Халқаро илмий конференция

Международная научная конференция

The International scientific conference

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛИШЕРА НАВОИ

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

САМАРКАНДСКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

# АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА ИНФОРМАЦИОН ТЕХНОЛОГИЯЛАРНИНГ ДОЛЗАРБ МУАММОЛАРИ – АЛ-ХОРАЗМИЙ 2014

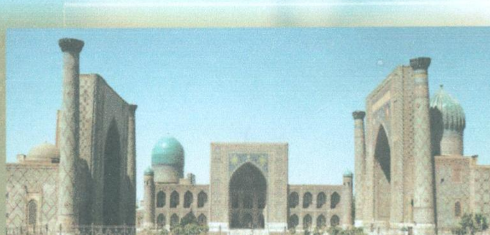
**Конференция мақолалари**

Тўплам № 1

# АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ – АЛЬ-ХОРЕЗМИ 2014

**Труды конференции**

Том № 1



# MODERN PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES- AL- KHOREZMIY 2014

**Transactions of the conference**

Volume № 1

САМАРҚАНД
15-17 СЕНТЯБР
2014

САМАРКАНД
15-17 СЕНТЯБРЯ
2014

SAMARQAND
15-17 SEPTEMBER
2014

**"Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2014":** Труды международной конференции (Том I.) (15-17 сентября 2014 г.,Ташкент

Главный редактор академик А.С. Садуллаев. – Ташкент, НУУз им. М. Улугбека 2014 г. -282 с.

Сборник содержит труды участников международной конференции "Актуальные пробл прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2014" и предназначен студентов, магистров, докторантов, преподавателей ВУЗов, специалистов в области математ прикладной математики и информационных технологий.

## СЕКЦИЯ №3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

12. *Stuart A. M.* /MA L Math. *Appl.* Med. Biol. 10 149 (1993)

13. *Murray J.D.* Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition). – N.Y., Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 551 p.,

14. *Aripov M.* Approximate Self-similar Approach tu Solve Quasilinear Parabolic Equation // Experimentation, Modeling and Computation in Flow Turbulence and Combustion vol. 2. 1997, p. 19- 26.

15. *Арипов М.* Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач Ташкент, Фан, 1988, 137 с.

16. *Белотелов Н.В., Лобанов А.И.* Популяционные модели с нелинейной диффузией. // Математическое моделирование. -М.; 1997, №12, С. 43-56.

17. *В. Вольтерра.* Математическая теория борьбы за существование -М.: Наука, 1976, 288 с.

18. *Гаузе Г.Ф.* О процессах уничтожения одного вида другим в популяциях инфузорий // Зоологический журнал, 1934, т.13, №1.

19. *Aripov M., Muhammadiev J.* Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitatea din placeCityPitesti, Seria Matematica si Informatica. №3, 1999. pp. 19-40.

20. *Aripov M.M. Muhamediyeva D.K.* To the numerical modeling of self-similar solutions of reaction-diffusion system of the one task of biological population of Kolmogorov-Fisher type. International Journal of Engineering and Technology. Vol-02, Iss-11, Nov-2013. placecountry-regionIndia. 2013.

21. *Арипов М.М. Мухамедиева Д.К.* Подходы к решению одной задачи биологической популяции. Вопросы вычислительной и прикладной математики. -Ташкент. 2013. Вып.129. -С.22-31.

22. *Мари Дж.* Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. М., Мир,1983, 397 стр.

23. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, сер. Математика и механика, т. 1, 1-25.


***

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Мухамбетжанов С.Т.

*e-mail: saltan@math.kz*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию математической модели неравновесной фильтрации, описывающей процесс вытеснения нефти полимерными растворами. Известно, что наличие активной примеси сводится к увеличению или уменьшению доли водной фазы в потоке. В одномерном случае рассматриваемая математическая модель изучена в работе [1]. В потоке активная примесь может находиться в трех состояниях: растворенной в воде, растворенной в нефти и адсорбированной на стенках паровых каналов.

**Введение.** Рассматривается случай вытеснения нефти полимерными растворами, т.е. полимер растворяется только в воде. Тогда содержание полимера в растворе увеличивает вязкость водной фазы, а с ростом количества адсорбированного полимерного вещества уменьшается фазовая проницаемость для воды.

1 **Вывод уравнений.** Введение дополнительного фактора (активной примеси) приводит к изменению системы уравнений двухфазной фильтрации, состоящей из уравнений баланса воды и нефти в потоке, обобщенного закона фильтрации Дарси и условия капиллярного равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot s \cdot \rho_1\right) + div\left(\rho_1 \cdot \vec{u}_1\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\cdot(1-s)\cdot\rho_2\right)+div\left(\rho_2\cdot\vec{u}_2\right)=0,$$

$$\vec{v}_i=-k\frac{f_i}{\mu_i}\nabla p_i,\; i=1,2,$$

$$p_2-p_1=p_c(S)$$

где $m,\rho_i,\mu_i,f_i,k$ и $p_c(s)$ - соответственно пористость среды, плотности фаз, вязкости жидкост относительные фазовые проницаемости, проницаемость среды и капиллярное давление.

В уравнениях (1) – (4) все основные характеристики жидкостей и пористой среды при введе активной примеси меняются, и система не является замкнутой. Исходя из результатов работы [1] д замыкания модели добавляется следующее уравнение относительно концентрации с-активной примеси

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\cdot c\cdot s\cdot\rho_1+m\cdot\varphi\cdot\rho_2\left(1-s\right)+a(c)\right)=div\left(D\cdot\nabla c-c\cdot\vec{v}_1\cdot\rho_1-\varphi\cdot\vec{v}_2\cdot\rho_2\right) \quad ($$

где $\varphi(c),a(c)$ - соответственно массовые концентрации примеси в нефтяной фазе и адсорбированн примеси в единице объема пористой среды. В соотношении (5) при вытеснении нефти полимерным растворами функция $\varphi(c)=0$, а функция $a(c)$, как правило, определяется через уравнение Ленгмюра ил по закону Генри. Такое предположение не всегда оправдано. В частности, для мицеллярных растворс изотерма сорбции ПАВ в окрестности критической концентрации мицеллообразования $c_*$ может быт немонотонной. Указанную трудность можно обойти введением следующей функции: $\chi\left(c\right)=1$ при $c>c_*$ $\chi\left(c\right)=0$ при $c<c_*$ и $\chi\left(c\right)\in[0,1]$ при $c=c_*$. Тогда функцию $a(x,t)$ можно определить из следующег уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\cdot\left(\chi(c)-a\right), \quad (6)$$

где $\tau$- время прибывания каждой молекулы в адсорбционный центр.

**Лемма 1.** Пусть $u\in W_p^1(Q)$, $Q$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^k$, $p>1$, $A_\varepsilon=\{x\in Q|\;|u(x)|\le\varepsilon\}$. Тогда $\nabla u=0$ п.в. в $A_0$.

**Лемма 2.** Пусть $Q$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^k$, $v_n,v,g\in L_p\left(Q\right)$, $p>1$, $\forall x\in Q\backslash A$, $\varliminf_{n\to\infty} v_n(x)=f(x)$ и $\forall n\in N$, $|v_n(x)|\le g(x)$, где $mesA=0$; $v_n\to v$ слабо в $L_p\left(Q\right)$. Тогда $v\ge f$ п.в. в $Q$.

**2 Постановка задачи.** Будем рассматривать фильтрационное течение с активной примесью в заданной конечной области $\Omega$ с кусочно - гладкой границей $\Gamma\equiv\partial\Omega$. В соответствии с различными видами граничных условий граница $\Gamma$ может разбиваться на несколько связных компонент $\Gamma^i$. Пусть $Q_T=\Omega\times[0,T]$, $S_T^i=\Gamma^i\times[0,T]$, n – внешняя нормаль к границе $\Gamma$. Следуя результатам работы [3] систему (1) – (6) можно представить в следующем виде:

$$m\cdot\frac{\partial s}{\partial t}=div\left(K_0\cdot a_1\cdot\nabla s-b\cdot\vec{v}+\vec{F}\right), \quad (7)$$

$$div\left(K\cdot\nabla P+\vec{f}\right)=0,-\vec{v}=K\cdot\nabla P+\vec{f}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\cdot c\cdot s+a\right)=div\left(D\cdot\nabla c-c\cdot\vec{v}\right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\cdot\left(\chi(c)-a\right), \quad (10)$$

где функция $\chi(c)$ равна единице, если $c>c_*$, $\chi(c)$ равна нулю, если $c<c_*$ и принимает значения из промежутка [0,1], если $c=c_*$, $m$–пористость, $K=K_0(x)$ — тензор фильтрации для однородной жидкости, капиллярное давление обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial P_k}{\partial s}<0 \text{ и } \frac{\partial P_k}{\partial c}\le 0,$$

а

$$p=p_1-\int\frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}d\xi+\rho_1 gh$$

— приведенное давление, остальные коэффициенты и функции определяются из следующих соотношений:

$$k=k_{01}(s)+k_{02}(s),\;\; a_1=-\frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{01}k_{02}}{k},\quad \vec{F}=K_1\int\nabla\frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}d\xi, \quad (11)$$

$$K = K_1 + K_2 = kK_0 = (k_{01} + k_{02})K_0, \bar{f} = K\int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}d\xi + K_2\nabla p_k + K_2(\rho_2 - \rho_1)\vec{g}.$$

Таким образом, требуется найти функции $\{s, p, \vec{v}, c, a\}$ (соответственно водонасыщенность, давление, скорость течения, концентрацию активной примеси, функцию адсорбции), определенные в $Q_T$, удовлетворяющие уравнениям (7)-(10), начальным:

$$s|_{t=0} = s_0(x), c|_{t=0} = c_0(x), a|_{t=0} = a_0(x), \tag{12}$$

а также следующим граничным условиям:

$\vec{v}\vec{n} = \vec{v}_1\vec{n} = 0$ – условие непротекания и для концентрации:

$$c(x,t) = 0 \text{ при } (x,t) \in S^0 = \Gamma^0 \times [0,T]. \tag{13}$$

$$p = p_0(x,t), s = s_0(x,t),$$

$$-D\cdot\frac{\partial c}{\partial n} + \vec{v}_{1n}\cdot c = \vec{v}_{1n}\cdot\tilde{c} \text{ при } (x,t) \in S^2 = \Gamma^2 \times [0,T], \tag{14}$$

$$-(K\nabla p + \vec{f})\vec{n} \equiv \vec{v}\vec{n} = R(x,t), (x,t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0,T],$$

$$-(K_0 a_1 \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0)\vec{n} \equiv \vec{v}_1\vec{n} = bR(x,t), (x,t) \in S^1. \tag{15}$$

$$-D\cdot\frac{\partial c}{\partial n} + \vec{v}_{1n}\cdot c = q_n\cdot c^* \text{ при } (x,t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0,T];$$

где $q_n$ – заданный расход на единицу площади, $\tilde{c}$ и $c^*$–известные значения концентрации примеси.

Всюду ниже предполагается, что все коэффициенты в системе уравнений (7)–(10) определены при всех $(x, s, c)$ и имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка. В дальнейшем систему уравнений (7) – (10) с дополнительными условиями (12) – (15) будем называть задачей 1.

**Определение.** Ограниченные измеримые в $Q_T$ функции $s(x,t)$, $p(x,t)$, $c(x,t)$ $a(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи 1, если

а) $0 \le s(x,t) \le 1$, $0 \le c(x,t)$, $0 \le a(x,t) \le 1$ почти всюду в $Q_T$;

б) $\nabla p \in L_{2,\infty}(Q_T)$, $a_1\cdot\nabla s \in L_2(Q_T)$, $D\cdot\nabla c \in L_2(Q_T)$;

в) $a_t$, $a \in L_\infty(Q_T)$;

г) на $S^2$выполняются граничные условия (14);

д) для произвольных допустимых функций таких, что

$$\varphi(x,t), v(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T), \psi(x) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\varphi(x,t)|_{S^2} = v(x,t)|_{S^2} = \Psi(x)\ |_{S^2} = 0$$

при почти всех $t \in [0,T]$ выполняются равенства

$$\Im_1 \equiv (ms, \varphi_t)_{Q_t} + (\vec{v}_1, \nabla\varphi)_{Q_t} = (bR, \varphi)_{S_t^1} - (ms, \varphi)_\Omega\big|_0^t \tag{16}$$

$$\Im_2 \equiv (\vec{v}, \nabla\psi)_\Omega = (R, \psi)_{\Gamma^1} \tag{17}$$

$$\Im_3 \equiv (m\cdot s\cdot c + a, v_t)_{Q_t} + (D\cdot\nabla c - c\cdot\vec{v}_1, \nabla v)_{Q_t} = (v_{1n}\cdot\tilde{c}, v)_{S_t^1} - (m\cdot s\cdot c + a, v)_\Omega\big|_0^t \tag{18}$$

**Замечание 1.** Всюду ниже считается, что в области течения отсутствуют застойные зоны, в которых достигаются предельные значения $s = 0, 1$. Задачу 1 в этом случае будем называть регулярной, т.е. $a_1 \ge \delta > 0$, а ее решения регулярными. Такое определение введено в работе [1].

**Замечание 2.** В области $E_c = \{(x,t) \in Q_T\, |c(x,t) = c_*\}$ выполняются равенства (см. лемму 1). Тогда из уравнений (9), (10) выводится $\chi[c(x,t)] = a(x,t)$ для п.в. в $(x,t) \in E_c$ и из определения функции $\chi(c)$ следует, что $0 \le a(x,t) \le 1$ для п.в. $(x,t) \in E_c$.

Здесь и далее обозначения норм и пространств функций совпадают с обозначениями в [1].

**3 Существование.** Функция $\chi(c)$ аппроксимируется непрерывными монотонными функциями $\chi_n(c)$, совпадающими с $\chi(c)$ при $c > c_* + \frac{1}{n}, c < c_*$, $n = 1, 2, \ldots$ Через $(7)_n - (10)_n$ обозначаются система уравнений (7) – (10), где вместо функции $\chi(c)$ рассматривается функция $\chi_n(c)$. Тогда задача 1 решается по следующей последовательности: эллиптическая задача относительно давления, затем нелинейные параболические задачи относительно насыщенности $s(x,t)$ и с использованием теор Шаудера о неподвижной точке концентрация активной примеси $c(x,t)$ с функцией

$$a(x,t) = a_0(x) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t \chi_n(g(x,\zeta)) \cdot e^{\frac{\zeta - t}{\tau}} d\zeta,$$

причем $c(x,t) = \Lambda(g(x,t))$, где $\Lambda : W_2^{1,1}(Q_T) \to W_2^{1,1}(Q_T)$ оператор, неподвижная точка которого решение задачи 1. При этом имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты в системе уравнений имеют непрерывные производные вплоть первого порядка и дополнительно

$$\left( \|p_0\|_{\infty,Q_t}; \sup_t \|p_0\|_{W_2^1(\Omega)}; \|s_{0_t}\|_{1,Q_T}; \|\nabla s_0\|_{2,Q_T}; \|\vec{c}_t\|_{1,Q_T}; \|\nabla c_0\|_{2,Q_T} \right) \le M;$$

$a_0(x)$ — измерима и $0 \le a(x,t) \le 1$, $x \in \Omega$.

Тогда существует одно обобщенное решение задачи 1 (в смысле выполнения определения 1) функций $s(x,t)$, $c(x,t)$ и $a(x,t)$ удовлетворяют п.в. в $Q_T$ неравенствам:

$$0 < \delta_0 \le \min s_0(x,t) \le s(x,t) \le \max s_0(x,t) \le 1 - \delta_1 < 1 \tag{2}$$

$$0 \le c(x,t) \le 1, 0 \le a(x,t) \le 1, |a_t| \le 1 \tag{2}$$

**Доказательство.** Оценка (19) и первое неравенство в (21) является следствием принципа максимума, второе неравенство в (21) следует из представления (18). Существование решения задачи 1 относительн функций $(s,p)$ полностью повторяет рассуждения из [2], т.е. приближенные решения вспомогательно задачи 1 ищется в виде

$$s^n(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k^N(t) \cdot \varphi_k(x) + s_0(x,t), \tag{22}$$

$$p^n(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{b}_k^N(t) \cdot \psi_k(x) + p_0(x,t), \tag{23}$$

Аналогичное представление имеет место для функции $c(x,t)$:

$$c^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} d_k^N(t) \cdot v_k(x) + \tilde{c}(x,t), \tag{24}$$

где фундаментальные в $W_2^1(\Omega,\Gamma^2) = \{\varphi(x), v(x) \in W_2^1(\Omega), \varphi(x) = v(x) = 0, x \in \Gamma^2\}$ системы функций $\varphi_k, v_k$и $\psi_k$нормированы следующим образом:

$$(m\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ik}, (mv_k, v_i) = \delta_{ik}, (\nabla\psi_k, \nabla\psi_i) = \delta_{ik},$$

где $\delta_{ik}$- символы Кронекера. Для определения неизвестных функций $\tilde{a}_k^N(t)$, $b_k^N$, $d_k^N(t)$ получаем нелинейную эволюционно - стационарную систему уравнений:

$$\frac{d\tilde{a}_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_j^N \cdot \alpha_{jk} + \beta_k, \tilde{a}_k^N(0) = 0 \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_j^N \cdot \mu_{jk} + \lambda_k = 0 \tag{26}$$

$$\frac{dd_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^{N} d_j^N \cdot \gamma_{jk} + \aleph_k, d_k^N(0) = 0 \tag{27}$$

в которой $\alpha_{jk} = -(K_0 \cdot \bar{a}_1 \cdot \nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)_\Omega + (b \cdot \vec{v}, \nabla\varphi_k)_\Omega$; $\beta_k = -(ms_{0_t}, \varphi_k)_\Omega + \left(\vec{F}, \nabla\varphi_k\right)_\Omega - (K_0 \cdot \bar{a}_1 \cdot \nabla s_0, \nabla\varphi_k)_\Omega$; $\mu_{jk} = (K \cdot \nabla\psi_j, \nabla\psi_k)_\Omega$; $\mu_{jk} = \left(\vec{f}, \nabla\psi_k\right)_\Omega - (R, \psi_k)_{\Gamma^2}$;
$\gamma_{jk} = -(D \cdot \nabla v_j, \nabla v_k)_\Omega + (\vec{v}_1 \cdot v_j, \nabla v_k)_\Omega - (m \cdot \bar{s}_t \cdot v_j, v_k)_\Omega + \frac{1}{\tau}(a - p(g), v_k)_\Omega$;

$$\aleph_k = -(m \cdot \bar{s} \cdot \tilde{c}_t, v_k)_{\Gamma^2} - (D \cdot \nabla \tilde{c}, \nabla v_k)_\Omega + (\tilde{c} \cdot \vec{v}_1, \nabla v_k)_{\Gamma^2}.$$

Разрешимость задач (25) – (27) следует из сделанных предположений на коэффициенты этой вспомогательной системы, т.е. функции $\mu_{jk}, \lambda_k, \gamma_{jk}$ ограничены, а $\beta_k, \aleph_k$ интегрируемые функции по $t \in [0,T]$ при всех значениях $\tilde{a}_k^N$, $b_k^N$, $d_k^N$. Сначала решается (26) для определения $b_k^N$в каждый момент времени из нелинейной системы алгебраических уравнений. Затем решаются задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (25) и (27) для определения функций $\tilde{a}_k$и $d_k^N$ соответственно. Последняя, в силу указанных выше свойств коэффициентов, разрешима для всех значений $t \in [0,T]$, принадлежащих пространству $W_2^1(0,T)$. Следовательно, при каждом N на интервале (0,T) существует единственное решение задачи Коши при $k = 1,2,\ldots,N$. Тогда следуя результатам работ [2,3] легко получить равномерные по N оценки приближенных решений, позволяющие совершить предельный переход при $N \to \infty$. Таким образом, полученное решение определяет в $W_2^{1,1}(Q_T)$ некоторое выпуклое, ограниченное подмножество, которое оператор P переводит в себя. Так как P – вполне непрерывный, то по теореме Шаудера существует неподвижная точка оператора P, которая и дает решение задачи $(7)_n - (10)_n$.

Обозначим его через $\{s_n, p_n, c_n, a_n\}$. Тогда в силу априорных оценок для $\{s_n, p_n, c_n, a_n\}$ и ограниченность $\chi_n(c_n)$ позволяют выделить подпоследовательность nk, такую, что $\{s_{n_k}, p_{n_k}, c_{n_k}, a_{n_k}\} \to \{s,p,c,a\}$ п.в. в $Q_T$, $\frac{\partial s_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial s}{\partial t}$, $\frac{\partial c_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial c}{\partial t}$, $\nabla s_{n_k} \to \nabla s$, $\nabla c_{n_k} \to \nabla c$, $\nabla p_{n_k} \to \nabla p$, слабо в $L_2(Q_T)$, $a_{n_k} \to a$, $\frac{\partial a_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial a}{\partial t}$, $\chi_{n_k}(c_{n_k}) \to h \overset{*}{-}$слабо в $L_\infty(Q_T)$.

Из определения функции $\chi_n$и сходимости $c_{n_k}$к $c$ п.в. в $Q_T$, следует, что $h(x,t) = \chi(c)$ п.в. в $Q_T \backslash E_c$, а также из леммы 2 на множестве $E_c$ функция $h(x,t) = a(x,t)$. Окончательно, переходя к пределу в интегральных тождествах, аналогичным (16) – (18), получим искомое решение задачи 1.

**4 Устойчивость и единственность решений**

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (а) – (д) из определения и граница $\equiv \partial\Omega \in H_*^1$, $\{s_j, p_j, \vec{v}_j, c_j, a_j\}$ - обобщенные решения регулярных задач 1 соответственно с начальными и граничными функциями вида (12) – (15), $j = 1,2$, и такие, что

$$\left(\|\nabla s_j\|_{\alpha_1,\beta_1,Q_T}; \|\nabla p_j\|_{\alpha_2,\beta_2,Q_T}; \|R_j\|_{\alpha_0,\beta_0,\Gamma''}\right) \le M \tag{28}$$

и при этом данные удовлетворяют условиям (11), то для $s = s_1 - s_2$, $p = p_1 - p_2$, $c = c_1 - c_2$, $a = a_1 - a_2$,

$$\left(\|s;p\|_{V_2(Q_T)}\right) \le C_0 \cdot \mu; \left(\|\nabla s; \nabla p\|_{q,Q_T}\right) \le C_0 \cdot \mu^{1-\gamma}; \|c\|_{q,Q_T}^{(2)} \le C_1 \cdot \lambda^{1/q}, \|a_t\|_{p,Q_T} + \|a\|_{p,Q_T} \le C_2 \cdot \lambda^{1/p} \tag{29}$$

Здесь

$$\mu = (\|s_0\|_{V_2(Q_T)} + \|c_0\|_{V_2(Q_T)} + \|p_0\|_{V_2(Q_T)} + \|R\|_{\alpha_0,\beta_0,1} +$$
$$\|a_0\|_{V_2(Q_T)} + \|s_{0t}\|_{2,Q} + \|a_{0t}\|_{V_2(Q_T)}), \quad 1 \le p < \infty,$$

константы $C_0$, $C_1$, $C_2$ зависят от $\alpha_i, \beta_i, T, \Omega$ и от норм данных.

Доказательство теоремы следует из результатов работ [1-2].

**5 Предельный переход при $\tau \to 0$**

Поведение решений при $\tau \to 0$ исследуется на примере задачи Дирихле. Для задачи Неймана верен аналогичный результат. Пусть $\chi$ - единичная функция Хевисайда, $K(Q_T)$- пространство функций, определенных в области $Q_T$, с нормой: $\|u\|_{K(Q_T)} = \|u\|_{\infty,Q_T} + \|u_{tt}\|_{1,Q_T} + \|\nabla u\|_{2,Q_T} + \|u_t\|_{2,Q_T} + \|\nabla u_t\|_{2,1,Q_T}$.

Рассматриваются функции $c^\tau(x,t)$, $a^\tau(x,t)$, $p^\tau(x,t)$, удовлетворяющие исходным уравнениям и условиям: $(c^\tau - c_0^\tau)|_{\tau \bigcup (t=0)} = 0$, $a^\tau|_{t=0} = a_0^\tau$, где $c_0^\tau \in W_q^{2,1}(Q_T) \bigcap K(Q_T)$, $a_0^\tau \in L_\infty(\Omega)$ и $a_0^\tau(x) = \chi[c_0^\tau(x,0)]$, $x \in \Omega$.

Без ограничения общности положим, что $D = const > 0$ и $s(x,t) = 1$. Тогда исходя из результатов работ [1-3] имеют места следующие утверждения

**Теорема 3.** Для решения регуляризованной задачи справедливы оценки:

$$\|c^\tau\|_{\infty,Q_T} \le M_1, \|c_t^\tau\|_{2,Q_T} + \max_{[0,T]} \|\nabla c^\tau\|_{2,\Omega} \le M_2, \|\chi(c^\tau) - a^\tau\|_{1,Q_T^\delta} \le M_3 \cdot \delta^{-1/2} \cdot \tau, \delta > 0,$$

где $Q_T^\delta = \Omega^\delta \times (0,T)$, $\Omega^\delta = \{x \in \Omega | \; dist(x,\Omega) > \delta\}$, а константы $M_i, i = 1,2,3$, зависят только от $T, \Omega$ и $\|c_0^\tau\|_{\Omega,T}$.

**Теорема 4.** Если $\|c_0^\tau - c_0\|_{\Omega,T} + \|a_0^\tau - a_0\|_{1,\Omega} \to 0$ при $\tau \to 0$, то $c^\tau + a^\tau \to U \equiv m \cdot c + \chi(c)$ при $\tau \to 0$.