(x, t)$, $0 \leq a(x, t) \leq 1$ почти всюду в Q_T ;
- б) $\nabla p \in L_{2,\infty}(Q_T)$, $a_1 \cdot \nabla s \in L_2(Q_T)$, $D \cdot \nabla c \in L_2(Q_T)$;
- в) $a_t, a \in L_\infty(Q_T)$;
- г) на S^2 выполняются граничные условия (14);
- д) для произвольных допустимых функций таких, что

$$\varphi(x, t), v(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T), \psi(x) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\varphi(x, t)|_{S^2} = v(x, t)|_{S^2} = \Psi(x)|_{S^2} = 0$$

при почти всех $t \in [0, T]$ выполняются равенства

$$\mathfrak{I}_1 \equiv (ms, \varphi_t)_{Q_t} + (\vec{v}_1, \nabla \varphi)_{Q_t} = (bR, \varphi)_{S_t^1} - (ms, \varphi)_\Omega |_0^t \quad (16)$$

$$\mathfrak{I}_2 \equiv (\vec{v}, \nabla \psi)_\Omega = (R, \psi)_{\Gamma^1} \quad (17)$$

$$\mathfrak{I}_3 \equiv (m \cdot s \cdot c + a, v_t)_{Q_t} + (D \cdot \nabla c - c \cdot \vec{v}_1, \nabla v)_{Q_t} = (v_{1n} \cdot \tilde{c}, v)_{S_t^1} - (m \cdot s \cdot c + a, v)_\Omega |_0^t \quad (18)$$

Замечание 1. Всюду ниже считается, что в области течения отсутствуют застойные зоны, в которых достигаются предельные значения $s = 0, 1$. Задачу 1 в этом случае будем называть регулярной, т.е. $a_1 \geq \delta > 0$, а ее решения регулярными. Такое определение введено в работе [1].

Замечание 2. В области $E_c = \{(x, t) \in Q_T | c(x, t) = c_*\}$ выполняются равенства (см. лемму 1). Тогда из уравнений (9), (10) выводится $\chi[c(x, t)] = a(x, t)$ для п.в. в $(x, t) \in E_c$ и из определения функции $\chi(c)$ следует, что $0 \leq a(x, t) \leq 1$ для п.в. $(x, t) \in E_c$.

Здесь и далее обозначения норм и пространств функций совпадают с обозначениями в [1].

3 Существование. Функция $\chi(c)$ аппроксимируется непрерывными монотонными функциями $\chi_n(c)$, совпадающими с $\chi(c)$ при $c > c_* + \frac{1}{n}$, $c < c_*$, $n = 1, 2, \dots$. Через $(7)_n$ – $(10)_n$ обозначаются система уравнений (7) – (10), где вместо функции $\chi(c)$ рассматривается функция $\chi_n(c)$. Тогда задача 1 решается по следующей последовательности: эллиптическая задача относительно давления, затем

нелинейные параболические задачи относительно насыщенности $s(x, t)$ и с использованием теории Шаудера о неподвижной точке концентрация активной примеси $c(x, t)$ с функцией

$$a(x, t) = a_0(x) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t \chi_n(g(x, \zeta)) \cdot e^{\frac{\zeta-t}{\tau}} d\zeta,$$

причем $c(x, t) = \Lambda(g(x, t))$, где $\Lambda : W_2^{1,1}(Q_T) \rightarrow W_2^{1,1}(Q_T)$ оператор, неподвижная точка которого – решение задачи 1. При этом имеет место следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты в системе уравнений имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка и дополнительно

$$\left(\|p_0\|_{\infty, Q_t}; \sup_t \|p_0\|_{W_2^1(\Omega)}; \|s_{0t}\|_{1, Q_T}; \|\nabla s_0\|_{2, Q_T}; \|\tilde{c}_t\|_{1, Q_T}; \|\nabla c_0\|_{2, Q_T} \right) \leq M;$$

$a_0(x)$ – измерима и $0 \leq a(x, t) \leq 1$, $x \in \Omega$.

Тогда существует одно обобщенное решение задачи 1 (в смысле выполнения определения 1) функций $s(x, t), c(x, t)$ и $a(x, t)$ удовлетворяют п.в. в Q_T неравенствам:

$$0 < \delta_0 \leq \min s_0(x, t) \leq s(x, t) \leq \max s_0(x, t) \leq 1 - \delta_1 < 1 \quad (2)$$

$$0 \leq c(x, t) \leq 1, 0 \leq a(x, t) \leq 1, |a_t| \leq 1 \quad (2)$$

Доказательство. Оценка (19) и первое неравенство в (21) является следствием принципа максимума, второе неравенство в (21) следует из представления (18). Существование решения задачи 1 относительно функций (s, p) полностью повторяет рассуждения из [2], т.е. приближенные решения вспомогательно задачи 1 ищется в виде

$$s^n(x, t) = \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k^N(t) \cdot \varphi_k(x) + s_0(x, t), \quad (22)$$

$$p^n(x, t) = \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k^N(t) \cdot \psi_k(x) + p_0(x, t), \quad (23)$$

Аналогичное представление имеет место для функции $c(x, t)$:

$$c^n(x, t) = \sum_{k=1}^N d_k^N(t) \cdot v_k(x) + \tilde{c}(x, t), \quad (24)$$

где фундаментальные в $W_2^1(\Omega, \Gamma^2) = \{\varphi(x), v(x) \in W_2^1(\Omega), \varphi(x) = v(x) = 0, x \in \Gamma^2\}$ системы функций φ_k, v_k и ψ_k нормированы следующим образом:

$$(m\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ik}, (mv_k, v_i) = \delta_{ik}, (\nabla\psi_k, \nabla\psi_i) = \delta_{ik},$$

где δ_{ik} – символы Кронекера. Для определения неизвестных функций $\tilde{a}_k^N(t), b_k^N, d_k^N(t)$ получаем нелинейную эволюционно – стационарную систему уравнений:

$$\frac{d\tilde{a}_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j^N \cdot \alpha_{jk} + \beta_k, \tilde{a}_k^N(0) = 0 \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^N b_j^N \cdot \mu_{jk} + \lambda_k = 0 \quad (26)$$

$$\frac{dd_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^N d_j^N \cdot \gamma_{jk} + \aleph_k, d_k^N(0) = 0 \quad (27)$$

в которой $\alpha_{jk} = -(K_0 \cdot \bar{a}_1 \cdot \nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)_\Omega + (b \cdot \vec{v}, \nabla\varphi_k)_\Omega$; $\beta_k = -(ms_{0t}, \varphi_k)_\Omega + (\vec{F}, \nabla\varphi_k)_\Omega - (K_0 \cdot \bar{a}_1 \cdot \nabla s_0, \nabla\varphi_k)_\Omega$; $\mu_{jk} = (K \cdot \nabla\psi_j, \nabla\psi_k)_\Omega$; $\mu_{jk} = (\vec{f}, \nabla\psi_k)_\Omega - (R, \psi_k)_{\Gamma^2}$; $\gamma_{jk} = -(D \cdot \nabla v_j, \nabla v_k)_\Omega + (\vec{v}_1 \cdot v_j, \nabla v_k)_\Omega - (m \cdot \bar{s}_t \cdot v_j, v_k)_\Omega + \frac{1}{\tau} (a - p(g), v_k)_\Omega$;

$$\aleph_k = -(m \cdot \bar{s} \cdot \tilde{c}_t, v_k)_{\Gamma^2} - (D \cdot \nabla \tilde{c}, \nabla v_k)_\Omega + (\tilde{c} \cdot \vec{v}_1, \nabla v_k)_{\Gamma^2}.$$

Разрешимость задач (25) – (27) следует из сделанных предположений на коэффициенты этой вспомогательной системы, т.е. функции $\mu_{jk}, \lambda_k, \gamma_{jk}$ ограничены, а β_k, \aleph_k интегрируемые функции по $t \in [0, T]$ при всех значениях $\tilde{a}_k^N, b_k^N, d_k^N$. Сначала решается (26) для определения b_k^N в каждый момент времени из нелинейной системы алгебраических уравнений. Затем решаются задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (25) и (27) для определения функций \tilde{a}_k и d_k^N соответственно. Последняя, в силу указанных выше свойств коэффициентов, разрешима для всех значений $t \in [0, T]$, принадлежащих пространству $W_2^1(0, T)$. Следовательно, при каждом N на интервале $(0, T)$ существует единственное решение задачи Коши при $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда следуя результатам работ [2,3] легко получить равномерные по N оценки приближенных решений, позволяющие совершить предельный переход при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, полученное решение определяется в $W_2^{1,1}(Q_T)$ некоторое выпуклое, ограниченное подмножество, которое оператор P переводит в себя. Так как P – вполне непрерывный, то по теореме Шаудера существует неподвижная точка оператора P , которая и дает решение задачи $(7)_n - (10)_n$.

Обозначим его через $\{s_n, p_n, c_n, a_n\}$. Тогда в силу априорных оценок для $\{s_n, p_n, c_n, a_n\}$ и ограниченность $\chi_n(c_n)$ позволяют выделить подпоследовательность n_k , такую, что $\{s_{n_k}, p_{n_k}, c_{n_k}, a_{n_k}\} \rightarrow \{s, p, c, a\}$ п.в. в Q_T , $\frac{\partial s_{n_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial c_{n_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla s_{n_k} \rightarrow \nabla s, \nabla c_{n_k} \rightarrow \nabla c, \nabla p_{n_k} \rightarrow \nabla p$, слабо в $L_2(Q_T), a_{n_k} \rightarrow a, \frac{\partial a_{n_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial a}{\partial t}, \chi_{n_k}(c_{n_k}) \rightarrow h$ -слабо в $L_\infty(Q_T)$.

Из определения функции χ_n и сходимости c_{n_k} к п.в. в Q_T , следует, что $h(x, t) = \chi(c)$ п.в. в $Q_T \setminus E_c$, а также из леммы 2 на множестве E_c функция $h(x, t) = a(x, t)$. Окончательно, переходя к пределу в интегральных тождествах, аналогичным (16) – (18), получим искомое решение задачи 1.

4 Устойчивость и единственность решений

Теорема 2. Пусть выполнены условия (а) – (д) из определения и граница $\equiv \partial\Omega \in H_*^1$, $\{s_j, p_j, \vec{v}_j, c_j, a_j\}$ – обобщенные решения регуляризированных задач 1 соответственно с начальными и граничными функциями вида (12) – (15), $j = 1, 2$, и такие, что

$$\left(\|\nabla s_j\|_{\alpha_1, \beta_1, Q_T}, \|\nabla p_j\|_{\alpha_2, \beta_2, Q_T}, \|R_j\|_{\alpha_0, \beta_0, \Gamma''} \right) \leq M \quad (28)$$

и при этом данные удовлетворяют условиям (11), то для $s = s_1 - s_2, p = p_1 - p_2, c = c_1 - c_2, a = a_1 - a_2$,

$$\left(\|s; p\|_{V_2(Q_T)} \right) \leq C_0 \cdot \mu; \left(\|\nabla s; \nabla p\|_{q, Q_T} \right) \leq C_0 \cdot \mu^{1-\gamma}; \|c\|_{q, Q_T}^{(2)} \leq C_1 \cdot \lambda^{1/q}, \|a_t\|_{p, Q_T} + \|a\|_{p, Q_T} \leq C_2 \cdot \lambda^{1/p} \quad (29)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu &= (\|s_0\|_{V_2(Q_T)} + \|c_0\|_{V_2(Q_T)} + \|p_0\|_{V_2(Q_T)} + \|R\|_{\alpha_0, \beta_0, \Gamma''} + \\ &\quad \|a_0\|_{V_2(Q_T)} + \|s_{0t}\|_{2, Q} + \|a_{0t}\|_{V_2(Q_T)}), \quad 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

константы C_0, C_1, C_2 зависят от $\alpha_i, \beta_i, T, \Omega$ и от норм данных.

Доказательство теоремы следует из результатов работ [1-2].

5 Предельный переход при $\tau \rightarrow 0$

Поведение решений при $\tau \rightarrow 0$ исследуется на примере задачи Дирихле. Для задачи Неймана верен аналогичный результат. Пусть χ – единичная функция Хевисайда, $K(Q_T)$ – пространство функций, определенных в области Q_T , с нормой: $\|u\|_{K(Q_T)} = \|u\|_{\infty, Q_T} + \|u_{tt}\|_{1, Q_T} + \|\nabla u\|_{2, Q_T} + \|u_t\|_{2, Q_T} + \|\nabla u_t\|_{2,1, Q_T}$.

Рассматриваются функции $c^\tau(x, t), a^\tau(x, t), p^\tau(x, t)$, удовлетворяющие исходным уравнениям и условиям: $(c^\tau - c_0^\tau)|_{\tau \cup (t=0)} = 0, a^\tau|_{t=0} = a_0^\tau$, где $c_0^\tau \in W_q^{2,1}(Q_T) \cap K(Q_T)$, $a_0^\tau \in L_\infty(\Omega)$ и $a_0^\tau(x) = \chi[c_0^\tau(x, 0)], x \in \Omega$.

Без ограничения общности положим, что $D = const > 0$ и $s(x, t) = 1$. Тогда исходя из результатов работ [1-3] имеют места следующие утверждения

Теорема 3. Для решения регуляризованной задачи справедливы оценки:

$$\|c^\tau\|_{\infty, Q_T} \leq M_1, \|c_t^\tau\|_{2, Q_T} + \max_{[0, T]} \|\nabla c^\tau\|_{2, \Omega} \leq M_2, \|\chi(c^\tau) - a^\tau\|_{1, Q_T^\delta} \leq M_3 \cdot \delta^{-1/2} \cdot \tau, \delta > 0,$$

где $Q_T^\delta = \Omega^\delta \times (0, T)$, $\Omega^\delta = \{x \in \Omega | dist(x, \Omega) > \delta\}$, а константы $M_i, i = 1, 2, 3$, зависят только от T, Ω и $\|c_0^\tau\|_{\Omega, T}$.

Теорема 4. Если $\|c_0^\tau - c_0\|_{\Omega, T} + \|a_0^\tau - a_0\|_{1, \Omega} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, то $c^\tau + a^\tau \rightarrow U \equiv m \cdot c + \chi(c)$ при $\tau \rightarrow 0$.