МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвященная 110-ой годовщине со дня рождения
выдающегося математика

И. Г. ПЕТРОВСКОГО

(1901 – 1973)

XXIII совместное заседание Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 30 мая – 4 июня 2011

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2011

УДК 517.9 (063)
ББК 22.161.6я434Петровский И.Г.
М43

Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2011. — 424 с.

Программный комитет

В. А. Садовничий, В. В. Козлов, Б. А. Дубровин, А. М. Ильин, С. П. Новиков, Я. Г. Синай, Д. В. Трещев, Л. Д. Фаддеев и руководители секций:

И. В. Асташова, Н. Х. Розов (*Обыкновенные дифференциальные уравнения*)
С. И. Похожаев, Е. В. Радкевич (*Уравнения с частными производными и математическая физика*)
Д. В. Аносов, В. М. Бухштабер, В. М. Закалюкин, Ю. С. Ильяшенко (*Динамические системы, солитоны и геометрия*)
В. Д. Степанов, А. А. Шкаликов (*Спектральная теория и функциональные пространства*)
В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий, А. С. Шамаев (*Асимптотические методы и усреднение*)

Организационный комитет

В. А. Садовничий (Председатель, Ректор МГУ)

В. В. Козлов (Сопредседатель, Директор МИРАН им. В. А. Стеклова)

В. Н. Чубариков (Заместитель председателя)

А. С. Шамаев (Заместитель председателя)

А. А. Шкаликов (Заместитель председателя)

Секретариат конференции: И. В. Асташова, А. В. Боровских, В. В. Быков, А. А. Владимиров, А. Ю. Горицкий, И. А. Дынников, Т. О. Капустина, Е. С. Карулина, В. В. Палин, О. С. Розанова, М. С. Романов, А. М. Савчук, И. В. Филимонова, Г. А. Чечкин (ответственный секретарь), И. А. Шейпак

Конференция поддержана:
Российским фондом фундаментальных исследований
Российской Академией наук
Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова
Механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова
Издательством «Открытые системы»

ISBN 978-5-9556-0122-9

INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»

dedicated to the 110-th Anniversary
of prominent mathematician

I. G. PETROVSKII

(1901 – 1973)

XXIII joint session of Moscow Mathematical Society
and I. G. Petrovskii Seminar

Moscow, May 30 – June 4, 2011

BOOK of ABSTRACTS

Moscow, 2011

UDC 517.9 (063)
ББК 22.161.6я434Петровский И.Г.
M43

International Conference dedicated to the 110-th Anniversary of I. G. Petrovskii (XXIII joint session of Moscow Mathematical Society and I. G. Petrovskii Seminar): Book of Abstracts. — Moscow: Moscow University Press and "INTUIT.RU" Ltd., 2011. — 424 P.

Program Committee

V. A. Sadovnichii, V. V. Kozlov, B. A. Dubrovin, L. D. Faddeev, A. M. Ilyin, S. P. Novikov, Ya. G. Sinai, D. V. Treschev and the organizers of the sections:

I. V. Astashova and N. Kh. Rozov (*Ordinary Differential Equations*)
S. I. Pokhozhaev and E. V. Radkevich (*Partial Differential Equations and Mathematical Physics*)
D. V. Anosov, V. M. Bukhshtaber, Yu. S. Ilyashenko, V. M. Zakalyukin (*Dynamical Systems, Solitons, and Geometry*)
A. A. Shkalikov and V. D. Stepanov (*Spectral Theory and Function Spaces*)
A. L. Piatnitski, A. S. Shamaev, V. V. Zhikov (*Asymptotic Methods and Homogenization*)

Organizing Committee

V. A. Sadovnichii (Chairman, Rector of Moscow Lomonosov State University)

V. V. Kozlov (Co-Chairman, Director of Steklov Mathematical Institute)

V. N. Chubarikov (Vice-Chairman)

A. S. Shamaev (Vice-Chairman)

A. A. Shkalikov (Vice-Chairman)

Conference Secretariate: I. V. Astashova, A. V. Borovskikh, V. V. Bykov, G. A. Chechkin (executive secretary), I. A. Dynnikov, I. V. Filimonova, A. Yu. Goritskii, T. O. Kapustina, E. S. Karulina, V. V. Palin, O. S. Rozanova, M. S. Romanov, A. M. Savchuk, I. A. Sheipak, A. A. Vladimirov

Conference is supported by:
Russian Foundation for Basic Research
Russian Academy of Science
Moscow Lomonosov State University
Department of Mechanics and Mathematics of MSU
Open Systems Publications

ISBN 978-5-9556-0122-9

Desingularization of leading matrices of systems of linear ordinary differential equations with polynomial coefficients

Abramov S. A. (Computing Centre of the Russian Academy of Science, Russia)
Khmelnov D. E. (Computing Centre of the Russian Academy of Science, Russia)

We consider systems of linear ordinary differential equations containing m unknown functions of a single variable x. Coefficients of the systems are polynomials over a number field. Each of the systems consists of m independent equations. The equations are of arbitrary orders. We propose an algorithm which, given a system S of this type, constructs a nonzero polynomial $d(x)$ such that if S possesses an analytic solution having a singularity at α then the equality $d(\alpha) = 0$ is satisfied.

Linear differential equations (scalar or system) with variable coefficients appear in many areas of mathematics. Solving systems leads however to specific difficulties which do not appear in the scalar case. Consider the equation

$$P_r(x)y^{(r)} + P_{r-1}(x)y^{(r-1)} + \cdots + P_0(x)y = 0. \tag{1}$$

First suppose that this is a scalar equation. The coefficients $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_r(x)$ are polynomials, and $P_r(x)$ is not identically zero. If a solution of (1) has a singularity at some point α then $P_r(\alpha) = 0$.

If (1) is instead a system, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ is a column vector of unknown functions of x and $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_r(x)$ are square $m \times m$ matrices with polynomial entries then the role, which is played by the roots of the polynomial coefficient of $y^{(r)}(x)$ in the scalar case, can now be played by the roots of the determinants of the leading matrix $P_r(x)$, provided that this determinant is not identically zero. We study in this work the situation when $\det P_r(x)$ is the zero polynomial. Given a system S of the form (1), our algorithm Singsys finds a system S' of the same form (and with the same unknown functions), such that the determinant $d(x)$ of the leading matrix of S' is a nonzero polynomial, and the solutions space of the system S is a subspace of the solutions space of S'. The polynomial $d(x)$ is the result of the proposed algorithm execution. We have implemented the algorithm using the computer algebra system Maple ([**4**]).

Our approach can be used not only in the case of polynomial entries of matrices P_i in (1). However in other cases the equation $d(x) = 0$ may have an infinite set of roots.

The algorithm Singsys uses some of basic ideas of the algorithms EG and EG′ ([**1**, **2**]) which are applicable to recurrence systems. The details of Singsys are to be presented in [**3**].

This work was supported in part by a grant from RFBR, Project No 10-01-00249.

References

[1] Abramov S., *EG–eliminations*, J. Difference Equ. Appl. 5 (1999), 393–433.
[2] Abramov S., Bronstein M., *On solutions of linear functional systems*, Proc. ISSAC'2001, ACM Press 2001, 1–6.
[3] Abramov S. A., Khmelnov D. E., *Singularities of solutions of linear differential systems with polynomial coefficients*, Journal of Mathematical Sciences (submitted).
[4] Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/

Homogenization of Lavrentiev–Bitsadze equation in a random perforated domain

Akimova E. A.

Let $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ be a probabilistic space and $T_x : \Omega \to \Omega, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a 2-dimensional ergodic dynamical system. A random domain $V(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ T_x\omega \in V^0\}$, with fixed $V^0 \in \mathfrak{F}$ is statistically homogeneous because its characteristic function depends only on $T_x\omega$. We trasform $V(\omega)$ into a small scaled random porous medium (see [**1**] and references there) $V_\varepsilon = \{x = (x_1, x_2) : \frac{x}{\varepsilon} \in V, \ x_2 > l\}$, which occupies the domain $D^1_\varepsilon = \{x \in V_\varepsilon : (x_1-1)^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{x : (x_1-1)^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_2 \le l\}$ with the exception of a thin layer.

The consideration of Lavrentiev–Bitsadze equation naturally brings about asymptotic analysis as $\varepsilon \to 0$ of the following problem

$$\triangle u^\varepsilon = -f(x_1, x_2) \text{ in } D^1_\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad u^\varepsilon_{x_1} = u^\varepsilon_{x_2} \text{ on } \Gamma, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} = 0 \text{ on } S_\varepsilon \quad (1)$$

where $\Gamma_0 := \{(x_1, x_2) : \ x_2 \ge 0, \ (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1\}, \Gamma := \{(x_1, x_2) : \ x_2 = 0, \ x_1 \in [0; 2]\}$, $S_\varepsilon = D^1 \cap \partial V_\varepsilon$ and $n_\varepsilon(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon})$ is the unit normal vector to S_ε internal for the pores.

We denote $\mathcal{H}_\varepsilon$ the closure of the linear space of random variables with bounded realizations in C^∞ in the norm given by the formula:

$$\|u\| = \langle(\nabla u(T_x\omega), \ \nabla u(T_x\omega))\rho_1^{\delta_1-2}\rho_2^{\delta_2-2} + (u, u)\rho_1^{\delta_1-4}\rho_2^{\delta_2-4}\rangle^{\frac{1}{2}},$$

where $(\cdot, \cdot)$ "— a scalar product in $L_2(D^1_\varepsilon)$, $\langle\cdot\rangle$ is the expectation of r.v. and $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ are equal to the distance from the points $(0, 0)$ and $(2, 0)$ correspondingly.

The function $u^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}_\varepsilon$ is a solution of problem (1) if

$$\int_{D^1_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(T_x\omega)\nabla v(T_x\omega)dx = \int_{D^1_\varepsilon} f(T_x\omega)v(T_x\omega)dx + \int_\Gamma u^\varepsilon_{x_1} v(T_x\omega)dx_1$$

a.s. for all $v \in C_0^\infty(D^1)$.

The homogenized problem is to find $u_0 \in H^1_0(D^1, \Gamma_0)$, such that $div\ (K\nabla u_0) = -\theta f$, where $\theta = \mu(D^1_\varepsilon)$ characterizes the porosity of the medium and K is a constant effective matrix. After one important definition we formulate the main result.

Definition 1. The domain $V(\omega)$ is called strictly porous if there exists a random variable $h(\omega) > 0$ and $m > 0$ such that $\left\langle h^{-(1+m)} \right\rangle < \infty$ and for any $u \in C_0^\infty(V(\omega))$ $\int_{\mathbb{R}^2} h(T_x\omega)u^2(x)dx \le \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx.$

Theorem 1. *Assume that $V(\omega)$ is strictly porous and let $p = 1 + \frac{m}{2+m}$. Then for any $f \in L^q(D^1)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ in $L^p(D^1)$*

$$p_\varepsilon \overset{L_2(D^1)}{\rightharpoonup} K\nabla u_0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D^1_\varepsilon} |u_\varepsilon - u_0|^2 dx = 0,$$

where $p_\varepsilon = \chi(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon$.

This work was planned and implemented in co-authorship with G. A. Chechkin (Moscow Lomonosov State University), A. L. Pyatnitskii (Narvik

University College, Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences), K. Routsalainen (University of Oulu).

References

[1] Beliaev A. Yu. *The homogenization of Stokes flows in random porous domains of general type*, Asymptotic Analysis. 1999. no 19. 81–94.

The *a priori* Tan Θ Theorem in perturbation problem for spectral subspaces

Albeverio S. (Unversitaet Bonn)
Motovilov A. K. (JINR, Dubna)

Let A be a self-adjoint operator on a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$. Assume that the spectrum of A consists of two disjoint components σ_0 and σ_1 such that the set σ_0 lies in a finite gap of the set σ_1. Let V be a bounded self-adjoint operator on $\mathfrak{H}$ off-diagonal with respect to the partition $\mathrm{spec}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$. It is known (see [**1**], [**2**]) that if $\|V\| < \sqrt{2}d$, where $d = \mathrm{dist}(\sigma_0, \sigma_1)$, then the perturbation V does not close the gaps between σ_0 and σ_1 and the spectrum of the perturbed operator $L = A + V$ consists of two disjoint components σ_0' and σ_1' such that

$$\sigma_0' \subset \big(\min(\sigma_0) - d, \max(\sigma_0) + d\big) \quad \text{and} \quad \mathrm{dist}\big(\sigma_1', \sigma_0\big) \geq d.$$

Previously, it has been proven [**3**] that if V satisfies the stronger bound $\|V\| < d$ then the following sharp norm estimate holds:

$$\|\mathsf{E}_L(\sigma_0') - \mathsf{E}_A(\sigma_0)\| \leq \sin\left(\arctan\frac{\|V\|}{d}\right),$$

where $\mathsf{E}_A(\sigma_0)$ and $\mathsf{E}_L(\sigma_0')$ are the spectral projections of A and L associated with the spectral sets σ_0 and σ_0', respectively. In [**4**], we prove that this estimate remains valid and sharp also for $d \leq \|V\| < \sqrt{2}d$, which completely settles the issue. The obtained estimate is equivalently written as

$$\tan\Theta \leq \frac{\|V\|}{d}\ (< \sqrt{2}),$$

where Θ denotes the operator angle between the spectral subspaces $\mathrm{Ran}\big(\mathsf{E}_A(\sigma_0)\big)$ and $\mathrm{Ran}\big(\mathsf{E}_L(\sigma_0')\big)$.

This research was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), the Heisenberg-Landau Program, and the Russian Foundation for Basic Research.

References

[1] Kostrykin V., Makarov K. A., and Motovilov A. K., *On the existence of solutions to the operator Riccati equation and the tan Θ theorem*, Int. Equat. Oper. Th. 51 (2005), 121–140.

[2] Kostrykin V., Makarov K. A., and Motovilov A. K., *Perturbation of spectra and spectral subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 77–89.

[3] Motovilov A. K. and Selin A. V., *Some sharp norm estimates in the subspace perturbation problem*, Int. Equat. Oper. Th. 56 (2006), 511–542.

[4] Albeverio S., Motovilov A. K., *The a priori Tan Θ Theorem for spectral subspaces*, arXiv:1012.1569.

The central elements of the universal enveloping algebra of higher orders and the construction of Knizhik-Zamolodchikov type equations for root systems of types A, D, B

Artamonov D. V. (Moscow State University, Russia)
Goloubeva V. A. (Moscow Aviational Institute, Russia)

The talk is devoted to some generalization of the classical Riemann–Hilbert problem of construction of a Pfaffian system of fuchsian type, whose singular set is a collection of reflection hyperplanes defined by a system of roots B_n. Also some new results are obtained for the root systems A and D.

In construction of Knizhnik–Zamolodchikov equations, whose singular set is associated with the root system A_n, the Casimir element of the second order is used. In the case of root system B_n a similar construction war done by A. Leibman in one parameter case, while the corresponding equations must depend on two parameters, as the number of orbits of the corresponding root system equals to two. For other root systems such constructions are not known.

In the talk the case of the root system B_n is considered and the structure of the one-parametric Pfaffian system of fuchsian type is investigated. In the construction of this system the central Capelly elements of higher orders are used instead the Casimir element of the second order used in one-parameter case. As a consequence we get construction of Pfaffian systems of fuchsian type for the root systems A and D.

The research was supported by MK grant 4270.2011.1.

Localization of the spectrum of a quadric pensil with a strong damping operator

Artamonov N. V. (Moscow State Insitute of International Relations, Russia)

In Hilbert space H we consider a quadric pensil

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda D + A$$

with self-adjoint positive definite operator A. By H_s denote a collection of Hilbert spaces generated by operator $A^{1/2}$, $\|\cdot\|_s$ is a norm on H_s. We will assume that D is a bounded operator acting from H_1 to H_{-1} and

$$\inf_{x \in H_1, x \neq 0} \frac{\operatorname{Re}(Dx, x)_{-1,1}}{\|x\|_1^2} = \delta > 0.$$

(here $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ is a duality pairing on $H_{-1} \times H_1$). We obtain a localization of the spectrum of $L(\lambda)$:

$$\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \leq -\omega, |\operatorname{Im}\lambda| \leq \kappa |\operatorname{Re}\lambda|\}$$

for some positive $\omega, \kappa > 0$.

The research was supported by RFBR grant No. 11–01–00790.

On inverse problem for system of partial differential equations of hyperbolic type

Asanova A. T. (Institute of Mathematics MES RK, Kazakhstan)

The inverse problem for system of partial differential equations of hyperbolic type with functional parameter from two independent variables is considered on $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + D(t,x)q(x) + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2)$$

$$P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_0(x)u(0,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + S(x)u(T,x) = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (4)$$

where $(n \times n)$-matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, n-vector-function $f(t,x)$ are continuous on Ω, n-vector-function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$, $(n \times n)$-matrices $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S(x)$, n-vector-functions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, n-vector-functions $u(t,x)$, $q(x)$ — unknown functions which it is necessary to find.

We investigate questions of the existence, uniqueness and finding classical solutions of the investigating inverse problem. Nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations second order were considered by numerous authors. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution of such problems were obtained by various methods. The nonlocal boundary value problem with data on characteristics were considered in [**1**–**2**] by the method introduction of functional parameters. This method is a modification of the parametrization method [**3**] developed for the solution of two-point boundary value problems for ordinary differential equations. In the [**4**–**5**] the necessary and sufficient coefficient conditions for the well-posed unique solvability of nonlocal boundary value problem.

In the present communication the sufficient coefficients conditions of the unique classic solvability of the inverse problem — the nonlocal boundary value problem for system of hyperbolic type with unknown functional parameter are obtained and algorithm finding its solution are proposed.

References

[1] Asanova A. T., Dzhumabaev D. S., *Unique Solvability of the Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations with Data on the Characteristics*, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 42 (2002), no. 11, 1609-1621.

[2] Asanova A. T., Dzhumabaev D. S., *Unique Solvability of the Nonlocal boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations*, Differential Equations. 39 (2003), no. 10, 1343-1354.

[3] Dzhumabaev D. S., *The signs unique solvability of linear boundary value problem for the ordinary differential equation*, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 29 (1989), no. 1, 50-66.

[4] Asanova A. T., Dzhumabaev D. S., *Correct Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations*, Doklady Mathematics. 68 (2003), no. 1, 46-49.

[5] Asanova A. T., Dzhumabaev D. S., *Well-Posed Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations*, Differential Equations. 41 (2005), no. 3, 352-363.

Optimal endogenous growth model with exhaustible resources

Aseev S. M. (Steklov Mathematical Institute, Russia and International Institute for Applied Systems Analysis, Austria)
Besov K. O. (Steklov Mathematical Institute, Russia)
Kaniovski S. Yu. (Austrian Institute of Economic Research, Austria)

We specify and solve an endogenous growth model that includes a non-renewable resource essential both for production of output and generation of knowledge. The model is formulated as an infinite-horizon optimal control problem; its specification follows the recent literature on endogenous growth with non-renewable resources. It is a two-sector model in which the production sector yields output that is consumed, while the research sector augments the productivity of the labor and resource used in production. Since the same inputs are used in both sectors, the economy faces a trade-off. The solution of the model is a welfare-maximizing dynamic research and extraction policy.

The model is nonstandard in the sense that it is not completely embedded in the framework of the classical optimal control theory. The infinite time horizon gives rise to peculiarities in relation to Pontryagin's maximum principle, while the nature of constraints imposed on the control variables precludes a direct application of the standard existence results. Moreover, a non-concave Hamiltonian in our problem does not allow one to apply the standard sufficient conditions for optimality.

The approach adopted in our analysis is based on the recently developed necessary optimality conditions for infinite-horizon optimal control problems (see [**2**]) and an existence result. We offer a comprehensive and rigorous inquiry into the existence of an optimal solution and formulate an appropriate version of Pontryagin's maximum principle. Analyzing the Hamiltonian system of the maximum principle, we obtain a complete characterization of all optimal processes in our problem. Thus, we fully characterize the optimal transitional dynamics.

We show that sustainable growth is feasible only if the accumulation of knowledge has constant returns to scale and does not depend on the exhaustible resource as an input. By sustainable growth we mean an optimal solution with perpetual positive growth, where optimality is understood with respect to a discounted logarithmic utility function. While the requirement of strong scale effects is well-known in the literature, the requirement that the research sector be independent of the exhaustible resource is a novel result.

The results obtained are published in [**1**].

The research was supported by the Austrian National Bank (Grant: Jubiläumsfonds project no. 13585). The work of the first and second authors was also partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants nos. 09-01-00624-a, 11-01-00348-a and 10-01-91004-ASF-a).

References

[1] S. Aseev, K. Besov, S. Kaniovski, *Optimal Endogenous growth with exhaustible resources*, Interim Report IR-10-011, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, 2010 (http://www.iiasa.ac.at/Admin/PUB/Documents/IR-10-011.pdf).

[2] S. M. Aseev, A. V. Kryazhimskii, *The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 257, P. 1–255, 2007.

About Uniform Estimates of Solutions to the Nonlinear Differential Equations with Power Nonlinearity

Astashova I. V. (Moscow Lomonosov State University, Russia)

Uniform estimates are presented for the absolute values of all solutions with the same domain to the differential nonlinear equation with power nonlinearity.

Uniform estimates for all possible solutions of quasilinear inequalities with different type of nonlinearity

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)} \geq p_*\, |y|^k \tag{1}$$

with $p_* > 0$, $n \geq 1$, $k > 1$, and continuous functions $a_j(x)$ are proved in [**2**]. In [**6**] estimates for solutions to this inequality with $a_j(x) \equiv 0$, $j = 0, \ldots, n-1$, are obtained and sufficient conditions for nonexistence of global solutions to this inequality are given.

Uniform estimates for positive solutions of quasilinear equations

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\, y^{(j)} + p(x)\, |y|^{k-1} y = 0 \tag{2}$$

with $n \geq 1$, $k > 1$, and continuous functions $a_j(x)$ and $p(x)$ such that $|p(x)| \geq p_* > 0$ are obtained in [**3**]. In [**4**] uniform estimates are obtained for the absolute values of solutions to this equation with $n = 2$, $a_1(x) \equiv 0$, and the complex-valued potential $p(x)$ whose real part is less than a negative constant.

In [**5**] for solutions to semi-linear elliptic equations defined in a ball uniform integral estimates were obtained in a smaller closed ball.

Consider the differential equation

$$y''' + p(x, y, y', y'')|y|^{k-1} y = 0, \quad k > 1, \tag{3}$$

with continious function $p(x, y, y', y'')$ such that

$$0 < p_* \leq p(x, y, y', y'') \leq p^*, \tag{4}$$

p_*, p^* are positive constants.

Let $\beta = \frac{k-1}{3} > 0$, C is non-zero constant.

THEOREM 1. *For any k, $p_*\, p^*$, h, such that $k > 1$, $0 < p_* < p^*$, $h > 0$, there exist such constant $C > 0$, that for any $p(x, y, y', y'')$ satisfying to (4), any solution $y(x)$ of (3), satisfying to condition $|y(x_0)| = h > 0$ in some point $x_0 \in \mathbb{R}$, cannot be extended to the interval $(x_0 - C\, h^{-\beta}, x_0 + C\, h^{-\beta})$.*

Theorem 2. *For any k, $p_* \, p^*$, a, b, such that $k > 1$, $0 < p_* < p^*$, $a < b$, there exist such constant $C > 0$, that for any $p(x, y, y', y'')$ satisfying to* (4) *and any solution $y(x)$ of* (3)*, defined on $[a, b]$, it is hold*

$$|y(x)| \leq C \min(x - a, b - x)^{-1/\beta}. \tag{5}$$

The research was supported by RFBR (grant 11-01-00989) and by Special Program of the Ministery of Education and Science of the Russian Federation (Project 2.1.1/13250).

References

[1] Astashova I. V., *Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations*, Journal of Mathematical Sciences. Springer Science & Business Media. 126 (2005), no. 5, 1361-1391.

[2] Astashova I. V., *Uniform estimates of positive solutions to quasi-linear differential inequalities*, Journal of Mathematical Sciences. 143 (2007), no. 4, 3198-3204. Translated from Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo. 143 (2007), no. 26, 27-36.

[3] Astashova I. V., *Uniform estimates for positive solutions of quasi-linear ordinary differential equations*, Izvestiya: Mathematics, transl. 72 (2008), no 6, 1141–1160.

[4] Astashova I. V., *Estimates of Solutions to One-dimensional Schrödinger Equation*, World Scientific: Progress in Analysis. Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress. Singapore. II (2003), 955–960.

[5] Kondratiev V. A., *On the qualitative properties to solutions of semilinear elliptic equations*, Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo 16 (1992), 186–190 (Russian). English translation in Proc. of Petrovsky Sem. 16 (1992).

[6] Mitidieri E., Pohozhaev S., *A priori Estimates and Blow-up of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities*, Proc. Steklov Inst. Math. 234 (2001), P. 1–383.

Conditional reducibility of certain unbounded nonnegative Hamiltonian operator functions

Azizov T. Ya. (Voronezh State University, Russia)

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and let $\mathcal{H}_\ell$ and $\mathcal{H}_r$ be two subspaces of $\mathcal{H}$. A closed densely defined operator A on $\mathcal{H}$ is called *conditionally* $(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_r)$*-reducible*, if $\mathcal{H}$ is the orthogonal sum of $\mathcal{H}_\ell$ and $\mathcal{H}_r$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\ell \oplus \mathcal{H}_r \tag{1}$$

and there exists a bounded and boundedly invertible operator V on $\mathcal{H}$ such that with respect to the decomposition (1) the operator $B := V^{-1}AV$ is a diagonal 2×2 block matrix:

$$B = \begin{bmatrix} B_\ell & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix}$$

whose diagonal entries B_ℓ and B_r are closed densely defined operators with $\sigma(B_\ell) \subset \mathbb{C}_\ell$ and $\sigma(B_r) \subset \mathbb{C}_r$, where $\mathbb{C}_\ell$ and $\mathbb{C}_r$ stand for the left and right open half-planes of $\mathbb{C}$. The operator V will be called the *diagonalizing operator*.

If A is a closed densely defined operator on a Banach space $\mathcal{X}$ a subspace $\mathcal{L}$ of $\mathcal{X}$ will be called *A-invariant* if $\mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A$ is dense in $\mathcal{L}$ and $A(\mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A) \subset \mathcal{L}$.

Let $\{\mathcal{G}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\}$ be a Hilbert space and consider the orthogonal direct sum

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}, \tag{2}$$

which is a Hilbert space whose inner product we also denote by $(\,\cdot\,,\cdot\,)$. In $\mathcal{H}$ we consider the 2×2 block matrices

$$J=\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathfrak{J}=\begin{bmatrix}0 & iI\\ -iI & 0\end{bmatrix}$$

A closed densely defined operator $\mathfrak{A}$ on the Hilbert space $\mathcal{H}$ is called *Hamiltonian* if $i\mathfrak{A}$ is $\mathfrak{J}$-self-adjoint in $\mathcal{H}$ and if in addition $i\mathfrak{A}$ is J-dissipative in $\mathcal{H}$, then $\mathfrak{A}$ is called a *nonnegative Hamiltonian* operator.

We study an operator function $\mathfrak{A}(t)$ on $[0,1]$ of the form $\mathfrak{A}(t)=\mathfrak{S}+\mathfrak{B}(t)$, $t\in[0,1]$, where $\mathfrak{S}$ is a closed densely defined Hamiltonian operator with $i\mathbb{R}\subset\rho(\mathfrak{S})$ and $\mathfrak{B}(t)$ is a continuous function on $[0,1]$, whose values are bounded operators. We assume for $t\in[0,1]$, $\mathfrak{A}(t)$ is a closed densely defined nonnegative Hamiltonian operator. In this paper we give sufficient conditions under which $\mathfrak{A}(t)$ is conditionally reducible. They involve bounds on the resolvent of $\mathfrak{S}$ and interpolation of Hilbert spaces.

The talk is based on a joint work with A. Dijksma (Groningen, Netherlands) and I. V. Gridneva (Voronezh, Russia).

Generalized solution of the Cauchy problem for non-divergence parabolic equations

Baderko E. A. (Moscow State University, Russia)

We consider a linear uniformly parabolic equation, the coefficients of which are continuous and bounded in $R^n\times[0,T]$. Furthermore, the principal coefficients are Dini-continuous with respect to the “space” variables.

We introduce a notion of generalized solution of the Cauchy problem for such an equation and prove its existence and uniqueness.We also establish the corresponding estimate of correctness for the generalized solution in the Zygmund space $H^2(R^n\times[0,T])$.

On spectrum of the Neumann-Laplacian on infinite cylinder with a periodic family of small voids

Bakharev F. L. (St. Petersburg State University, Russia)
Ruotsalainen K. (University of Oulu, Finland)

We study spectral properties of the Neumann-Laplacian on the periodic singularly perturbed quasicylinder $\Omega(\epsilon)$:

$$-\Delta u^\epsilon(x)=\lambda^\epsilon u^\epsilon(x), \qquad x\in\Omega(\epsilon) \tag{1}$$

$$\partial_n u^\epsilon(x)=0, \qquad x\in\partial\Omega(\epsilon). \tag{2}$$

This spectral problem should be interpreted as a singular perturbation of the same problem in the straight cylinder $\Omega=\omega\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^3$. The quasicylinder $\Omega(\epsilon)$ is a periodic set which depends on a small parameter $\epsilon>0$. It will be obtained from the straight cylinder Ω by a periodic nucleation of small voids with diameter of order ϵ.

In the literature the existence of spectral gaps is mainly investigated for periodic media which is infinite in all directions while the coefficients of differential operators, both in scalar and matrix case, are usually assumed to be contrasting (see [**2**], [**3**] and many others). Much less results are obtained for periodic waveguides, which are infinite in one direction only. In this case spectral gaps ought to be opened by varying the shape of the periodicity cell only which is in accordance with the results in the known engineering practice.

We utilizes the asymptotic analysis of the spectrum for the associated model problem in the periodicity cell. This approach has been realized for the Dirichlet Laplacian in papers [**4**], [**2**], [**5**] and others. We emphasize that our results for the Neumann-Laplacian are completely new and require different techniques.

We prove that introducing a periodic family of small voids in straight cylinder opens a gap in the spectrum of the Neumann-Laplacian in the case that the period is large enough. We calculate asymptotically the position and the width of the spectral gap. The mixed boundary value problem is under consideration as well and a similar result is obtained.

The talk is based on the joint paper with S. A. Nazarov.

The research of first author was supported by the Chebyshev Laboratory (Department of Mathematics and Mechanics, Saint-Petersburg State University) under the grant 11.G34.31.0026 of the Government of the Russian Federation.

References

[1] Bakharev F.L., Nazarov S.A., Ruotsalainen R., A gap in the spectrum of the Neumann-Laplacian on infinite cylinder with a periodic family of small voids, preprint.

[2] Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth bourdaries. Moscow: Nauka. 1991. 336 p.

[3] Nazarov S.A., A gap in the essential spectrum of an elliptic formally self-adjoint system of differential equation. Differential equations. 2010

[4] Friedlander L., Solomyak M., On the spectrum of narrow periodic waveguides, Russ. J. Math. Phys. (2) 15, 238-242 (2008).

[5] K. Yoshitomi, Band Gap of the Spectrum in Periodically Curved Quantum Waveguides, J. Differ. Equations (1) 142, 123-166 (1998).

On monotonicity of some functionals under rearrangements

Bankevich S. V. (St. Petersburg State University, Russia)

Let $u \in W_1^1([-1,1])$ be a nonnegative function. We define $\overline{u}$ to be the monotone rearrangement of u and u^* to be its Steiner symmetrization. Let $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ be a function which is increasing and convex in the second argument.

It is well known that for $I(u) = \int_{-1}^{1} F(u, |u'|)dx$ the inequalities $I(u^*) \le I(u)$ and $I(\overline{u}) \le I(u)$ hold.

In the paper [**2**] the inequality $I(u^*) \le I(u)$ is proved for the functional

$$I(u) = \int_{-1}^{1} F(u, |a(x,u)u'|)dx, \tag{1}$$

where a is even and convex in x. Also a multidimensional analog is studied.

We consider the case of the monotone rearrangement. Let a be even with respect to the first argument and satisfy

$$\begin{gathered} \forall u \in \mathbb{R}, \forall s,t \in [-1,1] : 1+s+t \in [-1,1] \\ a(s,u) + a(t,u) \ge a(1+s+t,u). \end{gathered} \tag{2}$$

We modify the construction from [**3**] and prove $I(\overline{u}) \le I(u)$ for functions u lying in the natural functional class.

Note that in the paper [**4**] the inequality $I(\overline{u}) \le I(u)$ was considered under the additional restriction $u(-1) = \min\limits_{\Omega} u$. However, both the class of functions F and the class of admissible weights in that paper are non-optimal.

Also we extend the class of functions u, for which $I(u^*) \le I(u)$ holds.

The talk is based on the joint paper with A. I. Nazarov.

The research was supported by RFBR grant 09-01-00729 and by Federal Scientific and Innovation Program.

References

[1] *Bankevich S. V., Nazarov A. I.* A generalization of the Pólya-Szegö inequality for one-dimensional functionals // Doklady Mathematics (2011), v. 438, no. 1, to appear.

[2] *Brock F.* Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization // Calc. Var. 8 (1999), p. 15–25

[3] *Alberti G., Serra Cassano F.* Non-occurrence of gap for one-dimentional autonomous functionals // Proceedings of “Calc. Var., Homogen. and Cont. Mech.”, Bouchitté G., Buttazzo G., Suquet P., ed.: World Sci., Singapore, 1994, p. 1–17

[4] *Landes R.* Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density // Math. Nachr. 280, No. 5–6 (2007), p. 560–570

Geometrization of rings as a device for solving inverse problems

Belishev M. I. (St-Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute, Russia)

By Gelfand, any commutative Banach algebra can be canonically realized as a subalgebra of the algebra $C(\Omega)$ of continuous functions on a compact Hausdorff space Ω. By Gelfand–Naimark–Segal, any commutative and cyclic Neumann algebra is isometrically isomorphic to the operator algebra of L_∞-multiplicators in $L_{2,\mu}(\Omega)$. In both cases, the set Ω appears as a (topologized) spectrum of a respective algebra, whereas the passage from the algebra to its functional realization is referred to as a “geometrization”.

In the boundary value inverse problems on manifolds, one needs to recover a Riemannian manifold Ω from its boundary inverse data (elliptic or hyperbolic Dirichlet-to-Neumann map, spectral data, etc).

We show that for a class of elliptic and hyperbolic problems, the required manifold is identical with the spectrum of the certain algebra determined by the inverse data. By this, to recover the manifold is to represent a relevant algebra in a canonical form. Such a unified look at so different inverse problems is the main subject of the talk.

This work was supported by RFBR grants 08-01-00511 and NSh-4210.2010.1.

References

[1] Belishev M. I., *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, 35 (2003), no. 1, 72–182.

[2] Belishev M. I., *Recent progress in the boundary control method*, Inverse Problems, 23 (2007), no 5, R1–R67.

[3] Belishev M. I., *Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems*, Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics, Ed. V.Isakov, Springer, 2008, 5–24.

Minimizers of Ginzburg-Landau functional with "semi-stiff" boundary conditions: existence and vorticity

Berlyand L. V. (Penn State University, USA)
Rybalko V. O. (ILT, Kharkiv, Ukraine)
Misiats O. O. (Penn State University, USA)

We study Ginzburg-Landau free energy functional with induced magnetic field

$$F_\lambda[u, A] := \frac{1}{2}\int_G |(\nabla u - iAu)|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |curl(A)|^2 + \frac{\lambda}{8}\int_G (|u|^2-1)^2\,dx \qquad (1)$$

where $G \subset \mathbb{C}$ is a bounded smooth domain, $\Omega \subset \mathbb{C}$ is the smallest simply connected domain containing G, $u \in H^1(G, \mathbb{C})$, $A \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ and $\lambda \geq 0$. We consider two cases:

1°. G is simply connected. Then $\Omega = G$. For fixed $d \in \mathbb{N}$ define

$$J_d := \{(u, A) \in H^1(G, \mathbb{C}) \times H^1(G, \mathbb{R}^2),\ |u| = 1 \text{ on } \partial G, \deg(u, \partial G) = d\} \qquad (2)$$

where $\deg(u, \partial G)$ is a winding number of u over ∂G. The condition $|u| = 1$ on ∂G is called "semi-stiff" boundary condition, since only the modulus of u is fixed while the phase of u is free. Our main result in case (i) is that the infimum of the functional (1) in the class (2) is attained if and only if $\lambda \leq 1$. Moreover, for λ sufficiently close to 1, the minimizer of (1) in (2) has precisely d zeros (vortices) in G, and their locations can be determined through the maximization of a certain finite dimensional functional.

2°. G is doubly connected. Then $G = \Omega \setminus \omega$, where $\omega \Subset \Omega$. Consider

$$J_{01} := \{(u, A) \in H^1(G, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^2),$$
$$|u| = 1 \text{ on } \partial G, \deg(u, \partial\Omega) = 1, \deg(u, \partial\omega) = 0\} \qquad (3)$$

We show that the necessary and sufficient condition for the existence of minimizers of (1) in class (3) is $\lambda < 1$. For λ sufficiently close to 1, the minimizer of (1) in (3) has a unique zero (vortex), which converges to $\partial\Omega$ as $\lambda \to 1-0$. Moreover, if $\xi^* \in \partial\Omega$ is the limiting location of the vortex, then $\xi^* = \operatorname{argmin}_{\xi\in\partial\Omega}\left|\frac{\partial v(\xi)}{\partial \nu}\right|$, where v is the unique solution to the scalar elliptic problem

$$\begin{cases} \Delta v = v \text{ in } G; \\ v = 1 \text{ on } \partial\omega;\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in variable spaces

Bilalov B. T. (IMM of NASA, Azerbaijan)
Guseynov Z. G. (Sumgait State University, Azerbaijan)

Consider the following system of exponents

$$\left\{e^{i(nt+\lambda_n(t))}\right\}_{n\in Z}, \qquad (1)$$

where $\lambda_n(t) \equiv -\operatorname{sign} n\,[\alpha t + \beta \operatorname{sign} t]$, $t \in [-\pi, \pi]$, $\alpha, \beta \in C$ — complex parameters. In L_p, $1 \le p \le +\infty$, ($L_\infty \equiv C[-\pi, \pi]$), the basis properties of the system (1) were completely studied in [**1**, **2**] for $\beta = 0$ and in [**3**] in general case.

Let $p : [-\pi, \pi] \to [1, +\infty)$ be a Lebesgue measurable function. By $\mathcal{L}_0$ we denote a class of all functions measurable on $[-\pi, \pi]$ (with respect to Lebesgue measure). Accept the denotation

$$I_p(f) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p(t)}\, dt.$$

Assume $\mathcal{L} \equiv \{f \in \mathcal{L}_0 : I_p(f) < +\infty\}$. Let $p^+ = \operatorname*{vrai\,sup}_{[-\pi,\pi]} p(t)$; $p^- = \operatorname*{vrai\,inf}_{[-\pi,\pi]} p(t)$. For $p^+ < +\infty$, with respect to ordinary linear operations, $\mathcal{L}$ turns into a linear space. If we define the norm $\|\cdot\|_{p_t}$ as:

$$\|f\|_{p_t} \equiv \inf\left\{\lambda > 0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\},$$

then $\mathcal{L}$ is a Banach space (see for instance [**4**, **5**]) and we denote it by L_{p_t}. $q(t)$ denotes the function $\dfrac{1}{p(t)} + \dfrac{1}{q(t)} \equiv 1$ conjugated to $p(t)$. Assume

$$H_\pi^{\ln} \equiv \Big\{p : p(-\pi) = p(\pi), \exists c > 0;\ \forall t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]\ ,\ |t_1 - t_2| \le \le \frac{1}{2} \Rightarrow |p(t_1) - p(t_2)| \le \frac{c}{-\ln|t_1 - t_2|}\Big\}.$$

It is valid the following theorem.

THEOREM 1. *Let* $p \in H_\pi^{\ln}$, $p^- > 1$ *and* $-\dfrac{1}{2q(0)} < \dfrac{\beta}{\pi} < \dfrac{1}{2p(0)}$ *hold. The system* (1) *forms a basis in* L_{p_t} *iff the inequality* $-\dfrac{1}{2p(\pi)} < \alpha + \dfrac{\beta}{\pi} < \dfrac{1}{2q(\pi)}$ *is fulfilled.*

References

[1] Sedletskii A. M., *Biorthogonal expansion in series of exponents on the intervals of a real axis.* Usp. Math. Nauk, 1982, v. 37, issue 5 (227), pp. 51-95.

[2] Moiseev E. I., *Basicity of the system of exponents, cosines and sines in* L_p. DAN SSSR, 1984, v. 275, No4, pp. 794-798.

[3] Bilalov B. T., *Basis properties of some system of exponents cosines and sines.* Sib. Math. Zhurn., 2004, v. 45, No 2, pp. 264-273.

[4] Sharapudinov I. I., *On topology of the space* $\mathcal{L}^{p(x)}$ ([0, 1]), Math. zametki, 1979, 26:4, pp. 613-632.

[5] Kovacik O., Rakosnik J., *On Spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{m,p(x)}$, Czechoclovak Math. J., 1991, 41 (116), pp. 592-618.

Collective dynamics in deterministic infinite particle systems

Blank M. L. (RAS Institute for Information Transmission Problems, Russia)

Let $(X, \mathbf{B}, \rho)$ be a compact metric space and let let $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ be the set of probabilistic Borel measures on X. A (discrete time) *process* on $\mathbf{M}$ is defined by a transfer-operator $T^* : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ satisfying the following properties:

1°. $(T^*\mu)(A) \cdot \mu(A) \geq 0 \;\; \forall \mu \in \mathbf{M}, A \in \mathbf{B}$ (positivity),
2°. $(T^*\mu)(A) \equiv \mu(A)$ (total measure preservation).

If additionally one assumes the *linearity* of the operator T^* the operator T^* becomes the standard Markov operator, which describes the dynamics of measures under the action of a Markov process. Therefore the processes defined above are often called *nonlinear* Markov processes.

Denoting by $\mathbf{M}^\delta \subset \mathbf{M}$ the set of δ-measures on X it is natural to say that the process T^* is *deterministic* if $T^* : \mathbf{M}^\delta \to \mathbf{M}^\delta$. Obviously a deterministic process T^* defines uniquely a deterministic map $T : X \to X$ according to the formula $Tx := y$, where $T^* 1_x = 1_y$ for each $x \in X$. Here 1_x a the δ-measure supported on the point x.

We shall study a two-parameter collection of deterministic nonlinear Markov processes defined by the following nonlinear transfer-operators:

$$T^*_{\varepsilon,\gamma}\mu := Q^*_{\varepsilon,\gamma,T^*\mu} T^*\mu, \qquad Q_{\varepsilon,\gamma,\mu} x := (1-\gamma)x + \frac{\gamma}{\mu(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} y \, d\mu(y).$$

Here $0 < \varepsilon, \gamma \ll 1$ are numeric parameters, and $B_\varepsilon(x)$ is the ε-neighborhood of the point $x \in X$.

One can interpret the measure μ a distribution of a collection of particles, whose local dynamics is governed by the map T and the interaction is local in space and is defined by the operator $Q_{\varepsilon,\gamma,\mu}$. A special case when the measure μ is equal to a finite sum of δ-measures explicitly corresponds to the dynamics of a finite Couple Map Lattice and was studied in very different terms and using different methods in [**1**].

THEOREM 1 (Condensation). *Let the map T satisfies Lipschitz condition with the constant $\lambda < \infty$. Then $\exists c = c(\lambda) > 0$ such that $\forall \varepsilon > 0, 1 - \gamma < c$ the condensation takes place: for each initial measure $\mu \in \mathbf{M}$ with the support of diameter not exceeding ε, the diameter of its image $(T^*)^t\mu$ vanishes with time $t \to \infty$.*

Assuming certain expanding type conditions on the map T with the constant λ and the uniqueness of the corresponding Sinai-Bowen-Ruelle measure μ_T is absolutely continuous with respect to the reference measure m (say Lebesgue measure) we get the following opposite statement.

THEOREM 2 (Independence). *There exists an open set of absolutely continuous measures $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}$ and $c = c(\lambda)$ such that $\forall \varepsilon > 0, \gamma < c$, $\mu \in \mathbf{M}_0$ we have*

$$(T^*)^t \mu \overset{t \to \infty}{\to} \mu_{\varepsilon,\gamma} \overset{\varepsilon,\gamma \to 0}{\to} \mu_T.$$

The research was supported by RFBR grants.

References

[1] Blank M., *Collective phenomena in lattices of weakly interacting maps*, Doklady Akademii Nauk (Russia), 430:3 (2010), 300–304

Numerical simulation of boundary layer correctors and wall laws in a domain with highly oscillating boundary

Bodart O. (Blaise Pascal University, France)
Amirat Y. (Blaise Pascal University, France)

The general framework of this work is the asymptotic approximation of the solution of the periodic Laplace and Stokes equations in a domain with a highly oscillating boundary in $\mathbf{R}^2$. The domain is periodic in the first variable, bounded at the bottom by a smooth plate and at the top with a rugose plate. This rough boundary is a plane covered with periodic asperities, which size depend on a small parameter $\varepsilon > 0$. The asperities are sharp, that is their height remains constant as ε tends to 0. The typical shape of such a domain is as follows. Let $0 < a_1 < b_1 < l_1$, and η_ε be the εl_1-periodic function defined on $(0, \varepsilon l_1)$ by

$$\eta_\varepsilon(x_1) = \begin{cases} l_3' & \text{if } x_1 \in (\varepsilon a_1, \varepsilon b_1), \\ l_3 & \text{if } x_1 \in (0, \varepsilon l_1) \backslash (\varepsilon a_1, \varepsilon b_1). \end{cases}$$

with $l_3' > l_3 > 0$. The domain under consideration is then

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1 < l_1,\ b(x_1) < x_3 < \eta_\varepsilon(x_1) \right\}.$$

In such a geometry we consider the solutions of the x_1-periodic Laplace and Stokes equations. From the computational point of view, the approximation of PDEs in such domains is an issue. When the scale of oscillations becomes small compared to the size of the domain, a very large number of mesh points is required, yielding costly computations. Eventually, when meshing the domain, one can face numerical underflow problems when the size of the oscillations becomes too small, making the computation impossible to achieve. Therefore, one aims at approximating the solution through a problem in a smooth domain with an effective boundary condition.

In previous works, we constructed asymptotic development of the solutions of order $O(\varepsilon^{3/2})$ in the H^1-norm for the Laplace equation. For the Stokes equations, the approximation is of order $O(\varepsilon^{3/2-\gamma})$ for the velocity and of order $O(\varepsilon)$ for the pressure, $\gamma > 0$ being arbitrarily small. We also built wall laws leading to effective boundary conditions to compute approximations in the limit smooth domain of the sequence Ω_ε.

The aim of the present work is the numerical implementation of the wall laws. The asymptotic formulas we have developped, as well as the wall laws, involve boundary layer correctors. These correcting functions are defined in un unbounded domain. We first present an approximation process for the correctors in a bounded domain with exponentially small error. The next step of the works consists in the implementation of the wall law for the solution. We present numerical results with a comparison with a full computation in the rough domain when the parameter ε is large enough for the mesh to be performed.

On a class of reductions of the Manakov–Santini hierarchy and related multidimensional hierarchies

Bogdanov L. V. (L. D. Landau ITP RAS, Russia)

We construct a class of reductions of the hierarchy associated with the system recently introduced by Manakov and Santini [**1**]

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u_{yy} + (uu_x)_x + v_x u_{xy} - u_{xx} v_y, \\ v_{xt} &= v_{yy} + u v_{xx} + v_x v_{xy} - v_{xx} v_y, \end{aligned} \tag{1}$$

whose Lax pair is

$$\begin{aligned} &\partial_y \mathbf{\Psi} = ((p - v_x)\partial_x - u_x \partial_p)\mathbf{\Psi}, \\ &\partial_t \mathbf{\Psi} = ((p^2 - v_x p + u - v_y)\partial_x - (u_x p + u_y)\partial_p)\mathbf{\Psi}, \end{aligned} \tag{2}$$

where p plays a role of a spectral variable. The Manakov–Santini system is a generalization of the dispersionless KP (Khohlov–Zabolotskaya) equation to the case of general (non-Hamiltonian) vector fields in the Lax pair. For $v = 0$ the system reduces to the dKP equation. Respectively, the reduction $u = 0$ gives an equation [**2**] (see also [**3**])

$$v_{xt} = v_{yy} + v_x v_{xy} - v_{xx} v_y. \tag{3}$$

Using Lax–Sato formulation of the hierarchy [**4, 5**], we introduce a class of reductions, such that the zero order reduction of this class corresponds to the dKP hierarchy, and the first order reduction gives a hierarchy associated with the interpolating system introduced in [**6**], where it was proved that it is “the most general symmetry reduction of the second heavenly equation by a conformal Killing vector with a null self-dual derivative”. In [**6**] it was also shown that the interpolating system corresponds to a simple differential reduction $cu = bv_x$ of the Manakov–Santini equation. We present Lax–Sato form of a reduced hierarchy for the interpolating system and also for the reduction of an arbitrary order. Similar to the dKP hierarchy, the Lax–Sato equations for L (the Lax function) split from the Lax–Sato equations for M (the Orlov function) due to the reduction, and the reduced hierarchy for an arbitrary order of reduction is defined by Lax–Sato equations for L only. In terms of the Manakov-Santini system this class defines differential reductions (not changing the dimension). A characterization of the class of reductions in terms of the dressing data is given.

The construction is also developed for the case corresponding to dispersionless 2DTL hierarchy and for a general multidimensional case (including the hierarchies related to Plebański heavenly equation).

This research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant no. 10-01-00787 and by the President of Russia grant 4887.2008.2 (scientific schools).

References

[1] S. V. Manakov and P. M. Santini, JETP Lett. **83** (2006) 462–466; Theor. Math. Phys. **152** (2007) 1004–1011; J Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 055204.

[2] M. V. Pavlov, J. Math. Phys. **44**(9) (2003) 4134–4156.

[3] L. Martínez Alonso and A. B. Shabat, Phys. Lett. A **300** (2002) 58–64; Theor. Math. Phys. **140** (2004) 1073–1085.

[4] L. V. Bogdanov, V. S. Dryuma and S. V. Manakov, *J Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) 14383–14393.
[5] L. V. Bogdanov, Theoretical and Mathematical Physics, **160**(1): 888–894 (2009).
[6] Maciej Dunajski, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 315202.

On the lower bound for the first spectral gap of a general second-order differential operator

Borisov D. I. (Bashkir State Pedagogical University, Russia)

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be a domain with C^1-boundary, $n \geqslant 2$, $A_{ij}\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ be bounded functions satisfying the ellipticity condition

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x), \quad \nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2, \quad 0 < \nu < \mu.$$

Given a function $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$, we set $V^+(x) := \max\{V(x), 0\}$, $V^-(x) := -\min\{V(x), 0\}$ and assume that $V^- \in L_{q/2}(\Omega)$ for some $q > n$ and $V^+ \in L_{q/2}(\Omega')$ for each subdomain $\Omega' \subseteq \Omega$. On $L_2(\Omega)$ we introduce a closed lower-semibounded symmetric sesquilinear form

$$\mathfrak{h}[u,v] := \sum_{i,j=1}^{n} (A_{i,j}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} + (Vu, v)_{L_2(\Omega)}, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}(\mathfrak{h}) := \left\{ u \in W_2^1(\Omega) : \int_\Omega |u|^2(V^+ + 1)\,dx < \infty,\ u|_\Gamma = 0 \right\}, \quad \Gamma \subset \partial\Omega.$$

By $\mathcal{H}$ we denote the self-adjoint operator associated with the form $\mathfrak{h}$. Assume that two lowest spectral values $\lambda_0 := \inf\sigma(\mathcal{H})$, $\lambda := \inf\sigma(\mathcal{H}) \setminus \{\lambda_0\}$ of the spectrum of $\mathcal{H}$ are the eigenvalues.

For any $\Omega_0 \subseteq \Omega$ denote by $\mathcal{H}_0$ the self-adjoint operator associated with the same form as in (1), but considered on $L_2(\Omega \setminus \overline{\Omega_0})$ with the domain $\mathring{W}_2^1(\Omega \setminus \Omega_0, \widetilde{\Gamma}) \cap L_2(\Omega \setminus \Omega_0; V^+)$, where $\widetilde{\Gamma} := \partial\Omega_0 \cup \Gamma$. This domain corresponds to the Dirichlet condition on $\widetilde{\Gamma}$. We assume that there exist subdomains $\Omega_0 \subseteq \widehat{\Omega}$ of Ω such that $\partial\Omega_0 \in C^1$, $\operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega) = d > 0$, $\lambda_0 < \lambda < 0 \leqslant \inf\operatorname{spec}(\mathcal{H}_0)$, $V^- \equiv 0$ on $\Omega \setminus \Omega_0$, $\operatorname{dist}\{\widehat{\Omega}, \partial\Omega\} \geqslant \frac{3}{4}d$, $\widehat{\Omega}$ is path-connected.

Our main result is an explicit bound for the relative size of the first spectral gap $\frac{\lambda - \lambda_0}{|\lambda|}$.

THEOREM 1. *The spectral gap between λ and λ_0 obeys the following lower bound*

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{|\lambda|} \geqslant C,$$

where the constant C is given explicitly *in terms of ν, μ, n, q, d, V and certain geometric characteristics of Ω, Ω_0, $\widehat{\Omega}$.*

The exact value of C will be presented at the talk. We shall also discuss the behavior of this constant in various asymptotical regimes, i.e., as various arguments of this constant tends to zero or to infinity. A series of possible applications of the main result will be presented. This is a joint work with I. Veselic' (TU Chemnitz, Germany).

D.B. was partially supported by RFBR, by the grants of the President of Russia for young scientists-doctors of sciences (MD-453.2010.1) and for Leading Scientific Schools (NSh-6249.2010.1), and by the Federal Task Program (02.740.11.0612). Both authors were partially supported by the project "Spektrale Eigenschaften von zufälligen Schrödingeroperatoren und zufälligen Operatoren auf Mannigfaltigkeiten und Graphen" within the Emmy-Noether-Programme of the Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Stability and limit behavior of a distributed replicator system

Bratus A. S. (Lomonosov Moscow State University, Russia)
Posvyanskii V. P. (MIIT, Russia)
Novozhilov A. S. (MIIT, Russia)

The replicator equation is known to provide a general modeling framework for several distinct areas in mathematical biology. In particular, it arises as a selection equation in population genetics, as a dynamic description of the evolutionary game theory, and as a model for putative chemical reactions describing prebiotic evolution. In its simplest form, when the fitness of the species is a linear function of the relative abundances of other species, the replicator equation takes the form

$$\dot{v}_i = v_i \left[(Av)_i - f^{loc}(t) \right], \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

where $v = v(t) = (v_1, \dots, v_n)$, A is an $n \times n$ matrix with elements a_{ij} describing the contribution of the j-th species to the fitness of the i-th species, $(Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, and the mean fitness $f^{loc}(t) = \langle Av, v \rangle = \sum_{i=1}^n (Av)_i v_i$ is chosen such that the phase space is simplex $v \in S_n = \{v \colon \sum_{i=1}^n v_i = 1\}$.

There are several different approaches to add space to (1). We suggest that the global regulation represents a natural and convenient approach to consider the replicator equation with an explicit spatial structure. To be exact, as a counterpart of the local model (1) we consider the model

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i \left[(Au)_i - f^{sp}(t) \right] + d_i \Delta u_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

where now $u = u(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3$, $d_i > 0$ are diffusion coefficients, and the mean integral fitness is given, assuming Niemann's boundary conditions, by $f^{sp}(t) = \int_\Omega \langle Au, u \rangle \, d\mathbf{x}$. This approach allows analytical investigation of (2): the tool which was mainly missing in the analysis of replicator equations with explicit space. In particular, it is possible to find the conditions for asymptotically stable rest points of (1) to be asymptotically stable homogeneous equilibria of (2). In our work, we show that for some values of the diffusion coefficients spatially heterogeneous solutions appear. Using a definition for the stability in the mean integral sense we prove that these heterogeneous solutions can be attracting; in particular this is the case for Eigen's hypercycle. Defining in some natural way evolutionary stable states for the distributed system (2), we provide the conditions for this distributed state to be an asymptotically stable stationary solution to (2).

Part of the results are presented in [**1, 2**].

References

[1] A. S. Bratus, V. P. Posvyanskii, and A. S. Novozhilov. Existence and stability of stationary solutions to spatially extended autocatalytic and hypercyclic systems under global regulation and with nonlinear growth rates. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11:1897–1917, 2010.

[2] A. S. Bratus, V. P. Posvyanskii, and A. S. Novozhilov. A note on the replicator equation with explicit space and global regulation. *Mathematical Biosciences and Engineering*, in press, 2011.

Inertial manifolds and gap property for dissipative hyperbolic equations

Chalkina N. A. (Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University)

Goritsky A. Yu. (Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University)

Consider the dissipative semilinear hyperbolic equation

$$u_{tt} + 2\gamma\, u_t = \Delta u + f(u) + g(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \qquad u_t\big|_{t=0} = p_0(x) \in L_2(\Omega). \tag{2}$$

in a bounded domain Ω. Here $\gamma > 0$ is a coefficient of *weak* dissipation, $g(x) \in L_2(\Omega)$ is an external force, and the nonlinearity $f(u)$ satisfies the global Lipschitz condition $|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant l\,|u_1 - u_2|$.

Theorem 1 (see [**1**]). *Let λ_k, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \to +\infty$, be eigenvalues of the operator $-\Delta$ in the domain Ω under the Dirichlet boundary conditions. Suppose*

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > 4l \quad \text{for some } N \text{ and } \gamma \text{ is sufficiently large.} \tag{3}$$

Then, in the phase space $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, there exists an N-dimensional inertial manifold M that exponentially attracts (as $t \to +\infty$) all the solutions of problem (1), (2).

Gap property (3) will be compared with the same one for parabolic equations. Additionally it will be discussed how (3) changes when

- $f = f(u, u_t)$ depends (Lipschitz continuously) also on u_t (see [**2**]);
- equation is *strong* dissipative, i. e., contains the term $-2\gamma\Delta u_t$ instead of $+2\gamma u_t$.

The research was supported by RFBR grant 11-01-00339-a.

References

[1] Chepyzhov V. V., Goritsky A. Yu., and Vishik M. I., *Integral manifolds and attractors with exponential rate for nonautonomous hyperbolic equations with dissipation,* Russ. J. Math. Phys. 12 (2005), 17–35.

[2] Chalkina N. A., *Inertial Manifold for Hyperbolic Equation with Dissipation,* Moscow Univ. Math. Bull., to appear.

Strong trajectory attractors for general dissipative reaction-diffusion systems

Chepyzhov V. V. (Institute for Information Transmission Problems RAS, Russia)

The method of trajectory dynamical systems and trajectory attractors helps to study effectively the long time behaviour of solutions of non-linear partial differential equations for which the corresponding initial-boundary value problem is ill-posed or it well-posedness is not proved yet (see [**1, 2, 3**]). For example, for the 3D Navier–Stokes system in a bounded domain, following the classical works of E. Hopf and J. Leray we know how to construct global weak solutions but the uniqueness result remains an open problem for years. Nevertheless, the trajectory attractor was constructed for this system. At the same time, as a role, for meaningful equations and problems, we were able to establish the attraction to the corresponding trajectory attractors only in the "maximal" possible local *weak topology* of the problem we are dealing with. For instance, in [**1**], we have constructed a weak trajectory attractor for a general dissipative reaction-diffusion system in the corresponding local weak topology.

In the present report, for a general dissipative reaction-diffusion system, we prove that its trajectory (global solutions) tend to the (weak) trajectory attractor in the "maximal" local *strong topology* of the corresponding trajectory phase space. Moreover, the "weak trajectory attractor" is compact in this local strong topology. The considered reaction-diffusion systems are ill-posed since they do not satisfy conditions that provide the unique solvability of the corresponding Cauchy problem.

To prove the strong attraction result, we use the general method of energy identities that was applied earlier in [**4, 5**] and in the works of other authors in the study of global attractors for well-posed problems in unbounded domains when the standard compactness embedding theorems in Sobolev spaces do not work.

This report is based on a joint work with M. I. Vishik and S. V. Zelik (`vishik@iitp.ru, S.Zelik@surrey.ac.uk`).

The research was supported by RFBR grants 08-01-00784 and 10-01-00293.

References

[1] Chepyzhov V. V., Vishik M. I., *Trajectory attractors for reaction-diffusion systems*, Topol. Meth. Nonl. Anal. 7 (1996), no. 1, 49–76.

[2] Chepyzhov V. V., Vishik M. I., *Evolution equations and their trajectory attractors*, J. Math. Pures Appl. 76 (1997), no. 10, 913–964.

[3] Chepyzhov V. V., Vishik M. I., *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2002.

[4] Ghidaglia J.-M., *A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations*, J. Differ. Equations 110 (1994), no. 2, 356–359.

[5] Moise I., Rosa R., Wang X., *Attractors for non-compact semigroups via energy equations*, Nonlinearity 11 (1998), 1369–1393.

Modern traffic flow models

Chertock A. (North Carolina State University, USA)
Kurganov A. (Tulane University, USA)
Polizzi A. (Tulane University, USA)

We will talk about several models of vehicular traffic. We will first describe microscopic cellular automata models and show how the vehicle interaction can be modeled through the look-ahead interaction potential, which leads to slow down due to heavy traffic conditions. We will then proceed with the derivation of the semi-discrete mesoscopic and continuous PDE-based macroscopic models. The resulting (systems of) PDEs are hyperbolic (systems of) PDEs with global fluxes, which make it very challenging from both analytical and numerical perspectives. The last part of my talk will be devoted to numerical methods for hyperbolic systems with global fluxes.

References

[1] Chertock A., Kurganov A. and Polizzi A., *Multi-class traffic flow model with look-ahead dynamics*, Preprint, 2011.
[2] Kurganov A. and Polizzi A., *Non-oscillatory central schemes for traffic flow models with Arrhenius look-ahead dynamics*, Netw. Heterog. Media, 4 (2009), no. 3, 431–451.

Steklov problems in periodically perforated domains

Chiado' Piat V.

We present some results, obtained in a collaboration with S. A. Nazarov and A. L. Piatnitski, about the asymptotic behaviour of the Steklov problems in periodically perforated domains, when the boundary condition contains a changing-sign coefficient.

Global dynamics in quasilinear Kirchhoff wave equation

Chueshov I. D. (Kharkov National University, Ukraine)

We study well-posedness and long-time dynamics of the following quasilinear problem

$$\begin{cases} u_{tt} + \phi(\|\mathcal{A}^{1/2}u\|^2)\mathcal{A}u + \sigma(\|\mathcal{A}^{1/2}u\|^2)\mathcal{A}^\theta u_t + F(u) = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

with $\theta \in [1/2, 1]$, where $\mathcal{A}$ is the minus Dirichlet Laplace operator in a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|$ stands for the $L_2(\Omega)$-norm. The damping (σ) and the stiffness (ϕ) factors are C^1 functions on the semi-axis $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Moreover, $\sigma(s) > 0$ for all $s \in \mathbb{R}_+$ and there exist $c_i \geq 0$ and $\eta_0 \geq 0$ such that

$$\lim_{s\to+\infty} \int_0^s [\phi(\xi) + \eta_0\sigma(\xi)]\, d\xi = +\infty \quad \text{and} \quad s\phi(s) + c_1 \int_0^s \sigma(\xi) d\xi \geq -c_2$$

for $s \in \mathbb{R}_+$. We assume that $F(u)$ is a Nemytskij operator generated by a C^1-function $f(u)$ such that

$$c_0|u|^{p-1} - c_1 \leq f'(u) \leq c_2\left(1 + |u|^{p-1}\right) \quad \text{with some} \quad 1 \leq p < \frac{d+4}{(d-4)_+},$$

where $c_i > 0$ are constants. This kind of evolution second order models goes back to G. Kirchhoff ($d = 1$, $\phi(s) = \phi_0 + \phi_1 s$, $\sigma(s) \equiv 0$, $f(u) \equiv 0$) and has been studied by many authors under different types of hypotheses starting with pioneering papers [**2**, **5**].

Our first result is the following theorem.

THEOREM 1. *Let $\theta = 1$. Then problem* (1) *has a unique weak solution for every initial data $(u_0; u_1)$ from the space $\mathcal{H} = [H_0^1 \cap L_{p+1}](\Omega) \times L_2(\Omega)$. In the case $1/2 \le \theta < 1$ the same is true if both σ and ϕ are positive and $p \le p_* \equiv (d + 2\theta)(d-2)_+^{-1}$.*

We note that in the case when $\theta \in (0, 1/2)$ we can also prove the existence of weak solutions. However the question of their uniqueness is still open.

Our main result deals with long-time dynamics of solutions to (1).

THEOREM 2. *Let $\theta = 1$. Assume that $\phi(s) > 0$ and $\phi(s)s \to +\infty$ as $s \to +\infty$. Then the dynamical system generated by* (1) *in $\mathcal{H}$ possesses a global attractor of finite fractal dimension. In the case $1/2 \le \theta < 1$ the same is true if we assume in addition that $p \le p_*$. This attractor coincides with the unstable set emanating from the set of equilibria.*

To prove this theorem we used a recently developed method based on quasi-stability estimates (see [**3**] and [**4**]). For the definition of a global attractor and its basic properties we refer to [**1**].

References

[1] Babin A. V. and Vishik M. I., *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[2] Bernstein S., *Sur une classe d'équations fonctionelles aux dérivées partielles*, Bull. Acad. Sciences de l'URSS, Ser. Math., 4 (1940), 17–26.

[3] Chueshov I. and Lasiecka I., *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Memoirs of AMS 912, AMS, Providence, 2008.

[4] Chueshov I. and Lasiecka I., *Von Karman Evolution Equations*, Springer, New York, 2010.

[5] Pokhozhaev S.I., *On a class of quasilinear hyperbolic equations*, Math. USSR, Sbornik, 25 (1975) no. 1, 145–158.

On a removability condition of the isolated singularity for solutions of degenerate higher-order elliptic equations in divergence form

Cianci P. (University of Catania, Italy)

D'Asero S. (University of Catania, Italy)

A weighted Serrin-like condition is found for removability of the isolated singularity for degenerate high order elliptic equations in divergence form.

We consider an high-order elliptic partial differential equation:

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \mathrm{D}^{\alpha} A_{\alpha}(x, u(x), \mathrm{D}^1 u(x), \ldots, \mathrm{D}^m u(x)) = 0 \qquad \text{in } \Omega \setminus \{x_0\} \qquad (1)$$

where Ω is a bounded open set in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$.

We study conditions for the extension of $u(x)$ to whole Ω in order that the new function $\tilde{u}(x)$ satisfies the equation (1) in Ω.

The coefficient $A_\alpha(x,\xi)$ of (1) satisfy a weighted polynomial growth condition and a weighted ellipticity conditions in the form:

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge \nu_1\Big\{\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q w_q(x)+\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p w_p(x)\Big\}$$
$$-\nu_2\Big\{\sum_{1<|\beta|<m}|\xi_\beta|^{p_\beta}w_\beta(x)+\Big[|\xi_0|^q+f_1(x)\Big]w_q(x)\Big\} \qquad (2)$$

with $q>mp$ and p_β is a positive number satisfying suitable condition and $w_q(x)$, $w_p(x)$ and $w_\beta(x)$ are positive measurable functions of Muckenhoupt kind.

If we assume that $u(x)$ is the solution of the equation (1) in $\Omega\setminus\{x_0\}$ and that for some $\sigma>0$ and $K>0$, we have

$$u(x)\le K\Big[\frac{w_q(B(|x-x_0|)}{|x-x_0|^q}\Big]^{-\frac{1}{q-1}+\sigma} \qquad \text{with } q<n, \qquad (3)$$

and if

$$\lim_{x\to x_0}\frac{w_q(B(|x-x_0|)}{|x-x_0|^q}=0 \qquad \text{where } w_q(B(r))=\int_{B(r)} w_q(x)\,dx,$$

then, we obtain a weighted integral estimates of the gradients of solution $u(x)$ and therefore, by using Moser's method, we derive the boundedness of $u(x)$ in the neighbour of the singularity x_0, so that the singularity of $u(x)$ at the point x_0 is removable.

On the problem of the absence of singular continuous spectrum

Cojuhari P. A. (AGH University of Science and Technology, Cracow, Poland)

We will present an overview on recent results concerning the problem of the absence of singular continuous spectrum for self-adjoint operators. Applications to concrete classes of operators as, for instance, Schrödinger, Dirac and Pauli operators will be considered.

A classification of embeddings of non-simply connected 4-manifolds into R^7

Crowley D.
Skopenkov A.

Let N be a closed connected orientable 4-manifold without torsion in homology. The main result is *a complete readily calculable classification of embeddings* $N\to R^7$, in the smooth and in the PL categories. Such a classification was earlier known only for simply-connected N, in the PL case by Boéchat–Haefilger–Hudson 1970, in the smooth case by the authors 2008 (http://arxiv.org/abs/math/0808.1795). Our result for $N=S^1\times S^3$ states that the set of smooth isotopy classes of smooth embeddings $S^1\times S^3\to R^7$ is in a (geometrically defined) 1–1 correspondence with the quotient set $\dfrac{Z_{12}\oplus Z\oplus Z}{\{(a,b,c)\sim(a,b,c+2kb)\}_{k\in Z}}$. We disprove the Multiple Haefliger–Wu invariant conjecture.

Homogenization of a variational problem on a domain with oscillating boundaries via periodic unfolding

Damlamian A. (Universite Paris-Est, France)
Pettersson K. (Narvik University College, Norway)

The talk will focus on a boundary value problem with rapidly oscillating boundaries. We show that strong L^2 convergence can be obtained by suitable extension in the oscillating part of the domain. The main technical tool will be the unfolding method. More precisely, we consider bilinear forms of the type

$$a^\varepsilon(u,\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} \Big(\sum_{ij} a^\varepsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{x_j} + u\varphi \Big)\, dx,$$

where Ω_ε is a domain in $\mathbf{R}^2$ that depends on some small positive parameter ε. For ε^{-1} a nonnegative integer and with $\beta \in (0,1]$ fixed, the domain Ω_ε is defined by

$$\Omega^\varepsilon_A = \bigcup_{k=0}^{\varepsilon^{-1}-1} (k\varepsilon, k\varepsilon + \beta\varepsilon) \times (0,1),$$

together with $\Omega_B = (0,1) \times (-1,0)$ and $\Omega_\varepsilon = \operatorname{Int} \operatorname{Cl}(\Omega^\varepsilon_A \cup \Omega_B)$.

For $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, together with some strong conditions on a^ε_{ij}, the simplest extension of the sequence u_ε defined by $a^\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\, dx$, for all $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, converges weakly to the solution of a limit problem. We give an extension of u_ε that converge strongly in $L^2((0,1);H^1((0,1)))$ and $H^1(\Omega_B)$.

On normal forms of linear second order mixed type PDE families in the plane

Davydov A. A. (Vladimir State University)
Trinh Thi Diep L. (Thai Nguyen University of Education)

For partial differential equation in the plane

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y), \qquad (1)$$

where x, y are coordinates, a, b, c are smooth functions, and F is some function, we consider the smooth deformation of its *characteristic equation*

$$A(x,y,\epsilon)dy^2 - 2B(x,y,\epsilon)dxdy + C(x,y,\epsilon)dx^2 = 0 \qquad (2)$$

with a parameter $\epsilon \in \mathbb{R}^n$, where $A(.,.,0) = a$, $B(.,.,0) = b$ and $C(.,.,0) = c$.

THEOREM 1 ([**3**]). *For any given order of smoothness $r \geq 1$ a deformation* (2)*of germ of characteristic equation at its nonresonance folded singular point takes the form of germ at the origin of deformation*

$$dy^2 + (k(\varepsilon)x^2 - y)dx^2 = 0 \qquad (3)$$

with some function k, after multiplication of the equation by nonvanishing C^r-function and an appropriate choice of C^r-coordinates foliated over the parameter with the origin at the point.

Nonresonance folded singular point of the characteristic equation is the point of tangency of characteristic direction field with type change line for which the corresponding singular point of the lifted direction field on the equation surface is nonresonance [**1**]. For the initial PDE equation that implies the following.

THEOREM 2 ([**3**]). *For any given order of smoothness $r \geq 2$ a finite parametric deformation of germ of equation* (1) *at nonresonance folded singular point of its characteristic equation takes the form of germ at the origin of deformation*

$$u_{xx} + (k(\varepsilon)x^2 - y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{4}$$

with some function k and new function F, after multiplication of the equation by nonvanishing C^r-function and an appropriate choice of C^r-coordinates foliated over the parameter with the origin at the point.

Note that class of smoothness could be selected as we prefer. But the increasing of this class could lead to reduction of the interval along the parameter axis where the formulas work. The function k is defined by the exponent of singular point as usually [**2**].

The study was supported by RFBR grant 11-01-00960-a and ADTP HSSPD 2.1.1/12115.

References

[1] Arnold V. I., Il'yashenko Yu. S. *Odinary differential equation, Dynamical Systems I//* Springer-Verlag, New-York, 1988.

[2] Davydov A. A., *Qualitative theory of control systems*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 141, 1994, AMS in cooperation with MIR (Moscow), Providence, Rhode Island, 147 pp.

[3] Davydov A. A., Trinh Thi Diep L., *Normal forms for families of linear equations of mixed type near non-resonant folded singular points*, Russian Mathematical Surveys, 2010, 65:5, 984-986.

The dynamical inverse problem for the Maxwell system: time-optimal determination of scalar electric permittivity and magnetic permeability

Demchenko M. N. (St. Petersburg Branch of V. A. Steklov Mathematical Institute, Russia)

We deal with the dynamical inverse problem for the Maxwell system with smooth scalar coefficients $\varepsilon, \mu > 0$. The system considered in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with smooth boundary has the form

$$\begin{aligned} &e_t = \varepsilon^{-1}\operatorname{curl} h, \quad h_t = -\mu^{-1}\operatorname{curl} e && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ &e|_{t=0} = 0, \quad h|_{t=0} = 0 && \text{in } \Omega \\ &e_\theta = f && \text{in } \partial\Omega \times [0, T] \end{aligned}$$

where $(\,\cdot\,)_\theta$ is a tangent component of a vector at the boundary, $e = e^f(x, t)$ and $h = h^f(x, t)$ are the electric and magnetic components of the solution. With the system one associates the response operator

$$R^T : f \mapsto h^f|_{\partial\Omega \times (0,T)}.$$

Let $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ be the velocity of electromagnetic waves. The *time-optimal* setup of the inverse problem is: given $\{R^{2T}, c\,|_{\partial\Omega}, \frac{\partial c}{\partial\nu}\,|_{\partial\Omega}\}$ to recover ε and μ in the subdomain Ω^T, where

$$\Omega^s = \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}_c\,(x, \partial\Omega) < s\}, \quad s > 0$$

(dist_c is a distance in the optical metric: $ds^2 = c^{-2}|dx|^2$).

In [**1**], by the use of the boundary control method, the uniqueness of determination of $c\,|_{\Omega^T}$ was established for such T, that Ω^T is covered by regular semigeodesic coordinates (hence, T is small enough). It means uniqueness of the product $\varepsilon\mu$. Here we show that one can uniquely determine separately ε and μ in case of *arbitrary* $T > 0$, providing that Ω^T endowed with optical metric satisfies some geometrical condition. The latter concerns possible singularities of the boundary of Ω^s. In order to formulate it we introduce a separation set (cut locus) $\omega \subset \Omega$ as a closure of points in Ω which have more than one nearest point in $\partial\Omega$. Note that $\mathrm{mes}\,\omega = 0$. Our condition reads as follows: for a. a. $s \in (0, T)$ and specifically for $s = T$ the set Ω^s is a domain with Lipschitz boundary and $\partial\Omega^s \cap \omega$ has zero surface measure on $\partial\Omega^s$. We suppose that this condition is not too constraining and it is surely satisfied in the situation considered in [**1**].

References

[1] M. I. Belishev, A. K. Glasman, Dynamical inverse problem for the Maxwell system: recovering the velocity in a regular zone (the BC–method), St.-Petersburg Math. Journal, 12 (2001), No 2, 279–316.

[2] M. N. Demchenko, On a partially isometric transform of divergence-free vector fields, Journal of Mathematical Sciences, 166 (2010), No 1, 11–22.

The inverse problem for the plasma equilibrium in a tokamak

Demidov A. S. (Moscow State University, Russia)

The control over thermonuclear fusion reactions (including suppression of instabilities of the plasma discharge) depends essentially on how well the information about the distribution of electric current in the plasma. Unfortunately it is very difficult to obtain this information even within the framework of the one-fluid magnetohydrodynamic model described by the Grad–Shafranov equation. In this case the required current distribution is given by the mapping

$$f_u : \omega \ni (x, y) \mapsto f\big(u(x, y)\big), \tag{1}$$

where *required* functions $u \in C^2(\omega)$ and f are as follows:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f\big(u(x,y)\big) \geq 0 \quad \text{in } \omega, \quad \text{and} \quad u = 0 \quad \text{on } \gamma = \partial\omega, \tag{2}$$

$$\sup_{P\in\gamma}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(P) - \Phi(P)\right| \leq \lambda \sup_{P\in\gamma}\left|\Phi(P)\right|. \tag{3}$$

Here $\gamma = \partial\omega$ is the boundary of the domain ω, which is a cross-section plasma discharge, ν is the unit normal to the curve γ, and $\lambda > 0$ is small parameter. The function Φ is known only approximately. It is determined by measuring of the magnetic field component ∇u outside the plasma (at the tokamak chamber) with a precision obviously non-zero. Thus, the condition $\lambda > 0$ (in contrast to the condition $\lambda = 0$) reflects the physical reality.

Pustovitov [**1**] was the first who clearly drew attention to possible inconsistency between a solution of the Grad–Shafranov equation obtained in some way or other and the required current distribution. The crux of the question raised by Pustovitov is whether there are at least two "essentially different" mappings (1) which obey to (2)–(3). Note that if $\lambda = 0$, then (as shown in [**2**]) the problem (2)–(3) has at most one distribution (1) within the class of affine functions $f : u \mapsto f(u) = au+b$ for a rather broad class of simply connected domains ω that are not disks. But (see [**3**]) for any arbitrarily small $\lambda > 0$, the problem (2)–(3) has an infinite number distributions $f_u^j : (x, y) \mapsto f_u^j(x, y) = a_j u_j(x, y) + b_j$ which pairwise essentially different in the sense that

$$\Big| \|f_u^{j_1}\| - \|f_u^{j_2}\| \Big| \geq 0.15 \max\{ \|f_u^{j_1}\| , \|f_u^{j_2}\| \}, \quad \text{where} \quad \|f_u^j\| \stackrel{def}{=} \max_{(x,y)\in\omega} \big| f_u^j(x, y) \big| . \tag{4}$$

However all these essentially different (in the sense of the condition (4)) distributions are necessarily [**3**] members of a sequence that converges to the δ-function supported on γ. Therefore, these distributions are not essentially different from the standpoint of physics. Two distributions f_u^1 and f_u^2 are *essentially different* (and certainly from a physical point of view) if satisfy not only condition (4) but also are such as follows:

$$(\hat{x}, \hat{y}) \in \operatorname{absmax} f_u^1 \qquad \Longrightarrow \qquad (\hat{x}, \hat{y}) \in \operatorname{absmin} f_u^2 . \tag{5}$$

Two such essentially different distributions f_u (for $f(u) = \sum_{m=0}^{3} a_m u^m$) were found in [**4**].

References

[1] V.D. Pustovitov, *Nuclear Fusion* 41 (2001), 721–730.
[2] S.I. Bezrodnykh and A.S. Demidov, *Asymptotic Analysis* (to appear).
[3] A.S. Demidov, *Russian J. Math. Phys.* 17 (2010) no. 2, 145–153.
[4] A.S. Demidov and V.V. Savelyev, *Russian J. Math. Phys.* 17 (2010), no. 1, 56–65.

Asymptotic Analysis of Boundary Value Problem in Domain with Random Multilevel Oscillating Boundary

De Maio U. (University of Naples, Italy)

Boundary-value problems in domains with singularly perturbed boundary are models for problems in biology and in industrial applications. Microinhomogeneous rough boundaries influence macro behavior of the whole object. An asymptotic analysis of boundary value problems in such domains gives the possibility to replace the original problem by the corresponding limit problem defined in a "simpler" domain.

In this talk we present a result on the rate of convergence of solutions of elliptic problem in a singularly perturbed domain with multilevel oscillating boundary. This domain consists of the body, a large number of thin periodically situated cylinders joining to the body through thin random transmission zone with rapidly oscillating boundary. The combination of the two effects, oscillation of the exterior boundary and the randomness of its geometry, appears naturally in applications but leads to additional mathematical difficulties. Here we consider a domain with random multilevel oscillating boundary, the first level is random and has the height ε; the second one is of the height ε^{α}, $0 < \alpha < 1$ and is periodic. Here ε is a small parameter, which also characterizes the distance between neighboring thin domains and their thickness. Assuming the non-homogeneous Fourier boundary conditions with perturbed coefficients to be set on the boundaries of the thin cylinders and on the boundary of the oscillating layer, we prove the homogenization theorems and estimate the rate of convergence. It is shown that there are two qualitatively different cases in the asymptotic behavior of the solutions. These results have been obtained in a joint work with G. A. Chechkin, C. D'Apice and A. L. Piatnitski.

Optimal synthesis in the Reeds and Shepp problem

Dmitruk A. V. (Lomonosov Moscow State University)
Samylovskiy I. A. (Lomonosov Moscow State University)

Consider the following time-optimal control problem [**1**] for a car in the plane moving back and forth with bounded linear and angular velocities:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = u\sin\varphi, && x(t_0) = 0, && x(T) = x_T, \\ &\dot{y} = u\cos\varphi, && y(t_0) = 0, && y(T) = y_T, \\ &\dot{\varphi} = v, && \varphi(t_0) = 0, && \varphi(T) \text{ is free}, \\ &|u| \le 1, && |v| \le 1, && J = T \to \min . \end{aligned} \tag{1}$$

Here φ is the angle between velocity $(\dot{x}, \dot{y})$ and the ordinate axis. Analysis of the Pontryagin Maximum principle gives all the types of trajectories satisfying necessary optimality conditions. We show that some of them are not globally optimal, and then construct the optimal synthesis. Since the problem is obviously symmetric both in x and in y, we can assume that the terminal position of the car lies in the first (nonnegative) quadrant $\mathbf{R}^2_+$. Define two auxiliary discs: $S_{right} = \{(x-1)^2 + y^2 \le 1\}$, and $S_{big} = \{(x+1)^2 + y^2 \le 5\}$, and the following subsets in $\mathbf{R}^2_+$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \mathbf{R}^2_+ \cap S_{big} \cap (\text{int } S_{right}), \\ Z_2 &= (\mathbf{R}^2_+ \cap S_{big}) \setminus (\text{int } S_{right}), \\ Z_3 &= (\mathbf{R}^2_+ \setminus S_{big}) \cap \{y \ge 1\}, \\ Z_4 &= (\mathbf{R}^2_+ \setminus S_{big}) \cap \{y < 1\}. \end{aligned} \tag{2}$$

We use the following notation for functions of t: $f = (c_1, c_2, ..., c_n)$ means that $f(t)$ is a piecewise constant (vector-)function taking the corresponding values on successive intervals (t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n) with $t_n = T$.

The form of optimal synthesis is given by the following

THEOREM 1. *If $(x_T, y_T) \in Z_1$ and $y_T > 0$, then the optimal trajectory has one switching point with $u = (-1, 1)$, $v \equiv 1$. If $y_T = 0$, there are two time-optimal trajectories: $u = (1, -1)$, $v \equiv -1$ and $u = (-1, 1)$, $v \equiv 1$ that give the same value of the cost.*

If $(x_T, y_T) \in Z_2 \cup Z_3$, $x_T \neq 0$, and $(x_T - 1)^2 + y_T^2 > 1$, then the optimal trajectory has $u \equiv 1$, $v = (1,0)$. If $x_T = 0$ then $u \equiv 1$, $v \equiv 0$. If $(x_T - 1)^2 + y_T^2 = 1$, then $u \equiv 1$, $v \equiv 1$.

If $(x_T, y_T) \in Z_4$ and $y_T > 0$, the optimal trajectory has $(u,v) = ((-1,1), (1,1), (1,0))$ with two switching points. If $y_T = 0$, there are two time-optimal trajectories: $(u,v) = ((1,-1), (-1,-1), (-1,0))$ and $(u,v) = ((-1,1), (1,1), (1,0))$ that give the same value of the cost.

The optimal time continuously depends on $(x_T,\, y_T)$.

Remark 1. Note that here we consider problem (1) with a free terminal direction $\varphi(T)$. If it is fixed (as in [**1**]), the construction of optimal synthesis is expected to be essentially more cumbersome.

References

[1] J. A. Reeds and L. A. Shepp., "Optimal path for a car that goes both forwards and backwards", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 145, No. 2 (1990), pp. 367–393.

[2] H. Maurer and N. P. Osmolovskii., "Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control", *SIAM Journal on Control and Optimization* vol. 42, Issue 6 (2003), pp. 2239–2263.

Hydrodynamic equations from Hamiltonian dynamics in phase space

Dostoglou S. (University of Missouri, USA)

We examine how to obtain macroscopic equations from the Hamiltonian dynamics in phase space of a particle system when the number of particles becomes infinite. To avoid Gibbsian ensembles of particle systems we use the Y. L. Klimontovich formalism [**2**], the work of C. B. Morrey [**3**], and techniques from [**1**].

In particular, if the number of particles $N \to \infty$ while the total mass $M_N = Nm_N$, total energy $E_N = m_N \sum_1^N \frac{|p_i|^2}{2}$, and $\frac{1}{N} M_N \sum_1^N |q_i|^2$ stay bounded, the sequence of measures

$$\frac{1}{N}\sum_1^N \delta_{q_i}, \quad \frac{1}{N}\sum_1^N \delta_{(q_i,p_i)} \tag{1}$$

converge weakly, up to subsequence, to measures ρ and μ respectively. The macroscopic velocity u, defined as the barycentric projection of μ (see [**1**]), is the rigorous analogue of the Maxwell–Boltzmann $\int pf(q,p)\, dp$.

Hydrodynamic equations result from Hamilton's equations as $N \to \infty$. The resemblance of these equations to Euler/Navier–Stokes/Reynolds equations depends on the second correlations of (1).

References

[1] Ambrosio L; Gigli N.; Savaré G. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, Second edition 2008.

[2] Klimontoviish Y. L. *Statistical Physics*, Harwood, New York 1986.

[3] Morrey C. B., *On the derivation of the Equations of Hydrodynamics from Statistical Mechanics*, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 279–326.

Hydrodynamical limit for lattice systems

Dudnikova T. V. (Elektrostal Polytechnical Institute, Russia)

The present work concerns the mathematical problems of foundations of statistical physics and continues the work [**3**] devoted to the derivation of the limiting "hydrodynamic" equations from the Hamilton dynamics. As the model we study the harmonic crystals in $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. In the harmonic approximation, the crystal is characterized by the displacements $u(z,t) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^d$, of the crystal atoms from their equilibrium positions. The field $u(z,t)$ is governed by a discrete wave equation. The initial data are supposed to be random function. For such model the long-time convergence of the distributions of the random solution $u(\cdot,t)$ to an equilibrium measure was proved in [**2**].

To derive the hydrodynamic equations we introduce a small scale parameter $\varepsilon > 0$ and a family of the initial measures $\{\mu_0^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. We assume that the measures μ_0^ε are locally homogeneous for space translations of order much less than $1/\varepsilon$ and nonhomogeneous for translations of order $1/\varepsilon$. Moreover, the covariance of μ_0^ε decreases with distance uniformly in ε. Given nonzero $\tau \in \mathbb{R}$ and $r \in \mathbb{R}^d$, we study the distributions $\mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}$ of the random solution $u(z,t)$ at the lattice points close to the point $[r/\varepsilon] \in \mathbb{Z}^d$ and in the time moments τ/ε^κ with an κ, $\kappa > 0$. In the case $\kappa < 1$, we prove that the measures $\mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}$ converge to a limit measure as $\varepsilon \to 0$, which is Gaussian and its covariance matrix does not depend on τ. For $\kappa = 1$, we prove the weak convergence of $\mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon}$ to a limit Gaussian measure as $\varepsilon \to 0$ (see [**3**]). Moreover, the Fourier transform of the covariance matrix of the limit measure evolves according to the following equation:

$$\partial_\tau f_{\tau,r}(\theta) = i\, C(\theta) \nabla\Omega(\theta) \cdot \nabla_r f_{\tau,r}(\theta), \quad r \in \mathbb{R}^d, \ \tau > 0, \tag{1}$$

where $C(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1}(\theta) \\ -\Omega(\theta) & 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{T}^d$, and, roughly, $\Omega(\theta)$ is the dispersion relation of the harmonic crystal. Equation (1) can be considered as the analog of the Euler equation for our model.

The main result is the derivation of the equation for the "next correction" to the limiting equation (1). We study the asymptotics (as $\varepsilon \to 0$) of the distributions of the solution $u(\cdot,t)$ on a longer time scale $t = \tau/\varepsilon^2$ instead of τ/ε. It allows us to derive the following (Navier–Stokes type) equation:

$$\partial_\tau f^\varepsilon_{\tau,r}(\theta) = i\, C(\theta) \left(\nabla\Omega(\theta) \cdot \nabla_r f^\varepsilon_{\tau,r}(\theta) + \frac{i\varepsilon}{2} \mathrm{tr}[\nabla^2\Omega(\theta) \cdot \nabla_r^2 f^\varepsilon_{\tau,r}(\theta)] \right), \tag{2}$$

where $r \in \mathbb{R}^d$, $\tau > 0$. In the case $d = 1$, equations (1) and (2) were derived by Dobrushin and others, [**1**]. The similar results are obtained also for lattice dynamics in the half-space $\mathbb{Z}^d_+$, [**4**].

This work was partially supported by RFBR grant 09-01-00288.

References

[1] Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Suhov Yu. M., Triolo L., *One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics: second approximation*, J. Stat. Phys. 52 (1988), 423–439.

[2] Dudnikova T. V., Komech A. I., Spohn H., *On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals*, J. Math. Phys. 44 (2003), 2596–2620. Preprint at ArXiv: math-ph/0210039
[3] Dudnikova T. V., Spohn H., *Local stationarity for lattice dynamics in the harmonic approximation*, Markov Processes and Related Fields 12 (2006), no. 4, 645–578. Preprint at ArXiv: math-ph/0505031
[4] Dudnikova T. V., *Lattice dynamics in the half–space. Energy transport equation*, J. Math.Phys. 51 (2010), 083301. Preprint at ArXiv: 0905.4806

Homogenization of an optimal control problem involving a thick multi-level junction with alternate type of controls

Durante T. (Department of Electronic and Informatics Engineering, University of Salerno, Italy)

There are two different approaches to homogenize optimal control problems. One consists in the passage to the limit in the corresponding adjoint problem and then recover an optimal control problem which is called the homogenized control problem to the initial one (see e.g. [**1**]). The other one (so-called *direct method*) is based on the theory of Γ-convergence (see [**2**]) and is more expedient since it keeps convergence of the optimal solutions of the initial problem to the similar characteristics of the corresponding homogenized optimal control problem. The main difficulty of the second approach consists in the mathematical description of the homogenized optimal control problem and in the identification of the effective set of its cost functional. This approach was improved by Z. Denkowski and S. Mortola in [**3**] using the Kuratovski convergence of solution sets and applying the Buttazzo–Dal Maso abstract scheme [**2**].

The main assumption in the scheme proposed by Z. Denkowski and S. Mortola is G-convergence of the sequence operators, which describe the sequence of perturbed boundary value problems in concrete case. Therefore,

1°. the crucial point and the first step in the homogenization of an optimal control problem involving perturbed domains is the proof of the convergence theorem for the state.
2°. On the second step, with the help of the convergence theorem we get Kuratowskii convergence of solution sets which is equivalent to the Γ-convergence of the corresponding indicator functions.
3°. Then we deduce the Γ-convergence of cost functionals.
4°. Finally, applying the Buttazzo–Dal Maso abstract scheme, we obtain results for the asymptotic behavior of the optimal solutions, thereby we correctly define the limit optimal control problem, and results for the convergence of minimal values, thereby we prove the stability result of this direct method.

In my talk I will present our new results obtained jointly with Prof. Mel'nyk (see [**4**]) about the homogenization of an optimal control problem. The optimal control problem whose state equation and the cost functional are defined in a plane thick two-level junction, which is the union of some domain and a large number $2N$ of thin rods with variable thickness of order $\varepsilon = O\left(N^{-1}\right)$. The thin rods are divided into two levels depending on the geometrical characteristics and on the controls given on their bases. In addition, the thin rods from each level are ε-periodically alternated and the following inhomogeneous perturbed Fourier boundary conditions $\partial_\nu u_\varepsilon(x)+\varepsilon k_i u_\varepsilon(x) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon(x)$, $i = 1, 2$ are given on the lateral sides on the rods from the corresponding level. We study the asymptotic behavior of this optimal control problem as $\varepsilon \to 0$.

References

[1] Kesavan S., Saint Jean Paulin J., *Optimal control on perforated domains*, J. Math. Anal. Appl. 229 (1999), 563-586.

[2] Buttazzo G., Dal Maso G., Γ*-convergence and Optimal Control Problems*, J. Optim. Theory App. 38 (1982), 385-407.

[3] Denkowski Z., Mortola S., *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations*, J. Optim. Theory App. 78 (1993), no. 2, 365-391.

[4] Durante T., Mel'nyk T. A., *Asymptotic analysis of an optimal control problem involving a thick two-level junction with alternate type of controls*, J. Optim. Theory App., 144 (2010), no. 2, 205-225.

Necessary and sufficient conditions for existence of an isolated solution of a nonlinear two-point boundary value problem for systems of the integral-differential equations

Dzhumabaev D. S. (Institute of Mathematics, Kazakhstan)

Bakirova E. A. (Institute of Mathematics, Kazakhstan)

The nonlinear two-point boundary value problem for systems of integral-differential equations is considered

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t, x) + \int_0^T f_1(t, s, x(s))\, ds, \quad x \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad g(x(0), x(T)) = 0, \tag{1}$$

where $f_0 : [0, T] \times R^n \to R^n$, $f_1 : [0, T] \times [0, T] \times R^n \to R^n$ are continuously.

The problem (1) is investigated by a method of parametrization [**1**, **2**]. Dividing the interval $[0, T]$ uniformly into N parts and introducing additional parameters as values of a solution in partition points, the problem (1) is reduced to equivalent multipoint boundary problem with parameters. The algorithm for finding of a solution to the problem with parameters is offered. Each step of the algorithm consists two points. In the first point of the algorithm a system of nonlinear equations with respect to introduced parameters is solved. In the second point at the finding values of parametres the special Cauchy problem for the nonlinear integro-differential equations is solved.

In the paper it is reduced sufficient conditions of algorithms convergence, ensuring existence of an isolated solution to nonlinear boundary value problem for systems of the integral-differential equations (1).

Definition 1. A solution $x^*(t)$ to problem (1) is said to be isolated if there exists a number $\rho_0 > 0$ such that the functions $f_0(t, x)$, $f_1(t, s, x)$ and $g(v, w)$ have the uniformly continuous derivatives $f'_{0x}(t, x)$, $f'_{1x}(t, s, x)$, $g'_v(v, w)$, $g'_w(v, w)$ in

$$G_0(\rho_0) = \{(t, x) : t \in [0, T],\ \|x - x^*(t)\| < \rho_0\},$$

$$G_1(\rho_0) = \{(t, s, x) : t \in [0, T],\ s \in [0, T], \|x - x^*(s)\| < \rho\},$$

$$G_2(\rho_0, \rho_0) = \{(v, w) \in R^{2n} : \|v - x^*(0)\| < \rho_0,\ \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$$

respectively, and the linear homogeneous two-point boundary value problem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f'_{0x}(t, x^*(t))}{\partial x} y + \int_0^T \frac{\partial f'_{1x}(t, s, x^*(s))}{\partial x} y(s)\, ds, \quad t \in [0, T],$$

$$g'_v(x^*(0), x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0), x^*(T))y(T) = 0,$$

has only the trivial solution $y(t) \equiv 0$.

The necessary and sufficient conditions are established for the existence of an isolated solution to problem (1).

References

[1] Dzhumabaev D. S. *A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50. no 7. 1150–1161.

[2] D. S. Dzhumabaev and S. M. Temesheva. *A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. no 1. P. 37–61.

Integrability of a planar system of ODEs near a degenerate stationary point

Edneral V. F. Sr. (Lomonosov Moscow State University, Russia)
Romanovski V. G. (University of Maribor, Slovenia)

We consider the system of equations:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = -y^3 - b\,x^3\,y + (a_0\,x^5 + a_1\,x^2 y^2) + (a_2\,x^4\,y + a_3\,x\,y^3), \\ \dot{y} = c\,x^2\,y^2 + x^5 + (b_0\,x^4 y + b_1\,x\,y^3) + (b_2\,x^6 + b_3\,x^3\,y^2 + b_4\,y^4). \end{array} \tag{1}$$

Systems with a nilpotent matrix of the linear part were thoroughly studied by Lyapunov et. al. In the system (1), there is no linear part, and the first approximation is not homogeneous. This is the simplest case of a planar system without linear part and with Newton's open polygon consisting of a single edge. In general case such problems have not been studied.

System (1) has a quasi-homogeneous initial approximation:

$$\dot{x} = -y^3 - b\,x^3\,y, \quad \dot{y} = c\,x^2\,y^2 + x^5. \tag{2}$$

Theorem 1. *In the case $D \stackrel{\text{def}}{=} (3\,b + 2\,c)^2 - 24 \neq 0$, the system (2) is locally integrable if and only if the number $Q \stackrel{\text{def}}{=} (3\,b - 2\,c)/\sqrt{D}$ is rational.*

If $Q = 0$ then the approximation (2) is Hamiltonian one. The Hamiltonian case of the full system (1) with the additional assumption that the Hamiltonian function is expandable into the product of only square-free factors was studied in [**1**]. We will investigate the non Hamiltonian case $Q = \pm 1$ and $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$, i. e. we study the system:

$$dx/dt = -y^3 - b\,x^3 y + a_0\,x^5 + a_1\,x^2 y^2, \quad dy/dt = (1/b)\,x^2 y^2 + x^5 + b_0\,x^4 y + b_1\,x\,y^3, \tag{3}$$

with arbitrary complex parameters a_i, b_i and $b \neq 0$. Note that the limitation $D \neq 0$ of Theorem 1 leads in this case to the limitation $b^2 \neq 2/3$ also.

In [**2**] the complete set of necessary conditions on parameters of the system for which (3) is locally integrable near the degenerate stationary point $x = y = 0$

has been found. It consists of the following four two-dimensional subsets in the parameter space:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = 0, \quad a_1 = -b_0\, b, \quad b_1 = 0, \\ b_1 = -2a_1, \quad a_0 = a_1 b, \quad b_0 = b_1 b, \\ b_1 = 3a_1/2, \quad a_0 = a_1 b, \quad b_0 = b_1 b, \\ b_1 = 8a_1/3, \quad a_0 = a_1 b, \quad b_0 = b_1 b. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

In [**3**] it was proved that all conditions (4) are also sufficient conditions for global integrability of the system (3). For each subset above the first integrals were evaluated by the Darboux method in an explicit form as functions of system parameters. So (4) is a full set of necessary and sufficient conditions of the global integrability of the system (3) except of two hyperplanes $b^2 = 2/3$ where additional subsets of integrability can be.

The talk is based on the joint paper with A. D. Bruno.

References

[1] Algaba A., Gamero E., Garcia C., *The integrability problem for a class of planar systems*, Nonlinearity 22 (2009) 395–420.

[2] Bruno A. D. and Edneral V. F., *On Integrability of a Planar System of ODE's near Degenerate Stationary Point*, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI 373 (2009), 34–47 (in Russian).

[3] Edneral V. F. and Romanovski V. G., *Calculation of first integrals of a two-dimensional ODE system near a degenerate stationary point by computer algebra tools*, Programmirovanie 37 (2011), no. 2, 55–61 (in Russian).

Decay of solutions to an initial-boundary value problem posed on a half-line for damped Korteweg–de Vries equation

Faminskii A. V. (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

We consider an initial-boundary value problem posed on the half-line $\mathbb{R}_+$ for damped Korteweg–de Vries equation

$$u_t + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0$$

under initial and boundary conditions

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \geq 0, \qquad u(t,0) = 0, \quad t \geq 0.$$

The damping term $a(x)$ is positive, lies in the space $W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$ and satisfies the following inequalities: for certain positive constants M and c_0

$$|a'(x)| \leq Ma(x) \quad \text{a. e. in } \mathbb{R}_+, \qquad a(x) \geq \frac{c_0}{1+x} \quad \forall x \geq 0.$$

The initial function is such that $u_0 \in H^1(\mathbb{R}_+)$, $(1+x)^\beta u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ for certain $\beta > 3/4$ and is assumed to be small in $L_2(\mathbb{R}_+)$.

It is proved that a mild solution to this problem decays in time, that is

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

In the previous results (see [**1**], [**2**]) the damping term was assumed to be strictly positive at $+\infty$.

References

[1] Linares F., Pazoto A. F., *Asymptotic behavior of the Korteweg–de Vries equation posed in a quarter plane*, J. Differential Equations 246 (2009), no. 4, 1515–1522.
[2] Pazoto A. F., Rosier L., *Uniform stabilization in weighted Sobolev soaces for the KdV equation posed on the half-line*, Discr. Cont. Dyn. Syst. Ser. B 14 (2010), no. 4, 1511–1535.

On solvability of the Dirichlet problem of m-Hessian equation

Filimonenkova N. V. (Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Russia)

In modern theory of fully nonlinear differential equations m-Hessian equations are little-studied and present great possibilities for research. The key element in this area is m-Hessian operator

$$F_m[u] = (tr_m u_{xx})^{\frac{1}{m}}, \quad u \in C^2(\Omega), \quad \Omega \subset R^n, \quad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

where $tr_m u_{xx}$ is the sum of all principle minors of the Hessian matrix u_{xx}. The subject of our investigation is the Dirichlet problem for a fully nonlinear second order equation

$$F_m[u] = f, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi. \tag{1}$$

The case $m = 1$ corresponds to the Poisson equation, with $m = n$ we have the Monge-Ampère equation, both are thoroughly studied. Our investigation deals with the full range of equations "between" the former and the latter. The operator F_m is not totally elliptic in $C^2(\Omega)$ but only in the subset of so-called m-admissible functions. Also $\partial\Omega$ is required to be strictly $(m-1)$-convex surface. The theory of solvability of (1) uses interesting algebraic facts from L. Gårding's little known paper of 1959. Equations (1) were considered in the papers of 1980s by N. M. Ivochkina, L. Nirenberg, L. Kaffarelly, J. Spruck with $f \in C^\infty(\overline{\Omega}), f > 0$. In 1997 N. Trudinger introduced a notion of approximate solution of m-Hessian equation with $f \in L^p(\Omega), f \geqslant 0$. New results in this area have recently been obtained. The goal of our talk at the Conference is to deliver the analysis of the smoothness of solution to m-Hessian equation in dependence on regularity of f. For example the following theorems are true:

Theorem 1. *Assume that $\partial\Omega$ is strictly $(m-1)$-convex surface, φ and $\partial\Omega$ are sufficiently smooth, f is convex, $f \geqslant \nu > 0$ in $\overline{\Omega}$. If $f_x \in L^\infty(\partial\Omega)$ then there exists m-admissible solution $u \in C^{2+\alpha'}(\overline{\Omega})$ of (1) with some $\alpha', 0 < \alpha' \ll 1$. If $f \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1$, then there exists m-admissible solution $u \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$ of (1).*

Theorem 2. *Assume that $\partial\Omega \in C^{l+\alpha}$ is strictly $(m-1)$-convex surface, $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \geqslant \nu > 0$ in $\overline{\Omega}$, $l \geqslant 4$, $0 < \alpha < 1$. Then there exists m-admissible solution $u \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ of (1).*

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 09-01-00729) and the grant of "Nauchnye Shkoly" (grant No. NSh-227.2008.1).

Asymptotic behavior of the first eigenvalue of the Robin problem

Filinovskiy A. V. (N. E. Bauman Moscow State Technical University, Russia)

We consider the eigenvalue problem with the Robin boundary condition

$$\Delta u + \lambda u \quad = \quad 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\right)\bigg|_\Gamma \quad = \quad 0, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

for a bounded domain $\Omega \subset R^n$ with the smooth boundary Γ, where ν is the outer unit normal vector to Γ. It follows from the variational principle that the first eigenvalue $\lambda_1(\alpha)$ of problem (1), (2) increases monotonically with respect to α and satisfies the inequality $\lambda_1 < \lambda_1^{(d)}$, where $\lambda_1^{(d)}$ is the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the operator $-\Delta$ in Ω.

We are interested in the asymptotic behavior of $\lambda_1(\alpha)$ as $\alpha \to +\infty$. In monograph [**1**] (see Ch. 6, § 2), it was noticed that $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \lambda_1 = \lambda_1^{(d)}$. For $n = 2$, the following estimates were obtained in paper [**2**]:

$$\lambda_1^{(d)} \left(1 + \frac{\lambda_1^{(d)}}{\alpha q_1}\right)^{-1} \le \lambda_1 \le \lambda_1^{(d)} \left(1 + \frac{4\pi}{\alpha |\Gamma|_{n-1}}\right)^{-1}, \quad \alpha > 0,$$

where $|\cdot|_k$ is the k-dimensional measure and q_1 is the first eigenvalue of the Steklov problem

$$\begin{aligned} \Delta^2 u \quad &= \quad 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u|_\Gamma \quad &= \quad 0, \quad \left(\Delta u - q\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\bigg|_\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Theorem 1. *Let $n \ge 2$, then*

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1^{(d)} - \frac{\int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_\Omega v^2\, dx}\, \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right), \quad \alpha \to +\infty,$$

where v is the first eigenfunction of the Dirichlet problem

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda_1^{(d)} v \quad &= \quad 0 \quad \text{in } \Omega, \\ v|_\Gamma \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

This research was supported by RFBR grant no. 11-01-00989 and DSP grant no. 2.1.1/7161.

References

[1] Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics.* V. 1, Wiley, New-York, 1989.
[2] Sperb R., *Untere und obere schranken für den tiefsten eigenwert elastisch gestützten membran*, Zeitschrift Angew. Math. Phys. 23 (1972), no. 2, 231–244.

Polynomials of almost-normal arguments in C^*-algebras

Filonov N.
Kachkovskiy I.

Let a be a normal element of a unital C^*-algebra $\mathcal{A}$. The notion of continuous function $f(a)$ of this element is well known. More precisely, there exists a unique

C^*-algebra homomorphism

$$C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto f(a)$$

from the algebra of continuous functions on the spectrum $\sigma(a)$ to $\mathcal{A}$ such that the function $f(z) = z$ maps to a, $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$, and $\|f(a)\| = \max_{z\in\sigma(a)} |f(z)|$. This calculus is widely used in solving various problems in Analysis. We suggest an analog of the functional calculus for non-normal elements. We restrict the considered class of functions to the polynomials (in z and $\overline{z}$). Assume that a is close to a normal element in the sense that the norm of its self-commutator $\|[a, a^*]\| = \delta$ is small. We show that many properties of the functional calculus hold up to an error of order δ.

On global existence and blow-up for nonlinear hyperbolic systems

Galakhov E. I. (Peoples' Friendship University of Russia)

We consider the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with a potential

$$u_{tt} - \Delta u - V(x)u = |u|^q \tag{1}$$

or for a nonlinear hyperbolic system

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - V_1(x)u = |v|^p & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} - \Delta v - V_2(x)v = |u|^q & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{2}$$

with compactly supported initial data.

In the case of subcritical (p, q) and/or zero potential, these problems were treated by many authors, particularly in [**1**] and [**2**]. Combining the techniques of these papers with the method of nonlinear capacity (see [**3**]), we establish necessary and sufficient conditions for global solvability of problems (1) and (2) under appropriate assumptions on the potential V (resp. V_1, V_2), including the subtle case of critical values of (p, q).

The research was supported by RFBR grants 08-01-00441, 09-01-12157, grant of the President of Russia НШ-3810.2008.1, and by the Russian Ministry of Education and Science (project 2.1.1/5328).

References

[1] Del Santo D., Georgiev V., Mitidieri E., *Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems*, in: Geometrical optics and related topics, eds. F. Colombini, N. Lerner. Boston etc., Birkhäuser (1997), 117–140.

[2] Yordanov B., Zhang Q. I., *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal. 231 (2006), no. 2, 361–374.

[3] Mitidieri E., Pohozaev S. I., *A priori estimates and nonexistence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities*, M.: Nauka (2001), Proceedings of the Steklov Institute, 234, 1–383.

Large-scale oceanic motions

Gallagher I. (Inst. Math. Jussieu, France)

In this talk we shall review some recent works of the author with C. Cheverry, T. Paul, and L. Saint-Raymond. Those works concern shallow water flows, subject to strong wind forcing and linearized around a stationary profile $\bar{u}$. The system reads (writing η and u for the height and velocity fluctuations)

$$\partial_t \eta + \frac{1}{\varepsilon}\nabla \cdot u + \bar{u} \cdot \nabla \eta + \varepsilon^2 \nabla \cdot (\eta u) = 0\,,$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\varepsilon^2} b u^{\perp} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla \eta + \bar{u} \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \bar{u} + \varepsilon^2 u \cdot \nabla u = 0\,,$$

where b stands for the (adimensionalized) rotation of the earth and where ε is a small parameter (of the order of Fr^2, where Fr is the Froude number, and of $\mathrm{Ro}^{\frac{1}{2}}$ where Ro is the Rossby number). We prove in a rather general framework that the system may be diagonalized using an abstract semi-classical approach, which allows to identify Rossby and Poincaré waves. The Poincaré waves are shown to disperse by use of Mourre estimates — a more explicit, spectral approach is also proposed in a more restrictive setting. Some partial results regarding the trapping of Rossby waves are obtained; these are made much more precise, by the study of the underlying dynamical system, under the additional assumption that the stationary profile is zonal.

The research was supported by the A.N.R. grant ANR-08-BLAN-0301-01 "Mathocéan", as well as the Institut Universitaire de France.

References

[1] C. Cheverry, I. Gallagher, T. Paul, and L. Saint-Raymond, Semiclassical and spectral analysis of oceanic waves, *submitted.*

[2] I. Gallagher, T. Paul, and L. Saint-Raymond, On the propagation of oceanic waves driven by a strong macroscopic flow, *submitted.*

Lebesgue Sets of Value Function in Linear Differential Game with Two Pursuers and One Evader

Ganebny S. A. (Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Russia)
Kumkov S. S. (Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Russia)
Le Menec S. (EADS / MBDA France, France)
Patsko V. S. (Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Russia)

We study a model differential game with two pursuers and one evader. Three inertial objects moves in the straight line. The dynamics descriptions for pursuers P_1 and P_2 are

$$\ddot{z}_{P_1} = a_{P_1}, \quad \dot{a}_{P_1} = (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, \quad |u_1| \le \mu_1,$$
$$\ddot{z}_{P_2} = a_{P_2}, \quad \dot{a}_{P_2} = (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, \quad |u_2| \le \mu_2.$$

Here, z_{P_1} and z_{P_2} are the geometric coordinates of the pursuers, a_{P_1} and a_{P_2} are their accelerations generated by the controls u_1 and u_2. The time constants l_{P_1} and l_{P_2} define how fast the controls affect the systems.

The dynamics of the evader E is similar:

$$\ddot{z}_E = a_E, \quad \dot{a}_E = (v - a_E)/l_E, \quad |v| \le \nu.$$

Let us fix some instants T_1 and T_2. At the instant T_1, some quasiconvex function φ_1 is computed, which depends on the miss of the first pursuer with the respect to the evader. At the instant T_2, some quasiconvex function φ_2 of the miss of the second one is computed.

Assume that the pursuers act in coordination. This means that we can join them into one player P. This player governs the vector control $u = (u_1, u_2)$. The payoff is the minimum of the functions φ_1 and φ_2:

$$\varphi = \min\Big\{\varphi_1\big(|z_E(T_1) - z_{P_1,E}(T_1)|\big),\ \varphi_2\big(|z_E(T_2) - z_{P_2,E}(T_2)|\big)\Big\}.$$

At any instant t, the players P and E know exact values of all state coordinates z_{P_1}, $\dot{z}_{P_1}$, a_{P_1}, z_{P_2}, $\dot{z}_{P_2}$, a_{P_2}, z_E, $\dot{z}_E$, a_E. The player P choosing its feedback control minimizes the payoff φ, the player E maximizes it. So, we have a standard antagonistic differential game. One needs to construct the value function of this game and optimal strategies of the players.

Let us describe a practical problem, whose reasonable simplification gives this model game. Suppose that two pursuing objects attacks the evading one on collision courses. They can be rockets or aircrafts in the horizontal plane. A nominal motion of the first pursuer is chosen such that at the instant T_1 the exact capture occurs. In the same way, a nominal motion of the second pursuer is chosen (the capture is at the instant T_2). But indeed, the real positions of the objects differ from the nominal ones. Moreover, the evader using its control can change its trajectory in comparison with the nominal one (but not principally, without sharp turns). Correcting coordinated efforts of the pursuers are computed during the process by the feedback method to minimize the result payoff, which is computed on the basis of absolute values of deviations at the instants T_1 and T_2 from the first and second pursuers, respectively, to the evader.

The passage from the original non-linear dynamics to a dynamics, which is linearized with the respect to the nominal motions, gives the problem under considerations.

The research was supported by RFBR grant 09-01-00436 and by the Program "Mathematical control theory" of the Presidium of the RAS (Ural Branch project 09-П-1-1015).

Effective boundary conditions for Stokes flow over very rough boundaries

Gaudiello A. (Universita degli Studi di Cassino, Italy)

We study the asymptotic behaviour of the solution of Stokes equations in a 3-dimensional domain with highly oscillating boundary. Let $S = (0, l_1) \times (0, l_2)$, $\widetilde{S} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, with $0 < a_i < b_i < l_i$ $(i = 1, 2)$ and let η_ε be the εS-periodic function defined on εS by

$$\eta_\varepsilon\left(x'\right) = \begin{cases} l_3 & \text{if } x' \in \varepsilon\big(S \setminus \widetilde{S}\big), \\ l_3' & \text{if } x' \in \varepsilon \widetilde{S}, \end{cases}$$

with $l_3 < l_3'$, $x' = (x_1, x_2)$, and ε is a small positive parameter. Let

$$\Omega_\varepsilon = \big\{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x' \in S,\, b(x') < x_3 < \eta_\varepsilon(x')\big\}$$

where b is a smooth function on $\mathbb{R}^2$, S-periodic and such that $b(x') < l_3$ for every $x' \in \mathbb{R}^2$. We assume that $1/\varepsilon \in \mathbb{N}$. The domain Ω_ε is bounded at the bottom by the smooth wall $P = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x' \in S,\ x_3 = b(x')\}$ and at the top by the rough wall $R_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \overline{(P \cup \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x' \in \partial S,\ b(x') < x_3 < l_3\})}$.

The velocity u_ε and the pressure p_ε of the fluid satisfy the stationary Stokes system:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } P \cup R_\varepsilon, \\ (u_\varepsilon, p_\varepsilon)\ S\text{-periodic (with respect to } x'), \\ \int_{\Omega^-} p_\varepsilon \, dx = 0, \end{cases}$$

where f is a smooth function in Ω, with $\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x' \in S,\ b(x') < x_3 < l_3'\}$, and $\Omega^- = \{x = (x', x_3) \in \Omega_\varepsilon :\ x' \in S,\, x_3 < l_3\}$.

We introduce the system

$$\begin{cases} -\nu\Delta U_\varepsilon + \nabla P_\varepsilon = f \quad \text{in } \Omega^-, \\ \nabla \cdot U_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega^-, \\ \nu\widetilde{U}_\varepsilon - \varepsilon\widetilde{M}\frac{\partial \widetilde{U}_\varepsilon}{\partial x_3} = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ U_{\varepsilon 3} = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ U_\varepsilon = 0 \quad \text{on } P, \\ (U_\varepsilon, P_\varepsilon)\ S\text{-periodic (with respect to } x'), \\ \int_{\Omega^-} P_\varepsilon^- \, dx = 0. \end{cases}$$

Here $\widetilde{M}$ is a 2×2-matrix with constant coefficients, symmetric and negative definite, whose definition involves the solution (Ψ, Π) of a Stokes system in an infinite domain in the x_3-direction, and $\widetilde{U}_\varepsilon$ denotes the vector formed by the first two components of U_ε. Using asymptotic expansions and boundary layer correctors we show that the pair $(U_\varepsilon, P_\varepsilon)$ is an approximate solution in Ω^- of the solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ of order $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2-\gamma})$ ($\gamma > 0$ being arbitrary small) in the H^1 norm for the velocity, and of order $\mathcal{O}(\varepsilon)$ in the L^2 norm for the pressure. Moreover, in the rugose region $\Omega_\varepsilon \backslash \Omega^-$, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ is approximated by an explicit formula *via* the functions (Ψ, Π) and the trace of U_ε on Σ.

The talk is based on the joint paper with Y. Amirat, O. Bodart and U. De Maio.

Blow-up of solutions of nonlocal initial boundary value problem for diffusion-absorption equation

Gladkov A. L. (Vitebsk State University, Belarus)

We consider the following nonlocal initial boundary value problem:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \Delta u - c(x,t)u^p && \text{for } x \in \Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,t) &= \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy && \text{for } \ x \in \partial\Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{for } \ x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $p > 0$ and $l > 0$. Here $c(x,t)$ is a nonnegative locally Hölder continuous function defined for $x \in \overline{\Omega}$ and $t \geq 0$ and $k(x,y,t)$ is a nonnegative continuous function defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ and $t \geq 0$. The initial data $u_0(x)$ is a nonnegative continuous function satisfying the boundary condition at $t = 0$.

We prove uniqueness of solutions with trivial initial datum for $(p+1)/2 < l < 1$, with nonnegative initial data for $l \geq 1$, with positive initial data under the conditions $l < 1$, $p \geq 1$ as well as positive in $\overline{Q}_T$ solutions if $\max(p, l) < 1$, nonuniqueness of solution with trivial initial datum for $l < \min\{1, (p+1)/2\}$.

We give some criteria for existence of global solutions as well as for blow-up of solutions in finite time. We point out growth conditions for the coefficient $k(x, y, t)$ which guarantee blow-up of all nontrivial solutions of (1). In particular, we prove the following results. Let λ_1 is the first eigenvalue of problem given by

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \text{ in } \Omega \text{ with } \varphi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Suppose that either

$$\int_\Omega k(x, y, t)\, dy \leq A \exp(\sigma t), \quad A > 0,\, \sigma < \lambda_1(l-1), \tag{2}$$

for $x \in \partial\Omega$ and $t > 0$, or

$$c(x, t) \leq C \exp(\gamma t), \quad C > 0,\, \gamma < \lambda_1(p-1), \tag{3}$$

for $x \in \Omega$, $t > 0$, and

$$k(x, y, t) \geq B \exp[\lambda_1(l-1)t], \quad B > 0, \tag{4}$$

for $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$ and large values of t.

Theorem 1. *Let* $\min(p, l) > 1$. *If* (2) *hold then there exist global solutions of* (1) *with initial data small enough. If* $l \geq p$, (3) *and* (4) *hold then any nontrivial solution of* (1) *blows up in finite time.*

The resolvent of elliptic operators with distant perturbations

Golovina A. M. (Bashkir State Pedagogical University, Russia)

We consider the operator

$$\mathcal{H}_0 := (-1)^m \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|=|\gamma|=m}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \mathrm{A}_{\beta\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{Z}_+^d \\ |\beta| \leqslant 2m-1}} \mathrm{A}_\beta \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$$

in the space $L_2(R^d)$ with the domain $W_2^{2m}(R^d)$. Here $\mathrm{A}_{\beta\gamma} \in C^m(R^d)$, $\mathrm{A}_\beta \in C^{m-1}(R^d)$ are matrix-valued functions. We assume that the operator $\mathcal{H}_0$ is elliptic,

$$\nu \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|=m}} |\xi_\beta|^2 \leqslant \mathrm{Re} \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|=|\gamma|=m}} (\mathrm{A}_{\beta\gamma}\xi_\beta, \xi_\gamma)_{C^d}\,, \quad \xi_\beta \in C^d,$$

where the constant ν is independent of x and ξ_β.

Let $\mathcal{L}_i^0$ be arbitrary bounded operators from $W_2^{2m}(R^d)$ into $L_2(R^d)$, $\varsigma_i = \varsigma_i(r)$, $\eta_i = \eta_i(r) \in C^{2m}(R_+)$, $i = 1, \ldots, k$ be nonnegative functions equalling one in a fixed neighborhood of zero. Functions η_i, ς_i are supposed to satisfy the following conditions

1°. There exists a function $a \in C^{2m-1}[0,+\infty]$ such that the estimate $|\varsigma_i(r)| \leqslant C_i \exp\left(\int\limits_0^r a(t)\,dt\right)$, $i = 1,\dots,k$, holds true, where C_i are constants.

2°. The function a and all its derivatives of the order up to $2m-1$ are uniformly bounded in R^d, $a(t) \equiv 0$ as $t \in [0, t_0]$, where $t_0 > 0$, and the identity $\int\limits_0^{+\infty} a(t)dt = -\infty$ is valid.

3°. The functions η_i and all their derivatives of the order up to $2m$ decay at infinity.

We introduce a perturbed operator as $\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\varsigma_i\mathcal{L}_i^0\eta_i\mathcal{S}(X_i)$ in $L_2(R^d)$ with the domain $W_2^{2m}(R^d)$. Here $\mathcal{S}(X_i)$ is the shift operator: $(\mathcal{S}(X_i)u)(\cdot) := u(\cdot - X_i)$ and $X_i \in R^d$ are discrete parameters tending to infinity.

We consider the family of the operators $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \varsigma_i\mathcal{L}_i^0\eta_i$ in $L_2(R^d)$ with the domains $W_2^{2m}(R^d)$. We assume that the operators $\mathcal{L}_i^0$ are so that operators $\mathcal{H}_i$ are closed.

The main result is as follows.

Theorem 1. *For sufficiently large X the operator $\mathcal{H}_X$ is closed. For any $\lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{k} \sigma(\mathcal{H}_i)$ and sufficiently large X one has*

$$(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\right](\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1},$$

where

$$\mathcal{P}_X = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\left[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j) - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\right]$$

and

$$\left\|P_X\right\|_{L_2(R^d)\to L_2(R^d)} \to 0, \quad X \to +\infty.$$

The work partially supported by RFBR (10-01-00118), by the Grants for the President of Russia for young scientist-doctors of sciences (MD–453.2010.1) and Federal Task Program (02.740.110612).

On periodic trajectories in some models of gene networks

Golubyatnikov V. P. (Sobolev institute of mathematics, Russia)

We consider odd-dimensional nonlinear dynamical system of chemical kinetics in dimensionless form:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_{2k+1}) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1) - x_2; \quad \dots \quad \frac{dx_{2k+1}}{dt} = f_{2k+1}(x_{2k}) - x_{2k+1}. \quad (1)$$

Here f_i are positive monotone decreasing functions, and $x_i \geq 0$. These variables denote concentrations of substances in gene networks. Usually, in biological interpretations, the monotone decreasing of these functions simulates negative feedbacks in gene network, and the monotone increasing of such summands corresponds to positive feedbacks.

LEMMA 1. *The dynamical system* (1) *has exactly one stationary point.*

We denote this stationary point by M^* and construct some non-convex polyhedral invariant domain $\mathbf{P}$ of the system (1). This $\mathbf{P}$ is a union of $4k+2$ triangle prisms. Linearization of the system (1) at M^* has one negative eigenvalue λ_1 and k pairs of complex conjugate eigenvalues $\lambda_{2,3}, \ldots \lambda_{2k,2k+1}$.

THEOREM 1. *If linearization of the system* (1) *at the point* M^* *has eigenvalues with positive real parts and does not have imaginary eigenvalues then the invariant domain* $\mathbf{P}$ *contains at least one cycle of this system.*

The stationary points satisfying the conditions of the theorem 1 are called hyperbolic.

THEOREM 2. *If the conditions of the theorem* 1 *are satisfied and for some* $\eta > 0$ *and for all* i, $1 \leq i \leq 2k+1$, *the inequalities*

$$\left| f_i'(x_{i-1}) + \eta \right| < \eta \cdot \sin \frac{2\pi}{2k+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2k+1}$$

hold in the invariant domain $\mathbf{P}$ *then* $\mathbf{P}$ *contains a stable cycle of the system* (1).

It is well-known, that any nonlinear dynamical system is topologically equivalent to its linearization in *some small* neighborhood W of its hyperbolic stationary point. Consider as an example dynamical system of the type (1) in the symmetric case $f_i(u) = a \cdot (1+u^n)^{-1}$ for all $i = 1, 2 \ldots, 11$. If n and a are sufficiently large, then

$$\mathbb{R}e\lambda_{4,\,5} < 0 < \mathbb{R}e\lambda_{6,\,7} < \mathbb{R}e\lambda_{8,\,9} < \mathbb{R}e\lambda_{10,\,11},$$

and hence, the 2-dimensional planes $P_{10,11}$, $P_{8,9}$ etc. corresponding to $\lambda_{10,11}$ and other eigenvalues with positive real parts, are covered by unwinding trajectories of this linear dynamical system. Hence, the neighborhood W contains two invariant 2-dimensional manifolds of the system (1), which are covered by unwinding trajectories of this nonlinear dynamical system. We have seen in numerical experiments, that trajectories of the symmetric system (1) as above with starting points "near" these two planes $P_{10,11}$ and $P_{8,9}$, respectively, have different limit cycles. So, no uniqueness of cycles can be expected here.

The same approach can be used in considerations of models of gene networks with more complicated regulations. For example, we have studied the systems of the type (1) where some of the functions f_i are unimodal, such as the Glass–Mackey function $f_i(u) = a \cdot u \cdot (1+u^n)^{-1}$. This corresponds to simple combinations of negative and positive feedbacks in the gene networks.

The author is indebted to A. A. Akinshin and I. V. Golubyatnikov for assistance.

The research was supported by RFBR grant 09-01-00070.

On extensions and restrictions of an analytic C_0-semigroup in a Banach space

Gorbachuk M. L. (Institute of Mathematics of NASU, Ukraine)
Gorbachuk V. I. (Institute of Mathematics of NASU, Ukraine)

Let $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ be an infinitely differentiable C_0-semigroup with a generating operator A in a Banach space $\mathfrak{B}$. It is established the existence of a locally convex space $\mathfrak{B}_- \supseteq \mathfrak{B}$ (the embedding $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_-$ is dense and continuous) and an equicontinuous C_0-semigroup $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}_-$ with the following properties:

1°. $U(t)\mathfrak{B}_- \subset \mathfrak{B}$ for all $t > 0$;
2°. $\forall x \in \mathfrak{B} : U(t)x = e^{tA}x$;
3°. $\forall x \in \mathfrak{B}_-, \forall t, s > 0 : U(t+s)x = e^{tA}U(s)x = e^{sA}U(t)x$;
4°. the semigroup $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ is continuous in the $\mathfrak{B}_-$-topology, and its generating operator $\widetilde{A}$ is the closure of the operator A.

Denote by $\mathfrak{B}_+$ the space of entire vectors of the operator A:

$$\mathfrak{B}_+ = \{x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) : \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0, \forall n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\} : \|A^n x\| \leq c\alpha^n n!\}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ is the domain of an operator). If the C_0-semigroup $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ generated by the operator A is bouded analytic, then the following assertions hold:

1°. $\mathfrak{B}_+ = \bigcap_{t>0} \mathcal{R}(e^{tA})$ ($\mathcal{R}(\cdot)$ denotes the range of an operator);
2°. $\overline{\mathfrak{B}_+} = \mathfrak{B}$ (the closure is taken i the $\mathfrak{B}$-topology);
3°. the operator valued function

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

is entire in the space $\mathfrak{B}_+$ and forms an equicontinuous C_0-group there;
4°. for any $x \in \mathfrak{B}_+$,

$$\exp(tA)x = \left\{ \begin{array}{rcl} e^{tA}x & , & t \geq 0, \\ (e^{-tA})^{-1}x & , & t < 0, \end{array} \right.$$

that is, $\{\exp(tA)\}_{t\geq 0}$ is the restriction of the semigroup $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ to the space $\mathfrak{B}_+$.

The results mentioned above are applied to the description of all weak solutions on $(0, \infty)$ of parabolic and elliptic equations in a Banach space and the investigation of their boundary values at 0. It is solved also the problem of smoothness increase inside the interval $(0, \infty)$ of weak solutions and the problem of extension of such solutions to the whole axis $(-\infty, \infty)$.

A relative version of the Titchmarsh convolution theorem

Gorin E. A. (Moscow Pedagogical State University, Russia)
Treschev D. V. (Steklov Institute of Mathematics, Russia)

We consider the algebra $C_u = C_u(\mathbb{R})$ of all uniformly continuous complex functions on $\mathbb{R}$ with pointwise operations and sup-norm. Let $I \subset C_u$ be a translation invariant closed ideal. A typical example is the ideal of functions vanishing at $+\infty$ (or $-\infty$).

Consider a function $f \in C_u$ with the Fourier transform $\widehat{f}$ supported on some left half-axis. A point x on the Fourier dual real line is called I-regular (for f) if in a neighborhood of x the distribution $\widehat{f}$ coincides with Fourier transform of a function from I. The complement to the set of I-regular points is called a relative harmonic support of f. The right end of the relative harmonic support is called the relative harmonic abscissa $\mathrm{ah}_I(f)$.

The classical Titchmarsh convolution theorem is equivalent to the equation

$$\mathrm{ah}_I(f_1 f_2) = \mathrm{ah}_I(f_1) + \mathrm{ah}_I(f_2)$$

for $I = \{0\}$. It is more or less obvious that $\mathrm{ah}_I(f_1 f_2) \leq \mathrm{ah}_I(f_1) + \mathrm{ah}_I(f_2)$ for any I. However in general it is not possible to replace $\leq$ by $=$ in this relation. We show that the Titchmarsh convolution theorem remains valid provided I is a maximal invariant ideal. Moreover, in a weak form ($f_1 = f_2$) the theorem holds for any I.

The main motivation for us were applications of this result in the problem of final dynamics of infinite-dimensional Hamiltonian systems.

A detailed text is presented in “Functional Analysis and its applications”.

Stabilization of 2-D Navier–Stokes system in exterior of a bounded domain by means of boundary control

Gorshkov A. V. (Moscow State University, Russia)

Let $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded simply connected domain with C^∞-smooth boundary. In the domain $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}$ we consider exterior Dirichlet problem for 2-d Navier–Stokes equation

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) - \Delta v + (v,\nabla)v &= \nabla p, \\ \mathrm{d}iv\, v(t,x) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$\begin{aligned} v(0,x) &= v^0(x),\ x \in \Omega \\ v(t,x') &= u(t,x'),\ x' \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

Here $x = (x_1, x_2),\ v(t,x) = (v_1, v_2) \in \Omega$ is the velocity field, ∇p — pressure gradient, and $u(t,x')$ — is an unknown control function.

Consider Lamb–Oseen vortex which will be target object of stabilization:

$$\hat{v}(t,x) = \frac{a}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}\big(1 - e^{-\frac{|x|^2}{4t)}}\big) \tag{3}$$

The problem is for given $k > 0$ to find such $u(t, x')$ that the solution $(u, \nabla p)$ of the problem (1)-(2) for some $q > 0$ satisfies

$$\|v(t,\cdot) - \hat{v}(t,\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \leq \frac{C_q}{t^k}. \tag{4}$$

Stabilizability of Navier–Stokes system when the solution goes to given stationary solution in bounded domain was investigated in paper of A. V. Fursikov [**1**]. But in current paper we consider stabilizability to one kind of nonstationary solutions in unbounded domain. We use method of invariant manifolds developed by Th. Gallay and C. E. Wayne [**2**].

We will use the following spaces

$$L_2(\Omega, e^{\alpha|x|}) = \{f \| \|f\|_{L_2(\Omega, e^{\alpha|x|})} < \infty\}, \ \alpha > 0,$$

$$V_q(\Omega) = \Big\{v(t,x) = (v_1, v_2) \in \Big(L_\infty\big(0,\infty; W_q^1(\Omega)\big)\Big)^2, \ \mathrm{div} \ \ v(t,x) = 0\Big\},$$

$$V_q^0(\Omega) = \{v^0(x) = (v_1^0, v_2^0) \in \Big(L_q(\Omega)\Big)^2, \ \mathrm{rot} v^0 \in L_2(\Omega, e^{\alpha|x|}), \mathrm{div}\, v^0(x) = 0\},$$

where $q > 2$. For control function u we will use Besov space B_p^s. The main result is the following

THEOREM 1. *Let $\hat{v}(t,x)$ be Lamb–Oseen vortex, defined by* (3). *Then for some $\varepsilon > 0$ and any initial data $v^0 \in V_q^0(\Omega)$ such that $\|\mathrm{rot}(v^0(\cdot) - \hat{v}(0,\cdot)\|_{L_2(\Omega, e^{\alpha|x|})} < \varepsilon$ there exist such control $u \in \big(L_\infty(\mathbb{R}_+; B_q^{1-1/q}(\partial\Omega))\big)^2$ that the solution of* (1)–(2) *$(v, \nabla p) \in V_q(\Omega) \times L_q(\Omega)$ satisfies* (4).

References

[1] Fursikov A. V. *Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equations with help of boundary feedback control*, J. Math. Fluid. Mech. 3 (2001) 259-301.

[2] Th. Gallay, C. E. Wayne., *Invariant manifolds and the long-time asymptotics od the Navies–Stokes and vorticity equations on* $\mathbb{R}^2$, Arch. Ration. Mech. Anal., 163(3) (2002), 209-258.

Energy functions for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds

Grines V. Z. (Nizhny Novgorod State University, Russia)

We give exposition of results obtained in collaboration with F. Laudenbach and O. Pochinka in [**1**], [**2**], [**3**].

Let M be a closed 3-manifold and $f : M \to M$ be a Morse–Smale diffeomorphism, that is: its nonwandering set is finite and coincides with the set Per_f of hyperbolic periodic points; the stable and unstable manifolds of periodic points have transverse intersections. A function $\varphi : M \to \mathbb{R}$ is said to be a *Lyapunov function* for f if:

1°. $\varphi\big(f(x)\big) < \varphi(x)$ for every $x \notin Per_f$;

2°. $\varphi\big(f(x)\big) = \varphi(x)$ for every $x \in Per_f$.

It is easy to construct smooth Lyapunov functions for f. The periodic points of f must be critical points of φ but in general a Lyapunov function may have critical points which are not periodic points of f. So we say that a Lyapunov function φ is an *energy function* for a Morse–Smale diffeomorphism f if the set of critical points of φ coincides with Per_f. D. Pixton was the first to prove that there is a Morse–Smale diffeomorphism on $\mathbb{S}^3$ which has no an energy function.

We introduce a notion of *dynamically ordered* energy function and find conditions to the existence of one for a Morse–Smale diffeomorphisms f on M. We show that the existence of such an energy function depends on how attractors consisting of the union of one-dimensional unstable manifolds of saddles and sinks are embed into the ambient manifold.

The research was supported by RFBR grant 11-01-00730 and grant of government of Russian Federation 11.G34.31.0039.

References

[1] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *An energy function for gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. 422, no. 3, (2008), 299–301.

[2] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Self-indexing energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, Moscow Math. Journal. 4, (2009), 801-821.

[3] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Dynamically ordered energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, arXiv:1101.6036, (2011), 19 pages.

On classification of Morse–Smale diffeomorphisms with trivially embedded frames of separatices

Gurevich E. Ya. (Nizhny Novgorod State University, Russia)

This report is devoted to an exposition of results obtained by the author in collaboration with V. Z. Grines, V. S. Medvedev and O. V. Pochinka.

We consider a class $G(S^3)$ of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-dimensional sphere S^3 such that any $f \in G(S^3)$ satisfies to conditions below:

1°. non-wandering set $\Omega(f)$ consists of fixed points;

2°. unstable manifolds $W^s(\sigma)$ of any saddle point $\sigma \in \Omega(f)$ has dimension 2;

3°. $W^s(\sigma_i) \cap W^s(\sigma_j) = \emptyset$ for any different saddle points $\sigma_i, \sigma_j \in \Omega(f)$.

We associate with each diffeomorphism $f \in G(S^3)$ a graph $\Gamma(f)$ similar to scheme of A. A. Andronov, E. A. Leontovich, A. G. Mayer and M. Peixoto graph.

It follows from [**1**] that the graph is a complete topological invariant for $G(S^2)$. Thus from this point of view Morse–Smale diffeomorphisms on S^2 are like flows. However in the case $n = 3$ there are countable set of non-conjugated diffeomorphisms from $G(S^3)$ whose graphs are isomorphic. First examples of such diffeomorphisms given by D. Pixton, V. Z. Grines and C. Bonatti was connected with possibility of wild embedding of separatices and leaded to finding of new topological invariants (see [**2**]).

In the case of $n > 3$ the separatrices of diffeomotphisms from $G(S^n)$ are cannot be wildly embedded and, according to [**3**], [**4**], the graph defines the diffeomorphism up to topological conjugacy.

We present a surprising construction giving countable set of non-conjugated diffeomorphisms from $G(S^3)$ whose graphs are isomorphic and all frames of separatrices are tame. Then we define a condition of trivially embedded frames of separatrices and prove that this condition is sufficient for graph of diffeomorphisms from $G(S^3)$ to be the complete invariant.

The research was supported by RFBR grant 11-01-00730 and grant of government of Russian Federation 11.G34.31.0039.

References

[1] Grines V. Z., *Topological Classification of Morse–Smale Diffeomorphisms with Finite Set of Geteroclinic Trajectories on Surfaces*, Matem. zametky, v. 54, no. 3 (1993), 3–17.
[2] Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E., *Topological Classification of Gradient-like Diffeomorphisms on 3-Manifolds*, Topology 43 (2004), 369–391.
[3] Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S., *Peixoto Graph of Morse-Smale Diffeomorphisms on Manifolds of Dimension Greater than Three*, Proceeding of the Steklov institute of mathematics, v. 261, no. 1 (2006), 59–83.
[4] Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S., *Classification of Morse-Smale Diffeomorphisms with One-dimensional Set of Unstable Separatrices*, Proceeding of the Steklov institute of mathematics, v. 270, no. 1 (2010), 57–79.

Random Iterative Algorithm in IFS with condensation

Gutu V. (Moldova State University, Republic of Moldova)

The term *fractal* usually is associated with the attractor of a hyperbolic *Iterated Function System* (IFS). The construction of such fractals may be realized using the *Random Iterative Algorithm*, proposed by M. Barnsley [**1**]. Applying this algorithm one can simulate on the computer a generic random orbit of a hyperbolic IFS with probabilities, which is dense on the attractor. This result justifies many Chaos games.

M. Barnsley [**1**] introduced also the notion of IFS with condensation. Applying *Shadowing theory* we show that the Random Iterative Algorithm may be used also to construct the attractors for such IFS. This allows to extend the idea of Chaos game for the construction of others fractals, such as the *Pythagoras tree*.

Let X denote a complete metric space, and let $\mathcal{P}_{cp}(X)$ denote the space of nonempty compact subsets of X, endowed with the Hausdorff–Pompeiu metrics H.

Consider a *(weakly) hyperbolic IFS with condensation* $\{X; f_0, f_1, \dots, f_m\}$, consisting of (weak) contractions $f_i : X \to X$ $(i = \overline{1,m})$ [**2**] and a constant multifunction (called as *condensation*) $f_0 : X \to \mathcal{P}_{cp}(X)$, $f_0(x) \equiv K$ for any $x \in X$ and some $K \in \mathcal{P}_{cp}(X)$ (called as *condensation set*). Denote by F_* its *Nadler–Hutchinson operator* $F_* : \mathcal{P}_{cp}(X) \to \mathcal{P}_{cp}(X)$, defined by $F_*(C) = \bigcup\limits_{j=0}^{m} f_j[C]$, where $f_j[C] = \bigcup\limits_{x \in C} f_j(x)$, $C \in \mathcal{P}_{cp}(X)$.

A nonempty compact subset $A \subset X$ is called an *attractor* for an IFS, if $F_*(A) \supset A$, and there is a closed neighborhood V of A such that $\bigcap\limits_{n \geq 0} F_*^n(V) \subset A$, where F_* is the respective Nadler–Hutchinson operator.

In [**2, 3**] it is shown that a compact nonempty subset $A \subset X$ is an attractor for a weakly hyperbolic IFS with condensation if and only if A is a (necessarily unique) fixed point of the respective Nadler–Hutchinson operator.

We associate with every weakly hyperbolic IFS with condensation $\{X; f_0, f_1, \dots, f_m\}$ and every tuple of positive numbers $(p_0, p_1, \dots, p_m)$ with $p_0 + p_1 + \cdots + p_m = 1$, a random dynamical system $x_{n+1} := f_{\xi_n}(x_n)$, where ξ_n are independent random variables with values in $\{0, 1, 2, \dots, m\}$, and which are governed by the same law $\mathbb{P}(\xi_n = j) = p_j$. Let $O(x_0) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denote a random orbit of the initial point x_0 in this dynamical system.

THEOREM 1. *Let $\{X; f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ be a weakly hyperbolic IFS with condensation and let A stand for its unique attractor. Then for any random orbit $O(x_0) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with probability one we have $H(X_n, A) \to 0$, as $n \to +\infty$, where $X_n = \mathrm{cls}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.*

This idea may be extended also to relations with eventual condensation [**3**].

We show that the construction of the attractor of a hyperbolic IFS with condensation sometimes (e.g., when the condensation set is a segment) may be reduced to the construction of the attractor of an adequate hyperbolic IFS. We don't know if it is possible to do the same in general case.

The work is partially supported by HCSTD ASM grant 06411.411.029F.

References

[1] Barnsley M., *Fractals Everywhere*, Acad. Press Profess., Boston 1988.
[2] Glavan V., Guţu V., *Attractors and fixed points of weakly contracting relations*, Fixed Point Theory, 5 (2004), No. 2, 265–284.
[3] Glavan V., Guţu V., *Limit sets of weakly contracting relations with eventual condensation*, J. Prime Research in Mathematics, 4 (2008), 101–112.

Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator

Helffer B. (University Paris-Sud, France)
Kordyukov Y. A. (Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Let M be a two-dimensional compact oriented manifold (possibly with boundary). Let g be a Riemannian metric and $\mathbf{B}$ a real-valued closed 2-form on M. Assume that $\mathbf{B}$ is exact and choose a real-valued 1-form $\mathbf{A}$ on M such that $d\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Thus, one has a natural mapping $u \mapsto ih\,du + \mathbf{A}u$ from $C_c^\infty(M)$ to the space $\Omega_c^1(M)$ of smooth, compactly supported one-forms on M. The Riemannian metric allows to define scalar products in these spaces and consider the adjoint operator $(ih\,d + \mathbf{A})^* : \Omega_c^1(M) \to C_c^\infty(M)$. A Schrödinger operator with magnetic potential $\mathbf{A}$ is defined by the formula

$$H^h = (ih\,d + \mathbf{A})^*(ih\,d + \mathbf{A}).$$

Here $h > 0$ is a semiclassical parameter, which is assumed to be small. If M has non-empty boundary, we will assume that the operator H^h satisfies the Dirichlet boundary conditions.

We can write $\mathbf{B} = b dx_g$, where $b \in C^\infty(M)$ and dx_g is the Riemannian volume form. Assume that

$$b_0 = \min_{x\in M} |b(x)| > 0.$$

We consider two cases:

1°. *The case of discrete wells:* assume that the set $\{x \in M : |b(x)| = b_0\}$ is a single point x_0, which belongs to the interior of M, and there is a constant $C > 0$ such that $|b(x_0)| = b_0$ and, for all x in some neighborhood of x_0 the estimates hold:

$$C^{-1}\, d(x, x_0)^2 \leq |b(x)| - b_0 \leq C\, d(x, x_0)^2\,.$$

2°. *The case of degenerate wells:* assume that the set $\{x \in M : |b(x)| = b_0\}$ is a smooth curve γ, which is contained in the interior of M, and there is a constant $C > 0$ such that for all x in some neighborhood of γ the estimates hold:

$$C^{-1} d(x, \gamma)^2 \leq |b(x)| - b_0 \leq C d(x, \gamma)^2\,.$$

In both cases, we study the asymptotic behavior of the low-lying eigenvalues of the operator H^h as $h \to 0$. We also consider the corresponding periodic setting and study the problem of existence of gaps in the spectrum of H^h as $h \to 0$.

The second author was partially supported by the Russian Foundation of Basic Research (grant 09-01-00389).

References

[1] Helffer B., Kordyukov Y. A., *Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator: The case of discrete wells*, Spectral Theory and Geometric Analysis; Contemp. Math. 535, 55–78; AMS, Providence, RI, 2011; preprint arXiv:1001.1400.

[2] Helffer B., Kordyukov Y. A., *Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator. II: The case of degenerate wells*, preprint.

Bony and thick attractors

Ilyashenko Yu. S. (Moscow State and Independent Universities, Steklov Math. Institute, Moscow; Cornell University, US)

Understanding of the structure of attractors of generic dynamical systems is one of the major goals of the theory of these systems. A vast general program suggested by Palis presents numerous conjectures about this structure. Various particular cases of these conjectures are proved in numerous papers that we do not quote here. Main part of these investigations is related to diffeomorphisms of closed manifolds.

Our investigation is in a sense parallel to this direction of research. In the first part of the talk, attractors of *manifolds with boundary onto themselves* are studied. At present, locally generic properties of attractors of such maps are established, that are not yet observed (and plausibly do not hold) for the case of closed manifolds. For instance, an open set of diffeomorphisms of manifolds with boundary onto themselves may have attractors with intermingled basins [**3**], [**1**], [**2**]. The strongest result of this kind is obtained by Kleptsyn and Saltykov in a paper accepted to the Proceedings of the MMS.

Another property of this kind is *having thick attractors.* It is a general belief that attractors of typical smooth dynamical systems (diffeomorphisms and flows) on closed manifolds, either coincide with the whole phase space, or have Lebesgue measure zero. In this talk we show that this is not the fact for diffeomorphisms of manifolds with boundary onto themselves. Namely, in the space of diffeomorphisms of a product $T^2 \times I,\ I = [0, 1]$, there exists an open set such that any map from a complement of this set to a countable number of hypersurfaces, has a thick attractor: a transitive attractor that has positive Lebesgue measure together with its complement.

The problem, whether or not thick attractors exist for locally generic diffeomorphisms of a closed manifold, remains widely open.

In the second part we study so called bony attractors. These are attractors of skew products over a Bernoulli shift with the following unexpected property: the map has an invariant manifold, and the intersection of the attractor with that manifold, called *a bone*, is much larger than the attractor of the restriction of the map to the invariant manifold. Bony attractors with one-dimensional bones were discovered in [**4**]. We construct bones of arbitrary dimension.

It is expected that bony attractors are in a sense locally generic in the space of diffeomorphisms of a closed manifold.

The research was supported by part by the grants NSF 0700973, RFBR 10-01-00739-a, RFFI-CNRS 10-01-93115-NTSNIL-a.

References

[1] C. Bonatti, L. Diaz, M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, Springer, Berlin, 2004.

[2] Yu. Ilyashenko, V. Kleptsyn, P. Saltykov, *Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins*, JFPTA, 3, (2008), 449–463.

[3] I. Kan, *Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with everywhere dense basin*, Bull. Amer. Math. Soc., 31 (1994), 68–74.

[4] Kudryashov Yu. G. *Bony attractors*, Func. Anal. Appl. 44 (2010), no. 3, 73–76.

Spectral volume of coverings of spectral triples

Ivankov P. R. (OAO RPKB www.rpkb.ru, Russia)

The Gelfand–Naimark theorem [**2**] can be thought of as the construction of two contravariant functors (cofunctors for short) from the category of locally compact Hausdorff spaces to the category of C^*-algebras. The first cofunctor C takes a compact space X to the C^*-algebra $C(X)$ of continuous complex-valued functions on X, and takes a continuous map $f : X \to Y$ to its transpose $Cf : h \to hf : C(Y) \to C(X)$. If X is only a locally compact space, the corresponding C^*-algebra is $C_0(X)$ whose elements are continuous functions vanishing at infinity, and we require that the continuous maps $f : X \to Y$ be proper (the preimage of a compact set is compact) in order that $h \mapsto h \circ f$ take $C_0(Y)$ into $C_0(X)$. So can be considered (noncommutative) C^*-algebra as noncommutative generalization of locally compact Hausdorff space. Otherwise there exists inverse functor M that sets to any commutative C^*-algebra A of its characters $M(A)$ many topological results related to locally compact spaces has its (noncommutative) algebraic analogues. Noncommutative analogue of Riemannian manifold is spectral triple [**3**]. This work is devoted to analogue of following problem. If W is Riemannian manifold and $V \to W$ is n-listed covering [**4**] than we have

$$vol(V) = n \times vol(W) \tag{1}$$

where $vol(V)$ and $vol(W)$ are volumes of V and V respectively.

Definition of volume of Riemannian manifold is well known. But this definition does not work in case of spectral triples. However spectral definition can be used. This definition is based on following Weil formula [**1**]:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \frac{vol(V)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \qquad (2)$$

where $vol(V)$, $N(\lambda)$ are volume of Riemannian manifold and the number of eigenvalues of Laplace operator (multiplicities counted) less than λ. Formula (2) could be applied for spectral triples as noncommutative analogue of volume. Analogues of coverings for spectral triples had been developed in [**5**]. This work is devoted to proof of analogue of (1) in several particular cases.

References

[1] Nigel Higson, *The Local Index Formula in Noncommutative Geometry*, Lectures given at the School and Conference on Algebraic K-theory and Its Applications Trieste, 8–26 July 2002.

[2] G. J. Murhpy. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press 1990.

[3] J. C. Várilly. *An Introduction to Noncommutative Geometry.* EMS 2006

[4] E. H. Spanier. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill. New York 1966.

[5] P. R. Ivankov, N. P. Ivankov. *The Noncommutative Geometry Generalization of Fundamental Group.* arXiv:math.KT/0604508, 2006

On m-admissibility of functions and p-convexity of hypersurfaces

Ivochkina N. M. (S-Pb SUACE, Russia)

The notions of m-admissibility of functions and p-convexity of hypersurfaces emerged in frames of modern theory of fully nonlinear second-order partial differential equations. Thus a C^2-function u is m-admissible in $\Omega \subset R^n$, $1 \leq m \leq n$, if for all $x \in \Omega$, $t > 0$ the following inequality holds

$$tr_m(u_{xx} + tId) > 0, \quad x \in \Omega. \qquad (1)$$

Here u_{xx} is the Hessian matrix, $tr_m S$ is the sum of all m-th order principal minors of symmetric $n \times n$ matrix S, $1 \leq m \leq n$. The m-admissible functions enjoy some fine properties. For instance, theirs standard mollification is also m-admissible, what opens way to extending of this property to non smooth functions.

The m-admissibility of functions is closely connected with strict $(m-1)$-convexity of hypersurfaces. Namely, the latter are the level sets of m-admissible functions and only they. Notice, that the graph of m-admissible function is strictly $(m-1)$-convex but not m-convex in general for $m < n$.

The research was supported by RFFI grant 09-01-00729.

On Sharp Constants in $L_q(d\mu)$-Estimates for Sobolev Spaces $\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1)$

Kalyabin G. A. (Peoples' Friendship University of Russia)

Let $0 < q < \infty$, $\mu \not\equiv 0$ — measure on $(-1,1)$, a quasi-norm (a norm for $q \geq 1$) in $L_q(d\mu)$ is defined as usually:

$$\|f\|_{L_q(d\mu)} := \Big(\int_{-1}^{1} |f(t)|^q \, d\mu(t)\Big)^{1/q}. \qquad (1)$$

For $n \in \mathbb{N}$ consider a Sobolev space $\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1)$, consisting of functions $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ which are absolutely continuous with all their derivatives of the order $< n$ and such that

$$\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1)} := \|f^{(n)}\|_{L_2(dx)} < \infty; \qquad f^{(s)}(\pm 1) = 0, \quad s \in \{0,1,\ldots,n-1\}. \tag{2}$$

For $u \in \mathbb{R}$ denote by $G(u;q,d\mu) := \|(1-x^2)^u\|_{L_q(d\mu)}$. This is a positive, non-decreasing and convex function of the parameter u. It is clear that the condition $G(n;q,d\mu) < \infty$ is *necessary* for the embedding $\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1) \subset L_q(d\mu)$. On the other hand, from [**1**] it follows that $G(n-0.5;q,d\mu) < \infty$ is *sufficient* for this embedding.

More precisely, the following assertion holds.

Theorem 1. *Let us introduce a quantity*

$$C(n;q,d\mu) := \|\ id : \overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1) \to L_q(d\mu)\ \| = \sup\{\|f\|_{L_q(d\mu)} : \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1)} \le 1\}, \tag{3}$$

and suppose that $G(u^*;q,d\mu) < \infty$ for some u^*; then for every positive integer $n \ge u^* + 0.5$ one has

$$\frac{(2n+1)^{0.5}}{2^n n!}\, G(n;q,d\mu) \le C(n;q,d\mu) \le \frac{(2n+1)^{0.5}}{2^n n!} \left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{0.5} G(n-0.5;q,d\mu). \tag{4}$$

Remark 1. In the case when an additional restriction upon a measure μ in the Theorem is posed, namely: $\mu(-2\delta,2\delta) \le c_0\mu(-\delta,\delta)$, $c_0 > 0$, $0 < \delta < \delta_0$, one may guarantee the ratio of the upper and the lower estimates in (4) to be $1+o(1)$, $n \to +\infty$.

The work was supported by grants of RFBR No 08-01-00443, 06-01-00341, 06-01-04006 and DFG-Projekt, GZ: 436 RUS113/90/0-1.

References

[1] Kalyabin G. A., *Sharp estimates for derivatives of functions in the Sobolev classes* $\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1)$, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 269 (2010), no. 1, 137–142.

Continuous solutions and global attractors for 3D Bénard problem

Kapustyan A. V. (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine)
Pankov A. V. (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine)
Valero J. (Universidad Miguel Hernandez de Elche, Spain)

We study the properties and asymptotic behavior of solutions of the 3D Bénard problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\nabla)u + \xi\omega = f - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega + (u\nabla)\omega = g, \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega \subset R^3$ is bounded domain with smooth boundary, $\nu > 0$, $\xi \in R^3$ are constants, f, g are given functions, $u\nabla = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. We shall use standard function spaces $\Upsilon = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid \operatorname{div} u = 0\}$, $H = cl_{(L^2(\Omega))^3}\Upsilon$, $V = cl_{(H_0^1(\Omega))^3}\Upsilon$ [**1**] and consider weak solutions of the problem (1), (2) in the dissipative ball B_0 from the natural phase space $H \times L^2(\Omega)$ [**4**]. The main difficulties are the lack of continuity of the weak solutions in the strong topology and the lack of uniqueness of the Cauchy problem. We prove existence of continuous solutions in $H_w \times L^2(\Omega)$ and using the theory of m-semiflow [**3**] as a generalization of classical global attractors theory [**1**], [**2**], we prove existence of global attractor, which is attracting set in $H_w \times L^2(\Omega)$.

Theorem 1. *Let $f \in H$, $g \in L^4(\Omega)$. Then there exists a class K of globally defined weak solutions of the problem* (1), (2) *such that for every $\{u_0, \omega_0\} \in B_0$ there exists at least one (but not necessary unique) weak solution $\{u, \omega\}$ such, that $u(0) = u_0$, $\omega(0) = \omega_0$ and for every weak solution $\{u, \omega\} \in K$ we have $\{u(t), \omega(t)\} \in B_0$ $\forall t \geq 0$ and $\forall T > 0$ $\{u, w\} \in C([0, T]; H_w) \times C((0, T]; L^2(\Omega))$.*

Let X be the set B_0 endowed with the topology from $H_w \times L^2(\Omega)$.

Definition 1. The map $G : R_+ \times X \mapsto 2^X$ is called m-semiflow, if $\forall x \in X$ $G(0, x) = x$ and $\forall t, s \geq 0$ $G(t + s, x) \subset G(t, G(s, x))$.

Definition 2. The compact set $A \subset X$ is called global attractor of the m-semiflow G, if

1°. for every bounded $B \subset X$ $dist_X(G(t, B), A) \to 0$, $t \to \infty$;

2°. $A \subset G(t, A)$ $\forall t \geq 0$.

Theorem 2. *If we put*

$$G(t, \{u_0, \omega_0\}) = \{\{u(t), \omega(t)\} \mid \{u, \omega\} \in K,\ u(0) = u_0, \omega(0) = \omega_0\},$$

then G is m-semiflow on X, which has global attractor.

References

[1] Temam R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York 1988.

[2] Babin A. V., Vishik M. I., *Attractors of evolution equations*, Nauka, Moscow 1989.

[3] Melnik V. S., *Families of m-semiflows and their attractors*, Doklady RAN. 353 (1997), no. 2, 158–162.

[4] Kapustyan A. V., Melnik V. S., Valero J., *A weak attractors and properties of solutions for the three-dimensional Benard problem*, DCDS. 18 (2007), no. 2, 449–481.

On attractors for equations describing viscoelastic flows with infinite number of relaxation and retardation times

Karazeeva N. A. (Math. Inst., S-Peterburg Dep., S-Peterburg, Russia)

We consider system of equations describing motion of Kelvin–Voight fluid

$$\frac{\partial}{\partial t}v + v\nabla v - \mu_1\Delta v - \mu_2\frac{\partial}{\partial t}\Delta v - \int_0^t K(t-\tau)\Delta v(x,\tau)d\tau + \nabla p = f(x,t), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{2}$$

Here the kernel $K(\tau)$ is represented as exponential series

$$K(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s e^{-\alpha_s \tau}, \quad \alpha_s, \beta_s > 0. \tag{3}$$

The system is considered in a bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, $\partial\Omega \subset C$. Let $S = \partial\Omega \times [0, T]$, $T \leq \infty$. The theorem of solvability and of uniqueness of solution for initial boundary value problem with slipping boundary condition

$$v(0) = v_0, \qquad v|_S = 0 \tag{4}$$

is proved.

THEOREM 1. *Let $f \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ and $f_t \in L_1(0, T; L_2(\Omega))$. The initial data $v_0 \in W_2^2(\Omega) \cap J^0(\Omega)$. Let the coefficients α_s, β_s satisfy conditions*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \beta_s < \infty, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s}{\alpha_s} < \infty. \tag{5}$$

Then initial boundary value problem (1), (2), (4) *has unique generalized solution v such that $v_x, v_{xt} \in L_2(Q_T) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ and $v, v_t \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$.*

By $J^0(\Omega)$ we denote the supplement of the space of finite solenoidal infinite differentiable functions in Ω in L_2-norm.

Furthermore it is proved that the solution operator V_t for initial boundary value problem (1), (2), (4) may be presented in the form $V_t = W_t + U_t$, where the operators W_t form exponentially contracting semigroup and the operators U_t are compact. For such semigroups the existence of compact connected global B-attractor is proved. This attractor has finite Hausdorff dimension.

Some estimates of the first eigenvalue for the Sturm–Liouville problem with third-type boundary conditions and integral condition

Karulina E. S. (MESI, Moscow)

Consider the Sturm–Liouville problem:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where $q(x)$ belongs to the set A_γ ($\gamma \neq 0$) of non-negative bounded summable functions on $[0, 1]$ such that $\int_0^1 q^\gamma(x)dx = 1$.

We estimate the first eigenvalue λ_1 of this problem for different values of γ and k. Put $M_\gamma = \sup\limits_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q)$, $m_\gamma = \inf\limits_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q)$.

THEOREM 1. *The following assertions are valid:*

1°. *If $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, then $M_\gamma = +\infty$, and there exists the minimizing sequence $q_\varepsilon(x) \in A_\gamma$ such that $M_\gamma = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_1(q_\varepsilon)$.*

2°. *If $\gamma \geq 1$ and $k = 0$, then $M_\gamma = 1$, and this estimate is attained as $q(x) \equiv 1$.*

3°. *If* $\gamma = 1$ *and* $k \neq 0$, *then* $M_1 = \xi_*$, *where* ξ_* *is the solution to the equation* $\arctan \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi - 1}{2\sqrt{\xi}}$, *and this estimate is attained as*

$$q(x) = q_*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \tau, \\ \xi_*, & \tau \leq x < 1 - \tau, \\ 0, & 1 - \tau \leq x < 1, \end{cases} \qquad \textit{where } \tau = \frac{1}{\sqrt{\xi_*}} \arctan \frac{k^2}{\sqrt{\xi_*}}.$$

4°. *If* $\gamma > 1$, *then for* $k = 0$ *we have* $m_\gamma = 0$, *and for* $k \neq 0$ *we have* $m_\gamma = \lambda_1^0$, *where* λ_1^0 *is the minimal positive solution to the equation* $(k^4 - \lambda)\sin\sqrt{\lambda} + 2k^2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$; *and there exists the minimizing sequence* $q_\varepsilon(x) \in A_\gamma$ *such that* $m_\gamma = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_1(q_\varepsilon)$.

5°. *If* $\gamma > 0$, *then* $m_\gamma \to \pi^2$ *as* $k \to \infty$.

REMARK 1. Dirichlet problem for the equation (1), $q(x) \in A_\gamma$ was considered in [**3**], [**4**]. Different problems for the equation $y'' + \lambda q(x) y = 0$, $q(x) \in A_\gamma$ was considered in [**1**], [**2**].

This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Researches (Grant no. 11-01-00989).

References

[1] Egorov Yu. V., Kondratiev V. A. *On Spectral theory of elliptic operators* // in Operator theory: Advances and Applications. Birkhouser, 1996, v. 89.

[2] Muryshkina O. V. *On Estimates for the First Eigenvalue of the Sturm-Liouville Problem with Symmetric Boundary Conditions*// Vestnik Molodyh Uchenuh, 3'2005. Series: Applied mathematics and Mechanics. 1'2005. P. 36–52.

[3] Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. *On the range of variation of an eigenvalue when the potential is varied* (English. Russian original)// Dokl. Math. 68, No 2, 247–252 (2003); translation from Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk 392, No 5, 592–597 (2003).

[4] Ezhak S. S. *On the estimates for the minimum eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with integral condition* (English)// J. Math. Sci., New York 145, No 5, 5205–5218 (2007); translation from Sovrem. Mat. Prilozh. 36, 56–69, (2005).

Drag minimisation for compressible Navier–Stokes equations

Kazmierczak A. (University of Lodz, Poland)
Sokolowski J. (Institut Elie Cartan, France)
Zochowski A. (Systems Research Institute, Poland)

In the series of papers [**3**]–[**5**] the mathematical theory of shape optimization for compressible Navier–Stokes inhomogeneous boundary value problems is developed. The key part of the theory include the new results on the existence [**3**], [**4**], and shape differentiability [**5**] of the weak solutions to compressible Navier–Stokes equations. In particular, our results lead to the rigorous mathematical framework for the drag minimization of an obstacle in the flow of gas with small adiabatic constant. The numerical results are presented for the following model problem.

A viscous gas occupies the triple-connected domain $\Omega = B \backslash S$, where $B \subset \mathbb{R}^2$, is a double connected hold-all domain with the smooth boundary $\Sigma = \partial B$, and $S \subset B$ is a compact obstacle. The boundary of the computational flow domain Ω is divided into the three subsets, inlet Σ_{in}, outgoing set Σ_{out} and the obstacle boundary $\Gamma = \partial S$.

The boundary value problem for compressible gas is to find the velocity field $\mathbf{u}$ and the gas density ϱ satisfying the following equations along with the boundary conditions

$$\Delta\mathbf{u} + \lambda\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = R\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\,, \quad \mathrm{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0 \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \text{ on } \Sigma,\ \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma,\ \varrho = \varrho_0 \text{ on } \Sigma_{in}, \tag{2}$$

where the pressure $p = p(\varrho)$ is a smooth, strictly monotone function of the density, we take $p = p_0(\frac{\varrho}{\varrho_0})^\theta$, ϵ is the Mach number, R is the Reynolds number, λ is the viscosity ratio, and ϱ_0 is a positive constant.

One of the main applications of the theory of compressible viscous flows is the optimal shape design in aerodynamics. Recall that in our framework the aero-dynamical force acting on the body S is defined by the formula,

$$\mathbf{J}(S) = -\int_\Gamma (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\lambda - 1)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\mathbf{I} - \frac{R}{\epsilon^2}p\mathbf{I})\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

As in the classical optimization example of the airfoil moving in the direction $\mathbf{u}_h$, drag is the component of $\mathbf{J}$ parallel to the direction, $J_D(S) = \mathbf{u_h}\cdot\mathbf{J}(S)$.

The talk is based on the joint paper with P. I. Plotnikov.

References

[1] Plotnikov P. I., Sokolowski J., Zochowski A., *Numerical experiments in drag minimization for compressible Navier–Stokes flows in bounded domains*, 14th International IEEE/IFAC Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'09, 2009, 4 pages.

[2] Kazmierczak A., Plotnikov P. I., Sokolowski J., Zochowski A., *Numerical Method for Drag Minimization in Compressible Flows*, 15th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2010. Digital Object Identifier: 10.1109/MMAR.2010.5587258 Publication Year: 2010 , Page(s): 97-101, IEEE Conferences.

[3] Plotnikov P. I., Sokolowski J., *Stationary Boundary Value Problems for Compressible Navier–Stokes Equations*, Handbook of Differential Equations, Volume 6, Elsevier, Edited by M. Chipot, (2008) 313–410.

[4] Plotnikov P. I., Sokolowski J., *On compactness, domain dependence and existence of steady state solutions to compressible isothermal Navier–Stokes equations*, Jornal of Mathematical Fluid Mechanics, 7(2005) No. 4, 529–573.

[5] Plotnikov P. I., Sokolowski J., *Shape derivative of drag functional*, SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 48, Issue 7, 2010, pp. 4680-4706.

Weak solutions to lubrication equations in the presence of strong slippage

Kitavtsev G. (Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Germany)
Laurencot P. (University of Toulouse, France)
Niethammer B. (University of Oxford, UK)

In this talk we consider a one-dimensional lubrication model that describe the dewetting process of nanoscopic thin polymer liquid films on hydrophobyzed substrates. This model takes account of intermolecular interactions of the film with the solid substrate due to attractive van der Waals and repulsive Born forces, as well of the effect of large slippage at the polymer-substrate interface. It is represented by a coupled system of differential equations

$$\mathrm{Re}\,(\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2)) = 4\partial_x(\nu h\partial_x u) + h\partial_x(\sigma\partial_{xx}h - \Pi(h)) - \frac{u}{\beta} \tag{1a}$$

$$\partial_t h = -\,\partial_x\,(hu)\,, \tag{1b}$$

describing evolution in time of the free surface and the averaged lateral velocity of the film given by the functions $h(x,t)$ and $u(x,t)$, respectively. Coefficients Re, ν, σ, β in (1a)–(1b) denote Reynolds number, viscosity, capillarity and slip-length, respectively. The system (1a)–(1b) is considered on a bounded domain (0, 1) with the boundary conditions

$$u = 0 \quad \text{and} \quad \partial_x h = 0 \quad \text{at} \quad x = 0,\, 1. \tag{2}$$

We prove existence of global weak solutions for the system (1a)–(1b) with (2) and investigate the convergence of these solutions as either the Reynolds number or the capillarity goes to zero, as well as their limiting behaviour as the slip length goes to zero or infinity. In particularly, we show that after an appropriate rescaling they converge to the smooth classical solutions of the lubrication model

$$\partial_t h = -\partial_x\Big(h^2\partial_x\left(\sigma\partial_{xx}h - \Pi(h)\right)\Big)$$

which corresponds to the case of the Navier slip condition imposed at the polymer-substrate interface.

GK acknowledges the support from the Weierstrass Institute and Max–Planck–Institute for Mathematics in the Natural Sciences. PhL and BN were partially supported by the CNRS/RSE project JP090230 and the EPSRC Science and Innovation award to the Oxford Centre for Nonlinear PDE (EP/E035027/1).

References

[1] Bresch D., Desjardins B., and Lin C. K., *On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems*, Comm. Partial Differential Equations, 28 (2003), no. 3-4, 1009–1037.

[2] Kitavtsev G., Laurençot P., and Niethammer B., *Weak solutions to lubrication equations in presence of strong slippage*, MPI MIS Preprint no. 66/2010, Leipzig 2010.

[3] Kitavtsev G. and Wagner B., *Coarsening dynamics of slipping droplets* J. Engr. Math. 66 (2010), 271–292.

[4] Kitavtsev G., *Derivation, analysis and numerics of reduced ODE models describing coarsening dynamics of liquid droplets*, PhD Thesis, HU Berlin, 2009.

[5] Münch A., Wagner B., and Witelski T. P., *Lubrication models with small to large slip lengths*, J. Engr. Math. 53 (2006), 359–383.

[6] Solonnikov V. A., *The solvability of the initial-boundary value problem for the equations of motion of a viscous compressible fluid*, Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 56 (1976), no. 197, 128–142.

Fractional-Parabolic Systems

Kochubei A. N. (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine)

We develop a theory of the Cauchy problem for linear evolution systems of partial differential equations with the Caputo–Dzrbashyan fractional derivative in the time variable t. The class of systems considered in this work is a fractional extension of the class of systems of the first order in t satisfying the uniform strong parabolicity condition. We construct and investigate the Green matrix of the Cauchy problem. While similar results for the fractional diffusion equations [**1**] were based on the H-function representation of the Green matrix for equations with constant coefficients (not available in the general situation), here we use, as a basic tool, the subordination identity for a model homogeneous system. We also prove a uniqueness result based on the reduction to an operator-differential equation.

References

[1] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., and Kochubei A. N., *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type*, Birkhäuser, Basel, 2004.

Multiplicity of solutions to the Dirichlet problem for an supercritical equation with p-laplacian

Kolonitskii S. B. (Saint-Petersburg State Electrotechnical University, Russia)

Consider a boundary problem

$$-\Delta_p u = u^{q-1} \quad \text{in} \quad \Omega_R; \qquad u > 0 \quad \text{in} \quad \Omega_R; \qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_R, \qquad (1)$$

where $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n | R < |x| < R+1\}$, $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ is a p-laplacian. Let p_n^* be a critical Sobolev embedding exponent, i. e. $\frac{1}{p_n^*} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)_+$.

Multiplicity effect for solution of problem (1) was considered in many articles, starting with [**1**]. The most complete results are obtained in case $p = 2$. It was proved in [**3, 2, 4**] that for arbitrary $1 < p < \infty$ and $p < q < p_n^*$ for any natural K there exists $R_0 = R_0(n, p, q, K)$ such that for all $R > R_0$ problem (1) has at least K solutions that are nonequivalent up to rotations.

We prove the multiplicity of solutions to problem (1) for $n \geqslant 4$, $n \neq 5$, $1 < p < \infty$ and $p_n^* \leqslant q < p_{n-1}^*$.

Work is supported by grants RFBR 11-01-00825 and NSh 4210.2010.1.

References

[1] C. V. Coffman. A non-linear boundary value problem with many positive solutions// J. of Diff. Eq. V. 54 (1984), P. 429–437.

[2] A. I. Nazarov. The one-dimensional character of an extremum point of the Friedrichs inequality in spherical and plane layers// Probl. Math. Anal. **20** (2000), 171–190 (Russian). English transl.: J. Math. Sci. **102** (2000), No 5, 4473–4486.

[3] A. I. Nazarov. On solutions of the Dirichlet problem for an equation involving the p-Laplacian in a spherical layer// Proc. St.Petersburg Math. Soc. **10** (2004), 33–62 (Russian); English transl.: AMS Transl. Series 2. **214** (2005), 29–57.

[4] S. B. Kolonitskii. Multiplicity of solutions of the Dirichlet problem for an equation involving p-laplacian in a three-dimensonal annulus// Algebra and calculus, V. 22, (2010) (Russian).

On Global Attractors of Nonlinear Hyperbolic PDEs

Komech A. I. (IITP RAS, Russia)

We consider Klein–Gordon and Dirac equations coupled to $U(1)$-invariant nonlinear oscillators. The solitary waves of the coupled nonlinear system form two-dimensional submanifold in the Hilbert phase space of finite energy solutions. Our main results read as follows:

THEOREM 1. *Let all the oscillators be strictly nonlinear. Then any finite energy solution converges, in the long time limit, to the solitary manifold in the local energy seminorms.*

The investigation is inspired by Bohr's postulates on transitions to quantum stationary states. The results are obtained for:

- 1D KGE coupled to one oscillator [**1, 2, 3**], and to finite number of oscillators [**4**];
- nD KGE and Dirac eqns coupled to one oscillator via mean field interaction [**5, 6**].

Supported partly by the Alexander von Humboldt Research Award, and grants of FWF and RFBR.

References

[1] Komech A. I., *On attractor of a singular nonlinear $U(1)$-invariant Klein–Gordon equation*, Proc. of the 3rd ISAAC Congress, Freie Universität Berlin, Berlin, 2003, 599–611.

[2] Komech A. I., Komech A. A., *On global attraction to solitary waves for the Klein–Gordon equation coupled to nonlinear oscillator*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris 343, Issue 2, 15 July 2006, 111–114.

[3] Komech A. I., Komech A. A., *Global attractor for a nonlinear oscillator coupled to the Klein-Gordon field*, Arch. Rat. Mech. Anal. 185 (2007), 105–142.

[4] Komech A. I., Komech A. A., *On global attraction to solitary waves for the Klein-Gordon field coupled to several nonlinear oscillators*, J. des Mathematiques Pures et App. 93 (2010), 91-111. arXiv:math/0702660

[5] Komech A. I., Komech A. A., *Global attraction to solitary waves for Klein–Gordon equation with mean field interaction*, Annales de l'IHP-ANL 26 (2009), no. 3, 855–868. arXiv:math-ph/0711.1131

[6] Komech A. I., Komech A. A., *Global attraction to solitary waves for nonlinear Dirac equation with mean field interaction*, SIAM J. Math. Analysis 42 (2010), no. 6, 2944–2964.

On blow-up conditions for solutions of quasilinear elliptic inequalities containing terms with lower-order derivatives

Kon'kov A. A. (Moscow Lomonosov State University, Russia)

Let Ω be an open unbounded subset of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Consider the inequality

$$\operatorname{div} a(x, Du) + b(x)|Du|^{p-1} \geq f(x)g(u) \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

where $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ is the gradient operator, $b \in L_{\infty,loc}(\Omega)$ and, moreover, $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a locally Caratheodory function such that

$$C_1|\xi|^p \leq \xi a(x, \xi), \quad |a(x, \xi)| \leq C_2|\xi|^{p-1}$$

with some constants $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, and $p > 1$ for almost all $x \in \Omega$ and for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.

We assume that $S_r \cap \Omega \neq \emptyset$ for all $r > r_0$, where $r_0 > 0$ is some real number and S_r is the sphere in $\mathbb{R}^n$ of radius r and center at zero. Also let $f \in L_{\infty,loc}(\Omega)$ and $g \in C([0, \infty))$ be non-negative functions and $g(t) > 0$ for all $t > 0$. We denote:

$$g_\theta(t) = \inf_{(t/\theta, \theta t)} g, \quad t > 0,\ \theta > 1$$

and

$$f_\sigma(r) = \frac{\text{ess inf}_{\Omega_{r,\sigma}} f}{1 + r \text{ ess sup}_{\Omega_{r,\sigma}} |b|}, \quad r > r_0,\ \sigma > 1,$$

where $\Omega_{r,\sigma} = \{x \in \Omega : r/\sigma < |x| < \sigma r\}$.

A non-negative function $u \in W^1_{p,loc}(\Omega) \cap L_{\infty,loc}(\Omega)$ is a solution of inequality (1) if

$$-\int_\Omega a(x, Du) D\varphi \, dx + \int_\Omega b(x) |Du|^{p-1} \varphi \, dx \geq \int_\Omega f(x) g(u) \varphi \, dx$$

for any non-negative function $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. As is customary, the condition

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

means that $\psi u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ for any $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. If $\Omega = \mathbb{R}^n$, then (2) is obviously fulfilled for all $u \in W^1_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$.

Particular cases of inequality (1) were studied in papers [**1**–**4**].

Theorem 1. *Let*

$$\int_1^\infty (g_\theta(t) t)^{-1/p} \, dt < \infty$$

and

$$\int_{r_0}^\infty (r f_\sigma(r))^{1/(p-1)} \, dr = \infty$$

for some real numbers $\theta > 1$ and $\sigma > 1$, then every non-negative solution of (1), (2) *is equal to zero.*

The research was supported by RFBR grant 11-01-00989.

References

[1] Keller J. B., *On solutions of $\Delta u = f(u)$*, Comm. Pure. Appl. Math. 10 (1957), no. 4, 503–510.
[2] Kon'kov A. A., *Behaviour of solutions of elliptic inequalities nonlinear with respect to the major derivatives*, Izvestiya of Russ. Acad. Sci. Ser. Mat. 71 (2007), no. 1, 17–54.
[3] Mitidieri E., Pokhozhaev S. I., *A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities*, Proc. V. A. Steklov Inst. Math. 234 (2001).
[4] Osserman R., *On the inequality $\Delta u \geq f(u)$*, Pacific J. Math. 7 (1957), no. 4, 1641–1647.

On asymptotic stability of kinks for relativistic Ginzburg-Landau equation

Kopylova E. A. (Institute for Information Transmission Problems RAS)

We consider nonlinear relativistic wave equation in one space dimension

$$\ddot\psi(x,t) = \psi''(x,t) + F(\psi(x,t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad F(\psi) = -U'(\psi) \tag{1}$$

We assume that $U(\psi)$ is similar to the Ginzburg-Landau potential

$$U(\psi) \sim (\psi^2 - 1)^2/4$$

There exist a "kink" — nonconstant finite energy solution of stationary equation

$$s(x) \sim \tanh x/\sqrt{2}$$

Then the moving kinks or solitary waves

$$s_{q,v}(t) = s(x - vt - q), \quad q, v \in \mathbb{R}, \quad |v| < 1, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$$

are the solutions to equation (1). Our main results are the following asymptotics

$$(\psi(x,t), \dot{\psi}(x,t)) \sim (s_{q_\pm, v_\pm}(x - v_\pm t - q_\pm), \dot{s}_{q_\pm, v_\pm}(x - v_\pm t - q_\pm)) + W_0(t)\Phi_\pm,$$

where $t \to \pm\infty$, for solutions to (1) with initial states close to solitary wave. Here $W_0(t)$ is the dynamical group of the free Klein–Gordon equation, $\Phi_\pm$ are the corresponding asymptotic states, and the remainder converges to zero as $t^{-1/2}$ in the "global energy norm" of the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$.

Crucial role in the proof play our recent results on weighted energy decay for the Klein–Gordon equations.

The research was supported by DFG, FWF and RFBR grants.

References

[1] 1. Kopylova E. A., Komech A. I., *On asymptotic stability of moving kink for relativistic Ginsburg–Landau equation*, Comm. Math. Phys. 302 (2011), no. 1, 225–252.

[2] 2. Komech A. I., Kopylova E. A., *Weighted energy decay for 1D Klein–Gordon equation*, Comm. PDE. 35 (2010), no. 2, 353–374.

Bernoulli law under minimal smoothness assumptions and applications

Korobkov M. V. (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

Consider the Euler system

$$\begin{cases} (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with Lipschitz boundary. Assume that $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ and $p \in W^{1,s}(\Omega)$, $s \in [1, 2)$, satisfy the Euler equations (1) for almost all $x \in \Omega$ and let $\int_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, where Γ_i are connected components of the boundary $\partial\Omega$. Then there exists a stream function $\psi \in W^{2,2}(\Omega)$ such that $\nabla\psi = (-w_2, w_1)$ (note that by Sobolev Embedding Theorem ψ is continuous in $\overline{\Omega}$) . Denote by $\Phi = p + \dfrac{|\mathbf{w}|^2}{2}$ the total head pressure corresponding to the solution $(\mathbf{w}, p)$.

Theorem 1. *Under above conditions, for any connected set $K \subset \overline{\Omega}$ such that*

$$\psi\big|_K = \text{const} \tag{2}$$

the assertion

$$\exists C = C(K) \quad \Phi(x) = C \quad \text{for } \mathcal{H}^1\text{-almost all } x \in K \tag{3}$$

holds.

Theorem 1 was obtained in [**1**]. Here we denote by $\mathcal{H}^1$ the one-dimensional Hausdorff measure, i. e., $\mathcal{H}^1(F) = \lim\limits_{t\to 0+} \mathcal{H}^1_t(F)$, where

$$\mathcal{H}^1_t(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam} F_i : \mathrm{diam} F_i \le t, F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}.$$

Using Theorem 1 we prove the existence of the solutions to steady Navier–Stokes equations for some plane cases (see [**2**]) and for the spatial case when the flow has an axis of symmetry.

The proof of Theorem 1 relies upon some new analog of Morse–Sard Theorem for Sobolev spaces (see [**3**]).

This research was supported by Federal Target Grant "Scientific and educational personnel of innovation Russia" for 2009–2013 (government contract No 02.740.11.0457).

References

[1] Korobkov M. V. *Bernoulli law under minimal smoothness assumptions*, Dokl. Math. 83 (2011), no. 1, 107–110.

[2] Korobkov M. V., Pileckas K. and Russo R. *On the flux problem in the theory of steady Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions*, arXiv:1009.4024v1, [math-ph], 21 Sep 2010.

[3] Bourgain J., Korobkov M. V. and Kristensen J. *On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV functions*, arXiv:1007.4408v1, [math.AP], 26 July 2010.

On Friedrichs-type estimates in domains with rapidly vanishing perforation along the boundary

Koroleva Yu. O. (Luleå University of Technology, Sweden)
Persson L.-E. (Luleå University of Technology, Sweden)
Wall P. (Luleå University of Technology, Sweden)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain rarely and periodically perforated along boundary $\partial\Omega$. Assume that small parameters ε and $\mu(\varepsilon), \mu(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, describe the length of periodicity and the shape of small sets, respectively. Define $\eta_{\mu(\varepsilon)}$ as the smallest eigenvalue of Steklov problem in the cell of periodicity. We consider the situation when the perforation shrinks so fast that $\eta_{\mu(\varepsilon)} \to p\,\varepsilon,\ 0 < p < \infty$, as $\varepsilon \to 0$. By using the technique developed in [**1**], one can prove the following Friedrichs-type inequality for functions u belonging to $H^1(\Omega)$ and vanishing on the boundary of perforation:

$$\int\limits_{\Omega} u^2\, dx \le K_\varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx. \tag{1}$$

Proposition 1. *There exists a constant $K_0 > 0$ such that*

$$\int\limits_{\Omega} u^2\, dx \le K_0 \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} u^2\, dS \right), \tag{2}$$

for any $u \in H^1(\Omega)$. Moreover, the best constant is $K_0 = 1/\lambda_0^1$, where λ_0^1 is the smallest eigenvalue for Laplace operator with Robin condition $\partial u/\partial n + pu = 0$ on $\partial\Omega$.

It can be noted that an inequality of the form

$$\int\limits_{\Omega} u^2\,dx \le K_0 \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx,$$

can not be valid for functions from $H^1(\Omega)$ and satisfying Robin condition on the boundary. It can be proved by the following counter example: Define the function u_m such that $u_m = m + p$ on $\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \ge 1/m,\ m \in \mathbb{N}\}$ and $u_m = m$ on $\partial\Omega$. If we let $m \to \infty$ we see that $K_0 = \infty$. An estimate for the difference between K_ε and K_0 is given in the following Theorem.

THEOREM 1. *Let K_ε and K_0 be the best constants in* (1) *and* (2). *There exists a constant C, independent of ε, such that*

$$|K_\varepsilon - K_0| \le C\left(\sqrt{\eta_{\mu(\varepsilon)}} + \left|\frac{\eta_{\mu(\varepsilon)}}{\varepsilon} - p\right| + \sqrt{\varepsilon\eta_{\mu(\varepsilon)}}\right). \tag{3}$$

For the full version of this work see [**2**].

Acknowledgements: The work was completed during the stay of Yu. Koroleva as Post Doc in Luleå in 2010–2011 and partially supported by RFBR (project 09-01-00353).

References

[1] Chechkin G. A., Koroleva Yu. O., Meidell A. and Persson L.-E., *On the Friedrichs inequality in a domain perforated nonperiodically along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems*, Russ. J. Math. Phys. 16 (2009), no. 1, 1–16.

[2] Koroleva Yu. O., Persson L.-E. and Wall P., *On Friedrichs-type inequalities in domains rarely perforated along the boundary*, Research Report 2, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, (14 pages), 2011.

Weyl–Titchmarsh theory for Schrödinger operators with strongly singular potentials

Kostenko A. S. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine)

Our main aim is to develop Weyl–Titchmarsh theory for Schrödinger operators with strongly singular potentials such as perturbed spherical Schrödinger operators (also known as Bessel operators). It is known that in such situations one can still define a corresponding singular Weyl m-function and it was recently shown that there is also an associated spectral transformation. In this talk we will give a general criterion when the singular Weyl function can be analytically extended to the upper half plane. We will derive an integral representation for this singular Weyl function and give a criterion when it is a generalized Nevanlinna function. Our criteria will in particular cover the aforementioned case of perturbed spherical Schrödinger operators. Moreover, we will show how essential supports for the Lebesgue decomposition of the spectral measure can be obtained from the boundary behavior of the singular Weyl function. Finally, we will present a local Borg–Marchenko type uniqueness result.

The talk is based on joint works with A. Sakhnovich and G. Teschl [**1, 2, 3, 4**].

The research was supported by IRCSET PostDoctoral Fellowship Program.

References

[1] A. Kostenko and G. Teschl, *On the singular Weyl–Titchmarsh function of perturbed spherical Schrödinger operators*, J. Diff. Eqs. **250** (2011), 3701–3739.
[2] A. Kostenko, A. Sakhnovich, and G. Teschl, *Inverse eigenvalue problems for perturbed spherical Schrödinger operators*, Inverse Problems **26** (2010), 105013, 14 pp.
[3] A. Kostenko, A. Sakhnovich, and G. Teschl, *Weyl–Titchmarsh theory for Schrödinger operators with strongly singular potentials*, Int. Math. Res. Notices (to appear) (ArXiv:1007.0136).
[4] A. Kostenko, A. Sakhnovich, and G. Teschl, *Commutation methods for Schrödinger operators with strongly singular potentials*, Math. Nachr. (to appear) (ArXiv:1010.4902).

Variational inequalities with sets of constraints in a functional class not lying in Sobolev spaces

Kovalevsky A. A. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine)

In [**1**, **2**] the existence and properties of solutions were established for variational inequalities with an elliptic operator acting from $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ into $(\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$, a set of constraints in $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ and a right-hand side in $L^1(\Omega)$. Here Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ and $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ is an anisotropic weighted Sobolev space with the set of exponents $q = \{q_1,\dots,q_n\}$ and the set of weighted functions $\nu = \{\nu_1,\dots,\nu_n\}$ such that $q_i \in (1,n)$, $\nu_i > 0$ a. e. in Ω, $\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$.

In the talk we discuss the main results of [**1**, **2**] as well as some new results on the solvability of analogous variational inequalities with sets of constraints lying in the class $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ of all functions $u:\Omega\to\mathbb{R}$ such that $T_k(u)\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ for every $k>0$, where T_k is the standard truncated function of the level k. We observe that the class $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ is larger than the space $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ and is not contained in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

References

[1] Kovalevsky A. A., Gorban Y. S., *Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-data*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris 345 (2007), no. 8, 441–444.
[2] Ковалевский А. А., Горбань Ю.С. *О Т-решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными*, Известия РАН. Сер. матем. 75 (2011), no. 1, 101–160.

On the topology of the spaces of Morse functions on surfaces

Kudryavtseva E. A. (Moscow State University, Russia)

Let M be a smooth connected orientable closed surface. Let $F = F_{p,q,r;\hat p,\hat q,\hat r}$ be the space of Morse functions $f: M\to\mathbb{R}$ having p critical points of local minima, q saddle points, and r points of local maxima, where $\hat p,\hat q,\hat r$ points are labeled. Denote by $F^1 = F^1_{p,q,r;\hat p,\hat q,\hat r}\subset F$ the set of functions whose local minima and maxima equal -1, 1. Let $\mathcal{D}^0$ be the group of diffeomorphisms of M homotopic to id_M. Endow $F,\mathcal{D}^0$ with C^∞-topology (see [**1**]).

Definition 1. Two functions $f, g \in F$ are called *isotopic* ($f \sim g$) if $f = h_2 \circ g \circ h_1$ for some $h_1 \in \mathcal{D}^0$ and $h_2 \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{R})$ where h_1 preserves enumeration of labeled critical points.

Theorem 1. *Suppose that $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$ (i. e. at least $\chi(M) + 1$ critical points are labeled). There exists a countable (and finite for $M = S^2$) connected $(3q-2)$-dimensional polyhedron $\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$ such that the following homotopy equivalences take place:*

$$F \sim F^1 \sim \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}} \sim R \times \widetilde{\mathbb{K}},$$

where R is either $\mathbb{R}P^3$, $(S^1)^2$ or a point in dependence on genus of M being 0, 1 or higher.

The polyhedron $\widetilde{\mathbb{K}}$ is the union of subpolyhedra $\mathbb{D}_{[f]} \subset \widetilde{\mathbb{K}}$ (called skew cylindrical handles) which are in one-to-one correspondence with the isotopy classes $[f]$ of Morse functions $f \in F^1$ and have the following form (described in more detail in [**2**])*:*

$$\mathbb{D}_{[f]} \approx (P_{[f]} \times \mathbb{R}^c \times (S^1)^d)/\Gamma_{[f]}, \qquad c = c([f]),\ d = d([f]),$$

where $P_{[f]}$ is a convex polytope, $\Gamma_{[f]}$ is a finite group acting freely on $P_{[f]} \times \mathbb{R}^c \times (S^1)^d$. The polyhedron $\widetilde{\mathbb{K}}$ endowed with this handle decomposition is a skew cylindric-polyhedral complex (see [**2**])*. A homotopy equivalence $[f] \sim R \times \mathbb{D}_{[f]}$ holds for each function $f \in F^1$.*

Corollary 1. *One has $H_j(F) = 0$ for $j > 3q+1$, $H_j(\widetilde{\mathbb{K}}) = 0$ for $j > 3q-2$. If $M = S^2$ then $(-1)^{q-1}\chi(\widetilde{\mathbb{K}}) = \left|\{[f] \in F^1/\sim \mid s(f) = 1\}\right|$ where $s(f)$ is the number of saddle critical values of f; moreover the Poincaré polynomial of $\widetilde{\mathbb{K}}$ satisfies the relations*

$$P(\widetilde{\mathbb{K}}, t) = \sum_{[f] \in F^1/\sim} t^{q-s(f)} P(\mathbb{D}_{[f]}, t) - (1+t)R_1(t) =$$
$$= \sum_{[f] \in F^1/\sim} t^{q-s(f)} (1+t)^{d([f])} - R_2(t)$$

where R_1, R_2 are polynomials with non-negative integer coefficients.

Example 1. If the number of saddle critical points is $q = 1, 2$ and $\hat{q} = 0$ (i. e. the saddle points are non-labeled) then $F \sim R \times \Gamma$ where $\Gamma = \Gamma_{p,q,r} = \Gamma_{p,q,r;p,0,r}$ is a graph such that

$$\Gamma_{1,1,2} = \Gamma_{2,1,1} = \text{point}, \quad \Gamma_{1,2,3} = \Gamma_{3,2,1} \sim \bigvee_4 S^1,$$
$$\Gamma_{2,2,2} \sim \bigvee_6 S^1, \quad \Gamma_{1,2,1} \sim \bigvee_{\mathbb{N}} S^1.$$

The research was supported by RFBR grant 10-01-00748, the Programme for the Support of Leading Scientific Schools of RF (grant NSh-3224.2010.1), and the programmes "Development of Scientific Potential in Higher Education" (grant 2.1.1.3704) and "Scientific and Scientific-Pedagogical Personnel of Innovative Russia" (grant 14.740.11.0794).

References

[1] Kudryavtseva E. A., Permyakov D. A., *Framed Morse functions on surfaces*, Matem. Sbornik 201 (2010), no. 4, 33–98 (in Russian). Transl. Sbornik Mathematics 201 (2010), no. 4, 501–567.

[2] Kudryavtseva E. A., *On the homotopy type of the spaces of Morse functions on surfaces*, http://arxiv.org/abs/1104.4796.

Damped-driven Hamiltonian PDE

Kuksin S. B. (Ecole Polytechnique, France, and Steklov Institute, Mosow, Russia)

I will discuss the following class of nonlinear PDE:

$$\langle\text{Hamiltonian PDE}\rangle = \varepsilon \cdot \langle\text{damping}\rangle + \varkappa_\varepsilon \cdot \langle\text{force}\rangle. \tag{1}$$

The equations are considered in finite volume, $\varepsilon > 0$ is a small parameter and the scaling constant $\varkappa_\varepsilon$ is chosen in such a way that the solutions stay of order one as $\varepsilon \to 0$. I will be mostly interested in equations with random forces, and will discuss two groups of them:

1°. Navier–Stokes equations in dimension 2 and 3;

2°. equations (1), where the Hamiltonian PDE is a non-linear Schrödinger equation (NLS).

Navier–Stokes equations with small viscosity ε describe water turbulence in dimensions 2 and 3. If (1) is the 3D Navier–Stokes equations, we know about solutions with small ε almost nothing (e. g., the right scaling constant $\varkappa_\varepsilon$ is unknown). In the 2d case we know about the limit some nontrivial results. In particular, now for the case of random forces $\varkappa_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, the set of stationary measures μ_ε for equations (1) is tight and all limiting measures $\lim_{\varepsilon_j \to 0} \mu_{\varepsilon_j}$ are invariant measures for the 2d Euler equation and are genuinely infinite-dimensional; see in [**1**].

Equations from the second group, among other things, describe the optical turbulence. Now again $\varkappa_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$. Interesting results about these equations are available when the Hamiltonian PDE is the integrable 1d NLS (see [**2, 3**] for the case when it is not the 1d NLS, but the KdV equation), or when it is a linear Shrödinger equation with a generic potential, while the damping is nonlinear. In these cases the limiting dynamics is described by a well-posed infinite system of dissipative stochastic equations. I will discuss this results in details.

References

[1] Kuksin S. B., *Randomly Forced Nonlinear PDEs and Statistical Hydrodynamics in 2 Space Dimensions*, European Mathematical Society Publishing House 2006.

[2] Kuksin S. B., Piatnitski A. L., *Khasminsii–Whitham averaging for randomly perturbed KdV equation*, J. Math. Pures Appl. 89 (2008), 400–428.

[3] Kuksin S. B., *Damped-driven KdV and effective equations for long-time behaviour of its solutions*, GAFA 20 (2010), 1431–1463.

High Frequency Scattering by a Classically Invisible Body

Lakshtanov E. (Aveiro University, Portugal)
Vainberg B. (University of North Carolina at Charlotte, USA)

An interesting geometrical object was studied in a recent publication by Alexenko and Plakhov [**1**]. This object $\mathcal{O}$ has the following property. Geometrical optical rays, coming from a particular direction and reflected twice from the boundary of $\mathcal{O}$ by the law of geometrical optics, continue to propagate parallel to each other in the same way as if the obstacle was absent. The object appears invisible to an observer on the basis of the theory of geometrical optical rays. Note that a phase shift may influence the "invisibility" of the obstacle. One should also note that optical ray considerations provide an approximation to the expected properties of the corresponding optical problem, when the obstacle is smooth and convex. These conditions do not hold for the object under consideration. A rigorous treatment of the problem has to be based on an investigation of the solutions of the wave equation.

The first part of the talk concerns the study of the associated scattering problem for the reduced wave (i. e., Helmholtz) equation. High frequency asymptotics will be obtained for the scattering of plane wave by the Alexenko-Plakhov obstacle $\mathcal{O}$. It will be shown that the total momentum transmitted to the obstacle vanishes when the frequency k goes to infinity, and that the total cross section oscillates at high frequencies. The obstacle is practically invisible for some sequence of frequencies $k_n \to \infty$ and the total cross section approaches to the four geometrical cross section of the obstacle for an intermediate sequence $k_n' \to \infty$.

In the case of a smooth strictly convex obstacle, it is well known that the total cross section $\sigma(k)$ at high frequencies coincides with the doubled geometrical cross section Θ, i.e., $\sigma(k) \to 2\Theta$ as $k \to \infty$. So, it was a big surprise for us to find an obstacle with a total cross section being four times larger than the geometrical cross section in the limit of $k = k_n \to \infty$. The next natural question arises immediately: is there an obstacle for which $\limsup_{k\to\infty} \sigma(k)$ is larger than 4Θ? One could expect a positive answer based on the fact that the resonances (poles of the analytical continuation of the resolvent in the half plane $\operatorname{Im} k < 0$) can approach the real axis at infinity. In fact, the answer to this question is negative, and this will be justified in the second part of the talk. The justification is based on high frequency estimates for the Dirichlet-to-Neumann and Neumann-to-Dirichlet operators which are obtained for the Helmholtz equation in the exterior of bounded obstacles with arbitrary shapes (in particular, for so-called trapping obstacles).

Results of the first part of the talk are obtained in collaboration with B. Sleeman and will be published in [**2**], the second part will be published in [**3**].

References

[1] A. Aleksenko, A. Plakhov, "Bodies of zero resistance and bodies invisible in one direction", Nonlinearity, 22, pp. 1247-1258, 2009.
[2] E. Lakshtanov, B. Sleeman, B. Vainberg, "High Frequency Scattering by a Classically Invisible Body", submitted.
[3] E. Lakshtanov, B. Vainberg, "A priori estimates for high frequency scattering by obstacles of arbitrary shape", submitted.

Self-propelling at low Reynolds number, case of a deformable sphere

Loheac J. (University Henri Poincare, Nancy, France)
Scheid J.-F. (University Henri Poincare, Nancy, France)
Tucsnak M. (University Henri Poincare, Nancy, France)

The aim of this work is to tackle the self-propelling of a nearly spherical swimmer at low Reynolds number by using tools coming from control theory. More precisely we address the controllability problem: "Given two arbitrary positions, does it exist "controls" such that the body can swim from one position to another, with null initial and final deformations?"

We will consider a spherical object surrounded by a viscous incompressible fluid filling the remaining part of the three dimensional space. We assume that the object undergoes small and axially-symmetric deformations. Since we assume that the motion takes place at low Reynolds number, we model the fluid with Stokes equations. It is well known, that the governing equations reduce to a finite dimensional control system. By combining perturbation arguments and Lie brackets computations, we establish the controllability property.

References

[1] Alouges F., Desimone A. and Lefebvre A., *Optimal strokes for axisymmetric microswimmers*, Eur. Phys. J. E 28, 279–284 (2009).
[2] Blake J. R., *A spherical envelope approach to ciliary propulsion*, J. Fluid. Mech. no. 46, 199–208 (1971).
[3] Coron J.-M., *Control and Nonlinearity*, A. M. S., Mathematical surveys and monographs, vol. 136, 2007.
[4] Galdi G. P., *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, Vol. 1: Linearized steady problems*, Springer, 1994.
[5] Purcell E. M., *Life at low Reynolds number*, American J. of Phys., vol. 45, 3–11 (1977).
[6] Shapere A. and Wilczek F., *Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number*, J. Fluid. Mech., vol. 198, 587–599 (1989).

Numerical scheme for Laplacian grows models

Loheac J.-P. (Ecole centrale de Lyon, France)

This work is common with A. S. Demidov (Moscow State University), it concerns a numerical scheme involved by the Helmholtz–Kirchhoff method applied in the case of Hele–Shaw flows.

This method allows to transform a free boundary bi-dimensional problem in a fixed boundary problem by introducing a convenient parameterization. It also leads to build numerical schemes.

For instance, a model of Hele–Shaw flows with punctual source is the Stokes–Leibenson problem: let Ω_0 be a bi-dimensional bounded simply connected domain such that its boundary Γ_0 is smooth enough. This domain will be deformed according to the following law: at time t, we obtain a domain $\Omega_t = \Omega$ of boundary $\Gamma_t = \Gamma$ such that the normal velocity of each point $\mathbf{s} \in \Gamma$ is given by the following kinetic condition,

$$\dot{\mathbf{s}}.\nu = \partial_\nu u \,, \tag{1}$$

where u is the solution of the following Laplace problem,

$$\Delta u = q\,\delta \quad \text{in } \Omega\,, \qquad \text{and} \qquad u = 0 \quad \text{on } \Gamma\,. \tag{2}$$

The Helmholtz–Kirchhoff method leads us to write the problem in the form of a Cauchy problem for some integro-differential. This can give existence and uniqueness results, which are global in time when $q > 0$.

Furthermore, by introducing an approximate Stokes–Leibenson problem concerning polygonal domains, this integro-differential can be expressed in the form of a non-linear differential equation in a finite-dimension space.

Numerical simulations will be presented and discussed.

Especially some numerical experiments show some critical manifold which can explain some phemonenon of instabilities.

References

[1] Almgren R., *Crystalline Saffman–Taylor fingers*, SIAM J. Appl. Math. Math. J. **55** (1995), 1511–1535.

[2] Demidov A. S., *Some applications of the Helmholtz–Kirchhoff method (equilibrium plasma in tokamaks, Hele–Shaw flow, and high-frequency asymptotics)*, Russian Journal of Mathematical Physics, **7** (2000), No. 2, 166–186.

[3] Demidov A. S., Lohéac J.-P., *Numerical scheme for Laplacian growth models based on the Helmoltz–Kirchhoff method*, Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics (2009), 107–114.

Order of singular extremals in problems with multi-dimensional input

Lokutsievskiy L. V. (Moscow State University, Russia)

Zelikin M. I. (Moscow State University, Russia)

Theory of order of singular extremals for optimal control problems with multi dimensional input is constructed. This theory generalizes classical theory for problems with one-dimensional input. Necessary conditions of junctions of a singular extremal with non-singular one is obtained. Also we will discuss some examples where the optimal control is a whole irrational winding on a torus and it is run at a finite time.

Horseshoe and linear horseshoe for continuous maps of dendrites

Makhrova E. N. (N. Novgorod State University, Russia)

Let X be a compact metric space, $f : X \to X$ be a continuous map. One says that f has a horseshoe if there are disjoint compact sets $A, B \subset X$ such that

$$f(A) \cap f(B) \supset A \cup B.$$

We shall denote this horseshoe by (A, B).

It is well-known that if f^n has a horseshoe then f has a positive topological entropy (see, for example, [**1**]).

Let X be a dendrite (locally connected continuum without subsets homeomorphic to the circle) or a graph (continuum which can be written as the union of finitely many arcs any two of which can be intersect only in their end points) and $f : X \to X$ has a horseshoe (A, B).

If A and B are sets homeomorphic to the closed interval $[0, 1]$ on the real line than we say that f has a liner horseshoe.

When X is a graph than the positive topological entropy of f is equivalent to the existence of liner horseshoe for some iteration f^n [**2**].

In [**3**] it is constructed the example of a dendrite X and a continuous map $f : X \to X$ such that f has a positive topological entropy, f has a horseshoe and any iteration f^n does not have a liner horseshoe.

In the report the structure of sets A and B of a horseshoe (A, B) on dendrites is investigated under which some iteration f^n has a liner horseshoe.

References

[1] Block A., Teoh E. *How little is little enough?*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 9 (2003), 969–978.

[2] Libre J., Misiurewicz M. *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology. 32 (2003), 649–664.

[3] Makhrova E. *Homoclinic points and topological entropy of continuous map of dendrite*, Contemporary mathematics and its applications. 54 (2006), 241–248.

On a class of hybrid systems with ordinary derivatives

Maksimov V. P. (Perm State University, Russia)

Tchadov A. L. (Perm State University, Russia)

The abstract functional differential system [**1**]

$$\delta x = \Theta x + f \tag{1}$$

is considered, where $x = col(y, z)$, $y : [0, T] \to R^n$, $z : \{0, t_1, ..., t_N, T\} \to R^\nu$, $\delta x = col(\dot{y}, \Delta z)$, $(\Delta z)(t_i) = z(t_i) - z(0)$, $\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$; $\Theta_{11} : DS^n \to L^n$, $\Theta_{12} : M^\nu \to L^n$, $\Theta_{21} : DS^n \to M^\nu$, $\Theta_{22} : M^\nu \to M^\nu$ are linear operators. Given sets $I = \{0, t_1, ..., t_N, T\}$, $0 < t_1 < ... < t_N < T$; $J = \{0, \tau_1, ..., \tau_m, T\}$, $0 < \tau_1 < ... < \tau_m < T$, the spaces DS^n and M^ν are defined as follows. Let us denote the characteristic function of the set A by χ_A. DS^n (see [**2**]) is the space of functions $y : [0, T] \to R^n$ representable in the form $y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)\, ds + \sum_1^m \chi_{[\tau_i, T]}(t)[y(\tau_i) - y(\tau_i - 0)]$; M^ν is the space of functions $z : I \to R^\nu$. All the spaces are equipped with natural norms and are Banach spaces. It is suggested that operator $\Theta : DS^n \times M^\nu \to L^n \times M^\nu$ is bounded and Volterra.

System (1) is a typical one met with in mathematical modeling economic dynamics processes and covers many kinds of dymamic models with aftereffect (integro-differential, delayed differential, differential difference, difference) and impulsive perturbations. The equations of (1) include simultaneously terms depending on continuous time, $t \in [0, T]$, and discrete time $t \in I$, that is why the term "hybrid" seems to be suitable.

In the talk, the following problems for system (1) and approaches to solve them are described.

The general boundary value problem (BVP)

$$\delta x = \Theta x + f, \quad \Lambda x = \gamma, \tag{2}$$

where $\Lambda : DS^n \times M^\nu \to R^\eta$ is a linear bounded vector-functional. For BVP (2), necessary and sufficient conditions for the unique solvability are formulated and some principal questions of computer-assisted study of BVP (2) are discussed.

The abstract control problem (CP)

$$\delta x = \Theta x + Fu + f, \quad x(0) = \alpha, \quad \Lambda x = \gamma, \tag{3}$$

where $F : H \to L^n \times M^\nu$ is a linear bounded operator defined on a Hilbert space H of control actions. For CP (3), conditions for solvability are formulated and a computational technique of constructing the solutions to (3) is presented.

The results are obtained in the context of the theory of functional differential equations [**2**].

This work was supported by RFBR grant 10-01-96054.

References

[1] Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications*, Memoirs on Diff. Equat. Math. Phys. 8 (1996), 1–102.

[2] Azbelev N. V., Maksimov V. P., and Rakhmatullina L. F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2007.

Symbolic models for multidimensional perturbations of one-dimensional chaotic difference equations

Malkin M. I. (Nizhny Novgorod State University, Russia)

We construct symbolic models for difference equations which are multidimensional perturbations of generalized one-dimensional maps. Let

$$\Phi_\lambda(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = 0,\ n \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

be a difference equation of order m with parameter λ from some metric space. It is assumed that the non-perturbed operator Φ_{λ_0} depends on two variables:

$$\Phi_{\lambda_0}(y_0, \dots, y_m) = \psi(y_N, y_M), \tag{2}$$

where $0 \le N < M \le m$ and ψ is a piecewise monotone piecewise C^2-function. It is also assumed that for the equation $\psi(x, y) = 0$, there is a branch $y = \varphi(x)$ with positive topological entropy: $h_{top}(\varphi) > 0$, and hence, φ possesses at least one measure μ^* which maximizes the measure theoretic entropy: $h_{top}(\varphi) = h_{\mu^*}(\varphi)$ (note that in the case when φ has two monotonicity intervals, the maximal measure is unique).

In this setting we construct countable topological Markov chains as symbolic models for $\varphi(x)$ and then for closed invariant subsystems of $\sigma|_{\Lambda_\lambda}$ with topological entropy arbitrarily close to $h_{top}(\varphi)/(M-N)$, where σ is the shift map and Λ_λ is the space of bounded bi-infinite solutions of the difference equation (1) with parameter λ close enough to λ_0. From this construction it follows how the maximal measure μ^* can be continued to an invariant measure μ_λ of $\sigma|_{\Lambda_\lambda}$ with measure theoretic entropy $h_{\mu_\lambda}(\sigma|_{\Lambda_\lambda})$ arbitrarily close to the value $h_{top}(\varphi)/(M-N)$ for λ close enough to λ_0.

In particular case of Lorenz type maps we consider also the problem on behavior of the rotation set under multidimensional perturbations, and we show approximation results for rotation sets in this case. Our technique is based on approximations of measures of maximal entropy represented by countable topological Markov chains [**1**] and also, on continuation of chaotic orbits for perturbations of singular difference equations [**2**].

The research was supported by RFBR grant 11-01-00001.

References

[1] Malkin M. I., *Countable Topological Markov Chains with Meromorphic Zeta-Functions*, Random & Computational Dynamics 2 (1994), no. 3-4, 247–259.

[2] Juang J., Li M.-C., Malkin M. I., *Chaotic difference equations in two variables and their multidimensional perturbations*, Nonlinearity, 21 (2008), 1019–1040.

Homogenization of a diffusion–convection equation in poroelastic media

Meirmanov A. M. (Belgorod State University, Russia)
Zimin R. N. (Belgorod State University, Russia)

In the present talk we consider a diffusion–convection of an admixture from some reservoir (underground storage) into a soil. The basic mathematical model, describing the process on the microscopic level, consists of the Stokes system

$$\alpha_\tau \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nabla\cdot\big(\alpha_\mu\, \mu(c)\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + (\alpha_\nu \nabla\cdot\boldsymbol{v} - p_f)\mathbb{I}\big),\ \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_{p,f}\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \qquad (1)$$

for the velocity $\boldsymbol{v}$ and pressure p_f of the liquid component in the reservoir and a pore space, and Lame's equations

$$\alpha_\tau \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\big(\alpha_\lambda\, \mu(c)\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) - p_s\mathbb{I}\big),\ p_s + \alpha_{p,s}\nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0 \qquad (2)$$

for the displacements $\boldsymbol{w}$ and pressure p_s of the solid skeleton of the soil. The concentration c of the admixture in the pore space is governed by the diffusion–convection equation

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\, c = \nabla\cdot(\alpha_D \nabla\, c). \qquad (3)$$

In (1)–(3) dimensionless criteria α_τ, α_μ, α_ν, α_λ, $\alpha_{p,f}$, $\alpha_{p,s}$ depend on the given data and the dimensionless size ε of the pore, and the dimensionless viscosity $\mu(c)$ depends on the concentration c of the admixture.

The system is completed with corresponding boundary conditions on the common boundary "pore space – solid skeleton" and on the outward boundary, and with initial conditions for the displacements, velocity and concentration.

We discuss all possible limiting regimes (homogenized equations) of the system in consideration as $\varepsilon \to 0$. In particular, for the absolutely rigid solid skeleton: $\alpha_\mu \to 0$, $\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \to \mu_1$, $0 < \mu_1 < \infty$, $\alpha_\lambda \to \infty$, for the slightly viscous liquid in an elastic solid skeleton: $\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \to \mu_1$, $0 < \mu_1 \leqslant \infty$, $\alpha_\lambda \to \lambda_0$, $0 < \lambda_0 < \infty$, and for the viscous liquid in the elastic solid skeleton; $\alpha_\mu \to \mu_0$, $0 < \mu_0 < \infty$, $\alpha_\lambda \to \lambda_0$, $0 < \lambda_0 < \infty$.

To derive correctly the diffusion–convection equation we had to prove a new compactness lemma, which generalize for periodic structures the well-known Lions compactness lemma [**1**].

Lemma 1. *Let the sequence $\{c^\varepsilon\}$ be bounded in $L_\infty\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\cap W^{1,0}_2(\Omega_T)$, and the sequence $\{\partial/\partial t(\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})c^\varepsilon\}$ be bounded in $L_2\big((0,T); W^{-1}_2(\Omega)\big)$, where $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, $\chi(\boldsymbol{y})$ is 1-periodic in the variable $\boldsymbol{y}$ bounded function and $\langle\chi\rangle_Y \neq 0$. Then the sequence $\{c^\varepsilon\}$ is relatively compact in $L_2(\Omega_T)$.*

This research is partially supported by the Federal Program "Research and scientific-pedagogical brainpower of Innovative Russia" for 2009–2013 (Contract 02.740.11.0613).

References

[1] J. L. Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaire, Dunod, Paris, 1969.

Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of a spectral problem in a thick cascade junction with concentrated masses

Mel'nyk T. A. (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine)

A thick junction is the union of some domain in $\mathbb{R}^n$, which is called the junction's body, and a large number of ε-periodically situated thin domains along some manifold on the boundary of the junction's body. This manifold is called the joint zone. Here ε is a small parameter, which characterizes the distance between neighboring thin domains and their thickness.

Various constructions of thick junction type are successfully used in nanotechnologies, microtechnique, modern engineering constructions (microstrip radiator, ferrite-filled rod radiator), as well as many physical and biological systems such as, for example, the structure of the intestine lining with different levels of absorption of nutrients on different part of the tissues.

Therefore boundary-value problems in thick junctions of different types are very extensively investigated at present. The aim of these researches is to develop rigorous methods to study the asymptotic behavior of solutions as $\varepsilon \to 0$, i. e., when the number of the attached thin domains of a thick junction infinitely increases and their thickness vanishes.

In the talk I am going to present our new results, which where obtained jointly with Prof. G. A. Chechkin, concerning spectral boundary-value problems in a new kind of thick junctions, namely *thick cascade junctions*. This is the continuation of our investigation of boundary-value problems in thick cascade junctions, which we have begun in [**1, 2**].

A model plane thick cascade junction consists of the junction's body and great number $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ of ε-alternating thin rods belonging to two classes. One class consists of rods of finite length and the second one consists of rods of small length of order $\mathcal{O}(\varepsilon)$. The density of the junction is order $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\alpha})$ on the rods from the second class (the concentrated masses if $\alpha > 0$), and $\mathcal{O}(1)$ outside of them.

The asymptotic behavior (as $\varepsilon \to 0$) of eigenvalues and eigenfunctions of a boundary-value problem for the Laplace operator in a thick cascade junction with concentrated masses is investigated. In addition, we study the influence of the concentrated masses on the asymptotic behavior of these magnitudes.

References

[1] Mel'nyk T. A., Chechkin G. A., *Asymptotic analysis of boundary-value problems in thick cascade junctions*, Reports of National Ukrainian Academy of Sciences, 9 (2008), 16–22.

[2] Mel'nyk T. A., Chechkin G. A., *Homogenization of a boundary-value problem in a thick cascade junction*, Sbornik: Mathematics, 200 (2009), no. 3, 357–383 (Translated from Mathem. Sbornik, 200 (2009), no. 3, 49–74).

Regularization and R-semigroups for Petrovskii well-posed systems

Melnikova I. V. (Ural State University, Russia)

The Cauchy problem for systems of differential equations is considered as a particular case of the abstract Cauchy problem in a Hilbert space H : $u'(t) = A\,u(t),\ t \geq 0,\ u(0) = \xi$, where $A = P(i\frac{\partial}{\partial x})$, $\xi = \xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in H = L_2(\mathbb{R})$.

In this context, generally, operator A is not the generator of a semigroup of class C_0 and the problem is not uniformly well-posed even in the case of Petrovskii well-posed systems (see, for example, [**1**], [**2**]). For such problems regularizing operators are constructed. There are shown connections of the regularizing operators with R-semigroups (some type of modern regularized semigroups) in H and with Green functions of the problem constructed in spaces of Gelfand–Shilov distributions.

The research was supported by RFBR (grant 10-01-96003_r) and by the Ministry of Education and Sciences RF (grant 2.1.1/2000).

References

[1] Melnikova I. V., Filinkov A. I., *The Cauchy problem. Three approaches* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **120**, London, New York, Washington: Chapman & Hall/**CRC**, 2001.

[2] Melnikova I. V., Anufrieva U. A., *Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators.* J. of Math. Sciences (2008), **148**, no. 4, 481–532.

On the scattering of plane waves by a wedge

Merzon A. E. (Universidad Michoacana, Mexico)

We consider a *nonstationary* scattering of plane waves by a wedge

$$W := \{y = (y_1, y_2) : y_1 = \rho\cos\theta, y_2 = \rho\sin\theta, \rho > 0, 0 < \theta < \phi < \pi\}.$$

Let $u_{in}(y,t) := e^{i(k_0\cdot y - \omega_0 t)} f(t - n\cdot y)$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in Q := \mathbb{R}^2 \setminus W$; $\omega_0 > 0$, $k_0 \in \mathbb{R}^2$, $|\omega_0| = |k_0|$, be the incident plane wave. We assume $k_0 = (\omega_0\cos\alpha, \omega_0\sin\alpha)$, where $\max(0, \phi - \pi/2) < \alpha < \min(\pi/2, \phi)$. In this case $u_{in}(y,0) = 0$, $y \in \partial Q$. The profile $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f(s) = 0$, $s < 0$, and $f(s) = 1$, $s > \mu$, for some $\mu > 0$. Let Q_1, Q_2 be the sides of Q. The scattering is described by means of the following mixed wave problems in Q (depending on the properties of the wedge)

$$\left\{\begin{array}{ll} \Box u(y,t) = 0, & y \in Q \\ P_l u(y,t) = 0, & y \in Q_l \end{array}\right. \Bigg|\ t > 0, \quad \left\{\begin{array}{l} u(y,0) = u_{in}(y,0), \\ \dot{u}(y,0) = \dot{u}(y,0), \end{array}\right. \Bigg|\ y \in Q, \qquad (1)$$

where $l = 1, 2$, $P_l = 1$ or $P_l = \partial_{n_l}$ for the exterior normals n_l to Q_l (DD, NN or DN-problems). Denote by $\mathcal{C}$ the Sommerfeld contour in the following (turned) form $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, where

$$\mathcal{C}_1 = \{w_1 - i\pi/2\,|w_1 \geq 1\} \cup \{1 + iw_2 \mid -5/2\pi \leq w_2 \leq -\pi/2\} \cup \{w_1 - 5/2i\pi \mid w_1 \geq 1\}.$$

The contour $\mathcal{C}_2$ is a reflection of $\mathcal{C}_1$ with respect to the point $-3\pi/2$ and $\mathcal{C}$ has the clock-wise orientation. Denote by $\dot{Q} := \overline{Q} \setminus \{0\}$, $\{y\} := |y|/(1 + |y|)$, $y \in \mathbb{R}^2$.

Definition 1. For $\varepsilon, N \geq 0$, $\mathcal{E}_{\varepsilon,N}$ is the space of functions $u(t,y) \in C(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}^+})$ with the finite norm $\|u\|_{\varepsilon,N} := \sup\limits_{t\geq 0}\Big[\sup\limits_{y\in\overline{Q}}|u(y,t)| + \sup\limits_{y\in\dot{Q}}(1+t)^{-N}\{y\}^{\varepsilon}|\nabla_y u(y,t)|\Big] < \infty, \quad N \geq 0.$

Let $\Phi := 2\pi - \phi$, $q := \pi/(2\Phi)$ $\mu_1 := -i\pi/2 + i\alpha$, $H_1(\mu,\alpha,\Phi) := 1/\sinh[(\mu-\mu_1)q] + 1/\sinh[(\mu+\mu_1-i\pi)q]$.

Theorem 1. 1°. *There exists a unique solution to the DN-problem* (1) $u(y,t) \in \mathcal{E}_{1-\frac{\pi}{\Phi},1-\frac{\pi}{\Phi}}$ *which is expressed by the inverse Fourier transform* $u(y,t) = F^{-1}_{\omega\to t}[\hat{u}(y,\omega)], \quad t \geq 0, y \in \overline{Q}$, *where* $\hat{u}(y,\omega)$ *admits the Sommerfeld type representation*

$$\hat{u}(y,\omega) = \frac{i\hat{f}(\omega)}{4\Phi} \cdot \int\limits_{\mathcal{C}} e^{-\rho\omega\sinh\mu} H_1(\mu+i\theta,\alpha,\Phi)\,d\mu,$$

where $\rho \geq 0, \quad y = (\rho,\theta) \in Q, \quad \omega \in \mathbb{C}^+$.

2°. *The Limiting Amplitude Principle holds:* $u(y,t) - e^{-i\omega_0 t}A(y) \to 0, \quad t \to \infty$, *uniformly for* $|y| \leq \rho_0$, *where* $A(y) := \frac{i}{4\Phi}\int\limits_{\mathcal{C}} e^{i\omega_0\rho\cos(\theta-\alpha)}H(\beta + i\theta)d\beta, \qquad y \in Q$. *The limiting amplitude A is a solution to the classic DN-diffraction stationary problem of the plane wave by a wedge of the Sommerfeld–Maljuzhinetz type* [**4**].

Similar theorems hold for DD and NN-problems [**1, 2, 3**]. The Method of Complex Characteristics was used. The research was supported by CONACYT , CIC (UMSNH) and PROMEP (red) (México).

References

[1] A. Merzon. Well-posedness of the problem of Nonstationary Diffraction of Sommerefeld. *Proceeding of the International Seminar "Day on Diffraction–2003"*, 2003, St.Petebsburg, Russia, 151–162.

[2] A. I. Komech, N. J. Mauser, A. E. Merzon. On Sommerfeld representation and uniqueness in diffraction by wedges, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2005; Vol. 28: 147–183.

[3] A. I. Komech, A. E. Merzon, Limiting Amplitude principle in the scattering by wedges. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2006; Vol. 29, issue 10, pp. 1147–1185.

[4] Babich V. M., Lyalinov M. A., Gricurov V. E. *Sommerfeld-Maljuzhinetz method in diffraction problems.* S.Petersburg University, 2003.

Recursion operators and conservation laws for partial difference equations

Mikhailov A. V. (University of Leeds, UK)

We adapt a concept of recursion operator to difference equations and show that it generates an infinite sequence of symmetries and canonical conservation laws for a difference equation [**1**]. Similar to the case of partial differential equations these canonical densities can serve as integrability conditions for difference equations. We have found two recursion operators for the Viallet equation satisfying to the elliptic curve equation associated with the Viallet equation.

We discuss the concept of cosymmetries and co–recursion operators for difference equations and present a co–recursion operator for the Viallet equation

[**2**]. We also discover a new type of factorisation for the recursion operators of difference equations. This recursion operators and its factorisation into Hamiltonian and symplectic operators can be applied for Yamilov's discretisation of the Krichever–Novikov equation.

For Lax integrable equations we show that the sequence of conservation laws can be obtained recursively using formal diagonalisation of the Darboux transformations.

References

[1] A. V. Mikhailov, J. P. Wang, and P. Xenitidis. Recursion operators, conservation laws and integrability conditions for difference equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 167 (2011), no. 1, 421–443. arXiv:1004.5346.

[2] A. V. Mikhailov, J. P. Wang, and P. Xenitidis. Cosymmetries and Nijenhuis recursion operators for difference equations, 2010. arXiv:1009.2403v1. Submitted to *Nonlinearity*.

On the negative spectrum of low dimensional Schrödinger operators

Molchanov S. (UNC Charlotte, USA)

We will discuss estimates for the number of negative eigenvalues for Schrödinger type operators on Riemannian manifolds, graphs and quantum graphs with the spectral dimension $d \leq 2$. The main example: the Schrödinger operator in R^2 with a potential decaying at infinity.

The talk is based on the joint work with B. Vainberg.

Homogenization of the Dirichlet eigenvalue problems for elliptic operators with non-standard grow conditions in perforated domains with non-periodical structure

Namlyeyeva Yu. V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Ukraine)

We investigate the asymptotic behavior of solutions to the Dirichlet eigenvalue problem for elliptic quasilinear equations with nonstandard grow in a sequence of domains with a complex geometry. We study the homogenization of the following nonlinear eigenvalue problems:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) = \lambda_\varepsilon a_0\left(x, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) \quad \forall\, x \in \Omega^\varepsilon, \tag{1}$$

$$u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega^\varepsilon, \tag{2}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small positive parameter characterizing the scale of the microstructure; $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{F}^\varepsilon}$ is a perforated domain with Ω being a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ and $\mathcal{F}^\varepsilon$ being an open connected subset in Ω. We consider the operators with nonstandard growth conditions for instance the $p_\varepsilon(x)$-Laplacian and the anisotropic p-Laplacian. In the study of this problem the following question arises: to establish a possibility of approximation of problem (1), (2) by a simpler problem of the same type in a fixed domain. We derive the homogenized problem in the simple domain, describing the leading term of asymptotic of the solution in perforated domain. The homogenization of variational eigenvalue problems for the quasilinear elliptic operators p-Laplacian type was shown in [**1**]–[**4**].

The research was partially supported by RFBR grant 10-01-90900.

References

[1] Skrypnik I. V., Namleeva Yu. V., *The convergence of the eigenvalues and eigenfunctions to the nonlinear Dirichlet problems in domains with a finely granulated boundary*, Ukrainian Math. Journal, **55**, (2003), no. 6, 993–1011.

[2] Baffico L., Conca C., Rajesh M., *Homogenization of a class of nonlinear eigenvalue problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **136**, (2006), no. 1, 7–22.

[3] Champion T., De Pascale L., *Asymptotic behavior of non linear eigenvalue problems involving p-Laplacian type operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **137**, (2007), no. 6, 1179–1195.

[4] Drábek P., Namlyeyeva Yu., Nečasová Š., *Convergence of variational eigenvalues and eigenfunctions to the Dirichlet problem for the p-Laplacian in domains with fine-grained boundary*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A Mathematics, Vol. 140, no. 3, (2010), 573–596.

Qualitative properties for solutions to elliptic and parabolic equations with divergence-free lower-order coefficients

Nazarov A. I. (Saint-Petersburg University, Russia)
Ural'tseva N. N. (Saint-Petersburg University, Russia)

We consider uniformly elliptic and uniformly parabolic equations of divergence type:

$$\mathcal{L}u \equiv -D_i\big(a_{ij}(x)D_ju\big) + b_i(x)D_iu = 0;$$
$$\mathcal{M}u \equiv \partial_t u - D_i\big(a_{ij}(x;t)D_ju\big) + b_i(x;t)D_iu = 0$$

with additional structure condition

$$\operatorname{div}(b_i) \leq 0 \quad \text{in the sense of distributions.} \tag{1}$$

The equations with the lower-order coefficients satisfying this structure condition arise in some applications, in particular, in hydrodynamics.

We deal with classical properties of solutions, namely, strong maximum principle, Hölder estimates, the Harnack inequality and the Liouville Theorem. We show that under condition (1) the assumptions on (b_i) which ensure these properties can be considerably weakened in the scale of Morrey spaces.

The research was partially supported by grant NSh.4210.2010.1 and by RFBR grant 09-01-00729.

References

[1] Nazarov A. I., Ural'tseva N. N., *The Harnack inequality and related properties for solutions to elliptic and parabolic equations with divergence-free lower-order coefficients*, Algebra & Analysis, **23** (2011), No 1 (Russian). Translation is available at http://arxiv.org/abs/1011.1888.

Asymptotics of eigenvalues embedded into the continuous spectrum of a waveguide

Nazarov S. A. (Institute of Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St-Petersburg, Russia)

A new method will be described to construct asymptotics of eigenvalues and the corresponding trapped modes in a waveguide with an obstacle (acoustic and quantum waveguides, water-waves in channels). Since eigenvalues in the discrete spectrum are stable, there exist many approaches to construct and justify their asymptotics with respect to small perturbation parameters. On th other hand, if an eigenvalue is embedded into the continuous spectrum, it is no longer stable and a small perturbation may turn it into a point of complex resonance. This phenomenon crucially restricts variety of methods applicable to embedded eigenvalues and only a few results exist in this direction. On the base of notion of the augmented scattering matrix (Nazarov, Plamenevsky and Kamotskii), which implies an indicator of trapped modes, a new asymptotic method is developed to find out perturbations which still allow for an embedded eigenvalue. The description of these perturbations provides the enforced stability of embedded eigenvalues. The Wood anomalies are also interpreted in the framework of this approach.

References

[1] Nazarov S. A., *Eigenvalues of the Laplace operator with the Neumann conditions at regular perturbed walls of a waveguide*, Probl. mat. analiz. 2011, no. 53, 104–119. Novosibirsk. (English transl.: Journal of Math. Sci. (172) 2011, no. 4, 555–588).

[2] Nazarov S. A. *Asymptotics of eigenvalues embedded into the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide*, TMPh. 2011.

Positivity and general scheme of asymptotic method of differential inequalities for contrast structures in reaction-diffusion-advection problems

Nefedov N. N. (Lomonosov Moscow State University, Russia)

For some cases of initial boundary value problem for the equation

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \nabla u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N,\, t > 0, \tag{1}$$

which plays important role in many applications and is called reaction-diffusion-advection equation we state the conditions which imply the existence of contrast structures — solutions with internal layers. Particularly the cases when equation (1) is semilinear or quasylinear are considered. Among others we discuss the following problems:

1°. Existence and Lyapunov stability of stationary solutions.

2°. The analysis of local and global domain of stability of the stationary contrast structures.

3°. The problem of stabilization of the solution of initial boundary value problem.

Our investigations are based on asymptotic method of differential inequalities and general scheme of this method (see also [**1**]) will be presented. This scheme uses so-called positivity property of the operators producing formal asymptotics and is based on some recent extensions of Krein–Ruthman theorem (see, for example, [**2**, **3**]).

The research was supported by RFBR grant No 10-01-00319.

References

[1] Vasileva A. B., Butuzov V. F., Nefedov N. N. *Singularly Perturbed problems with Boundary and Internal Layers.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathmatics, 2010, Vol. 268, pp. 258–273.
[2] Hess P. *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity.* Pitman Res. Notes in Math. 1991. V. 247. Longman Scientific and Technical, Harlow.
[3] Nefedov N. N., Recke L., Scneider K. R. *Asymptotic stability via Krein–Ruthman Theorem for Singularly Perturbed Parabolic Periodic Dirichlet Problems.* Regular and Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, No 2-3, pp. 382–389.

Nonexistence of W-solutions for nonlinear high-order equations with L^1-data

Nicolosi F. (Department of Mathematics, University of Catania, ITALY)

We study conditions of nonexistence of weak solutions for nonlinear equations in divergence form of arbitrary order with L^1-data. We use the known principle of uniformly boundedness as a common functional tool.

Normal forms of generic transversal systems of infinite index

Ortiz-Bobadilla L. (National Autonomous University of Mexico)
Paziy N. (Chelyabinsk State University, Russia)
Rosales-Gonzalez E. (National Autonomous University of Mexico)

The purpose of this work is to study local analytic implicit, with respect to the first derivative, systems

$$A(x)\dot{x} = f(x), \quad x \in (\mathbb{C}^n, 0) \tag{1}$$

Definition 1. If the kernel of the matrix $A(0)$ is one dimensional and the vector $f(0)$ doesn't belong to the image of $A(0)$, then we say that the system (1) is a transversal one.

Definition 2. Let us denote $\alpha = \det A$, $\Gamma = \{\alpha = 0\}$, and let e be a vector field, generating the kernel of the matrix A in the points of Γ. Let $\alpha'(0) \neq 0$, and assume that the order of tangency, at the origin of coordinates, of the vector field e and the surface of degeneracies Γ is infinite (i. e, the derivatives $\partial^k\alpha/\partial e^k(0)$ are zero for every k). We say that a transversal system satisfying such properties has infinite index.

Definition 3. Two transversal systems are called (locally) analytically equivalent, if there exists a (local) analytic diffeomorphism transforming the solutions of one of them into the solutions of the other.

In the present work analytic normal forms of generic transversal systems of infinite index are obtained. The normal forms of transversal systems of finite index were obtained before in [**1**]–[**3**]. In [**4**] their orbital classification was studied.

Theorem 1. *A generic transversal system* (1) *of infinite index is locally analytically equivalent to the system*

1°. $v\dot{u} = 1$, $\dot{v} = 0$, *if* $n = 2$;
2°. $(w + uv)\dot{u} = 1$, $\dot{v} = 0$, $\dot{w} = 0$, *if* $n = 3$;

3°. $(v_1 + v_2 u + \cdots + v_{n-1}\, u^{n-2} + u^{n-1}\, \varphi(u, 'v))\, \dot{u} = 1$, $\dot{v} = 0$, *where* $(u, v) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}, 0)$, $'v = (v_2, \ldots, v_{n-1})$ *and* φ *is a germ of analytic function,* $\varphi(u, 0) \equiv 0$, *if* $n \geq 4$.

Using this theorem normal forms of generic systems with one constraint are obtained as well.

The work was supported by CONACyT 80065, PAPIIT IN103010.

References

[1] Guzmán Gómez A. M. *Constrained equations with impasse points* // J. Math. Anal. Appl. 214 (1997), no. 1, 292–306.

[2] Paziĭ N. D. *Normal forms of transversally singular quasilinear systems of Sobolev type.* (Russian) Differ. Uravn. 32 (1996), no. 6, 845–846; translation in Differential Equations 32 (1997), no. 6, 850–852.

[3] Paziĭ N. D. *Locally analytic classification of transversal systems of Sobolev type.* (Russian) Vestnik Chelyab. Univ. Ser. 3 Mat. Mekh. Inform. 2003, no. 3 (9), 124–137.

[4] Sotomayor J., Zhitomirskii M. *Impasse singularities of differential systems of the form* $A(x)\dot{x} = F(x)$ // Jour. Diff. Equat. 169 (2001), no. 2, 567–587.

New optimal interpolation theorem for operators, mapping couples of L_p spaces

Ovchinnikov V. I. (Voronezh State University, Russia)

We find an optimal interpolation theorem for the family of spaces of measurable function which includes classical Lorentz and Orlicz spaces. This family contains also some quasi-Banach spaces.

Definition 1. (see [**1**]) Suppose that $\{X_0, X_1\}$ is a Banach couple, φ is nondegenerate interpolation function, and $0 < p_0$, $p_1 \leq \infty$. The space $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ is defined to be the space of $x \in X_0 + X_1$ such that

$$\{K(w_m, x, \{X_0, X_1\})\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(w_m^{-1})),$$

where $\{w_m\}$ is a balanced sequence of $K(t, x, \{X_0, X_1\})$.

Recall that if $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$, then

$$K(t, x; \{X_0,\, X_1\}) = \inf_{x = x_0 + x_1} \|\, x_0\|_{X_0} + t\|\, x_1\|_{X_1},$$

where the infimum is taken over all representations of x as a sum of $x_0 \in X_0$ and $x_1 \in X_1$. This function is call the K-functional of $x \in X_0 + X_1$.

Theorem 1. *Let T be a linear operator which sends a couple of weighted L_p spaces $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ to a couple $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, where $1 \leq p_0,\, p_1,\, q_0,\, q_1 \leq \infty$, then*

$$T : \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0,s_1} \to \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0,t_1},$$

where $0 < s_0,\, s_1,\, t_0,\, t_1 \leq \infty$ *such that*

$$\frac{1}{t_0} = \frac{1}{s_0} + \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_0}\right)_+, \qquad \frac{1}{t_1} = \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)_+,$$

and $\varphi(u, v)$ *is an arbitrary nondegenerate interpolation function.*

This theorem is optimal in the following sense.

Theorem 2. *If the couple* $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ *is* K_0*-abundant (see* [**2**]*), then for any* $y \in \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{t_0,t_1}$ *there exist* $x \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{s_0,s_1}$ *and*

$$T : \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \to \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$$

such that $y = Tx$.

For the proofs we study the structure of the sets of K-functionals corresponding to the interpolation spaces $\varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$ and apply the description of interpolation orbits in couples of L_p spaces (see [**3**]).

The research was supported by RFBR grant no. 10-01-00276.

References

[1] Ovchinnikov V. I. *The quasi-normed Neumann–Schatten ideals and embedding theorems for the generalized Lions–Peetre spaces of means*, Algebra and Analysis, 22 (2010), no. 4, 214–231 (in Russian).

[2] Brudnyi Yu. A., Krugliak N. Ya., *Interpolation Functors and Interpolation Spaces I*, Amsterdam: North Holland, 1991.

[3] Ovchinnikov V. I. *Interpolation orbits in couples of* L_p *spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 334 (2002), 881–884.

Nonlinear Steklov eigenvalue problems in corrosion modeling

Pagani C. D. (Dipartimento di Matematica Politecnico di Milano, Italia)
Pierotti D. (Dipartimento di Matematica Politecnico di Milano, Italia)

We consider the problem of finding a harmonic function u in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, satisfying a nonlinear boundary condition of the form $\partial_\nu u(x) = \lambda\,\mu(x)h(u(x))$, $x \in \partial\Omega$ where μ changes sign and h is an increasing function with superlinear, subcritical growth at infinity. We study the solvability of the problem depending on the parameter λ by using min-max methods. In dimension 2 the special case $h(u) = e^{\alpha u} - e^{-(1-\alpha)u}$, $\alpha \in (0, 1)$ is of interest in problems of corrosion and is specifically considered, paying particular attention to the symmetric case $\alpha = 1/2$.

Asymptotic analysis for the steady Stokes equation with On properties of solutions of nonlinear ordinary differential equations variable viscosity in a two-dimensional tube structure

Panasenko G. P. (University of Lyon, France)

The result is obtained in collaboration with R. Fares and G. Cardone. Let $e_1, e_2, \ldots, e_n$ be n closed segments in $\mathbb{R}^2$, which have a single common point O (i. e. the origin of the coordinate system), and let it be the common end point of all these segments. Let $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ be n bounded segments in $\mathbb{R}^2$ containing the point O, the middle point of all segments, and such that β_j is orthogonal to e_j (for simplicity assume that the lenght $|\beta_j|$ of each β_j is equal to 1). Let β_j^ε be the image of β_j obtained by a homothetic contraction in $\frac{1}{\varepsilon}$ times with the center O. Denote $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ the open rectangles with the bases β_j^ε and with the heights e_j, denote also $\hat{\beta}_j^\varepsilon$ the second base of each rectangle $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ and let O_j be the end of the segment e_j which belongs to the base $\hat{\beta}_j^\varepsilon$. Define the bundle of segments e_j centered in O as $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^n e_j$. Denote below $O_0 = O$. Let γ_j^ε, $j = 0, 1, \ldots, n$, be the images of the bounded domains γ_j (such that $\bar{\gamma}_j$ contains the end of the segment O_j and is independent of ε) obtained by a homothetic contraction in $\frac{1}{\varepsilon}$ times with the center O_j. Define the tube structure ([**1**]) associated with the bundle $\mathcal{B}$ as a bounded domain: $\mathcal{B}^\varepsilon = \left(\bigcup_{j=1}^n \bar{\mathcal{B}}_j^\varepsilon\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^n \bar{\gamma}_j^\varepsilon\right)'$. Assume that $\partial\mathcal{B}^\varepsilon \in C^2$ (the result may be generalized for the case of the piecewise smooth boundary $\partial\mathcal{B}^\varepsilon$ with no reentrant corners). Assume that the bases $\hat{\beta}_j^\varepsilon$ of $\mathcal{B}_j^\varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$, are some parts of $\partial\mathcal{B}^\varepsilon$. Consider the problem:

$$-\mathrm{div}(\nu(x)\mathcal{D}u_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon = f(x), \quad \mathrm{div}\, u_\varepsilon = 0, \quad x \in \mathcal{B}^\varepsilon, \quad u_\varepsilon = g, \quad x \in \partial\mathcal{B}^\varepsilon.$$

Here $g = 0$ on the lateral boundary of the rectangles composing $\mathcal{B}^\varepsilon$; moreover $g = 0$ anywhere with the exception of the bases $\hat{\beta}_j^\varepsilon$ of the cylinders $\mathcal{B}_j^\varepsilon$ (these bases are assumed to belong to the boundary of the tube structure); $g \in C^2(\hat{\beta}_j^\varepsilon)$, and for each j, $g = \varepsilon^2 g_j(\frac{x-O_j}{\varepsilon})$ on $\hat{\beta}_j^\varepsilon$, the vector valued functions $g_j \in C^2$ do not depend on ε and let $\int_{\partial\mathcal{B}^\varepsilon} g.n\, ds = 0$. Introduce the local system of coordinates $Ox_1^{e_j}x_2^{e_j}$ associated with the segment e_j such that the direction of the axis $Ox_1^{e_j}$ coincides with the direction of the segment OO_j, i. e. $x_1^{e_j}$ is the longitudinal coordinate. The axes $Ox_1^{e_j}x_2^{e_j}$ form a cartesian coordinate system. We denote $d_0\varepsilon$ the infimum of radiuses of all spheres with the center O such that every point of it belongs only to not more than one of the rectangles $\mathcal{B}_j^\varepsilon$, $j = 0, 1, \ldots, n$ and d_1 is the maximal diameter of the domains $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$. We finally introduce the notation $\hat{d}_0\varepsilon = \max\{d_0\varepsilon, d_1\varepsilon\}$. Consider the right hand side vector valued function f "concentrated" in some neighborhoods of the nodes O_j and diffused in the cylinders, i. e. $f = \Phi_j\left(\frac{x-O_j}{\varepsilon}\right)$, if $|x - O_j| < \hat{d}_0\varepsilon$, $j = 0, \ldots, n$, and $f = f_j(x_1^{e_j})e_j$, if not. Here $f_j \in C_0^\infty([0, |e_j|])$, $\Phi_j \in C^1(Q)$, $(j = 0, 1, \ldots, n)$, where Q is a ball $|\xi| < \hat{d}_0$. Assume that $\nu(x) = \nu_0 + \nu_j(x_1^{e_j})$ such that $\nu_j(x_1^{e_j}) = 0$ for all $x_1^{e_j} \in [0, \beta] \cup [|e_j| - \beta; |e_j|]$, where β is a positive constant; $\nu \in C^2$ such that there exist $\kappa_0 \in \mathbb{R}^+$ such that $\nu(x) > \kappa_0$ for all $x \in \mathcal{B}^\varepsilon$. The complete asymptotic expansion of the solution to this problem is constructed and the error estimates are proved. The research was supported by the grants: MODMAD, Modeling blood diseases (CNRS).

References

[1] Panasenko G. P., *Multi-scale Modelling for Structures and Composites*, Springer, Dordrecht, 2005.

Noncommutative dynamical systems with two generators and their applications in analysis

Paneah B. (Technion, Israel)

In this talk we consider some new dynamical systems which are determined by a semigroup Φ of maps in a closed interval I. The main peculiarity of these systems is that Φ is generated by *two* noncommuting maps. Introducing certain closed subsets $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ in I makes it possible to determine some specific orbits and attractors in I corresponding to Φ. These orbits play a crucial role in solving a wide variety problems in such diverse fields of analysis as general linear functional operators, integral geometry, boundary problems for hyperbolic partial differential operators of higher (> 2) order. We first describe some conditions ensuring the existence of the required attractors. In the second part we formulate some new problems from the above-mentioned list and trace how our dynamic approach works when solving these problems.

On the Aharonov-Bohm operators

Pankrashkin K. (University Paris-Sud 11, France)

We review the spectral and the scattering theory for the Aharonov–Bohm model on R^2, i. e. for the Schrödinger operator with a δ-type magnetic field. New formulae for the wave operators and for the scattering operator are presented. The asymptotics at high and at low energy of the scattering operator are computed and a relationship between the number of the bound states and some characteristics of the wave operators are obtained (Levinson-type theorem).

Based on joint work with Serge Richard and Johannes Kellendonk.

References

[1] Kellendonk J., Pankrashkin K., Richard S., *Levinson's theorem and higher degree traces for Aharonov–Bohm operators*, Preprint 1012.3215 on arXiv.org.
[2] Pankrashkin K., Richard S., *Spectral and scattering theory for the Aharonov–Bohm operators*, Rev. Math. Phys. 23 (2011) 53–81.

Homogenization and concentration for a diffusion equation with large convection in a bounded domain

Pankratova I. (Narvik University College, Norway, and Ecole Polytechnique, France)

The talk will focus on the homogenization of a convection-diffusion equation with rapidly oscillating coefficients defined in a bounded domain. Namely, we consider the following initial boundary problem:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon}\, b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla u^\varepsilon = 0, & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ u^\varepsilon(t,x) = 0, & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$. We show that, in contrast with the equation stated in the whole space, u^ε vanishes exponentially for any $t \geq t_0$ with an arbitrary $t_0 > 0$. More precisely, for $t = O(\varepsilon)$ the initial profile of u^ε moves with the velocity $\varepsilon^{-1}\,\bar{b}$ in the direction of the effective convection $\bar{b}$, reaches the boundary of Ω and then dissipates rapidly. Hence, any finite number of terms in the asymptotic expansion vanish for $t \geq t_0$ with an arbitrary $t_0 > 0$. Our goal is to determine the rate of vanishing of u^ε, as $\varepsilon \to 0$, and to characterize the asymptotic profile of the properly rescaled solution.

This is a joint work with G. Allaire and A. Piatnitski.

On weak completeness of the set of entropy solutions to degenerate nonlinear parabolic equations

Panov E. Yu. (Novgorod State University, Russia)

In a strip $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}$, $T > 0$, we consider the nonlinear parabolic equation

$$u_t + \varphi(u)_x - g(u)_{xx} = 0, \tag{1}$$

$u = u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$. We assume that $\varphi(u), g(u) \in C(\mathbb{R})$ and the function $g(u)$ non-strictly increases.

Definition 1. A function $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi_T)$ is called an entropy solution (ES for short) of (1) if $g(u)_x \in L^2_{loc}(\Pi_T)$, and for each $k \in \mathbb{R}$

$$|u-k|_t + [\text{sign}(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))]_x - |g(u) - g(k)|_{xx} \le 0$$

in the sense of distributions on Π_T (in $\mathcal{D}'(\Pi_T)$).

In the case $g(u) \equiv 0$ Definition 1 reduces to the Kruzhkov's definition (see [**1**]) of ES to the conservation law

$$u_t + \varphi(u)_x = 0. \tag{2}$$

One of well-known applications of the Tartar–Murat compensated compactness method is the statement that a weak limit of a bounded sequence of ES of (2) is a weak solution of this equation (i. e., it satisfies (2) in $\mathcal{D}'(\Pi_T)$), see [**4**]. Recently, in [**2**], it was established that actually this weak limit is an ES of equation (2). Now, using the new compensated compactness theory developed in [**3**] and adapting the methods of [**2**], we extend the result of [**2**] to the case of parabolic equation (1). More precisely, assume that $u_n = u_n(t,x)$, $n \in \mathbb{N}$, is a bounded in $L^\infty(\Pi_T)$ sequence consisting of ES of approximate equations

$$u_t + \varphi_n(u)_x - g_n(u)_{xx} = 0, \tag{3}$$

where $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$, $g_n(u) \to g(u)$ in $C(\mathbb{R})$ as $n \to \infty$. Assume that $u_n \rightharpoonup u = u(t,x)$ as $n \to \infty$ weakly-$*$ in $L^\infty(\Pi_T)$.

Theorem 1. *The function $u(t,x)$ is an ES of equation* (1). *Moreover, this ES admits a strong trace $u_0(x)$ on the line $t = 0$ in the sense of relation*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0} u(t,\cdot) = u_0 \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Remark that in the case of several spatial variables the statement of Theorem 1 is no longer valid (cf. [**2**]).

This work was supported by RFBR grant 09-01-00490.

References

[1] Kruzhkov S. N., *First order quasilinear equations in several independent variables*, Mat. Sb. (N.S.), 81 (1970), 228–255 (English transl. in Math. USSR-Sb., 10 (1970), 217–243).

[2] Panov E. Yu., *On weak completeness of the set of entropy solutions to a scalar sonservation law*, SIAM J. Math. Anal. 41 (2009), no. 1, 26–36.

[3] Panov E. Yu., *Ultra-parabolic H-measures and compensated compactness*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire. 28 (2011), no. 1, 47–62.

[4] Tartar L., *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot–Watt Symposium, Vol. 4 (Edinburgh 1979), Res. Notes in Math. 39 (1979), 136–212.

Extremal spectral properties of Lawson τ-surfaces and the Lamé equation

Penskoi A. V. (Moscow State University, Independent University of Moscow, Bauman Moscow State Technical University, Russia)

Let M be a closed surface and g be a Riemannian metric on M. Let us consider the associated Laplace–Beltrami operator $\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$ and its eigenvalues

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \lambda_2(M,g) \leqslant \lambda_3(M,g) \leqslant \dots$$

It turns out that the question about the supremum of the functional $\Lambda_i(M,g) = \lambda_i(M,g)\mathrm{Area}(M,g)$ over the space of Riemannian metrics g on a fixed surface M is very difficult and only few results are known. The functional $\Lambda_i(M,g)$ depends continuously on the metric g, but this functional is not differentiable. However, it was shown by Berger in the paper [**1**] that for analytic deformations g_t the left and right derivatives of $\Lambda_i(M,g_t)$ with respect to t exist.

Definition 1 (Nadirashvili [**2**], El Soufi and Ilias [**3**]). A Riemannian metric g on a closed surface M is called extremal for the functional $\Lambda_i(M,g)$ if for any analytic deformation g_t such that $g_0 = g$ the following inequality holds,

$$\frac{d}{dt}\Lambda_i(M,g_t)\Big|_{t=0+} \leqslant 0 \leqslant \frac{d}{dt}\Lambda_i(M,g_t)\Big|_{t=0-}.$$

The list of surfaces M and values of index i such that the maximal or at least extremal metrics for the functional $\Lambda_i(M,g)$ are known is quite short (see the paper [**4**] for detailed references): $\Lambda_1(\mathbb{S}^2,g)$, $\Lambda_1(\mathbb{R}P^2,g)$, $\Lambda_1(\mathbb{T}^2,g)$, $\Lambda_1(\mathbb{K},g)$, $\Lambda_2(\mathbb{S}^2,g)$ and $\Lambda_i(\mathbb{T}^2,g)$, $\Lambda_i(\mathbb{K},g)$ for some particular values of i.

Definition 2 (Lawson [**5**]). A Lawson tau-surface $\tau_{m,k} \subset \mathbb{S}^3$ is defined by the doubly-periodic immersion $\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ given by the following explicit formula,

$$\Psi_{m,k}(x,y) = (\cos mx \cos y,\ \sin mx \cos y,\ \cos kx \sin y,\ \sin kx \sin y).$$

Lawson proved that for each unordered pair of positive integers (m,k) with $(m,k) = 1$ the surface $\tau_{m,k}$ is a distinct compact minimal surface in $\mathbb{S}^3$. Let us impose the condition $(m,k) = 1$. If both integers m and k are odd then $\tau_{m,k}$ is a torus. If one of integers m and k is even then $\tau_{m,k}$ is a Klein bottle. The torus $\tau_{1,1}$ is the Clifford torus.

Our main result is the following theorem from the paper [**4**]. The proof is based on the theory of periodic Sturm–Liouville problems and the theory of the Lamé equation.

Theorem 1. *Let $\tau_{m,k}$ be a Lawson torus. Then the induced metric on $\tau_{m,k}$ is an extremal metric for the functional $\Lambda_j(\mathbb{T}^2,g)$, where $j = 2\left(\left[\sqrt{m^2+k^2}\right] + m + k\right) - 1$. Let $\tau_{m,k}$ be a Lawson Klein bottle. Then the* *induced metric on $\tau_{m,k}$ is an extremal metric for the functional $\Lambda_j(\mathbb{K}, g)$, where $j = 2\left[\frac{\sqrt{m^2+k^2}}{2}\right] + m + k - 1$. The corresponding values of $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$, $\Lambda_j(\mathbb{K}, g)$ are given in the paper* [**4**].

References

[1] Berger M., *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes,* Compositio Math. 26 (1973), 129–149.

[2] Nadirashvili N., *Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces,* Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 5, 877–897.

[3] El Soufi A., Ilias S., *Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions.* Pacific J. Math. 195 (2000), no. 1, 91–99.

[4] Penskoi A. V., *Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation,* submitted to Moscow Math. J., preprint arXiv:1009.0285.

[5] Lawson H. B., *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. 92 (1970), 335–374.

On the large-time behaviour of solutions to fractional diffusion equations

Piatnitski A. (Lebedev Physical Institute RAS, Moscow, Russia, Narvik University College, Norway)

The talk will focus on the asymptotic behaviour of solutions to a time-fractional diffusion equation of the form

$$\begin{aligned}
&\partial_t^\alpha u_\varepsilon = \operatorname{div}\big((a(x)\nabla u\big), && (x,t) \in Q \times \mathbb{R}^+,\\
&\frac{\partial u}{\partial n_a} = 0 && x \in \partial Q,\\
&u(x,0) = f(x), \quad \partial_t u(x,0) = g(x) && x \in Q,
\end{aligned}$$

stated in a smooth bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^n$; by ∂_t^α we denote the fractional Caputo derivative in time variable of order α with $\alpha \in (1,2)$.

We show that under natural uniform ellipticity assumptions on the matrix a, a solution u of the studied problem approaches a linear function $u_0(t) = At + B$. Moreover, the convergence is power-law, that is

$$\|u(\cdot,t) - u_0(t)\|_{L^2(Q)} \le Ct^{1-\alpha}, \qquad t \in (1, +\infty),$$

for some $C > 0$.

This is a joint work with K. Ruotsalainen (Oulu, Finland).

The dichotomy in approximations of abstract parabolic equations

Piskarev S. I. (Lomonosov Moscow State University, Russia)

This talk is devoted to the numerical analysis of abstract semilinear parabolic problem in some general Banach space E

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u^0,$$

where the operator A generates analytic C_0-semigroup and $f(\cdot) : E^\alpha \subseteq E \to E$, $0 \le \alpha < 1$, is assumed to be continuous, bounded and continuously Fréchet differentiable function. More precisely we assume that the following condition holds: for any $\epsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that $\|f'(w) - f'(z)\|_{B(E^\alpha,E)} \le \epsilon$ as

$\|w - z\|_{E^\alpha} \leq \delta$ for all $w, z \in U_{E^\alpha}(u^*; \rho)$, where u^* is a hyperbolic equilibrium point of the main problem.

We are developing a general approach to establish a discrete dichotomy in a very general setting and prove shadowing Theorems that compare solutions of the continuous problem with those of discrete approximation in time and space variables. It is well-known fact (see [**1**], [**2**], [**3**], [**5**]) that the phase space in the neighborhood of the hyperbolic equilibrium can be split in a such way that the original initial value problem is reduced to initial value problems with exponential decaying solutions in opposite time direction.

We use the theory of compact approximation principle and collectively condensing approximation to show that such a decomposition of the flow persists under rather general approximation schemes. The considerations are based on Baskakov's approach.

In [**4**] a general framework was developed that allows to analyze convergence properties of numerical discretizations in a unifying way. We consider discretizations on a general approximation scheme following G. Vainikko. The main assumption of our results are naturally satisfied, in particular, for operators with compact resolvents and condensing semigroups and can be verified for finite element as well as finite difference methods.

The research was supported by RFBR grant 11-01-90401.

References

[1] Beyn W.-J., *Numerical methods for dynamical systems*, Advances in numerical analysis, Vol. I (Lancaster, 1990), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991, 175–236.

[2] Beyn W.-J., Piskarev S., *Shadowing for discrete approximation abstract parabolic equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 10, 2008, no. 1, 19–42.

[3] Larsson S., Sanz-Serna J.-M., *A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations*, Math. Comp. 68 (1999), no. 225, 55–72.

[4] Piskarev S., *Differential equations in Banach space and their approximation*, Moscow State University Publish House, Moscow 2005.

[5] van der Mee Cornelis, *Exponentially dichotomous operators and applications*, Operator Theory: Advances and Applications 182. Birkhauser, Basel 2008.

On a method for computing waveguide scattering matrices in the presence of discrete spectrum

Plamenevskii B. A. (St. Petersburg State University, Russia)

Let G be a domain in $\mathbb{R}^2$ that coincides outside a large circle with the union of finitely many non-overlapping semi-strips ("cylindrical ends"). A waveguide is modeled by the Dirichlet problem for the Helmholtz equation in G with spectral parameter μ. As approximation to a row of the scattering matrix $S(\mu)$, we choose the minimizer $a(R, \mu)$ of a quadratic functional $a \mapsto J^R(a, \mu)$. To define such a functional, we solve a certain auxiliary boundary value problem in the bounded domain G^R obtained by cutting off the cylindrical ends at distance R. We prove that, as $R \to \infty$, the minimizer $a(R, \mu)$ tends to the corresponding row of $S(\mu)$ with exponential rate uniformly with respect to μ in any finite closed interval $[\mu_1, \mu_2]$ of the continuous spectrum not containing thresholds; in doing so, we do not exclude the presence of eigenvalues of the waveguide in $[\mu_1, \mu_2]$ (to the eigenvalues there correspond eigenfunctions exponentially decaying at infinity). The applicability of the method goes far beyond the above simplest model.

The method for computing scattering matrices was suggested in [**1**]. The outline of the proof given there is valid under the restriction that the interval $[\mu_1, \mu_2]$ contains no eigenvalues of the waveguide. The justification of the method without such a restriction was given for the first time in [**2**].

The talk is based on the joint work with O. V. Sarafanov.

The research was supported by grant RFBR-09-01-00191-a.

References

[1] Grikurov V., Heikkola E., Neittaanmäki P., Plamenevskii B., *On computation of scattering matrices and on surface waves for diffraction gratings*, Numer. Math., 94 (2003), no. 2, 269–288.

[2] Plamenevskii B. A, Sarafanov O. V., *On a method for computing waveguide scattering matrices*, Algebra and Analysis, 23 (2011), no. 1, 1–32.

Modelling Nonlinear Hydroelastic Waves

Plotnikov P. I. (Lavryentyev Institute of Hydrodynamics, Russia)

We use the special Cosserat theory of shells satisfying Kirchoff's hypothesis and incompressible flow theory to model the interaction between an elastic sheet and an infinite ocean for which it forms the top surface. From a general discussion of three-dimensional motions, involving an Eulerian description of the flow and a Lagrangian description of the elastic sheet, a special case of two-dimensional travelling waves which propagate without changing shape on the surface of a fluid that moves under gravity, bounded above by a heavy, frictionless, thin (unshearable) elastic sheet. The sheet stays in contact with the zero streamline of the flow and is deformed by internal elastic forces and couples, and inertial forces and gravity, according to the laws of elasticity. The flow, which is supposed irrotational, is at rest at infinite depth and its velocity is stationary relative to a frame moving with the wave. Therefore the pressure exerted by the fluid at a steady streamline depends on its height and the fluid velocity. This work studies the balancing of these elastic and hydrodynamic effects to produce a steady hydroelastic wave.

To do so, it is supposed that the surface membrane is hyperelastic, with a stored energy function that depends on the stretch, the stretch-gradient, and the curvature of the membrane. The problem is then formulated as one for critical points of a Lagrangian. It is notable that the stored energy for travelling waves may be non-convex in the stretch even when the stored energy of the material at rest is convex. The existence of waves is proved by maximizing the Lagrangian in the presence of strain-gradient effects. An understanding of the limiting process, as the coefficient of the strain-gradient term in the elastic energy tends to zero, is the purpose of this investigation. Our main result is a detailed description of the Young measure that arises as a limit of a sequence of maximizers as the strain-gradient coefficient tends to zero.

Classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds

Pochinka O. V. (Nizhny Novgorod State University, Russia)

This report is devoted to an exposition of results obtained by the author in collaboration with C. Bonatti, and V. Z. Grines.

Morse–Smale diffeomorphisms have a finite hyperbolic nonwandering set and transversal intersection of stable and unstable manifolds of periodic points (similar to structural stable flow on surfaces). They are structurally stable, have zero topological entropy, exist on any manifolds and their dynamic properties are closely related to the topology of the ambient manifold. To date, due to results of A. Bezdenezhnyh, C. Bonatti, V. Grines, R. Langevin, considerable progress has been made in the classification of Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces. In the simplest case, when diffeomorphism is gradient-like (without heteroclinic intersections) the complete topological invariant given by a distinguishing graph (similar to Leontovich–Mayer scheme and Peixoto graph for flows). Obstruction for such combinatorial invariants in dimension 3 is a possibility of wild embedded separatrices of saddle periodic points even for diffeomorphisms with one saddle point, found by D. Pixton.

Thus it is necessary to use other approaches, catching a topology of embedding of separatrices. Then the dynamics of arbitrary Morse–Smale diffeomorphism f on 3-manifold M is represented as a "source-sink", where the roles of the source and sink are played by one-dimensional attractor A and repeller R, all points different from $A \cup R$ are wandering points and move under the diffeomorphism from the source to the sink. Topological structure of the orbit space $\hat{V}$ of the wandering set $V = M \setminus (A \cup R)$ together with the embedded images of the invariant manifolds of saddle periodic points is complete topological invariants. Moreover, this approach allows to realize diffeomorphisms within the class under consideration. This report generalizes papers [**1**]–[**3**], where classification of Morse–Smale diffeomorphisms of 3-manifolds under various generality assumptions was obtained.

The research was supported by RFBR grant 11-01-00730 and grant of government of Russian Federation 11.G34.31.0039.

References

[1] Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E., *Topological Classification of Gradient-like Diffeomorphisms on 3-Manifolds*, Topology 43 (2004), 369–391.

[2] Bonatti C., Grines V. Z., Pochinka O. V., *Classification of Morse–Smale Diffeomorphisms with a Finite Set of Heteroclinic Orbits on 3-Manifolds*, Tr. Mat. Inst. im. V. A. Steklova, Ross. Akad. Nauk 250 (2005), 5–53.

[3] Bonatti C., Grines V. Z., Pochinka O. V., *Classification of Morse–Smale Diffeomorphisms with the Chain of Saddles on 3-Manifolds*, Foliations 2005 (World Sci., Hackensack, NJ, 2006), 121–147.

On location of spectrum and absence of the basis property in the system of root functions of a variable slope derivative problem

Polosin A. A. (Moscow State University, Russia)

A spectral slope derivative problem for the Laplace operator in a unit disk D:

$$\Delta u + \mu^2 u = 0, (r, \varphi) \in D, \qquad (1)$$

$$(ru_r + ku_\varphi)_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

where k is a real nonzero number, was studied in [**1**]; it was proved that the spectrum does not lie in the Carleman parabola and the root functions do not form a basis in any $L_p(D)$, $p > 1$.

THEOREM 1. *The results of* [**1**] *remain true in the case of a variable non-degenerating angle of the slope, i. e. when $k = k(\varphi)$ is a continuous 2π-periodic sign-preserving function.*

This work was supported by the Federal Task Program "Scientific and Pedagogical Staff of Innovational Russia"' for 2009–2013 and the Program for Support of Leading Scientific Schools (project no. NSh-7332.2010.9).

References

[1] Ilyin V. A., Moiseev E. I. *The system of eigenfunctions of a slope derivative problem is not a basis*, Differentsialnye uravneniya, 1994, v. 30, no. 1, 128–143.

Operator extension theory model for EM field-electron interaction

Popov I. Yu. (St.-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Russia)

The self-adjoint Maxwell operator in the space $L_2(\mathbb{R}^3)$ is as follows [**1**]. Let E and B be, correspondingly, the electric and magnetic fields. These vector fields should satisfy the conditions

$$\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{1}$$

Then, the Maxwell operator acts on six-dimensional vector field as

$$H_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}\mu^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Here electric and magnetic susceptibilities, $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ are smooth, strictly positive, bounded functions of x ($\varepsilon, \mu \in C^1(\mathbb{R}^3)$, the bounded continuous functions with bounded continuous derivatives), $\boldsymbol{\epsilon}$ is the Levi–Chivita tensor density ($\epsilon_{123} = 1$ and $\boldsymbol{\epsilon}$ is antisymmetric in all indices), $\boldsymbol{p} = -i\nabla$ is the momentum operator. In the present paper we consider the vacuum case and normalize values of ε and μ to unity. The operator H_1 defined on smooth functions is essentially self-adjoint. We denote its closure by the same letter (H_1). To construct generalized point interaction for the Maxwell operator it is necessary to extend the initial state L_2 to the Pontryagin space Π.

Consider also quantum electron, i. e. let $H_2 = -\Delta + V$ be the Schrodinger operator in $L_2(\mathbb{R}^3)$. To switch on an interaction between the EM field and the electron we use the "restriction-extension" procedure for the operator $H_1 \oplus H_2$. As a result, we construct a model operator H with point-like interaction between quantum electron and classical EM field.

THEOREM 1. *The dispersion equation for the model operator takes the form*

$$(\Gamma_{11} - D_1(z))(\Gamma_{12} - D_2(z)) - |\Gamma_{12}| = 0,$$

$$D_1(z) = \left(\frac{I + zH_1}{H_1 - zI}\varphi_1, \varphi_1\right), \quad D_2(z) = \lim_{x\to 0}(R_2(x,0,z) - (4\pi|x|)^{-1}),$$
$$H_1^*\varphi_1 = i\varphi_1,$$

Γ_{ij}, $i = 1, 2$, *are model parameters related with the strength of interaction...*

Let H_2 have non-empty point spectrum. The model allows one to find the electron spectrum shift due to the EM field influence.

The research was partially supported by RFBR grant 11-08-00267.

References

[1] Dorren H. J. S., Tip A., *Maxwell's equations for nonsmooth media; fractal-shaped and pointlike objects*, J. Math. Phys. 32 (1991), no. 11, 3060–3070.

Stabilization to a non-stationary solution for the 3D Navier–Stokes equations by initial control

Pribyl' M. A. (Scientific Research Institute for System Studies of RAS, Russia)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a connected bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega \in C^\infty$. Consider the Navier–Stokes equations:

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = f(t,x), \;\; \operatorname{div} v(t,x) = 0, \tag{1}$$
$$v(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

with the initial condition

$$v(t,x)|_{t=0} = v_0(x) + u(x), \;\; x \in \Omega. \tag{3}$$

Here $v(t,x) = (v_1, v_2, v_3)$ is a velocity of fluid flow, $p(t,x)$ is a pressure, $f(t,x) = (f_1, f_2, f_3)$ is a given right side, and $u(x)$ is a control supported in a given fixed subdomain $\omega \subset \Omega$. All functions in the equations (1), (2) are periodic in t with a period T.

We will use the following spaces of solenoidal vector fields:

$$V^k(\Omega) = \{v(x) \in (H^k(\Omega))^3 : \operatorname{div} = 0\}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$V_0^1(\Omega) = V^1(\Omega) \cap (H_0^1(\Omega))^3,$$
$$V_{00}^1(\omega) = \{w \in V_0^1(\Omega) : \; w(x) = 0 \; \forall x \in \Omega \setminus \omega\}.$$

Let $(\hat{v}(t,x), \hat{p}(t,x))$ be a smooth solution of the Navier–Stokes system (1), (2). The problem of stabilization a solution of (1)–(3) with the rate $\sigma_0 > 0$ is to construct a control $u(x)$ with $\operatorname{supp} u \subset \omega$ such that the solution $v(t,x)$ of boundary value problem (1)–(3) satisfies:

$$\|v(t,\cdot) - \hat{v}(t,\cdot)\|_{V_0^1(\Omega)} \le Ce^{-\sigma_0 t}\|v_0 - \hat{v}(0)\|_{V_0^1(\Omega)}, \qquad t \ge 0. \tag{4}$$

Theorem 1. *There exists a control $u \in V_{00}^1(\omega)$ that $v(t,x)$ satisfies the estimate* (4).

The stabilization for the Navier–Stokes equations by feedback boundary control was well studied in [**1**], [**2**]. In these papers the solution $\hat{v}$ was stationary. The aim of this work is to establish a similar result in the case when the solution $\hat{v}$ depends on time.

The research was supported by RFBR grant 10-01-00136.

References

[1] Fursikov A. V. *Stabilizability of two-dimensional Navier–Stokes equations with help of a boundary feedback control*, J. Math. Fluid. Mech. 3 (2001), no. 3, 259–301.
[2] Fursikov A. V. *Stabilization for the 3D Navier–Stokes system by feedback boundary control*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 10 (2004), no. 1-2, 289–314.

Maximal semidefinite invariant subspaces for J-dissipative operators

Pyatkov S. G. (Yugra State University, Sobolev Institute of Mathematics, Russia)

We consider the question of existence of invariant semidefinite invariant subspaces for J-dissipative operators defined in a Krein space. Recall that a Krein space is a Hilbert space H with an inner product $(\cdot,\cdot)$ in addition endowed with an indefinite inner product of the form $[x,y]=(Jx,y)$, where $J=P^+-P^-$ ($P^\pm$ are orthoprojections in H, $P^++P^-=I$). A subspace M in H is said to be nonnegative (positive, uniformly positive) if the inequality $[x,x]\geq 0$ ($[x,x]>0$, $[x,x]\geq\delta\|x\|^2$ ($\delta>0$)) holds for all $x\in M$. Nonpositive, negative, uniformly negative subspaces in H are defined in a similar way. The main question under consideration here is the question on existence of semidefinite (i. e. of a definite sign) invariant subspaces for a given J-dissipative operator in a Krein space (by a J-dissipative operator we mean an operator dissipative with respect to the indefinite inner product $[\cdot,\cdot]$). We describe some sufficient conditions for a J-dissipative operator in a Krein space to have maximal semidefinite invariant subspaces. The semigroup properties of the restrictions of an operator to these subspaces are studied. Applications are given to the case when an operator admits matrix representation with respect to the canonical decomposition of the space. The main conditions are given in the terms of the interpolation theory of Banach spaces. Given a J-dissipative operator $L:H\to H$ (H is a Krein space), the main conditions look like $(H_1,H_{-1})_{1/2,2}=H$, where $H_1=D(L)$, H_{-1} is a completion of H with respect to the norm $\|(L-\lambda I)^{-1}u\|$, where $\lambda\in\rho(L)$. We present also sufficient conditions ensuring interpolation equalities of this type and some applications to the study of some singular differential operators of the form

$$Lu=\frac{\operatorname{sgn}x}{\omega(x)}(u_{xx}-q(x)u),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Assuming that

1°. $\omega,q\in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, $\omega>0$ and $q\geq 0$ almost everywhere on $\mathbb{R}$ and $\omega\notin L_1(\mathbb{R})$,
2°. there exists a constant $\delta>0$ such that $q+\omega\geq\delta/(1+x^2)$,
3°. $\mu(\{x\in\mathbb{R}:q(x)\neq 0\})>0$,

and some regularity of the weight function ω near zero, we prove that the operator L (which is J-selfadjoint J-nonpositive in a Krein space $L_{2,\omega}(\mathbb{R})$ with the norm $\|u\|=\|\sqrt{\omega}u\|_{L_2(\mathbb{R})}$ and $Ju=\operatorname{sign}u$) has maximal nonnegative and nonpositive invariant subspaces and is similar to a selfadjoint operator in $L_{2,\omega}(\mathbb{R})$.

Reduction principle in the theory of stability of impulsive equations

Reinfelds A. (Institute of Mathematics and Computer Science of University of Latvia, Latvia)

Consider the following system of impulsive differential equations in Banach space $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$:

$$\begin{cases} dx/dt = A(t)x + f(t,x,y), \\ dy/dt = B(t)y + g(t,x,y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0), y(\tau_i-0)), \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} = y(\tau_i+0) - y(\tau_i-0) = D_i y(\tau_i-0) + q_i(x(\tau_i-0), y(\tau_i-0)), \end{cases} \tag{1}$$

satisfying the *conditions of separation*

$$\nu = \max\left(\sup_s \left(\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||X(t,s)|\,dt + \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)||X(\tau_i-0,s)|\right),\right.$$
$$\left.\sup_s \left(\int_{s}^{+\infty} |X(s,t)||Y(t,s)|\,dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||Y(\tau_i-0,s)|\right)\right) < +\infty,$$

and $f(t,\cdot)$, $g(t,\cdot)$, p_i, q_i are ε-Lipshitz, $f(t,0,0) = p_i(0,0) = 0$, $g(t,0,0) = q_i(0,0) = 0$.

Theorem 1. *If $4\varepsilon\nu < 1$, then there exists a unique piecewise continuous map with respect to t satisfying the following properties: $u(t, x(t,s,x,u(s,x))) = y(t,s,x,u(s,x))$ for $t \ge s$, $|u(s,x) - u(s,x')| \le k|x-x'|$ and $u(t,0) = 0$.*

Theorem 2. *Let $4\varepsilon\nu < 1$. Then for every solution $(x(\cdot), y(\cdot))\colon [s,+\infty) \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ of the impulsive system* (1) *there is such solution $\zeta(\cdot)\colon [s,+\infty) \to \mathbf{X}$ of the impulsive system*

$$\begin{cases} dx/dt = A(t)x + f(t,x,u(t,x)), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} = C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0), u(\tau_i-0, y(\tau_i-0))), \end{cases} \tag{2}$$

that for all $t \ge s$ fulfils the estimate $|\zeta(t) - x(t)| \le k_1 |y(t) - u(t,x(t))|$.

We assume in addition that

$$\mu = \sup_s \left(\int_s^{+\infty} |Y(t,s)|\,dt + \sum_{\tau_i > s} |Y(\tau_i-0,s)|\right) < +\infty.$$

Theorem 3 (Reduction principle). *Let $4\nu\varepsilon < 1$ and $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1-4\varepsilon\nu}$. The trivial solution of impulsive system* (1) *is integrable stable, integrable asymptotically stable or integrable nonstable if and only if the trivial solution of impulsive system* (2) *is integrable stable, integrable asymptotically stable or integrable nonstable.*

The research was supported by the grant 09.1220 of the Latvian Council of Science and by the grant 2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008 of the European Social Fund.

References

[1] Pliss V. A., *A reduction principle in the theory of stability of motion*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 28 (1964), no. 6, 1297–1324 (Russian).

[2] Reinfelds A., Janglajew K. *Reduction principle in the theory of stability of difference equations*, Discrete Cont. Dyn. Syst. Suppl. (2007), 864–874.

On nonlinear heat conduction in doubly periodic 2D composite materials

Rogosin S. V. (Belarusian State University, Minsk, Belarus)

It is given an analytic solution to heat conduction problem in 2D unbounded doubly periodic composite materials with temperature dependent conductivities of its components (matrix and inclusions). Linear boundary value problem for a quasi-linear differential equation is reduced to the non-linear boundary value problem for Laplace equation. By introducing complex potentials, the later is reduced to a nonlinear boundary value problem for doubly periodic analytic functions. This problem is investigated via application of a combination of the method of functional equations and the method of the successive approximation. Detailed description of a new algorithm for the construction of any level approximate solution to the starting problem is given.

The report is based on the joint work with G. Mishuris (Aberystwyth University, UK) and E. Pesetskaya (A. Razmadze Institute of Mathematics, Georgia). The work is partially supported by Royal Society 2010/R2 Travel for Collaboration grant 45239 and Belarusian Fund for Fundamental Scientific Research.

Estimates of solutions of linear neutron transport equation at large time and spectral singularities

Romanov R. (St. Petersburg State University, Russia)

We analyze the large time asymptotics for the linear neutron transport equation,

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x,\mu) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}u_t(x,\mu) + c(x)\int_{-1}^{1} K(\mu,\mu')u_t(x,\mu')\,d\mu', \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}$, $\mu \in [-1,1]$. Our main result is that the contribution of the essential spectrum of the corresponding generator in the asymptotics of u_t at $t \to \infty$ is polynomially bounded in the L^2-norm if the kernel K is polynomial in μ, μ', and admits a sharp linear bound if the kernel K is constant (isotropic scattering). In the process we prove finiteness of the discrete spectrum and of the set of spectral singularities, thus generalizing earlier results by Lehner and Wing [**1, 2**] and ourself [**3**] to the non-isotropic case. The proofs are based on analysis of the Szökefalvi-Nagy–Foiaş functional model of the generator.

The research was supported by RFBR grant 09-01-00515-a.

References

[1] J. Lehner, *The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab*, J. Math. Mech. 11 (1962), no. 2, 173–181.

[2] J. Lehner and G. Wing, *On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons*, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 217–234.

[3] Yu. Kuperin, S. Naboko and R. Romanov, *Spectral analysis of the transport operator: a functional model approach*, Indiana Univ. Math. J. 51 (2002), no. 6, 1389–1425.
[4] R. Romanov, *Estimates of solutions of linear Boltzmann equation at large time and spectral singularities*, arXiv preprint arxiv.org/abs/1007.2799.

On the Gårding inequality for a class of functional differential equations

Rossovskii L. E. (Peoples' Friendship University of Russia, Russia)
Tasevich A. L. (Peoples' Friendship University of Russia, Russia)

Let $q > 1$ and Ω be a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^n$ such that $\overline{\Omega} \subset q\Omega$. We consider the following functional differential operator in Ω:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^\alpha \Big[a_{\alpha\beta 0}(x)D^\beta u(x)+ \\ +a_{\alpha\beta 1}(x)D^\beta u(q^{-1}x) + a_{\alpha\beta,-1}(x)D^\beta u(qx)\Big], \quad (1)$$

where the coefficients $a_{\alpha\beta j}(x)$ are smooth functions in $\overline{\Omega}$, and establish some necessary conditions and sufficient conditions for the Gårding-type inequality

$$\mathrm{Re}(Au,u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)). \quad (2)$$

If A is a differential operator (e. g., $a_{\alpha\beta 1} = a_{\alpha\beta,-1} = 0$ in (1)), then (2) is a synonym of strong ellipticity [**1**]. For a broader class of operators, inequality (2) guarantees the Fredholm solvability as well as discreteness and sectorial structure of the spectrum of the Dirichlét problem for the equation $Au = f$ in $L_2(\Omega)$. Fulfilment of (2) in the case of differential-difference equations was studied in [**2**].

Theorem 1. *Let inequality* (2) *hold for the operator A given by formula* (1). *Then the self-adjoint part of the operator*

$$v(x) \mapsto \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}\left[a_{\alpha\beta 0}(x)v(x) + a_{\alpha\beta 1}(x)v(q^{-1}x) + a_{\alpha\beta,-1}(x)v(qx)\right]$$

is positive definite in $L_2(\Omega)$ for all $\xi \in S^{n-1}$.

Introduce the notations $a_{\alpha\beta}(x) = \mathrm{Re}\, a_{\alpha\beta 0}(x)$, $b_{\alpha\beta}(x) = (a_{\alpha\beta 1}(x) + q^{-n}\bar{a}_{\alpha\beta,-1}(q^{-1}x))/2$,

$$a(x,\xi) = \sum a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}, \quad b(x,\xi) = \sum b_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta},$$
$$r(x,\xi) = \frac{q^n b(x,\xi)}{\sqrt{a(x,\xi)a(q^{-1}x,\xi)}}$$

(the summation is over all $|\alpha|,|\beta| = m$). It is a simple consequence of Theorem 1 that $a(x,\xi)$ is positive in $\overline{\Omega}$.

Theorem 2. *If there exists a smooth function $\delta(x,\xi)$ such that $0 < \delta(x,\xi) < 1$ and*

$$r(x,\xi) < \delta(x,\xi)\left(1 - \delta(q^{-1}x,\xi)\right) \quad (x \in \overline{\Omega}, \xi \in S^{n-1}),$$

then inequality (2) *holds for the operator A given by* (1).

Corollary 1. *If $r(x,\xi) < 1/4$ for $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in S^{n-1}$, then A satisfies* (2).

It should be noted that the condition $r(\xi) < 1/4$ coincides with the necessary condition from Theorem 1 in the case where the coefficients $a_{\alpha\beta j}(x)$ are constants [**3**].

The research was supported by RFBR grant 10-01-00395-a.

References

[1] Vishik M. I., *Strongly elliptic systems of differential equations*, Mat. Sb. 29 (1951), no. 3, 615–676.

[2] Skubachevskii A. L., *The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations*, J. of Differential Equations 63 (1986), 332–361.

[3] Rossovskii L. E., *Spectral properties of functional-differential operators and a Gårding-type inequality*, Doklady Mathematics 82 (2010), no. 2, 765–768.

On formation of singularity from smooth initial data for the pressureless gas dynamics

Rozanova O. S. (Moscow State University, Russia)

As is known, smooth solutions to the pressureless gas dynamics system

$$\partial_t \rho + \operatorname*{div}_x(\rho u) = 0, \qquad \partial_t(\rho u) + \nabla_x(\rho u \otimes u) = 0, \tag{1}$$

for the density $\rho(t,x)$ and velocity $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, can be obtained as limits as $\sigma \to 0$ of solutions to the regularized system

$$\frac{\partial \rho_\sigma}{\partial t} + \operatorname*{div}_x(\rho_\sigma u_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_\sigma}{\partial x_k^2},$$

$$\frac{\partial(\rho_\sigma u_{\sigma,i})}{\partial t} + \operatorname*{div}_x(\rho_\sigma\, u_{\sigma,i}\, u_\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2(\rho_\sigma u_{\sigma,i})}{\partial x_k^2},$$

$i = 1, \dots, n$. The formulae, obtained in [**1**], allow to study the process of formation of delta-singularity from smooth initial data. For example, in 1D case we get the following result.

THEOREM 1. *Let the initial data* (ρ_0, u_0) *for the system* (1) *be at least* C^m*-smooth and bounded,* $m \geq 2$*. Assume that there is an instant* $0 < t_* < \infty$*, such that* $t_* = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{u_0'(x)}\right)$ *and* $u^{(k)}(s_*) = 0$*,* $k = 1, ..., m-1$*, however* $u^{(m)}(s_*)$ *does not vanish at the point* $s_*(t_*, x_*)$*, where* s_* *is a solution to the equation* $u_0(s)\, t_* = x_* - s$*. Here* x_* *is such that the line* $y = \frac{x_* - s}{t_*}$ *intersects the graph of the initial velocity* $y = u_0(s)$ *at a unique point and it is tangent to the graph. Then*

$$\rho_\sigma(t_*, x_*) \;\sim\; B(x_*, t_*)\; \rho_0(s_*)\, \sigma^{-\frac{m-1}{m}},\; \sigma \to 0,$$

where

$$B(x_*, t_*) \;=\; K_m\, \frac{|u_0'(s_*)|^{\frac{m-1}{2m}}}{|u_0^{(m)}(s_*)|^{\frac{1}{m}}},$$

$$K_m \;=\; \frac{1}{2^{\frac{m-1}{2m}}\, m\sqrt{\pi}}\, (m!)^{\frac{1}{m}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{e}\, m + O(\ln m), \quad m \to \infty.$$

Theorem 2 (Amplitude of the δ-function). *Assume that the C^1-smooth initial datum $u_0(x)$ is linear on the segment $\Omega = (x_1, x_2)$, moreover, the second left-hand derivative $u_0''(x_1 - 0)$ at the point x_1 and the second right-hand derivative $u_0''(x_2 + 0)$ at the point x_2 do not vanish. Let x_* be the unique point such that the line $y = \frac{x_* - s}{t_*}$ and the graph of the initial velocity $y = u_0(s)$ have a common linear segment $\bar{\Omega} = [s_1, s_2]$. Then at the moment $t = t_*$ at the point $x = x_*$ the component of the density develops a δ-singularity of amplitude $A(x_*) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \rho_0(s)\,ds$.*

Under the assumptions of Theorem 1

$$\rho_\sigma(t_*, x_*) \sim \sigma^{\frac{1}{m}}\, M(x_*, t_*, m)\, \rho_0(s_*)\, R_\sigma(t_*, x_*), \quad \sigma \to 0,$$

where $M(x_*, t_*, m)$ is a constant depending only on the properties of u_0 and $R_\sigma(t_*, x_*)$ tends to $\delta(x - x_*)$ as $\sigma \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Thus, the δ-function, arising from smooth initial data without linear segments in the velocity component, has initially a zero amplitude.

Supported by the project DFG 436 RUS 113/823/0-1 and the special program of the Ministry of Education of the Russian Federation, project 2.1.1/1399.

References

[1] S. Albeverio, A. Korshunova and O. Rozanova, Probabilistic model associated with the pressureless gas dynamics, submitted, arXiv:0908.2084.

Computer simulation of the confluence of the free boundaries in the spherically symmetric model of the phase field system

Rudnev V. Yu. (Moscow Technical University of Communications and Informatics, Russia)

We numerically research the solutions of the phase field system for the spherically symmetric Stefan–Gibbs–Thomson problem in the case of interaction of the free boundaries.

We consider the phase field system

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} = -r\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \varepsilon L u = \frac{u - u^3}{\varepsilon} + \varkappa \frac{\sigma}{r}, \tag{1}$$

where $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$, the function σ has the meaning of the temperature, u is the order function. Passing to the limit as $\varepsilon \to 0$ in (1) we obtain the Stefan–Gibbs–Thomson problem for the each free boundary $\hat{r}_i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \overline{\sigma}}{\partial r^2}, \qquad r \in [R_1, R_2], \quad r \neq \hat{r}_i(t), \quad i = 1, 2, \\ \frac{\overline{\sigma}}{r}\bigg|_{r = \hat{r}_i(t)} &= (-1)^{i+1}\left(\hat{r}_i'(t) + \frac{2}{\hat{r}_i(t)}\right), \\ \left[\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial r}\right]\bigg|_{r = \hat{r}_i(t)} &= (-1)^{i+1} 2\hat{r}_i(t)\hat{r}_i'(t). \end{aligned}$$

We construct the difference scheme for system (1) and we numerically simulate the confluence of the free boundaries.

The main result of our research is that we reveal the effect of the soliton type (negative) disturbance of the temperature σ in the point of the contact of the free boundaries. This disturbance is localized in the coordinate and at the time.

We obtain and numerically verify the analytical formula for the amplitude of the disturbance of the temperature. Namely, the jump of the temperature in the point and at the moment of time of the contact is determined by formula

$$[\bar{\sigma}]|_{r=r^*,\ t=t^*} = -\lim_{t\to t^*-0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r_1(t,\varepsilon)r_1'(t,\varepsilon) - r_2(t,\varepsilon)r_2'(t,\varepsilon)}{2},$$

where $r_i(t,\varepsilon)$, $i = 1, 2$ are the asymptotic form of the positions of the free boundaries.

References

[1] V. G. Danilov, G. A. Omel'yanov & E. V. Radkevich, *Asymptotic solution of a phase field system and the modified Stefan problem*, 1995, Differential'nie Uravneniya 31 (3), 483–491 (in Russian). (English translation in Differential Equations 31 (3), 1995).

[2] V. G. Danilov, *Weak asymptotic solution of phase-field system in the case of confluence of free boundaries in Stefan problem with undercooling*, Euro. Journ. Appl. Math. (2007) v. 18, pp. 537–569.

[3] G. A. Omel'yanov and V. Yu. Rudnev, *Interaction of free boundaries in the modified Stefan problem*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 7:3 (2004), 227–237.

[4] A. Meirmanov, *The Stefan Problem*, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[5] P. I. Plotnikov and V. N. Starovoitov, *Stefan problem as the limit of the phase field system*, Differential Equations 29 (1993), 461–471.

Geometry of separation of variables and topology of the Liouville foliation in the D. N. Goryachev case

Ryabov P. E. (Finance University, Russia)

D. N. Goryachev [**1**] generalized the Chaplygin case [**2**] of rigid body motion in fluid to the problem with the potential that has a singularity in the equatorial plane of the inertia ellipsoid. Further generalizations to the case of a gyrostat were obtained by H. Yehia [**3**]. However, until now the Goryachev case [**1**] was not expressed in terms of quadratures explicitly. In [**4**], on the basis of the bihamiltonian approach a version of constructing separation variables for the Goryachev case was suggested and the Abel–Jacobi type equations for these variables were written down.

In this talk we give the explicit real separation of variables in the Goryachev case which is different from [**4**]. The solution obtained does not use any far-going mathematical theories and is based on the pure obvious calculation (see [**2**]) and geometrical approach to separation of variables suggested by M. P. Kharlamov [**5**]. We find the standard form of the Kowalevski-type separated equations and algebraically express all phase variables via the variables of separation. The obtained formulas make it possible to fulfil the complete investigation of the topology of the Liouville foliation in the Goryachev case with the Boolean functions method [**6**] including construction of the bifurcation sets, description of the admissible regions in the integral constants plane, calculation of the Liouville tori bifurcations along all basic paths and classification of singular leaves structure.

This work is supported by the RFBR grant No 10-01-00043.

References

[1] Goryachev D. N. *New cases of integrability of dynamical Euler equations*, Warsaw Univ. Izv. (1916), **3**, 1–13.

[2] Chaplygin S. A. *A new partial solution of the problem of motion of a rigid body in liquid*, Trudy Otdel. Fiz. Nauk Obsh. Liub. Est. (1903), **11**, no. 2, 7–10.

[3] Yehia H. M. *New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. I — The case of axisymmetric forces*, Mech. Res. Commun. (1996), **23**, 5, 423–427.

[4] Tsiganov A. V. *On the generalized Chaplygin system*, J. of Math. Sciences. (2010), **168**, no. 8, 901–911.

[5] Kharlamov M. P. *Separation of variables in one problem of motion of the generalized Kowalevski top*, Mech. Res. Commun. (2008), **35**, 276–281.

[6] Kharlamov M. P. *Topological analysis and Boolean functions. I. Methods and application to classical systems*, Rus. J. Nonlin. Dyn. (2010), **6**, no. 4, 769–805.

New Method for Solving General Singular Equations and Its Application

Sadik N. (Istanbul University, TURKEY)
Koca B. B. (Istanbul University, TURKEY)

General singular equations were first given by Z. I. Halilov [**1**]. He considered general singular operator of normal type, proved that these operators are Noether operators, and constructed regularizator of these operators. Yu. I. Cherskii [**2**] gave a solution for general singular equation of normal type by using similar Riemann boundary value problem.

In this study, we present a new method for solving normal type general singular equations. This method is easier and more simple than Cherskii's method. Finally, as an application for our method, we concern with the solution for a class of convolution type integral equation on a larger class.

References

[1] Halilov Z. I., *Linear Singular Equations in a Normed Ring*, Izv.Akad.Nauk SSSR, Ser. Mat 13:2, 163–176 (1949) (Russian).

[2] Cherskii Yu. I., *The General Singular Equation and Equations of Convolution Type*, Mat.Sb. 41:3 (83), 277–296 (1957) (Russian).

On properties of solutions of quasi-linear boundary value problems for ordinary differential equations

Sadyrbaev F. (University of Latvia, Latvia)

The classical results say that the boundary value problem (BVP)

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t, x, x'), \quad t \in [0, 1] \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0 \tag{2}$$

is solvable if p, q and f are continuous functions, f is bounded and the homogeneous problem

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0 \tag{3}$$

has only the trivial solution.

It was shown in [**1**] that more can be said about the expected solution.

Theorem 1. *Quasi-linear BVP* (1), (2) *with an i-nonresonant linear part has an i-type solution.*

This means that a solution $\xi(t)$ exists which has the same type as the linear part $x''+p(t)x'+q(t)x$ does. The type of the linear part is defined by the number of zeros of a solution to the Cauchy problem

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \tag{4}$$

in the interval $(0, 1)$. The type of a solution $\xi(t)$ is defined in [**1**] and roughly coincides with the oscillatory type of the respective equation of variations

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = f_x(t, \xi(t), \xi'(t))\, y + f_{x'}(t, \xi(t), \xi'(t))\, y', \tag{5}$$

provided that f is a C^1-function.

This observation have resulted ([**2**]) in the multiplicity results for nonlinear the second order BVPs of the type

$$x'' = F(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{6}$$

Indeed, if multiple quasi-linear equations (of the form (1)) can be constructed which are identical with the equation in (6) in some domains, then multiple solutions of different type exist for the problem (6).

Due to continuous interest to asymmetric equations of the form

$$x'' + \lambda x^+ - \mu x^- = f(t, x, x'), \quad t \in [0, 1] \tag{7}$$

we study the problem (7), (2). Here λ and μ are non-negative parameters, $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$, the right side f is a bounded nonlinearity. We provide the analogue of Theorem 1 for this case.

References

[1] I. Yermachenko, F. Sadyrbaev, *Types of solutions and multiplicity results for two-point nonlinear boundary value problems*, Nonlinear Analysis 63 (2005) 1725–1735.

[2] I. Yermachenko, F. Sadyrbaev, *Quasilinearization and multiple solutions of the emden-fowler type equation*, Mathematical Modelling and Analysis. Vol. 10, no. 1, pp. 41–50. 2005.

Asymptotic description of resonant tunneling in 3D quantum waveguides of variable cross-section

Sarafanov O. V. (St. Petersburg State University, Russia)

Resonant tunneling can occur as an electron propagates in a quantum waveguide of variable cross-section. The waveguide narrows play the role of effective potential barriers for the longitudinal electron motion. The part of the waveguide between two narrows becomes a “resonator”, and there can arise conditions for electron resonant tunneling. This phenomenon consists of the fact that, for an electron with energy E, the probability $T(E)$ to pass from one part of the waveguide to the other through the resonator has a sharp peak at $E = E_{res}$, where E_{res} denotes a “resonant” energy. Such reentrant quantum resonators can find applications as elements of nanoelectronics devices and provide some advantages in regard to operation properties and production technology. To analyze their operation, it is important to know E_{res}, the behavior of $T(E)$ for E close to E_{res}, the height of the resonant peak, and its width at the half-height (the so-called resonant quality factor). We consider electron propagation in an infinite waveguide with two cylindric outlets to infinity and two narrows of small diameters ε_1 and ε_2. The electron motion is described by the Helmholtz equation. We derive asymptotic formulas (and estimate the remainders) for the resonant energy, the shape of the resonant peak, and the transition and reflection coefficients as ε_1 and ε_2 tend to zero. Such formulas depend on the limiting shape of the narrows; we assume that the limiting waveguide in a neighborhood of each narrow coincides with two cones intersecting only at their common vertex. Our approach (based on the compound asymptotics method) can be employed for sound resonators and super-high-frequency resonators.

The talk is based on the joint work [**1**] with L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, and B. A. Plamenevsky.

The research was supported by grant RFBR-09-01-00191-a.

References

[1] Baskin L. M., Neittaanmäki P., Plamenevsky B. A., Sarafanov O. V. *Asymptotic theory of resonant tunneling in 3D quantum waveguides of variable cross-section*, SIAM J. Appl. Math. 70 (2009), no. 5, 1542–1566.

Spectral properties of Dirac operators on $(0,1)$ with summable potentials

Savchuk A. M. (Moscow State University, Russia)

We consider the Dirac operator L generated in the space $(L_2[0,1])^2$ by the differential expression

$$B\frac{d}{dx}+Q, \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix}q_1 & q_2\\ q_3 & q_4\end{pmatrix},$$

and some regular boundary conditions. We assume, that Q belongs to $L_p[0,1]$, for some $p\in[1,\infty)$, or to the Sobolev space $W_2^{\theta}[0,1]$ with some $\theta\in[0,1/2)$. For such kind potentials we establish an asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of operator L. In the case when the entries of Q belong to $L_p(0,1)$ with some $p>1$ we prove that the system of eigen and associated functions form a Riesz basis in $(L_2[0,1])^2$.

The talk is based on joint works with A. Shkalikov.

Homogenization of a 3D model of viscous barotropic gas provided with rapidly oscillating initial data

Sazhenkov S. A. (Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, Russia)

We consider the classical three-dimensional Navier–Stokes equations of viscous compressible gas [**1**] in a bounded domain supplemented with the no-slip condition on the boundary, an initial distribution of the velocity field, and rapidly oscillating initial distributions of density. Rapid oscillations of initial density are modeled by means of weak limiting relations arising as frequencies go to infinity. The state equation is the equation of barotropic gas. The adiabatic exponent is supposed to be greater than 3.

We work out the homogenization procedure on the strict mathematical level, as frequencies of rapid oscillations tend to infinity, and derive the limiting effective dynamical model for a viscous compressible gas with rapidly oscillating initial data, as a result.

The limiting model consists of the momentum and balance of mass equations of the same forms, as in the original formulation; the state law that differs from the state law of barotropic gas and contains an additional sought function, which is called a *distribution function*; and the kinetic equation for the distribution function that describes evolution of rapid oscillatory regimes in time and space.

We emphasize that any kind of structure like, for example, periodicity, quasi-periodicity, or random homogeneity, is not imposed on the medium under consideration.

The proofs in the work are based on the classical methods in the existence theory of solutions of viscous compressible gas equations [**1**] and on a version of kinetic equation, proposed by P. I. Plotnikov and J. Sokolowski [**2**].

The work was partially supported by the RFBR grant 10-01-00447 and by the Federal special-purpose program "Scientific and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia" for the years 2009–2013 (contract no. 02.740.11.0617).

References

[1] Lions P.-L., *Mathematical topics in fluid mechanics, vol. 2: compressible models*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[2] Plotnikov P. I., Sokolowski J., *Stationary solutions of Navier–Stokes equations for diatomic gases*, Russian Mathematical Surveys, 2007, 62:3, 561–593.

A Feynman–Kac–Duhamel Formula

Shamarov N. N. (Moscow State University, Russia)

A Feynman–Kac type formula is proved for Cauchy problems with non-homogeneous linear heat type equations.

In the following elements $T \in \mathbb{R} \ni a$ are fixed, $T > 0 < a$, $[0;T] = \{r : r \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq T\}$, n and k are natural numbers, $\mathbb{R}^n$ is the n-dimensional Euclidean real coordinate space, $t \in [0;T]$ and $x \in \mathbb{R}^n$ are variables, $C[0;T]$ is the space of all continuous $\mathbb{R}^n$-valued functions on the segment $[0;T]$ with its standard max-norm; $C(\mathbb{R}^n)$ is the space of all continuous $\mathbb{C}$-valued functions on $\mathbb{R}^n$, $C_b(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in C(\mathbb{R}^n), \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \right\}$ is the standard Banach space with the sup norm, $C_b^{(k)}(\mathbb{R}^n)$ is the Banach space of all k times continuously differentiable $\mathbb{C}$-valued functions having bounded derivatives up to kth order, Δ_x is the ordinary Laplacian regarded as the operator $C_b^{(3)}(\mathbb{R}^n) \to C_b(\mathbb{R}^n)$, $C_b^{(1)}([0;T] \times \mathbb{R}^n)$ is the space of all bounded jointly continuously differentiable $\mathbb{C}$-valued functions of $n+1$ real variables; $u \in C_b(\mathbb{R}^n)$ ("potential", or "source"), $f \in C_b^{(1)}([0;T] \times \mathbb{R}^n)$ ("controlling function", or "outer force"; for any such function we sometimes write $f_t(x)$ instead of $f(t,x)$) and $\psi_0 \in C_b^{(3)}(\mathbb{R}^n)$. If $\psi \in C_b^{(1)}([0;T] \times \mathbb{R}^n)$ then $\Psi : [0;T] \to C(\mathbb{R}^n)$ is defined by $\Psi(t) \equiv \Psi_t$ and $\Psi_t(x) = \psi(t,x)$ $(t \in [0;T], x \in \mathbb{R}^n)$.

DEFINITION 1. By $\mathrm{CP}(T, u, f, a, \psi_0)$ we understand the (Cauchy) problem to find such a function $\psi \in C^{(1)}([0;T] \times \mathbb{R}^n)$ that the corresponding function Ψ maps the segment $[0;T]$ into $C_b^{(3)}(\mathbb{R}^n)$ and $\begin{cases} \partial_t \psi(t,x) = (\frac{a}{2} \cdot \Delta_x - u)\psi(t,x) + f(t,x), \\ \psi(0,x) = \psi_0(x)\ ,\quad t \in [0;t],\ x \in \mathbb{R}^n\ . \end{cases}$ In this case the function ψ is referred to as the solution of the Cauchy problem.

THEOREM 1. *Let a problem* $\mathrm{CP}(T, u, f, a, \psi_0)$ *is posed. Then there exists a solution* ψ *to the problem; the solution is unique and satisfy the equality*

$$\psi(t,x) = \int\limits_{z \in C[0;T]} \{e^{-\int_0^T u(x+z(s))ds} \psi_0(x+z(t)) + \\ + \int\limits_0^T e^{-\frac{t}{T}\int_0^T u(x+\sqrt{\frac{T}{t}}z(s))ds} f_{T-t}(x+\sqrt{\tfrac{T}{t}}z(t))\} W_T^a(dz)$$

(called the Feynman–Kac–Duhamel formula) where W_T^a *is the central (Wiener type) Gaussian Borel measure on the Banach space* $C[0;T]$ *defined by independent increments space- and time-homogeneous transition probabilities having dispersion* $a \cdot \tau$ *during the time* τ.

COROLLARY 1. *If the coefficients* u, f *and the initial datum* ψ_0 *are real valued then the solution* ψ *is also real valued. In this case, if* f *and* ψ_0 *are non-negative then the solution has the same property.*

COROLLARY 2. *For the case when* $f \equiv 0$ *we return to the classical Feynman–Kac type formula.*

The research was supported by RFBR grant 06-01-00724.
The author thanks O. G. Smolyanov and I. V. Volovich for fruitful discussions.

References

[1] Kac M., *On Distributions of Certain Wiener Functionals*, Transactions of the American Mathematical Society 65 (1949), no. 1, 1–13. doi:10.2307/1990512.

Control of the canard explosion in a semiconductor optical amplifier

Shchepakina E. (Samara State Aerospace University, Russia)
Korotkova O. (University of Miami, USA)

On the basis of the geometric theory for the singularly perturbed systems of the ordinary differential equations [**1, 2**] we analyze the thermo-optical dynamics in the semiconductor optical amplifiers [SOA]. Our main focus is on the critical regime which the solution exhibits, which is understood as the separation between the domains of self-accelerating and slow regimes. The dynamical model of the SOA in the presence of the noise exhibits the critical regime which is similar to that appearing in systems with the classic supercritical Hopf bifurcation. We analytically investigate the recently experimentally discovered occurrence of the optical canard explosion [**3, 4**] and determine the range of the control parameter, relating to the input power, for which the extremely fast transition of the solution from a small amplitude quasi-harmonic limit cycle to relaxation oscillations takes place. The importance of the controllable transition from the limit cycle to the relaxation oscillations in SOA may play a crucial role for understanding of the optical system synchronization in general and, in particular, for the development of the photonic clocks [**5**]. It is also of importance for the optical signal threshold detection in situations when the low-level signal is embedded into noise [**6**].

The research was supported by RFBR grant 10-08-00154a, the US AFOSR (grant FA 95500810102) and US ONR (grant N6883610P2842).

References

[1] Shchepakina E., Sobolev V. *Black swans and canards in laser and combustion models* / Singular perturbations and hysteresis (eds. M. P. Mortell, R. E. O'Malley, A. Pokrovskii and V. A. Sobolev), SIAM, Philadelphia 2005.

[2] Sobolev V. A., Shchepakina E. A. *Model Reduction and Critical Phenomena in Macrokinetics* (in Russian), Fizmatlit, Moscow 2010.

[3] Marino F., Catalán G., Sánchez P., Balle S., Piro O., *Thermo-optical "canard orbits" and exicitable limit cycles*, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), 073901.

[4] Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F., *Stochastic resonance*, Phys. Rev. Lett. 870 (1998), 223–287.

[5] Chan A. W. L., Lee K. L., Shu C., *Self-starting photonic clock using semiconductor optical amplifier based Mach–Zehnder interferometer*, Electronics Letters 40 (2004), 827–828.

[6] Volkov E. I., Ullner E., Zaikin A. A., Kurths J., *Oscillatory amplification of stochastic resonance in excitable systems*, Phys. Rev. E 68 (2003), 026214.

A new class of systems of conservation laws admitting δ-shocks

Shelkovich V. M. (St.-Petersburg State Architecture and Civil Engineering University, Russia)

There are "nonclassical" situations where, in contrast to Lax's and Glimm's classical results, the Riemann problem for a system of conservation laws *either does not possess a weak L^∞-solution or possesses it for some particular initial data*. In order to solve the Riemann problem in these situations, it is necessary to seek solutions in the form of *δ-shocks* (which are solutions whose components *contain Dirac delta functions*). Problems related to δ-shocks have been intensively studied in the last 12 years (see [**2**], [**4**], and the references therein). Systems of conservation laws admitting δ-shocks arise in the models of the formation of large-scale structures of universe, of the formation and evolution of traffic jams, of media which can be considered as *having no pressure* (for example, dusty gases, two-phase flows with solid particles or droplets), of non-classical shallow water flows, of granular gases.

Here we study a new type of systems of conservation laws

$$(u_j)_t + \big(u_j\, f_j(\mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n)\big)_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

admitting a δ-shock wave type solution, where $f_j(\cdot)$ is a smooth function, μ_j is a constant, $j = 1, 2, \dots, n$. This class includes some *Temple type system.* If $f_j(w) = 1 + \frac{a_j}{1+w}$, then (1) is the system of *nonlinear chromatography*, where $\mu_j = 1$, $u_j \ge 0$ and $\frac{a_j u_j}{1+\sum_{s=1}^n u_s}$ are the jth components of fluid and adsorbed (solid) phase concentrations, respectively, a_j is Henry's constant, $j = 1, 2, \dots, n$ (see [**3**]). If $f_j(w) = I\frac{\mu_j}{w}$ and $\sum_{k=1}^n u_j = 0$ then (1) is the system of *isotachophoresis*, where I is current, u_j is the charge density of anions of the jth type ($j = 2, 3, \dots, n$)

and u_1 is the corresponding value for cations, $\mu_1, \dots, \mu_n$ are the electrophoretic mobilities of the corresponding ions (see [**1**]).

We introduce integral identities which give the definition of δ-shocks for (1) and derive the corresponding Rankine–Hugoniot conditions. It is proved that the "area" transport processes between the moving singular one-dimensional δ-shock wave front and the region outside the front are going on. Balance relations describing these processes are derived. To solve these problems, we use our own technique [**2**], [**4**].

This work was partially supported by the Analytical departmental special program "The development of scientific potential of the Higher School", project 2.1.1/10617 and by DFG Project 436 RUS 113/895.

References

[1] T. V. Alekseyevskaya, *Study of the system of quasilinear equations for isotachophoresis*, Advances in Applied Mathematics 11 (1990), 63–107.

[2] Danilov V. G., Shelkovich V. M., *Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws*, Quarterly of Applied Mathematics 63 (2005), no. 3, 401–427.

[3] M. Mazzotti, *Nonclassical composition fronts in nonlinear chromatography: delta-shock*, Ind. Eng. Chem. Res. 48 (2009), 7733–7752.

[4] Shelkovich V. M., *δ- and δ'-shock types of singular solutions to systems of conservation laws and the transport and concentration processes*, Uspekhi Mat. Nauk 63:3(381) (2008), 73–146. English transl. in Russian Math. Surveys, 63:3 (2008), 473–546.

On the Stokes problem with non-zero divergence

Shilkin T. N. (V. A. Steklov Mathematical Institute, St.-Petersburg, Russia)

We study the strong solvability of the nonstationary Stokes problem with non-zero divergence in a bounded domain.

References

[1] Filonov N. D., Shilkin T. N., *On the Stokes problem with non-zero divergence.* Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI, 370 (2009), 184–202.

Exponential stabilisation to a non-stationary solution for 2D Navier–Stokes equations and applications

Shirikyan A. R. (Cergy–Pontoise University, France)

The problem of controllability and stabilisation for Navier–Stokes equations in a bounded domain was intensively studied in the last twenty years. In particular, it was proved that the Navier–Stokes system is exactly controllable in any finite time by an external force localised in space, and any stationary point of the flow can be stabilised by a finite-dimensional feedback control; see [**3, 2**]. We discuss the problem of stabilisation to a non-stationary solution of Navier–Stokes equations. Our main theorem states that any such solution can be stabilised by means of a finite-dimensional force localised in space and time. We also discuss an application of this result to the problem of exponential mixing for 2D Navier–Stokes equations perturbed by a space-time localised noise. The results presented in this talk are obtained in collaboration with V. Barbu and S. Rodrigues.

Let us describe the main result in more detail. Consider the 2D Navier–Stokes system in a bounded domain $D \subset \mathbb{R}^2$ with smooth boundary ∂D:

$$\dot{u} + \langle u, \nabla \rangle u - \nu \Delta u + \nabla p = f(t,x), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u\big|_{\partial D} = 0. \tag{1}$$

Here $u = (u_1, u_2)$ and p are unknown velocity and pressure of the fluid, $\nu > 0$ is the viscosity, and f is an external force represented as the sum of two functions h and η, the first of which is a given H^1-smooth function 1-periodic in time, while the second is a control: $f = h + \eta$. We assume that η is sufficiently smooth and the support of its restriction to the cylinder $[k, k+1] \times D$ is contained in $(k, 0) + Q$, where Q is an open subset of $(0,1) \times D$. Let us introduce the phase space

$$H = \{u \in L^2(D, \mathbb{R}^2) : \operatorname{div} u = 0 \text{ in } D, \langle u, n \rangle = 0 \text{ on } \partial D\},$$

where n is the outward unit normal to ∂D, and endow it with the L^2-norm $\|\cdot\|$. The proof of the following result can be found in [**1**].

Theorem 1. *For any $R > 0$ and $\alpha > 0$ there is a finite-dimensional subspace $E \subset H_0^1(Q, \mathbb{R}^2)$ and positive constants C and δ such that the following property holds: given $\hat{u}_0, u_0 \in H$ with $\|\hat{u}_0\| \le R$ and $\|u_0 - \hat{u}_0\| \le \delta$ one can find a control η such that the restriction of $\eta(t+k, x)$ to $(0,1) \times D$ belongs to E for any integer $k \ge 0$ and*

$$\|u(t; u_0, h + \eta) - u(t; \hat{u}_0, h)\| \le Ce^{-\alpha t} \|u_0 - \hat{u}_0\| \quad \text{for } t \ge 0, \tag{2}$$

where $u(t, v, f)$ stands for the solution of (1) issued from $v \in H$.

In the case when η is a non-degenerate random force, we prove that the Markov dynamics generated by (1) has a unique stationary measure and possesses a property of exponential mixing in the Kantorovich–Wasserstein distance.

References

[1] Barbu V., Rodrigues S., Shirikyan A., *Internal exponential stabilization to a non-stationary solution for 3D Navier–Stokes equations*, SIAM J. Control Optimization, to appear.

[2] Barbu V., Triggiani R., *Internal stabilization of Navier–Stokes equations with finite-dimensional controllers*, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), no. 5, 1443–1494.

[3] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu., *Exact controllability of the Navier–Stokes and Boussinesq equations*, Uspekhi Mat. Nauk 54 (1999), no. 3 (327), 93–146.

Boundary regimes with peaking for arbitrary order quasilinear parabolic equations

Shishkov A. E. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Donetsk, Ukraine)

We study Cauchy–Dirichlet problem for general divergent higher order quasilinear parabolic equations in unbounded multidimensional domains with boundary data, which has singular peaking near to some finite time (blow-up time) on some bounded part of the domain's boundary. We describe localized and nonlocalized regimes, the size and geometry of the blow-up zone of arbitrary energy solution. For nonlocalized regimes we obtain sharp upper estimates of propagation of singular wave.

Asymptotic behavior of the solution of a parabolic problem with different boundary multi-phase interactions in a perforated domain

Sivak O. A. (Swansea University, UK)

Let Ω_ε be a domain that is ε-periodically perforated by small holes with diameter of order $\mathcal{O}(\varepsilon)$. The holes are divided into three ε-periodical sets depending on the boundary interaction at their surfaces.

We consider the following initial/boundary-value problem

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon) + h_0 u_\varepsilon = f_0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon^\alpha g^{(1)} & \text{on } \Xi_\varepsilon^{(1)} \times (0,T), \\ \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon^\gamma g^{(2)} & \text{on } \Xi_\varepsilon^{(2)} \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } (\Xi_\varepsilon^{(3)} \cup \Gamma_\varepsilon) \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon) := \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i}\left(a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_{x_j} u_\varepsilon(x)\right)$, $\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j} u_\varepsilon(x)\nu_i$ is the conormal derivative, h_0 is a constant, α and γ are arbitrary fixed real parameters.

We study the influence of the boundary conditions and the parameters α and γ on the asymptotic behavior of the solution. For the solution to problem (1) we construct and justify the complete asymptotic expansion for the solution using two-scale asymptotic expansion method.

These results were obtained together with T. A. Mel'nyk.

Solvability of the Vlasov equations in a half-space

Skubachevskii A. L. (People's Friendship University of Russia, Russia)

We consider the Vlasov–Poisson system of equations describing evolution of distribution functions of the density for the charged particles in rarefied plasma. We study the Vlasov–Poisson system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ with initial conditions for distribution functions $f^\beta\big|_{t=0} = f_0^\beta(x,p)$, $\beta = \pm 1$, and Dirichlet boundary condition for potential of electric field for $x_1 = 0$, where $f_0^\beta(x,p)$ is the initial distribution function (for positively charged ions if $\beta = +1$ and for electrons if $\beta = -1$) at the point x with impulse p, $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > 0\}$. Assume that initial distribution functions are sufficiently smooth and $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset (\mathbb{R}^3_\delta \cap B_\lambda(0)) \times B_\rho(0)$, δ, λ, $\rho > 0$, and magnetic field $H(x)$ is also sufficiently smooth and has a special structure near the boundary $x_1 = 0$, where $\mathbb{R}^3_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > \delta\}$. Then we prove that for any $T > 0$ there is a unique classical solution of the Vlasov–Poisson system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ for $0 < t < T$ if $\|f_0^\beta\| < \varepsilon$, where $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \rho, \|H\|)$ is sufficiently small.

This work was supported by the RFBR (grants No. 10-01-00395 and No. 09-01-00586) and the analytical departmental special-purpose program "Development of Scientific Potential of Higher Education" (No. 2.1.1/5328).

On a Solvability of the Dirichlet Problem with the p-Laplacian Perturbed by a Difference Operator

Solonukha O. V. (Centlal Economical-Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia)

We consider the essentially nonlinear Dirichlet problem

$$\Delta_p R_Q u(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \tag{1}$$
$$u(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q). \tag{2}$$

Here $Q \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary ∂Q, $p \in (2, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$, $f_0 \in L_q(Q)$, Δ_p is the p-Laplacian given by the formula

$$\Delta_p u(x) = -\sum_{1 \le i \le n} \partial_i \left(|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u \right).$$

A bounded operator $R_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ is given by the formula $R_Q = P_Q R I_Q$, where

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h),$$

$a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ is finite set of vectors, I_Q is the extension operator of functions from $L_p(Q)$ by zero in $\mathbb{R}^n \setminus Q$, P_Q is the restriction operator of functions from $L_p(\mathbb{R}^n)$ to Q.

It is well known that problem (1), (2) without perturbation (i. e. for $R \equiv \mathbb{I}$) has a unique solution. In a linear case (i. e. for $p = 2$) the existence and uniqueness of a generalized solution of strongly elliptic differential-difference equation (1) with boundary condition (2) was proved in [**1**]. We formulate the sufficient conditions for existence of a generalized solution to nonlinear problem (1), (2) for any $p \in (2, \infty)$ and $f_0 \in L_q(Q)$. We also construct examples when such solution is not unique.

The research was supported by RFBR grant 09-01-00586.

References

[1] Skubachevskii A. L. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

On the existence problem of closed locally minimal networks on convex polyhedra

Strelkova N. P. (Moscow State University, Russia)

A *network* is a geometric realization of a connected graph. The length of a closed locally minimal network on a convex polyhedron cannot be decreased by small deformations of the network unless the network is broken apart.

Definition 1. A network on a convex polyhedron is called *closed locally minimal* if all the edges of the network are geodesics and at each node of the network precisely three edges meet at angles of $120°$.

Theorem 1. [**1**] *Suppose there exists a closed locally minimal network on polyhedron P. Then there exists a partition of the vertex set of P into several subsets such that in each subset the total Gaussian curvature of the vertices equals $\frac{k\pi}{3}$ for some $k = 1, \ldots, 5$, where k may be different for different subsets.*

Remark 1. In the (degenerate) case of polyhedra with only three vertices (the double-covered triangles) the necessary condition of theorem 1 is sufficient. But it is not sufficient for polyhedra with at least four vertices, see the next theorem.

Theorem 2. [**2**] *There exists a tetrahedron $ABCD$ with no closed locally minimal networks, though the curvatures are $K_A = \frac{5\pi}{3}$, $K_B = \frac{2\pi}{3}$, $K_C + K_D = \frac{5\pi}{3}$.*

Consider a tetrahedron with curvature π at each vertex. It is easy to show that all the four triangular faces of the tetrahedron are equal. Such tetrahedra are called *quasiregular*. Closed locally minimal networks on quasiregular tetrahedra had been well studied, see [**1**]. It turns out that for each quasiregular tetrahedron there are infinitely many plane graphs that can be realized as closed locally minimal networks on it. In particular,

Theorem 3. [**1**] *The complete graph on four vertices can be realized as a closed locally minimal network on any quasiregular tetrahedra.*

Thus for polyhedra with curvatures π, π, π, π the existence problem dissolves.

Our conjecture is that for each family of polyhedra with given vertex curvatures, all divisible by $\frac{\pi}{3}$, there exists a plane graph that can be realized as a closed locally minimal network on any polyhedron from the family. The situation seems to be complicated even in the case of non-quasiregular tetrahedra. For example, let G be the plane graph with four vertices, all of degree 3, and four faces: two 2-gons and two 4-gons.

Theorem 4. *There exists a tetrahedron $ABCD$ on which graph G cannot be realized as a closed locally minimal network, though the curvatures are $K_A = K_B = \frac{2\pi}{3}$, $K_C = K_D = \frac{4\pi}{3}$.*

The research was supported by RFBR grant 10-01-00748, the Programme for Support of Leading Scientific Schools (grant НШ-3224.2010.1), the Programme for Development of the Scientific Potential of Higher Education (grant РНП-2.1.1.3704), and the federal target programme “Scientific and Scientific-Pedagogical Personnel of Innovative Russia” (grant nos. 02.740.11.5213, 14.740.11.0794).

References

[1] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., *Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations*, CRC Press, 1994.

[2] Strelkova N. P., *Closed locally minimal networks on the surfaces of tetrahedra*, Sbornik: Mathematics 202 (2011), no. 1, 135–153.

Homogenization of parabolic and elliptic periodic operators in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with the first and second correctors taken into account

Suslina T. A. (St. Petersburg State University, Russia)
Vasilevskaya E. S. (St. Petersburg State University, Russia)

In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we consider a matrix elliptic operator $\mathcal{A}_\varepsilon = b(D)^* g(x/\varepsilon) b(D)$, $\varepsilon > 0$. Here $g(x)$ is an $(m \times m)$-matrix-valued function periodic with respect to some lattice, bounded and positive definite. Assume that $m \geq n$. Next, $b(D)$ is an $(m \times n)$-matrix homogeneous first order differential operator. It is assumed that $\operatorname{rank} b(\xi) = n$, $\xi \neq 0$.

We study the behavior of the resolvent $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ and the exponential $\exp(-\mathcal{A}_\varepsilon \tau)$ (with a fixed $\tau > 0$) for small ε. There exists the effective operator $\mathcal{A}^0 = b(D)^* g^0 b(D)$ (where g^0 is a constant effective matrix) such that

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leq C\varepsilon, \tag{1}$$

$$\| \exp(-\mathcal{A}_\varepsilon \tau) - \exp(-\mathcal{A}^0 \tau)\|_{L_2 \to L_2} \leq C\tau^{-1/2}\varepsilon. \tag{2}$$

Estimate (1) was obtained in [**1**], estimate (2) in [**3**].

More accurate approximations with the first order correctors taken into account have been found in [**2**] for the resolvent and in [**6**] for the exponential:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} \leq C\varepsilon^2, \tag{3}$$

$$\| \exp(-\mathcal{A}_\varepsilon \tau) - \exp(-\mathcal{A}^0 \tau) - \varepsilon \mathcal{K}_1(\tau, \varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} \leq C\tau^{-1}\varepsilon^2. \tag{4}$$

Our *main results* are more accurate approximations with the sum of the first and second correctors taken into account. For the exponential we find approximation in the L_2-operator norm with the following error estimate:

$$\| \exp(-\mathcal{A}_\varepsilon \tau) - \exp(-\mathcal{A}^0 \tau) - \varepsilon \mathcal{K}_1(\tau, \varepsilon) - \varepsilon^2 \mathcal{K}_2(\tau, \varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} \leq C\tau^{-3/2}\varepsilon^3. \tag{5}$$

For the resolvent we obtain approximation in the norm of operators acting from the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ to $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ with the following error estimate:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon) - \varepsilon^2 K_2(\varepsilon)\|_{H^1 \to L_2} \leq C\varepsilon^3. \tag{6}$$

Approximations (5), (6) are proved in [**4**], [**5**]. The method is development of the operator-theoretic approach to homogenization suggested by M. Sh. Birman and T. A. Suslina.

References

[1] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Second order periodic differential operators. Threshold properties and homogenization*, Algebra i Analiz 15 (2003), no. 5, 1–108; Engl. transl., St. Petersburg Math. J. 15 (2004), no. 5, 639–714.

[2] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators*, Algebra i Analiz 17 (2005), no. 6, 1–104; English transl., St. Petersburg Math. J. 17 (2006), no. 6, 897–974.

[3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. (2), vol. 220 (2007), 201–233.

[4] Suslina T. A., Vasilevskaya E. S., *Threshold approximations of a factorized selfadjoint operator family with the first and second correctors taken into account*, Algebra i Analiz 23 (2011), no. 2, 102–146.

[5] Suslina T. A., Vasilevskaya E. S., *Homogenization of parabolic and elliptic periodic operators in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with the first and second correctors taken into account*, in preparation.

[6] Vasilevskaya E. S., *Homogenization with a corrector for a parabolic Cauchy problem with periodic coefficients*, Algebra i Analiz 21 (2009), no. 1, 3–60. English transl., St. Petersburg Math. J. 21 (2010), no. 1, 1–41.

A parametrization method for solving nonlinear nonlocal boundary value problem for the system of hyperbolic equations

Temesheva S. M. (Institute of Mathematics, Almaty, Kazakhstan)

Consider the nonlinear boundary value problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad (x,t) \in \Omega = (0,\omega) \times (0,T), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$g\Big(x, u(x,0), \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0}, u(x,T), \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=T}\Big) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

where $f : \bar{\Omega} \times R^{2n} \to R^n$ and $g : [0,\omega] \times R^{4n} \to R^n$ are continuous functions.

In the report an algorithm of finding solution to problem (1)–(3) is proposed. Denote by $v(x,t)$ an unknown function $u_x(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$. The problem (1)–(3) is reduced to equivalent nonlinear boundary value problem for the system of integral-differential equations with partial derivatives. This problem is investigated by a parametrization method [**1**].

For the chosen step size $h > 0$, where $Nh = T$ and $N = 1, 2, \ldots$, we perform the partition

$$[0,\omega] \times [0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [0,\omega] \times [(r-1)h, rh).$$

The functional parameters is introduced as values unknown function $v(x,t)$ on the lines $t = (r-1)h$, $r = 1 : N$. Then the nonlinear value problem for the system of integral-differential equations with partial derivatives is reduced to equivalent multicharacteristics boundary value problem.

An algorithm for solving the problem with functional parameters is proposed. Each step of this algorithm consists of two stages:

1°. Implicit system of the nonlinear Volterra integral equations with respect to introducing functional parameters is solved.

2°. Cauchy problems for the system of integral-differential equations with partial derivatives are solved using the components of computed functional parameters at stage 1.

We find conditions on the functions f and g and the domain $\bar{\Omega}$ ensuring the existence of an isolated solution to problem (1)–(3) and the convergence of the parametrization method algorithm to this solution.

The definition of an "isolated" solution to nonlinear nonlocal boundary value problem (1)–(3) with continuously differentiable data is introduced. Necessary and sufficient conditions for the existence of "isolated" solution are derived in terms of the initial data of problem (1)–(3).

The talk is based on the joint paper with D. S. Dzhumabaev.

References

[1] Dzhumabaev D. S., Temesheva S. M., *A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems*, Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 47 (2007), no. 1, 37–61.

Frequency locking of modulated waves in system with symmetry

Tkachenko V. I. (Institute of Mathematics, Kiev, Ukraine)

We consider the following system which arises as mathematical model of optical laser

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon g(x, \alpha t, \beta t), \tag{1}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, vector field $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is smooth and equivariant with respect to an $\mathbb{S}^1$-representation $e^{\gamma A}$ on $\mathbb{R}^n$, i. e.,

$$e^{\gamma A} f(x) = f(e^{\gamma A} x) \quad \text{for all } \gamma \in \mathbb{R} \text{ and } x \in \mathbb{R}^n,$$

where $A \neq 0$ is a skew-symmetric real $n \times n$-matrix such that $e^{2\pi A} = I$. Smooth function g is 2π-periodic in βt and αt and equivariant in some sense, α and β are positive parameters.

By $\varepsilon = 0$, unperturbed system $\dot{x} = f(x)$ has an exponentially orbitally stable quasi-periodic solution of modulated wave type

$$x(t) = e^{A\alpha_0 t} x_0(\beta_0 t), \tag{2}$$

where $x_0(.)$ is smooth 2π-periodic function, α_0 and β_0 are positive constants.

Using methods of perturbation theory we investigate the behavior of perturbed system (1) in the neighborhood of (2). By assumption $\beta \approx \beta_0$ and $\alpha \gg \alpha_0$, we obtain the parameter domain (with respect to parameters α, β and ε) where stable frequency locking occurs.

Special case of system (1) was investigated in [**1**].

References

[1] Recke L., Samoilenko A., Teplinsky O., Tkachenko V., Yanchuk S. *Frequency locking of modulated waves*, Discrete Cont. Dynam. Systems, Ser. A (to appear), arXiv:1006.5518.

Singularities of the Manakov top integrable system

Tonkonog D. I. (Moscow State University, Russia)

An *integrable Hamiltonian system* $(M, \omega, h_1, \dots, h_n)$ is a symplectic $2n$-manifold (M, ω) with functionally independent commuting functions $h_1, \dots, h_n : M \to \mathbb{R}$ traditionally called *integrals*. The *momentum map* $\mathcal{F} : M \to \mathbb{R}^n$ is given by $\mathcal{F}(x) := (h_1(x), \dots, h_n(x))$. Level sets of $\mathcal{F}$ define singular *Liouville foliation* on M. A point $x \in M$ is called a *singular (critical) point of rank* r, $0 \le r < n$, if $\operatorname{rk} d\mathcal{F}(x) = r$.

We study singularities of the Manakov top system (with two degrees of freedom), previously explored in [**11, 2**]. We describe topology of the Liouville foliation on preimages $\mathcal{F}^{-1}(U)$ where $U \subset \mathbb{R}^2$ is a neighborhood of the $\mathcal{F}$-image of a zero-rank singular *saddle-saddle* point. This is done with the help of theory developed by Fomenko and his collaborators [**4, 3, 9**].

The study is inspired by [**12**] where the authors heuristically investigate the Manakov top from the aspect of *quantum monodromy* and express their belief that further analysis of the singularities will be of interest. There are several recent generalizations of Hamiltonian monodromy [**5**] mostly coming from quantum physics, see [**10, 7, 6, 1**]. However, up to now there is no definition general enough to include saddle-saddle singularities. Having in mind a thoroughly studied example like the Manakov top could help to develop general theory.

The author is grateful to A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko for fruitful discussions and constant support. The research was supported by Euler-Program at DAAD (German Academic Exchange Service) in 2009/10, Dobrushin Scholarship at the Independent University of Moscow in 2011 and by a Federal Target Program grant 02.740.115213 “Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems” in 2010/11.

References

[1] Assémat E., Efstathiou K., Joyeux M., Sugny D., Fractional Bidromy in the Vibrational Spectrum of HOCl, Physical Review Letters, **104** 113002 (2010). arXiv:1003.4832v1 [quant-ph].

[2] Audin M., Hamiltonian Monodromy via Picard–Lefschetz Theory, Comm. Math. Phys. **229**:3 (2002), 459–489.

[3] Bolsinov A. V., Methods of calculation of Fomenko—Zieschang topological invariant, Adv. in Soviet Math., 6 (1991), 147–183.

[4] Bolsinov A. V., Fomenko A. T., Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2004.

[5] Duistermaat J. J., On global action angle coordinates, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 687–706.

[6] Giacobbe A., Fractional monodromy: parallel transport of homology cycles, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 140—50.

[7] Hansen M. S., Faure F., Zhilinskii B. I., Fractional monodromy in systems with coupled angular momenta, J. Phys. A: Math. Theor. **40** 13075 (2007).

[8] Manakov S. V., Note on the integration of Euler's equation of the dynamics of an N dimensional rigid body, Funct. Anal. Appl. **11** (1976), 328–329.

[9] Matveev V. S., Computation of values of the Fomenko invariant for a point of the type “saddle-saddle” of an integrable Hamiltonian system, Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal, **25** (1993), 75–105 (in Russian).

[10] Nekhoroshev N. N., Sadovskii D., Zhilinskii B., Fractional Hamiltonian monodromy, Ann. Henri Poincaré, **7** (2006), 1099–1211.

[11] Oshemkov A. A., Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations, In: Advances in Soviet Mathematics v. 6 (1991), editor A. T. Fomenko, 67–146.

[12] Sinitsyn E., Zhilinskii B., Qualitative Analysis of the Classical and Quantum Manakov Top, SIGMA 3 (2007), 046, 23 pages. arXiv:math-ph/0703045v1.

Spectral properties of the period-doubling operator

Varin V. P. (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia)

We compute the spectrum of the Feigenbaum period-doubling or universality operator

$$T(g)(x) = g(g(g(1)x))/g(1), \quad x \in [-1, 1] \tag{1}$$

on the solution $g(x)$ to the universality equation $g = T(g)$ in the Banach space F of bounded analytical functions in an ellipse with the focal points ± 1, with the supremum norm, continuous on the closure of the ellipse. The spectral properties of the operator T in F are not the same as in the subspace of even functions. In particular, it was found that the dimension of the unstable manifold is not one (Feigenbaum's conjecture [**1**]), but three.

LEMMA 1. *The formal Gâteaux derivative of the operator* T (1) *is given by the formula*

$$dT(g)h(x) = L(g)h(x) + \alpha\left(g'(g(x/\alpha))g'(x/\alpha)x - \alpha g(g(x/\alpha))\right)h(1), \qquad (2)$$

where

$$L(g)h(x) = \alpha(g'(g(x/\alpha))h(x/\alpha) + h(g(x/\alpha))), \qquad (3)$$

and $\alpha = 1/g(1)$.

The operator $L(g)$ (3) is frequently mistaken for the derivative of the operator T (2) (see [**2**, Chap. 7]). The spectra of these operators are different.

LEMMA 2. *The operator* T *is compact* [**3**] *in the space* F, *and the operator* $dT(g)$ *has the following spectrum*

$$S = [\lambda_1, \lambda_2, \dots] = [\alpha^2, \delta, \alpha, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \lambda_6, \frac{1}{\alpha^3}, \lambda_8, \frac{1}{\alpha^4}, \frac{1}{\alpha^5}, \dots], \qquad (4)$$

where $|\lambda_i| > |\lambda_j|$, $i < j$. *Let* k *be any complex number except* 1. *Then* $\lambda = \alpha^{1-k}$ *is an eigenvalue of the formal spectral problem* $dT(g)h = \lambda h$ *with the eigenfunction*

$$h(x) = g(x) - xg'(x) - g^k(x) + x^k g'(x). \qquad (5)$$

In addition, α^2 *is the eigenvalue with the eigenfunction*

$$h(x) = g(x) - xg'(x). \qquad (6)$$

Here $\alpha \approx -2.5$ and $\delta \approx 4.6$ are the universal constants. Thus, in the spectrum S, 7 out of the first 10 eigenvalues and eigenfunctions are found explicitly.

In many papers (including [**1**]), the spectrum of the operator T is computed with the Lanford's expansion $g(x) = 1 - x^2 f(x^2)$ [**4**], which isolates a subset of even functions in F. We analyze several articles devoted to this problem and compare different approaches and algorithms.

References

[1] Feigenbaum M. J., *The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations*, J. of Stat. Phys. 21 (1979), no. 6, 669–706.

[2] Lichtenberg A. J., Liberman M. A. *Regular and Chaotic Dynamics. Second Edition*, Springer–Verlag, Appl. Math. Sci., 38. (1992).

[3] Vul E. B., Sinai J. G., Khanin K. M., *Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism*, Russ. Math. Surv. 39 (1984), 1–40.

[4] Lanford O. E., *A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures*, Bull. (new series) Amer. Math. Society. 6 (1982), no. 3, 427–434.

On asymptotic behavior of the solutions of an abstract integro-differential equations

Vlasov V. V. (Moscow Lomonosov State University, Russia)
Shamaev A. S. (Moscow Lomonosov State University, Russia)
Rautian N. A. (Plekhanov Russian University of Economics, Russia)

We study integro-differential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + K(0)A^2u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2}$$

where A is a self-adjoint positive operator with compact inverse acting on a Hilbert space H, kernel $K(t)$ is a scalar convex downwards decreasing function. Moreover $K(t)$ belongs to the space $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

The equation (1) is an abstract form of Gurtin–Pipkin integro-differential equation, which describes heat propagation in media with memory and sound propagation in viscoelastic media; it also arises in homogenization problems in porous media (Darcy law).

We obtain the results on correct solvability of the problem (1), (2) in weighted Sobolev spaces on a positive semiaxis $\mathbb{R}_+$. Additionally assuming that kernel $K(t)$ has the form

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \tag{3}$$

where $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$ we provide the spectral analysis of the operator-function $L(\lambda)$ which is a symbol of the equation (1). Let e_j denote the orthonormal basis composed of the eigenvectors of the operator A corresponding to eigenvalues e_j, i. e., such that $Ae_j = a_je_j$ for $j \in \mathbb{N}$. The eigenvalues a_j are numbered in increasing order: $0 < a_1 < a_2 < ...$; an $a_n \to +\infty$ as $n \to +\infty$. The spectrum of the operator-function $L(\lambda)$ can be represented in the form

$$\sigma(L) := \overline{(\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{k=1}^{\infty}\lambda_{kn}) \cup \left(\cup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\pm}\right)}, \tag{4}$$

where $\{\lambda_{k,n} \mid k \in \mathbb{N}\}$ — a countable series of real zeros lying on the negative semiaxis and $\lambda_n^{\pm}$ — a pair of complex conjugate zeros lying in the left half-plane such that $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$ of the meromorphic function $l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n)$. On the base of spectral analysis we obtain the representation of the solution of the problem (1), (2) as a series of exponents correspond the eigenvalues of the operator-function $L(\lambda)$.

The detailed statements of the problems, formulations and proofs of the results one can find in [**1**]–[**3**].

References

[1] Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S., *Solvability and Spectral Analysis of Integro-Differential Equations Arising in the Theory of Heat Transfer and Acoustics*, Doklady Mathematics, 82 (2010), no. 2, 684–687.

[2] Vlasov V. V., Rautian N. A., *Correct solubility and spectral analysis of an abstract hyperbolic integrodiferential equations*, Trudy Seminara Im. Petrovskogo 30 (2011).

[3] Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S., *Spectral Analysis and Correct solubility of an abstract integrodiferential equations Arising in the Theory of Heat Transfer and Acoustics*, Contemporary Mathematics. Fundamental Directions 39 (2011).

Local expansions for solutions of Schlesinger equation

Vyugin I. V. (Institute for Information Transmission Problems, Russia)

We study local behavior of solutions of Schlesinger equation in a neighborhood of a singular point. This equation defines a condition of isomonodromy of some family of Fuchsian systems. In the other hand solutions of Painlevé VI equation and Garnier systems can be represented in a rational form of solutions of Schlesinger equation.

We prove that each component of any solution of Schlesinger equation

$$dB_i = -\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{[B_i,B_j]}{a_i-a_j} d(a_i-a_j), \qquad z\in\mathbb{C}, \quad i=1,\dots,n, \tag{1}$$

where

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} b^i_{11}(a) & b^i_{12}(a) \\ b^i_{21}(a) & b^i_{22}(a) \end{pmatrix}, \qquad a=(a_1,\dots,a_n) \tag{2}$$

can be represented in some neighborhood D of the singular point $a^0=(a^0_1,\dots,a^0_n)\in\Omega$,

$$\Omega_{s,r} = \{a \mid a_s=a_r\} \setminus \bigcup_k \{a \mid a_s=a_r=a_k,\ s\neq k\neq r\}, \qquad s\neq r \tag{3}$$

in one of two following forms:

$$b^i_{kl}(t) = F_1(a) + (a_s-a_r)^{\varphi} F_2(a) + (a_s-a_r)^{-\varphi} F_3(a), \qquad \varphi\in\mathbb{C}$$

or

$$b^i_{kl}(t) = F_1(a) + F_2(a)\ln(a_s-a_r) + F_3(a)\ln^2(a_s-a_r),$$

where $F_1(a),F_2(a),F_3(a)$ are meromorphic in D functions.

In the case $n=4$ and $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=\infty$, $t=a_4$ the following holds

$$w(t) = \frac{tb^1_{12}}{(t+1)b^1_{12}+tb^2_{12}+b^4_{12}}, \tag{4}$$

where $w(t)$ is the solution of Painlevé VI equation. It gives us the local expansions for solutions of Painlevé VI equation. The solution of Painlevé VI equation can be represented in one of two forms

$$w(t) = P(t,t^{\varphi},t^{-\varphi})$$

or

$$w(t) = R(t,\ln t),$$

where $P(\cdot,\cdot,\cdot)$ and $R(\cdot,\cdot)$ are power series with integer powers.

This work supported by RFBR 11-01-00339.

References

[1] Anosov D. V., Bolibruch A. A., *The Riemann–Hilbert problem*, Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1994.

[2] Vyugin I. V., *Isomonodromic confluence of Fuchsian singular points and Schlesinger equation*, Proceedings of the conference ITiS-09, Bekasovo, 2009, 447–452 (Russian).

New Models of Chemotaxis: Analysis and Numerics

Wang X. (Tulane University, USA)

Wu Y. (Capital Normal University, P.R. China)

Patlak-Keller-Segel (PKS) system is a classical PDE model of the chemotaxis. In its simplest form, this model is described by a system of nonlinear PDEs: a convection-diffusion equation for the cell density coupled with a reaction-diffusion equation for the chemoattractant concentration. The PKS system admits solutions that develop delta-type singularities within a finite time. Even though such blowing up solutions model a concentration phenomenon, they are not realistic since biological cells do not converge to one point (while the cell density grows sharply, it must remain bounded at all times).

We will present a new chemotaxis model, which can be viewed as a regularized PKS system. The proposed regularization is based on a basic physical principle: boundedness of the chemotactic convective flux, which should depend on the gradient of the chemoattractant concentration in a nonlinear way. Solutions of the new system may develop spiky structures that model the concentration phenomenon. However, both cell density and chemotattractant concentration remain bounded.

The proposed model is studied both analytically and numerically. We will first prove a global existence result and then use the bifurcation theory to investigate existence of nontrivial steady states and their stability properties. Finally, we will persent one- and two-dimensional numerical examples that support the analytical findings and demonstrate the formation and stability of the spiky solutions.

The talk is based on the joint paper with A. Chertock and A. Kurganov.

References

[1] Chertock A. and Kurganov A., *A second-order positivity preserving central-upwind scheme for chemotaxis and haptotaxis models*, Numerische Mathematik, 111 (2008), 169–205.

[2] Chertock A., Epshteyn Y. and Kurganov A., *High-order finite-difference and finite-volume methods for chemotaxis models*, Preprint, 2011.

[3] Chertock A., Kurganov A., Wang X. and Wu Y., *On a chemotaxis model with saturated chemotactic flux*, Preprint, 2011.

Periodic Solutions of Abel Nonautomomous ODEs

Wilczynski P. (Jagiellonian Uniwersity, Poland)

In the case of Riccati equation (in complex number notation)

$$\dot{z} = a(t)z^2 + b(t)z + c(t), \tag{1}$$

where $z \in \mathbb{C}$ and $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ are continuous and T-periodic, a complete description of dynamics may be obtained (see [**1**], [**2**]). Generically there are two periodic solutions, an asymptotically stable and asymptotically unstable one, and every other solution tends to one of them for big and small times.

The case of Abel equation is much more complicated. The method from [**3**] allows us to obtain one or two periodic solutions. In the case of equation

$$\dot{z} = z^3 + f(t), \tag{2}$$

where f is continuous and T -periodic, we extend it and try to give the full description of dynamics. Namely, we seek when there are two asymptotically stable periodic solutions, one asymptotically unstable one and every other solution tends to them for big or small times or blows up.

The research was supported by Polish Ministry of Science and Higher Education grant No. N N201 549038.

References

[1] Juan Campos, *Möbius transformations and periodic solutions of complex Riccati equations*, Bull. London Math. Soc., 29, (1997), no. 2, 205–215.
[2] Paweł Wilczyński. *Planar nonautonomous polynomial equations: the Riccati equation.*, J. Differential Equations, 244 (2008), no. 6, 1304–1328.
[3] Paweł Wilczyński. *Planar nonautonomous polynomial equations. II. Coinciding sectors.*, J. Differential Equations, 246 (2009), no. 7, 2762–2787.

Homogenization of Navier–Stokes Systems for Electro-rheological Fluid

Zhikov V. V.

Some fluids sharply change their rheological properties in the presence of electromagnetic field. The viscous stress tensor of such fluids becomes not just a nonlinear function of the strain rate tensor D but acquires a strong dependence on the spatial argument x. An example is provided by the tensor $|D|^{p(x)-2}D$, where the exponent is determined by the applied electromagnetic field. But, in general, the viscous stress tensor has a more complex anisotropic structure. A mathematical theory of electrorheological fluids is described in the book of Ruzicka, where references to experimental data can also be found. It can be assumed that the electromagnetic field is periodic in x and its period is specified by a small parameter. In this situation, one has to deal with a homogenization problem, and the main task of homogenization is to find the effective (homogenized) viscous stress tensor that does not depend on the spatial variable.

On an Exponential Stability of Control Systems' Program Manifold

Zhumatov S. S. (Institute of Mathematics, Almaty, Kazakhstan)

The problem of construction of all the set of differential equations possessing by given integral manifold has been formulated and a method of solving this problem is given in the work [**1**]. Later on Erugin's method was developed for construction of stable system of differential equations and nonlinear automatic control systems under given program manifold in [**2**], [**3**]. The problem of finding of exponential stability's conditions of indirect control systems' program manifold is investigated with respect to the given vector-function.

Let us consider the material system, possessing by $(n-s)$-dimensional integral manifold $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, where the motion of which described by equations

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega - R\xi. \tag{1}$$

Here $B \in \mathbf{R}^{n\times r}$, $P \in \mathbf{R}^{s\times r}$, $R > 0 \in \mathbf{R}^{r\times r}$ are matrices, $x \in \mathbf{R}^n$ is vector of objects state, $f \in \mathbf{R}^n$ is vector-function, $\omega \in \mathbf{R}^s$ is vector, $\xi \in \mathbf{R}^r$ is vector of control on deflection from given program, satisfying of local quadratic connection's conditions. Taking into account that $\Omega(t)$ is integral manifold for the system (1) we will have

$$\dot{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + Hf(t,x,\omega) = F(t,x,\omega), \quad H = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad F(t,x,0) \equiv 0$$

is Erugin's s-vector-function. Let $F = -A\omega$, $-A \in \mathbf{R}^{s\times s}$ is Hurwitz matrix. Then differentiating the manifold $\Omega(t)$ with respect to time t in view of (1), we derive that

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega - R\xi. \tag{2}$$

Theorem 1. *Let the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies of local quadratic connection's conditions, exists positive defined function $V(\omega,\xi)$, which derivative $-\dot{V} = W(\omega,\xi)$ in view of (2) is negative defined and is valid $\|z(t)\| \leq N\|z(t_0)\|\exp[-\alpha(t-t_0)]$ for any $\omega(t_0,x_0)$ and $N > 0$, $\alpha > 0$, $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$. Then program manifold $\Omega(t)$ is exponential stable with respect to vector-function ω.*

References

[1] Erugin N. P., *Construction all the set of systems of differential equations, possesing by given integral curve*, PMM. V. 10 (1952), no. 6, 659–670.

[2] Galiullin A. S., Mukhametzyanov I. A., Mukharlyamov R. G. *Revues of investigating on analitic construction of program motion's systems*, Vestnik RUDN, Moscow, 1 (1994), 5–21.

[3] Zhumatov S. S., Krementulo V. V., Maigarin B. J. *Second Lyapunov's method into the problems of stability and motion's control*, Almaty, Nauka. 1999.

Задачи с интегродифференциальным граничным условием для некоторых классов уравнений высокого порядка

Абдрахманов А. М. (Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия)

В докладе излагаются некоторые результаты о разрешимости краевых задач для уравнений составного типа с условием на части границы, сочетающим условия задачи с косой производной и нелокальной задачи с интегральным граничным условием. В частности, излагаются результаты о разрешимости задач

1°. для уравнения

$$\rho(t)Au_{tt} - Bu = f(x,t), \quad 0 < t < T, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

с эллиптическими операторами A и B второго порядка, действующими по пространственным переменным, с граничным условием

$$\alpha^k(x)u_{x_k} + \alpha_0(x)u - \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y,t)\,dy \Bigg|_{\substack{x\in\partial\Omega \\ t\in(0,T)}} = 0,$$

причем рассматривается как случай без вырождения — $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$ при $t \in [0,T]$, так и случай с вырождением — $\rho(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\rho(0) = 0$;

2°. для уравнений

$$\rho(t)D_t^{2m+1}Au + (-1)^m Bu = f(x,t)$$

вновь с эллиптическими операторами A и B второго порядка, действующими по пространственным переменным, рассматриваются задачи с тем же граничным условием и вновь как невырождающемся случае, так и в вырождающемся.

Спектры и сингулярные значения многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами

Авсянкин О. Г. (Южный федеральный университет, Россия)

Пусть $\mathbb{B}_n$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$. В пространстве $L_2(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям:

1°. $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n}k(x,y)$, $\forall\, \alpha > 0$;

2°. $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$, $\forall\, \omega \in SO(n)$;

3°. $k(e_1, y)|y|^{-n/2} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Далее, определим в $L_2(\mathbb{B}_n)$ проектор P_τ $(0 < \tau < 1)$ формулой

$$(P_\tau\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau < |x| < 1, \\ 0, & |x| < \tau, \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{B}_{n_1} \times \mathbb{B}_{n_2})$ оператор

$$A = \lambda(I_1 \otimes I_2) + (K_1 \otimes I_2) + (I_1 \otimes K_2) + (K_3 \otimes K_4), \tag{3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, K_j $(j = 1,2,3,4)$ — оператор вида (1). Операторы вида (3) будем называть операторами с биоднородными ядрами. Положим

$$A_{\tau_1,\tau_2} = (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}),$$

где P_{τ_j} — проектор вида (2), действующий в $L_2(\mathbb{B}_{n_j})$.

Описывается предельное поведение спектров, псевдоспектров и сингулярных значений усеченных операторов A_{τ_1,τ_2} при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$.

Теорема 1. *Пусть оператор A вида (3) является самосопряженным. Тогда*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(A_{\tau_1,\tau_2}) = \mathrm{Sp}(A)\cup\mathrm{Sp}(A_1) = \mathrm{Sp}(A)\cup\mathrm{Sp}(A_2),$$

где A_1 и A_2 — операторы, транспонированные к оператору A по первой и второй переменной соответственно.

Без предположения самосопряженности оператора A аналогичный результат имеет место для ε-псевдоспектров.

Напомним, что если H — гильбертово пространство и $D \in \mathcal{L}(H)$, то множество

$$\Sigma(D) = \{s \in [0;\infty):\ s^2 \in \mathrm{Sp}(D^*D)\}$$

называется множеством сингулярных значений оператора D.

Доказывается, что предел при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$ множества $\Sigma(A_{\tau_1,\tau_2})$ может отличаться от множества $\Sigma(A)\cup\Sigma(A_i)$, где $i = 1$ или $i = 2$, разве что элементом $s = 0$.

Список литературы

[1] *Авсянкин О. Г.* О спектрах и сингулярных значениях многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 3. С. 490–496.

О существовании универсальных базисов Шаудера в банаховых пространствах

Агаджанов А. Н. (Институт проблем управления РАН, Россия)

Вопрос, связанный с существованием базиса Шаудера в конкретном банаховом пространстве, может оказаться достаточно сложным. Из результатов **[1]** следует, что в сепарабельных рефлексивных банаховых пространствах базис Шаудера может отсутствовать. Более того, даже сепарабельные суперрефлексивные банаховы пространства (то есть, пространства, в которых может быть введена эквивалентная равномерно выпуклая норма) могут и не иметь базиса Шаудера **[2]**.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть задана последовательность банаховых пространств $\{X_m\}_{m\geqslant 1}$, связанных непрерывными вложениями*

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_m \supset \ldots \tag{1}$$

Предположим, что монотонный предел последовательности (1)

$$X_{\mathrm{mon}} = \left\{ u \in \bigcap_{m\geqslant 1} X_m \colon \|u\|_{X_{\mathrm{mon}}} = \lim_{m\to\infty} \|u\|_{X_m} < +\infty \right\} \tag{2}$$

является нетривиальным, то есть, существует по крайней мере одна функция, отличная от тождественного нуля, для которой выполняется условие (2).

Если проективный предел последовательности

$$X_{\mathrm{pr}} = \left\{ u \in \bigcap_{m\geqslant 1} X_m \colon \|u\|_1 \le \|u\|_2 \leqslant \dots \right\}$$

является ядерным пространством Фреше **[3]**, *то существует последовательность функций* $\{\varphi_k\}_{k=\overline{1,\infty}} \in X_{\mathrm{mon}}$, *которая является безусловным базисом Шаудера в каждом из банаховых пространств* X_m.

Следствие 1. *Для любого выбранного* m *существует номер* $k(m) > m$ *такой, что для всех номеров* $r \geqslant k(m)$ *операторы вложения* $X_r \subset X_m$ *являются ядерными (а следовательно, и компактными). При этом любой элемент* $u \in X_r$ *представляется в виде* $u = \sum_{j=1}^{\infty} f_{j,r}(u)\varphi_j$, *где* $\{\varphi_j\}$ — *универсальный безусловный базис,* $f_{j,r}(u) \in X_r^*$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{j,r}\|_{X_r^*} \|\varphi_j\|_{X_m} < +\infty$.

В качестве последовательностей X_m могут быть выбраны, например, $X_m = \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$ ($1 < p < \infty$; $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей) **[4]**, $X_m = B_{p,q}^{s_m}(G)$ ($1 < p < q < \infty$, s_m — любая возрастающая последовательность).

Список литературы

[1] *Enflo P.* A counterexample to the approximation problem in Banach spaces // Acta Math. 1973. № 3–4, 309–317.

[2] *Szarek S. J.* A Banach space without a basis which has the bounded approximation properties // Acta Math. 1987. № 1, 81–98.

[3] *Пич А.* Ядерные локально-выпуклые пространства. М.: Мир, 1969.

[4] *Агаджанов А. Н.* О равномерной выпуклости и равномерной гладкости пространств Соболева бесконечного порядка // ДАН. 2007. Т. 413. № 5 с. 583–586.

Обобщенная постановка одной задачи геофизической гидродинамики и теорема единственности

Агошков В. И. (Институт вычислительной математики РАН, Россия)

Пусть λ, θ, r — сферические координаты, S_R — сфера радиуса R, $z \equiv r - R$, Ω — часть сферы S_R, $H = H(\lambda,\theta)$ — строго положительная ограниченная функция, причем $H \ll R$. Через D обозначим область из R^3: $D \equiv \{(\lambda,\theta,z) : (\lambda,\theta,R) \in \Omega\,;\ -H(\lambda,\theta) < z < 0\}$. Предполагается, что ∂D является кусочно-гладкой класса $C^{(2)}$ и $\partial\Omega$ расположена на строго положительном расстоянии от „полюсных точек“ ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$), $\mathbf{U} \equiv (\mathbf{u}, w)$ — вектор скорости движения жидкости, $\mathbf{u} \equiv (u, v)$, w — вертикальный компонент скорости.

Рассмотрим в D при $t > 0$ одну из основных систем уравнений геофизической гидродинамики — полную нелинейную „систему примитивных уравнений“ динамики океана с использованием функций $\mathbf{u}$ и функции „свободной поверхности океана“ $\xi \equiv \xi(\lambda,\theta,t)$ для вектор-функции $\phi \equiv (\mathbf{u}, \xi) \equiv (u, v, \xi)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{u}}{dt} + A\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 & -f(u) \\ f(u) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + g\,\mathrm{grad}\,\xi = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad D,\ t > 0, \\
&\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathrm{div}\Big(\int\limits_{-H}^{0} \Theta(z)\mathbf{u}\,dz\Big) = f_3 \quad \text{на} \quad \Omega,\ t > 0,
\end{aligned} \qquad (1)$$

где $\Theta(z) \equiv r(z)/R$, $g = \text{const} > 0$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, f_3 — заданные функции, $f(u) = = -(l + u(\operatorname{ctg}\theta))/r$, $l = 2\omega\cos\theta$ — Кориолисов параметр, ω — угловая скорость Земли, d/dt — нелинейный оператор "полной производной", A — дифференциальный оператор второго порядка, включающий оператор Лапласа на вектор-функциях в сферической системе координат. Система (1) рассматривается при граничных условиях, используемых в прикладных задачах. Функция $w \equiv w(u, v)$ определяется по u, v из уравнения неразрывности для несжимаемой вязкой жидкости.

С целью изучения задач для системы уравнений типа (1), записанных в сферической системе координат, в 2008–2010 гг. были введены гильбертовы пространства $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$ вектор-функций $\mathbf{u} = (u, v)$, подчиненных особым условиям в "полюсных точках", и исследован ряд их свойств, в частности, доказаны теоремы о существовании следов и теоремы вложения этих пространств в пространства $L_p(D)$.

В настоящей работе вводится новая обобщенная постановка задачи для (1) при специальной регуляризации функции $w \equiv w(\alpha)$, определяемой как решение вариационной задачи с параметром регуляризации $\alpha \geq 0$. Для определенности задача рассматривается для случая, когда одна "полюсная точка" принадлежит S_R и используется только $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_N$. Для изучения задачи вводятся пространства функций со значениями в $\mathbf{A}, ..., \mathbf{L}_q(D) \equiv (L_q(D))^2$: $Y \equiv L_2(0, T; \mathbf{A}), ..., L_r(0, T; \mathbf{L}_q(D))$ и W — гильбертово пространство вектор-функций $\phi \equiv (\mathbf{u}, \xi) \equiv (u, v, \xi)$ с нормой вида: $\|\phi\|_W = (\|\mathbf{u}_t\|^2_{Y^*} + \|\mathbf{u}\|^2_Y + \|\xi_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\xi\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2}$. Вводятся определения обобщенной постановки задачи и обобщенного решения и доказывается теорема единственности решений задачи для (1) в классе функций $W \bigcap (L_r(0, T; \mathbf{L}_q(D)) \times L_2(0, T; L_{2,0}))$, где $1/r + 3/(2q) = 1/2$, $r \in [2, \infty)$, $q \in (3, \infty]$.

Работа выполнена при поддержке Программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» и РФФИ (проект 10-01-00806).

Смешанные задачи для сильно эллиптических систем 2-го порядка в липшицевой области

Агранович М. С. (Московский институт электроники и математики, Россия)

Рассматриваются смешанные задачи для сильно эллиптических систем 2-го порядка в ограниченной n-мерной области, $n \geq 2$, с липшицевой границей. Выводятся уравнения на границе, эквивалентные задаче, в простейших L_2-пространствах H^s типа Соболева, что позволяет представить решения через поверхностные потенциалы. Доказывается результат о регулярности решений с выходом в немного более общие пространства H^s_p бесселевых потенциалов и B^s_p Бесова. Рассматриваются задачи со спектральным параметром

1°. в системе или

2°. на части границы (задачи Пуанкаре–Стеклова),

обсуждаются спектральные свойства соответствующих операторов, включая асимптотики собственных значений.

О дискретизации уравнения Цицейки

Адлер В. Э. (Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Россия)

Изучаются свойства интегрируемого дискретного уравнения на квадратной решетке ($h_{ij} = h(n+i, m+j)$)

$$h_{00}h_{11}(c^{-1}h_{10}h_{01} - h_{10} - h_{01}) + h_{11} + h_{00} - c = 0. \qquad (1)$$

В непрерывном пределе оно переходит в известное уравнение Цицейки **[1, 2]**

$$H_{xy} = e^H - e^{-2H},$$

возникающее как условие совместности для уравнений Гаусса, описывающих так называемые индефинитные аффинные сферы. Уравнение (1) возникает при дискретизации этого понятия (играющего роль представления нулевой кривизны). Сходная дискретизация была предложена ранее в работе **[3]**, но она ведет к более сложному нелинейному уравнению, хотя и проще геометрически.

Непрерывные высшие симметрии уравнения (1) описываются дифференциально-разностными уравнениями типа цепочек Вольтерра. Простейшая такая симметрия описывается следующим утверждением.

Утверждение 1. *Уравнение $Q = 0$ вида (1) совместно с цепочкой (здесь $h_k = h_{k,0}$)*

$$h_t = \frac{h(c-h)}{h_1 h h_{-1} - c}\left(\frac{h(c-h_1)(c-h_{-1})(h_2h_1 - h_{-1}h_{-2})}{(h_2h_1h - c)(hh_{-1}h_{-2} - c)} - h_1 + h_{-1}\right), \qquad (2)$$

то есть, на его решениях выполняется тождество $D_t(Q)|_{Q=0} = 0$.

Цепочка (2) связана подстановками типа Миуры с цепочкой

$$u_t = u^2(u_2u_1 - u_{-1}u_{-2}) - u(u_1 - u_{-1}),$$

задающей дискретизацию уравнения Савады–Котеры **[4]**

$$U_\tau = U_{xxxxx} + 5UU_{xxx} + 5U_xU_{xx} + 5U^2U_x.$$

Эта цепочка представляет собой любопытную смесь цепочки Вольтерра и модифицированной системы Нариты–Богоявленского

$$u_{t'} = u(u_1 - u_{-1}) \qquad \text{и} \qquad u_{t''} = u^2(u_2u_1 - u_{-1}u_{-2}).$$

То, что сумма эти потоков остается интегрируемой, неочевидно, так как сами они не коммутируют.

Работа поддержана грантом для ведущих научных школ НШ-6501.2010.2.

Список литературы

[1] G. Tzitzeica. Sur une nouvelle classe de surfaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* ***25:1*** (1907) 180–187.
[2] A. V. Zhiber, A. B. Shabat. Klein–Gordon equations with a nontrivial group. *Soviet Phys. Doklady* ***24*** (1979) 607.
[3] A. I. Bobenko, W. K. Schief. Affine spheres: discretization via duality relations. *Exp. Math.* ***8*** (1999) 261–280.
[4] K. Sawada, T. Kotera. A method for finding n-soliton solutions of the KdV equation and KdV-like equations. *Progr. Theor. Phys.* ***51:5*** (1974) 1355–1367.

Симметрии фундаментальных решений и функция Римана

Аксенов А. В. (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия)

В работе **[1]**, применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными, Б. Риман предложил "метод интегрирования Римана". Общего метода построения функции Римана не существует. В работе **[2]** дан подробный анализ шести известных способов построения функции Римана для частных типов уравнений. Н. Х. Ибрагимовым **[3]**, на основе использования результатов Л. В. Овсянникова **[4]**, было предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения. В настоящей работе показана инвариантность функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений, предложен метод ее построения и описаны уравнения, для которых применим предложенный метод.

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка $Lu = 0, \quad x \in R^m$. Фундаментальные решения этого уравнения являются решениями неоднородного уравнения $Lu = \delta(x - x_0)$. Операторы симметрии однородного уравнения, образующие конечномерную часть алгебры Ли операторов симметрии, имеют вид $X = \xi^i(x)\,\partial/\partial x^i + \zeta(x)\,u\,\partial/\partial u$. Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора X.

Сформулируем основной результат работы **[5]**.

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии неоднородного уравнения является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии однородного уравнения, выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0) = 0, \qquad \lambda(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x_0^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \tag{1}$$

Здесь функция $\lambda = \lambda(x)$ удовлетворяет тождеству $\underset{p}{X}(Lu) \equiv \lambda(x)\,Lu$.

Определение 1. Симметриями фундаментальных решений (или симметриями неоднородного уравнения) будем называть симметрии однородного уравнения, удовлетворяющие соотношениям (1).

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 09-01-00610 и 11-01-00188).

Список литературы

[1] *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ. 1948. С. 376–395.

[2] *Copson E. T.* On the Riemann–Green Function // Archive for Ratioanal Mechanics and Analysis. 1957/58. V. 1. P. 324–348.

[3] *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. М.: "Знание". Сер. "Математика и кибернетика". № 7. 1991. 48 с.
[4] *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики. 1960. № 3. С. 126–145.
[5] *Аксенов А. В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.

Усреднение формулы Фейнмана-Каца и асимптотика распределения размера d-мерной модели открытой струны

Алхимов В. И. (Московский городской психолого-педагогический университет)

Пусть некоторая „плотность“ системы $\rho(\mathbf{q}, t; \mathbf{q_0})$, где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\partial\rho/\partial t = \Delta_d \rho - V\rho$$

с начальным условием $\rho(\mathbf{q}, 0; \mathbf{q_0}) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, где $\delta(\mathbf{q})$ — дельта-функция Дирака, Δ_d есть d-мерный оператор Лапласа, $V(\mathbf{q}, t)$ — непрерывная и ограниченная снизу функция в $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^+$, подчинена гауссовскому распределению, так что $\mathbb{E}V = 0$, $\mathbb{E}[V(\mathbf{q}, t)V(\mathbf{q}', t')] = W(\mathbf{q} - \mathbf{q}', t - t')$. Решение указанного уравнения можно представить в континуальной форме с помощью формулы Фейнмана–Каца

$$\rho(\mathbf{q}, t; \mathbf{q_0}) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{Nd}} \exp(-\sum_{1\le n\le N} \tau V(q_n, t_n)) d^N\mu,$$

где $\tau = t/N$, $\tau_n = n\tau$, $n = 1, 2, ...N$; $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}(t_n)$; $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$; $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$; $d^N\mu$ — винеровская мера. Нас будет интересовать „усредненная“ плотность, определяемая равенством

$$G(r, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{q}\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - \mathbf{r})\mathbb{E}\rho(\mathbf{q}, t; \mathbf{q_0}),$$

точнее, ее асимптотика при больших r и t. Отметим, что здесь выполняются два независимых функциональных интегрирования: одно — по пространству траекторий $\mathbf{q} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$, а другое — по всем реализациям случайного поля V. Для функции φ, полученной в результате двукратного интегрального преобразования „усредненной“ плотности G, установлено замкнутое уравнение, аналогичное известному уравнению Дайсона. Последнее оказалось инвариантным относительно непрерывной группы т. н. ренормировочных (РГ) преобразований, что инициировало введение инвариантного спектрального параметра B, непосредственно связанного с функцией φ. Вследствие РГ-инвариантности величина B, удовлетворяет дифференциальному уравнению Ли, с помощью которого для $1 < d < 4$ найдена указанная асимптотика функции $G(r, t)$ при опредленной факторизации функции $W(r, t)$ [**1**]. Если теперь в описанной выше задаче формально перейти к мнимому полю V, в результате чего $W = -U$, где U обозначает неотрицательную величину, то предложенная схема может быть использована для отыскания асимптотики распределения $P(r, t)$ расстояния r между концами d-мерной модели открытой струны с контурной длиной L, когда $r \to \infty$ и $L \to \infty$, но отношение (r/L) фиксировано и мало. В предложенной модели струна является гибкой, растяжимой и избегающей самопересечения в $\mathbb{R}^d$, $2 \le d < 4$.

Найденная асимптотика функции $P(r, L)$ существенно отличается от нормального распределения, когда $2 \le d < 4$ [**2**]. Однако, эффект запрета на самопересечения струны убывает, когда размерность d растет, приближаясь к значению $d = 4$. Полученный результат позволяет предположить, что в случае $d > 4$ асимптотика распределения $P(r, L)$ будет иметь вид нормального распределения.

Список литературы

[1] *Алхимов В. И.* // ФПМ. 2009. Т. 15. Вып. 2. С. 3–21.
[2] *Алхимов В. И.* // ФПМ. (в печати).

Свойства решений параболических уравнений, равномерно вырождающихся по малому параметру в полупространстве

Алхутов Ю. А. (Владимирский государственный гуманитарный университет, Россия)
Лискевич В. А. (Swansea University, UK)

В настоящем сообщении исследуется семейство параболических уравнений вида

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = (\omega_\varepsilon(x)u)_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)\omega_\varepsilon(x)u_{x_i})_{x_j} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \ge 1 \qquad (1)$$

с измеримой, равномерно эллиптической и ограниченной матрицей $\{a_{ij}(x,t)\}$ и положительным весом $\omega_\varepsilon(x)$, определяемым равенством

$$\omega_\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon, \ x_n > 0 \\ 1, \ x_n < 0 \end{array} \right. , \qquad \varepsilon \in (0,1].$$

Первая часть работы посвящена равномерной по ε оценке фундаментального решения $K_\varepsilon(x,y,t)$, $t > 0$, оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Если $\varepsilon = 1$, то хорошо известна оценка Нэша-Аронсона [**1**], [**2**] вида

$$K(x,y,t) \le c_1 t^{-n/2} e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}}. \qquad (2)$$

Здесь нашей целью является получение аналогичной оценки для $K_\varepsilon(x,y,t)$ с постоянными c_1, c_2, не зависящими от ε.

Теорема 1. *Существуют положительные постоянные c_1, c_2, зависящие только от размерности пространства n и коэффициентов a_{ij}, такие, что для любого $\varepsilon \in (0,1]$ фундаментальное решение $K_\varepsilon(x,y,t)$ оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ удовлетворяет оценке* (2).

Во второй часть работы уравнение (1) рассматривается в цилиндре $Q_T = D \times (0,T)$, ограниченное основание D которого имеет непустое пересечение с гиперплоскостью $x_n = 0$. Решение понимается локально в Q_T без каких-либо краевых и начальных условий. Здесь изучается вопрос о гельдеровской непрерывности решений. Из результатов работ [**2**], [**3**] хорошо известно, что при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0,1]$ любое решение уравнения

(1) в произвольном цилиндре $Q' \Subset Q_T$ принадлежит пространству $C^\alpha(Q')$ гельдеровых в Q' функций с показателем $\alpha \in (0,1)$. Нас интересует вопрос о независимости показателя α от ε. Рассмотрим семейство $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ решений уравнений $\mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon = 0$, ограниченное в L_∞ равномерно по ε на компактных подмножествах Q_T. Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует постоянная $\alpha \in (0,1)$, зависящая только от размерности пространства n и коэффициентов a_{ij}, такая, что семейство $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ компактно в $C^\alpha(Q')$ для любого цилиндра $Q' \Subset Q_T$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00446.

Список литературы

[1] *Aronson D. G.* Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 890–896.

[2] *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931–954.

[3] *Moser J.* A Harnack inequality for parabolic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 1. P. 101–134.

О разрешимости стационарной и нестационарной нелинейных нелокальных задач радиационно-кондуктивного теплообмена в системе тел со свойствами, зависящими от частоты излучения

Амосов А. А. (Московский энергетический институт, Россия)

Нестационарный процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в системе $G = \cup_{j=1}^n G_j$ непрозрачных тел со свойствами поверхностей, зависящими от частоты излучения ν, описывается начально-краевой задачей

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{A}(x,t,u)\nabla u) = f, \quad (x,t) \in G \times (0,T), \qquad (1)$$

$$(\mathbf{A}(x,t,u)\nabla u, n) + \int_0^\infty \epsilon_\nu [h_\nu(u) - \mathcal{L}_\nu(\epsilon_\nu h_\nu(u))]\, d\nu + g, \quad (x,t) \in S, \qquad (2)$$

$$(\mathbf{A}_i(x,t,u)\nabla u_i, n_i) + \int_0^\infty \varkappa_\nu [h_\nu(u_i) - h_\nu(u_j)]\, d\nu, \quad (x,t) \in S_{ij},\ i \neq j, \qquad (3)$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad x \in G. \qquad (4)$$

Здесь $S = (\partial G \setminus \cup_{i\neq j}\Gamma_{ij}) \times (0,T)$, $S_{ij} = \Gamma_{ij} \times (0,T)$, $\Gamma_{ij} = \partial G_i \cap \partial G_j$. Функция h_ν отвечает спектральному распределению Планка, интегральный оператор $\mathcal{L}_\nu$ — плотности падающего излучения.

В **[1]** установлены существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(4). Доказана теорема сравнения. Получены результаты об экспоненциальной суммируемости и ограниченности решений.

Аналогичные результаты о свойствах стационарной нелинейной нелокальной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе тел со свойствами, зависящими от частоты излучения, опубликованы в **[2]**.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства РФ по образованию и науке (государственный контракт П690 от 20.05.2010) и Совета по грантам Президента РФ (грант НШ-3439.2010.1).

Список литературы

[1] Amosov A. A. *Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with propierties depending on radiation frequency*, Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 165. № 1. pp. 1–41.

[2] Amosov A. A. *Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with propierties depending on radiation frequency*, Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164. № 3. pp. 309–344.

Свойства операторов дробного интегро-дифференцирования матричного порядка и их применение

Андреев А. А. (Самарский государственный технический университет, Россия)

Исмагилова Р. Р. (Самарский государственный технический университет, Россия)

Рассматривается система обобщенных интегральных уравнений Абеля на отрезке с внешними коэффициентами:

$$u(x)I_{a+}^{G}\psi + v(x)I_{b-}^{G}\psi = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}g(x), \quad x \in (a,b),$$

где $u(x)$, $v(x)$ — матрицы порядка $n \times n$; $g(x)$ — вектор-функция; G — постоянная матрица; $u(x)$, $v(x)$, G — функционально коммутативны. Действие матричного левостороннего и правостороннего операторов дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля на вектор-функцию $\psi(x) = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)^\top$ задается равенством

$$I_{\alpha}^{G}\psi \equiv D_{\alpha}^{-G} = \sum_{k=1}^{s} \nu^k(G) \sum_{n=0}^{m_k-1} \frac{(G-\lambda_k E)^n}{n!} \frac{d^k}{d\lambda^k}\Big(\frac{I_\alpha^\lambda \psi}{\nu^k(\lambda)}\Big)_{\lambda=\lambda_k},$$

где I_α^G при $\alpha = a+$ — левосторонний интеграл, $\alpha = b-$ — правосторонний интеграл; $\nu^k(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)^{-m_k}\prod_{k=1}^{s}(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, $\lambda_k \in \Lambda(G)$.

С помощью изученных ранее в **[1]** свойств операторов дробного интегро-дифференцирования матричного порядка данная система сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно вектор-функции

$$\varphi(x) = (b-x)^G I_{a+}^G \psi.$$

Известны необходимые и достаточные условия разрешимости системы

$$A(x)\varphi(x) + \frac{B(x)}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t-x} = f(x),$$

где $A(x) = u(x) + v(x)\cos G\pi$, $B(x) = v(x)\sin G\pi$, $f(x) = \Gamma^{-1}(G)g(x)r_b^{-G}$. При их соблюдении общее решение системы записывается в явной форме, с помощью которой можно получить, решая матричное уравнение Абеля **[2]**, искомую вектор-функцию $\psi(x)$.

Список литературы

[1] *Исмагилова Р. Р.* Свойства оператора обращения матричного уравнения Абеля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2010. № 5 (21). С. 237–243.
[2] *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.

Бифуркационные множества в задаче Ковалевской–Яхьи

Андреянов П. П. (МГУ им. Ломоносова, Россия)
Душин К. Ю. (МГУ им. Ломоносова, Россия)

В работе изучается задача о движении тяжелого гиростата, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а гиростатический момент $\vec{\lambda} = (0, 0, \lambda)$ постоянен и направлен вдоль оси динамической симметрии. Этой задаче соответствует динамическая система с гамильтонианом H и первыми интегралами G, Γ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^6(\omega, \nu)$:

$$H = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\omega, \omega\rangle + \nu \times \vec{a}, \quad G = \langle \mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}, \nu\rangle, \quad \Gamma = \langle \nu, \nu\rangle,$$

где через $\langle , \rangle$ обозначено стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^3$. В работе **[4]** Х. М. Яхьи был указан дополнительный интеграл K четвертой степени. Рассмотрим четырехмерную совместную поверхность уровня интегралов $\widetilde{G}$, Γ:

$$M^4_{g,\lambda} = \{(\omega, \nu) \mid G = g,\ \Gamma = 1\}.$$

На ней система становится вполне интегрируемой и имеет два непрерывных параметра: g — постоянную площадей и λ — гиростатический момент. Эта система была хорошо изучена для случаев $g = 0$ и $\lambda = 0$. Выяснилось, что некоторые важные топологические свойства системы, обнаруженные в граничных случаях, продолжаются на системы с параметрами $g > 0, \lambda > 0$, в то же время в них присутствуют принципиально новые эффекты, а топологические инварианты устроены гораздо сложнее.

Рассмотрим точку (g, μ) в области U, и отображение момента $K \times H$, где

$$U = \{(g, \lambda) \mid g > 0,\ \mu > 0\}, \qquad K \times H : M^4_{g,\lambda} \to \mathbb{R}^2(k, h).$$

Множество его критических значений $\Sigma_{g,\lambda}$ называется бифуркационной диаграммой. В работе **[1]** П. Е. Рябова было доказано, что множество $\Sigma_{g,\lambda}$ принадлежит дискриминантному множеству $D_{g,\lambda}$, которое задается объединением двух алгебраических кривых γ_1, γ_2, и показано, какую часть D необходимо отбросить, чтобы получить $\Sigma_{g,\lambda}$.

Бифуркационные диаграммы $\Sigma_{g,\lambda}$ в задаче Ковалевской–Яхьи и их перестройки представляют большой интерес для исследования топологии слоения Лиувилля. Цель настоящей работы— провести более подробный анализ семейства бифуркационных диаграмм $\Sigma_{g,\lambda}$ и описать, как они перестраиваются при изменении g, λ.

Список литературы

[1] Рябов П. Е. Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской–Яхьи. Дисс. Волгоград, 1997.
[2] Морозов П. В. Лиувиллева классификация некоторых интегрируемых систем механики твердого тела. Москва, 2006.

[3] Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской// Матем. сборник, 2000, Т. 191, № 2, С. 3–42.
[4] Яхья Х. М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата// Вестник МГУ сер. матем., механ., 1987, № 4, с. 88–90.
[5] Ошемков А. А. Труды Семинара по векторному и тензорному анализу вып. 25 часть 2. Издательство Московского Ун-та, 1993.
[6] Харламов М. П., Рябов П. Е. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхьи// Регулярная и хаотическая динамика, 1997, Т. 2, № 2.

О существовании решений параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях

Андриянова Э. А. (УГАТУ, Россия)
Мукминов Ф. Х. (Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия)

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для параболического уравнения с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i}, \quad k, p > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega). \tag{2}$$

Вопросы существования и единственности решения задачи рассматривались в работах Raviart P. A. (1970), Lions J. L. (1969), Bamberger A. (1977), Grange O., Mignot F. (1972), Bernis F. (1988). В основном рассматривались задачи в ограниченных областях. Сильное решение задачи в ограниченной области было установлено Raviart P. A. путем замены эволюционной производной разностным отношением. Bernis F. доказал существование слабого решения задачи в неограниченной области предельным переходом от решений, построенных в ограниченных областях Grange O., Mignot F. Однако работа со слабым решением вызывает затруднение при изучении, например, убывания решения при $t \to \infty$.

Мы предлагаем обычный способ построения сильного решения задачи сразу в неограниченной области на основе галеркинских приближений. Их построение мало чем отличается от предложенного Ж. Л. Лионсом в книге «Некоторые методы решения нелинейных краевых задач» для случая $k = 2$. Предлагаемый метод может быть адаптирован на существенно более широкий класс уравнений. Построенное решение при $\varphi \in L_k(\Omega)$, $\nabla\varphi \in L_p(\Omega)$ обладает следующими свойствами:

$$u \in C([0, T]; L_k(\Omega)), \quad \nabla u \in L_\infty((0, T); L_p(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial t}|u|^{k/2-1}u \in L_2(D^T).$$

Нетрудно также получить оценку $\|\nabla u(t)\|_{L_p} \leq Ct^{-1/p}$. Галеркинские приближения являются гладкими функциями, что облегчает доказательство для них разных оценок, которые затем предельным переходом распространяются на решение задачи (1), (2). В частности, в случае ограниченной области при

$p > k$ справедливы оценки

$$c(1+t)^{-1/(p-k)} \le \|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \le M t^{-1/(p-k)}, \quad t > 0. \tag{3}$$

При $p = k$ убывание экспоненциальное

$$c \exp(-\Lambda t) \le \|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \le C \exp(-\lambda t).$$

Оценки (3) при $k = 2$ получены А. Ф. Тедеевым (1992) и Alikakos N., Rostmanian R. (1982) для задачи Коши.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00118-а.

Об устойчивости решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений

Анкилов А. В. (Ульяновский государственный технический университет, Россия)
Вельмисов П. А. (Ульяновский государственный технический университет, Россия)

В работе, представленной данным сообщением, на основе построенных математических моделей исследуется динамическая устойчивость деформируемых (вязкоупругих, упругих) элементов (пластин, стержней) конструкций с учетом взаимодействия с дозвуковым или сверхзвуковым потоком жидкости или газа. Исследования проводятся для элементов летательных и подводных аппаратов, трубопроводных систем. Определение устойчивости деформируемых элементов соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову.

В работе для решения связанных задач аэрогидроупругости используется два подхода. Первый подход основан на построении решения аэрогидродинамической части задач методами теории функций комплексного переменного, при втором подходе используется метод Фурье. При этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы элементов конструкций. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний элементов решение задач сводится к исследованию систем связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов.

Например, для плоской задачи аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании дозвуковым потоком идеального газа тонкостенной конструкции — модели крыла, составными частями которого являются n упругих элементов, получена система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$-E_k F_k \left({u_k}' + \frac{1}{2} {w_k}'^2 \right)' + M_k \ddot{u}_k = 0,$$

$$-E_k F_k \left[{w_k}' \left({u_k}' + \frac{1}{2} {w_k}'^2 \right) \right]' + M_k \ddot{w}_k + D_k {w_k}'''' + N_k w_k'' + \beta_{0k} w_k +$$

$$+\beta_{1k}\dot{w}_k+\beta_{2k}\dot{w}_k''''=-\frac{\rho}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_{2i-1}}^{a_{2i}}\big(\ddot{w}_i(\tau,t)+V\dot{w}_i'(\tau,t)\big)\,K(\tau,x)\,d\tau-$$

$$-\frac{V\rho}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_{2i-1}}^{a_{2i}}\big(\dot{w}_i(\tau,t)+Vw_i'(\tau,t)\big)\times\frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x}\,d\tau+$$

$$+\frac{V^2\rho}{2\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{a_{2i}}^{a_{2i+1}}\Big(f_i^{+\prime}(\tau)+f_i^{-\prime}(\tau)\Big)\,G(\tau,x)\,d\tau,$$

$x\in(a_{2k-1},a_{2k})$, $k=1\div n$, где штрих обозначает производную по x и τ, а точка — производную по t; $w_k\,(x,t)$ и $u_k\,(x,t)$ $(k=1\div n)$ — поперечные и продольные деформации элементов в направлении осей Oy и Ox соответственно; $f_k^{\pm}\,(x)$ $(k=1\div(n-1))$ — функции, определяющие форму недеформируемых частей профиля; V, E_k, F_k, M_k, D_k, N_k, β_{0k}, β_{1k}, β_{2k} $(k=1\div n)$ — некоторые постоянные; $K(\tau,x)$, $G(\tau,x)$ — некоторые функции.

Разработаны аналитические методики исследования динамической устойчивости в задачах аэрогидроупругости, основанные на построении функционалов для подобных систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Изучается устойчивость элементов при различных способах их закрепления и расположения на конструкциях.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ (2009–2013 гг.), ГК № П1122.

Локальная предмаксимальность и гиперболичность

Аносов Д. В. (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Математический институт РАН имени В. А. Стеклова, Россия)

Свойство локальной предмаксимальности инвариантного множества F (инвариантные множества подразумеваются компактными) топологической динамической системы состоит в том, что в любой его окрестности имеется локально максимальное инвариантное множество, содержащее F. В этом определении говорится о поведении траекторий, расположенных вне F (хотя и близких к F). Но оказывается, что в классе гиперболических множеств наличие или отсутствие у F данного свойства всецело определяется динамикой на самом F.

Асимптотики сдвинутых решений уравнений Н. Ковалевского

Арансон А. Б. (НИИ Дальней Радиосвязи, Россия)

Рассматривается движение твердого тела вокруг неподвижной точки. В общем случае это движение описывается системой уравнений Эйлера–Пуассона [**1**].

Один из частных случаев этого движения описывается уравнениями Н. Ковалевского [**2**]. Для случая, когда независимая переменная стремится к нулю или бесконечности, с помощью алгоритмов степенной геометрии

А. Брюно, В. Лунев и И. Гашененко **[3]** вычислили все локальные и асимптотические разложения решений уравнений Н. Ковалевского и с их помощью — все полиномиальные решения этих уравнений.

Теперь рассматривается случай, когда в уравнениях Н. Ковалевского независимая переменная стремится к отличной от нуля и бесконечности константе. Для этого в независимой переменной p выделена постоянная часть p_0, являющаяся новым параметром, а уравнения Н. Ковалевского принимают вид **[4]**

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tau+\frac{1}{2}\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}+a_3\frac{d\tau}{d\tilde{p}}\tilde{p}+a_4\tau+a_2\sigma+a_3p_0\frac{d\tau}{d\tilde{p}}+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+a_5\tilde{p}^2+2a_5p_0\tilde{p}+\left(a_5p_0^2+a_1\right)=0,\\
&\sigma\frac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2}+\frac{1}{2}\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}+b_2\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{p}+b_3\sigma+b_2p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}+b_4\tau+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+b_5\tilde{p}^2+2b_5p_0\tilde{p}+\left(b_5p_0^2+b_1\right)=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где $\tilde{p}=p-p_0\in\mathbb{C}$ — независимая переменная, $p_0=\mathrm{const}\in\mathbb{C}$, $0<|p_0|<\infty$, $\sigma,\tau\in\mathbb{C}$ — независимые переменные, коэффициенты $a_1,\ldots,a_5$, $b_1,\ldots,b_5$, $c_1,\ldots,c_5$, $d_1,\ldots,d_{13}$ — рациональные выражения от параметров уравнений Эйлера–Пуассона.

Для системы уравнений (1) при $\tilde{p}\to 0$ вычисляются степенные разложения ее решений вида

$$\sigma=\tilde{p}^{\alpha}\left(\sigma_0+\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j\tilde{p}^{j\Delta}\right),\quad \tau=\tilde{p}^{\beta}\left(\tau_0+\sum_{j=1}^{\infty}\tau_j\tilde{p}^{j\Delta}\right),\tag{2}$$

где $\sigma_0,\sigma_j,\tau_0,\tau_j\in\mathbb{C}$, $\sigma_0,\tau_0\neq 0$, $\alpha,\beta,\Delta\in\mathbb{Q}$, $\Delta>0$. Слагаемые $\sigma_0\tilde{p}^{\alpha}$, $\tau_0\tilde{p}^{\beta}$ называются *первыми приближениями* решений уравнений (1).

С помощью алгоритмов степенной геометрии, реализованных в виде компьютерных программ и скриптов для системы символьных вычислений Maxima **[4]**, вычислено семь разложений вида (2). Пары показателей степеней (α,β) первых приближений решений равны: $(0,3)$, $(0,3/2)$, $(0,4/3)$, $(0,1)$, $(1/2,1)$, $(3/2,3/2)$, $(0,0)$. Для пяти разложений заменой переменных и коэффициентов получаются еще пять разложений решений с показателями (β,α) первых приближений решений.

Список литературы

[1] *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТТЛ, 1953.

[2] *Kowalevski N.* Eine neue partikulare Losung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Korpers um einen festen Punkt// Math. Ann. 1908, B. 65, S. 528–537.

[3] *Брюно А. Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы// ПММ. 2007. Т. 71. № 2. С. 192–226.

[4] *Арансон А. Б.* Вычисление степенных разложений решений модифицированной системы ОДУ Н. Ковалевского алгоритмами степенной геометрии// Программирование. 2011. № 2. С. 39–52.

Об исследовании дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, методами теории накрывающих отображений

Арутюнов А. В. (Российский университет дружбы народов, Россия)
Жуковский Е. С. (Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия)
Жуковский С. Е. (Российский университет дружбы народов, Россия)

Работа посвящена применению теории α-накрывающих отображений [**1**-**3**] к исследованию дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Найдены условия существования решений и их непрерывной зависимости от начальных условий и параметров уравнений. В полученных утверждениях не используется гладкость входящих в уравнения функций.

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Обозначим через $B_X(u,r)$ замкнутый шар пространства X с центром в u радиуса $r \geq 0$. Пусть задано число $\alpha > 0$, множества $W \subseteq Y$, $\mathfrak{A} \subseteq X \times \mathbb{R}_+$.

Определение 1. Отображение $F : X \to Y$ назовем *α-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$*, если для любых $(u,r) \in \mathfrak{A}$ имеет место включение
$$B_Y(F(u),\alpha r) \bigcap W \subseteq F\big(B_X(u,r)\big).$$

Пусть заданы: замкнутое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $\{A_i\} \subset \mathbb{R}^n$ и последовательность функций $f_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условию Каратеодори. Рассмотрим при каждом $i = 1,2,\ldots$ задачу Коши для не разрешенного относительно производной дифференциального уравнения
$$f_i(t,x,\dot{x}) = 0, \quad \dot{x} \in \Omega, \quad t \in [a,b], \quad x(a) = A_i. \tag{1}$$
Решение задачи (1) будем искать в классе AC_∞ абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \Omega$ с существенно ограниченной производной.

Пусть задана функция $u_0 \in AC_\infty$. Положим $w_i(t) = f_i(t,u_0(t),\dot{u}_0(t))$, $t \in [a,b]$. Пусть имеет место сходимость $\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |w_i(t)| \to 0$, $A_i \to u_0(a)$. В работе получены условия разрешимости при каждом i задачи (1) и существования такого решения $x_i \in AC_\infty$, что $\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |\dot{x}_i(t) - \dot{u}_0(t)| \to 0$. Основным является предположение, что существуют такие положительные α, R, ν, что для любого $i = 1,2,\ldots$ при п. в. $t \in [a,b]$ при любом $x \in B_{\mathbb{R}^n}(u_0(t),\nu)$ отображение $f_i(t,x,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ является α-накрывающим множество $B_{\mathbb{R}^m}(f_i(t,x,\dot{u}_0(t)),\alpha R)$ на совокупности
$$\mathfrak{A}(t) = \{\,(v,r) \,:\, v \in B_\Omega(\dot{u}_0(t),R),\ 0 \leq r \leq R - |v - \dot{u}_0(t)|\,\}.$$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (контракт № 16.740.11.0426 от 26 ноября 2010 года), поддержана РФФИ, грант 09-01-97503.

Список литературы

[1] *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. P. 105–127.

[2] *Арутюнов А. В., Аваков Е. Р., Жуковский Е. С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. № 5. С. 613–634.
[3] *Арутюнов А. В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009, Т. 86. Вып. 2, С. 163–169.

Ограничения на скорость убывания на бесконечности в неограниченной области решения линейного эллиптического уравнения второго порядка, главная часть которого имеет дивергентную форму

Астахов А. Т. (Воронежский государственный университет, Россия)

Теорема 1. *Пусть $u(x) = u(x_1,\dots,x_n)$, $n \geqslant 1$ — решение эллиптического уравнения*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+f^2(x)u(x)=0,$$

определенное при $|x| \geqslant R_0 > 0$. Пусть также выполняются условия:

1°. $a_{ij}(x) > 0$, $\forall i,j = 1,\dots,n$, $f^2(x) \in C^\infty(|x| \geqslant R_0)$;

2°. $\frac{f^2(x)}{a_{jj}(x)} - 1 = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ *при* $|x| \to \infty$;

3°. $a_{ij}(x) = o\left(\frac{a_{jj}(x)}{|x|}\right)$, $\forall i,j = 1,...,n$, $i \neq j$;

4°. $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} = o\left(\frac{a_{jj}(x)}{|x|}\right)$, *при* $|x| \to \infty$, $\forall i,j = 1,...,n$;

5°. $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant R+\varepsilon}|u(x)|^2\,dx = 0$, *где* $\varepsilon \neq 0$ *— фиксированное число.*

Тогда $u(x) \equiv 0$.

Следствие 1. *Пусть $u(x) = u(x_1,\dots,x_n)$, $n \geqslant 1$ — решение эллиптического уравнения*

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+f^2(x)u(x)=0,$$

определенное при $|x| \geqslant R_0 > 0$. Пусть также выполняются условия:

1°. $a_j(x) > 0$, $\forall j = 1,\dots,n$, $f^2(x) \in C^\infty(|x| \geqslant R_0)$; $\frac{f^2(x)}{a_j(x)} - 1 = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ *при* $|x| \to \infty$;

2°. $\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} = o\left(\frac{a_j(x)}{|x|}\right)$ $\forall j = 1,\dots,n$ *при* $|x| \to \infty$;

3°. $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant R+\varepsilon}|u(x)|^2\,dx = 0$, *где* $\varepsilon \neq 0$ *— фиксированное число.*

Тогда $u(x) \equiv 0$.

Замечание 1. В случае $a_{ij}(x) = a_j(x)$, $\forall i,j = 1,\dots,n$ теорема 1 не имеет места.

Замечание 2. В случае $a_j(x) = a(x)$, $\forall j = 1,\dots,n$ следствие 1 остается справедливым.

Два метода вычисления коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша

Ахтямов А. М. (Институт механики УНЦ РАН, Россия)

Рассмотрим несамосопряженную спектральную задачу

$$a\,\Delta u(x) + b\,\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^2\,u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$\alpha\,\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \lambda\,u(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ — производная по внешней нормали, а Ω — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, которую можно локально выпрямить гладкими преобразованиями координат.

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что все собственные значения задачи (1)–(2) простые.

Согласно методу, предложенному в работах **[1]** и **[2]**, рассматриваемая задача допускает линеаризацию в пространстве $H = H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$.

Более точно, в пространстве H рассмотрим линейный оператор L, определенный равенством $L(f_0,\, f_1) = \left(f_1,\ -a\,\Delta f_0 - b\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)$ с областью определения

$$D(L) = \left\{ \widetilde{f} = (f_0,\, f_1)\ :\ f_0 \in H^2(\Omega), \quad f_1 \in H^1(\Omega), \quad \alpha\,\frac{\partial f_0}{\partial \overline{n}} + f_1 = 0 \right\}.$$

Тогда линейная спектральная задача $L\widetilde{f} = \lambda\widetilde{f}$ имеет те же собственные значения, что и задача (1)–(2), а собственный элемент оператора L, соответствующий собственному значению λ_k, имеет вид $\widetilde{f}_k = (u_k,\, \lambda_k\, u_k)$, где u_k — собственная функция задачи (1)–(2), отвечающая тому же собственному значению λ_k. Из **[2]** следует, что собственные элементы образуют полную и минимальную систему в пространстве H.

Вычислим коэффициенты $\{c_k\}$ разложения элемента $\widetilde{f} \in H$ в ряд по системе $\{\widetilde{f}_k\}$.

Теорема 1. *Если $\widetilde{f} = \sum c_k\,\widetilde{f}_k$ — разложение элемента $\widetilde{f}$ по собственным функциям оператора L, то коэффициенты c_k находятся по формулам $c_k = p_k/q_k$, где*

$$p_k = -\alpha a \int_\Omega f_0\,\Delta\overline{v_k}\,dx + \alpha\,\lambda_k \int_\Omega f_1\,\overline{v_k}\,dx + \int_\Gamma (\alpha\,b\,K - a\,\lambda_k)\,f_0\,\overline{v_k}\,ds,$$
$$q_k = -\alpha a \int_\Omega u_k\,\Delta\overline{v_k}\,dx + \alpha{\lambda_k}^2 \int_\Omega u_k\,\overline{v_k}\,dx + \int_\Gamma (\alpha\,b\,K - a\,\lambda_k)\,u_k\,\overline{v_k}\,ds.$$

Здесь $K = \sum_{i=1}^{n} n_i$ (n_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали); v_k — собственные функции сопряженной к (1)–(2) задачи.

Коэффициенты вычислены двумя методами:

1°. с помощью сопряженного оператора L^*;

2°. с помощью сопряженного пучка операторов, действующего в пространстве $L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma)$.

Список литературы

[1] *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.

[2] *Шкред А. В.* О линеаризации спектральных задач с параметром в граничном условии и свойствах производных цепочек М. В. Келдыша // Матем. заметки. Т. 46. Вып. 4. 1989. С. 99–109.

Гравитационные волны квазифотонного типа на поверхности жидкости

Бабич В. М. (С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Россия)

Попов А. И. (С.-Петербургский государственный университет, Россия)

Изучаются квазифотоны (особого класса волновые пакеты) для волн на поверхности тяжелой жидкости. Эта задача актуальна в связи с изучением распространения и развития волн в океане. Квазифотон — это разложение вида:

$$\Phi \sim e^{\frac{i\theta(\tau,\xi^1,\xi^2)}{\varepsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(\tau,\xi^1,\xi^2,z)(i\varepsilon)^j, \qquad \tau=\varepsilon t, \quad \xi^1=\varepsilon x^1, \quad \xi^2=\varepsilon x^2. \quad (1)$$

где в свою очередь θ и Φ_j — формальные степенные ряды:

$$\theta=\theta^{(0)}+\theta^{(1)}+\theta^{(2)}+\ldots.., \quad \Phi_j=\Phi_j^{(0)}+\Phi_j^{(1)}+\Phi_j^{(2)}+\ldots.. \quad (2)$$

Здесь $\theta^{(r)}=\theta^{i_1\ldots..i_r}(\tau)\eta^{i_1}\cdot\ldots..\cdot\eta^{i_r}$, $\Phi_l^r=\Phi_l^{i_1\ldots..i_r}(\tau,z)\eta^{i_1}\cdot\ldots..\cdot\eta^{i_r}$. $\eta^i=\xi^i-\xi^i(\tau)$, $i=1,2$, где $\xi^i=\xi^i(\tau)$ — это некоторый фиксированный ПВ-луч.

Целью данной работы является построение указанного асимптотического пространственно-временного лучевого ряда (ПВЛ-ряда). Рассматриваются лучевые и сосредоточенные в окрестности ПВ-луча решения (квазифотоны) для уравнений динамики волн тяжелой жидкости. При построении как лучевых решений, так и квазифотонов, задача сводится к уравнениям эйконала и переноса на поверхности жидкости. Для исследования уравнений переноса применяются энергетические соображения, что требует выражений для старших членов энергии и потока энергии лучевых решений и соответствующего закона сохранения усредненной энергии. Из условий разрешимости задачи первого приближения получается дифференциальное уравнение переноса для амплитудной функции нулевого приближения. Использование полученного ранее закона сохранения энергии дает возможность представить уравнение переноса в дивергентной форме, что позволяет решить уравнения переноса в лучевых координатах. Построение решений для высших приближений проводится уже элементарно.

Найдены асимптотические представления для θ и Φ_j. В частности, окончательное выражение для квазифотона в первом приближении:

$$\Phi \sim e^{\frac{i}{\varepsilon}(\theta_0+\theta_j\eta^j+\frac{1}{2}(\Gamma\eta,\eta))} \cdot \frac{\psi_0(0,0)}{\sqrt{J}} \cdot \frac{\cosh(k(z+H))}{\cosh(kH)}. \quad (3)$$

Здесь

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial s} & \frac{\partial \eta^1}{\partial s} & \frac{\partial \eta^2}{\partial s} \\ 0 & \frac{\partial \eta^1}{\partial a^1} & \frac{\partial \eta^2}{\partial a^1} \\ 0 & \frac{\partial \eta^1}{\partial a^2} & \frac{\partial \eta^2}{\partial a^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta^1}{\partial a^1} & \frac{\partial \eta^2}{\partial a^1} \\ \frac{\partial \eta^1}{\partial a^2} & \frac{\partial \eta^2}{\partial a^2} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где a^1, a^2 — координаты начала ПВ-луча на плоскости $\tau = 0$. Мы воспользовались тем, что по условию „опорный луч" квазифотона проходит через начало координат и что a^1, a^2 — малы, тогда в первом приближении

$$\psi_0(a^1, a^2) = \psi_0(0,0) + O(\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}). \tag{5}$$

Список литературы

[1] *Бабич В. М., Попов А. И.* Квазифотоны волн на поверхности тяжелой жидкости. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 379. С. 5–23.

Эквивалентность систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Багдерина Ю. Ю. (Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия)

Рассматриваются системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для некоторых классов таких систем, замкнутых относительно произвольных невырожденных замен переменных, решается проблема эквивалентности. Т. е. строится базис дифференциальных инвариантов соответствующей группы преобразований эквивалентности, а также операторы инвариантного дифференцирования. Полученные результаты используются для установления эквивалентности некоторых конкретных систем и нахождения связывающего их преобразования.

Приближение псевдодифференциальных операторов на классах периодических функций многих переменных

Базарханов Д. Б. (Институт математики, Казахстан)

Пусть $k, l, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$; $\mathrm{z}_l = \{1, \ldots, l\}$; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathbb{T}^l = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^l$ — l-мерный тор. Для $a, b \in \mathbb{R}^l$ пусть $ab = a_1 b_1 + \ldots + a_l b_l$, $|a| = |a_1| + \cdots + |a_l|$. Фиксируем $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : |m| = k$. Представим $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\kappa_0 = 0$, $\kappa_\nu = m_1 + \ldots + m_\nu$, $\mathrm{K}_\nu = \{\kappa_{\nu-1} + 1, \ldots, \kappa_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{z}_n$. Если $\mathrm{z} = \{\nu_1, \ldots, \nu_l\} \subset \mathrm{z}_n$ $(1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_l \leq n)$, то $x^{\mathrm{z}} = (x^{\nu_1}, \ldots, x^{\nu_l})$, $y_{\mathrm{z}} = (y_{\nu_1}, \ldots, y_{\nu_l})$ для $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^{m_{\mathrm{z}}} \equiv \mathbb{T}^{m_{\nu_1} + \ldots + m_{\nu_l}}$.

Пусть

$$\tilde{a}(x, D) : f(x) \to \tilde{a}(x, D) f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) \tilde{a}(x, \xi) e^{2\pi i \xi x}$$

— периодический псевдодифференциальный оператор (ПДО) с символом $\widetilde{a} : \mathbb{T}^k \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{C}$, $\widetilde{a}(\cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^k)$ $\forall \xi \in \mathbb{Z}^k$ $(\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^k} f(x) e^{-2\pi \xi x} dx$ — коэффициенты Фурье $f)$.

В докладе рассмотрим приближение ПДО из класса $\widetilde{\Psi}^{t\,\upsilon\,K\,m}_{1\,0\,\varepsilon\,\vartheta}$ (см. определение ниже) на функциональном классе $\widetilde{F}^{s\,m}_{p\,q}$ в метрике $L_r(\mathbb{T}^k)$ линейным методом, использующим конечную спектральную информацию о символе $\widetilde{a}$ и функции f $(1 \le p, q, r, \vartheta \le \infty;\ s, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+,\ t \in \mathbb{R}^n,$ $K \in \mathbb{N}^n : 0 < s_\nu - t_\nu < \upsilon_\nu,\ m_\nu < K_\nu,\ \nu \in \mathrm{z}_n;\ \varepsilon \in [0,1]^n)$. Здесь $\widetilde{F}^{s\,m}_{p\,q}$ — класс типа Никольского–Бесова $\widetilde{B}^{s\,m}_{p\,q}$ или Лизоркина–Трибеля $\widetilde{L}^{s\,m}_{p\,q}$ (см. определение в [**1**]). Конструкция этого линейного метода использует представление $\widetilde{F}^{s\,m}_{p\,q}$ с помощью всплесков, полученное в [**1**]. При оценке погрешности приближения привлекаются полученные ранее оценки поперечников Фурье класса $\widetilde{F}^{s\,m}_{p\,q}$ в $L_r(\mathbb{T}^k)$, частично анонсированные в [**2**].

Определение 1. Пусть $t \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon \in \mathbb{R}^n_+$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $K \in \mathbb{N}^n$; $1 \le \vartheta \le \infty$. Класс $\widetilde{\Psi}^{t\,\upsilon\,K\,m}_{1\,0\,\varepsilon\,\vartheta}$ состоит из ПДО с символами $\widetilde{a}$, удовлетворяющими условиям

$$\forall \mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^k_0 : \alpha_\kappa \le K_\nu,\ \kappa \in \mathrm{k}_\nu,\ \nu \in \mathrm{z}_n \exists\, c_{\alpha\,\beta}(\mathrm{z}) = c_{\alpha\,\beta}(\widetilde{a}, \mathrm{z}) > 0 :$$

$$|\Delta^\alpha_{(\xi)} \partial^\beta_{(x)} \widetilde{a}(x,\xi)| \le c_{\alpha\,\beta}(\varnothing) \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} (1 + \sqrt{\xi^\nu \xi^\nu})^{t_\nu - |\alpha^\nu|}, \quad x \in \mathbb{T}^k,\ \xi \in \mathbb{Z}^k;$$

$$\|\Delta^\alpha_{(\xi)} \partial^\beta_{(x)} \widetilde{a}(x,\xi) \mid \widetilde{B}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\, m_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \le c_{\alpha\,\beta}(\mathrm{z}) \prod_{\nu \in \mathrm{z}} (1 + \sqrt{\xi^\nu \xi^\nu})^{t_\nu - |\alpha^\nu| + \upsilon_\nu \varepsilon_\nu} \times$$

$$\times \prod_{\nu \in \dot{\mathrm{z}}} (1 + \sqrt{\xi^\nu \xi^\nu})^{t_\nu - |\alpha^\nu|}, \quad x^{\dot{\mathrm{z}}} \in \mathbb{T}^{m_{\dot{\mathrm{z}}}},\ \xi \in \mathbb{Z}^k \quad (\mathrm{z} \ne \varnothing)$$

(здесь $\Delta^\alpha_{(\xi)}$ $(\partial^\alpha_{(x)})$ — смешанная разность (производная) порядка α по ξ (по x), норма $\|\cdot \mid \widetilde{B}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\, m_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\|$ вычисляется по x^{z}; $\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}$).

Список литературы

[1] *Базарханов Д. Б.* Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I //Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 8–30.

[2] *Базарханов Д. Б.* Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля периодических функций многих переменных // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 2. С. 305—308.

Символическая динамика орбит второго вида задачи Хилла

Батхин А. Б. (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия)

Рассматривается плоская круговая задача Хилла и ее предельный интегрируемый вариант, называемый промежуточной задачи Энона, для которго исходная задача Хилла является сингулярным возмущением. Задача Хилла имеет многочисленные применения в небесной механике и звездной динамике (см., например, [**1**]). Динамика задачи определяется гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{r}, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, x_i — канонические координаты, y_i — сопряженные импульсы. Гамильтониан задачи Хилла можно представить как сингулярное возмущение функции Гамильтона интегрируемой промежуточной задачи Энона:

$H = H_0 + \varepsilon/r$. Тогда семейства периодических решений задачи Хилла можно исследовать с помощью порождающих решений невозмущенной задачи.

Среди решений промежуточной задачи Энона выделяется счетное число порождающих решений-дуг, однозначно определяемых условием последовательного прохождения через начало координат — особую точку уравнений движения задачи Хилла. Каждое из этих решений-дуг реализуется на некотором инвариантном многообразии, задаваемом дополнительным первым интегралом уравнений движения промежуточной задачи Энона. Из порождающих решений-дуг, как из «букв» некоторого «алфавита», составляются по определенным правилам «слова» — порождающие решения семейств периодических орбит задачи Хилла. Последовательность «букв» в «слове» определяет порядок перехода орбиты с одного инвариантного многообразия на другое, а множество всех правильно заданных «слов» определяет символическую динамику орбит второго вида по Пуанкаре задачи Хилла. Среди решений-дуг выделяются эпициклоидальные дуги, совершающих j оборотов вокруг начала координат (обозначаемые $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$) и два эллипса с центром на оси ординат (обозначаемые i и e). В **[2]** показано, что последовательность, составленная из дуг $\pm j$, i, e, в которой нет двух идущих подряд дуг i или e будет порождающим решением семейства периодических орбит задачи Хилла. Порождающие решения-дуги могут быть «сшиты» между собой с помощью гиперболических траекторий, являющихся решением классической задачи Кеплера.

Поведение семейств периодических решений задачи Хилла при продолжении по параметру определяется порядком следования решений-дуг в порождающем решении. Также удается предсказать некоторые свойства орбит порожденного семейства по структуре его порождающего решения. В терминах порождающих «слов»–решений дается классификация квазиспутниковых орбит с различной глобальной кратностью и различными симметриями.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00023.

Список литературы

[1] *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. Волгоград, Волгоградское научное издательство, 2009.
[2] *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Springer, 1997.

Метод мультиполей для решения некоторых смешанных краевых задач в двусвязных областях

Безродных С. И. (ВЦ РАН, ГАИШ МГУ, Россия)
Власов В. И. (ВЦ РАН, Россия)

Пусть G — односвязная область на комплексной плоскости z, содержащая $z = \infty$ в качестве своей внутренней точки. Ее граница $\partial G =: \gamma$ (не обязательно жорданова) состоит из конечного числа ляпуновских звеньев, $\gamma = \cup_{q\in\mathcal{Q}}\, \gamma_q$, $\gamma_q \in C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Здесь $\mathcal{Q} := \{1, 2, \ldots, Q\}$ — множество индексов, которое удобно представить в виде объединения двух множеств индексов $\mathcal{Q} = \mathcal{D} \cup \mathcal{K}$. Пусть g — двусвязная подобласть G, одной компонентой границы ∂g которой является γ, а второй — жорданов контур Γ, состоящий из конечного числа гладких звеньев Γ_m, соединяющихся под (внутренними) углами $\pi\alpha_m$, $\alpha_m \in (0,p)$, $p \in (1,+\infty)$.

Обозначим через ∂_q косую производную на γ_q, $q \in \mathcal{K}$, по направлению, составляющему угол $\pi\varkappa_q$ с касательным вектором к γ_q, где $\varkappa_q$ изменяется в интервале $(0,1)$. В области g рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\Delta\, u(z) = 0, \qquad z \in g; \qquad u(z') = h(z') \in L_p(\Gamma), \qquad z' \in \Gamma; \tag{1}$$

$$u(z) = 0, \quad z \in \gamma_q, \quad q \in \mathcal{D}; \qquad \partial_q\, u(z) = 0, \qquad z \in \gamma_q, \quad q \in \mathcal{K}. \tag{2}$$

Здесь $u(z')$ в (1) — некасательные предельные значения решения $u(z)$, принадлежащего классу типа Харди $e_p(g;\gamma)$ функций, гармонических в g, непрерывных вместе с требуемыми производными на $g\cup\gamma$, удовлетворяющих условиям (2) и имеющих в совокупности ограниченные L_p-нормы на контурах, "параллельных" Γ (об аналогичных классах см. [**1**]–[**3**]). Доказан изометрический изоморфизм пространства $e_p(g;\gamma)$ функций $u(z)$ и пространства $L_p(\Gamma)$ следов $u(z')$ этих функций на Γ, понимаемых как (определенные почти всюду на Γ) некасательные предельные значения.

Метод решения задачи (1), (2) основан на том, что в качестве аппроксимативной используется система $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ (где $\mathbb{Z}^+$ — неотрицательные целые числа) граничных мультиполей в G (с сингулярностью в $z=\infty$) для уравнения Лапласа, удовлетворяющих условию (2) и определяемых с помощью явных формул в терминах конформного отображения области G на внешность круга $\mathbb{U}$ и решения задачи Римана–Гильберта в $\mathbb{U}$. Установлено, что система $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ является полной и минимальной в $e_p(g;\gamma)$. Решение задачи (1), (2) находится как предел последовательности приближенных решений $u_N(z)$, представляемых в виде линейной комбинации функций $\Omega_k(z)$, коэффициенты которой находятся из проекционного принципа. Доказана сходимость $u_N(z)$ к $u(z)$ равномерно внутри $g\cup\gamma$ и сходимость производных внутри $g\cup\widetilde{\gamma}$ при достаточной гладкости дуги $\widetilde{\gamma} \subset \gamma$. Метод естественно обобщается на многосвязные области.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00837), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики" и Программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Список литературы

[1] *Власов В. И.* Об одном методе рещения некоторых плоских смешанных задач для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. №5. С. 1012–1015.

[2] *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.

[3] *Власов В. И., Скороходов С.Л.* Метод мультиполей для задачи Дирихле в двусвязных областях сложной формы // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №11. С. 1637–1651.

Квазибегущие волны, как „правильные“ расширения бегущих волн

Бекларян Л. А. (Центральный Экономико-Математический Институт РАН, Россия)

Исследуется конечно-разностный аналог волнового уравнения с потенциальным возмущением, моделирующий поведение бесконечного стержня под действием внешнего продольного силового поля. Для однородного стержня описание решений типа бегущей волны оказывается эквивалентным описанию всего пространства классических решений индуцированного однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) точечного типа с параметром в виде характеристики бегущей волны. Для неоднородного стержня, в силу тривиальности пространства решений типа бегущей волны, определяется их „правильное“ расширение в форме решений типа „квазибегущей“ волны. В отличие от однородного стержня, описание решений типа квазибегущей волны оказывается эквивалентным описанию уже всего пространства импульсных решений индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, факторизованного по отношению эквивалентности, связанного с определением решения типа квазибегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант № 09-01-90200, грант № 09-01-00324-а) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3038.2008.1).

Список литературы

[1] *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход // М.: Факториал Пресс, (2007), 288.

[2] *Френкель Я. И., Конторова Т. А.* О теории пластической деформации // ЖЭТФ, (1938), 8, 89–97.

[3] *Пустыльников Л. Д.* Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // УМН, (1997) 52:3 (315), 106–158.

[4] *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем // Ж.Успехи Матем. Наук, (1991), 46:2, 85–137.

[5] *Antonevich A., Lebedev A.* Functional-Differential Equations. I. C^*-theory. // Harlow: Longman, (1994).

[6] *Бекларян Л. А.* О квазибегущих волнах // Математический Сборник (2010), Т. 201, № 12, С.21–68.

Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений вида $y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod\limits_{i=0}^{n-1} \varphi_i(y^{(i)})$

Белозерова М. А. (Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Украина)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i(y^{(i)}), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[^{1)} \to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, ..., n)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$ [2] либо $-]Y_i, y_i^0]$. Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся (см. **[3]**) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sigma_i \neq 1$.

Определение 1. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решением, где $-\infty \leq \lambda_{n-1}^0 \leq +\infty$, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, ..., n-1),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y^{(n-1)}(t))^2}{y^{(n)}(t)\, y^{(n-2)}(t)} = \lambda_{n-1}^0.$$

Все правильно меняющиеся при $t \uparrow \omega$ решения уравнения (1) являются $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решениями. Более того, $P_\omega(1)$-решения (1) являются быстро меняющимися (см. **[3]**) при $t \uparrow \omega$ функциями.

С учетом вида функций $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ ясно, что для любого $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решения уравнения (1) имеют место представления $\varphi_i(y^{(i)}(t)) = |y^{(i)}(t)|^{\sigma_i + o(1)}$ при $t \uparrow \omega$. Таким образом, уравнение (1) является в некотором смысле близким к уравнению

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}|^{\sigma_i}, \tag{2}$$

которое возникает во многих областях естествознания.

Для уравнения (2) все $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решения были ранее детально исследованы в **[1, 2]**. В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решений уравнения (1) в особых случаях $\lambda_{n-1}^0 \in \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-2}{n-1}\right\}$. Также установлены неявные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

Список литературы

[1] Евтухов В. М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. 1992. Т. 145, № 2. С. 269–273.

[2] Евтухов В. М. Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. 1992. Т. 324, № 2. С. 258–260.

[3] E. Seneta, Regularly varying functions, Lecture Notes in Math., vol. 508, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений

Белоносов В. С. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия)

Рассматривается вопрос о применении асимптотического метода Н. М. Крылова–Н. Н. Боголюбова **[1]** к изучению уравнения $u_t = \varepsilon f(t, u)$,

---

[1] При $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$.

[2] При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

где $u(t)$ — функция со значениями в банаховом пространстве, f — непрерывный по (t,u) нелинейный оператор, ε — малый параметр. Напомним, что в основе метода лежит идея о разложении решений на плавный медленный дрейф и малые быстрые осцилляции: ищется такая замена переменных $u = \Phi(t, v; \varepsilon) \equiv v + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \varphi_k(t, v)$, чтобы $\varphi_k(t,v)$ были ограничены при $t \to \infty$, а исходное уравнение с точностью до слагаемых порядка ε^n приобрело вид $v_t = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k f_k(v)$. Функция v приближенно описывает медленный дрейф, на который «накладываются» быстрые осцилляции, задаваемые отображением Φ.

Существующие обоснования данного метода обусловлены весьма жесткими ограничениями **[2]**. Оператор f обычно считается периодическим или почти периодическим по t, а ряд дополнительных требований связан с преодолением известной проблемы «малых знаменателей» **[3]**. В докладе предлагается другая интерпретация: в уравнении для v допускаются не только автономные, но также медленно осциллирующие функции $f_k(t,v)$. Степень осцилляций любой (в том числе обобщенной) функции $g(t)$ характеризуется ее спектром $\sigma(g)$, то есть носителем преобразования Фурье $F[g]$, понимаемого в смысле теории распределений. Кроме того, в формуле для Φ вместо ε выбирается другой произвольный малый параметр δ, характеризующий масштаб пространственных искажений при замене переменных. Такой подход позволяет вообще освободиться от каких-либо ограничений, за исключением требований к гладкости функции f.

Установлено, что если $f(t,u)$ имеет непрерывные и ограниченные производные $D_u^m f$ порядков $m \leqslant n+1$, то для любого $\omega > 0$ найдется замена переменных

$$u = v + \sum_{k=1}^{n} \delta^k \varphi_k(t, v; \varepsilon, \delta),$$

приводящая исходное уравнение к виду $v_t = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k f_k(t, v; \varepsilon, \delta)$ с точностью до слагаемых порядка δ^n. Все функции f_k и φ_k, а также их производные $D_v f_k$ и $D_v \varphi_k$ непрерывны и ограничены, причем $\sigma(f_k) \subset \{\lambda : |\lambda| < 2\omega\varepsilon/\delta\}$, $\sigma(\varphi_k) \subset \{\lambda : |\lambda| > \omega\varepsilon/\delta\}$. На любом промежутке $0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon$ норма разности между точным и приближенным решениями оценивается сверху величиной $C(T)\delta^n$. Абстрактные результаты иллюстрируются приложениями к теории параметрического резонанса для нелинейных гиперболических уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00221), Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 2, проект № 121) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1.4918).

Список литературы

[1] *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

[2] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд-е 2-е. М.: Наука, 1974.

[3] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

Об асимптотическом поведении траекторий некоторых квадратичных отображений плоскости

Бельмесова С. С. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия)
Ефремова Л. С. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия)

Для однопараметрического семейства квадратичных отображений плоскости $\mathbf{R^2}$:

$$F_\mu(x,\, y) = (xy, (x-\mu)^2)$$

при каждом $\mu \in (0,1]$ установлено существование единственной инвариантной кривой, проходящей через неподвижную точку $(\mu+1;1)$.

Найденная неограниченная инвариантная кривая является графиком строго убывающей на интервале $(\mu, +\infty)$ функции. С использованием указанной кривой описано асимптотическое поведение траекторий точек некоторых неограниченных областей первого квадранта плоскости.

Дано полное описание динамики невозмущенного отображения F_0. В частности, доказано, что в каждом из открытых квадрантов K_i $(i=1,2,3,4)$ существуют слоения L_k^+ и L_j^- $(k=1,2,\ j=3,4)$ с аналитическими слоями

$$l_c^+ = \left\{(x;y) : y = \frac{c}{x^2}, c>0\right\} \qquad \text{в } K_1,\, K_2,$$
$$l_c^- = \left\{(x;y) : y = \frac{c}{x^2}, c<0\right\} \qquad \text{в } K_3,\, K_4;$$

причем слоения L_1^+ и L_2^+ инвариантны; слой l_1^+ является инвариантным, причем любая его точка, за исключением неподвижной точки $(1;1)$, является периодической периода два. Установлено также, что через любую точку $(x;y) \in K_i$ $(i = 1,2,3,4)$ проходит единственная прямая $\gamma_k = \left\{(x;y) \in \mathbf{R^2} : y = kx, k \in \mathbf{R^1}\right\}$ так, что для любого $k \neq 0$ справедливы соотношения $F_0(\gamma_k) = \gamma_{\frac{1}{k}}$, $F_0(\gamma_{\frac{1}{k}}) = \gamma_k$, и прямая γ_1 является инвариантной отностельно F_0.

Указанные выше свойства отображения F_0 позволяют перейти от F_0 к прямому произведению отображений прямой и с его помощью полностью описать асимптотическое поведение траекторий F_0, при этом

1°. для любой точки $(x;\, y) \in \left\{(x;y) : |y| < \frac{1}{x^2}\right\}$ имеют место равенства

$$\lim_{n\to+\infty} f_{0,n}(x,\, y) = 0,\ \lim_{n\to+\infty} g_{0,n}(x,\, y) = 0;$$

2°. для любой точки $(x;\, y) \in \left\{(x;y) : |y| > \frac{1}{x^2}\right\}$, имеют место равенства

$$\lim_{n\to+\infty} |f_{0,n}(x,\, y)| = +\infty,\ \lim_{n\to+\infty} g_{0,n}(x,\, y) = +\infty,$$

где $f_{0,n}$ и $g_{0,n}$ — первая и вторая координатные функции n-ой $(n \geq 1)$ итерации отображения F_0.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФА Рособразование, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009–2011 гг., грант НК-13/9.

Список литературы

[1] С. С. Бельмесова, Л. С. Ефремова. *О квадратичных отображениях некоторого однопараметрического семейства близких к невозмущенному отображению*, Труды МФТИ, Т. 2. № 2. 2010, С. 46–57.

Сингулярные возмущения степеней оператора Лапласа на торе

Беляев А. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Пусть $\mathbb{T}^d$ — тор в d-мерном пространстве, и $H^{s,p}(\mathbb{T}^d)$ — пространства Соболева на $\mathbb{T}^d$, где $-\infty \leqslant s \leqslant \infty$, $p > 1$. В пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим оператор Лапласа $L_0 u = \Delta u$. Имеем $L_0 \geqslant 0$, поэтому корректно определены положительные степени оператора L_0.

Мы изучаем оператор

$$Lu = -\Delta^\alpha u + q(x)u,$$

действующий в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$, где $q(x)$ – сингулярная функция из $H^{s,p}(\mathbb{T}^d)$ с негативным индексом гладкости $s < 0$.

Теорема 1. *Фиксируем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и обозначим*

$$M_\alpha = \begin{cases} H^{-\alpha,\,2}(\mathbb{T}^d), & \text{если} \quad \alpha > d/2, \\ H^{-\alpha+\varepsilon,\,n/\alpha}, & \text{если} \quad \alpha \leqslant d/2. \end{cases}$$

Тогда оператор L может быть корректно определен методом сумм квадратичных форм. Более того, если $q_k(x)$ — гладкие функции на торе $\mathbb{T}^d$, такие, что

$$\|q_k - q\|_{M_\alpha} \to 0,$$

а $L_k = \Delta^\alpha + q_k$, то $L_k \to L$ в смысле равномерной резольвентной сходимости.

Теорема 2. *Спектр оператора L дискретный, а для собственных значений $\lambda_k(L)$ справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_k(L) = \lambda_k(L_0) \cdot [1 + o(1)].$$

Система собственных и присоединенных функций оператора L полна в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$.

В доказательствах используются методы работ **[1, 2, 3]**.

Список литературы

[1] Нейман–заде М. И., Шкаликов А. А., Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространства мультипликаторов// Матем. заметки Т. 66, № 5 (1999), С. 723–733.

[2] Neiman-zade M. I., Shkalikov A. A., Strongly Elliptic Operators with Singular Coefficients// Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 13, No. 1 (2006), P. 70–78.

[3] Бак Дж. Г., Шкаликов А. А., Мультипликаторы в дуальных пространствах Соболева и операторы Шредингера с сингулярными потенциалами-распределениями// Матем. замеки Т. 71, № 5 (2002), С. 643–651.

Об устойчивости в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы

Бибиков Ю. Н. (Санкт-Петербургский государственный университет, Россия)

Рассматривается вещественно-аналитическая гамильтонова система с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия в начале координат.

Пусть гамильтониан имеет вид $H = H^0 + H^1$ с невозмущенной частью

$$H^0 = \frac{\lambda_1}{2m}(p_1^{2m} + mq_1^2) - \frac{\lambda_2}{2n}(p_2^{2n} + nq_2^2),$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, а $m > 1$, $n > 1$ — натуральные числа. Разложение возмущения H^1 по степеням p_1, q_1, p_2, q_2 не содержит членов порядка ниже $2N+|k-\ell|+1$, где N — наименьшее общее кратное чисел m и n, $N = m\ell = nk$, если, рассматривая p_1 как величину ℓ-го измерения, а переменную p_2 как величину k-го измерения, приписать переменным q_1, q_2 измерение, равное N.

Случаи, когда хотя бы одно из чисел m или n равно 1, рассмотрены в работах В. И. Арнольда–Ю. Мозера (см. [**1**]) и А. Г. Сокольского [**2**].

Доказаны две теоремы:

Теорема 1. *Если $n \neq m$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 2. *Если $n = m$, то положение равновесия условно устойчиво по Ляпунову для начальных данных, удовлетворяющих условию $H \neq 0$.*

Исследована также устойчивость на поверхности уровня $H = 0$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00734(а).

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики М.:Наука, 1989.
[2] *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. вып. 1. с.24–33.
[3] *Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости положения равновесия существенно нелинейных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Электронный журнал ≪Дифференциальные уравнения и процессы управления≫. 2010. № 4. с.26–32.

Изомонодромные деформации Мальгранжа

Бибило Ю. П. (ВШЭ, Россия)

Рассматривается семейство систем линейных д. у., которое голоморфно зависит от набора параметров $t \in D(t^0)$,

$$\frac{dy}{dz} = A(z,t)y, \quad A(z,t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_j+1}\frac{A^j_{-k}(t)}{(z-a_j(t))^k}, \quad \sum_{j=1}^{n} A^j_{-1}(t) = 0. \qquad (1)$$

При этом допускается, что (1) имеет иррегулярные резонансные особенности, то есть (1) не является системой общего положения.

Определение 1. Семейство (1) будем называть допустимой деформацией системы $dy/dz = A(z,t^0)y$, если выполнены следующие условия.

1°. $a_1(t),...,a_n(t)$ голоморфны, и $a_i(t) \neq a_j(t), \forall t \in D(t^0)$.
2°. Все ранги Пуанкаре (1) минимальны и постоянны по t.
3°. При деформации сектора Стокса переходят друг в друга параллельным переносом.

Определение 2. Допустимая деформация (1) системы $dy/dz = A(z,t^0)y$ называется изомонодромной, если для каждого значения $t \in D(t^0)$ найдется фундаментальное решение $Y(z,t)$ системы (1) такое, что выполнены следующие условия.

1°. Представлением монодромии, определенное при помощи $Y(z,t)$, совпадает с представлением монодромии системы $dy/dz = A(z,t^0)y$.
2°. Для всякой иррегулярной особенности $a_i(t)$ найдется набор фундаментальных решений $Y_1^i = Y,...,Y_{N_i}^i$, такой что соответствующий набор матриц Стокса не зависит от t.

В случае изомонодромных деформаций систем с иррегулярными резонансными особенностями справедлива следующая теорема, хорошо известная для фуксовых систем и иррегулярных систем общего положения.

Теорема 1. *Допустимая деформация* (1), $t = (a_1,...,a_n)$, *является изомонодромной тогда и только тогда, когда существует голоморфная* 1-*форма* ω, *такая, что*

1°. $\omega = A(z,t)dz$, *при каждом фиксированном значении параметра* $t \in D(t^0)$;
2°. $d\omega = \omega \wedge \omega$.

В докладе описывается общий вид такой дифференциальной формы ω и некоторые частные случаи.

Общий вид дифференциальной формы ω используется для изучения результатов изомонодромного слияния иррегулярных особых точек. Доказана теорема о том, что результатом нормализованного изомонодромного слияния нерезонансных иррегулярных точек системы 2×2 не может быть система с разветвленными особенностями.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-4270.2011.1).

Список литературы

[1] *D. V. Anosov.* Concerning the definition of isomonodromic deformation of Fuchsian systems // Ulmer Seminaire Euber Funktionalysis und Differentialgleichungen. 1997. № 2 C. 1–12.
[2] *А. А. Болибрух.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.

О параметрическом описании множества достижимости трехмерной нелинейной управляемой системы

Бондаренко Н. В. (Московский государственный университет, Россия)
Григорьева Э. В. (Texas Woman's University, США)
Хайлов Е. Н. (Московский Государственный университет, Россия)

В работе рассматривается управляемый процесс биологической очистки сточных вод, который на заданном отрезке времени описывается нелинейной системой трех дифференциальных уравнений со скалярным управлением. На это управление накладывается ограничение в виде отрезка. Всевозможные измеримые по Лебегу функции, принимающие свои значения из этого ограничивающего отрезка, образуют допустимые управления.

Первое уравнение исходной системы описывает изменение концентрации кислорода в очистном устройстве, второе — изменение концентрации загрязняющих веществ, третье — изменение концентрации аэробных микроорганизмов.

Сначала устанавливается продолжимость на заданный временной отрезок решений рассматриваемой системы, отвечающих произвольному допустимому управлению. Обосновывается их положительность и ограниченность всюду на этом отрезке.

Затем для исходной системы вводится множество достижимости. Оно оказывается компактным множеством, расположенным в положительном ортанте. Для исследования границы такого множества привлекается принцип максимума Понтрягина. С его помощью показывается, что каждой точке границы множества достижимости отвечает кусочно-постоянное управление, принимающее крайние значения из ограничивающего отрезка и имеющее не более двух переключений.

После чего вводятся некоторые вспомогательные конструкции и изучаются их свойства. Они поволяют затем построить параметрическое описание множества достижимости (его внутренности и границы) с помощью переключений кусочно-постоянных управлений, принимающих крайние значения из ограничивающего отрезка. Оказывается, что каждой внутренней точке этого множества соответствует указанное управление ровно с тремя переключениями, а каждой граничной точке отвечает такое управление с не более двумя переключениями.

Установленное параметрическое описание множества достижимости применяется в приближенных решениях задач оптимального управления для рассматриваемой системы.

О бесконечномерных группах Ли в гидродинамике вращающейся жидкости

Босых Н. Ю.
Чупахин А. П. (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН Новосибирский государственный университет)

Уравнения движения несжимаемой неоднородной жидкости в приближении β-плоскости описывают многомерные крупномасштабные движения сплошной среды в атмосфере и Мировом океане типа крупных вихрей, рингов, глобальных течений [**1, 2**]. Эти уравнения допускают в смысле Ли очень широкую бесконечномерную группу Ли непрерывных преобразований [**2**]. Знание этой группы позволяет строить широкие классы точных решений моделирующие вихревые закрученные течения типа смерчей и торнадо [**3**].

Для построения различных классов точных инвариантных и частично-инвариантных решений дифференциальных уравнений необходимо перечисление всех подалгебр алгебры Ли допускаемой уравнениями группы Ли преобразований с точностью до внутренних автоморфизмов [**4**].

В работе доказано, что группа Ли, допускаемая уравнениями вращающейся жидкости в приближении β-плоскости, содержит в качестве подгруппы группу диффеоморфизмов окружности. Строится набор подалгебр соответствующей бесконечномерной алгебры Ли с точностью до внутренних автоморфизмов. Исследуется связь бесконечномерной группы с производной Шварца и операторами Штурма-Лиувилля [**5**]. Построены новые точные решения уравнений гидродинамики β-плоскости, содержащие функциональный произвол. Соответствующие фактор-уравнения сводятся к неоднородным уравнениям Хопфа, исследуется природа образования сингулярностей в решении. Эти решения описывают восходящие вихревые потоки и имеют приложения в физике атмосферы и океана.

Работа выполнения при финансовой поддержке Программы 14 ОЭММ-ПУ, интеграционного проекта СО РАН № 65, РФФИ (проект № 08-01-00047), МОН РФ (грант № 2.1.1/3543).

Список литературы

[1] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане // М.: Мир, 1981.
[2] *Овсянников Л. В.* Уравнения динамической конвекции моря // Препринт Ин-та гидродинамики, Новосибирск, 1967.
[3] *Босых Н. Ю., Чупахин А. П.* Об одном частично инвариантном решении уравнений гидродинамики атмосферы // Вестник НГУ. Сер. Математика, 2010, Вып. 4, т. 20, с. 3–11.
[4] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1978.
[5] *Овсиенко В., Табачников С.* Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое. // УРСС, 2008.

Универсальный нелинейный анализ

Брюно А. Д. (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, Россия)

Разработан новый нелинейный анализ, основанный на степенной геометрии [**1**, **2**, **3**]. Он позволяет вычислять локальные и асимптотические разложения решений уравнений трех классов:

(A) алгебраических,
(B) обыкновенных дифференциальных,
(C) в частных производных,

а также систем таких уравнений. Основные концепции и алгоритмы — общие для всех классов уравнений. Кроме того, для каждого класса уравнений используются свои, дополнительные алгоритмы, ибо сложность решений возрастает при переходе к уравнениям следующих классов. Так, для алгебраического уравнения $f(x,y)=0$ вблизи особой точки $x=y=0$ все решения разлагаются в ряды

$$y=\sum c_s x^s, \tag{1}$$

где показатели $s>0$ рациональны, а коэффициенты c_s постоянны. Для решений $y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения $f(x,y,y'\dots,y^{(n)})=0$, где f — многочлен своих аргументов, имеются следующие четыре типа разложений вида (1):

1°. *Степенные,* с комплексными s, $|\operatorname{Im}s/\operatorname{Re}s|<\mathrm{const}$ и постоянными c_s.
2°. *Степенно-логарифмические*, где s — те же, а c_s — многочлены от $\ln x$.
3°. *Сложные*, где s — те же, а c_s — ряды по убывающим степеням $\ln x$.
4°. *Экзотические*, где s — вещественные, а c_s — ряды по степеням x^i.

Кроме того, имеются *экспоненциальные* разложения (тип 5)

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)c^k e^{k\varphi(x)},$$

где $b_k(x)$ и $\varphi(x)$ — степенные ряды, а C — произвольная постоянная; и другие типы.

Приложения. *Класс A.* 1. Множества устойчивости многопараметрических задач. *Класс B.* 2. Асимптотики и разложения решений уравнений Пенлеве [**3**]. 3. Периодические движения спутника вокруг его центра масс, движущегося по эллиптической орбите [**4**]. 4. Новые свойства движений волчка [**5**]. 5. Семейства периодических решений ограниченной задачи трех тел и распределение астероидов [**6**, **7**]. 6. Интегрируемость системы ОДУ [**8**]. *Класс C.* 7. Пограничный слой на игле [**9**]. 8. Эволюция турбулентного течения [**10**, **11**].

Список литературы

[1] *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
[2] *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.
[3] *Брюно А. Д., Горючкина И. В.* // Труды ММО. 2010. Т. 71. С. 6–118.
[4] *Брюно А. Д.* // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 3. С. 295–316.
[5] *Брюно А. Д.* // ПММ. 2007. Т. 71. № 2. С. 192–227.
[6] *Брюно А. Д., Варин В. П.* // ПММ. 2007. Т. 71. № 6. С. 1034–1066.
[7] *Брюно А. Д., Варин В. П.* // Астрономический вестник. 2011. Т. 45. № 4. С. 451–457.
[8] *Брюно А. Д., Еднерал В. Ф.* // ДАН. 2009. Т. 424. № 3. С. 299–303.
[9] *Брюно А. Д., Шадрина Т. В.* // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 224–287.
[10] *Bruno A. D.* // Ukrainean Mathematical Bulletin. 2008. Vol. 5. № 1. P. 32–45.
[11] *Брюно А. Д.* // Современные проблемы математики и механики. Математика. Динамические системы. МГУ. 2009. Т. 4. № 2. С. 24–54.

Об асимптотическом разложении контрастной структуры переменного типа для одного квазистационарного дифференциального уравнения второго порядка

Букжалев Е. Е. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Рассмотрим краевую задачу первого рода для следующего сингулярно возмущенного (по параметру ε) квазилинейного дифференциального уравнения:

$$\begin{gathered} \varepsilon\, y_{xx} = y_x\,(-\,2\,y - x + \tfrac{1}{2}\sin t), \quad (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}, \\ y(0,t,\varepsilon) = -1, \quad y(1,t,\varepsilon) = +1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{1}$$

Для решения задачи (1), имеющего вид контрастной структуры переменного типа, получена асимптотическая формула:

$$y_0(x,t,\varepsilon) = \,-\,\frac{\Delta x_0}{2} + \Big(1 + \frac{\Delta x_0}{2}\Big)\,\mathrm{th}\,\Big[\Big(1 + \frac{\Delta x_0}{2}\Big)\eta_0 + \frac{1}{2}\ln(1+\Delta x_0)\Big], \tag{2}$$

в которой $\Delta x_0 = \Delta x_0(t,\varepsilon)$ — корень уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta x_0 = \frac{\varepsilon}{2+\Delta x_0}\, W\Big[\,\frac{2}{\varepsilon}\,(2+\Delta x_0)\,(1+\Delta x_0)\exp\Big\{-\,\frac{2+\Delta x_0}{\varepsilon}\,\frac{1}{2}\sin t\Big\}\Big] \equiv \\ \equiv F(\Delta x_0, t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

где $W(x)$ — функция Ламберта, определяемая соотношениями:

$$We^W = x, \quad x \geqslant -1/e, \quad W \geqslant -1;$$

величина $\eta_0 = \eta_0(x,t,\varepsilon)$ равна

$$\eta_0(x,t,\varepsilon) = \tfrac{1}{\varepsilon}\,(x - x_0(t,\varepsilon) - \varepsilon\, x_1(t,\varepsilon)),$$

где

$$x_0(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\sin t + \Delta x_0, \quad x_1(t,\varepsilon) = \,-\,\frac{\varepsilon\,\Delta x_0}{\varepsilon + 2\,\Delta x_0}\,\Big[\Big(\frac{x_0}{\varepsilon}\Big)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{x_0}{\varepsilon}\Big].$$

Методом простых итераций для решения уравнения (3) построена итерационная последовательность:

$$\Delta x_0^{(0)} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sin t, & \sin t \leqslant 0, \\ \quad 0, & \sin t \geqslant 0, \end{cases} \quad \Delta x_0^{(n+1)} = F(\Delta x_0^{(n)}, t, \varepsilon), \quad n = \overline{0,\infty},$$

при этом $\Delta x_0(t,\varepsilon) = \Delta x_0^{(n)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}\ln^{n+1}\varepsilon)$.

Точность формулы (2) составляет $O(\varepsilon)$:

$$y(x,t,\varepsilon) = y_0(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon),$$

причем для сохранения этой точности в выражении для $y_0(x,t,\varepsilon)$ вместо Δx_0 можно использовать $\Delta x_0^{(2)}$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00319.

Список литературы

[1] *Васильева А. Б.* Контрастные структуры переменного типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2002. Т. 109: Дифференциальные уравнения. Сингулярные возмущения. С. 2080–2116.

[2] *Бутжалев Е. Е.* Асимптотическое разложение контрастной структуры переменного типа // Математические методы и приложения: Труды пятнадцатых математических чтений РГСУ (28–31 января 2006 года). М.: РГСУ, 2006. С. 28–30.

Непрерывная зависимость от параметров множества фазовых траекторий управляемой импульсной системы с фазовыми ограничениями по управлению

Булгаков А. И. (Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия)

Малютина Е. В. (Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия)

Филиппова О. В. (Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия)

Для формулировки задачи введем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $|\ \ |$, $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; K — метрическое пространство.

Пусть заданы непрерывная функция $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K \to \mathbb{R}^n$ и непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times K \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$. Рассмотрим управляемую систему с импульсными воздействиями

$$\begin{gathered}
\dot{x}(t) = f(t, x(t), \xi, u(t)), \quad t \in [a,b], \quad \xi \in K, \\
u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad t \in [a,b], \\
\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \ldots, p, \\
x(a) = x_0 \quad (x_0 \in \mathbb{R}^n),
\end{gathered} \tag{1}$$

где отображения $I_k : \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., p$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) -$
$- x(t_k)$, $t_k \in (a, b]$, $k = 1, 2, ..., p$.

Для данной задачи найдены условия непрерывной зависимости множества фазовых траекторий управляемой системы (1) от параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 2.1.1/9359; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 г.», госконтракты П688, № 14.740.11.0349, № 14.740.11.0682; темплан 1.8.11).

Список литературы

[1] *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

[2] *Булгаков А. И., Корчагина Е. В., Филиппова О. В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI // Вестник Тамб. ун-та. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275–1313.

[3] *Булгаков А. И., Панасенко Е. А., Сергеева А. О.* Продолжаемость допустимых пар управляемой системы с фазовыми ограничениями по управлению и запаздыванием // Вестник ТГУ. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1645–1647.

[4] *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[5] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.

Обратная задача для симметричного потенциала на графе-звезде

Бутерин С. А. (Саратовский госуниверситет, Россия)

Пусть в конечномерном евклидовом пространстве задан компактный граф типа звезды Γ, состоящий из m ребер длины $\pi/2$. Каждое ребро параметризовано переменной $x \in [0, \pi/2]$, причем $x = 0$ всегда соответствует внутренней вершине.

Рассмотрим на Γ краевую задачу Штурма–Лиувилля $L = L(q(x), h)$ с одним и тем же на всех ребрах вещественным потенциалом $q(x)$, стандартными условиями склейки во внутренней вершине и одинаковым краевым условием во всех граничных вершинах:

$$-y_j'' + q(x)y_j = \lambda y_j, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad j = \overline{1,m}, \quad q(x) \in L_2\Big(0, \frac{\pi}{2}\Big), \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = \ldots = y_m(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + \ldots + y_m'(0) = 0, \tag{2}$$

$$y_j'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + hy_j\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad h \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи L вещественны и (без учета кратности) образуют возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, причем*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l_2, \tag{4}$$

где

$$\omega = 2h + \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)\,dx.$$

При этом все собственные значения λ_{2n} простые, а λ_{2n+1} имеют кратность $m - 1$.

Рассмотрим обратную задачу: по спектру $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ краевой задачи $L(q(x), h)$ найти потенциал $q(x)$ и коэффициент h граничных условий.

Теорема 2. *Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет потенциал $q(x)$ и коэффициент h граничных условий.*

Следующая теорема дает критерий разрешимости обратной задачи.

Теорема 3. *Для того, чтобы произвольная последовательность попарно различных вещественных чисел $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ являлась спектром (без учета кратности) некоторой краевой задачи вида* (1)–(3), *необходимо и достаточно выполнение условия* (4).

При $m = 2$ рассматриваемый случай симметричного потенциала совпадает с классическим случаем симметричного потенциала на отрезке **[1]**, **[2]**. В общем случае обратные задачи для дифференциальных операторов на произвольных компактных деревьях и графах с циклами изучались в **[1]**, **[3]** (см. также литературу там).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС, гранты 10-01-00099, 10-01-92001-ННС-а.

Список литературы

[1] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
[2] *Мазур Т. В.* О разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля в симметричном случае // Известия Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Вып. 1. С. 21–24.
[3] *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs // J. Inverse and Ill-Posed Proplems 2010. V. 18. № 3. P. 245–261.

Об особенностях асимптотик погранслойных решений в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения

Бутузов В. Ф. (Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Исследование сингулярно возмущенных задач в случае кратного корня вырожденного уравнения началось в последние 3–4 года. Обнаружилось, что асимптотики погранслойных решений в этом случае обладают рядом особенностей по сравнению со случаем простого (однократного) корня вырожденного уравнения.

Рассмотрим в качестве примера сингулярно возмущенную краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}+\varepsilon A(x)\frac{du}{dx}+f(u,x,\varepsilon)=0,\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0,\varepsilon)=\frac{du}{dx}(1,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

где $f(u,x,\varepsilon)=-h(u,x)(u-\varphi(x))^2+\varepsilon f_1(u,x,\varepsilon)$, и, следовательно, вырожденное уравнение имеет двукратный корень $u=\varphi(x)$. В отличие от случая простого корня вырожденного уравнения, когда асимптотическое разложение решения представляет собой ряд по целым степеням ε, а погранслойные переменные имеют вид

$$\xi_0=\frac{x}{\varepsilon},\quad \xi_1=\frac{1-x}{\varepsilon}, \tag{3}$$

в данном случае разложение решения задачи (1), (2) ведется по дробным степеням ε, вид погранслойных переменных отличается от (3) и зависит от коэффициента $A(x)$ и функции $f_1(\varphi(x),x,0)$. Если $A(x)\equiv 0$ и $f_1(\varphi(x),x,0)>0$, то $\xi_0=\dfrac{x}{\varepsilon^{3/4}}$, $\xi_1=\dfrac{1-x}{\varepsilon^{3/4}}$, а если $A(x)>0$, то $\xi_0=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\xi_1=\dfrac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}$.

В докладе будут рассмотрены особенности асимптотик погранслойных решений задачи (1), (2) для случаев двукратного и трехкратного корня вырожденного уравнения, а также в некоторых задачах для уравнений с частными производными.

Показатели Боля и классы функций Бэра

Быков В. В. (Московский государственный университет, Россия)

Показатели Боля (генеральные, особые показатели) линейной n-мерной системы $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывными (не обязательно ограниченными) на $\mathbb{R}^+$ коэффициентами определяются формулой

$$\Lambda_k(A) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \sup_{t \geq \tau \geq 0} \|X_A(t,\tau)_{|_{L_k^\tau(A)}}\| \exp(\lambda(\tau - t)) < +\infty\}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

где $L_k^\tau(A)$ — множество значений в точке τ тех решений рассматриваемой системы, показатели Ляпунова которых не превосходят k-го (в порядке нестрогого убывания) показателя Ляпунова этой системы, а $X_A(\cdot,\cdot)|_L$ — сужение оператора Коши системы A на подпространство L; считаем $\inf \emptyset = +\infty$. В случае системы с ограниченными коэффициентами введенные величины совпадают с определенными в **[1]**.

Теорема 1. *Пусть M — топологическое пространство, а $A\colon \mathbb{R}^+ \times M \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда для всякого $k = 2,\ldots,n$ функция $\mu \mapsto \Lambda_k(A(\cdot,\mu))$ принадлежит четвертому классу Бэра.*

Замечание 1. В случае $k = 1$ рассматриваемая функция принадлежит второму классу Бэра **[2]**.

Следствие 1. *Если M метризуемо полной метрикой, то сужения всех функций $\mu \mapsto \Lambda_k(A(\cdot,\mu))$, $k = 1,\ldots,n$, на некоторое всюду плотное множество типа G_δ непрерывны.*

Теорема 2. *Для любого $n \geq 2$ существует такое непрерывное отображение $A\colon \mathbb{R}^+ \times [0,1] \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, что для всякого $k = 2,\ldots,n$ функция $\mu \mapsto \Lambda_k(A(\cdot,\mu))$ не принадлежит второму классу Бэра.*

Список литературы

[1] *Миллионщиков В. М.* Нерешенная задача из теории условной устойчивости // Успехи матем. наук. 1991. Т. 46, № 6. С. 204.

[2] *Миллионщиков В. М.* Показатель Боля линейной системы, коэффициенты которой могут быть неограниченными // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1461–1462.

О полиномиальных интегралах геодезического потока на двумерном торе

Бялый М. Л. (Университет Тель-Авива, Израиль)
Миронов А. Е. (Институт математики им. С. Л. Соболева, Россия)

Нами показано, что существование полиномиального интеграла по импульсам геодезического потока на двумерном торе эквивалентно существованию периодических решений системы квазилинейных уравнений. Эта система является полугамильтоновой. Это означает, что в гиперболической области она может быть записана в виде инвариантов Римана и в виде законов сохранения. Таким образом в гиперболической области к этой системе может быть применен обобщенный метод годографа С. П. Царева.

В случае интегралов третьей и четвертой степени по импульсам показано, что в эллиптических областях эти интегралы сводятся и интегралам первой или второй степени.

Список литературы

[1] *Bialy M., Mironov A.* Rich quasi-linear system for integrable geodesic flows on 2-torus// Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A. 2011. V. 29. № 1. P. 81–90.

[2] *Bialy M., Mironov A.* Cubic and Quartic integrals for geodesic flow on 2-torus via system of Hydrodynamic type // arxiv: 1101.3449.

О вырождении гармонических квазиполиномов, связанных с уравнением Шредингера

Вакуленко А. Ф. (ПОМИ РАН, Россия)

Рассмотрим уравнение Шредингера с нулевой энергией

$$-\Delta f(x) + q(x)f(x) = 0 \tag{1}$$

где потенциал q — вещественная, гладкая функция с компактным носителем. Дополнительно предположим, что уравнение не имеет убывающих решений. Пусть $n = 0, 1, \dots$. Обозначим через H_n пространство решений уравнения (1), растущих на бесконечности не быстрее, чем $|x|^n$. Размерность пространств H_n не зависит от q, при $q \equiv 0$ это хорошо известные гармонические полиномы. Фиксируем некоторую точку a и определим линейное отображение $F_n(a)$, сопоставляя функции $f \in H_n$ ее струю порядка n в точке a.

Определение 1. Точка a называется s-точкой порядка n, если ядро отображения $F_n(a)$ нетривиально.

Первоначально эти точки возникли в связи с эффектом потери управляемости при анализе обратной задачи BC-методом. Впоследствии выяснилось **[1]**, что матрица рассеяния оператора Шредингера, вычисленная в системе координат с началом в s-точке, не допускает стандартной (в смысле Р. Ньютона **[2]**) факторизации.

Подробное описание множества s-точек получено для радиально-симметричного потенциала.

Теорема 1. *Множество s-точек непусто тогда и только тогда, когда дискретный спектр оператора Шредингера не пуст, в последнем случае оно представляет собой бесконечный набор концентрических сфер.*

Первую часть теоремы в общем случае удалось обобщить только на s-точки нулевого порядка. В настоящем сообщении мы предполагаем описать возможную структуру множества s-точек и ее проявление в спектральной теории оператора Шредингера.

Список литературы

[1] *Belishev M. I., Vakulenko A. F.* s-Points in Three-Dimensional Acoustical Scattering // SIAM J. Math. Analysis. 2010. V. 42. № 6. P. 2703–2720.

[2] *Newton R. G.* Inverse Schrödinger scattering in three dimensions. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Многопараметрические обратные спектральные задачи для операторов с растущим собственным значением

Валеев Н. Ф. (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия)

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается m-параметрическое семейство компактных и самосопряженных операторов вида:

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + ... + p_m B_m, \quad \vec{p} \in R^m.$$

Пусть $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq ... \geq \lambda_j^+ \geq ... \geq 0$ — положительные собственные значения, занумерованные с учетом кратностей в порядке убывания, а $\lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq ... \leq \lambda_k^- \leq ... \leq 0$ — отрицательные собственные значения оператора $B(\vec{p})$, занумерованные с учетом кратностей в порядке возрастания.

Для оператора $B(\vec{p})$ изучается следующая постановка обратной спектральной задачи.

Задача 1. Требуется найти $\vec{p} \in R^m$ такой, чтобы наперед заданные числа

$$\mu_1^- < \mu_2^- < \mu_3^- < ... < \mu_{k_1}^- < 0, \quad \mu_1^+ > \mu_2^+ > \mu_3^+ > ... > \mu_{k_2}^+ > 0$$

были бы равны соответствующим собственным значениям

$$\lambda_1^- < \lambda_2^- < \lambda_3^- < ... < \lambda_{k_1}^- < 0, \quad \lambda_1^+ > \lambda_2^+ > \lambda_3^+ > ... > \lambda_{k_2}^+ > 0, \quad k_1 + k_2 = m, \tag{1}$$

оператора $B(\vec{p})$.

Для этой задачи справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть хотя бы для одного собственного значения $\lambda_j^{\pm}$ из (1) выполнено условие*

$$\lim_{\vec{p} \to \infty} \lambda_k(\vec{p}) = \infty. \tag{2}$$

Тогда обратная спектральная задача имеет решение.

Нами также получены новые результаты о существовании решений многопараметрической обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00440-а.

Список литературы

[1] *B. D. Sleeman*, Multiparameter spectral theory and separation of variables, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 015209, 20 pp.
[2] *Н. Ф. Валеев*, Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи, Матем. заметки, 85:6 (2009), 940—943.

Корректность граничной задачи для полного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с переменными областями определения

Василевский К. В. (Белорусский Государственный Университет, Беларусь)

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$ доказывается корректность во множестве слабых решений граничной задачи

$$-u^{(3)}(t) + \big(A_2(t)\,u'(t)\big)' + A_1(t)\,u'(t) + \lambda A_0(t)\,u = f(t),\ t \in]0, T[,\ \lambda > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = u(T) = 0, \quad (2)$$

где u и f — неизвестная и заданная функции переменной t со значениями в H, $A_i(t)$ — линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t и плотными в H областями определения $D(A_i(t))$, $i = \overline{0,\,2}$.

Пространством слабых решений является гильбертово пространство $\mathcal{H}^{(1)} = \big\{u \in \mathcal{H}\colon u' \in \mathcal{H} = L_2(]0, T[,\ H),\ u(0) = u(T) = 0\big\}$ с нормой $||u|| = \big(\int_0^T [\,|u|^2 + |u'|^2]\,dt\big)^{1/2}$.

Определение 1. Функция $u \in \mathcal{H}^{(1)}$ называется слабым решением граничной задачи (1), (2) для правой части $f \in \mathcal{H}^{*-} = L_2\big(]0, T[,\ H_t^{*-}\big)$, если она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_0^T \Big\{\big(u,\, \varphi^{(3)}\big) + \big(u',\ A_1^*(t)\varphi - A_2^*(t)\varphi'\big) + \lambda\big(u,\ A_0^*(t)\varphi\big)\Big\}dt = \int\limits_0^T \big\langle f,\, \varphi\big\rangle_{(t)}dt$$

для всех

$$\varphi \in \Phi = \big\{\varphi \in \mathcal{H} \,:\, \varphi(t) \in D(A_0^*(t)) \cap D(A_1^*(t)),\ \varphi'(t) \in D(A_2^*(t)),\ t \in [0,T];$$
$$\varphi^{(i)} \in \mathcal{H},\ i = \overline{1,\,3};\ A_j^*(t)\varphi,\ A_2^*(t)\varphi' \in \mathcal{H},\ j = 0,\,1;\ \varphi(0) = \varphi(T) = \varphi'(T) = 0\big\},$$

где H_t^{*-} — антидвойственные пространства к гильбертовым пространствам H_t^{*+} — замыканиям множеств $D(A_0^*(t))$ по нормам $\langle v\rangle_{(t)} = \sqrt{\mathrm{Re}(A_0^*(t)v, v)}$, $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_{(t)}$ — полуторалинейная форма антидвойственности между H_t^{*+} и H_t^{*-}, $A_i^*(t) : H \supset D(A_i^*(t)) \to H$ — сопряженные операторы к операторам $A_i(t) : H \supset D(A_i(t)) \to H,\ i = \overline{0, 2}$.

Существование слабых решений задачи (1), (2) доказывается с помощью проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса, единственность — обобщением метода работы [**1**].

Доклад основан на совместной работе с Ф. Е. Ломовцевым.

Список литературы

[1] *Василевский К. В., Ломовцев Ф. Е.* Дифференциальное уравнение первого порядка с переменными областями определения кусочно-гладких операторных коэффициентов// Доклады Академии Наук РФ. 2008. Т. 423. № 5. с. 583–587.

Исследование на устойчивость состояния равновесия одной системы дифференциальных уравнений с параметрами

Васильев М. Д. (Северо-Восточный федеральный университет, Россия)

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3),\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - bx_1 - x_2 - ax_3),\\ \dot{x}_3 &= -x_3(k - ax_1 - ax_2 - x_3), \end{aligned} \quad (1)$$

где a, b, k — положительные постоянные.

Данную систему уравнений, при определенных упрощениях, можно рассматривать как математическую модель взаимодействия некоторых популяций [**1**].

Результатом работы является исследование состояния равновесия M с положительными координатами на устойчивость по Ляпунову [**2**, **3**].

Состояние равновесия M имеет координаты

$$x_1^* = x_2^* = \frac{\triangle_1}{\triangle}, x_3^* = \frac{\triangle_3}{\triangle},$$

где $\triangle = (1-b)(1+b-2a^2)$, $\triangle_1 = \triangle_2 = (1-b)(1-ak)$, $\triangle_3 = (1-b)[(1+b)k-2a]$.

В систему уравнений (1) введем следующую замену переменных:

$$x_1 = x_1^* + y_1, \quad x_2 = x_2^* + y_2, \quad x_3 = x_3^* + y_3.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (x_1^* + y_1)(-y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y}_2 &= (x_2^* + y_2)(-by_1 - y_2 - ay_3), \\ \dot{y}_3 &= (x_3^* + y_3)(ay_1 + ay_2 + y_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Так как состояние равновесия M исследуем с положительными координатами, то должны быть выполнены неравенства:

$$(1-ak)(1+b-2a^2) > 0, \quad [(1+b)k-2a](1+b-2a^2) > 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $b < 1$, $b < 2a^2 - 1$ и $k > \frac{1+2a+b}{(1+a)(1+b)}$. Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами, и оно асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Пусть $b < 1$, $b < 2a^2 - 1$ и $k = \frac{1+2a+b}{(1+a)(1+b)}$. Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами, и оно устойчиво.*

Теорема 3. *Пусть $b = 1$, $a > 1$ и $k > \frac{1+2a+b}{(1+a)(1+b)} = 1$. Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами, и оно устойчиво.*

Теорема 4. *Пусть $b = 1$, $a > 1$, $k = 1$. Тогда существует состояние равновесия M с положительными координатами, и оно устойчиво.*

Список литературы

[1] *May R. M., Leonard W. J.* Nonlinear aspects of competition between three species // SIAM J. Appl. Math. 1975. vol. 29. P. 243–252.

[2] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения, М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

[3] *Софронов Е. Т.* Устойчивость автономных систем в критических случаях, Новосибирск: Наука, 2000.

Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на области с условием гибкого конуса

Васильева А. А. (Московский государственный университет, Россия)

Через $d_n(M, X)$ будем обозначать колмогоровский поперечник множества M в пространстве X (см. [**1**]).

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Будем говорить, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если найдется точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существует кривая $\gamma_x : [0,\, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами: $\gamma_x \in AC[0,\, T(x)]$, $|\dot{\gamma}_x| = 1$ п. в., $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$, для любого $t \in [0,\, T(x)]$ замкнутый шар радиуса at с центром в точке $\gamma_x(t)$ содержится в Ω.

Если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$, то Ω удовлетворяет условию гибкого конуса. Эквивалентное определение дано в книге [**2**].

Пусть X, Y — множества, $f_1,\, f_2 :\ X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Мы пишем $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$, если

$$\forall y \in Y\ \exists c(y) > 0 :\ \forall x \in X \quad f_1(x,\, y) \le c(y) f_2(x,\, y);$$

$f_1(x,\, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x,\, y)$ — если $f_1(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x,\, y)$ и $f_2(x,\, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x,\, y)$. Пусть g, $v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции, $r \in \mathbb{N}$. Положим

$$W^r_{p,g}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \|\nabla^r f/g\|_p \le 1\},$$

$$L_{q,v}(\Omega) = \{f : \|f\|_{q,v} := \|vf\|_q < \infty\}, \quad \varkappa = \left(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Предположим также, что если $1 < p < 2 < q < +\infty$, то $\frac{r}{d} \ne \frac{1}{p}$, а если $2 \le p < q < +\infty$, то $\frac{r}{d} \ne \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$. Пусть $g \in L_\alpha(\Omega,\, \mathbb{R}_+)$, $v \in L_\beta(\Omega,\, \mathbb{R}_+)$ удовлетворяют одному из следующих условий:*

1°. $\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} = 1$, $\frac{r}{d} \ge 1$ *и* $q = \beta$,

2°. $q = \beta$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} < \min\{\omega,\, 1\}$,

3°. $\beta > q$, $\frac{r}{d} < \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} \le 1$ *и* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \le \frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$,

4°. $\beta > q$, $\frac{r}{d} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p} < 1$.

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega))}{d_n(W^r_p[0,\,1]^d,\, L_q[0,\,1]^d)} \underset{r,d,q,p,a,\alpha,\beta}{\lesssim} \|gv\|_\varkappa;$$

*если g, $v \in L^+(\Omega)$ (см. [**3**]), то*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{d_n(W^r_{p,g}(\Omega),\, L_{q,v}(\Omega))}{d_n(W^r_p[0,\,1]^d,\, L_q[0,\,1]^d)} \underset{r,d,q,p}{\gtrsim} \|gv\|_\varkappa.$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-01-00093 и 10-01-00442.

Список литературы

[1] *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
[2] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, Физматлит, 1996.
[3] *Васильева А. А.* Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на кубе // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 4. С. 100–116.

Экстремальные функции кубатурных формул в пространствах Соболева на многомерной сфере

Васкевич В. Л. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия)

На единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматриваются кубатурные формулы, функционалы погрешности которых имеют следующий вид

$$(l_N, \varphi) \equiv \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_S \varphi(\theta)\, dS - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)}), \quad \theta^{(j)} \in S, \quad \sum_{j=1}^{N} c_j = 1,$$

где σ_{n-1} — площадь S. Предполагается, что подынтегральные функции $\varphi = \varphi(\theta)$, где $\theta = x/r$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x|$, принадлежат пространству $X_2^r(S)$ соболевского типа на сфере S [**1**]. Пространство $X_2^r(S)$ — это пополнение совокупности всех сферических полиномов по норме

$$\|\varphi \mid X_2^r(S)\| = \left\{ \Big| \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta)\, d\theta \Big|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{2r} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |a_{k,l}(\varphi)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Здесь $\lambda_{n,k} = k(n+k-2)$, $\sigma(k) = (n+2k-2)\frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!}$. Число r может быть и дробным, $r > (n-1)/4$. Величины $a_{k,l}(\varphi)$ — это коэффициенты Фурье в разложении φ по ортогональному базису из сферических гармоник. Экстремальная функция $u_N(\theta)$ функционала l_N в $X_2^r(S)$ однозначно определяется соотношениями [**2**]

$$\|l_N \mid X_2^r(S)^*\|^2 = (l_N, u_N) = \|u_N \mid X_2^r(S)\|^2.$$

Установлена формула общего вида экстремальных функций типа $u_N(\theta)$, а также связь этих функций со сферическими натуральными сплайнами.

Теорема 1. *При $r > (n-1)/4$ экстремальная в $X_2^r(S)$ функция $u_N(\theta)$ кубатурной формулы $\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_S \varphi\, dS \cong \sum\limits_{j=1}^{N} c_j \varphi(\theta^{(j)})$ представима в виде следующей линейной комбинации: $u_N(\theta) = u(\theta \mid \theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(N)}) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j u(\theta \mid \theta^{(j)})$, где каждая функция $u(\theta \mid \theta^{(j)})$ экстремальна для кубатурной формулы с единственным узлом $\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_S \varphi\, dS \cong \varphi(\theta^{(j)})$ и представима в виде следующего абсолютно сходящегося ряда:*

$$u(\theta \mid \theta^{(j)}) = -\frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta^{(j)}).$$

Полином Гегенбауэра $G_k^{(n)}(t)$ здесь нормализован условием $G_k^{(n)}(+1) = 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00147.

Список литературы

[1] *Васкевич В. Л.* Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Доклады академии наук. 2010. Т. 433. № 4. С. 441–446.

[2] *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

О нелинейных дифференциальных уравнениях нейтрального типа с обобщенным воздействием в правой части

Вешкурова Я. А. (Уральский федеральный университет, Россия)

Сесекин А. Н. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)

Рассматривается следующая задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), v(t)) + G(t, x(t-\tau))\dot{x}(t-\tau) + \\ + Q(t, x(t))\dot{x}(t-\tau) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \qquad x(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0]. \quad (1)$$

Здесь $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(t)$ и $v(t)$ соответственно n- и m-вектор функции времени, $f(t, x, y, v)$ — n-вектор функция и $G(t, x)$, $Q(t, x)$, $B(t, x)$ соответственно $n \times n$-, $n \times n$- и $n \times m$-матрицы-функции, $v(\cdot) \in BV_m[t_0, \vartheta]$, где $BV_m[t_0, \vartheta]$ обозначает банахово пространство m-мерных вектор-функций ограниченной вариации, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ — начальная n-вектор-функция ограниченной вариации.

Особенностью уравнения (1) является то, что во втором, третьем и четвертом слагаемых, находящихся в правой части уравнения (1), содержатся некорректные операции умножения разрывных функций на обобщенные.

Под решением уравнения (1) будем понимать вектор-функцию ограниченной вариации, являющуюся поточечным пределом последовательности гладких решений уравнения (1), порожденной последовательностью пар абсолютно непрерывных функций, аппроксимирующих функцию ограниченной вариации $v(t)$ и начальную функцию $\varphi(t)$, если предел последовательности решений $x_k(t)$ не зависит от способа аппроксимации функций $v(t)$ и $\varphi(t)$. Установлены достаточные условия, обеспечивающие существование так определенного решения и получено интегральное уравнение, описывающее такое решение. Аналогичные вопросы для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в **[1]**, а для функционально-дифференциальных уравнений в **[2]**.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00356.

Список литературы

[1] *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

[2] *Сесекин А. Н., Фетисова Ю. В.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 227–233.

О спектральных свойствах задачи Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа

Владимиров А. А. (ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, Россия)
Шейпак И. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Известен **[1]**, **[2]** следующий факт:

Теорема 1. *В случае положительности спектрального порядка $D \in [0,1)$ самоподобной обобщённой первообразной $P \in L_2[0,1]$ весовой функции $\rho = P' \in W_2^{-1}[0,1]$ считающая функция $N : (0,+\infty) \to \mathbb{N}$ собственных значений граничной задачи*

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

имеет при $\lambda \to +\infty$ асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln\lambda) + o(1)],$$

где s — некоторая зависящая от выбора веса непрерывная периодическая функция.

Основной целью доклада является установление в случае весовой функции *канторовского типа* следующей характеризации коэффициента s:

Теорема 2. *На своём периоде $[0,\nu]$ функция s допускает представление*

$$s(t) \equiv e^{-Dt}\sigma(t),$$

где D — вышеуказанный спектральный порядок функции P, а σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

В частности, это автоматически означает справедливость для весов рассматриваемого класса высказанной в **[3]** гипотезы о непостоянности функции s.

Работа поддержана РФФИ, грант № 10-01-00423.

Список литературы

[1] Solomyak M., Verbitsky E., *On a spectral problem related to self-similar measures*, Bull. Lond. Math. Soc. 27:3 (1995), 242–248.
[2] Владимиров А. А., Шейпак И. А., *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*, Матем. сб. 197:11 (2006), 13–30.
[3] Назаров А. И., *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры*, Записки науч. семин. ПОМИ, 311 (2004), 190–213.
[4] Владимиров А. А., Шейпак И. А., *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа*, `arXiv:1102.4199`.

Асимптотические свойства решений циклических систем дифференциальных уравнений с правильно и медленно меняющимися нелинейностями

Владова Е. С. (Одесский национальный университет, Украина)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i = \overline{1, n-1}), \\ y_n' = \alpha_n p_n(t)\varphi_1(y_1), \end{cases} \tag{1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1, n})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, n})$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0; +\infty[$ $(i = \overline{1, n})$ — непрерывно дифференцируемые и правильно меняющиеся (см. **[1]**) при $y_i \to Y_i^0$ функции порядков σ_i таких, что $\prod_{i=1}^n \sigma_i \neq 1$, где $\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

При $n = 2$ асимптотические представления некоторых классов решений такой системы исследованы в **[2]**.

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением, если для него соблюдаются условия:

$$y_i(t) \in \Delta(Y_i^0) \text{ при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = \Lambda_i,$$

где $i = \overline{1, n-1}$.

Для системы (1) в случае, когда $\Lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$, получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решений. Также, при $t \uparrow \omega$, получены асимптотичекие представления вида:

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \int_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau [1 + o(1)], \qquad \text{если } i \in \mathfrak{I},$$

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \frac{\int_{A_i}^{t} p_i(\tau) \int_{A_l}^{\tau} p_l(s)\, ds\, d\tau}{\int_{A_l}^{t} p_l(\tau)\, d\tau} [1 + o(1)], \qquad \text{если } i \in \bar{\mathfrak{I}},$$

где $\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \ : \ 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} \neq 0\}$, $\bar{\mathfrak{I}} = \{1, ..., n\} \backslash \mathfrak{I}$, $l = \min \mathfrak{I}$, а β_i — некоторые точно определяемые отличные от нуля постоянные.

В случаях, когда среди Λ_i имеются равные нулю, аналогичного типа результаты получены при некоторых дополнительных ограничениях.

Список литературы

[1] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

[2] *Евтухов В. М., Владова Е. С.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. журнал. 2009. Т. 61. № 12. С. 1597–1611.

Граница устойчивости по Ляпунову в некоторых классах монодромных ростков

Воронин А. С. (Челябинский государственный университет, Россия)
Медведева Н. Б. (Челябинский государственный университет, Россия)

В работе используется терминология [**1**]. Определения, связанные с диаграммой Ньютона, даны в [**2**]. Построены два члена асимптотики преобразования монодромии векторного поля с монодромной особой точкой, имеющей диаграмму Ньютона, состоящую из одного или двух четных ребер при условии Г-невырожденности [**3**], а также при наличии некоторых вырождений. Приведем здесь один из последних результатов.

Теорема 1. *Пусть V — векторное поле с монодромной особой точкой и с диаграммой Ньютона, состоящей из двух четных ребер ℓ и $\tilde{\ell}$ с показателями $\alpha = m/n$ и $\tilde{\alpha} = \tilde{m}/\tilde{n}$ (несократимые дроби), $\alpha < \tilde{\alpha}$, причем m нечетно, n четно. Пусть многочлены $F_0^{\ell}(x,y)$ и $F_0^{\tilde{\ell}}(x,y)$, соответствующие ребрам диаграммы Ньютона, не имеют вещественных простых множителей. И пусть выполняется условие $\tilde{n}b - \tilde{m}a = 0$, где (a,b) — векторный коэффициент вершины, соединяющей ребра ℓ и $\tilde{\ell}$ диаграммы Ньютона. Тогда преобразование монодромии особой точки $(0,0)$ векторного поля V имеет при подходящем выборе трансверсали и, быть может после обращения времени, асимптотику вида $\Delta(\rho) = \rho(1 + C\rho + o(\rho))$, $\rho \to 0$, где*

$$C = 2\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1^{\ell}(\xi,1)}{n\xi} \exp\left(\int\limits_0^{\xi} \frac{\Psi_0^{\ell}(\tau,1)}{n\tau}\, d\tau \right) d\xi. \tag{1}$$

Условие $\tilde{n}b - \tilde{m}a = 0$ означает, что в результате раздутия особенности, связанного с диаграммой Ньютона, на вклеенной кривой появляется особая точка типа «вырожденное седло». Множество $\{C = 0\}$ является границей устойчивости в рассматриваемом классе векторных полей (ростков).

Из построенных формул получены некоторые следствия, имеющие отношение к вопросу об аналитической разрешимости проблемы устойчивости особых точек векторных полей на плоскости. А именно, приведены примеры, которые показывают, что коэффициенты преобразования монодромии, задающие границы устойчивости в классах монодромных ростков и являющиеся аналитическими функциями от коэффициентов струи внутри класса, вообще говоря не продолжаются аналитически на границы классов (и даже могут иметь разрывы), но при этом могут существовать точки пересечения замыкания границы устойчивости и границы монодромного класса. В таких точках возможны патологии границы устойчивости, характер которых до сих пор не исследован.

Частично поддержано по грантам РФФИ 10-01-00587-а и ФЦП 02.740.110612.

Список литературы

[1] *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения–1 // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т. 1. С. 7–149.

[2] *Медведева Н. Б.* Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса // Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 254. С. 11–100.
[3] *Березовская Ф. С., Медведева Н. Б.* Асимптотика преобразования монодромии особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1991. Вып. 15. С. 156–177.

Функциональные инварианты ростков полугиперболических отображений

Воронин С. М. (Челябинский государственный университет, Россия)
Фомина П. А. (Челябинский государственный университет, Россия)

Росток голоморфного отображения $F:(\mathbf{C}^2,0)\to\mathbf{C}^2,0)$ будем называть *полугиперболическим*, если один из его мультипликаторов — единичный, а другой — гиперболический. Например, сдвиг $F_0=g_v^1$ за единичное время вдоль поля $v=x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$ — полугиперболический.

Оказывается, аналитическая классификация полугиперболических ростков имеет функциональные модули. С целью упрощения формулировок, мы опишем их для частного случая (а именно, для класса $\mathcal{F}$ формальной эквивалентности ростка F_0).

Несложно проверить, что каждый росток из $\mathcal{F}$ голоморфной заменой приводится к виду

$$F:(x,y)\mapsto F_0(x,y)+(o(x^{p+1}),o(x^p)),\quad x\to 0. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{F}_0$ — класс ростков вида (1). Два ростка из $\mathcal{F}_0$ будем называть *строго эквивалентными*, если один из них можно перевести в другой локальной заменой координат вида $(x,y)\to(x+o(x^{p+1}),y+o(x^p))$, $x\to 0$.

Рассмотрим класс $\mathcal{M}$, состоящий из наборов $(C,\Phi_\pm,\Psi_\pm,\Phi,\Psi)$, где $C\in\mathbf{C}^p$, $\Phi_\pm$ и $\Psi_\pm$ (Φ и Ψ) — наборы, каждый из которых состоит из p функций, голоморфных в $(\mathbf{C}^2,0)$ (соответственно, в $(\mathbf{C},0)$).

Теорема 1. *Пространство $\mathcal{M}$ является пространством модулей в задаче о строгой аналитической классификации ростков из $\mathcal{F}_0$.*

Отметим, что:

1°. Росток F имеет голоморфное центральное многообразие если и только если C-компонента его модуля — нулевая. При этом пара $(\Phi_\pm(t,0),\Psi_\pm(t,0))$ является модулем **[1]** сужения ростка F на его центральное многообразие.

2°. Росток F включаем (т. е. является сдвигом за единичное время вдоль некоторого поля v) если и только если компоненты $\Phi_\pm$, $\Psi_\pm$ его модуля — нулевые. При этом пара (C,Φ) есть модуль Мартине–Рамиса **[2]** соответствующего поля v (а Ψ — модуль Мещеряковой–Тессье **[3, 4]** этого поля).

Работа поддержана грантами ФЦП 02.740.110612 и РФФИ 10-01-00587-а.

Список литературы

[1] Воронин С. М. *Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbf{C},0)\to(\mathbf{C},0)$ с тождественной линейной частью.* Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 1, с. 1–17.

[2] J. Martinet and J. P. Ramis, *Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **55** (1982), pp. 63–164.
[3] Воронин С. М., Мещерякова Ю. И. *Аналитическая классификация седлоузлов.* Тр. ММО, **66** (2005), с. 93–113.
[4] L. Teyssier, *Analytical classification of singular saddle-node vector fields.* Journal of Dynamical and Control Systems. 2004, Vol.10, № 4, P. 577–605.

Квазиклассическая билокализация и транспортация в несимметричной двойной яме

Выборный Е. В. (Московский институт электроники и математики, Россия)

Изучается асимптотика волновых функций оператора $H_\hbar = -(\hbar d/dx)^2 + V(x)$ при $\hbar \to 0$ на оси с гладким вещественным потенциалом V, имеющим вид двойной ямы. Пусть на уровне энергии E классическая область движения частицы состоит из двух конечных интервалов. В $\hbar^2$-окрестности данного уровня энергии исследуется эффект межъямной *транспортации*: перемещение частицы с вероятностью, близкой к единице, из одной ямы в другую через разделяющий их барьер. Для его реализации необходимо, чтобы соответствующие собственные состояния оператора $H_\hbar$ были *билокализованы* (сосредоточены с ненулевой вероятностью сразу в двух ямах при $\hbar \to 0$).

Известно [**1**], что для зеркальной симметричных двуямных потенциалов билокализация и транспортация действительно имеют место. Но физически интересны и несимметричные потенциалы (см., например, в [**2**]). Для некоторых специальных примеров несимметричная билокализация наблюдалась в численном эксперименте [**3**]. В нашей работе, с использованием идей [**4**], дан критерий билокализации и транспортации для общих двуямных потенциалов, а также рассмотрены новые классы примеров.

Зададим $\Delta_\hbar = \frac{2\hbar}{\sqrt{T^1T^2}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int\sqrt{V(x)-E}dx\right)$ с помощью подбарьерного интеграла и периодов T^1, T^2 классического движения в двух ямах на уровне E.

Теорема 1. 1°. *Следующие три условия эквивалентны:*

- *вблизи энергии E существует билокализованное собственное состояние оператора $H_\hbar$,*
- *в спектре оператора $H_\hbar$ вблизи энергии E имеется „инстантонная“ пара точек, расстояние между которыми имеет порядок $\Delta_\hbar$,*
- *в спектрах двух операторов Шредингера с одноямными потенциалами, составляющими $V(x)$, вблизи энергии E имеются точки $E^1_\hbar$ и $E^2_\hbar$, расстояние между которыми имеет порядок $\Delta_\hbar$.*

2°. *В условиях 1 расстояние между точками инстантонной пары дается формулой* $\Delta_\hbar\sqrt{1+(E^2_\hbar-E^1_\hbar)^2/\Delta^2_\hbar}\,(1+O(\hbar))$.

3°. *Если* $|E^2_\hbar - E^1_\hbar|/\Delta_\hbar = O(\hbar)$, *то вблизи* E *с точностью* $O(\hbar)$ *происходит межъямная транспортация с частотой* $2\Delta_\hbar/\hbar$.

Автор благодарен М. В. Карасеву за постановку задачи и обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00606.

Список литературы

[1] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики в 10 томах, Т. 3: Квантовая механика (нерелятивистская теория), Физматлит, 2002.

[2] *Mohsen Razavy*, Quantum theory of tunneling, World Scientific, 2003.

[3] *Славянов С. Ю., Лай В.* Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб.: Невский Диалект, 2002.

[4] *Панкратова Т. Ф.* Квазимоды и экспоненциальное расщепление собственных значений. СПб. ≪Проблемы математической физики≫, Т. 11 (дифференциальные уравнения и теория рассеяния), стр. 167–177, изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1986.

Локальная регулярность решений системы магнитной гидродинамики вблизи плоского участка границы

Вялов В. А. (Санкт-Петербургский государственный университет, Россия)
Шилкин Т. Н. (Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова, Россия)

Доклад посвящен исследованию критериев локальной регулярности решений системы уравнений магнитной гидродинамики вблизи плоского участка границы. Данная система описывает движение проводящей вязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле в области ограниченной идеальным проводником и может быть интерпретирована как система уравнений Навье–Стокса, возмущенная внешней силой.

В докладе обсуждаются различные условия, достаточные для непрерывности по Гельдеру подходящих слабых решений системы в окрестности точки, принадлежащей плоскому участку границы, и позволяющие оценить Хаусдорфову размерность множества сингулярных точек.

Благодарности: Эта работа выполнена при поддержке лаборатории им П. Л. Чебышева (Математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет), грант 11.G34.31.0026 правительства Российской Федерации.

Разбиение самоподобной функции на абсолютно непрерывную и сингулярную части

Гаганов Н. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Рассматриваются самоподобные непрерывные функции на отрезке $[0,1]$, нормированные условиями $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Через $\mathbf{H}$ обозначим множество самоподобных функций, представимых в виде суммы двух функций — сингулярной и абсолютно непрерывной: $f = f_{abs} + f_{sing}$.

Установлены следующие свойства самоподобных функций класса $\mathbf{H}$.

Теорема 1. *Если $f \in \mathbf{H}$ самоподобна, то её абсолютно непрерывная и сингулярная части f_{abs} и f_{sing} тоже самоподобны. Параметры самоподобия этих функций таковы:*

1°. *для f_{abs}: a_k, d_k, c_k те же, что и у f; числа β_k пересчитываются по значению $f_{abs}(1)$ и по условиям непрерывности;*

2°. *для f_{sing}: a_k, d_k те же, то и у f; $c_k = 0$; числа β_k пересчитываются по значению $f_{sing}(1)$ и по условиям непрерывности.*

Теорема 2. *Класс* $\mathbf{H}$ *можно описать следующим образом:*

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \bigsqcup \{f \mid f = t_0 x + f_1, \quad f_1 \in \mathbf{A}\},$$

где $\mathbf{B}$ — *множество самоподобных непрерывных функций ограниченной вариации, а* $\mathbf{A}$ — *множество невырожденных самоподобных сингулярных функций, таких, что* $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| > 1$.

Теорема 3. *Пусть* f — *невырожденная непрерывная самоподобная функция. Тогда верны следующие утверждения:*

1°. *если* $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| < 1$, *то* f *абсолютно непрерывна;*

2°. *если* $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| \geqslant 1$ *и* $f \in \boldsymbol{H}$, *то абсолютно непрерывная часть функции вырождена, т. е.* $f = t_0 x + f_{sing}$, *где* f_{sing} — *сингулярная функция;*

3°. *если* $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| = 1$, *то условие* $f \in \boldsymbol{H}$ *эквивалентно тому, что все преобразования* $\theta_k(t) = \frac{d_k t + c_k}{a_k}$ *имеют общую неподвижную точку* t_0, *и все* $d_k \geq 0$;

4°. *если* $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| > 1$, *то условие* $f \in \boldsymbol{H}$ *эквивалентно тому, что все* θ_k *имеют общую неподвижную точку* t_0, $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k = 1$, *и* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ln |\frac{d_k}{a_k}| < 0$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00423.

О возмущении оператора Шредингера узким потенциалом

Гадыльшин Р. Р. (Башкирский государственный педагогический университет, Россия)

Хуснуллин И. Х. (Башкирский государственный педагогический университет, Россия)

Исследуется возмущение дискретного спектра оператора Шредингера на оси, осуществляемое потенциалом, зависящим от двух малых параметров, один из которых описывает длину носителя потенциала, а обратное значение второго соответствуют величине потенциала. Установлено соотношение на малые параметры, при котором имеет место обобщенная сходимость возмущенного оператора к оператору без возмущающего узкого потенциала. Построены асимптотические разложения собственных значений.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (09-01-00530), Президента России для Ведущих научных школ (НШ-6249.2010.1) и ФЦП (02.740.110612). Работа второго автора поддержана также грантом Президента России для молодых ученых–докторов наук (МД-453.2010.1).

Численное усреднение в задачах фильтрации со свободными границами

Гальцев О. В. (Белгородский государственный университет, Россия)
Мейрманов А. М. (Белгородский государственный университет, Россия)

Настоящий доклад посвящен исследованию неустойчивости Релея–Тейлора при движении двух вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей различной плотности, разделенных свободной поверхностью. Эта задача имеет важное теоретическое и практическое значение [**1**], как в классической, так и в подземной гидродинамике. Если динамика жидкостей описывается системой уравнений Стокса, то существование единственного классического решения (т. е. решения с гладкой поверхностью раздела) в целом по времени было установлено в [**2**]. В теории фильтрации аналогичная задача называется *задачей Маскета* и в своей классической постановке состоит из уравнений фильтрации Дарси в каждой из областей, занятых однородной жидкостью, и стандартных условий на поверхности контактного разрыва. Естественным образом определяется обобщенное решение задачи Маскета. Вопрос о существовании классического либо обобщенного решения (в целом по времени) остается открытым до настоящего времени. Мы предлагаем строгое описание движения двух несмешивающихся жидкостей в пористых средах как результат усреднения точной микроскопической модели. В этой модели динамика жидкостей описывается системой уравнений Стокса, а динамика упругого скелета — системой уравнений Ламе. Формальное усреднение модели для абсолютно твердого скелета приводит к задаче Маскета. Неформальное усреднение этой модели вызывает непреодолимые (до настоящего времени) трудности, в то время как учет упругих свойств твердого скелета позволяет строго вывести новую корректную феноменологическую модель, которую назовем задачей Маскета для вязко-упругой фильтрации [**3**]. Численное моделирование точной микроскопической модели для различных структур порового пространства показывает, что в усредненной модели для абсолютно твердого скелета происходит перемещение более тяжелой жидкости вниз в результате перемешивания жидкостей. То есть вместо свободной границы наблюдается зона перемешивания (mushy region). Если же учитывать упругие свойства твердого скелета, то перемещение более тяжелой жидкости вниз происходит при наличии свободной поверхности (классическое решение), что обусловлено существенным влиянием коэффициента упругости твердого скелета. Последующие численные эксперименты показали, что при малых значениях коэффициента упругости и больших значениях отношения тяжелой жидкости к легкой переходной фазы не наблюдается (при заданном размере пор), и сам процесс фильтрации существенно замедляется. А при увеличении размера пор перемешивание жидкостей будет происходить быстрее.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).

Список литературы

[1] *Биркгоф Г.* Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора// В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964, с. 68–94.

[2] *Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky V.* A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions// Interfaces and Free Boundaries 2000. V. 2. pp. 413-424.

[3] *Meirmanov A.* The free boundary Muskat problem: some methods of mathematical modeling in porous media// submitted to Interfaces and Free Boundaries.

Оценки для отрицательных собственных значений оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом

Гейнц В. Л. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Пусть L — оператор Шредингера в пространстве $L^2(0,\infty)$:

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x), \qquad x \in [0,\infty), \tag{1}$$

с областью

$$\mathrm{Dom}(L) = \{y \in L^2(\mathbb{R}^+): \quad y(0)=0, \quad y, y' \in AC[0,\infty], \quad Ly \in L^2(\mathbb{R}^+)\}.$$

Считаем, что потенциал q — быстроубывающий, т. е. $\int\limits_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty$. Известно **[1]**, что оператор L самосопряжён, его спектр состоит из $\mathbb{R}^+$ и конечного (быть может, пустого) множества отрицательных собственных значений.

Рассмотрим также задачу Редже **[2]**:

$$\begin{cases} \qquad -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \\ y(0)=0, \quad y'(a) - i\lambda y(a) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Через $q_a(x)$ обозначим функцию, которая совпадает с $q(x)$ при $x \in [0,a]$, а при $x > a$ продолжена нулем.

Теорема 1. *Пусть потенциал q принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}^+)$, причем (в норме L^∞) выполнено $\|q - q_a\|_\infty \to 0$ при $a \to \infty$. Пусть оператор L имеет n отрицательных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^n$, занумерованных в порядке возрастания с учетом кратности. Пусть $\{\lambda_k^2(a)\}_{k=1}^m$ — отрицательные собственные значения задачи Редже, занумерованные таким же образом. Тогда при всех достаточно больших a имеем $m \geqslant n$, и справедливы оценки*

$$|\mu_k - \lambda_k^2(a)| \leqslant \|q - q_a\|_\infty, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Пусть потенциал q принадлежит $L^2(\mathbb{R}^+)$ и оператор L имеет n отрицательных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^n$, занумерованных в порядке возрастания с учетом кратности. Пусть $\{\lambda_k^2(a)\}_{k=1}^m$ — отрицательные собственные значения задачи Редже, занумерованные таким же образом. Тогда при всех достаточно больших a имеем $m \geqslant n$, и справедливы оценки*

$$|\mu_k - \lambda_k^2(a)| \leqslant C\|q - q_a\|_2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где постоянная C зависит только от потенциала q.

Доклад основан на совместной работе с проф. А. А. Шкаликовым.

Список литературы

[1] Левитан Б. М. Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

[2] Редже Т. Аналитические свойства матрицы рассеяния, Математика 7:4 (1963), 83–89.

О фуксовой редукции нелинейных дифференциальных уравнений

Голубева В. А. (Московский авиационный институт, Россия)

В последние десятилетия прошлого столетия в теории уравнений в частных приложениях возник новый метод исследования особенностей и построения асимптотических разложений решений нелинейных уравнений, названный методом фуксовой редукции. Этот метод нашел многочисленные приложения в различных разделах математики, как, например, в теории фуксовых начальных и граничных задач в пространствах Соболева, эллиптических граничных задач, а также в многочисленных приложениях: астрономии, общей теории относительности, теории нелинейных волн, в частности, в теории солитонов и др.

Метод фуксовой редукции позволяет получать формальные и асмптотические решения интегрируемых уравнений в частных производных. Вкратце этот метод состоит в представлении решения нелинейного уравнения в виде $u = s + T^m v$, где s задана в явном виде и сингулярна при $T = 0$ (T играет роль фуксовой переменной), функция v определяет регулярную часть u. Редукция состоит в преобразовании уравнения в частных производных $F(u) = 0$ с помощью замены неизвестной функции и переменных к виду $Lv = f(v)$, причем должны быть выполнены следующие условия:

1°. можно ввести переменные $(T, x_1, ...)$ так, что $T = 0$ есть сингулярное множество;
2°. оператор L масштабно инвариантен в направлении T;
3°. функция f „мала“ при T, стремящемся к нулю;
4°. ограниченные решения v редуцированного уравнения определяют сингулярную функцию u с особенностями при $T = 0$.

Правая часть может содержать производные v. После редукции к системе первого порядка уравнение может быть записано в виде $(T\frac{d}{dT} + A)w = f(T, w)$, где правая часть обращается в нуль при $T = 0$. Уравнение такого вида называется „фуксовым“. Фуксов класс инвариантен относительно редукции при довольно общих условиях для f и A.

В докладе рассматриваются примеры фуксовых редукций, позволяющие заменить поиск приближенных решений заданного модельного уравнения поиском точного решения приближенной модели.

К оптимизации ускорения вязкоупругого тела

Голубятников А. Н. (Московский государственный университет, Россия)

Проблема ускорения мягких оболочек, в частности с образованием кумулятивных струй, исследовалась многими авторами. В последнее время был достигнут прогресс в обеспечении устойчивости движения тонкой оболочки за счет учета остаточной (после действия ударной нагрузки) упругости материала [**1**]. Представляет интерес проведение энергетической оптимизации ускорения тела конечных размеров подходящим распределением поверхностных сил, а также исследование устойчивости оптимального решения такой задачи. Используется модель несжимаемого однородного вязкоупругого тела Фойгта. Заданы масса тела, плотность, время движения, коэффициент поперечного обжатия k и приобретаемый импульс. Плотность диссипации — квадратичная форма от компонет скорости деформации (или любая гладкая выпуклая функция), а часть удельной внутренней энергии, входящая в уравнение живых сил, — произвольная функция лагранжевых компонент метрического тензора, выпуклая по дисторсии. Требуется минимизировать сумму работы поверхностных сил и энергии возможного начального удара.

В интегральное уравнение кинетической энергии, записанное в конечный момент, входит интеграл по времени от диссипации, который минимизируется независимо. Это приводит к движению с однородной деформацией, причем осесимметричному, стационарному и потенциальному по скорости, что совместно с дифференциальными уравнениями движения, которые, в данном случае, сводятся к уравнениям идеальной жидкости и определяют только распределение давления. Кроме этого, остается еще одна произвольная функция от времени, выбор которой позволяет полностью определить движение материала и вычислить энерию начального удара, обязательно ненулевую. Далее минимизируется конечная кинетическая энергия, что приводит к начальной форме тела в виде сплющенного эллипсоида вращения с соотношением продольной и поперечной осей $k^3/2$ (обычно $k \sim 1/2$), т. е. действительно относительно тонкого.

Полученный результат позволяет проводить сравнение с движением тел других форм. Очень близкий результат дает оптимизация в классе прямых круговых цилиндров, ускорение которых может быть обеспечено действием нормальной нагрузки. В рамках модели идеальной жидкости исследована в линейном приближении устойчивость движения оптимального цилиндра, что указывает на уже начальную неустойчивость в виде выброса кумулятивных струй, за счет наличия малого знаменателя, связанного с кубом отношения размеров. Обсуждается также возможное неоднородное (квадратичное по лагранжевым переменным) распределение упругих свойств среды и их влияние на устойчивость. Аналогичные результаты получаются и в теории вязкоупругости Максвелла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00051, 11-01-00188).

Список литературы

[1] *Голубятников А. Н., Зоненко С. И., Черный Г. Г.* Новые модели оболочек, метаемых взрывом // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 5. с. 727–743.

Об аналитических решениях дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над неархимедовым полем

Горбачук В. М. (Национальный технический университет КПИ, Украина)

Рассматривается уравнение вида

$$y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = f(\lambda), \tag{1}$$

где A — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ над полем Ω комплексных p-адических чисел, $f(\lambda)$ — локально аналитическая в окрестности нуля $\mathfrak{B}$-значная вектор-функция.

Показывается, что если оператор A имеет обратный, определенный на всем $\mathfrak{B}$, а вектор-функция

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n, \quad b_n \in \mathfrak{B},$$

является аналитической в открытом круге $D(0, r^-) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < r\}$ с

$$r > s^{1/m}(A^{-1}), \quad s(A^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^{-n}\|},$$

($|\cdot|_p$ — норма в Ω), то существует локально аналитическое в окрестности нуля решение уравнения (1); дается описание всех таких решений. В случае, когда вектор-функция $f(\lambda)$ целая, существует единственное решение уравнения (1) в классе целых $\mathfrak{B}$-значных вектор-функций. Это решение дается формулой

$$y(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n,$$

где

$$\mathrm{c}_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+n)!}{n!} A^{-(k+1)} b_{mk+n}.$$

Доказывается также, что задача Коши

$$y^{(k)}(0) = y_k \in \mathfrak{B}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

имеет единственное решение в классе локально аналитических в нуле вектор-функций тогда и только тогда, когда

$$a_k = y_k - \sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm+k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

— целые векторы экспоненциального типа оператора A, т. е. для каждого $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\exists \alpha = \alpha(k),\ \exists c = c(k, \alpha),\ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} : \quad \|A^n a_k\| \le c\alpha^n.$$

Более того, если оператор A непрерывен, то задача Коши (1)–(2) однозначно разрешима в классе локально аналитических вектор-функций при любых $y_k \in \mathfrak{B}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Неформальные решения ОДУ

Горючкина И. В. (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия)

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ — многочлен своих переменных. Пусть при $|x| \to 0$ ($\arg(x)$ ограничен с двух сторон) уравнение (1) имеет формальное решение

$$y = \sum c_s x^s, \quad s \in \mathbf{K} \subset \mathbb{C}, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{K} = \{s_0 + m_1 r_1 + m_2 r_2,\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ m_1 + m_2 \geq 0,\ m_1, m_2 \geq 0\},$$

$s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $r_1 = \langle R_1, (1, s_0)\rangle$, $r_2 = \langle R_2, (1, s_0)\rangle$, $R_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $R_2 = (\alpha_2, \beta_2)$, $R_1, R_2 \in \mathbb{Z}^2$, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, показатели степени s упорядочены по росту вещественных частей, c_s — комплексные постоянные. Сделаем в уравнении (1) замену зависимой переменной

$$y = \sum_{s=s_0}^{s_m} c_s x^s + u, \tag{3}$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{Re}(s_m - s_0) \geq n$, s и c_s из формулы (2); после которой оно примет вид

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x) u + g(x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

где $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}(x) = x^v \sum_{l=1}^{n} a_l x^l \,\frac{d^l u}{dx^l},$$

$\mathcal{L}(x) \not\equiv 0$, $v \in \mathbb{C}$, a_l — комплексные постоянные; функция g может содержать линейные по $u, u', \ldots, u^{(n)}$ члены вида $b_1^0 x^{v_1 + m} \dfrac{d^m u}{dx^m}$ с $\operatorname{Re} v_1 > \operatorname{Re} v$, $v_1 \in \mathbb{C}$, $0 \leq m \leq n$, $b_1^0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, нелинейные по $u, u', \ldots, u^{(n)}$ и зависящие только от x члены. Пусть в замене (3) $\operatorname{Re} s_m \geq \operatorname{Re} \lambda_i$, где λ_i, $i = 1, \ldots, n$, это собственные значения оператора $\mathcal{L}(x)$, тогда уравнение (4) имеет формальное решение

$$u = \sum_s c_s x^s, \tag{5}$$

где $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_{m+1} > n$, $\operatorname{Re} s_{m+1} > \operatorname{Re} \lambda_n$, $s \in \mathbf{K}$, c_s — однозначно определенные комплексные постоянные.

Теорема 1. *Если в уравнении* (4)*, которое получается из уравнения* (1) *после замены переменной* (3)*, порядок старшей производной в $\mathcal{L}(x)u$ равен порядку старшей производной в сумме f_0, тогда ряд* (5) *сходится для достаточно малых* $|x|$.

Теорема 1 — частный случай теоремы 3.4 **[1]**, сформулированной без доказательства. Доказательство в случае рациональных показателей степени опубликовано в **[2]**. Доказательство теоремы 1 можно обобщить для теоремы 3.4 **[1]**.

Список литературы

[1] *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.

[2] *Брюно А. Д., Горючкина И. В.* О сходимости формального решения обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2010. Т. 432. № 2. С. 151–154.

О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами

Гринес В. З. (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия)

Левченко Ю. А. (Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Россия)

Рассматриваются диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла (A-диффеоморфизмы), трехмерного многообразия M^3 в предположении, что неблуждающее множество диффеоморфизмов состоит из объединения поверхностных двумерных базисных множеств. Если $\mathcal{B}$ является двумерным базисным множеством A-диффеоморфизма f, заданного на замкнутом 3-многобразии M^3, то согласно [**1**] (теорема 3), $\mathcal{B}$ является либо аттрактором, либо репеллером. В [**2**] установлено, что любое поверхностное двумерное базисное множество является объединением конечного числа многообразий, каждое из которых гомеоморфно двумерному тору, ручно вложенному в M^3, а ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на несущее многообразие сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора. В [**3**] доказано, что если неблуждающее множество A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит из двумерных поверхностных базисных множеств, то M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.

Положим $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, $R = \bigcup\limits_{i=1}^{k} R_i$. Из [**1**] следует, что для любой точки $z \in A$ ($z \in R$) одномерное неустойчивое (устойчивое) многообразие $W^u(z)$ ($W^s(z)$) принадлежит A (R). С другой стороны, устойчивые многообразия $W^s(z)$, $z \in A$ задают двумерное слоение $N^s = \bigcup\limits_{z\in A} W^s(z)$ на $M^3 \setminus R$, а неустойчивые двумерные многообразия $W^u(z)$, $z \in R$ задают двумерное слоение $N^u = \bigcup\limits_{z\in R} W^u(z)$ на $M^3 \setminus A$.

В настоящей работе рассматривается класс G A-диффеоморфизмов на M^3, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров;

2°. двумерные слоения N^s и N^u пересекаются трансверсально по одномерному слоению $N^{su} = N^s \cap N^u$, определенному на $M_3 \setminus (A \cup R)$, такому, что каждая компонента связности любого слоя из N^{su} есть открытая дуга, имеющая ровно две граничные точки одна из которых принадлежит A, а другая R.

В докладе получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов из класса G.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 11-01-00730, и гранта правительства Российской Федерации № 11.G34.31.0039.

Список литературы

[1] *Плыкин Р. В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла // Мат. сб. 1971. Т. 84. № 2. С. 301–312.
[2] *Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Мат. сб. 2005. Т. 78. № 6. С. 813–826.
[3] *Гринес В. З., Медведев В. С., Левченко Ю. А.* О структуре 3-многообразия, допускающего A-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством // Труды СВМО. 2010. Т. 12. № 2. С. 7–12.

О мерах скорости деформации границ под действием динамических систем

Гуревич Б. М. (Московский государственный университет, Институт проблем передачи информации РАН, Россия)
Комеч С. А. (Институт проблем передачи информации РАН, Россия)

Рассмотрим динамическую систему (X, f, μ), где f — гомеоморфизм компактного метрического пространства X, сохраняющий борелевскую вероятностную меру μ. Для всякого множества $Y \subset X$ обозначим через $\mathcal{U}_\varepsilon(Y)$ его ε-окрестность. Пусть $B(x,r) \subset X$ — шар радиуса r с центром в точке x. Асимптотику при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ отношения

$$\frac{1}{n}\ln\frac{\mu(U_\varepsilon(f^n B(x,\varepsilon)))}{\mu(f^n B(x,\varepsilon))} = \frac{1}{n}\ln\frac{\mu(U_\varepsilon(f^n B(x,\varepsilon)))}{\mu(B(x,\varepsilon))} \qquad (1)$$

можно рассматривать как локальную логарифмическую скорость деформации границы области в фазовом пространстве системы (X, f, μ). Нетривиальная асимптотика возможна, однако, лишь в случае, когда n и ε связаны соотношением

$$n = n(\varepsilon) = o(\ln(\varepsilon)). \qquad (2)$$

При выполнении этого условия удается доказать, что для некоторых символических динамических систем (сдвигов на инвариантных компактных подмножествах пространств последовательностей) и произвольных эргодических мер μ выражение (1) сходится (при $\varepsilon \to 0$) к энтропии $h(f, \mu)$. Первый результат такого рода, полученный в **[1]** для топологических сдвигов Маркова, допускает обобщение на класс синхронизованных систем, введенный в работе **[2]**. Этот класс содержит не только топологические сдвиги Маркова, но и так называемые софические системы (см. **[3]**).

Для гладких систем (диффеоморфизмов римановых многообразий) под μ в (1) естественно понимать также риманов объем vol. Для автоморфизмов n-мерного тора (когда vol — инвариантная мера) в **[4]** была установлена сходимость (1) к энтропии во всех точках многообразия. Хотя в общей ситуации риманов объем не инвариантен относительно f, оказывается, что, по крайней мере для диффеоморфизмов Аносова, отношение в правой части (1) сходится (при выполнении условия (2)) к сумме положительных показателей Ляпунова, отвечающих произвольной инвариантной эргодической мере, почти всюду по этой мере.

Список литературы

[1] *Gurevich B. M.* Geometric interpretation of entropy for random processes // AMS Transl. 1996. V. 171. P. 81–87.

[2] *Blanchard F., Hansel G.* Systèmes Codés // Theor. Comput. Sci. 1986. V. 44. P. 17–49.

[3] *Weiss B.* Subshifts of finite type and sofic systems // Monatsh. Math. 1973. V. 77. P. 462-–474.

[4] *Комеч С.* Энтропия и скорость усложнения границ в гиперболических системах// Труды 27 конференции молодых ученых мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова. Москва, 2005. С. 76–80.

Асимптотические свойства решений линеаризованных уравнений движения слабо сжимаемой баротропной среды

Гусев Н. А. (Московский физико–технический институт, Россия)

Рассмотрим слабо сжимаемую баротропную сплошную среду с уравнением состояния $\varrho = \varrho_0 + \alpha(\mathrm{p} - \mathrm{p}_{\mathrm{ref}})$, где ϱ — плотность, p — давление, $\alpha > 0$ — *коэффициент (фактор) сжимаемости* **[1]**, $\varrho_0 > 0$, $\mathrm{p}_{\mathrm{ref}} = \mathrm{const}$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с кусочно–гладкой границей, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $T > 0$. Линеаризация уравнений Навье–Стокса в цилиндре $D \times (0, T)$ вблизи произвольного состояния с постоянной плотностью ($\varrho = \varrho_0$) для такой среды имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_t - (\mathbf{b}, \nabla)\rho + c\rho + \operatorname{div}\mathbf{u} &= \sigma, \\ \mathbf{u}_t + \nabla p &= -A\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} + \mathbf{s}, \\ \rho &= \alpha p, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$-A\mathbf{u} \equiv \nu\Delta\mathbf{u} + \kappa\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{u} + M\mathbf{u},$$

$\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\colon \overline{D \times (0, T)} \to \mathbb{R}^d$ — векторные поля, $\rho, c, \sigma, p\colon \overline{D \times (0, T)} \to \mathbb{R}$ — скалярные поля, $M = M(x, t)$ — квадратная матрица размера $d \times d$, $x \in \overline{D}$, $t \in [0, T]$; $\nu > 0$, $\kappa \geq 0$ — коэффициенты вязкости. Неизвестными в системе (1) являются поля $\rho, \mathbf{u}$ и p.

Пусть $\mathbf{b}|_{\partial D} = 0$. Поставим для (1) следующие начальные и краевые условия:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^\circ, \quad p|_{t=0} = p^\circ, \quad \mathbf{u}|_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}^\circ\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^d$, $p^\circ\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$.

В докладе приводятся достаточные условия существования и единственности слабых решений начально–краевой задачи (1), (2). Исследуется сходимость этих решений при $\alpha \to 0$ к решению соответствующей начально–краевой задачи для линеаризованных уравнений движения несжимаемой жидкости. Для уравнений Навье–Стокса подобные вопросы рассматривались в **[1, 2, 3]** и других работах. В докладе приводятся аналоги результатов **[2, 3]** о слабой сходимости поля скорости, а также достаточные условия сильной сходимости полей скорости и давления. Основные из этих результатов состоят в следующем:

1°. В общем случае поле скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha$ сходится *слабо*;

2°. Если начальное условие $\mathbf{u}^\circ$ для поля скорости соленоидально, то $\mathbf{u}_\alpha$ сходится *сильно*, а поле давления $p = p_\alpha$ сходится $*$-*слабо*.

3°. Если, кроме того, начальное условие для давления совпадает со значением q° давления q в несжимаемой жидкости в начальный момент времени, причем $\partial_t \int_D q\,dx = 0$, то сходимость поля давления является *сильной*.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-12157-офи_м.

Список литературы

[1] *Шифрин Э. Г.* Условие непрерывной зависимости от сжимаемости нестационарных течений вязких мало сжимаемых жидкостей // ДАН. 1999. Т. 365. № 2, С. 197–200.

[2] *Lions P.-L., Masmoudi N.* Incompressible limit for a viscous compressible fluid // J. Math. Pures Appl. 1998. V. 77. № 6. P. 585–627.

[3] *Файрайзл Э.* Асимптотический анализ полной системы Навье–Стокса–Фурье: от течений сжимаемой к течениям несжимаемой жидкости // УМН. 2007. Т. 62. № 3 С. 27–36.

О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

Гущин А. К. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

В ограниченной области $Q \subset \mathbf{R}_n$ рассматривается задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка в самосопряженной форме без младших членов. Целью работы является отыскание условий на коэффициенты, обеспечивающих однозначную разрешимость задачи, в которой граничное значение $u_0 \in L_p(\partial Q)$, $p > 1$, понимается как предел в L_p следов решения на „параллельных границе поверхностях“.

В случае $p = 2$ этот вопрос достаточно подробно изучен. Для справедливости теоремы о существовании и единственности решения из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ (определение такого решения предложено в **[1]**) нужны условия на гладкость коэффициентов на границе области. Достаточно, см. **[2]**, чтобы коэффициенты уравнения (измеримые и ограниченные в Q) были непрерывны по Дини на границе ∂Q. Причем отказаться от этого условия нельзя. От границы области требовалось, чтобы нормаль к ней была непрерывна по Дини. Далее эти условия мы будем считать выполненными.

В случае $p \neq 2$ ситуация более сложная. Для определения граничного условия необходимо, чтобы следы решения принадлежали L_p. Естественное обеспечивающее это свойство требование — принадлежность решения пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ — приводит к условиям гладкости коэффициентов внутри Q: без них при $p > 2$ решение не существует, а при $p \in (1, 2)$ оно не единственно.

Таким образом, для справедливости теоремы об однозначной разрешимости задачи Дирихле без условий гладкости коэффициентов внутри области в определении решения необходимо отказаться от согласованного с граничным условием требования принадлежности решения пространству $W^1_{p,loc}(Q)$. *Решением* будем называть функцию $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, удовлетворяющую уравнению в смысле равенства обобщенных функций, следы которой на гладких

$(n-1)$-мерных поверхностях принадлежат пространству L_p и которая принимает граничное значение u_0.

Теорема 1. *Для любой u_0 из $L_p(\partial Q)$ и любой правой части уравнения f из пересечения $L_p(Q)$ и $L_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ существует единственное решение и задачи Дирихле. При этом функция $|u|^{p/2}$ принадлежит пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и справедлива оценка*

$$\int\limits_Q \operatorname{dist}(x,\partial Q)|u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2dx \le \mathrm{const}\left[\int\limits_{\partial Q}|u_0(x)|^p dS + \int\limits_Q |f(x)|^p dx\right]. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00178-а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-7675.2010.1).

Список литературы

[1] *Михайлов В. П.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1877–1891.

[2] *Гущин А. К.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка// Матем. сб. 1988. Т. 137. № 1. С. 19–64.

О виде асимптотического разложения выпуклого терминального функционала качества в линейной сингулярной задаче оптимального управления

Данилин А. Р. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)
Парышева Ю. В. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)

Рассматривается следующая задача оптимального управления **[1]**, **[2]** с быстрыми и медленными переменными **[3]**:

$$\dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, \qquad t\in[0,T], \qquad \|u\|\le 1,$$
$$\varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, \qquad x_\varepsilon(0)=x^0, \qquad y_\varepsilon(0)=y^0,$$
$$\sigma(x_\varepsilon(T),y_\varepsilon(T)) \to \inf_{\|u\|\le 1}\sigma(x_\varepsilon(T),y_\varepsilon(T)) =: \omega_\varepsilon(T,x^0,y^0),$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j=1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности;

$$\operatorname{Re}\operatorname{sp}(A_{22}) \leqslant -\alpha < 0 \quad (\operatorname{sp}(A_{22}) \text{ — спектр матрицы } A_{22}),$$

$\sigma(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$, строго выпуклая и кофинитная (т. е. $\forall x\in\mathbb{R}^n \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-1}\sigma(\lambda x)=+\infty$ **[4]**) функция, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^r$.

Для этой задачи найдены условия, при которых асимптотическое разложение оптимального значения функционала качества $\omega_\varepsilon(T,x^0,y^0)$ имеет вид степенного по ε ряда, и показано, что при нарушении этих условий асимптотическое разложение будет иметь более сложный вид.

Эта работа выполнена при частичной поддержке программы «Научные школы» НШ-6249.2010.01 и Федеральной целевой программы (№ госконтракта 02.740.11.0612).

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
[2] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
[3] *Тихонов А. Н.* // Мат. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.
[4] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

Спектральные свойства одного класса задач для обыкновенного дифференциального оператора с интегральными условиями

Даровская К. А. (Российский университет дружбы народов, Россия)

Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор

$$Au+\lambda^2 u = -a_0(t)u''(t)+a_1(t)u'(t)+a_2(t)u(t)+\lambda^2 u(t) = f_0(t) \quad (t \in (0,1)) \quad (1)$$

с интегральными условиями

$$B_\rho^j u = \int\limits_0^1 h_\rho(t)u^{(j)}(t)dt = f_\rho \quad (\rho = 1,2). \qquad (2)$$

Здесь $j = 0,1,2$ фиксировано, a_i $(i = 0,1,2)$ — вещественнозначные функции, такие, что $a_0 \geq k > 0$ $(t \in [0,1])$, и $a_1,\ a_2 \in C[0,1]$; $f_0 \in L_2(0,1)$, $f_\rho \in \mathbb{C}$ $(\rho = 1,2)$; $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, h_ρ — линейно независимые вещественнозначные функции.

Замечание 1. Вообще говоря, функции h_ρ могут быть различны для различных j. Дополнительный индекс в них не вводится, поскольку задача (1), (2) рассматривается для фиксированного j.

Доказана априорная оценка решений задачи (1), (2) при достаточно больших значениях параметра и, с ее помощью, получены утверждения о структуре спектра соответствующего оператора.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00395-а, и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/5328.

Список литературы

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
[2] *Даровская К. А., Скубачевский А. Л.* Об одной спектральной задаче с интегральными условиями// Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2010. Т. 28. С. 149–162.
[3] *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.

Быстрые воздействия в задаче синтеза управлений при неопределенности

Дарьин А. Н. (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия)
Куржанский А. Б. (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия)

Центральным вопросом математической теории управления в условиях неизвестных возмущений является построение синтезирующих управляющих стратегий, реализующих соответствующие воздействия в виде обратной связи. Вычисление подобных стратегий может требовать существенных вычислительных затрат.

Известно **[1, 2]**, что в линейно-выпуклой задаче управления при неопределенности

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

при выполнении условия однотипности известных геометрических (мгновенных) ограничений $u \in \mathcal{P}(t)$, $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ на управление и неопределенное возмущение (вида $B(t)\mathcal{P}(t) = \alpha C(t)\mathcal{Q}(t)$, $|\alpha| \geq 1$) решения задач минимаксимизации, полученных в классе программных и в классе синтезированных управлений, совпадают. Последнее позволяет находить управления более эффективно.

В докладе указан иной класс управлений, обеспечивающий эффект, аналогичный порожденному условием однотипности, но для более широкого круга систем, чем в задачах с однотипными геометрическими ограничениями на управления и возмущения. Это класс кусочно-постоянных функций с переменными амплитудами, порожденный аппроксимациями «идеальных управлений» — линейных комбинаций дельта-функций и их высших производных **[3]**. Использование такого класса управлений также позволяет сводить нахождение решения задачи синтеза к более простой задаче вычисления программных управлений.

Рассмотрены все этапы решения задачи: использование обобщенных управляющих воздействий, аппроксимация последних ограниченными функциями, соответствующие преобразования исходной системы, уточнение ограничений на управление и помеху, вычисление управляющих воздействий для исходной системы. Приводятся примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00589-а), ФЦП ≪Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы≫ (контракт № 16.740.11.0426 от 26 ноября 2010 года) и гранта МК-1111.2011.1.

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
[2] *Куржанский А. Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений// Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
[3] *Kurzhanski A. B., Daryin A. N.* Dynamic programming for impulse controls// Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. № 2. P. 213–227.

Трехточечная краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром

Дауылбаев М. К. (Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан)

Рассматривается на отрезке $[0, 1]$ линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y''' + A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y =$$
$$= F(t) + \int\limits_0^1 \big(H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)\big)\,dx \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$H_1 y(t,\varepsilon) \equiv y\,(0,\varepsilon) = \alpha, \quad H_2 y(t,\varepsilon) \equiv y\,(t_0,\varepsilon) = \beta, \quad H_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \quad (2)$$

где $A_1(t) > 0$, $0 \le t \le 1$, α, β, γ — некоторые известные постоянные, не зависящие от ε, а $0 < t_0 < 1$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим измененное невозмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_0 \bar{y}(t) \equiv A(t)\bar{y}'' + B(t)\bar{y}' + C(t)\bar{y} =$$
$$= F(t) + \int\limits_0^1 \left(H_0(t,x)\bar{y}(x) + H_1(t,x)\bar{y'}(x)\right)\,dx + \Delta(t) \quad (3)$$

с измененными краевыми условиями:

$$H_1\bar{y}(t) \equiv \bar{y}\,(0) = \alpha + \Delta_0, \quad H_2\bar{y}(t) \equiv \bar{y}\,(t_0) = \beta, \quad H_3\bar{y}(t) \equiv \bar{y}(1) = \gamma. \quad (4)$$

Здесь $\Delta(t)$, Δ_0 — так называемые начальные скачки интегрального члена и решения задачи (1), (2) соответственно.

В настоящей работе на основе конструктивной формулы получены асимптотические оценки решения трехточечной краевой задачи (1), (2). С помощью этих оценок доказывается, что решение сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) при стремлении малого параметра к нулю в точке $t = 0$ обладает явлением начального скачка нулевого порядка

$$y(0,\varepsilon) = O(1), \quad y'(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Получены оценки разности между решениями сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) и соответствующей измененной невозмущенной задачи (3), (4), с помощью которых получены предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t), \quad 0 < t \le 1, \quad j = 0,1,2.$$

Определены величины начальных скачков интегрального члена и решения.

О способах аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Демиденко Г. В. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия)

В настоящее время имеется ряд способов аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \quad (1)$$

с помощью решений специальных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t,x) \tag{2}$$

(см., например, [**1**]–[**8**]). В нашей работе предлагается еще один способ аппроксимации решений (1), основанный на технике вейвлет-анализа и свойствах решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений (2).

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственные контракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (проект № 85, междисциплинарный проект № 107).

Список литературы

[1] *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. матем. мех. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.

[2] *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978.

[3] *Györi I.* Two approximation techniques for functional-differential equations // Comput. Math. Appl. 1988. V. 16, no. 3. P. 195–214.

[4] *Ponosov A., Shindiapin A., Miguel J. J.* The W-transform links delay and ordinary differential equations // Funct. Differ. Equ. 2002. V. 9, no. 3–4. P. 437–469.

[5] *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А.* О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.

[6] *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.

[7] *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.

[8] *Krasznai B., Györi I., Pituk M.* The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks // Math. Comput. Modelling. 2010. V. 51, no. 5–6. P. 452–460.

Единственность решения обратной задачи для уравнения диффузии с переопределением в виде внешнего объемного потенциала

Денисов А. М. (Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия)

Рассмотрим начально-краевую задачу для функции $u(x,y,z,t)$

$$u_t = \Delta u - u, \quad (x,y,z) \in \Omega, \quad t \in (0,T],$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y,z) \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,y,z,0) = \gamma(x,y,z), \quad x \in \bar{\Omega},$$

где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали, α и β — неотрицательные постоянные, $\alpha + \beta > 0$.

Обозначим через Σ достаточно гладкую замкнутую поверхность, содержащую внутри себя $\bar{\Omega}$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть в постоянные α и β заданы, а функция $\gamma(x,y,z)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(x,y,z)$ и $u(x,y,z,t)$, если для $(x,y,z)\in\Sigma$, $t\in[t_1,t_2]\subseteq[0,T]$ задан внешний объемный потенциал

$$V(x,y,z,t)=\int\int_{\Omega}\int\frac{\Delta u(\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

Такую обратную задачу можно рассматривать как линеаризованную постановку обратной задачи, возникающей при исследовании математических моделей возбуждения сердца.

Доклад посвящен исследованию единственности решения сформулированной обратной задачи для некоторых частных случаев области Ω.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 11-01-00259.

О достаточных условиях стабилизации решения задачи Дирихле для параболического уравнения

Денисов В. Н. (Московский государственный университет, Россия)

В цилиндре $D=Q\times(0,\infty)$, где Q — область (возможно, неограниченная) в $\mathbb{R}^N$, $N\geq 3$, рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{gathered}Lu=\sum_{i,k=1}^{N}(a_{ik}(x,t)u_{x_k})_{x_i}-u_t=0 \quad \text{в } D,\\ u|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in Q,\quad u|_S=0,\end{gathered} \tag{1}$$

для равномерно параболического оператора L с измеримыми, ограниченными коэффициентами. Здесь $S=\partial Q\times(0,\infty)$ — боковая поверхность цилиндра D, $u_0(x)$ — ограниченная непрерывная в Q функция, решение ограниченное и понимается в обобщенном смысле **[1]**.

Теорема 1. *Если расходится интеграл*

$$\int^{\infty}\operatorname{cap}\left(\overline{B}_\tau\setminus Q\right)\cdot\tau^{1-N}\,d\tau=\infty, \tag{2}$$

то решение задачи (1) *имеет предел*

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0 \tag{3}$$

равномерно по x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Здесь $\overline{B}_\tau=\{|x-x_0|\leq\tau\}$ — замкнутый шар с центром в произвольной точке x_0 радиуса τ, $\operatorname{cap}(E)$ — винеровская емкость компакта $E\subset Q$.

Случай, когда коэффициенты в (1) не зависят от времени t, изучен в работе **[2]**.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 09-01-00446 и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013”.

Список литературы

[1] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
[2] *Денисов В. Н.* ДАН РАН. 2005. Т. 407. №2. С. 163-166.

Спектральные свойства произведения самосопряженных операторов

Денисов М. С. (Воронежский государственный университет, Россия)

Пусть $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$ — гильбертово пространство. Билинейную форму $[G\cdot,\cdot]$, порожденную действующим в $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$ непрерывным самосопряженным оператором G,

$$[\cdot,\cdot] := (G\cdot,\cdot), \tag{1}$$

будем называть G-метрикой. Гильбертово пространство $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$ с заданной на нем G-метрикой (1) будем называть G-пространством.

Всюду далее предполагается, что все рассматриваемые операторы плотно определены в $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$, если не оговорено иное. Символом $\rho(T)$ обозначим резольвентное множество оператора T. Линейный оператор T, действующий в пространстве $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$, называют G-симметрическим, если $[Tx,y] = [x,Ty]$ для любых $x,\ y \in \mathrm{dom}(T)$.

Определение 1. Замкнутый G-симметрический оператор $T : \mathrm{dom}(T) \to \mathcal{H}$ называется дефинизируемым в G-пространстве $\mathcal{H}$, если $\rho(T) \neq \varnothing$ и существует многочлен $p(t)$ такой, что $[p(t)x,x] \geq 0$ для любого $x \in \mathrm{dom}(T^k)$, где $k = \deg(p(t))$.

Одним из основных результатов доклада является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Операторы G и A самосопряжены в гильбертовом пространстве $\langle \mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\rangle$.*
2°. *$\rho(AG) \neq \varnothing$ и $\rho(GA) \neq \varnothing$.*
3°. *Оператор G ограничен, а оператор AG дефинизируем в G-пространстве.*

Тогда спектр оператора AG — вещественный, за исключением конечного числа изолированных комплексных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси, и у AG существует спектральная функция.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 остается верным, если заменить условие 3 теоремы 1 на следующее:

3a°. Оператор A непрерывно обратим, и AG дефинизируем в A^{-1}-пространстве.

Доклад основан на совместной работе с Т. Я. Азизовым и F. Philipp. Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00566-а.

Список литературы

[1] *Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S.* Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1989.

[2] *Azizov T. Ya., Iokhvidov I. S.* Linear operators in Hilbert spaces with G-metric // Russian Mathematical Surveys 1971. 26(4):45.

[3] *Denisov M. S.* The spectral function for some products of self-adjoint operators // Matematicheskie Zametki, 2007. Vol. 81, No. 6, 948–951.

[4] *Hardt V., Konstantinov A., Mennicken R.* On the spectrum of the product of closed operators // Math. Nachr. 2000. **215**, 91–102.

[5] *Jonas P.* On the functional calculus and the spectral function for definitizable operators in Krein space // Beiträge zur Analysis 1981. **16**, 121–135.

[6] *Langer H.* Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces // Functional analysis (Dubrovnik, 1981), 1982. Lect. Notes Math., **948**, 1–46.

Глобальная разрешимость задачи о движении двух несжимаемых капиллярных жидкостей

Денисова И. В. (Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург, Россия)

Солонников В. А. (Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН, Россия)

Рассматривается задача о движении двух несжимаемых жидкостей в контейнере, одна из которых находится внутри другой. Внутренняя жидкость занимает область $\Omega_t^+ \subset \mathbb{R}^3$, а внешняя — $\Omega_t^- \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_t^+}$. Их разделяет неизвестная замкнутая поверхность $\Gamma_t \equiv \partial\Omega_t^+$, причем в начальный момент $t = 0$ поверхность Γ_0 задана. Внешняя граница $S \equiv \partial(\Omega_t^+ \cup \Gamma_t \cup \Omega_t^-)$ — заданная постоянная поверхность, при этом $S \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Требуется найти границу раздела Γ_t, а также поле скоростей $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и функцию давления p внешней и внутренней жидкостей, удовлетворяющих начально-краевой задаче для уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^\pm \nabla^2 \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho^\pm}\nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega_t^\pm,\ t > 0,$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad [\mathbf{v}]|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\mathbb{T}\mathbf{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}|_S = 0,$$

где $\nu^\pm, \rho^\pm$ — ступенчатые функции вязкостей и плотностей жидкостей, соответственно, $\mathbf{v}_0$ — начальное распределение скоростей, $\mathbb{T}$ — тензор напряжений с элементами

$$\{\mathbb{T}(\mathbf{v}, p)\}_{ik} = -p\delta_k^i + \mu^\pm(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i), \quad i, k = 1, 2, 3;$$

$\mu^\pm = \nu^\pm \rho^\pm$ — динамические вязкости, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Ω_t^+; $[\mathbf{w}]|_{\Gamma_t}$ — скачок вектора $\mathbf{w}$ при переходе через Γ_t из Ω_t^+ в Ω_t^-; $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения, H — удвоенная средняя кривизна Γ_t ($H < 0$ в точках выпуклости Γ_t в сторону Ω_t^-).

Кроме того, предполагается, что частицы жидкости не покидают Γ_t с течением времени: $V_{\mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_t}$, т. е. скорость движения поверхности в нормальном направлении совпадает с проекцией скорости жидкости на нормаль.

Для этой задачи при достаточно малых гладких начальных данных доказывается существование решения $(\mathbf{v}, p)$ в анизотропных пространствах Гельдера при всех $t > 0$. Доказательство этого факта опирается на существование локального по времени решения и его гельдеровские оценки **[1]**. При этом мы следуем схеме, предложенной одним из авторов для доказательства существования глобального решения для одной жидкости ограниченного объема [**2**]. Опираясь на равномерную экспоненциальную оценку локальных решений, мы показываем, что при достаточно малой начальной скорости и малом отличии начальной поверхности от сферы движение капли в жидкости затухает, а ее форма стремится к шару соответствующего радиуса.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-01-00372а.

Список литературы

[1] *Денисова И. В., Солонников В. А.* Классическая разрешимость задачи о движении двух вязких несжимаемых жидкостей // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 101–142.

[2] *Solonnikov V. A.* Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions // Lectures Notes in Maths. 2003. V. 1812. P. 123–175.

Теоремы вложения и осцилляция решений уравнений соболевского типа

Денисова Т. Е. (Московский городской психолого-педагогический университет, Россия)

В докладе будет изложено продолжение исследований, начатых в работах [**1**]–[**3**]. Рассматриваемые вопросы имеют в качестве «отправной точки» следующую задачу. В работах С. Л. Соболева и его учеников спектральными методами было, в частности, показано, что решение первой начально-краевой задачи для уравнения Соболева почти периодично в круге (при $n = 2$), а также в эллипсоиде и в цилиндре с образующей, ориентированной определенным образом (при $n = 3$). Особенность задачи заключается в том, что решение уравнения Соболева не зависит непрерывно от границы области (например, в круге $r < 1$ решение имеет дискретный, а в области с границей $r = 1 + \varepsilon \sin^4 \varphi$ — непрерывный спектр ($\forall \varepsilon > 0$)). Поэтому возникает вопрос: «Как ведет себя решение в зависимости от пространственной области?» Рассматриваемый подход к решению этой задачи базируется на использовании соответствующих теорем вложения и сводится к следующим этапам.

1°. На основе весовых пространств Соболева $W^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)$ строятся пространства $QW^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)$ функций одной переменной. При определении нормы

$$\left\| f, QW^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+) \right\| = \left\| f, W^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+) \right\| + \sum_{k=0}^{N} \sup_{(0,1]} \left| \widehat{D^k f}(\gamma) \right|$$

в таких пространствах используется теорема, аналогичная теореме Пэли-Винера.

2°. Доказывается, что пространству $QW^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)$ принадлежат суммируемые и осциллирующие функции.

3°. Вводится в рассмотрение пространство $W^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+, W^m_r(g))$ функций, определенных на $\mathbb{R}^+ \times g$ и таких, что $\|f, W^m_r(g)\| \in W^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)$.

4°. Для любого $k \in \{[\alpha], ..., N-1\}$ при $1 < \frac{1}{p} - \alpha \leqslant N+1$ устанавливается вложение $D^\rho_x D^k_t W^N_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+, W^m_r(g)) \Big|_{\mathbb{R}^+ \times (x^0_1, \ldots, x^0_n)} \subseteq QW^{N-k}_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)$, где

$\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i < m - \frac{n}{2}$, причем условия на область g такие же, как в теореме вложения Соболева.

Из этого вложения, существования первых интегралов и оценки $\|D^k u, W_2^m(g')\| = O(t^{m-1}+1)$ следует, что при начальных данных из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^m(g)$ решение первой начально-краевой задачи для уравнения Соболева является либо суммируемым, либо осциллирующим.

Обсуждаются достоинства (пространственная область определяется лишь сответствующими теоремами вложения) и недостатки (осцилляция решения не отделяется от суммируемости) изложенного метода.

Приводится иллюстрация применения данного подхода к исследованию асимптотического поведения решений первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с постоянными и с переменными коэффициентами, а также к исследованию решения задачи Коши с ростом времени.

Список литературы

[1] *Успенский С. В., Васильева Е. Н., Янов С. И.* // ДАН. 2000. Т. 373. № 5. С. 593–596.

[2] *Успенский С. В., Васильева Е. Н.* // Тр. Мат. Ин-та РАН. 2001. Т. 231. С. 327–335.

[3] *Успенский С. В., Васильева Е. Н.* Теоремы вложения для соболевских функциональных пространств. Приложения к дифференциальным уравнениям. — М.: МГУП, 2006. — 118 с.

Квадратичные условия оптимальности для релейно-особых управлений

Дмитрук А. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

На фиксированном отрезке $[0,T]$ рассматривается задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + u\, g(t,x), & |u| \le 1, \\ \eta_j(x(0),x(T)) = 0, & j = 1,\dots,\mu, \\ \varphi_i(x(0),x(T)) \le 0, & i = 1,\dots,\nu, \\ J = \varphi_0(x(0),x(T)) \to \min, \end{cases}$$

линейная по скалярному управлению. Здесь $x \in \mathbf{R}^n$. Пусть процесс $(x^0(t), u^0(t))$ удовлетворяет принципу максимума с единственным набором множителей Лагранжа, причем функция переключения $\psi(t)\, g(t, x^0(t)) > 0$ на $(0,\theta)$, и равна нулю на (θ, T), так что на первом интервале управление граничное: $u^0(t) = 1$, а на втором особое: $|\, u^0(t)| < 1$. Считаем, что все концевые неравенства активны.

Пусть Ω есть вторая вариация функции Лагранжа, а K есть конус критических вариаций, заданный линеаризацией всех ограничений задачи. В частности, линеаризация управляемой системы имеет вид $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$. Введем квадратичный порядок

$$\gamma(\bar{x},\bar{u})) = |\bar{x}(0)|^2 + \int_0^T |\bar{y}|^2\, dt + |\bar{y}(T)|^2, \qquad \text{где } \dot{\bar{y}} = \bar{u}, \qquad \bar{y}(0) = 0.$$

Переписав Ω с помощью замены $\bar{x} = \bar{\xi} + B\bar{y}$, получаем квадратичную форму вида

$$\Omega = q(\bar{\xi}(0),\, \bar{\xi}(T),\, \bar{y}(T)) + \int_0^T ((G\bar{\xi},\bar{\xi}) + (P\bar{\xi},\bar{y}) + (Q\bar{y},\bar{y}))\, dt.$$

Освобождаясь от связи $\dot{\bar{y}} = \bar{u}$, переходим от троек $(\bar{\xi},\, \bar{y},\, \bar{y}(T))$, порожденных конусом K, к тройкам $(\bar{\xi},\bar{y},\bar{h})$, где $\bar{y} \in L_2[0,T]$, $\bar{h} \in \mathbf{R}$, образующим конус $H(K)$, задающийся соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi} + (AB - \dot{B})\,\bar{y}, \qquad \bar{y} = 0 \quad \text{на } (0,\theta), \\ \eta'_{x_0}\,\bar{\xi}(0) + \eta'_{x_T}(\bar{\xi}(T) + B(T)\,\bar{h}) = 0, \\ \varphi'_{x_0}\,\bar{\xi}(0) + \varphi'_{x_T}(\bar{\xi}(T) + B(T)\,\bar{h}) \le 0. \end{cases}$$

Теорема 1. 1°. *Если процесс $(x^0(t), u^0(t))$ доставляет слабый минимум, то $\Omega \ge 0$ на $H(K)$.*

2°. *Если $\exists\, a > 0$, такое что $\Omega \ge a\,\gamma$ на $H(K)$, то $(x^0(t), u^0(t))$ доставляет строгий сильный минимум.*

Аналогичные результаты справедливы и для более общего случая, когда конечное число участков релейного управления чередуются с участками особого.

Работа выполнена совместно с С. Аронной, Ф. Боннансом и П. Лотито.

Список литературы

[1] *Дмитрук А. В.* Квадратичные условия слабого минимума для особых режимов в задачах оптимального управления // ДАН СССР, 1977, Т. 233, № 4.

[2] *Dmitruk A. V.* Quadratic order conditions of a local minimum for singular extremals in a general optimal control problem // Proc. of Symposia in Pure Mathematics, v. 64 “Diff. Geometry and Control” (G. Ferreyra et al., eds.), American Math. Society, 1999, p. 163–198.

Некомпактные лагранжевы многообразия и локализованные асимптотические решения многомерного волнового уравнения с вырождающей скоростью

Доброхотов С. Ю. (Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН и Московский физико-технический институт)

Под некомпактными лагранжевыми многообразиями мы в основном понимаем многообразия, которые имеют неограниченные импульсные компоненты. Такие многообразия появляются при построении асимптотических быстроубывающих и быстроосциллирующих решений уравнений с особыми коэффициентами. Мы рассматриваем задачу Коши для двумерного волнового уравнения

$$u_{tt} = \nabla \cdot (c^2(x_1,x_2)\nabla u) \tag{1}$$

на полуплоскости $x_1 \ge 0$ со скоростью $c^2(x_1,x_2)$, обращающейся в ноль (только) на прямой $x_1 = 0$ и в окрестности этой прямой имеющей поведение $c^2(x_1,x_2) = \gamma(x_2)x_1 + O(x_1^2)$, и с начальными данными локализованными в окрестности точки $x = (a,0)$

$$u|_{t=0} = V\left(\frac{x_1 - a}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $V(y_1, y_2)$ — гладкая финитная функция, $\mu > 0$ — малый параметр. С течением времени решение этой задачи становится локализованным в окрестности фронта — который сначала имеет вид гладкой кривой, а затем не гладкой кривой с точками поворота и самопересечениями. Эта кривая получается как проекция на полуплоскость $x_1 \geq 0$ волновых фронтов-концов однопараметрического семейства траекторий гамильтоновой системы в четырехмерном фазовом пространстве с координатами (p_1, p_2, x_1, x_2). После момента касания фронта прямой $x_1 = 0$ импульсная компонента на волновом фронте принимает в некоторых точках бесконечные значения, что и приводит к необходимости рассмотрения некомпактных лагранжевых многообразий, модифицированного канонического оператора Маслова и т. д. В докладе пойдет речь об асимптотиках при $\mu > 0$ и других объектах, связанных с такими многообразиями и легко реализуемых на персональном компьютере, а также и новых задачах, возникающих при их рассмотрении.

Эта работа выполнена совместно с Б. Тироцци и В. Назайкинским и при поддержке гранта РФФИ 11-01-00973 и соглашения между Физическим департаментом Университета «La Sapienza» (Рим) и Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Список литературы

[1] *С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Б. Тироцци,* Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными// Алгебра и анализ, 2010, Т. 22, № 6, С. 67–90.

Асимптотически однородные обобщенные функции

Дрожжинов Ю. Н. (МИАН, Россия)
Завьялов Б. И. (МИАН, Россия)

Обобщенные функции, обладающие квазиасимптотикой (асимптотикой в слабом смысле) по траекториям, определяемым однопараметрическими группами линейных преобразований в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными по этим группам преобразований. Предельные обобщенные функции однородны по этим группам. В докладе будет дано описание асимптотически однородных обобщенных функций вдоль траекторий, определяемых непрерывными мультипликативными однопараметрическими группами преобразований, у которых вещественные части всех собственных значений генератора группы положительны, в том числе и для критических порядков асимптотической шкалы. Кроме того будет приведено полное описание обобщенных функций, однородных по таким группам. Будет рассказано о применении полученных результатов для построения асимптотически квазиоднородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются квазиоднородные многочлены.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 10-01-00178, и грант РФ НШ-7675.2010.1.

Список литературы

[1] *Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным группам преобразований // Матем. Сборник. 2009. т. 200. № 6. с. 23–66.

[2] *Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в нуле и уравнения в свертках с ядрами, символы которых квазиоднородные многочлены // Доклады РАН. 2009. т. 426. № 3. с. 300–303.

Структура кинематических разрывов в потоках в наклонных каналах

Дроздова Ю. А. (Российский Государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина, Россия)

Теория кинематических волн используется для описания открытых потоков в наклонных каналах при условии, что временные и пространственные (вдоль дна) масштабы течения настолько велики, что в уравнениях движения можно пренебречь дифференциальными членами по сравнению с членами, не содержащими производных по времени и координатам [**1**]. Области с относительно малым продольным масштабом заменяются при этом разрывами. В работе исследуются кинематические разрывы в потоках в каналах сложного поперечного сечения. Показано, что для каналов специального вида условия сохранения массы и импульса при заданных скорости волны и площади живого сечения потока перед скачком не определяют значения параметров за скачком единственным образом: за скачком могут быть три различных значения площади сечения. В этих случаях единственное решение может быть выделено с помощью исследования структуры скачка [**2**].

Структура кинематического разрыва исследуется в этой работе с помощью уравнений Буссинеска. Задача сводится к исследованию особых точек системы уравнений, полученной из уравнений Буссинеска в предположении, что решение имеет вид бегущей волны. Определены все возможные типы особых точек. Выписаны условия на параметры потока, при которых структура не имеет колебаний. Проведено численное исследование структуры кинематических волн в русле с сечением в виде изломанного треугольника. Показано, что интегральные кривые, соответствующие структуре кинематических разрывов, соединяют две ближайшие особые точки.

Список литературы

[1] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

[2] *Куликовский А. Г.* Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // Тр. МИАН. 1988. Т. 182. С. 261–291.

Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях к задачам математической физики в полном евклидовом пространстве

Дубинский Ю. А. (Московский энергетический институт, Россия)

1°. Конструктивное описание весовых множителей в неравенствах типа Харди.

2°. Факторизационные неравенства типа Фридрихса и Пуанкаре в полном евклидовом пространстве.

3°. Уравнение Пуассона в пространствах функций с нулевым сферическим средним.
4°. Разложение соболевской шкалы в сумму соленоидальных и потенциальных подшкал.
5°. Соленоидальная и потенциальная системы Стокса в полном евклидовом пространстве.
6°. Стационарное уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00366) и Минобрнауки (гос. контракт П690 от 20.05.10).

О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

Думанян В. Ж. (Ереванский государственный университет, Армения)

В ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$, изучается разрешимость задачи Дирихле в $W^1_{2,\,loc}(Q)$-постановке для линейного эллиптического уравнения второго порядка

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0,$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$. Предполагается, что функции f и $F = (f_1, \ldots, f_n)$ принадлежат $L_{2,\,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{i\,j}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i\,j}(x)\xi_i\xi_j = (\xi,\ A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1,\ \ldots, \xi_n) \in R_n$ и п. в. $x \in Q$ с положительной постоянной γ, а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x),\ \ldots,\ b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x),\ \ldots,\ c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

При естественных ограничениях на рост вблизи границы коэффициентов при младших членах и правой части уравнения установлено, что условие разрешимости исследуемой задачи имеет вид, аналогичный условию разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W^1_2(Q)$). В частности, если однородная задача (с равными нулю граничной функцией и правой частью) не имеет нетривиальных решений из пространства $W^1_2(Q)$, то для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и всех f и F из соответствующих функциональных пространств существует решение неоднородной задачи (в $W^1_{2,\,loc}(Q)$-постановке); это решение принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ — $(n-1)$-мерно непрерывных функций — и для него справедлива оценка

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r\,|\nabla u|^2\,dx \leq C\,(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int\limits_Q r^3\,(1 + |\ln r|)^{\frac{3}{2}}\,f^2\,dx +$$

$$+\int\limits_Q r\,(1+|\ln r|)^{\frac{3}{2}}\,|F|^2dx),$$

где $r(x)$ — расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q, а C не зависит от u_0, f, F.

Список литературы

[1] *Гущин А. К.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 1 (9). С. 19–64.

[2] *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 787–810.

[3] *Михайлов В. П.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения 1976. Т. 12. № 10. С. 1877–1891.

[4] *Думанян В. Ж.* О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка // Доклады РАН 2011. Т. 436. № 2. С. 159–162.

Позиционные решения неравенств Гамильтона–Якоби в задачах управления нелинейными обыкновенными и импульсными динамическими системами

Дыхта В. А. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия)

Сорокин С. П. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия)

Доклад посвящен необходимым и достаточным условиям глобальной оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления с общими (не разделенными) концевыми и многоточечными ограничениями на траекторию. Развиваемый подход базируется на использовании негладких слабо и сильно монотонных функций типа Ляпунова [**1, 2, 3, 4**], удовлетворяющих соответствующим дифференциальным неравенствам Гамильтона–Якоби (т. е. являющихся супер- и субрешениями одноименного уравнения [**5, 6**]). С помощью таких функций и их семейств получаются внутренние и внешние оценки множества точек в расширенном фазовом пространстве, соединимых траекториями данной управляемой системы. Эти оценки и служат источником вывода условий глобальной оптимальности в рассматриваемых классах управляемых систем (обыкновенных, гибридных и импульсных — с управлением в виде векторной меры).

Основное внимание уделено так называемым позиционным решениям неравенств Гамильтона–Якоби, которые параметрически зависят от начальной или конечной позиции и оказываются естественными при наличии общих концевых и многоточечных фазоограничений. Кроме того, с использованием линейных суб- и суперрешений уравнений Гамильтона–Якоби получаются достаточные и необходимые условия оптимальности в форме усиленного принципа максимума Понтрягина для нелинейных задач оптимизации указанных типов динамических систем.

Эта работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН, интеграционный проект СО-УрО РАН № 85.

Список литературы

[1] *Дыхта В. А.* Неравенства Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение // Вестн. Тамбов. Ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 405–426.

[2] *Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Изв. вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.

[3] *Дыхта В. А.* Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций типа Ляпунова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 66–75.

[4] *Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1998.

[5] *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[6] *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.

Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка

Евтухов В. М.

Клопот А. М. (Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Украина)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{1}$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = 1, \dots, m)$, $p_k : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(k = 1, \dots, m)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $r_k : [a, \omega[\to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, m)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_k(t) = 0 \quad (k = 1, \dots, m),$$

$\varphi_k : \triangle Y_0 \to]0, +\infty[$ $(k = 1, \dots, m)$ — правильно меняющиеся при y $\to Y_0$ функции порядков σ_k, $(k = 1, ..., m)$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\triangle Y_0$ — одностороняя окрестность Y_0, Y_0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Решение $y : [t_0, \omega[\to \triangle_{Y_0}$ уравнения (1) будем называть $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$y : [t_0, \omega[\to \triangle_{Y_0}, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0,$$

$$y^{(n-1)}(t) \ne 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \qquad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \mu_0, \quad \text{причем} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)}{[y^{(n-1)}(t)]^2} = 1, \quad \text{если} \quad \mu_0 = \pm\infty.$$

При $m = 1$, т. е. в случае двучленного дифференциального уравнения, асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0, \mu_0)$-решений достаточно полно исследовано в **[1]**.

Для $m \geq 1$ получены условия, при выполнении которых правая часть дифференциального уравнения (1) на каждом $P_\omega(Y_0, \mu_0)$-решении асимптотически эквивалентна при $t \uparrow \omega$ фиксированному i-му ($i \in \{1, \ldots, m\}$) слагаемому. В случае их выполнения установлены необходимые и достаточные условия наличия у уравнения $P_\omega(Y_0, \mu_0)$-решений, а также получены асимптотические представления для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. В силу произвольности выбора $\omega \leq +\infty$ результаты позволяют описывать асимптотику не только правильных, но и различного типа сингулярных решений уравнения (1).

Список литературы

[1] *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47 (в печати).

Свойства решений дифференциальных неравенств с нуль-лагранжианом

Егоров А. А. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Россия)

В работе исследуются свойства решений $v\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ нелинейных дифферециальных неравенств

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) \quad \text{для п. в. } x \in V. \tag{1}$$

Здесь $G\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — нуль-лагранжиан, $F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция, $v' = \left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right)$ — матрица Якоби отображения v, $\mathbb{R}^{m\times n}$ — пространство вещественных $m \times n$-матриц. Получен ряд теорем о регулярности, затирании особенностей, замкнутости и предкомпактности семейств решений. Используя эти теоремы, удалось усилить ряд результатов статьи **[1]** по устойчивости классов решений $u\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ уравнения $F(u'(x)) = G(u'(x))$ для п. в. $x \in V$. В частности, получены новые оценки устойчивости и теоремы об устойчивости в целых областях. Некоторые из представляемых результатов опубликованы в препринте **[2]**.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00819, 11-01-92609), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–13 годы (гос. контракт 02.740.11.0457) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6613.2010.1).

Список литературы

[1] *Егоров А. А.* Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 4. С. 796–812.

[2] *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: regularity and removability of singularities // arXiv:1005.3459, 2010.

Об одной задаче поведения тонкого неоднородного стержня из материала Кельвина-Фойгхта при наличии сосредоточенных и распределенных сил и моментов

Егорова А. А. (Научно-исследовательский институт математики при Якутском государственном университете им. М. К. Аммосова, Россия)

В работе строится полное асимптотическое разложение трехмерной задачи теории линейной вязкоупругости, заданной в тонком неоднородном периодически неоднородном стержне, закрепленном с одного конца, и испытывающем действие распределенных по торцу сил на другом конце. Уравнения этой задачи соответствуют теории линейной вязкоупругости в случае материала Кельвина–Фойгхта.

С помощью метода усреднения, разработанного Н. С. Бахваловым, выводятся усредненные уравнения для продольных, поперечных и крутильных колебаний стержня. Исследуются задачи для пограничных слоев при условии пропорциональности тензоров упругости и вязкости. Доказываются соответствующие теоремы о разрешимости задач типа Соболева, теорема об оценке разности точного и асимптотического решений.

Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства

Еремин А. Ю. (Московский государственный университет, Россия)

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства впервые была поставлена Ивановым и Тужилиным в статье [**1**]. Она возникла на стыке двух классических проблем: проблемы Штейнера о кратчайшей сети и проблемы Громова о минимальном заполнении гладкого многообразия.

Пусть дано конечное метрическое пространство M. Рассматриваются всевозможные связные взвешенные графы, такие что множество их вершин содержит M и для любых двух точек из M вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве (такие взвешенные графы называются *заполнениями* данного метрического пространства). Задача состоит в поиске *минимального заполнения*, то есть заполнения наименьшего веса. Вес минимального заполнения пространства M обозначается $\mathrm{mf}(\mathcal{M})$.

В [**1**] доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Минимальное заполнение метрического пространства всегда существует, более того, существует минимальное заполнение, являющееся бинарным деревом (то есть деревом, у которого вершины, лежащие в M, имеют степень 1, остальные вершины имеют степень 3).*

Таким образом, для поиска веса минимального заполнения достаточно рассмотрения заполнений, являющихся бинарными деревьями.

Определение 1. Назовем *мультиобходом кратности k* бинарного дерева $G = (V, E)$ замкнутый путь, проходящий $2k$ раз по каждому ребру графа G.

Пусть теперь бинарное дерево G затягивает метрическое пространство M. Тогда каждому мультиобходу π можно поставить в соответствие число $p(M, \pi)$ — периметр этого обхода.

Теорема 2. *Вес минимального заполнения конечного метрического пространства M может быть найден по формуле*

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \max_\pi p(\mathcal{M}, \pi),$$

где G — всевозможные бинарные деревья, затягивающие $\mathcal{M}$, π — их мультиобходы, $p(\mathcal{M}, \pi)$ — соответствующие периметры.

Данная формула полезна как и сама по себе, так и при доказательстве различных свойств минимальных заполнений метрических пространств.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00748-а), Гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3224.2010.1) и Программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП 2.1.1.3704).

Список литературы

[1] *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Математический сборник, в печати.

[2] *Еремин А. Ю.* Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Математический сборник, в печати.

Спектр и собственные функции оператора индукции магнитного поля на двумерной компактной поверхности вращения

Есина А. И. (Институт проблем механики РАН, Россия)

Магнитное поле в проводящей жидкости (в частности, некоторые магнитные поля галактик и планет) описывается оператором индукции:

$$LB = \varepsilon\Delta B + \{V, B\} = \varepsilon\Delta B + (V, \nabla)B - (B, \nabla)V,$$

где B — магнитное поле, V — поле скоростей и ε — малый параметр (сопротивление). Мы изучаем спектр и собственные функции этого оператора на произвольной двумерной поверхности вращения. В статье описана асимптотика спектра при больших магнитных числах Рейнольдса, а также пространственная структура магнитного поля.

О классификации накрытий окружности

Жужома Е. В. (Нижегородский государственный педагогический университет, Россия)
Исаенкова Н. В. (Нижегородский государственный педагогический университет, Россия)

Получена классификация d-накрытий степени $d \geq 2$ окружности S^1 с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до d-эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени d.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039.

Структура множества обобщенных систем Коши-Римана в трехмерном пространстве и их приложения

Жура Н. А. (Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Россия)

Под обобщенным оператором Коши–Римана понимаем такой дифференциальный оператор первого порядка

$$L = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

с постоянными матричными коэффициентами, что решения u однородного уравнения $Lu = 0$ являются гармоническими векторами. Классификация и свойства многомерных операторов Коши–Римана были предметом рассмотрения многих специалистов [**1, 2, 3**], в основном с точки зрения теории представлений групп. В настоящей работе вопрос о структуре их множества решается элементарным методом, не использующим теории представлений групп. Он может оказаться полезным при решении известной проблемы, поставленной еще в 1956 году И. М. Гельфандом, И. Г. Петровским и Г. Е. Шиловым [**4**] о числе связных компонент множества эллиптических систем первого порядка; исчерпывающее решение этого вопроса, по-видимому, еще открыто. В работе рассматриваем только операторы L с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. В их разложениях по образующим $e_0 = 1, e_1, \ldots, e_{15}$ алгебры Клиффорда коэффициент при e_0 равен нулю. Остальные же коэффициенты (их можно считать вещественными) представим в виде матрицы $S \in \mathbb{R}^{15\times 3}$, которую разобьем на пять квадратных матриц $S_1, \ldots, S_5$ третьего порядка. При этом соответствие между L и S взаимно однозначно с точностью до образующих алгебры Клиффорда. В этих обозначениях основной результат следующий.

Теорема 1. *Оператор L является обобщенным оператором Коши–Римана тогда и только тогда, когда либо $S_4 \in O(3, \mathbb{R})$, $S_k = 0$, $k \neq 4$,* *либо $S_5 \in O(3,\mathbb{R})$, $S_k = 0$, $k \neq 5$, либо вполне определенная линейная комбинация матриц S_1, S_2, S_3 принадлежит $O(3,\mathbb{R})$, а $S_4 = S_5 = 0$. В частности, множество рассматриваемых операторов имеет шесть связных компонент. Соответствующие L операторы $H = id/dt - L$ гиперболичны.*

Возможны три случая, когда указанные матрицы из $O(3,\mathbb{R})$ единичные; отвечающие им операторы L назовем каноническими. Показано, что один из них есть оператор Моисила–Теодореску, а другой — оператор Дирака (стационарный, без младших членов).

Если L является оператором Моисила–Теодореску, то компоненты решения уравнения $Hu = 0$ допускают физическую интерпретацию (в противоположность оператору Дирака и третьему из этих канонических операторов). В докладе приводится также ряд других результатов для этих операторов.

Список литературы

[1] *Stiefel E.* On Cauchy–Riemann equations in higher dimensions, J. Res. Nat. Bur. Standards, vol. 48, (1952), 395–398.

[2] *Stein E.M., Weiss G.* Generalization of the Cauchy–Riemann equations and representations of the rotation group, Amer. J. Math. , vol. 90 (1968), 163–196.

[3] *Stein E.M., Weiss G.* Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1971).

[4] *Петровский И.Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М., Наука, 1986, 504 с.

Нормально разрешимые краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве

Журавлев В. Ф. (Житомирский национальный агроэкологический университет, Украина)

Пусть $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $z(t)$, определенных на конечном промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ с нормой $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $\varphi(t)$, определенных на том же промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_2$ с нормой $|||\varphi||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $\mathbf{B}$ — банахово пространство числовых последовательностей.

Рассмотрим задачу об условиях разрешимости и представлении решений краевой задачи для операторного уравнения

$$(\Lambda z)(t) = \left(\begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z \right)(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ — линейный ограниченный обобщенно обратимый оператор **[1]**; $\ell = \mathrm{col}(l_1, l_2, l_3, \ldots) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ — линейный ограниченный вектор-функционал; $\alpha \in \mathbf{B}$.

Обобщенная обратимость оператора L означает, что нуль-пространство $N(L)$ и ядро $R(L)$ дополняемы в банаховых пространствах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, соответственно, и он нормально разрешим. При этом существуют **[2]** ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to N(L)$ и $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) \to Y_L$, которые разбивают пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$

в прямые суммы подпространств $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) = N(L) \oplus X_L$, $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2) = Y_L \oplus R(L)$.

Теорема 1. *Пусть L и $\mathcal{L}$ — обобщенно обратимые операторы. Тогда соответствующая* (1) *однородная ($\varphi(t) = 0$, $\alpha = 0$) краевая задача имеет линейно независимые решения вида*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\check{z}_0)(t),$$

где $\mathcal{P}_{N(\Lambda)} = \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — проектор банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ на нуль-пространство $N(\Lambda)$ оператора Λ, $\check{z}_0(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$. Неоднородная краевая задача (1) *разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ и $\alpha \in \mathbf{B}$, которые удовлетворяют условиям*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = 0,$$
$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\} = 0,$$

и при этом ее общее решение имеет вид

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\check{z}_0)(t) + (G\varphi)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{L}^-\alpha))(t),$$

где $\mathcal{L} = \ell\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$; $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} : \mathbf{B} \to Y_\mathcal{L}$ — ограниченный проектор; $(G\varphi)(t) = (L^-\varphi)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell(L^-\varphi)(\cdot))(t)$ — обобщенный оператор Грина.

Список литературы

[1] *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.

[2] *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. 1973. Т. 28, вып. 6. С. 77–94.

Об оценке сверху для показателей Ляпунова возмущенной абстрактной линейной системы

Загребина И. С. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Пусть Ω — метрическое пространство с метрикой ρ; F, V — вещественные линейные нормированные пространства; $L(F,V)$ — нормированное пространство ограниченных линейных отображений из F в V с нормой, согласованной с нормами в F и V, т. е. удовлетворяющей условию $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ при всех $A \in L(F,V)$, $x \in F$; $GL(F)$ — группа всех обратимых элементов из $L(F,F)$. Нейтральный элемент группы $GL(F)$ будем обозначать через E.

Определение 1. Абстрактной линейной системой (АЛС) на пространстве Ω с фазовым пространством F будем называть тройку (Ω,F,X), где $X : \Omega \times \Omega \to GL(F)$ представляет собой непрерывное по каждому аргументу отображение, удовлетворяющее условиям $X(t,t) = E$ и $X(t,s)X(s,t) = E$ для любых $t,s \in \Omega$. Отображение X, а также и всякое его значение $X(t,s)$ при фиксированных $t,s \in \Omega$, будем называть оператором Коши АЛС (Ω,F,X).

Определение 2. АЛС (Ω,F,X) будем называть вполне разрешимой, если при любых $t_1,t_2,t_3 \in \Omega$ выполнено равенство $X(t_3,t_2)X(t_2,t_1) = X(t_3,t_1)$.

Определение 3. Решением АЛС (Ω, F, X) будем называть отображение $x : \Omega \to F$, удовлетворяющее условию $x(t) = X(t,s)x(s)$ при любых $t, s \in \Omega$. Показателем Ляпунова решения $x(\cdot)$ АЛС (Ω, F, X) будем называть $\lambda[x] \doteq \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_\Omega}} \dfrac{1}{\rho(t,t_0)} \ln \|x(t)\|$, где $\mathcal{F}_\Omega$ — фильтр дополнений до ограниченных множеств в Ω.

Рассмотрим две вполне разрешимые АЛС — исходную $(\mathbb{R}^n, F, X)$ и возмущенную $(\mathbb{R}^n, F, X(E + H))$ с возмущением H и оператором Коши $Y(t,s) = X(t,s)(E + H(t,s))$.

Теорема 1. *Пусть задана положительная функция β, определенная на $\mathbb{Z}^n$, такая, что справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\|t_m - t_0\|} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(t_k) \|H(t_{k+1}, t_k)\| = 0,$$

где $\{t_m\}$ — последовательность из $\mathbb{Z}^n$, $t_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Тогда для показателя Ляпунова произвольного нетривиального решения $y(\cdot)$ возмущенной системы выполняется оценка $\lambda[y] \le \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \dfrac{1}{\|t_m - t_0\|} \ln \eta_m$, где последовательность η_m при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(t_m, t_k)\| \beta(t_k) \eta_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с произвольным начальным условием $\eta_1 > 0$, причем величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \dfrac{1}{\|t_m - t_0\|} \ln \eta_m$ не зависит от выбора η_1.

Список литературы

[1] *Макаров Е. К.* Об асимптотической классификации абстрактных линейных систем // Труды института математики НАН Беларуси. Минск. 1999. Т. 3. с. 79–88.

[2] *Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.* Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. с. 215–224.

Асимптотика магнитогидродинамической задачи Ламба с учетом молекулярной и магнитной вязкостей

Задорожный А. И. (Южный федеральный университет, Россия)

Классическая задача Ламба представляет собой линеаризованную задачу о свободных гравитационных волнах в однородной вязкой несжимаемой жидкости, граничащей с вакуумом и заполняющей нижнюю полуплоскость. Отметим, что Н. Н. Моисеев построил асимптотику указанной задачи для малой вязкости, применив метод Вишика–Люстерника. МГД аналоги задачи Ламба при наложении на систему стационарного однородного горизонтального магнитного поля рассмотрены нами для случаев $R_m = \infty$, R_g — произвольно (1996), а также при $R_g = \infty$, R_m — произвольно (2000), где R_g, R_m — гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса.

В настоящем докладе рассматривается модельная задача для общего случая наличия как гидродинамического, так и магнитного чисел Рейнольдса. Представляя вертикальную компоненту вектора напряженности, индуцированного движением жидкости, в виде $h_z(x,z,t) = Z(z)\exp(ix + \sigma t)$, равно как и аналогичным образом, остальные искомые величины, придем к следующей краевой задаче на собственные значения для ОДУ

$$(R_g \cdot R_m)^{-1} M^3[Z(z)] - \sigma \left(R_g{}^{-1} + R_m{}^{-1}\right) M^2[Z(z)] + (\sigma^2 + A)M[Z(z)] = 0$$

где σ — искомый спектральный параметр, A — число Альфвена, $M = \frac{d^2}{dz^2} - 1$.

Сформулируем граничные условия:

$$\begin{aligned}(R_g \cdot R_m)^{-1} \left[Z^V(0) - 4Z'''(0) + 3Z'(0)\right] - R_g{}^{-1}\sigma \left[Z'''(0) - 3Z'(0)\right] - \\ - R_m{}^{-1}\{\left[Z'''(0) - Z'(0)\right] + \frac{1}{\sigma}\left[Z''(0) - Z(0)\right]\} + \\ + \sigma^2 Z'(0) + Z(0) + A\left[Z'(0) + Z\right] = 0\end{aligned}$$

— условие непрерывности нормальной компоненты тензора полных, т. е. гидродинамических и магнитных, напряжений при переходе через границу раздела „жидкость-вакуум“;

$$R_m{}^{-1}\left[Z^{IV}(0) - Z(0)\right] - \sigma\left[Z''(0) + Z(0)\right] = 0$$

— условие отсутствия вязких касательных напряжений на свободной поверхности (СП). Условие непрерывности касательной составляющей тензора магнитных напряжений при переходе через СП носит двойственный характер, а именно:

1°. $Z''(0) - Z(0) = 0$ — при наличии поверхностных токов,
2°. $Z'(0) + Z(0) = 0$ — при их отсутствии.

При $z \to -\infty$ ставим условие $|Z(z)| \to -\infty$, т. е. затухания всех возмущений с глубиной.

Дальнейшее исследование проводится для частного случая $R_g = R_m = R$. Для малых вязкостей $R^{-1} = \epsilon^2, 0 < \epsilon \ll 1$, в соответствии с процедурой метода Вишика–Люстерника, строится разложение первого итерационного процесса и три члена типа пограничного слоя. В результате определяется асимптотическое выражение для собственного числа, характеризующего частоту и декремент затухания колебаний. Помимо этого найдено „точное“ иррациональное уравнение частот, что позволяет сравнить асимптотические формулы с результатами численных расчетов.

Равномерная экспоненциальная стабилизация семейства нелинейных управляемых систем

Зайцев В. А. (Удмуртский государственный университет, Россия)
Тонков Е. Л. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Пусть (Σ, h^t) — топологическая динамическая система с компактным фазовым пространством Σ. Пусть задана функция $(\sigma, x, u) \to F(\sigma, x, u) \in \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывная вместе со своими частными производными F'_x, F'_u на множестве $\Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Рассматривается семейство управляемых систем

$$\dot{x} = F(h^t\sigma, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$. *Допустимым управляемым процессом* системы (1) называется всякая функция $t \to \widehat{\varphi}(h^t\sigma) := \big(\widehat{x}(h^t\sigma), \widehat{u}(h^t\sigma)\big)$, равномерно непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$, такая что $\widehat{x}(h^t\sigma)$, $t \in \mathbb{R}$ является решением системы (1) при $u = \widehat{u}(h^t\sigma)$. Рассмотрим допустимый процесс $t \to \widehat{\varphi}(h^t\sigma)$ для каждого $\sigma \in \Sigma$. Получим семейство $(\widehat{\varphi}, \Sigma) := \{t \to \widehat{\varphi}(h^t\sigma),\ \sigma \in \Sigma\}$ допустимых процессов. Будем говорить **[1]**, что семейство допустимых процессов $(\widehat{\varphi}, \Sigma)$ *равномерно экспоненциально стабилизируемо с показателем* $\alpha > 0$, если найдутся числа $N > 0$, $\varkappa > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любого $\sigma \in \Sigma$ найдется непрерывное управление $(t, x) \to u(t, x, \sigma) \in \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times O_\delta\big(\widehat{x}(h^t\sigma)\big)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1°. выполнено неравенство $|u(t, x, \sigma) - \widehat{u}(h^t\sigma)| \leqslant \varkappa$;
2°. $u(t, \widehat{x}(h^t\sigma), \sigma) \equiv \widehat{u}(h^t\sigma)$;
3°. любое решение $t \to x(t, \sigma)$, $t \in \mathbb{R}_+$ системы (1) с выбранным управлением $u = u(t, x, \sigma)$ и начальным условием $x(0, \sigma) \in O_\delta(\widehat{x}(\sigma))$ удовлетворяет при всех $t \geqslant 0$ неравенству

$$|x(t, \sigma) - \widehat{x}(h^t\sigma)| \leqslant N|x(0, \sigma) - \widehat{x}(\sigma)| \exp(-\alpha t).$$

Построим систему линейного приближения в окрестности допустимого процесса

$$\dot{y} = A(h^t\sigma)y + B(h^t\sigma)v, \quad (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где $A(h^t\sigma) := \frac{\partial F(h^t\sigma, x, u)}{\partial x}\Big|_{\widehat{\varphi}(h^t\sigma)}$, $B(h^t\sigma) := \frac{\partial F(h^t\sigma, x, u)}{\partial u}\Big|_{\widehat{\varphi}(h^t\sigma)}$. Семейство линейных управляемых систем (2) (зависящее от параметра $\sigma \in \Sigma$) называется *равномерно вполне управляемым* **[2]**, если существуют константы $\vartheta > 0$ и $\ell > 0$ такие, что для любого $\sigma \in \Sigma$ и для любого $y_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое управление $t \to v(t, y_0, \sigma)$, $t \in [0, \vartheta]$ такое, что решение $y(t, \sigma)$ уравнения (2) с управлением $v = v(t, y_0, \sigma)$ с начальным условием $y(0, \sigma) = y_0$ удовлетворяет условию $y(\vartheta, \sigma) = 0$, при этом выполнено неравенство $|v(t, y_0, \sigma)| \leqslant \ell|y_0|$, $t \in [0, \vartheta]$.

Теорема 1. *Пусть семейство систем* (2) *равномерно вполне управляемо. Тогда для любого* $\alpha > 0$ *семейство допустимых процессов* $(\widehat{\varphi}, \Sigma)$ *равномерно экспоненциально стабилизируемо с показателем* α.

Работа поддержана грантом научных исследований Правительства РФ (программа № 11.G34.31.0039) и грантом РФФИ (программа 11-01-00380-а).

Список литературы

[1] *Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Экспоненциальная стабилизируемость нелинейных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 25–29.
[2] *Тонков Е. Л.* Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости рекуррентной системы // ДАН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 290–294.

Об асимптотической эквивалентности систем с неограниченными коэффициентами

Залыгина В. И. (Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Россия)

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными (не обязательно ограниченными) матричными функциями A, которые будем отождествлять с соответствующими системами.

Определение 1. Следуя **[1]**, будем называть системы $A,\ B \in \mathcal{M}^n$ асимптотически эквивалентными, если существует преобразование Ляпунова, переводящее одну из систем в другую. При этом под преобразованием Ляпунова понимается непрерывная кусочно-дифференцируемая матричная функция L, удовлетворяющая условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left(|L(t)| + \left|L^{-1}(t)\right|\right) < +\infty,$$

где норма матрицы определяется формулой $|X| := \max\limits_{1\le i,j\le n} |x_{ij}|$.

Для заданной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ обозначим через $\mathbb{M}^n_f$ множество систем $A \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих для всякого $t \in \mathbb{R}^+$ неравенству

$$|A(t)| \le f(t). \tag{2}$$

Теорема 1 (ср. **[2]**). *Для всяких непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность (t_k), $t_k \uparrow +\infty$, что для любой системы $A \in \mathbb{M}^n_f$ существует асимптотически эквивалентная ей система $B \in \mathbb{M}^n_{f+\varepsilon}$, постоянная на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2. *Для всякой последовательности (t_k), $t_k \uparrow +\infty$, существует такая система $A \in \mathcal{M}^n$, что никакая система с постоянными на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), $k \in \mathbb{N}$, коэффициентами не является асимптотически эквивалентной системе A.*

Теорема 3. *Для всякой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ найдется такая последовательность (t_k), $t_k \uparrow +\infty$, что для любой системы $A \in \mathbb{M}^n_f$ и любой системы $B \in \mathcal{M}^n$ с ограниченными коэффициентами существует такая система $\tilde{B}$ с постоянными на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), $k \in \mathbb{N}$, коэффициентами, что $\sup_{t\ge 0} |\tilde{B}(t)| \le \sup_{t\ge 0} |B(t)|$ и системы $A + B$ и $A + \tilde{B}$ асимптотически эквивалентны.*

В доказательстве теорем 1 и 3 использована теорема 1 из **[3]**.

Список литературы

[1] *Богданов Ю. С.* Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.

[2] *Мазаник С. А.* Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 923–926.

[3] *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.

Об одном способе обращения оператора Валле-Пуссена

Заляпин В. И. (Южно-Уральский государственный университет, Россия)

Пусть $\hat{x}(t)$ — наблюдаемый в эксперименте сигнал, $u(t)$ – сигнал, подлежащий определению. Предполагается, что x и u связаны уравнением

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = u(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

и x удовлетворяет краевым условиям ([**1**])

$$x(t_i) = l_i, \quad a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b. \tag{2}$$

Если задача (1)–(2) однозначно разрешима, то, как известно ([**2**]), существует однозначно определяемая функция Грина $G(t,s)$ такая, что имеет место равенство

$$\int\limits_a^b G(t,s)u(s)\,ds = x_{int}(t). \tag{3}$$

Здесь

$$x_{int}(t) = x(t) - \Psi(t) - \int\limits_a^b G(t,s)L[\Psi]\,ds,$$

$\Psi(t)$ — интерполяционный многочлен, ассоциированный с граничными условиями рассматриваемой краевой задачи.

Соотношение (3) и является искомым обращением оператора Валле–Пуссена (1)–(2).

Теорема 1. *Пусть однородная задача* (1)–(2) *обладает нетривиальным решением для некоторого набора интерполяционных узлов $a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le b$. Тогда можно так слегка „пошевелить“ этот набор:*

$$\forall\ \delta > 0 \ \ \exists\ a \le t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^* \le b : \quad |t_i - t_i^*| < \delta,$$

что многоточечная задача Валле–Пуссена будет однозначно разрешимой для любых правых частей $u(t)$.

Теорема 2. *Пусть узлы интерполяции задачи* (1)–(2) *выбраны так, что эта задача однозначно разрешима. Тогда функция Грина $G(t,s)$ является единственным решением интегрального уравнения*

$$G(t,s) - \tilde{G}(t,s) = \int\limits_a^b G(t,\tau)V(\tau,s)\,d\tau, \tag{4}$$

ядро которого $V(\tau,s)$ и функция $\tilde{G}(t,s)$ выписываются явным образом.

Список литературы

[1] *Дж. Сансоне*, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Изд. иностранной литературы, том 1, 347 с., 1953.

[2] *Покорный Ю. В.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи// Математические заметки, Т. 4, № 5, 1968. С. 533–540.

Краевая задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием

Зарубина Л. В. (Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, Россия)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sign} t \cdot u_{tt} = 0$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где α, β — заданные положительные действительные числа, и поставим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{1}$$

$$Lu \equiv 0, \qquad (x,t) \in D_- \cup D_+; \tag{2}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \psi(x)\,dx = A = \text{const}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Отметим, что интегральное условие (5) является нелокальным, физически оно означает постоянство внутренней энергии системы. Краевая задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с таким нелокальным интегральным условием рассмотрена в работе **[1]**.

В данной работе, следуя **[1]**, установлен критерий единственности решения поставленной задачи (1)–(5).

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (1)–(5)*, то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N$ выполнено неравенство*

$$\cos\lambda_k\alpha \cdot \operatorname{sh}\lambda_k\beta + \sin\lambda_k\alpha \cdot \operatorname{ch}\lambda_k\beta \ne 0, \qquad \lambda_k = 2\pi k.$$

Список литературы

[1] *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 45. № 10. С. 1468–1478.

О формуле для регуляризованных следов

Затицкий П. Б. (Санкт-Петербургский госуниверситет, РФ)
Столяров Д. М. (Санкт-Петербургский госуниверситет, РФ)

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}$, порождаемый дифференциальным выражением

$$ly \equiv (-1)^m D^{2m} y + \sum_{k=0}^{2m-2} p_k(x) D^k y$$

(здесь $p_k \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ — вещественные функции) и граничными условиями

$$P_j(D)y(0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m$$

(здесь P_j — полином степени k_j, причем граничные условия считаются *приведенными*, т. е. $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le 2m-1$). Допустим, что этот оператор самосопряжен в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$, полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (нумерация по возрастанию с учетом кратности).

Пусть $\mathbb{Q}$ — оператор умножения на вещественную функцию $q \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Тогда оператор $\mathbb{L} + \mathbb{Q}$ также имеет чисто дискретный спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Теорема 1. *Пусть q имеет ограниченный носитель, а функция $\psi(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x q(t)\,dt$ имеет ограниченную вариацию в нуле. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{S}_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu_n - \lambda_n - \frac{c_n}{\pi}\int\limits_0^{\infty} q(t)\,dt\Big] = -\psi(0+) \cdot \Big(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\varkappa}{2m}\Big), \tag{1}$$

где

$$c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2m}}; \qquad c_n = \lambda_n^{\frac{1}{2m}} - \lambda_{n-1}^{\frac{1}{2m}}, \quad n > 1; \qquad \varkappa = \sum_{j=1}^{m} k_j.$$

Замечание 1. Для одночленных краевых условий $P_j(D) = D^{k_j}$ формула (1) была доказана в препринте [**2**] (три частных случая: $k_j = 2j-2$; $k_j = 2j-1$ и $k_j = j-1$ были ранее рассмотрены в работах [**3**], [**4**]). Полное доказательство содержится в [**1**].

Доклад основан на совместной работе с А. И. Назаровым.

Работа поддержана грантом 11.G34.31.0026 Правительства РФ (лаборатория имени П. Л. Чебышева при СПбГУ).

Список литературы

[1] Затицкий П. Б., Назаров А. И., Столяров Д. М., *О формуле для регуляризованных следов*, Препринт СПбМО № 2011-01. 6 с.
[2] Затицкий П. Б., Назаров А. И., Столяров Д. М., *По следам В. А. Садовничего*, Препринт СПбМО № 2010-04. 5 с.
[3] Козко А. И., Печенцов А. С., *Спектральная функция и регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков*, Мат. заметки, **83** (2008), № 1, 39–49.
[4] Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И., *Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов*, Доклады РАН, **427** (2009), № 4, 461–465.

Оценки устойчивости для некоторых линейных систем

Зейфман А. И. (Вологодский государственный педагогический университет, ИСЭРТ РАН и ИПИ РАН, Россия)
Коротышева А. В. (Вологодский государственный педагогический университет, Россия)
Панфилова Т. А. (Вологодский государственный педагогический университет, Россия)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, описывающая нестационарную марковскую цепь $X(t)$ с непрерывным временем и пространством состояний $E_N = \{0, 1, \cdots, N\}$. Матрица $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=0}^N$ прямой системы Колмогорова для цепи $X(t)$ обладает некоторыми специальными свойствами, а именно, сумма элементов каждого столбца такой матрицы при всех t равна нулю, внедиагональные элементы неотрицательны при всех $t \geq 0$, а все $a_{ij}(t)$ локально интегрируемы на $[0, \infty)$. Предполагается, что $X(t)$ описывает число требований в системе обслуживания с катастрофами (см., например, [**1**]). В этом случае все $a_{0j}(t) \geq \xi(t)$ при $j \geq 1$. Рассматриваются оценки устойчивости системы по отношению к возмущениям матрицы $A(t)$ в предположении „существенности“ катастроф. В этом случае удается применить метод, использованный для более узкого класса моделей в [**2**], добившись существенного улучшения констант с помощью приема, примененного впервые в [**3**]. Пусть прямая система Колмогорова для исходной и возмущенной марковской цепей имеет соответственно вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{A}(t)\bar{\mathbf{p}}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $\xi(t) \geq b > 0$, а $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq \varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$. Тогда для любых начальных условий $p(0)$ и $\bar{p}(0)$ справедлива оценка*

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{b}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть матрица $A(t)$ 1-периодична, $\int_0^1 \xi(t)\,dt = \theta > 0$ и $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq \varepsilon$ почти при всех $t \geq 0$.*

Тогда для любых начальных условий $\mathbf{p}(0)$ и $\bar{\mathbf{p}}(0)$ справедливо неравенство

$$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{\varepsilon\,(1+\theta)}{\theta}. \tag{3}$$

Те же оценки удается получить и в случае счетного пространства состояний. Оценки устойчивости других характеристик цепи $X(t)$ удается получить с помощью специальных преобразований, описанных в [**4**].

Список литературы

[1] *Zeifman A., Satin Ya., Shorgin S., Bening V.* On $M_n(t)/M_n(t)/S$ queues with catastrophes // Proceedings of the 4th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. Pisa, Italy October 19–23, 2009.

[2] *Зейфман А. И., Коротышева А. В., Сатин Я. А., Шоргин С. Я.* Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения, 2010, Т. 4, № 3, С. 9–15.

[3] *Mitrophanov A. Yu.* Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains // J. Appl. Prob. 2003. V. 40. P. 970–979.

[4] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. М.: Элекс-КМ, 2008.

Решение задачи Коши для уравнения с полуфредгольмовым оператором при производной

Зубова С. П. (Воронежский государственный университет, Россия)

Исследуется уравнение

$$A(t)\frac{dx(t)}{dt} = D(t)u(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ — замкнутый линейный нетеров при каждом t оператор (он же полуфредгольмов, он же фредгольмов с ненулевым индексом $\varkappa = \dim\ker A(t) - \dim\operatorname{coker} A(t)$), действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{D(A(t))} = E_1$, $\dim\ker A(t) = \text{const}$, $\dim\operatorname{coker} A(t) = \text{const}$, $B(t) \in L(E_1, E_2)$; $t \in [0, T]$.

Определение 1. Уравнение (1) называют регулярным, если $\exists(A(t) - \lambda B(t))^{-1}$, для любых $\lambda \in \mathbb{C} \cap \dot{U}(0)$, $\forall t \in [0, T]$.

Определение 2. Уравнение (1) назовем псевдорегулярным, если

$$\ker(A(t) - \lambda B(t)) = \{0\} \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C} \cap \dot{U}(0), \forall t \in [0, T].$$

1. Случай постоянных A, B. При решении регулярного уравнения (1) с условием $x(0) = x^0 \in E_1$ большую роль играет оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A$.

В псевдорегулярном случае строится оператор A_λ другим образом.

Теорема 1. *В E_1 вложены подпространства M и N, инвариантные относительно A_λ. В M оператор A_λ обратим, N — корневое подпространство для A_λ.*

В регулярном случае

$$E_1 = M \dot{+} N, \tag{2}$$

то есть число 0 является для A_λ нормальным собственным числом.

В псевдорегулярном случае разложение (2) имеет место лишь для определенных A, B.

Теорема 2. *Решение задачи Коши для* (1) *существует в том, и только том случае, когда $x^0 \in M$. При этом $x(t) \in M$ и единственно.*

Теорема 3. *При $\exists\lambda \in \mathbb{C} \cap \dot{U}(0)$ такого, что $\ker(A - \lambda B) \neq \{0\}$, в E_1 вложено инвариантное относительно A_λ подпространство M_∞. Решение задачи Коши существует тогда и только тогда, когда $x^0 \in M_\infty$. При этом $x(t) \in M_\infty$ и неединственно.*

2. Случай переменных $A(t)$, $B(t)$. Выявляются свойства $A(t)$, $B(t)$, достаточные для выполнения теорем (1)–(3).

Во всех случаях выводятся формулы для решения $x(t)$.

Список литературы

[1] *Зубова С. П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной // Доклады РАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 444–446.

Регуляризованный след возмущения оператора Лапласа–Бельтрами

Зыкова Т. В. (Московский государственный университет, Россия)

Основным результатом работы является нахождение регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на многообразии, заданном некоторым функциональным семейством гладких *почти лиувиллевых* метрик на сфере (при этом все геодезические этих метрик замкнуты и имеют одинаковую длину) **[1]**. Для построения этого семейства, метрика постоянной кривизны на сфере представляется в лиувиллевом виде с помощью сфероконических координат (v_1, v_2, v_3).

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3)\left(-\frac{dv_2^2}{P(v_2)} + \frac{dv_3^2}{P(v_3)}\right), \quad \text{где} \quad P(v) = (a+v)(b+v)(c+v). \tag{1}$$

Затем пространство R^3 разбивается на четыре области, и показывается, что на каждой из них функции $P(v_2)$ и $P(v_3)$ можно задать независимо друг от друга и внутри каждой области, вместо функций $P(v_2)$ и $P(v_3)$, задаваемых одной функцией P, можно взять две разные. Так, например, на 1-ой области метрика будет зависеть от функций $Q_+(v_2)$ и $R_+(v_3)$, на 2-ой — от $Q_+(v_2)$ и $R_-(v_3)$, на 3-ей — от $Q_-(v_2)$ и $R_+(v_3)$, на 4-ой — от $Q_-(v_2)$ и $R_-(v_3)$. Определенным образом меняя функции Q_+, Q_-, R_+, R_-, получаем богатое функциональное семейство гладких метрик $ds^2(Q_+, Q_-, R_+, R_-)$ на сфере, геодезические которых замкнуты и имеют одинаковую длину.

Теорема 1. *Пусть ML — многообразие, описанное выше. Если q — бесконечно-дифференцируемая вещественнозначная функция на ML, то для собственных чисел оператора $A = \Delta + q$ верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\left(\lambda_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{ML} q(v_2,v_3)\sqrt{\det g}\,dv_2dv_3\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S^*ML}(q^{av})^2 dv - \frac{1}{60\pi}\iint\limits_{ML}(\Delta\gamma(ML) + \gamma^2(ML) - \gamma(ML))\sqrt{\det g}\,dv_2dv_3 -$$

$$- \frac{1}{24\pi}\iint\limits_{ML}\big(\Delta q(v_2,v_3) + 3q^2(v_2,v_3) - 2q(v_2,v_3)(\gamma(ML) - 1)\big)\sqrt{\det g}\,dv_2dv_3,$$

где $\gamma(ML)$ — гауссова кривизна ML, и $\sqrt{\det g}$ — корень из определителя матрицы метрического тензора, S^*ML — расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве, dv — каноническая форма объема на S^*ML, а q^{av} — символ усреднения на ML ($q^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(q)dt$, где Ξ — гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*ML \setminus \{0\}$, определяемое римановой структурой на ML).

Эта работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ «Поддержка ведущих научных школ», НШ-7322.2010.1.

Список литературы

[1] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (Том 2). Ижевск, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

О неравенствах Либа–Тирринга на некоторых многобразиях

Ильин А. А. (ИПМ им. М. В. Келдыша, Россия)

Обозначим через M двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ или двумерный тор $\mathbb{T}^2$. Для достаточно гладкого потенциала V рассмотрим квадратичную форму

$$Q_V(h) = \int_M |\nabla h(x)|^2\, dM + \int_M V(x) h(x)^2\, dx,$$
$$h \in \dot{H}^1(M), \qquad \int_M h(x)\, dM = 0,$$

которая ограничена снизу и определяет самосопряженный оператор с дискретным спектром $\nu_1 \le \nu_2 \le \cdots \to \infty$.

Теорема 1. *Для отрицательного спектра этого оператора справедлива оценка*

$$\sum_{\nu_j \le 0} |\nu_j| \le \mathrm{L}_1(M) \int_M V_-(x)^2\, dM, \qquad V_-(x) = (|V(x)| - V(x))/2.$$

При этом

$$\mathrm{L}_1(\mathbb{T}^2) < \frac{3}{8}, \qquad \mathrm{L}_1(\mathbb{S}^2) < \frac{3}{8}.$$

В одномерном случае справедлива оценка с добавочным членом. Для L-периодических функций с нулевым средним рассмотрим оператор, соответствующий квадратичной форме

$$Q_V(h) = \int_0^L h'(x)^2\, dx + \int_0^L V(x) h(x)^2\, dx.$$

Теорема 2. *Предположим, что существует N отрицательных собственных значений $\nu_j \le 0$ этого оператора. Тогда*

$$\sum_{j=1}^N |\nu_j| + N\frac{4}{L^2} \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^L V_-(x)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00288.

Список литературы

[1] Lieb E. and Thirring W. Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities, Studies in Mathematical Physics. Essays in honor of Valentine Bargmann, Princeton University Press, 269–303 (1976).

Тождество Похожаева и вычисление критических нелинейностей для задач со свободной границей

Ильясов Я. Ш. (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия)

В 1999 году Диас и Эрнандес [**1**], в одномерном случае ($n = 1$) показали, что уравнение

$$-\Delta u = \lambda |u|^{\beta-1}u - |u|^{\alpha-1}u \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$, имеет при достаточно больших λ неотрицательное решение с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. В литературе такие решения иногда называют компактонами или решениями задач со свободной границей (см. [**3**]). Вопрос о том, существуют ли компактоны у задачи (1) при $n > 1$, до недавнего времени оставался открытым. Впервые ответ на этот проблему был найден в совместной работе автора с Ю. В. Егоровым [**2**], где было доказано, что если

$$n > n^* := \frac{2(1+\alpha)(1+\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}, \tag{2}$$

то уравнение (1) обладает неотрицательным компактонами при всех $\lambda > \lambda^*$, для некоторого $\lambda^* > 0$.

Основной целью представленного доклада является обоснование того, что размерность n^*, задаваемая по формуле (2), действительно обладает свойствами критического показателя для (1). В основе нашего подхода лежит использование тождества Похожаева [**4**], применяемого в новом качестве.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00348-а.

Список литературы

[1] *Díaz J. I., Hernández J.*, Global bifurcation and continua of nonnegative solutions for a quasilinear elliptic problem// C.R. Acad. Sci. Paris, V. 329, (1999), p. 587–592.

[2] *Ilyasov Y., Egorov Y.*, Hopf boundary maximum principle violation for semilinear elliptic equations// Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications Vol. 72, (7-8), 1 (2010), 3346–3355.

[3] *Hernández J., Mancebo F. J, Vega J. M.*, Positive solutions for singular nonlinear elliptic equations// Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 137(A) (2007), 41–62.

[4] *Pokhozhaev S. I.*, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$// Sov. Math. Doklady, 5 (1965) 1408–1411.

Характеристический определитель спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с интегральным возмущением краевого условия

Иманбаев Н. С. (Международный казахско-турецкий университет им. А. Ясави, Казахстан)

В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(u) = u^{(n)}(x) + q_2(x)u^{(n-2)}(x) + \ldots + q_n(x)u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_j(u) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{jk}u^{(k)}(0) + \beta_{jk}u^{(k)}(1)] = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения $q_k(x) \in C^{n-k}[0,1]$, $k=\overline{2,n}$, а формы $U_j(u)$ — линейно независимые, с комплекснозначными постоянными коэффициентами.

Пусть $\mathcal{L}_1$ — оператор в $L_2(0,1)$, заданный выражением (1) и „возмущенными“ краевыми условиями:

$$\begin{gathered} U_j(u)=0, \quad j=\overline{1,n}, \quad j\neq m, \\ U_m(u)=\int_0^1 \overline{p_m(x)}u(x)dx, \quad p_m(x)\in L_2(0,1). \end{gathered} \tag{3}$$

Вопрос о базисности СиПФ оператора $\mathcal{L}_1$ с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в **[1]**, где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу краевых условий (2); а при дополнительном предположении усиленной регулярности — базисность Рисса СиПФ.

В настоящем докладе в предположении, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой собственных и присоединенных функций (СиПФ), образующей базис Рисса в $L_2(0,1)$, мы построим характеристический определитель спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}_1$.

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (2) *обладает собственными значениями* λ_k^0 *и СиПФ, образующими базис Рисса. Тогда характеристический определитель задачи* (1), (3) *с возмущенными краевыми условиями представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0}\overline{a_{kj}}\left(\sum_{r=0}^{m_k^0-j}\frac{(\lambda_k^0)^{\frac{n-1}{n}r}}{[\lambda-\lambda_k^0]^{r+1}}\overline{V_{2n-m+1}(v_{kj+r}^0)}\right)\right]\right), \tag{4}$$

где $\Delta_0(\lambda)$ — *характеристический определитель задачи* (1), (2); V_{2n-m+1} — *линейные однородные формы, возникающие при построении краевых условий сопряженной невозмущенной задачи;* $\{v_{kj}^0\}$ — *СиПФ сопряженной невозмущенной задачи;* a_{kj} — *коэффициенты Фурье биортогонального разложения функции* $p_m(x)$ *по этой системе.*

Доклад основан на совместной работе с М. А. Садыбековым.

Список литературы

[1] *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. 1982. № 6. С. 12–21.

Обобщение теоремы о равномерных аттракторах полупроцессов

Ипатова В. М. (Московский физико-технический институт, Россия)

Динамические системы, порождаемые диссипативными эволюционными уравнениями, и их аттракторы привлекают внимание исследователей в различных областях знаний. Первоначально аттракторы рассматривались только для автономных уравнений, затем это понятие было обобщено **[1]** на случай неавтономных эволюционных систем. Важным для приложений является вопрос о том, насколько близки аттракторы дискретных аппроксимаций математических моделей к их истинным аттракторам. Для автономных уравнений этот вопрос был изучен в **[2]**, где была доказана теорема о полунепрерывной зависимости от параметра аттракторов семейств полудинамических систем. В работе **[3]** аналогичный результат был получен для равномерных аттракторов семейств полупроцессов, соответствующих неавтономным эволюционным уравнениям. В **[2, 3]** предполагалось, что рассматриваемые семейства имеют общую полугруппу времени, поэтому при исследовании сходимости аттракторов конечно-разностных схем приходилось считать, что шаг сетки представляется в виде $\tau = \tau_n = T_0/n$, где T_0 — некоторое положительное число, $n \in \mathbb{N}$.

В настоящей работе доказана более общая теорема о полунепрерывной сверху зависимости от параметра равномерных аттракторов семейств полупроцессов для случая, когда рассматриваемые семейства могут не иметь общей полугруппы времени.

Эта работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», грант 2.1.1/11133.

Список литературы

[1] *Chepyshov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. P. 279–333.

[2] *Капитанский Л. В., Костин И. Н.* Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимаций // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 114–140.

[3] *Ипатова В. М.* Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 6. С. 47–56.

Неравенство Виртингера для оператора внутренней суперпозиции

Исламов Г. Г. (Удмуртский госуниверситет, Россия)

На гладких 2π-периодических функциях $x(t)$ рассмотрим при $t \in [0, 2\pi]$ оператор внутренней суперпозиции $(Sx)(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)x(q_j(t))$, где $p_j(t)$ и $q_j(t)$, соответственно, квадратично суммируемые и измеримые по Лебегу функции. Определим при $t \in [0, 2\pi]$ отклонения $h_j(t) = q_j(t) - 2\pi k$, если $q_j(t) \in [2\pi k, 2\pi(k+1))$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Очевидно, что $(Sx)(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)x(h_j(t))$, причем $h_j(t) \in [0, 2\pi)$ при $t \in [0, 2\pi]$.

Известное неравенство Виртингера **[1]** дает следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть функции* $\operatorname{mes} h_j^{-1}(0, t]$ *абсолютно непрерывны на отрезке* $[0, 2\pi]$,

$$\alpha = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,2\pi]} \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dt} \int_{h_j^{-1}(0,t]} |p_j(s)|^2 \, ds < \infty.$$

Пусть, далее, $z(t) = (Sy)(t)$, где $y(t)$ есть 2π-периодическая функция с нулевым средним на периоде $\left(\int_0^{2\pi} y(s)\,ds = 0\right)$ *и квадратично суммируемой на $[0, 2\pi]$ производной $y'(t)$. Тогда $\|z\|_{L^2[0,2\pi]} \le \alpha \|y'\|_{L^2[0,2\pi]}$.*

Уточнение константы α в последнем неравенстве было получено на основе следующего интегрального представления

$$y(t) = (Ky')(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(t-s)y'(s)\,ds$$

гладких 2π-периодических функций $y(t)$ с нулевым средним на периоде и последующего применения „теста Шура“ **[2]** к интегральному оператору $|SK|$ с ядром $|G(t,s)|$, где $G(t,s) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j(t)k(h_j(t) - s)$. Здесь $k(t)$ есть 2π-периодическая функция, определенная на $[-\pi, \pi]$ равенством

$$k(t) = \begin{cases} -t + \pi, & \text{если } t \in (0, \pi], \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ -t - \pi, & \text{если } t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Точное значение константы α равно $\min\limits_c$ наибольшего значения параметра $\omega = \omega(c)$ в спектральной задаче с фиксированной константой c

$$\omega^2 u(t) = \int_0^{2\pi} (G(t,s) - c)v(s)\,ds, \quad v(s) = \int_0^{2\pi} (G(t,s) - c)u(t)\,dt.$$

Список литературы

[1] *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.

[2] *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.

О критерии локализации спектра модельной задачи, связанной с оператором Орра–Зоммерфельда

Ишкин Х. К. (Башкирский государственный университет, Россия)

С известным в гидродинамике оператором Орра–Зоммерфельда **[1]** ассоциируется модельная задача вида

$$i\varepsilon^2 y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(-1) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функция q возрастает на $[-1, 1]$. Если q суммируема на интервале $(0, 1)$, то спектр задачи (1)–(2) дискретен и лежит в полуполосе $\Pi = \{a < \operatorname{Re} z < b, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$, где $a = q(-1)$, $b = q(1)$. В работе **[2]** показано, что если q принадлежит классу AM функций, допускающих аналитическое продолжение с отрезка $[-1, 1]$ в некоторую область $G \subset \mathbb{C}$ так, что отображение $q:\ \overline{G} \to \overline{\Pi}$ непрерывно и биективно, то предельный спектральный граф Γ задачи (1)–(2) имеет форму „спектрального галстука“:

$$\Gamma = \gamma_- \cup \gamma_+ \cup \gamma_\infty, \tag{3}$$

где кривые $\gamma_\pm$, γ_∞ имеют единственную общую точку λ_0 и соединяют ее с ± 1 и $-i\infty$ соответственно.

В предлагаемом докладе обсуждается вопрос: насколько условие $q \in AM$ необходимо для реализации Γ в виде (3)?

Мы доказываем, что при любом $l < \operatorname{Im}\lambda_0$ предположение о том, что для $\sigma_l(\varepsilon)$ — части спектра задачи (1)–(2) в полуполосе $\Pi_l = \Pi \cap \{\operatorname{Im}\lambda < l\}$ — предельным спектральным графом служит кривая $\gamma_{l\infty} = \gamma_\infty \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda < l\}$, влечет за собой возможность аналитического продолжения q в некоторую окрестность отрезка $[-1, 1]$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №№ 09-01-00440-а, 08-01-97020.

Список литературы

[1] *Drazin R. G., Reid W. H.* Hidrodynamic stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1981.

[2] *Shkalikov A. A.* Spectral portraits and the resolvent growth of amodel problem associated with the Orr–Zommerfeld equation// Electronic version: `www.arXiv:math.FA/0306342v1,24.06.2003`.

О спектре и частях спектра одной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве

Калитвин А. С. (Липецкий государственный педагогический университет, Россия)

В банаховом пространстве $X = X(S)$ рассматривается задача Коши

$$\lambda \frac{dx}{dt} = M(t)\frac{dx}{dt} + N(t)x + f(t), \quad x(t_0) = \varphi(s), \tag{1}$$

где λ — числовой параметр, S — множество конечной лебеговой меры в R^n, $t \in [a, b]$, $f(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ вектор-функция со значениями в пространстве X, $\varphi \in X$, $M(t)$ и $N(t)$ — оператор-функции

$$(M(t)u)(s) = \int_S m(t, s, \sigma)u(\sigma)\, d\sigma, \quad (N(t)u)(s) = \int_S n(t, s, \sigma)u(\sigma)\, d\sigma,$$

а dx/dt — производная Фреше. Под решением задачи (1) понимается непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ вектор-функция $x(t)$ со значениями в пространстве X. С задачей (1) связана задача Коши для интегро-дифференциального уравнения Барбашина:

$$\begin{gathered}\lambda \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = \int_S m(t, s, \sigma)\frac{\partial x(t, \sigma)}{\partial t} d\sigma + \int_S n(t, s, \sigma)x(t, \sigma) d\sigma + f(t, s), \\ x(t_0, s) = \varphi(s).\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть S — компакт, и $X = X(S)$ — пространство непрерывных на S функций с супремум-нормой. Аналогично **[1]** доказывается, что решение $x(t)(s)$ задачи (1) определяет непрерывное на $D = [a, b] \times S$ вместе с $\partial x(t, s)/\partial t$ решение $x(t, s) := x(t)(s)$ задачи (2), при этом верно и обратное утверждение. Предположим, что операторы $(My)(t, s) = \int_S m(t, s, \sigma)y(t, \sigma)\, d\sigma$

и $(Ny)(t,s) = \int_{t_0}^t \int_S n(t,s,\sigma)y(\tau,\sigma)\,d\tau d\sigma$ действуют в пространстве $C(D)$-непрерывных на D функций. В этом случае $M(t)$ и $N(t)$ — сильно непрерывные оператор-функции, а задача (1) равносильна рассматриваемому в $C(D)$ интегральному уравнению

$$\lambda y(t,s) = ((M+N)y)(t,s) + g(t,s) \equiv (Ky)(t,s) + g(t,s), \tag{3}$$

где $g(t,s) = f(t,s) + \int_S m(t,s,\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma$, в том смысле, что их решения связаны равенством $x(t)(s) = x(t,s) = \int_{t_0}^t y(\tau,s)d\tau + \varphi(s)$. Поэтому под спектром и частями спектра задачи (1) будем понимать спектр и части спектра действующего в $C(D)$ оператора K из уравнения (3). Через $C(L^1)$ обозначим множество измеримых на $D \times S$ функций, каждая из которых непрерывна по $(t,s) \in D$ как вектор-функция со значениями в $L^1(S)$, через $\sigma(A)$, $\sigma_{ew}(A)$ и $\sigma_{es}(A)$ — спектр, существенный спектр в смысле Вольфа и Шехтера линейного в $C(D)$ оператора A **[1]**, а через $\sigma(M(t))$ — спектр действующего в пространстве X оператора $M(t)$ $(t \in [a,b])$.

Так же, как в **[2]**, доказывается, что если $m, n \in C(L^1)$, то

$$\sigma(K) = \sigma_{ew}(K) = \sigma_{es}(K) = \sigma(M) = \sigma_{ew}(M) = \sigma_{es}(M) = \cup_t \sigma(M(t)).$$

Список литературы

[1] *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000.

[2] *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра–Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006.

Об одной задаче для нелинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве

Калитвин В. А. (Липецкий государственный педагогический университет, Россия)

В вещественном банаховом пространстве X рассматривается задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = M(t)\frac{dx}{dt} + C(t)x + N(t)x + f(t), x(t_0) = \varphi, \tag{1}$$

где $t \in [a,b]$, $f(t)$ и $x(t)$ — определенные на $[a,b]$ вектор-функции со значениями в пространстве X, $\varphi \in X$, $C(t)$, $M(t)$ и $N(t)$ — оператор-функции: $(C(t)u)(s) := c(t,s)u(s)$,

$$(M(t)u)(s) := \int_S m(t,s,\sigma)u(\sigma)d\sigma, (N(t)u)(s) := \int_S n(t,s,\sigma,u(\sigma))\,d\sigma,$$

dx/dt — производная Фреше, S — компактное множество в R^n, интегралы понимаются в смысле Лебега, а под решением задачи понимается непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ вектор-функция со значениями в пространстве X.

При естественных условиях задача (1) может быть интерпретирована как задача Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина:

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \int_S m(t,s,\sigma)\frac{\partial x(t,\sigma)}{\partial t}\,d\sigma + \int_S n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))\,d\sigma +$$

$$+ c(t,s)x(t,s) + f(t,s), x(t_0,s) = \varphi(s). \quad (2)$$

Пусть $D = [a,b] \times S$, $C(D)$ и $X = C(S)$ — пространства непрерывных на D и S соответственно функций с супремум-нормой, а $C_t(D)$ — множество непрерывных на D вместе с частной производной по t функций. Аналогично **[1]**, непрерывно дифференцируемое на отрезке $[a,b]$ решение $x(t)(s)$ задачи (1) определяет решение $x(t,s) := x(t)(s)$ задачи (2), принадлежащее $C_t(D)$; верно и обратное утверждение.

Через $C(L^1)$ обозначим множество измеримых на $D \times S$ функций, каждая из которых непрерывна по $(t,s) \in D$ как вектор-функция со значениями в $L^1(S)$.

Следующая теорема доказывается с применением обобщенного принципа сжимающих отображений **[2]**.

Теорема 1. *Если $c, f \in C(D)$, $m \in C(L^1)$, $\varphi \in C(S)$, непрерывная на $D \times S \times (-\infty, +\infty)$ функция n удовлетворяет условию Липшица*

$$|n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \le n_1(t,s,\sigma)|u - v|,$$

где $n_1 \in C(L^1)$, а оператор $I - M(t)$ обратим в $C(S)$ при каждом $t \in [a,b]$, то задача (2) имеет в $C_t(D)$ единственное решение.

В условии теоремы задача (1) имеет на отрезке $[a,b]$ единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Список литературы

[1] *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000.

[2] *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

О двусторонних оценках собственных значении объемного потенциала для уравнения Лапласа

Кальменов Т. Ш. (Институт математики, информатики и механики МОН РК, Казахстан)

Сураган Д. (Институт математики, информатики и механики МОН РК, Казахстан)

В работе **[3]** впервые выписано граничное условие объемного потенциала для урав-нения Лапласа в произвольной области и найдены собственные значения и собствен-ные функции объемного потенциала в случае двухмерного круга и трехмерного шара. Ниже установим двустороннюю оценку собственного значения объемного потенциала через собственные значения классических задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset R^d$, $d \ge 2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда*

$$\lambda_{n+1}^{N} \le \lambda_{n+1}^{NP} < \lambda_n^{D}, \quad (1)$$

для всех $n \in N$ где λ_n^D, λ_n^N — собственные значения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, соответственно, а λ_n^{NP} — собственные значения объемного потенциала

$$\int_\Omega \varepsilon_d(x-y)u_n(y)dy = \lambda_n^{NP} u_n(x). \tag{2}$$

$$\varepsilon_2(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|, \quad \varepsilon_d(x-y) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d}|x-y|^{2-d}, \quad d > 2. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_d(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, а σ_d — площадь поверхности единичной сферы в R^d.

Список литературы

[1] Filonov N., *On an inequality between Dirichlet and Neumann eigenvalues for the Laplace Operator*, St. Petersburg Math. J., 16 (2005), no. 2, 413–416.

[2] Gesztesy F. and Mitrea M., *Nonlocal Robin Laplacians and some remarks on a paper by Filonov on eigenvalue inequalities*, J. Diff. Eq. 247 (2009), 2871–2896.

[3] Kalmenov T. Sh. and Suragan D., *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 80 (2009), 646–649.

Асимптотический анализ модели Блоха в теории ядерного магнитного авторезонанса

Калякин Л. А. (Институт математики с ВЦ РАН, Россия)

Исследована система трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая возникает при усреднении уравнений Блоха в теории ядерного магнитного резонанса. Для усредненной системы построена асимптотика устойчивого решения с неограниченно растущей амплитудой. Этот результат дает ключ к пониманию авторезонанса в слабо диссипативных магнитных системах, как явления значительного роста намагниченности, инициированного малой внешней накачкой.

Основным объектом исследования является система трех уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dr}{d\tau} = A(\tau)\sin\psi - \beta_2 r, \qquad \frac{dz}{d\tau} = B(\tau)\, r\sin\psi - \beta_1 z, \\ r\Big[\frac{d\psi}{d\tau} + \Lambda(\tau) - z\Big] = C(\tau)\cos\psi; \qquad (\beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0). \end{gathered} \tag{1}$$

Эта система представляют собой асимптотическое приближение для уравнений Блоха [**1**], описывающих динамику вектора намагниченности. Специфика задачи заложена в неограниченно растущих по времени коэффициентах:

$$\Lambda(\tau) = \lambda\,\tau + \mathcal{O}(1), \ \ A(\tau) = a\,\tau + \mathcal{O}(1), \ \ B(\tau) = b\,\tau + \mathcal{O}(1), \ \ C(\tau) = c\,\tau + \mathcal{O}(1), \tag{2}$$

где $\lambda, a, b, c = \text{const} \neq 0$. Считается, что остатки в этих формулах представляют собой гладкие ограниченные функции, которые разлагаются в асимптотические ряды по целым неположительным степеням при $\tau \to \infty$. В приложениях коэффициенты обычно совпадают: $A(\tau) \equiv B(\tau) \equiv C(\tau) \equiv -\tau$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda > 0$, $a = b = -1$.

Центральным результатом является выявление решения с растущей амплитудой $r^2(\tau), z(\tau) \approx \mathcal{O}(\tau)$, $\tau \to \infty$, для которого доказывается устойчивость по Ляпунову. Для уравнений (1) с условиями (2) построение формального асимптотического решения в виде рядов по обратным степеням $\tau^{-n/2}$, $n \geq -2$ не вызывает затруднений. На этом пути строятся два решения, отличия в которых инициируются двумя корнями тригонометрического уравнения $\sin\psi_0 = 0$. Устойчивым оказывается одно из решений, которое соответствует $\psi_0 = 0$. Обозначим компоненты этого решения $R_0(\tau)$, $Z_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$. Для обсуждаемого решения асимптотика при $\tau \to \infty$ описывается формулами

$$R_0(\tau) = \nu^2\sqrt{\tau} + r_0 + \mathcal{O}(\tau^{-1/2}),\ Z_0(\tau) = \lambda\tau + \mathcal{O}(\sqrt{\tau}),$$
$$\Psi_0(\tau) = \tau^{-1/2}\psi_1 + \mathcal{O}(\tau^{-1});$$
$$\nu^2 = \sqrt{\lambda\beta_1/\beta_2}, \qquad r_0 = -c/2\lambda, \qquad \psi_1 = -\nu^2\beta_2.$$

Теорема 1. *Если* $\beta_1 > (1+c)\beta_2$, $\beta_2 > 0$, *то решение* $R_0(\tau)$, $Z_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *асимптотически устойчиво при* $\tau \to \infty$.

Доклад основан на совместной работе с О. А. Султановым.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00186.

Список литературы

[1] *Куркин М. И., Туров Е. А.* ЯМР в магнитоупорядоченных веществах и его применения. М.: Наука. 1990.

Полугрупповое свойство оператора программного поглощения в играх с простыми движениями на плоскости

Камнева Л. В. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)
Пацко В. С. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)

Рассматривается конфликтно-управляемая система с простыми движениями **[1]**:

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, \vartheta], \tag{1}$$

где P, $Q \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые компакты.

Оператор программного поглощения **[2, 3, 4]**

$$T_\varepsilon(M) = (M - \varepsilon P) \overset{*}{-} \varepsilon Q, \quad \varepsilon > 0, \quad M \subset \mathbb{R}^2$$

ставит в соответствие замкнутому ограниченному множеству M и временно́му промежутку длины ε множество $T_\varepsilon(M)$. Здесь используются операции алгебраической суммы

$$A + B = \{d:\ d = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

и геометрической разности

$$A \overset{*}{-} B = \{d:\ d + B \subseteq A\}.$$

Полугрупповое свойство означает, что

$$T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(M) = T_{\varepsilon_1}(T_{\varepsilon_2}(M)). \tag{2}$$

Известно, что в случае выпуклого множества M полугрупповое свойство имеет место **[4]**.

В работе для задач на плоскости формулируются достаточные условия (накладываемые на множества M, P, Q и область изменения величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$), которые обеспечивают равенство (2) и в невыпуклом случае. Приводятся контрпримеры, показывающие существенность каждого из оговариваемых предположений.

В игровых задачах с динамикой (1), фиксированным моментом окончания ϑ и терминальной непрерывной функцией платы наличие полугруппового свойства (проверяемого для множеств уровня функции платы) влечет за собой совпадение цены игры с функцией программного максимина.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“, при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 09-П-1-1006), а также при поддержке РФФИ, грант 09-01-00436.

Список литературы

[1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
[2] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
[3] *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры, II // ДАН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
[4] *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.

Коэффицентные обратные задачи для параболических уравнений

Камынин В. Л. (НИЯУ «МИФИ», Россия)

В докладе рассматриваются вопросы существования и единственности решений обратных задач определения одного из неизвестных коэффициентов в параболическом уравнении

$$\rho(t,x)u_t - a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + d(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q \equiv [0,T] \times [0,l]. \tag{1}$$

Предполагается, что заданы краевые условия

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \qquad u(t,0) = \beta_1(t),\ u(t,l) = \beta_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

а также дополнительное условие интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \varphi(x). \tag{3}$$

В задачах (1)–(3) неизвестными являются функция $u(t,x)$, а также один из коэффициентов $a(t,x) \equiv p(x)$, $b(t,x) \equiv p(x)$ или $d(t,x) \equiv p(x)$, зависящий только от x.

Исследование существования и единственности решений рассматриваемых задач в докладе проводится в классах Соболева при минимальных требованиях гладкости на известные входные данные этих задач. Как оказалось, определяющую роль в таких исследованиях могут сыграть априорные оценки норм решений прямой задачи (1)–(2) в пространствах Соболева с явно вычисленными константами.

Например, вопрос о существовании решения обратной задачи может быть сведен к вопросу о разрешимости некоторого операторного уравнения

$$p = A(p) \tag{4}$$

в определенном банаховом пространстве, и знание таких констант позволяет указать условия на входные данные обратных задач (1)–(3), при которых оператор A в уравнении (4) обладает требуемыми свойствами, например, является компактным или сжимающим.

Все условия доказываемых теорем существования и единственности решений обратных задач (1)–(3) выписываются в виде легко проверяемых неравенств. Приводятся нетривиальные примеры конкретных обратных задач, для которых такие условия выполнены, а следовательно, для них справедливы доказанные теоремы существования и единственности решения.

Некоторые из результатов данных исследований опубликованы в [**1**, **2**].

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6827) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект П268).

Список литературы

[1] *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении // Математические заметки. 2008. Т. 84. № 1. С. 48–58.

[2] *Камынин В. Л., Костин А. Б.* Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 3. С. 372–383.

О тождествах для собственных значений оператора Лапласа в проколотой области

Кангужин Б. Е. (Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан)

Рассмотрим [**1**, **2**] задачу Дирихле для уравнения Пуассона в проколотой области $\Omega_0 = \Omega \backslash M_0$, где $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая внутренняя точка области $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$.

$$\Delta u(x,y) = f(x,t), \quad (x,y) \in \Omega_0, \tag{1}$$

$$u(x,y)\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}[\frac{\partial}{\partial\xi}u(x_0-\delta,\eta) - \frac{\partial}{\partial\xi}u(x_0+\delta,\eta)]\,d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[\frac{\partial}{\partial\eta}u(\xi,y_0-\delta) - \frac{\partial}{\partial\eta}u(\xi,y_0+\delta)]\,d\xi\right\} = \int\int_\Omega \alpha(\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{3}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}[u(x_0-\delta,\eta)-u(x_0+\delta,\eta)]\,d\eta=0, \tag{4}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[u(\xi,y_0-\delta)-u(\xi,y_0+\delta)]\,d\xi=0, \tag{5}$$

где $\alpha(x,y)\in L_2(\Omega)$.

Оператор, соответствующий задаче (1)–(5), обозначим через L_α. Тогда оператор L_0 соответствует задаче Дирихле в односвязной области Ω.

Теорема 1. *Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — собственные значения операторов L_0 и L_α, соответственно, пронумерованные в порядке возрастания по модулю с учетом их кратностей, тогда верно следующее равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{\mu_k}\right)=-\int\int_\Omega\alpha(\xi,\eta)G(\xi,\eta,x_0,y_0)\,d\xi d\eta, \tag{6}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}[\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)-$$
$$-\ln((\xi^2+\eta^2)((x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2})^2+(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2})^2))]$$

— функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге **[3]**, *и для любого натурального l справедливо*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\lambda_k)^{l+1}}-\frac{1}{(\mu_k)^{l+1}}\right]=-\sum_{i+j=l}\int\int_\Omega\alpha(\xi,\eta)(L_0)^{-i}(L_\alpha)^jG(\xi,\eta,x_0,y_0)\,d\xi d\eta. \tag{7}$$

Доклад основан на совместной работе с Н. Е. Токмагамбетовым.

Список литературы

[1] *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
[2] *Демков Ю. Н., Островский В. Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: ЛГУ, 1975.
[3] *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д., Немченко М. Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Докл РАН 2008. Т. 421, № 3. С. 305–307.

Целочисленные решетки переменных действия некоторых интегрируемых гамильтоновых систем

Кантонистова Е. О. (Московский Государственный Университет)

В последние годы изучение гамильтоновых систем становится все более актуальным, однако существует масса нерешенных задач в этой ветви математики, поэтому исследования в данной области вполне обоснованны. В данной работе применены вычисления на компьютере, с помощью которых получены картинки решеток переменных действия некоторых интегрируемых гамильтоновых систем.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (M^{2n},ω,H) с n степенями свободы. Пусть $F_1,...,F_n$ — ее первые интегралы, $F_1=H$. Пусть

$\Phi = (F_1, \ldots, F_n)$: $M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ — *отображение момента*, Σ — бифуркационная диаграмма отображения момента. Согласно теореме Лиувилля, в окрестности компактного связного регулярного множества уровня $T_\xi = \Phi^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, существуют канонические переменные, называемые *переменными действие-угол* $(I_1, \ldots, I_n, \varphi_1 \bmod 2\pi, \ldots, \varphi_n \bmod 2\pi)$, причем переменные действия $I_1, ..., I_n$ являются функциями от первых интегралов.

Первым этапом данной работы стал поиск и вычисление явных формул переменных действия для обобщенного случая Лагранжа в движении твердого тела, а также для комплексной гамильтоновой системы, заданной полиномом $f(z, w) = z^2 + w^3$.

Определение 1. Множество точек в $\Phi(M^{2n})\backslash\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, образованных пересечением n гиперповерхностей уровня функций $I_1 = I_1(\xi), ..., I_n = I_n(\xi)$ с целыми значениями, назовем *целочисленной решеткой* $\mathfrak{R}$ *переменных действия* (далее просто *решеткой*).

На втором этапе, зная явные формулы для переменных действия, строились решетки для исследуемых случаев.

Определение 2. Осуществим однократный обход по замкнутому пути вокруг внутренней особой точки. Начальный базис решетки e_1, e_2 и конечный базис e_1', e_2' связаны невырожденным линейным преобразованием с матрицей M. Эта матрица называется *матрицей монодромии* системы.

В результате третьего этапа работы был создан алгоритм обхода вокруг внутренних особых точек исследуемых систем и подсчитаны соответствующие матрицы монодромии.

Список литературы

[1] Фоменко А. Т., *Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю*, Функц. анализ и его приложения, 1988, т. 22, вып. 4.

[2] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем*, 1978, т. 12.

[3] Болсинов А. В., Матвеев В. С., Фоменко А. Т., *Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия*, Математический сборник, 1998, т. 189, 10.

[4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы*, Издательский дом ≪Удмуртский университет≫, 1999.

[5] Zhilinskii B., *Hamiltonian Monodromy as Lattice Defect*, European project MASIE.

[6] Орел О. Е., Такахаши Ш., *Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа*, УДК 513.944, Математический сборник, Том 187, 1, гл. 4.

[7] Лепский Т. А., *Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени*, Математический Сборник, 2010, 10.

Квантовая геометрия интегрируемых систем

Карасев М. В. (Московский институт электроники и математики, Россия)

Интуитивная гипотеза Планка, сформулированная в 1911 г., декларировала, что общее физическое явление квантования может быть математически описано в терминах дискретизации координат „действия“ в фазовой геометрии. Для одномерных систем П. Аргирес (1965) реализовал планковскую идею и представил правила дискретизации через интеграл по уровням энергии гамильтониана. Для многомерных систем гипотеза квантования была математически прояснена В. Масловым (1965) в первых двух членах асимптотики по параметру квантования. Однако, проблема высших приближений в спектральной асимптотике в случае многих степеней свободы оставалась открытой.

В работах [**1**, **2**], был установлен следующий факт: *расслоение фазового пространства торами Лиувилля–Арнольда и классическая симплектическая 2-форма могут быть деформированы по параметру квантования (с сохранением свойства торов быть лагранжевыми) таким образом, что обычное геометрическое правило дискретизации, записанное для деформированных торов и деформированной 2-формы, представляет спектр, плотность состояний и след оператора эволюции квантовой интегрируемой системы с произвольной степенной точностью по параметру квантования.*

Таким образом, мы получаем универсальный алгоритм для вычисления спектральных асимптотик многомерных квантовых интегрируемых систем. Одновременно этот подход устраняет явление развала (диффузии) при квантовой эволюции для классического расслоения фазового пространства на торы Лиувилля–Арнольда. А именно, если правильно деформировать расслоение и рассмотреть слои, удовлетворяющие деформированному правилу дискретизации, в котором участвует деформированный класс Маслова, то этот новый геометрический объект не будет разрушаться при квантовой эволюции на больших временах, а будет происходить только диффузия плотности состояний вдоль слоев.

Можно заключить, что для многомерных интегрируемых систем гипотеза Планка может работать не только в двух главных членах асимптотики, но также и во всех высших членах квазиклассического приближения, если заменить классическую геометрию фазового пространства подходящей квантовой геометрией. Это деформированная геометрия строится по исходному лагранжеву расслоению и зависит от всех высших производных классических переменных действие–угол. С произвольной точностью по параметру квантования это позволяет выделить из данной квантовой системы компоненту „à la классическая механика“ в духе боровских принципов соответствия и дополнительности, отделив эту компоненту от той, где доминирует гейзенберговская дисперсия и неопределенность.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 00-01-00606.

Список литературы

[1] *Karasev M. V.* Quantum Geometry and Quantum Mechanics of Integrable Systems. I // Russ. J. Math. Phys. 2009. V. 16. № 1. P. 81–92.

[2] *Karasev M. V.* Quantum Geometry and Quantum Mechanics of Integrable Systems. II // Russ. J. Math. Phys. 2010 V. 17. № 2. P. 162–178.

Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре

Карачик В. В. (Южно-Уральский государственный университет, Россия)
Антропова Н. А. (Южно-Уральский государственный университет, Россия)

В настоящем докладе известное представление Альманси [**1**] для полигармонических функций $Q(x)=H_0(x)+|x|^2H_1(x)+\cdots+|x|^{2s}H_s(x)$, где $H_k(x)$ — некоторые гармонические функции, применяется для построения решения однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения, а затем и для построения решения общей задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре с полиномиальными данными. В [**2**] представление Альманси применялось для построения полиномиального решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В [**3**] с помощью формулы Альманси были построены полиномиальные решения уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$ и полигармонического уравнения $\Delta^m u(x) = Q(x)$, где $Q(x)$ — произвольный полином.

Рассмотрим оператор $\Lambda u = \sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}$, и пусть $Q(x)$, $P(x)$ и $R(x)$ — некоторые полиномы от $x\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле*

$$\Delta^2 u(x) = Q(x),\quad x\in\Omega;$$
$$u_{|\partial\Omega} = P(x)_{|\partial\Omega},\quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = R(x)_{|\partial\Omega}$$

в единичном шаре $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с полиномиальными данными $Q(x)$, $P(x)$ и $R(x)$ имеет вид

$$u(x) = P(x) + \frac{|x|^2-1}{2}(R(x)-\Lambda P(x)) + \frac{(|x|^2-1)^2}{4}\times$$
$$\times\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^s\Big(\Delta(\Lambda P - R)+$$
$$+\frac{1-\alpha}{2s+4}(Q-\Delta^2 P)\Big)(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

К сожалению, полученные полиномиальные решения для записи их в обычном виде требуют вычисления степеней оператора Лапласа от некоторых многочленов, определяемых данными краевой задачи. Этот недостаток легко устраняется с помощью применения пакета “Mathematica”. Например, решение задачи Дирихле при $n=3$, $Q(x)=x_1^3x_2x_3^2$, $P(x)=0$ и $R(x)=0$ легко вычисляется и имеет вид

$$u(x_1,x_2,x_3) = -\frac{x_1x_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^2}{12252240}\big(-255+245x_1^4-63x_2^4-$$
$$-1190x_3^2+861x_3^4+14x_1^2(-17+13x_2^2-350x_3^2)+14x_2^2(17+57x_3^2)\big).$$

Список литературы

[1] *Almansi E.* Sull’integrazione dell’equazione differenziale $\Delta^{2n}u=0$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1899. V. 2 № 3. P. 1–51.

[2] *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989, 336 с.

[3] *Карачик В. В., Антропова Н. А.* О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения 2010. Т. 46. № 3. С. 384–395.

Эргодические теоремы для сохраняющих меру действий марковских полугрупп

Клименко А. В.

Доклад основан на совместной работе **[1]** с А. И. Буфетовым и М. Ю. Христофоровым.

Пусть задана конечно-порожденная полугруппа Γ с конечным набором образующих O. На Γ имеется норма $|\cdot|_O$, равная для элемента $g \in \Gamma$ длине самого короткого слова в алфавите O, представляющего g. Положим $S_O(n) = \{g : |g|_O = n\}$.

Напомним определение марковской полугруппы. Пусть $\mathbf{G}$ — конечный ориентированный граф с множеством ребер $\mathcal{E}(\mathbf{G})$, и каждому его ребру $e \in \mathcal{E}(\mathbf{G})$ поставлен в соответствие некоторый элемент $\xi(e) \in O$. Зафиксируем некоторую вершину v_0 графа $\mathbf{G}$ и рассмотрим множество $\mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0)$ всех конечных путей в графе $\mathbf{G}$, начинающихся в вершине v_0. Определим отображение $\bar{\xi}\colon \mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0) \to \Gamma$ следующим образом: если $p = e_1 \dots e_n \in \mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0)$, то $\bar{\xi}(p) = \xi(e_1) \dots \xi(e_n)$.

Полугруппа Γ называется *марковской* относительно набора образующих O, если можно задать конечный ориентированный граф $\mathbf{G}$, его вершину v_0 и отображение $\xi\colon \mathcal{E}(\mathbf{G}) \to O$ так, чтобы определенное выше отображение $\bar{\xi}\colon \mathcal{P}(\mathbf{G}, v_0) \to \Gamma$ было биективно, причем множество путей длины n отображается на множество $S_O(n)$.

Пусть Γ действует сохраняющими меру преобразованиями T_g, $g \in \Gamma$, на вероятностном пространстве (X, ν). Для функции $\varphi \in L^1(X, \nu)$ рассмотрим последовательность ее *сферических средних*

$$s_n(\varphi) = \frac{1}{\#S_O(n)} \sum_{g \in S_O(n)} \varphi \circ T_g;$$

если $S_O(n) = \varnothing$, положим $s_n(\varphi) = 0$. Далее, рассмотрим средние по Чезаро сферических средних:

$$c_N(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(\varphi).$$

Теорема 1. *Пусть Γ — марковская полугруппа относительно конечного набора образующих O. Предположим, что Γ действует сохраняющими меру преобразованиями T_g, $g \in \Gamma$, на вероятностном пространстве (X, ν). Тогда для любой функции $\varphi \in L^p(X, \nu)$, $p \in [1, \infty)$, последовательность $c_N(\varphi)$ средних по Чезаро ее сферических средних сходится в $L^p(X, \nu)$. Если $\varphi \in L^\infty(X, \nu)$, то последовательность $c_N(\varphi)$ сходится также ν-почти всюду.*

Список литературы

[1] *Bufetov A., Khristoforov M., Klimenko A.* Cesaro convergence of spherical averages for measure-preserving actions of Markov semigroups and groups // arXiv:1101.5459.

Нелокальные краевые задачи и дифференциальные уравнения с неизвестными коэффициентами

Кожанов А. И. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия)

Теория нелокальных краевых задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Но, помимо самостоятельного значения, эта теория представляет собой большой интерес с точки зрения теории коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

В настоящем докладе представлены некоторые результаты о разрешимости новых нелокальных краевых задач и новых же коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений, связанных с соответствующими нелокальными задачами.

В частности, представлены результаты о разрешимости

- аналогов задачи Бицадзе–Самарского для параболических и гиперболических уравнений;
- обратных задач для параболических и гиперболических уравнений с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени, при задании интегрального переопределения по области или же по границе;
- краевых задач с интегральными условиями для параболических и гиперболических уравнений.

Исследования по представленной в докладе тематике ведутся при поддержке РФФИ, проект 09-01-00422а, Министерства образования и науки РФ, проект 02.740.11.0609, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», государственный контракт 16.740.11.0127, и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/13607.

Убывание решений анизотропного квазилинейного параболического уравнения в неограниченных областях

Кожевникова Л. М. (Стерлитамакская ГПА, Россия)
Леонтьев А. А. (Стерлитамакская ГПА, Россия)

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения второго порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(t, \mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha}, \quad k \geq 2, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega). \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(t, \mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, измеримы по $(t, \mathbf{x}) \in D$ для $\xi \in \mathbb{R}_n$, непрерывны по $\xi \in \mathbb{R}_n$ для $(t, \mathbf{x}) \in D$ и подчиняются условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |a_\alpha(t, \mathbf{x}, \xi)|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)} \leq \widehat{a} \sum_{\alpha=1}^{n} |\xi_\alpha|^{p_\alpha}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(t, \mathbf{x}, \xi)\xi_\alpha \geq \overline{a} \sum_{\alpha=1}^{n} |\xi_\alpha|^{p_\alpha}$$

с положительными константами $\widehat{a}$, $\overline{a}$ и числами $p_\alpha > k$, $\alpha = \overline{1, n}$ ($p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$).

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации решения задачи (1), (2) при $t \to \infty$ от геометрии неограниченной области Ω в предположении финитности функции $\varphi(\mathbf{x})$. Приведем результат для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2, n-1}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$).

Для $r > 0$ введем следующие обозначения:

$$\nu(r) = \min\{\nu_1(r), \nu_n(r)\},$$
$$\nu_\alpha(r) = \inf\left\{\|g_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_\alpha}(\gamma_r)} = 1\right\},$$
$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_2(\Omega^r)} = 1\right\},$$
$$\Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s < r\}.$$

Предполагается, что для области Ω выполнены условия:

$$\int_1^\infty \nu(r)dr = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0.$$

Иначе достигается максимальная скорость убывания решения, т. е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Теорема 1. *Существуют положительные числа* $\kappa(k, p_s)$, $M(k, p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)})$ *такие, что для решения* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M\left(t\mu_1^{p_1}(r(t))\right)^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0,$$

с произвольной положительной функцией $r(t)$*, удовлетворяющей неравенству*

$$(\mu_1^{p_1}(r(t))t)^{-1/(p_1-k)} \exp\left(\kappa \int_1^{r(t)} \nu(\rho)d\rho\right) \geq 1, \quad t > 0.$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00440-а.

Почти торические расслоения над двумерными поверхностями

Козлов И. К. (Московский государственный университет, Россия)

В докладе будут рассмотрены лагранжевы расслоения с особенностями специального вида.

Определение 1. Локально-тривиальное расслоение $\pi : (M^{2n}, \omega) \to B^n$ называется лагранжевым расслоением, если тотальное пространство (M^{2n}, ω) является симплектическим многообразием, и ограничение формы на каждый слой тождественно равно нулю $\omega|_{F^n} \equiv 0$.

Мы рассматриваем лагранжевы расслоения с особенностями эллиптического и фокусного типа. А именно, расслоение $\pi : (M^{2n}, \omega) \to B$ является лагранжевым расслоением над открытым всюду плотным подмножеством $B_0^n \subset B$, и в окрестности любой особой точки $x \in (M^{2n}, \omega)$ в некоторых локальных координатах проекция $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ имеет вид

- $\pi_j(p, q) = p_j^2 + q_j^2$ (эллиптический тип) $j = 1, \dots, k_e$,
- $\pi_j(p, q) = p_j q_j + p_{j+1} q_{j+1}$, $\pi_{j+1}(p, q) = p_j q_{j+1} - p_{j+1} q_j$ (фокус-фокус) $j = k_e + 1, k_e + 3, \dots, k_e + 2k_f - 1$,
- $\pi_j(p, q) = p_j$ (регулярная часть) $j = k_e + 2k_f + 1, \dots, n$,

Определение 2. Лагранжевы расслоения с такими особенностями называются почти торическими расслоениями.

Подробнее о почти торических расслоения см. **[1]**, про невырожденные особенности интегрируемых гамильтоновых систем см. **[2]**.

В докладе будет рассказано о некоторых свойствах почти торических расслоений над двумерными поверхностями. Будут описаны топологические и симплектические инварианты таких расслоений, а также проведена их классификация в некоторых частных случаях (о классификации расслоений без особенностей см. **[3]**).

Список литературы

[1] *Leung N. C., Symington M.* Almost toric symplectic four-manifolds // J. Symplectic Geom. 2010. V. 8 № 2 P. 143—187.

[2] *Bolsinov A. V., Oshemkov A. A.* Singularities of integrable Hamiltonian systems // in book: Topological methods in the theory of integrable systems. Cambridge: Cambridge Sci. Publ. 2006. P. 1–67.

[3] *Козлов И. К.* Классификация лагранжевых расслоений // Матем. сб. 2010 Т. 201 № 11 С. 89–136.

Экспоненциальная устойчивость и оценки квазимонотонных систем функционально-дифференциальных уравнений

Козлова О. Р. (ИДСТУ СО РАН, Россия)

Пусть C_+ — множество непрерывных на $\mathrm{T} = [-h, 0]$ функций со значениями в $R_+^n \equiv \{x \in R^n : x \geq 0\}$ и нормой $\|\varphi\| \equiv \max\limits_{i=\overline{1,n}} (\max\limits_{\tau \in \mathrm{T}} |\varphi_i(\tau)|)$, X — область в $R_+^n \times C_+$.

Система функционально-дифференциальных уравнений с последействием

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t), \quad f : R_+ \times X \to R^n, \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in C_+, \quad x(t_0) = \varphi_0(0) \quad (x_t(\tau) \equiv x(t + \tau),\ \tau \in T); \end{gathered} \tag{1}$$

называется *квазимонотонной* **[1]**, если $f(t, x, \varphi)$ не убывает по φ: $f(t, x, \varphi) \leq f(t, x, \psi)$ при $\varphi \leq \psi$, и квазимонотонна по $x : \forall i = \overline{1,n}$ $f_i(t, x, \varphi) \leq$

$f_i(t, y, \varphi)$ при $x \leq y$, $x_i = y_i$. Предполагается, что f удовлетворяет в $R_+ \times X$ условиям Каратеодори и одностороннему локальному условию Липшица по x, φ: в любой ограниченной окрестности $U \subset R_+ \times X$ $f(t, y, \psi) - f(t, x, \varphi) \leq K_u(t)(\|(y, \psi) - (x, \varphi)\|)$ при $x \leq y$, $\varphi \leq \psi$ с суммируемой вектор-функцией K_u. Это обеспечивает локальное существование и правостороннюю единственность K-решений квазимонотонной системы (1).

Теорема 1. *Пусть существуют точка $z \in R^n$, $z > 0$ и число $\alpha < 0$ такие, что*

$$\dot{\forall} t \in R_+ \ \forall c \in [0,1] \ \ f(t, cz, cz^{e_\alpha}) \leq \alpha cz, \quad \text{где } z^{e_\alpha}(\tau) \equiv z \cdot \exp(\alpha\tau). \qquad (2)$$

Тогда система (1) *экспоненциально устойчива в конусе $R^n_+ \times C_+$, и при $|x_{t_0}|_C \leq z$ ее решения $\forall t \geq t_0$ удовлетворяют экспоненциальной оценке $x(t, t_0, x_{t_0}) \leq M\|x_{t_0}\|e^{\alpha(t-t_0)}$, где $M \equiv z \cdot \max\limits_{i=\overline{1,N}}((z_i)^{-1})$.*

Теорема 2. *Если f не зависит от t (автономна) и дифференцируема в точке* 0 *(в смысле Гато), то условие* (2) *необходимо и достаточно для свойства ЭУ квазимонотонной системы* (1)*. При этом степень затухания α может быть выбрана сколь угодно близкой к максимальному (перронову) корню λ_m (необходимо вещественному) характеристического квазиполинома* $\det(\lambda - A(\lambda))$*, где $A(\lambda) \equiv \operatorname*{line}\limits_{j=\overline{1,n}} \{\partial f(0)(1_j)^{e_\lambda}\}$, 1_j — j-тый орт в R^n.*

Замечание 1. Для отрицательности корня λ_m необходимо и достаточно, чтобы матрица $A(0)$ (матрица линеаризованной системы без последействия) была гурвицевой.

С использованием теорем получаются явные условия экспоненциальной устойчивости и соответствующие оценки для некоторых линейных автономных систем с запаздыванием.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00672, Президиума СО РАН, проект 107.

Список литературы

[1] *Smith H. L.* Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. AMS Publ., Providence, 1995, 182 p.

Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова

Колесов А. Ю. (Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия)
Розов Н. Х. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Реакция, открытая Б. П. Белоусовым в 1951 г., являет собой поучительный эпизод в истории отечественного естествознания. Ее математическая модель достойна войти в обязательный курс дифференциальных уравнений и может предваряться довольно просто организуемым нагляднейшим экспериментом.

Рассмотрим модификацию математической модели реакции Белоусова

$$\dot{x} = r_1[1 + a(1-z) - x]x, \quad \dot{y} = r_2[x-y]y, \quad \dot{z} = r_3[\alpha\, x + (1-\alpha)y - z]z, \quad (1)$$

где параметры r_1, r_2, r_3 и a положительны, $\alpha \in (0,1)$; параметр a является „очень большим“, а остальные имеют порядок 1.

В реакции Белоусова наблюдаются релаксационные колебания — „чрезвычайно быстро“ протекающие этапы чередуются с „достаточно медленными“. Изучены такие режимы в системе (1), где от a перейдем к малому параметру $\varepsilon = 1/a$.

Фиксируем произвольное компактное множество Ω_0 из полуполосы $\pi = \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ и обозначим через

$$L_\varepsilon(u_0, v_0) = \bigl(x(t,u_0,v_0,\varepsilon),\ y(t,u_0,v_0,\varepsilon),\ z(t,u_0,v_0,\varepsilon)\bigr) :\ t \geq 0,\ (u_0,v_0) \in \Omega_0 \quad (2)$$

траекторию системы

$$\varepsilon\dot{x} = r_1[1 - z + \varepsilon(1-x)]x, \quad \dot{y} = r_2[x-y]y, \quad \dot{z} = r_3[\alpha\, x + (1-\alpha)y - z]z, \quad (3)$$

выпущенную при $t = 0$ из точки $(x,y,z) = (1, u_0, v_0)$. Рассмотрим второй положительный корень $t = T(u_0, v_0, \varepsilon)$ уравнения $x(t, u_0, v_0, \varepsilon) = 1$ (если он существует), и на секущей плоскости $\{(x,y,z) : x = 1\}$ определим оператор последования Пуанкаре

$$\Pi_\varepsilon(u_0, v_0) = \bigl(y(t,u_0,v_0,\varepsilon),\ z(t,u_0,v_0,\varepsilon)\bigr)\Big|_{t = T(u_0,v_0,\varepsilon)}. \quad (4)$$

Теорема 1. *На множестве Ω_0 в метрике пространства $C^1(\Omega_0; \mathbb{R}^2)$ существует предельный оператор $\lim_{\varepsilon\to 0} \Pi_\varepsilon(u_0, v_0) = \Pi_0(u_0, v_0)$.*

Теорема 2. *При $\alpha < r_2/(r_1 + r_2 + r_3)$ у оператора Π_0 в полуполосе π существует хотя бы одна устойчивая неподвижная точка. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор Π_ε имеет устойчивую неподвижную точку $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ с асимптотически близкими к (u_0, v_0) компонентами. В системе* (3) *ей отвечает устойчивый релаксационный цикл L_ε.*

Теорема 3. *Время движения фазовой точки системы* (3) *по „быстрым участкам“ траектории L_ε имеет порядок $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$, а по „медленным участкам“ — допускает при $\varepsilon \to 0$ конечный положительный предел.*

В отвечающей системе (1) распределенной модели — параболической краевой задаче — численными экспериментами продемонстрирован феномен диффузионного хаоса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00342а и 09-01-00614, и Целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 02.740.11.0197.

Спектральная устойчивость нелинейного уравнения Дирака

Комеч А. А. (ИППИ РАН, Россия)

Нелинейное уравнение Дирака **[5]**, также известное как “Soler model”, активно изучается в теоретической физике с 1970 года:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}\psi + g(\psi^*\beta\psi)\beta\psi, \qquad \psi(x,t)\in\mathbb{C}^{2N}, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad g\in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Самосопряженные матрицы Дирака α_j и β удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_j^2=\beta^2=I_{2N}, \qquad \alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk}I_{2N}, \qquad \alpha_j\beta+\beta\alpha_j=0.$$

Согласно работе **[3]**, для широкого класса нелинейностей уравнение (1) допускает решения типа уединенных волн:

$$\psi(x,t)=\phi(x)e^{-i\omega t}, \qquad \phi\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^{2N}), \qquad \omega\in\mathbb{R}.$$

Мы исследуем, в каких случаях такие решения будут спектрально устойчивыми, то есть когда линеаризация около такого решения не содержит собственных значений с положительной вещественной частью. Подобный вопрос подробно исследован для нелинейных уравнений Шредингера и Клейна–Гордона (и некоторых других). Помимо хорошо исследованной *линейной* устойчивости **[7]**, для этих моделей имеются достаточно общие результаты по *орбитальной* устойчивости уединенных волн **[6, 4]** и — в некоторых случаях — по *асимптотической* устойчивости **[2]**. Вместе с тем, вопрос о *спектральной* устойчивости нелинейного уравнения Дирака оставался полностью открытым; нет даже достаточно общих численных результатов **[1]**.

Наш основной результат дает частичный ответ на этот вопрос:

Теорема 1. *В размерности $n=1$ для широкого класса нелинейностей (например, $g(s)=1+ks+o(s)$, $k\neq 0$) уединенные волны уравнения* (1) *достаточно малой амплитуды являются спектрально устойчивыми. То есть, спектр оператора линеаризации около этих уединенных волн расположен строго на мнимой оси.*

Многие из наших результатов обобщаются на многомерный случай.

Список литературы

[1] Gregory Berkolaiko and Andrew Comech. On spectral stability of solitary waves of nonlinear Dirac equation on a line. *ArXiv e-prints*, 2009. arXiv: math-ph/0910.0917.

[2] Vladimir S. Buslaev and Galina S. Perel′man. Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: states that are close to a soliton. *St. Petersburg Math. J.*, 4(6), 1111–1142, 1993.

[3] Maria J. Esteban and Éric Séré. Stationary states of the nonlinear Dirac equation: a variational approach. *Comm. Math. Phys.*, 171(2), 323–350, 1995.

[4] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, and Walter Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, 74(1), 160–197, 1987.

[5] Mario Soler. Classical, stable, nonlinear spinor field with positive rest energy. *Phys. Rev. D*, 1(10), 2766–2769, May 1970.

[6] Michael I. Weinstein. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(1), 51–67, 1986.

[7] Н. Г. Вахитов and Александр Александрович Колоколов. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности. *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*, 16(7), 1020–1028, 1973.

Об одном обобщении условий Коши-Римана для многообразий произвольной размерности

Коненков А. Н. (Рязанский государственный университет)

На гладком римановом многообразии размерности $n \geq 3$ вводятся некоторые нелинейные уравнения, которые можно рассматривать как обобщения уравнений Коши–Римана при $n = 2$. Исследуются локальные свойства решений, для одного частного случая устанавливается их локальное существование для произвольной гладкой метрики. Для решений доказываются равенства, аналогичные условиям Коши–Римана. Показано, что выполнение этих равенств является в некотором смысле необходимым и достаточным условием для того, чтобы удовлетворяющие им функции были решениями рассматриваемых уравнений. Полученные условия не содержат в явном виде метрики (так же как и формулы для условий Коши–Римана в конформных координатах).

Каскады уток в биологических моделях

Конкина А. А. (Самарский государственный университет, Россия)
Соболев В. А. (Самарский государственный аэрокосмический университет, Россия)

Работа посвящена исследованию сингулярно возмущенных дифференциальных систем на плоскости. Рассматривается автономная система вида

$$\dot{x} = f(x, y, \alpha), \tag{1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(x, y, \alpha), \tag{2}$$

где x, y — скалярные переменные, ε — малый положительный параметр, α — дополнительный скалярный параметр, точкой обозначено дифференцирование по независимой переменной t, f, g — достаточно гладкие функции. Уравнение $g(x, y, \alpha) = 0$ задает медленную кривую системы (1)–(2), параметр α при этом считается фиксированным.

Участок медленной называется устойчивым (неустойчивым), если для всех точек этого участка выполняется неравенство $g_y(x, y, \alpha) < 0$ $\big(g_y(x, y, \alpha) > 0\big)$. Наличие дополнительного скалярного параметра α обеспечивает условия для того, чтобы траектории, проходящие вблизи устойчивого и неустойчивого участков медленной кривой, можно было „склеить“ в точке смены устойчивости (точке срыва). Через эту точку проходит траектория, которая называется уткой. Под траекторией–уткой обычно понимается траектория сингулярно возмущенной системы, которая проходит вначале вдоль устойчивого участка медленной кривой, а затем вдоль неустойчивого, причем оба раза расстояния порядка единицы **[1, 2]**.

Если медленная кривая имеет несколько чередующихся устойчивых и неустойчивых участков, то наличие дополнительного векторного параметра α обеспечивает условия для того, чтобы траектории , проходящие вблизи устойчивых и неустойчивых участков медленной кривой, можно было „склеить“ в точках срыва. Полученную в результате склеивания траекторию будем называть *каскадом уток*. В работе предложен асимптотический метод приближенного вычисления „уточного“ значения параметра и каскада уток.

В последние годы появилось значительное число публикаций, посвященных применению траекторий–уток в различных задачах биологии, механики, химии, экономики и электроники **[3]**. В качестве приложений полученных математических результатов рассмотрены некоторые биологические модели, характеризующиеся эффектом *мнимого исчезновения* **[4, 5, 6]**.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-08-00154.

Список литературы

[1] *Benoit E., Callot J. L., Diener F. and Diener M.* Chasse au canard// Collect. Math. 1981. V. 31–32. № 1–3. P. 37–119.

[2] *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М: Физматлит, 1995.

[3] *Соболев В. А., Щепакина Е. А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М: Физматлит, 2010.

[4] *Gause G. F.* The struggle for existence. Baltimore: Williams & Wilkins, 1934.

[5] *Gavin C., Pokrovskii A., Prentice M., Sobolev V.* Dynamics of a Lotka–Volterra type model with applications to marine phage population dynamics// J. Phys. Conf. Ser. 2006. № 55:1. P. 80–93.

[6] *Brøns M., Kaasen R.* Canards and mixed-mode oscillations in a forest pest model// Theoretical Population Biology. 2010. № 77. P. 238–242.

Асимптотики решений дифференциальных уравнений с высшими вырождениями в нерезонансном случае

Коровина М. В. (МГУ, Россия)

Рассмотрим уравнение

$$\hat{H}\left(r, -\frac{1}{k}r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = f, \tag{1}$$

где $u \in E(S_{R,\varepsilon}, B_1)$, $f \in E(S_{R,\varepsilon}, B_2)$, B_1 и B_2 — некоторые банаховы пространства (например, пространства $H^s(\Omega)$), $S_{R,\varepsilon} = \{r \,|-\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R\}$, а через $E(S_{R,\varepsilon}, B)$ обозначено пространство функций со значениями в банаховом пространстве B, голоморфных в области $S_{R,\varepsilon}$ и экспоненциально растущих в нуле.

Представим операторозначный символ $\hat{H}(r,p)$ в виде

$$\hat{H}(r,p) = \hat{H}_0(p) + rH_1(p) + r^2\hat{H}_2(p) + \ldots + r^{k-1}\hat{H}_{k-1}(p) + r^k\hat{H}_k(r,p),$$

где $H_i(p)$ — соответствующие полиномы.

Теорема 1. *Пусть операторное семейство $\hat{H}_0(p) = \hat{H}(0,p)$ является фредгольмовым. Тогда:*

1°. *Если u — решение уравнения (1) для k-ресургентой правой части f, то u также является k-ресургентой функцией.*

2°. *Для любой k-ресургентой правой части f существует k-ресургентое решение уравнения (1).*

Будем говорить, что точка $p_1 \in \operatorname{spec}\hat{H}_0(p)$ является простой если

1°. Операторозначная функция $\hat{H}_0^{-1}(p)$ имеет в точке p_1 простой полюс.

2°. Размерность ядра $\ker \hat{H}_0(p_1)$ равна единице.

Теорема 2. *Пусть функция u со значениями в банаховом пространстве B_1 является решением однородного уравнения (1), а точки $p_j \in \operatorname{spec} \hat{H}_0(p)$, $j = 1, 2, \ldots$ являются простыми, тогда для любого положительного числа A функция u представима в виде*

$$u(r) = \sum_j u_j(r) + O\left(e^{-\frac{A}{r}}\right),$$

причем сумма содержит конечное число слагаемых, каждое из которых отвечает точке p_j спектра операторного семейства $\hat{H}_0(p)$, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -A$, при этом функции $u_j(r)$ являются обратными преобразованиями Лапласа–Бореля функций $\tilde{u}_j(p)$, имеющих особенности в точках p_j, и имеют асимптотические разложения

$$u_j(r) = e^{\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha^j_{k-i}}{r^{k-i}}} r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b^j_i r^i, \tag{2}$$

где b^j_i — элементы пространства B_1.

Пусть f является k-ресургентной функцией. Рассмотрим нерезонансный случай. Это означает, что особенности преобразования Лапласа–Бореля функции f не совпадают с простыми точками операторного семейства. Если правая часть уравнения имеет особенности типа (2), то асимптотика решения будет иметь такой же вид, что и в однородном случае, причем суммирование будет браться по объединению $\{p_j\}$ и особенностей преобразования Лапласа–Бореля функции f.

О некоторых лиувиллевых теоремах для решений эллиптических уравнений на многообразиях с концами

Корольков С. А. (Волгоградский государственный университет, Россия)
Лосев А. Г. (Волгоградский государственный университет, Россия)

Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. В работах ряда авторов приводятся условия выполнения теоремы Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях в терминах роста объема, выполнения изопериметрических неравенств, условий на кривизну и т. д. В то же время класс римановых многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. Более того, обнаружены множества многообразий, на которых разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным на „бесконечности“.

В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на полном римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Говорят, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность.

Ряд работ был посвящен изучению решений эллиптических уравнений на многообразиях с концами. Открытое множество $\Omega \subset M$ называют концом, если оно является связным, неограниченным и его граница $\partial\Omega$ — компакт. Говорят, что M является многообразием с концами, если оно представимо в виде объединения компактного множества B и конечного числа непересекающихся концов.

Данная работа посвящена изучению поведения L-гармонических функций, т. е. решений уравнения

$$Lu(x) \equiv \Delta u(x) - c(x)u = 0,$$

где $c(x)$ — неотрицательная на M функция, на многообразиях с концами.

Предположим, что на конце Ω существует L-гармоническая функция u_Ω такая, что $0 \le u_\Omega \le 1$, $u_\Omega = 0$ на $\partial\Omega$ и $\sup_\Omega u_\Omega = 1$. Будем говорить в этом случае, что Ω является L-массивным, а функцию u_Ω называть L-гармонической мерой конца Ω. Если L-гармоническая мера удовлетворяет условию

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u_\Omega(x)|^2 + c(x)u_\Omega^2(x)dx < \infty,$$

то конец Ω будем называть LD-массивным.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Размерность пространства ограниченных L-гармонических на M функций — не меньше количества L-массивных концов M.*

2°. *Размерность пространства ограниченных L-гармонических на M функций с конечным интегралом энергии — не меньше количества LD-массивных концов M.*

Также в работе найдены размерности других пространств L-гармонических функций (положительных, ограниченных с одной стороны на каждом конце и т. д).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-97004-р_поволжье_а.

Базисность одной системы функций связанной с обратной задачей для эволюционных уравнений

Костин А. Б. (НИЯУ МИФИ)

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – линейный, замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H, а оператор $(-A)$ является генератором полугруппы класса C_0. Рассмотрим обратную задачу нахождения пары $\{u(t); f)\}$ из условий:

$$u'(t) + Au(t) = \Phi(t)f \quad t \in [0,T], \quad u(0) = 0, \tag{1}$$

$$u(T) = \chi, \quad \chi \in D(A), \tag{2}$$

где оператор-функция $\Phi(t) \in C^1([0,T]; L(H))$ и переопределение χ заданы, а неизвестными являются функция $u(t)$ и элемент $f \in H$. Под решением обратной задачи (1), (2) понимается элемент $f \in H$, такой, что решение задачи Коши (1) удовлетворяет условию переопределения (2). Отметим, что при сделанных предположениях на оператор A и оператор-функцию $\Phi(t)$ решение прямой задачи (1) существует и единственно при любом $f \in H$, причем $u(t) \in C^1([0,T];H) \cap C([0,T];D(A))$. Далее для удобства будем считать, что $\Phi(T) = I$, а $0 \in \varrho(A)$.

Определение 1. Обратную задачу (1), (2) будем называть корректной, если для любого $\chi \in D(A)$ существует единственный элемент $f \in H$ — решение обратной задачи — и справедлива оценка устойчивости: $\|f\| \leq C\,(\|\chi\| + \|A\chi\|)$, где $\|f\|$ — норма f в H.

В работе **[1]** доказано, что если собственные векторы $\{e_k\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в H, а $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ — соответствующие им собственные значения, то для системы $\{\Psi_k\}$, где $\Psi_k = \overline{\lambda_k} \int\limits_0^T \exp[-\overline{\lambda_k}\,(T-\tau)]\Phi^*(\tau)\,d\tau e_k$, $k = 1, 2, \ldots$, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Система элементов* $\{\Psi_k\}$ *полна в* H *только тогда, когда решение обратной задачи* (1), (2) *единственно.*

Теорема 2. *Обратная задача* (1), (2) *корректна только тогда, когда система* $\{\Psi_k\}$ — *базис Рисса в* H.

В настоящей работе результаты **[1]** обобщаются на случай, когда A имеет полную в H (соответствующий базис в H) систему из собственных и присоединенных элементов с цепочками конечной длины. В этом случае для системы аналогичной $\{\Psi_k\}$ (ее определение более сложное) установлены теоремы, близкие к теоремам 1 и 2 . Используя результаты **[2]** и **[3]**, можно получить базисность новых классов систем функций.

Эта работа выполнена при поддержке ФЦП «Кадры» (проект П268) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6827).

Список литературы

[1] *Костин А. Б.* Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 246–256.

[2] *Прилепко А. И., Тихонов И.В.* Обратная задача с финальным переопределением для абстрактного эволюционного уравнения в упорядоченном банаховом пространстве // Функц. анализ и его приложения. 1993. Т. 27. Вып. 1. С. 81–83.

[3] *Прилепко А. И., Костин А.Б.* Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционных уравнений // Матем. заметки. 1993. Т. 53. Вып. 1. С. 89–94.

Четность и относительная четность в теории узлов

Крылов Д. Ю. (Московский государственный университет, Россия)

Определение 1. Диаграммой виртуального зацепления из k компонент называется образ погружения k окружностей в $\mathbb{R}^2$, т. ч. каждая точка самопересечения двойная, трансверсальная и оснащена структурой классического (проход/переход) или виртуального перекрестка. При $k = 1$ образ называется диаграммой виртуального узла.

Определение 2. Диаграммы называются эквивалентными, если одну можно перевести в другую последовательностью изотопий плоскости и виртуальных движений Рейдемейстера.

По диаграмме виртуального зацепления можно построить семейство атомов – замкнутых компактных поверхностей, при этом все атомы будут одновременно ориентируемы или неориентируемы.

Теорема 1 (О. Я. Виро, В. О. Мантуров, 2005, [**1**]). *Пусть диаграммы виртуальных узлов K и L эквивалентны и имеют ориентируемые атомы. Тогда они эквивалентны в классе диаграмм с ориентируемыми атомами.*

В докладе будет рассказано об обобщении этого результата на случай диаграмм виртуальных зацеплений, полученном докладчиком и В. О. Мантуровым в 2010 году (см. [**2**]). Доказательство основано на понятии четности.

Определение 3. Четностью называется оснащение всех классических перекрестков всех диаграмм виртуальных зацеплений элементами из $\mathbb{Z}_2$, удовлетворяющее некоторым определенным соотношениям на оснащения диаграмм, отличающихся одним обобщенным движением Рейдемейстера.

Список литературы

[1] *D. P. Ilyutko, V. O. Manturov*, Introduction to graph-link theory // ArXiv:Math.GT/0810.5522v1.

[2] *D. Y. Krylov, V. O. Manturov*, Parity and relative parity in knot theory // ArXiv:Math.GT/1101.0128v1.

Псевдодифференциальные операторы в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда на $\mathbb{R}^n$: разрешимость и характеризация

Кряквин В. Д. (Южный федеральный университет, Россия)

В докладе рассматриваются псевдодифференциальные операторы из класса Л. Хермандера $\Psi^m_{1,\delta}$, $0 \le \delta < 1$, определенные по формуле

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int a(x,\xi) \int u(y) e^{i(x-y,\xi)}\, dy d\xi, \qquad u \in S(\mathbb{R}^n),$$

с символами $a(x,\xi)$, удовлетворяющими условиям

$$|a|^m_{p,q} := \max_{|\beta|\le p, |\alpha|\le q} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n} |\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|-\delta|\beta|-m} < \infty.$$

Операторы A действуют в шкале пространств Гельдера–Зигмунда $\Lambda^{s,\omega}(\mathbb{R}^n)$ с гладким весом ω, имеющим степенное поведение на бесконечности.

Теорема 1. *Псевдодифференциальный оператор $A \in \Psi^m_{1,\delta}$ является вполне непрерывным из $\Lambda^{t,\omega}(\mathbb{R}^n)$ в $\Lambda^{t-m,\omega}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{|x|+|\xi|\to\infty} a(x,\xi)(1+|\xi|)^{-m} = 0.$$

Теорема 2. *Пусть для любых мультииндексов α и β, $\beta \ne 0$,*

$$\lim_{|x|\to\infty} \sup_{\xi\in R^n} |\partial^\beta_x \partial^\alpha_\xi a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|-m} = 0.$$

Псевдодифференциальный оператор $A \in \Psi^m_{1,0}$, *действующий из* $\Lambda^{t,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *в* $\Lambda^{t-m,\omega}(\mathbb{R}^n)$, *нетеров тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{R\to\infty}\inf_{|x|+|\xi|>R}|a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m}>0.$$

Пусть $L_jB=[ix_j,B]=ix_jB-iBx_j$ и $M_jB=[\partial_{x_j},B]=\partial_{x_j}B-B\partial_{x_j}$ для оператора $B : S(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$. Для $\alpha,\beta \in (\mathbb{Z}_+)^n - B^{(\alpha)}_{(\beta)} = L_1^{\alpha_1}\dots L_n^{\alpha_n}M_1^{\alpha_1}\dots M_n^{\alpha_n}B$ и $B^{(0)}_{(0)}=B$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < s \leq 1-\delta$. *Линейное отображение* $B : S(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит* $\Psi^m_{1,\delta}$ *тогда и только тогда, когда для любых мультииндексов* $\alpha,\beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ *линейный оператор* $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ *продолжается до ограниченного оператора из пространства* $\Lambda^{s+m-|\alpha|+\delta|\beta|,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *в* $\Lambda^{s,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4. *Пусть псевдодифференциальный оператор A принадлежит* $\Psi^m_{1,\delta}$ *и обратим из* $\Lambda^{s,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *в* $\Lambda^{s-m,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *при некотором s. Тогда обратный оператор принадлежит* $\Psi^{-m}_{1,\delta}$.

Список литературы

[1] *Beals R.* Characterisation of pseudodifferntial operators and application // Duke Math. J. 1977. V. 44. P. 45–57.

[2] *Rabinovich V. S.* Fredholm property of pseudo-differential operators on weighted Hölder-Zygmund spaces // Operator Theory: Advances and Applications. 2006. V. 164. P. 95–114.

[3] *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton; New Jersey, 1993.

[4] *Кряквин В. Д.* Критерии компактности и нетеровости псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера–Зигмунда // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 101–110.

Некоторые смешанные задачи для уравнения колебаний стержня, состоящего из двух разнородных участков

Кулешов А. А. (Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет ВМиК, Россия)

Рассматриваются смешанные задачи для разрывного волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t)=\begin{cases} a_1^2u_{xx}(x,t) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant x_0, \quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ a_2^2u_{xx}(x,t) & \text{при } x_0\leqslant x\leqslant l, \quad 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0 \tag{2}$$

и с одной из следующих совокупностей граничных условий:

$$\begin{cases} u(0,t)=\mu(t)\\ u(l,t)=\nu(t),\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=\mu(t)\\ u_x(l,t)=\nu(t),\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu(t) \\ u(l,t) = \nu(t), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu(t) \\ u_x(l,t) = \nu(t), \end{cases} \tag{6}$$

В докладе представлен явный вид обобщенного решения указанных смешанных задач, а также рекуррентный алгоритм вычисления входящих в решение постоянных коэффициентов.

Автор выражает глубокую благодарность академику В. А. Ильину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] *Ильин В. А.* Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из участков // Труды матем. ин-та имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 133–142.

[2] *Ильин В. А.* О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. 2010. Т. 435. № 6. С. 732–735.

[3] *Ильин В. А.* О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня // Труды ин-та Математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2 (в печати).

Механизм докритического возбуждения автоколебаний, связанных с резонансом $1:3$

Куликов А. Н. (Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия)

Куликов Д. А. (Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия)

В $\mathbb{R}^n$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + A(\varepsilon)x = F(x, \dot{x}, \varepsilon), \tag{1}$$

где ε — малый неотрицательный параметр, $x(t) = colon(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $A(\varepsilon)$ — квадратная матрица, элементы которой гладко зависят от параметра ε. Гладкая вектор- функция $F(x, y, \varepsilon)$ имеет по переменным x, y в нуле порядок малости выше первого.

Пусть матрица $A(0)$ имеет простые собственные значения $\sigma_j \in \mathbb{R}, \sigma_j \neq 0, j = 1, \ldots, n$ и при этом $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 3$. Считаем, что иные младшие резонансы отсутствуют.

Ограничимся рассмотрением вопроса о существовании у системы (1) периодических решений с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$ или $2\pi/\sigma_2$. Используя алгоритмы построения нормальных форм из монографии **[1]** можно показать, что вопрос о существовании и устойчивости таких периодических решений может быть сведен к изучению системы уравнений — нормальной формы, главная часть которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \varepsilon\big[(-1 + i\alpha_1) + c_{11}z_1|z_1|^2 + c_{12}z_1|z_2|^2 + c_{23}\overline{z}_1^2 z_2\big], \\ \dot{z}_2 = \varepsilon\big[(-1 + i\alpha_2) + c_{21}z_2|z_1|^2 + c_{22}z_2|z_2|^2 + c_{23}z_2^3\big], \end{cases} \tag{2}$$

$$\dot{z}_k = \varepsilon z_k\big[(-1+i\alpha_k) + c_{k1}|z_1|^2 + c_{k2}|z_2|^2\big], \tag{3}$$

где $k = 3,\ldots,n$, $z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $c_{jm} \in \mathbb{C}$.

Теорема 1. *Система* (2), (3) *допускает автомодельные периодические решения вида* $z_j = \rho_j \exp(i\omega_j t)$, $j = 1, 2, \rho_j \geq 0$, $\omega_j \in \mathbb{R}$, *а остальные* $z_k = 0$. *Эти решения в ситуации общего положения положения порождают периодические решения системы* (1) *с периодом близким к* $2\pi/\sigma_1$ *или* $2\pi/\sigma_2$ *с наследованием их свойств устойчивости.*

В работах **[2, 3]** были рассмотрены важные, с точки зрения приложений, задачи, аналогичные данной. В работе **[2]** был рассмотрен вопрос об исследовании нелинейного панельного флаттера, а в работе **[3]** — одна из задач о синхронизации колебаний в системе связанных осцилляторов. Задача о жестком возбуждении автоколебаний, в случае, близком к резонансу собственных частот 1 : 2, была рассмотрена в различных постановках в статьях **[4–5]**.

Список литературы

[1] *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.

[2] *Куликов А. Н.* Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1 : 3 как одна из причин жесткого возбуждения колебаний // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна–2010. 2010. С. 111–118.

[3] *Куликов Д. А.* Локальные динамические режимы в двух задачах о связанных осцилляторах // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна–2010. 2010. С. 119–125.

[4] *Kulikov A. N.* Resonance of proper frequencies 1 : 2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate in ultrasonic gas flow // Труды международного конгресса ENOC-2008. Saint–Petersburg. 2008. P. 1638–1643.

[5] *Глызин С. Д., Куликов А. Ю., Розов Н. Х.* Механизм жесткого возбуждения колебаний, связанных с резонансом 1 : 2 // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 11. С. 200–216.

Неоднородные уравнения Хилла и Матье

Курин А. Ф. (Воронежский государственный университет, Россия)
Туленко Е. Б. (Воронежский государственный университет, Россия)

Неоднородные уравнения Хилла и Матье интересны для приложений. С использованием асимптотического метода усреднения во втором приближении метода решается задача Коши (с начальными условиями $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$) для уравнения

$$\ddot{z} + [p_0 + \sum_m p_m \cos(mt)]z = F(t), \quad m = 1, 2, ... \tag{1}$$

при резонансах $p_0 \approx 0$, $1/2$, 1 в однородном уравнении (см. **[1]**,**[2]**).

1. Будем считать $p_0 \sim \varepsilon^2$, $p_m \sim \varepsilon$, $F = \varepsilon^2 f(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. С помощью замены, которая является обобщением замены Боголюбова в задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса **[3]** на случай, когда коэффициент в (1) содержит более одного периодического колебания, для новых переменных φ, Ω получаем систему уравнений в стандартной форме **[3]**. Для усредненной по фазам быстрых колебаний функции $\bar{\varphi}(t)$ приходим к уравнению осциллятора $\ddot{\bar{\varphi}} + \lambda_0\bar{\varphi} = F$, где λ_0 и начальные условия $\bar{\varphi}(0)$, $\dot{\bar{\varphi}}(0)$

определяются соответственно формулами (2.11) и (2.14), (2.15) работы [**1**]. Решение $z(t)$ уравнения (1) имеет вид

$$z(t) = [1 + \sum_m \frac{p_m}{m^2} \cos(mt)]\bar{\varphi}(t).$$

В частности, если $F = F_0 \cos[M_f \cos(\nu_f t)]$, где постоянная амплитуда $F_0 \sim \varepsilon^2$, а частота $\nu_f \sim \varepsilon$, при $\lambda_0 > 0$ в уравнении (1) имеются резонансы $\nu_f = \sqrt{\lambda_0}/(2k)$, $k = 1, 2\ldots$.

2. Пусть теперь в (1) $a \approx 1/4$; 1 и $F = F_0(\varepsilon t)\cos[\omega_1 t + h(\varepsilon t)]$. Постоянная частота $\omega_1 \approx 1/2$; 1 при $a \approx 1/4$; 1 соответственно. Уравнение (1) сводится к системе с многими быстрыми фазами. Для усредненных по фазам быстрых колебаний амплитуды b и медленной фазы θ (функций $\bar{b}$ и $\bar{\theta}$) путем преобразования $P = \bar{b}\sin(\bar{\theta}/2)$, $R = \bar{b}\cos(\bar{\theta}/2)$ (при этом $\bar{b} = \sqrt{P^2 + R^2}$, $\mathrm{tg}(\bar{\theta}/2) = P/R$) получается линейная система

$$\dot{P} = 0.5(r+s)R + 0.5(r^+ + r^-)\cos\alpha, \quad \dot{R} = 0.5(r-s)P + 0.5(r^+ - r^-)\sin\alpha.$$

Здесь при $a \approx 1/4$ фаза $\alpha = (\omega_1 - 1/2)t + h$, коэффициенты r и s определяются формулами (3.7) работы [**1**], $r^- = -F_0/\sqrt{p_0}$, $r^+ = p_1 F_0/(4p_0)$. Если $a \approx 1$, то $\alpha = (\omega_1 - 1)t + h$, r и s — это (3.10) в [**1**], а $r^- = -F_0/\sqrt{p_0}$, $r^+ = p_2 F_0/8p_0$. Решение z равно

$$z(t) = z^{(0)}(t) + \frac{F}{2\sqrt{p_0}(\sqrt{p_0} + \omega_1)},$$

где $z^{(0)}(t)$ определяется формулой (6.1) в [**1**]. Анализируются не параметрические резонансы при амплитудно и частотно модулированной функции F.

Полагая везде $m = 1$, получаем формулы для уравнения Матье.

Список литературы

[1] *Курин А. Ф.* Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла при параметрическом резонансе // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 498–511.

[2] *Курин А. Ф.* Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 4. С. 633–650.

[3] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974.

Асимптотический анализ сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами

Курина Г. А. (Воронежский государственный университет, Россия)

Нгуен Т. Х. (Вьетнамский национальный университет, Вьетнам)

Рассматривается задача минимизации квадратичного функционала на траекториях сингулярно возмущенной линейной системы с закрепленным левым концом. Коэффициенты имеют разрыв первого рода в одной промежуточной точке, в остальных точках они непрерывны. Для построения асимптотики решения используется непосредственная подстановка в условия задачи постулируемого асимптотического разложения решения. Такой подход к построению асимптотики решения задач оптимального управления назван М. Г. Дмитриевым и С. В. Белокопытовым прямой схемой.

Решение рассматриваемой задачи, построенное при помощи прямой схемы, содержит функции погранслоя четырех типов. Найдены задачи оптимального управления, которым удовлетворяют коэффициенты асимптотического разложения решения. Для этих задач получены необходимые и достаточные условия оптимальности управления и доказана однозначная разрешимость. Установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании следующего асимптотического приближения оптимального управления.

Получен вид оптимального управления в форме обратной связи для линейно-квадратичных задач с разрывными коэффициентами. Построена асимптотика непрерывного решения возникающей при этом задачи для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати с разрывными в промежуточной точке коэффициентами. Используя эту асимптотику, построена асимптотика оптимального управления в форме обратной связи.

Методом прямой схемы построено также асимптотическое решение сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с разрывными в промежуточной точке коэффициентами и дешевым управлением.

Получены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению возмущенной задачи по управлению, траектории и функционалу.

Предлагаемые методы построения асимптотики иллюстрируются численными примерами.

Основные результаты доклада опубликованы в [**1**–**3**].

Список литературы

[1] *Курина Г. А., Нгуен Т. Х.* Приближение нулевого порядка асимптотики решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи управления с разрывными коэффициентами // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17. № 1. С. 93–116.

[2] *Курина Г. А., Нгуен Т. Х.* Асимптотика оптимального управления в форме обратной связи для сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи с разрывными коэффициентами // Вестник Воронежского гос. университета. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 103–117.

[3] *Нгуен Т. Х.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами. Автореферат диссертации на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Воронеж. 2010.

Групповой анализ нелинейного уравнения колмогоровского типа и инвариантные решения задачи Коши

Лагно В. И. (Полтавский национальный педагогический университет, Украина)
Стогний В. И. (Национальный технический университет Украины "КПИ", Украина)
Маркитанов Ю. Н. (Национальный технический университет Украины "КПИ", Украина)

Нелинейное уравнение

$$u_t - u_{xx} - uu_y = F(u), \tag{1}$$

где F — некоторая непрерывная функция переменной $u = u(t,x,y)$, встречается в различных проблемах финансовой математики [**1**]. Наблюдается [**2**, **3**] и определенный интерес к исследованию свойств решений задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0,x,y) = g(x,y). \tag{2}$$

Нами, с использованием методов группового анализа дифференциальных уравнений [**4**], исследованы следующие проблемы:

1°. Проведена групповая классификация уравнения (1), вследствие чего получены все спецификации функции F, для которых уравнение (1) имеет нетривиальные симметрийные свойства.

2°. Проведена симметрийная редукция и построены точные (инвариантные) решения для полученных в классификации уравнений.

3°. Для уравнения (1) с наивысшими симметрийными свойствами ($F = 0$) при некоторых значениях функции g в условии (2) получены инвариантные решения задачи Коши.

Список литературы

[1] *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance // Differential and Integral Equations. 2001. V. 14. № 6. P. 701–738.
[2] *Escobedo M., Vasquez J. L., Zuazua E.* Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity // Trans. Am. Math. Soc. 1994. V. 343. № 2. P. 829–842.
[3] *Vol'pert A. I., Hudjaev S. I.* Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations // Math. USSR. Sb. 1957. V. 3. № 3. P. 365–387.
[4] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Минимум отношения веса минимального заполнения к весу минимального остовного дерева для выпуклых четырехугольников на евклидовой плоскости

Лаут И. Л. (Московский Государственный Университет)

Определение 1. Минимальным заполнением конечного метрического пространства назовем взвешенный граф наименьшего веса, затягивающий данное метрическое пространство так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве.

Определение 2. Минимальным остовным деревом конечного метрического пространства назовем взвешенный граф наименьшего веса, затягивающий данное метрическое пространство так, что ребра графа инцидентны только точкам метрического пространства и вес ребра равен расстоянию между точками метрического пространства, инцидентными ему.

В данной работе доказана точная оценка отношения веса минимального заполнения к весу минимального остовного дерева выпуклых четырехточечных подмножеств евклидовой плоскости.

Теорема 1. *Пусть $M = \{A, B, C, D\} \subset E^2$, где A, B, C, D — вершины выпуклого четырехугольника. Пусть $\omega(M)$ — вес минимального заполнения M, $\mu(M)$ — вес минимального остовного дерева M. Тогда верна оценка:*

$$\frac{\omega(M)}{\mu(M)} \geq \frac{3}{4}.$$

Список литературы

[1] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Математический сборник, в печати.

Асимптотический анализ линейных дифференциальных уравнений с большим параметром. Резонансный случай

Левенштам В. Б. (Южный федеральный университет, Южный математический институт, Россия)

Пусть n, p — натуральные числа, A, $B_k(t)$, $|k| \leqslant n$, $t \in [0, T]$, —квадратные матрицы порядка p, причем элементы матриц $B_k(t)$ имеют на интервале $t \in (0, T)$ непрерывные производные любого порядка, которые продолжимы по непрерывности на весь отрезок $t \in [0, T]$. Обозначим через λ_j, $j = \overline{1, p}$, собственные значения матрицы A, а через $\Phi(m)$, где m — целое число, — множество пар (k, j), таких что $\lambda_k - \lambda_j = im$. Будем предполагать, что при некоторых m справедливо $\Phi(m) \neq \varnothing$, т. е. выполнено условие резонанса. Для простоты будем считать, что $\Phi(0) = \varnothing$, т. е. собственные значения матрицы A различны.

На участке $t \in [0, T]$ рассмотрим нормальную систему

$$\dot{x} = \left[\omega A_0 + \sum_{|k| \leqslant n} B_k(t) e^{ik\omega t}\right] x, \tag{1}$$

где ω — большой параметр. Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений $X(t)$ этой системы находим в виде

$$X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{sm}(t) e^{im\omega t} e^{Q(t,\omega)}, \tag{2}$$

где $Q(t, \omega) = \omega t Q_{-1} + Q_0(t)$, и матрицы Q_{-1}, Q_0 — диагональные.

Для любого целого неотрицательного l рассмотрим l-ую частичную сумму $X_l(t)$ ряда (1):

$$X_l(t) = \sum_{s=0}^{l} \omega^{-s} \sum_m U_{sm}(t) e^{im\omega t} e^{Q(t,\omega)}.$$

Через $x_l^k(t)$ и $q_k(t,\omega)$, $k \in \overline{1,p}$, обозначим k-ый столбец матрицы $X_l(t)$ и, соответственно, k-ый диагональный элемент матрицы $Q(t,\omega)$.

Теорема 1. *Существует $\omega_0 > 0$ такое, что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k \in \overline{1,p}$ найдется решение $\varphi^k(t)$ системы (1), удовлетворяющее следующему условию. Для каждого целого неотрицательного l существуют положительные числа c_l и ω_l, такие что при $\omega > \omega_l$ эффективно строится l-ое приближение $x_l^k(t)$ решения $\varphi^k(t)$ и при всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка*

$$\left|[\varphi^k(t) - x_l^k(t)]e^{-q_k(t,\omega)}\right| \leqslant \frac{c_l}{\omega^{(l+1)}}.$$

О линейных дифференциальных уравнениях Жордана–Похгаммера

Лексин В. П. (Московский государственный областной социально-гуманитарный институт, Россия)

Рассматриваются специальные фуксовы уравнения на сфере Римана

$$Q(z)y^{(n)} - \mu Q'(z)y^{(n-1)} + \frac{\mu(\mu+1)}{2}\mu Q''(z)y^{(n-2)} - \ldots$$
$$- \mu R(z)y^{(n-1)} + (\mu+1)R'(z)y^{(n-2)} - \ldots = 0 \quad (1)$$

и класс фуксовых систем на многомерных комплексных линейных (или проективных) пространствах $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{C}P^n$), называемый системами Жордана–Похгаммера

$$\mathrm{d}\, y(z) = \left(\sum_{1\le i<j\le n} J_{ij}(\lambda) \frac{\mathrm{d}(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \right) y(z). \quad (2)$$

Каждая матрица J_{ij} имеет размер $n \times n$, и ненулевые элементы могут стоять только на пересечении i-той и j-той строки с такими же столбцами. В i-том столбце стоят числа λ_j и $-\lambda_j$, а в j-том столбце стоят числа λ_i и $-\lambda_i$, взятые из упорядоченного набора комплексных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Уравнения и системы (1) и (2) имеют базис решений, представленный интегралами по циклам от произведения степеней линейных форм, умноженного на подходящую дифференциальную форму. Существование такого базиса позволяет найти асимптотики решений в особых точках и описать представления монодромии уравнений и систем. Название описанных уравнений и систем восходит к книге Айнса ([**1**], глава 18, § 4), где, по-видимому, впервые рассматривались уравнения (1). Они были названы уравнениями Жордана–Похгаммера и системами Жордана–Похгаммера в силу того, что для получения решений таких уравнений использовались результаты Жордана и Похгаммера о некоторых интегралах по циклам и соотношения для таких интегралов. В работах **[1, 3, 4, 6]** предъявлены порождающие матрицы монодромии или дана характеризация представлений монодромии уравнений и систем (1) и (2).

Мы будем рассматривать приложения уравнений и систем (1) и (2) к изучению уравнений Шлезингера изомонодромных деформаций фуксовых уравнений и систем второго порядка с приводимыми представлениями монодромии. Для таких уравнений Шлезингера, с использованием свойств решений уравнений и систем (1) и (2), будут рассмотрены свойства ветвлений решений и свойства тета-дивизора Мальгранжа.

Эта работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-8508.2010.1).

Список литературы

[1] *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М: Факториал. 2005.

[2] *Kapovich M. and Millson J.* Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation// Canad. Math. Bull. 2001. V. 44. P. 36–60.

[3] *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations// Contemporary Math. 1988. V. 78. P. 339–363.

[4] *Лексин В. П.* Монодромия фуксовых систем на комплексных линейных пространствах// Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2007. Т. 256 С. 267–277.

[5] *Manin Yu. I. and Schechtman V. V.* Arrangements of hyperplanes , higher braid groups and higher Bruhat orders// Advanced Studies in Pure Mathematics. 1989. V. 17. P. 289–308.

[6] *Takano K. and Bannai E.* A global study of Jordan–Pochhammer differential equations// Funkcial Ekvac. 1976. V. 19. № 1. P. 85–99.

Об асимптотическом поведении решений системы уравнений Прандтля для стратифицированной магнитной жидкости

Линкевич А. Ю. (Университетский колледж Нарвика, Норвегия)
Спиридонов С. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Чечкин Г. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Университетский колледж Нарвика, Норвегия)

Изучается поведение сильно стратифицированной магнитной жидкости, проходящей сквозь мелкоячеистую пористую преграду. Малый параметр $\varepsilon > 0$ определяет характерный размер ячеек преграды и, соответственно, толщину слоев жидкости. Согласно теории Прандтля, жидкость можно считать вязкой только в окрестности обтекаемого тела, где систему уравнений Навье–Стокса можно заменить более простой:

$$\begin{gathered} \nu\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} - u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - v_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} = -d_\varepsilon(x,y)(U^\infty(x) - u_\varepsilon) - U^\infty\frac{dU^\infty}{dx}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

в области $D = \{0 < x < X_0, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} u_\varepsilon(0,y) = U_\varepsilon(y), \\ u_\varepsilon(x,0) = 0, \qquad v_\varepsilon(x,0) = V_\varepsilon(x), \\ u_\varepsilon(x,y) \to U^\infty(x) \text{ при } y \to \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $d_\varepsilon(x,y) = \dfrac{\sigma_\varepsilon(x,y)B^2(x)}{\rho} > 0$, σ_ε — магнитная проводимость жидкости, B — ортогональная к поверхности обтекаемой пластины компонента вектора магнитной индукции, $\rho = 1$ — плотность жидкости, $(u_\varepsilon(x,y),\, v_\varepsilon(x,y))$ — поле скоростей потока жидкости (параллельная и ортогональная пластине, соответственно), $(U_\varepsilon(y), 0)$ — начальная скорость потока, $(0, V_\varepsilon(x))$ — скорость на нижней границе рассматриваемой области, $(U^\infty(x), 0)$ — скорость на верхней границе.

Доказано, что предельное поведение решений задачи (1) при $\varepsilon \to 0$ определяется следующей усредненной задачей:

$$\begin{gathered}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = -d(x,y)(U^\infty(x) - u) - U^\infty\frac{dU^\infty}{dx},\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

в области D с граничными условиями

$$\begin{gathered}u(0,y) = U(y),\\ u(x,0) = 0, v(x,0) = V(x),\\ u(x,y) \to U^\infty(x) \text{ при } y \to \infty,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$U_\varepsilon(y) \to U(y), \qquad V_\varepsilon(x) \to V(x), \qquad d_\varepsilon(x,y) \to d(x,y), \tag{5}$$

а также получены оценки скорости сходимости решений исходной задачи к решениям усредненной.

Работа написана при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00353).

Асимптотика наименьшего собственного значения дельта возмущения на пучке прямых

Лобанов И. С. (Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия)
Попов И. Ю. (Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия)

Мы рассматриваем оператор H, формально заданный на $L^2(\mathbb{R}^2)$ выражением

$$H = -\Delta + \alpha\delta(\cdot - \gamma_1) + \alpha\delta(\cdot - \gamma_2) \tag{1}$$

для некоторой константы $\alpha \in \mathbb{R}$ и пары прямых γ_1, γ_2, образующих угол θ, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Оператор H может рассматриваться как гамильтониан так называемого “звездообразного липкого графа” **[1]**, **[2]**, служащего моделью бесспиновой заряженной частицы на пучке волноводов с разрешенными перескоками с волновода на волновод. В работах **[1]**, **[2]** показано, что непрерывный спектр оператора H совпадает с интервалом $[-\frac{\alpha^2}{4}, \infty)$, а точечный спектр оператора H не пуст, и даны оценки для числа собственных значений и нижнего собственного значения оператора H при $\theta \to 0$. В настоящей работе оценивается поведение нижнего собственного числа при $\theta \approx \frac{\pi}{2}$, используя отличный от статей [**1**], [**2**] подход, основанный на результатах [**3**]. Записывая аналог резольвентной формулы М. Г. Крейна в импульсном представлении и используя спектральное уравнение А. Посиликано, мы доказываем следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. *Всякое число E является непогруженным в непрерывный спектр собственным значением оператора H, если и только если для некоторой пары функций $f_0, f_1 \in L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)^{\frac{3}{2}})$ и всех $n = 0, 1$ выполняется*

$$\frac{\alpha \sin\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{n+1 \bmod 2}(t)\, dt}{q^2 + t^2 - 2qt\cos\theta - (-1)^n E \sin\theta} = \left(1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{q^2 - E}}\right) f_n(q).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Наименьшее собственное значение оператора H не превосходит величины $-\alpha^2 T(\sin\theta - 1)^2$, где*

$$T(t) = \frac{1}{2} - t\frac{3\pi - 8}{3\pi} + t^2\frac{120\pi\sqrt{2} - 388 - 45\pi}{15\pi} - \\ - t^3\frac{-3255\pi - 15884 + 5880\pi\sqrt{2}}{105\pi} + O(t^4).$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-08-00267.

Список литературы

[1] *Brown B. M., Eastham M. S. P., Wood I. G.* Estimates for the lowest eigenvalue of a star graph // J. Math. Anal. Appl. 2009, V. 354. № 1. P. 24–30.

[2] *Exner P., Nemcova K.* Bound states in point-interaction star graphs // J. Phys. A. 2001, V. 34. № 38. P. 7783–7794.

[3] *Posilicano A.* A Krein-like Formula for Singular Perturbations of Self-Adjoint Operators and Applications // J. Funct. Anal. 2001. V. 183. P. 109–147.

Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской-Яхьи

Логачева Н. С. (Московский государственный университет, Россия)

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата.

Уравнения движения и первые интегралы этой системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \overrightarrow{\lambda}) \times \omega - \overrightarrow{a} \times \nu, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega. \end{cases}$$

$$f_1 \equiv {\nu_1}^2 + {\nu_2}^2 + {\nu_3}^2 = 1,$$

$$f_2 \equiv \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \frac{(\omega_3 + \lambda)\nu_3}{2} = g,$$

$$H \equiv {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 + \frac{{\omega_3}^2}{2} - \nu_1 = h,$$

$$K \equiv ({\omega_1}^2 - {\omega_2}^2 + \nu_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \nu_2)^2 + 2\lambda(\omega_3 - \lambda)({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) + 4\lambda\omega_1\nu_3 = k.$$

Здесь ω — вектор угловой скорости тела-носителя, ν — единичный вертикальный вектор, $\mathbf{A}$ — диагональная матрица тензора инерции, $\overrightarrow{a}$ — вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс, длина которого равна произведению веса тела на расстояние от его центра масс до неподвижной точки, $\overrightarrow{\lambda}$ — гиростатический момент.

Итак, $M_g^4 = \{f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, f_2 = 2(\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2) + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g\}$, где f_1 и f_2 — функции, лежащие в ядре скобки Ли–Пуассона и являющиеся первыми интегралами уравнений.

Определение 1. Точка $x \in M_g^4$ называется точкой положения равновесия, если $dH(x) = dK(x) = 0$.

Автором найдены все точки положения равновесия, их координаты указаны в следующей теореме:

Теорема 1 (Н. С. Логачева). *В случае Ковалевской–Яхьи точки положения равновесия на фазовом пространстве системы имеют следующие координаты:*

$$\omega_1 = \pm\sqrt{z^2-1}\,\frac{2gz-\lambda}{2z^2-1}, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \frac{2gz-\lambda}{2z^2-1},$$
$$\nu_1 = \pm\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}, \qquad \nu_2 = 0, \qquad \nu_3 = \frac{1}{z},$$

где z — действительный корень уравнения

$$z(z^2-1)\frac{(2gz-\lambda)^2}{(2z^2-1)^2} - \lambda z(z^2-1)\frac{2gz-\lambda}{2z^2-1} \pm \sqrt{z^2-1} = 0.$$

Других критических точек у гамильтонианов $H_{g\lambda}$ на M_g^4 нет.

Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии

Логинов Б. В. (УлГТУ, Россия)
Коноплева И. В. (УлГТУ, Россия)
Миронова Л. В. (УВАУГА, Россия)

В вещественных банаховых пространствах E_1 и E_2 в предположении плотности вложений $E_1 \subset E_2 \subset H$ в гильбертово пространство H с оценками $\|u\|_H \le \alpha_2\|u\|_{E_2} \le \alpha_1\|u\|_{E_1}$ рассматривается система уравнений

$$F_1(x,y,\lambda) = 0, \quad F_2(x,y,\lambda) = 0, \quad F_k(x_0,y_0,\lambda) \equiv 0, \quad k = 1,2, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \tag{1}$$

допускающая локальную запись

$$\begin{aligned} B_0X - \lambda_0 A_0 Y &= A(\varepsilon)Y - B(\varepsilon)X + R_1(x_0,y_0,X,Y,\varepsilon),\\ B_0^*X - \lambda_0 A_0^* Y &= A^*(\varepsilon)Y - B^*(\varepsilon)X + R_2(x_0,y_0,X,Y,\varepsilon), \end{aligned} \tag{2}$$

где $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, A_0 и B_0 — плотно заданные замкнутые фредгольмовы операторы, $D_{A(\varepsilon)} \subset D_{A_0}$, $D_{B(\varepsilon)} \subset D_{B_0}$, $R_j(x_0,y_0,0,0,\varepsilon) \equiv 0$, $j = 1,2$. Пусть n-кратное собственное значение Шмидта λ_0 является фредгольмовой точкой спектра соответствующего левой части матричного оператора в прямой сумме $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств H. Операторы F_j, $j = 1, 2$ допускают непрерывную группу G, т. е. существуют ее представления L_g в E_1 и K_g в E_2, сплетающие F_j, т. е. $K_g F_j(x, y, \lambda) = F_j(L_g x, L_g y, \lambda)$, причем группа Ли $G = G_l = G_l(a)$ ($a = (a_1, ..., a_l)$ — ее существенные параметры) предполагается l-мерным дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условиям:

1°. представление $a \mapsto L_{g(a)} x_0$, действующее из окрестности единичного элемента $G_l(a)$ в пространство E_1 принадлежит классу C^1, так что $\mathcal{X} x_0, \mathcal{X} y_0 \in E_1$ для всех производящих операторов $\mathcal{X} x = \lim\limits_{t \to 0} t^{-1} \left[L_{g(a(t))} x - x \right]$ в касательном к $L_{g(a)}$ многообразии $T^l_{g(a)}$;
2°. стационарная подгруппа элементов (x_0, y_0) определяет представление $L(G_s)$ локальной группы Ли $G_s \subset G_l$, $s < l$, с s-мерной подалгеброй $T^s_{g(a)}$ производящих операторов, т. е. элементы $(\mathcal{X}_k x_0, \mathcal{X}_k y_0), \mathcal{X}_k \in T^l_{g(a)}$ образуют в подпространстве нулей матричного оператора $\kappa = (l - s)$-мерное подпространство и базисы в нем и в алгебре $T^l_{g(a)}$ можно упорядочить так, что $(\mathcal{X}_k x_0, \mathcal{X}_k y_0) = \Phi_k = (u_k^{(1)}, v_k^{(1)})^T$, $1 \le k \le \kappa$, и $(\mathcal{X}_j x_0, \mathcal{X}_j y_0) = (0, 0)$ для $j \ge \kappa + 1$.

В этих условиях на основе наших работ **[1–3]** доказаны теоремы о наследовании групповой симметрии соответствующими уравнениями разветвления (УР) и уравнениями разветвления в корневых подпространствах (УРК) со следствиями:

1°. теоремой о неявных операторах при $\kappa = n$;
2°. теоремой о редукции УР и УРК для неинвариантного ядра.

Указаны приложения в теории электромагнитных колебаний. Работа поддержана РПЦ ГК П1112 и проектом 2.1.1/6194 РНПВШ Минобрнауки РФ.

Список литературы

[1] *Логинов Б. В.* О нахождении собственных чисел и фундаментальных элементов Шмидта вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве // Доклады АН УзССР. 1965. № 1. С. 5–8.

[2] *Коноплева И. В., Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах // Доклады РАН. Математика. 1960. Т. 419. № 2. С. 1–5.

[3] *Коноплева И. В., Логинов Б. В.* Бифуркация, симметрия и косимметрия в дифференциальных уравнениях, не разрешенных относительно производной, с вариационными уравнениями разветвления // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион.Естественные науки. 2009. Спецвыпуск ≪Актуальные проблемы математической гидродинамики≫. С. 115–124.

Краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка при нелокальных условиях по времени и нестационарных граничных условиях

Ломовцев Ф. Е. (Белорусский Государственный Университет, Беларусь)
Хатимцов Н. А. (Белорусский Государственный Университет, Беларусь)

Доказана корректная везде разрешимость дифференциального уравнения

$$-u_{tttt}+(a(x)u_{xx})_{xx}+b_1(x,t)u_{tt}+b_2(x,t)u_{xx}=f(x,t),\ \{x,t\}\in G=]0,l[\times]0,T_0[, \quad (1)$$

с зависящими от времени граничными условиями

$$(a(x)u_{xx})_x|_{x=0}+\alpha_1(t)u(0,t)=0,\ \ a(0)u_{xx}(0,t)-\alpha_2(t)u_x(0,t)=0,$$

$$(a(x)u_{xx})_x|_{x=l}-\alpha_3(t)u(l,t)=0,\ \ a(l)u_{xx}(l,t)+\alpha_4(t)u_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,T_0], \quad (2)$$

и для всех $x\in[0,l]$ с нелокальными условиями по времени

$$u(x,0)-\mu u(x,T_0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=u_t(x,T_0)=0,\ u_{tt}(x,0)-\mu u_{tt}(x,T_0)=\psi(x). \quad (3)$$

Теорема 1. *Пусть* $a\in C^{(2)}[0,l]$, $a(x)\geq a_0>0$, $b_1,b_2\in C(\overline{G})$, $0\leq\alpha_i\in C^{(3)}[0,T_0]$, $\alpha_i(0)=\alpha_i(T_0)$, $i=\overline{1,4}$, $\alpha_i(t)+\alpha_{i+1}(t)\neq0$, $i=1,3$. *Тогда существуют такие* $T_0>0$, $0<\mu_0<1$, *что при всех* $t\in[0,T_0]$, $|\mu|<\mu_0$, $f\in\mathcal{F}(G)$, $\varphi\in\tilde{W}_2^2(0,l)$ *и* $\psi\in L_2(0,l)$ *сильные решения* $u\in\mathcal{E}(G)$ *краевой задачи* (1)–(3) *существуют, единственны и*

$$\|u(x,t)\|^2_{\mathcal{E}}\leq c_0\Big(\|f(x,t)\|^2_{\mathcal{F}}+\|A^{1/2}(0)\varphi(x)\|^2+\int_0^l|\psi(x)|^2\,dx\Big),\ c_0>0,$$

где $\|A^{1/2}(t)u\|^2=\int_0^l|u''(x)|^2\,dx+\alpha_1(t)|u(0)|^2+\alpha_2(t)|u'(0)|^2+\alpha_3(t)|u(l)|^2+\alpha_4(t)|u'(l)|^2$.

Здесь гильбертово пространство сильных решений $\mathcal{E}(G)$ — замыкание множества функций $C^{(4)}(\overline{G})$, удовлетворяющих условиям (2) и $u_t(x,0)=u_t(x,T_0)=0$, по эрмитовой норме $\|u\|_{\mathcal{E}}=\big(\int_G|u_{tt}|^2\,dxdt+\int_0^{T_0}\|A^{1/2}(t)u\|^2\,dt\big)^{1/2}$, банахово пространство данных $\mathcal{F}(G)=W_2^{(0,-1)}(G)\times\tilde{W}_2^2(0,l)\times L_2(0,l)$, где $W_2^{(0,-1)}(G)$ — замыкание $L_2(G)$ по норме $\|f\|_{\mathcal{F}}=\sup_v|\int_G fv\,dxdt|/(\int_G|v_t|^2dxdt)^{1/2}$, $v(x,0)=v(x,T_0)=0$, $\tilde{W}_2^2(0,l)$ — замыкание множества функций $u\in C^{(4)}[0,l]$, удовлетворяющих (2) при $t=0$, по норме $\|A^{1/2}(0)u\|$.

Корректность нелокальной задачи для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторов изучена в **[1]**.

Список литературы

[1] *Ломовцев Ф. Е., Хатимцов Н. А.* Нелокальная задача для полных гиперболических дифференциально-ореаторных уравнений второго порядка с переменными областями определения// Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4, с. 507–518

Решение задачи быстродействия для линейной нестационарной управляемой докритической системы с многомерным управлением

Лукьянов В. В. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Рассмотрим линейную нестационарную задачу быстродействия в нуль

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + T) = 0, \quad T \to \inf, \tag{2}$$

где функции $A\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $B\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$ непрерывны. Множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ — совокупность всех измеримых функций $u\colon \mathbb{R} \to U = [-1, 1]^r$.

Зафиксируем некоторую фундаментальную систему решений $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ и определим семейство непрерывных функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t) b^j(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r,$$

где $b^j(t)$ — столбец матрицы $B(t)$ с номером j. Для фиксированных чисел $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ и ненулевого вектора $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $n_j = n_j(c)$ — количество геометрически различных корней функции $\xi^j(t; c) = c_1 \xi_1^j(t) + \cdots + c_n \xi_n^j(t)$ на интервале $I_{t_0} = (t_0, t_0 + \sigma)$. Обозначим $\sigma(t_0)$ — точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на интервале I_{t_0} при любом ненулевом $c \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $n_1(c) + \cdots + n_r(c) \leqslant n - 1$.

Определение 1. Систему (1) будем называть *докритической* в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если выполнено неравенство $\sigma(t_0) > 0$.

Далее предполагается, что система (1) докритическая в точке t_0. Определим докритическое множество управляемости

$$D_{t_0} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_0 + \sigma(t_0)} X(t_0, s) B(s) u(s)\, ds.$$

Положим $\mathfrak{N} = \{(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r) \in \mathbb{Z}_+^r : \mathfrak{n}_1 + \ldots + \mathfrak{n}_r \leqslant n - 1\}$. Для каждого вектора $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r) \in \mathfrak{N}$ обозначим $c(\mathfrak{n}) = \{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \mathfrak{n}_1 = n_1(c), \ldots, \mathfrak{n}_r = n_r(c)\}$ и определим множество

$$\Lambda_{t_0}^{\mathfrak{n}} = \bigcup_{c \in c(\mathfrak{n})} \bigl\{ \bigl(\delta_1(c), \ldots, \delta_r(c) \bigr) \bigr\}, \quad \text{где} \quad \delta_j(c) = \lim_{t \to t_0 + 0} \operatorname{sign} \xi^j(t; c).$$

Для каждого вектора $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r) \in \mathfrak{N}$, каждого вектора $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in \Lambda_{t_0}^{\mathfrak{n}}$ и любого $\theta > 0$ обозначим через $\mathfrak{U}_\delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$ совокупность всевозможных кусочно-постоянных функций $u\colon \mathbb{R} \to U$, тождественно равных нулю вне интервала $(t_0,\, t_0 + \theta)$; каждая координатная функция $u_j(\cdot)$ на интервале $(t_0,\, t_0 + \theta)$ принимает значения ± 1 и имеет ровно $\mathfrak{n}_j$ переключений, а δ_j — значение функции $u_j(\cdot)$ в правой окрестности точки t_0. Построим множество $\mathfrak{U}_{t_0} = \bigcup\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant \sigma(t_0)} \bigcup\limits_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \bigcup\limits_{\delta \in \Lambda_{t_0}^{\mathfrak{n}}} \mathfrak{U}_\delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$ ($\mathfrak{U}_\delta^{\mathfrak{n}}(0)$ состоит из тождественно равной нулю функции) и определим отображение $F_{t_0}\colon \mathfrak{U}_{t_0} \to \mathbb{R}^n$ с помощью равенства

$$F_{t_0}(u) = -\int_{t_0}^{t_0 + \sigma(t_0)} X(t_0, s) B(s) u(s)\, ds.$$

Теорема 1. *Если управляемая система* (1) *докритическая в точке* t_0, *то отображение* $F_{t_0}: \mathfrak{U}_{t_0} \to D_{t_0}$ *является взаимно однозначным отображением множества управлений* $\mathfrak{U}_{t_0} \subset \mathcal{U}$ *на докритическое множество управляемости* D_{t_0} *и для любой точки* $x_0 \in D_{t_0}$ *управление* $\hat{u}(\cdot) = F_{t_0}^{-1}(x_0)$ *является решением задачи* (1)–(2).

О неустойчивости генеральных показателей относительно случайных возмущений

Луночкин М. А. (Костромской государственный университет им. Н. А. Некрасова, Россия)

Дано ограниченное линейное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

а также его допустимое случайное возмущение **[2]**

$$\dot{y} = (a(t) + c_\sigma(t, \omega))y, \tag{2}$$

где $\sigma \in (0, 1)$, а ω — элемент вероятностного пространства.

В работах **[2]**, **[3]** исследован вопрос стохастической устойчивости показателей Ляпунова систем любого порядка. В частности доказано, что в рассматриваемом случае уравнения и его допустимого случайного возмущения показатель Ляпунова стохастически устойчив, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma' > 0$, что для всех $\sigma \in (0, \sigma')$ почти наверное выполняется неравенство $|\lambda(\omega; \sigma) - \lambda| < \varepsilon$.

Рассмотрим верхний и нижний генеральные показатели **[1]** $\varkappa_g$, $\varkappa'_g$ для уравнения (1) и $\varkappa_g(\omega; \sigma)$, $\varkappa'_g(\omega; \sigma)$ для уравнения (2). Будем считать, что генеральные показатели уравнения (1) конечны.

Теорема 1. *Почти наверное для любого* $\sigma \in (0, 1)$ *выполняются равенства*

$$\varkappa_g(\omega; \sigma) = \infty, \quad \varkappa'_g(\omega; \sigma) = -\infty.$$

Как видим, в случае генеральных показателей стохастическая устойчивость не наблюдается.

Список литературы

[1] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[2] *Миллионщиков В. М.* К теории характеристических показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 503–513.

[3] *Нгуен Динь Конг.* О стохастической устойчивости показателей Ляпунова уравнений произвольного порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 914.

Классы функций Лиувилля-Киприянова

Ляхов Л. Н. (Воронежский государственный университет, Россия)
Феоктистова А. А. (Липецкий государственный педагогический университет, Россия)

Пусть $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}^+$ и $1 \leq k \leq n \leq m \leq N$. Введем обозначения $u{=}(x, y){\in}R_N^+$, $x{=}(u_1, \ldots, u_n){\in}R_n^+$, $y{=}(u_{n+1}, \ldots, u_N){\in}R_{N-n}^+$. Каждая из переменных x и y в свою очередь разбита на части $x=(x',x'')$, $y=(y',y'')$, $x'=(u_1,\dots,u_k)$, $x''=(u_{k+1},\dots,u_n)$, $y'=(u_{n+1},\dots,u_{n+m})$, $y''=(u_{n+m+1},\dots,u_N)$. Через $S_{ev}=S_{ev}(R_N^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца основных функций $S(R_N)$, состоящее из функций, четных по каждой из весовых переменных u_i и u_j, $i=1,\dots,k$ и $j=n+1,\dots,n+m$. Пространство весовых обобщенных функций $S'_{ev}=S'_{ev}(R_N^+)$ определяется на основе весовой линейной формы $(f\,,\,\varphi)_\gamma=\int_{R_N^+} f(u)\,\varphi(u)\,u^\gamma\,du$. Пусть $B_{u_i}=B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}+\frac{\gamma_i}{u_i}\,\frac{\partial}{\partial u_i}$ — оператор Бесселя и $l=(l_1;l_2)=(l'_1,l''_1;l'_2,l''_2)$, где l'_1, l''_1, l'_2, l''_2 — мультииндексы, состоящие из целых положительных чисел размерности соответственно k, $n-k$, m, $N-n-m$. И пусть $(BD)^l=(B_{x'}^{l'_1}D_{x''}^{l''_1}B_{y'}^{l'_2}D_{y''}^{l''_2})$, где $B_{x'}=(B_{u_1},\dots,B_{u_k})$, $D_{x''}=(\frac{\partial}{\partial u_{k+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u_n})$, $B_{y'}=(B_{u_{n+1}},\dots,B_{u_m})$, $D_{y''}=(\frac{\partial}{\partial u_{m+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u_N})$.

Смешанное преобразование Фурье–Бесселя по части переменных x обозначим $(F_B)_x[\varphi](\xi)$ (см. [**1**]). Операция

$$F=I_{\gamma(k),xr}f=(F_B^{-1})_\xi\left[(1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2}}(F_B)_x[f]\right] \tag{1}$$

соответствует действительному числу r, отображает S'_{ev} на S'_{ev} взаимно однозначно. Мы также рассмотрим подобные операции на координатных осях. Если выбрана ось u_j, то операцию (1) обозначим через I_{γ_j,u_jr}.

Для любого $1\le p\le\infty$ через L_p^γ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций, для которых $\int_{R_N^+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty$.

Пусть $f\in L_p^\gamma$. Множества функций $F=I_{\gamma(k),xr}f$, $F=I_{\gamma_j,u_jr}f$, $f\in L_p^\gamma$ будем называть классами Лиувилля–Киприянова и обозначать $L_{xp}^{r,\gamma}=L_{xp}^{r,\gamma}(R_N^+)$, $L_{u_jp}^{r,\gamma}=L_{u_jp}^{r,\gamma}(R_N^+)$, $1\le p\le\infty$, $-\infty<r<+\infty$.

Функция f принадлежит пространству Соболева–Киприянова $W_p^{r,\gamma}$, если $f\in L_p^\gamma$ и $(BD)^jf\in L_p^\gamma$, $j=1,\dots,r$. Через $W_{xp}^{r,\gamma}$ обозначаем пространство Соболева–Киприянова, в котором производная $(BD)^r$ действует только по части переменных x.

Теорема 1. *При $1<p<\infty$ пространства $L_{xp}^{r,\gamma}$ и $L_{xp}^{r,\dots,r,\gamma}$, $L_{xp}^{r,\gamma}$ и $W_{xp}^{r,\gamma}=W_{xp}^{r,\dots,r,\gamma}$ $(r=1,2,\dots)$, $L_{xp}^{\bar r,\gamma}$ и $W_{xp}^{\bar r,\gamma}$ совпадают.*

$$L_{xp}^{r,\gamma}=L_{xp}^{r,\dots,r,\gamma},\ L_{xp}^{r,\gamma}=W_{xp}^{r,\gamma}=W_{xp}^{r,\dots,r,\gamma}\ \ (r=1,2,\dots),$$

$$L_{xp}^{\bar r,\gamma}=W_{xp}^{\bar r,\gamma}\ \ (\bar r=(r_1,\dots,r_n),r_i>0).$$

Список литературы

[1] *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. Липецк: ЛГПУ, 2007.

Лиувиллево свойство и краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях

Мазепа Е. А. (Волгоградский государственный университет, Россия)

В работе исследуется асимптотическое поведение решений полулинейных эллиптических уравнений вида

$$Lu \equiv \Delta u + \langle \mathbf{b}(x), \nabla u \rangle = g_i(x, u), \tag{1}$$

где $\mathbf{b}(x) \in C^{\alpha}_{loc}(M)$, $0 < \alpha < 1$, $g_i(x, 0) \equiv 0$, $g_i(x, u_1) \geq g_i(x, u_2) > 0$ при $u_1 > u_2$ на некомпактном римановом многообразии M.

Будем говорить, что на некомпактном многообразии M выпонено *лиувиллево свойство* для ограниченных решений уравнения (1), если любое такое решение есть тождественный нуль.

Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующим структурным условиям:

1°. $g(x, \xi) \in \mathbf{Lip}(M \times \mathbb{R})$;
2°. $g(x, -\xi) = -g(x, \xi)$;
3°. $g(x, \xi_1) \geq g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$;
4°. существует постоянная $A > 0$ такая, что $Ag(x, \xi) \geq \xi$ для всех $\xi \geq 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *На полном некомпактном римановом многообразии M для ограниченных решений уравнения* (1) *справедливо лиувиллево свойство тогда и только тогда, когда на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения $\Delta u = u$.*

Далее в работе изучается взаимосвязь разрешимости некоторых краевых и внешних краевых задач (в частности, задачи Дирихле) для уравнения (1).

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Будем говорить, что непрерывные ограниченные на M функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны* ($f_1(x) \sim f_2(x)$), если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\lim_{k \to \infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M \setminus B_k)} = 0.$$

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u \in [f]$ уравнения (1).

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей. Будем говорить, что для непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Далее вместо структурных условий 1–4 будем рассматривать следующие условия:

1a°. $g(x, \xi) \in C^{\gamma}(G \times \mathbb{R})$ для любой подобласти $G \Subset M$, $0 < \gamma < 1$;
2a°. $g(x, 0) \equiv 0$;
3a°. $g(x, \xi_1) \geq g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на $M \setminus B$ для уравнения* (1) *для любой постоянной на* ∂B *функции* Φ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на* M *для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-97004-р_поволжье_а.

Обратная нелокальная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области

Мартемьянова Н. В. (Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, Россия)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, где α, β и b — заданные положительные постоянные, и поставим следующую задачу.

Задача 1 (Обратная задача). Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1], \quad i = 1, 2; \tag{1}$$

$$Lu = f(x,y), \quad (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{2}$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{3}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{4}$$

$$u_y(x,\beta) = \chi(x), \qquad u_y(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Следуя **[1]**, **[2]**, поставленная задача исследуется спектральным методом. Случай $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ рассмотрен в **[3]**.

Отметим, что к нелокальному условию $u_x(0,y) = u_x(1,y)$, $-\alpha \le y \le \beta$, выражающему равенство потоков через стороны $x = 0$ и $x = 1$ прямоугольника D, сводится нелокальное интегральное условие

$$\int_0^1 u(x,y)\, dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \le y \le \beta. \tag{6}$$

Последнее возникает, например, при изучении вопроса об устойчивости разреженной плазмы **[4]**. Краевая задача для уравнения парабологиперболического типа с условием (6) изучена в работе **[2]**.

В данной работе решение задачи (1)–(5) построено в виде сумм биортогональных рядов. Установлен критерий единственности и доказана устойчивость решения обратной задачи по граничным данным (4) и (5).

Список литературы

[1] *Сабитов К. Б.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка// ДАН. 2009. Т. 427. № 5. С. 593–596.

[2] *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 45. № 10. С. 1468–1478.

[3] *Мартемьянова Н. В.* Обратная задача для уравнения смешанного типа с нелокальным граничным условием // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. 2010. № 6 (80). С. 27–38.

[4] *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.

Об асимптотической устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Матвеева И. И. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия)

Рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad T > \tau,$$

$F(t, u, v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u, при этом

$$\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1,\ q_2,\ \omega_1,\ \omega_2 \geq 0.$$

Используя модифицированный функционал Ляпунова–Красовского, предложенный в **[1]**, и опираясь на результаты из работ **[2, 3]**, мы указываем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), получаем оценки экспоненциального убывания решений системы (1) при $t \to \infty$ и находим области притяжения.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственные контракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (проект № 85, междисциплинарный проект № 107).

Список литературы

[1] *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.

[2] *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.

[3] *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1026–1041.

Об одной задаче управления протяженным объектом в момент

Матвийчук А. Р. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)

В работе рассматривается задача управления точечным или протяженным объектом с фиксированным центром в n-мерном евклидовом пространстве при наличии фазовых ограничений. Задача рассматривается на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, где жесткими условиями являются момент старта t_0 и момент прибытия на целевое множество ϑ. Динамика объекта описывается дифференциальным уравнением заданного вида. На систему накладываются стандартные условия, обеспечивающие существование, единственность и продолжимость решений на весь промежуток времени $[t_0, \vartheta]$. Также заданы стартовое и целевое множества и фазовое ограничение с непустыми сечениями. Допускается непрерывное изменение фазового ограничения с течением времени по известному нам программному закону.

Необходимо привести управляемый объект своим центром из стартового множества на целевое множество в момент времени таким образом, чтобы управляемый объект во время своего движения не выходил за пределы фазового ограничения.

Подобные задачи возникают в таких областях, как доставка пассажиров и грузов по расписанию из одного места в другое при наличии известных подвижных препятствий.

Точно аналитически решить поставленную задачу не представляется возможным, поэтому решать задачу предлагается приближенно в дискретной модели времени путем выбора разбиения интервала $[t_0, \vartheta]$ с достаточно малым шагом. Для моментов времени из выбранного разбиения последовательно, начиная с момента времени ϑ, строятся множества управляемости вплоть до момента времени t_0. Если пересечение последнего построенного множества управляемости и стартового множества не пусто, то выбирается любая точка из пересечения и строится управление, приводящее систему на целевое множество. Построение управления осуществляется последовательно по шагам, на каждом шаге из условия прицеливания на очередное множество управляемости до тех пор, пока в качестве цели не будет рассмотрено целевое множество. Такой метод позволяет привести управляемый объект в момент времени ϑ в заданную окрестность целевого множества, незначительно нарушая фазовое ограничение.

Представленная схема построения разрешающего управления использует двухэтапный метод, где, в отличие от метода решения задачи оптимального управления из [**2**], нет необходимости в построении поводыря.

В качестве иллюстрации приводятся примеры, рассчитанные двумя численными методами, методом многоугольников и сеточным методом.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-96006-р_урал_а, программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и программы совместных исследований УрО и СО РАН “Разработка вопросов и теории, объединяющей задачи реконструкции, обращения и управления”.

Доклад основан на совместной работе с А. Г. Малеевым.

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука. 1970. — 420 с.
[2] *Матвийчук А. Р., Ушаков В. Н.* О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.

О решениях эллиптических краевых задач в областях с негладкой границей

Матевосян О. А.

Изучены свойства обобщенных решений основных краевых задач для эллиптических уравнений и систем (система уравнений Стокса, система теории упругости) в областях с негладкой границей. Предполагается, что обобщенные решения обладают конечным весовым интегралом Дирихле (энергии) со степенным весом. В зависимости от показателя степенного веса получен критерий единственности, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений основных краевых задач. Кроме того, приведены формулы асимптотического разложения изучаемых задач.

О существовании и единственности справа решений систем алгебро-дифференциальных уравнений с разрывами

Матросов И. В. (Центр исследования устойчивости и нелинейной динамики при ИМАШ РАН, Россия)

Объектом исследования является конечномерная система алгебро-дифференциальных уравнений с разрывами в векторной функции $f \in R^n$ и производных $G \in R^m$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \qquad G(x, y, t) = 0. \tag{1}$$

Рассматривается задача аппроксимации ее решений при помощи решений системы дифференциальных уравнений, содержащей стабилизирующее слагаемое $-M\,G/\|G\|$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = L^{-1}_{(x,y,t)}\left(-M\frac{G}{\|G\|} - \frac{\partial G}{\partial x}f - \frac{\partial G}{\partial t}\right). \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть пара функций $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$ является решением системы* (1) *и в ограниченной области $U \subseteq R^{n+m+1}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1°. *функция $y(t)$ абсолютно непрерывна, а ее производная $\frac{dy}{dt}$ ограничена;*
2°. *f ограничена, непрерывна по переменной y, измерима по Лебегу по переменой t и β-непрерывна в смысле А. Ф. Филиппова по переменной x;*
3°. *для всех значений переменных $(x, y, t) \in \overline{U}$ функция G ограничена и является строго кусочно-гладкой по переменной y, причем в каждой точке $(x^*, y^*, z^*) \in U$ соответствующее кусочно-линейное приближение $L_{(x^*,y^*,t^*)}(y)$ обратимо;*

4°. *вне некоторого конечного объединения гиперповерхностей S функция G непрерывно дифференцируема по x, y и t, причем* $\frac{\partial G(x,y,t)}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial G(x,y,t)}{\partial t}$ *ограничены в* $U \backslash S$.

Тогда существует $M > 0$ такая, что решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1) *является решением системы дифференциальных уравнений* (2) *в смысле А. Ф. Филиппова.*

Лемма 2. *Пусть в области U система* (1) *удовлетворяет условиям 2-4 леммы 1. Тогда для решения x, y системы* (2) *с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$:*

- *либо при $t^* < t_0 + \frac{G(x_0,y_0,t_0)}{M}$ выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{t \to t^*} \rho((x(t), y(t), t), \partial U) = 0, \tag{3}$$

- *либо $\forall t \geq t_0 + \frac{G(x_0,y_0,t_0)}{M}$, пара $x(t)$, $y(t)$ является решением системы* (1).

Однократное или, в вырожденных случаях, многократное применение лемм 1 и 2 позволяет дать алгоритм исследования свойств существования и правосторонней единственности решения системы (1) путем применения к (2) теории А. Ф. Филиппова дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Этот подход также позволил построить метод численного решения систем рассматриваемого вида и дать условия его сходимости к истинному решению.

Список литературы

[1] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

[2] *Матросов И. В.* О существовании решений разрывных алгебро-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика, 2006.

[3] *Матросов И. В.* О единственности справа решений невырожденных, алгебро-дифференциальных уравнений с разрывами // Автоматика и телемеханика, 2007.

О вложении сепаратрис диффеоморфизмов, заданных на замкнутых многообразиях

Медведев В. С. (НИИ Прикладной математики и кибернетики при Нижегородском госуниверситете им. Н. И. Лобачевского, Россия)

В докладе рассматриваются инварианты топологически сопряженных диффеоморфизмов на n-мерных гладких замкнутых многообразиях M^n, $n > 2$.

Гомеоморфизм $f : M^n \to M^n$, устанавливающий топологическую сопряженность диффеоморфизмов, отображает сепаратрисы в сепаратрисы седловых периодических точек сопрягаемых диффеоморфизмов на M^n. Поэтому топологические инварианты погружения k-мерных сепаратрис w^k, $k > 0$, в многообразии M^n являются также топологическими инвариантами сопряженных диффеоморфизмов.

В докладе дается описание погружений k-мерных сепаратрис седловых периодических точек без гетероклинических пересечений диффеоморфизмов и гладких потоков на n-мерном многообразии M^n.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор 11.G34.31.0039.

Отображения Черри окружности и потоки Черри на замкнутых поверхностях

Медведев Т. В. (Нижегородский государственный университет, Россия)

Сообщение посвящено топологической классификации потоков Черри на двумерном торе и замкнутой неориентируемой поверхности рода 3, а также топологической классификации индуцируемых ими отображений на замкнутой трансверсали.

Потоки Черри являются частным случаем арациональных потоков, то есть потоков без периодических траекторий и сепаратрисных связей. Динамика арациональных потоков наиболее тесно связана с топологией несущей поверхности. Особый интерес представляют потоки, имеющие нетривиальные рекуррентные траектории, то есть незамкнутые траектории принадлежащие собственному предельному множеству. Топологическое замыкание нетривиальной рекуррентной траектории называется квазиминимальным множеством.

Арациональный C^1 поток f^t называется потоком Черри, если выполняются следующие условия:

1°. f^t имеет одно квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$;
2°. состояния равновесия f^t являются топологическими узлами и седлами с четырьмя сепаратрисами;
3°. в каждый узел потока f^t идет ровно по одной сепаратрисе седла;
4°. если седло имеет сепаратрису, идущую в узел, оно лежит в $\Omega(f^t)$.

Построение топологической классификации потоков Черри основывается на идее Пуанкаре изучения отображения последования, индуцированного потоком на негомотопной нулю замкнутой трансверсали, которое мы называем отображением Черри. В случае потока на замкнутой неориентируемой поверхности рода 3 это отображение имеет так называемый флип. Вначале решается задача топологической классификации таких отображений с помощью полной системы топологических инвариантов, называемых схемой. Вводится понятие абстрактной допустимой схемы и показывается, что для каждой абстрактной допустимой схемы существует отображение Черри окружности со схемой, изоморфной данной.

Полученные результаты применяются для построения схемы потока Черри на двумерном торе и замкнутой неориентируемой поверхности рода 3. Показывается, что схема потока Черри также является полным топологическим инвариантом и для каждой абстрактной допустимой схемы существует поток Черри с данной схемой.

Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

Мелишева Е. П. (Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, Россия)

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} + C(y)u(x,0) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)\,:\, 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные постоянные, $C(y) = C_1(y)$ при $y \geq 0$, $C(y) = C_2(y)$ при $y \leq 0$, $C_i(y)$, $i = 1, 2,$ — заданные непрерывные функции.

Задача 1 (Задача Дирихле). Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_+ \cup D_-\right); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрены в работах **[1, 2]**. В работе **[2]** для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области D изучена начально-граничная задача, в которой методом спектральных разложений **[3]** установлен критерий единственности решения этой задачи и само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

В работе **[4]**, следуя **[2, 3]**, установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5), и решение задачи представлено в виде ряда Фурье, сходимость которого в классе функций (2) установлена, когда α является положительным рациональным числом.

В данной работе существование решения задачи (2)–(5) доказано в случае, когда α является квадратичным иррациональным числом.

Список литературы

[1] *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[2] *Сабитов К. Б.* Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Докл. АМАН. Нальчик. 2009. Т. 11. № 1. С. 66–73.

[3] *Сабитов К. Б.* Задача Трикоми для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. 2009. Т. 86. вып. 2. С. 273–279.

[4] *Мелишева Е. П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. 2010. Т. 80. № 6. С. 39–47.

Условия регуляризуемости и нуль-пространства интегральных операторов

Менихес Л. Д. (Южно-Уральский государственный университет, Россия)

Пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный непрерывный инъективный оператор. Отображение A^{-1} называется регуляризуемым, если существует семейство отображений $R_\delta : Y \to X$, $\delta \in (0, \delta_0)$ такое, что для любого $x \in X$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|y - Ax\| \le \delta} \|R_\delta y - x\| = 0. \tag{1}$$

В этом случае семейство $\{R_\delta\}$ называется регуляризатором для отображения A^{-1}.

Во многих случаях (в частности, если $X = C(a, b)$) регуляризуемость A^{-1} эквивалентна существованию последовательности линейных непрерывных операторов $R_n : Y \to X$ такой, что для любого $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} R_n Ax = x. \tag{2}$$

Это означает, что обратный оператор A^{-1} поточечно приближается непрерывными.

Рассмотрим классическую ситуацию $X = C(a, b)$, $Y = L_2(a, b)$. Будем предполагать, что оператор A непрерывен также и в L_2-норме. Это выполнено, например, для интегральных операторов с непрерывными ядрами. Тогда A может быть продолжен по непрерывности на различные подпространства M, $C(a, b) \subset M \subset L_2(a, b)$. В **[1]** было доказано, что если продолжение A на некоторое $L_p(a, b)$, $p \ge 2$ имеет конечномерное ядро, то A^{-1} регуляризуемо, в **[2]** показано, что регуляризуемость A^{-1} следует из конечномерности ядра продолжения A на $L_\infty(a, b)$.

Следующие два утверждения показывают, что все эти условия различны.

Теорема 1. *Пусть $p_1 > p_2 \ge 2$. Тогда существует инъективный интегральный оператор из $C(a, b)$ в $L_2(a, b)$ с гладким симметричным ядром, продолжение которого на $L_{p_2}(a, b)$ имеет бесконечномерное нуль-пространство, а продолжение на $L_{p_1}(a, b)$ — конечномерное нуль-пространство.*

Теорема 2. *Существует инъективный интегральный оператор из $C(a, b)$ в $L_2(a, b)$ с гладким симметричным ядром, продолжение которого на любое $L_p(a, b)$, $p \ge 2$ имеет бесконечномерное нуль-пространство, а на $L_\infty(a, b)$ — конечномерное нуль-пространство.*

Имеет место также следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть (p_n) — строго возрастающая последовательность вещественных чисел ≥ 2 и $\lim_{n \to \infty} p_n = p$. Тогда существует инъективный интегральный оператор с гладким симметричным ядром из $C(a, b)$ в $L_2(a, b)$ такой, что нуль-пространство его продолжения на любое $L_{p_n}(a, b)$ бесконечномерно, а нуль-пространство его продолжения на $L_p(a, b)$ конечномерно.*

Список литературы

[1] *Менихес Л. Д.* О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. заметки, 1999. Т. 65. № 2. С. 222–229.

[2] *Менихес Л. Д.* Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Матем. заметки, 2007. Т. 82. № 2. С. 242–247.

Символический подход к свойствам средних значений решений линейных уравнений в частных производных

Мешков В. З.

Половинкин И. П. (Воронежский государственный университет, Россия)

Через $\hat{f}$ будем обозначать преобразование Фурье распределения $f \in S$. Далее, пусть $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $P(w)$ — однородный многочлен порядка m.

Определение 1. Распределение Φ с компактным носителем назовем сопровождающим (сопровождением) уравнение $P(D)u = 0$ (оператор $P(D)$), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство $\langle \Phi, u \rangle = 0$.

Теорема 1. *Для того, чтобы распределение Φ с компактным носителем являлось сопровождением оператора $P(D)$ в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала некоторая целая аналитическая функция $\widehat{\psi}(\omega)$, для которой*

$$\widehat{\Phi}(w) = P(w)\widehat{\psi}(\omega), \quad w \in \mathbb{C}^n.$$

Теорема 2. *Пусть $P(D) = P_1(D)P_2(D)$, где P_1 и P_2 суть однородные многочлены. Пусть Φ_l — распределение с компактным носителем, сопровождающее оператор $P_l(D)$, $l = 1, 2$. Распределение $\Phi = \Phi_1 * \Phi_2$ является сопровождающим оператор $P(D) = P_1(D)P_2(D)$.*

На основании теоремы 2 показано, что в случае дифференциального оператора с постоянными коэффициентами с двумя независимыми переменными с однородным символом теоремы о среднем значении могут быть получены из простейших формул среднего для операторов первого порядка и для эллиптических операторов второго порядка. В частности, такому оператору $P(D)$ соответствует некоторое семейство разностных операторов P_h (в общем случае построенных на комплексных точках и с комплексными коэффициентами), таких, что имеет место импликация

$$P(D)u = 0 \Longrightarrow P_h u = 0, \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Двучленные дифференциальные операторы с сингулярным коэффициентом

Мирзоев К. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Шкаликов А. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Наша цель — построение спектральной теории операторов, порожденных в $L_2(a, b)$ квазидифференциальными выражениями вида

$$\ell[y] := (-1)^n y^{(2n)} + \sigma^{(k)} y, \tag{1}$$

где $\sigma^{(k)}$ — производная порядка k от регулярной функции σ. Здесь $k \leqslant n$, а $\sigma \in L^1_{loc}(a,b)$, если $k < n$, и $\sigma \in L^2_{loc}(a,b)$, если $k = n$. Интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Определим квадратную матрицу размерности $2n$, полагая

$$\begin{aligned} f_{j,j+1} &= 1, && j = 1,2,\ldots,2n-1; \\ f_{2n-1+j-k,j} &= (-1)^{n+j} C_k^j \sigma, && j = 1,2,\ldots,k+1; \\ f_{2n,1} &= (-1)^n \sigma^2 \delta_{nk}; && \\ f_{ij} &= 0 && \text{при всех остальных значениях } i \text{ и } j, \end{aligned}$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты, а δ_{nk} — символ Кронекера. Определим квазипроизводные $y^{[j]}$ $(j = 0,1,\ldots,2n-1)$ функции y $(=: y^{[0]})$ и квазидифференциальное выражение $\tau[y]$, порождённые матрицей F, полагая

$$\begin{aligned} y^{[j+1]} &:= (y^{[j]})', && j = 0,1,\ldots,2n-2-k, \\ y^{[2n-k+j]} &:= (y^{[2n-1-k+j]})' - f_{2n-k+,j+1} y^{[j]}, && j = 0,1,\ldots,k-1, \\ \tau[y] &= (y^{[2n-1]})' - f_{2n,k+1} y^{[k]} - f_{2n,1} y. && \end{aligned}$$

Лемма 1. *Квазидифференциальное выражение* $(-1)^n \tau[y]$ *совпадает с выражением* (1), *где* $\sigma^{(k)}$ *означает производную порядка* k *функции* σ *в смысле теории распределений.*

Эта лемма позволяет включить минимальный оператор L_0, порождённый выражением (1) в пространстве $L^2(a,b)$, в класс операторов, порождённых симметрическими квазидифференциальными выражениями с локально суммируемыми коэффициентами, и таким образом позволяет строить спектральную теорию оператора L_0.

В докладе речь пойдёт об условиях на $\sigma(x)$, $x \in (0,+\infty)$, которые обеспечивают случаи немаксимальности (в частности, минимальности) дефектных чисел оператора L_0. Кроме того, мы покажем, что в случае, когда σ является ступенчатой функцией с бесконечным числом скачков, то условие максимальности дефектных чисел этого оператора равносильно условию максимальности дефектных чисел оператора, порождённого некоторой обобщённой якобиевой матрицей в пространстве l^2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00790, и Аналитической ведомственной целевой программы Минобрнауки, проект № 2.1.1/10641.

О некоторых краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка

Мирзоев С. С. (Бакинский государственный университет, Азербайджан)
Алиев А. Р. (Бакинский государственный университет, Азербайджан)

Многие задачи теории упругости, в частности задачи для многослойных тел, моделируются уравнениями с кусочно-постоянными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Рассматриваемый нижеследующий класс операторно-дифференциальных уравнений является таковым:

$$(-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t) + \sum_{j=1}^{2k} A_j(t) u^{(2k-j)}(t) = f(t), \quad t \in R_+ = [0, +\infty), \tag{1}$$

где $f(t) \in L_2(R_+; H)$, $u(t) \in W_2^{2k}(R_+; H)$ (см.[**1**]), $\rho(t) = \alpha$, если $0 \le t \le T$ и $\rho(t) = \beta$, если $T < t < +\infty$, причем α, β — положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа, а A — самосопряженный положительно-определенный оператор, $A_j(t)$, $j = \overline{1, 2k}$ — линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, определенные почти при всех $t \in R_+$.

В работе [**2**] нами были установлены достаточные условия существования и единственности решения из пространства $W_2^{2k}(R_+; H)$ для уравнения (1) в случае, когда к нему в нуле присоединены самосопряженные краевые условия:

$$u^{(s_i)}(0) = 0, \; i = \overline{0, k-1}, \tag{2}$$

где s_i — натуральные числа такие, что $0 \le s_0 < s_1 < ... < s_{k-1} \le 2k-1$ и $s_i + s_j \ne 2k-1$, $0 \le i, j \le 2k-1$.

Случай несамосопряженных краевых условий ($s_i + s_j = 2k-1$) требует отдельного своего независимого рассмотрения. В этом случае возникают, например, такие вопросы:

1°. Не может ли случиться, что для некоторых значений α, β, T задача

$$(-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t) = 0,$$
$$u^{(s_i)}(0) = 0, \; i = \overline{0, k-1},$$

имеет ненулевое решение из пространства $W_2^{2k}(R_+; H)$?

2°. При каких условиях на операторные коэффициенты $A_j(t)$, $j = \overline{1, 2k}$ задача (1), (2) имеет единственное решение из пространства $W_2^{2k}(R_+; H)$?

В данном докладе мы отвечаем на эти вопросы. Отметим, что соответствующие теоремы из работы [**2**] остаются в силе и в случае несамосопряженных краевых условий.

Список литературы

[1] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[2] *Алиев А. Р., Мирзоев С. С.* К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44. № 3. С. 63–65.

Топологическая классификация диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности

Митрякова Т. М. (Нижегородский государственный университет, Россия)

Доклад посвящен экспозиции результатов, полученных совместно с О. В. Починкой.

Рассматривается класс Ψ диффеоморфизмов, заданных на гладком двумерном замкнутом ориентируемом многообразии M^2 и удовлетворяющих следующим условиям: неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in \Psi$ состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек, а его блуждающее множество допускает конечное число гетероклинических орбит трансверсального пересечения и касания.

Нарушение условия трансверсальности гетероклинических пересечений седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости и, как обнаружил Ж. Палис в 1978 году, к возникновению непрерывных топологических инвариантов — модулей топологической сопряженности. Отсюда, в частности, следует, что в любой C^1-окрестности диффеоморфизма поверхности, допускающего гетероклиническое касание, имеется континуум топологически несопряженных диффеоморфизмов.

В работе В. ди Мелу, С. Ж. ван Стрина 1987 года найдены необходимые и достаточные условия того, что множество классов топологической сопряженности в окрестности диффеоморфизма ориентируемой поверхности описывается с помощью конечного числа параметров (модулей топологической сопряженности). Используя эти результаты, в работах **[1]** и **[2]** для диффеоморфизмов из класса Ψ найден полный топологический инвариант, который является комбинацией геометрических инвариантов, введенных в работах Х. Бонатти, В. З. Гринеса и Р. Ланжевена для классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла, а также аналитических инвариантов (модулей), связанных с гетероклиническими односторонними касаниями. В докладе решается также проблема реализации каждого класса топологически сопряженных диффеоморфизмов, принадлежащих Ψ.

Работа поддержана грантом 11-01-00730 РФФИ, грантом правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грантом Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (проект НК-13П-13).

Список литературы

[1] *Митрякова Т. М., Починка О. В.* О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания// Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 198–219.

[2] *Митрякова Т. М., Починка О. В.* К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности// Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 1. С. 91–105.

Одномерные операторы Шредингера с потенциалами-мерами

Михайлец В. А. (Институт Математики НАН Украины)

Молибога В. Н. (Институт Математики НАН Украины)

В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ исследуются спектральные свойства операторов Шредингера $\mathrm{S}(q')$, у которых потенциал является вещественной мерой Радона:

$$\mathrm{S}(q')u := -u'' + q'(x)u, \qquad q \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}).$$

Следуя [**1**], определим операторы $\mathrm{S}(q')$ как *квази*-дифференциальные:

$$\mathrm{S}(q')u := l_q[u], \qquad l_q[u] := -(u' - qu)' - q(u' - qu) - q^2 u,$$

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{S}(q')) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, u, u' - qu \in \mathrm{AC}_{loc}(\mathbb{R}), l_q[u] \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $C \in \mathbb{R}_+$ *и*

$$\int_J d\, q(x) \geq -C \tag{1}$$

для всех интервалов J *вещественной оси* $\mathbb{R}$ *длины* $|J| \leq 1$. *Тогда оператор* $\mathrm{S}(q')$ *полуограничен снизу и самосопряжен.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (1). *Оператор* $\mathrm{S}(q')$ *имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{|a|\to\infty} \int_a^{a+h} d\, q(x) = +\infty \qquad \forall h \in (0, 1].$$

Теоремы 1 и 2 обобщают результаты [**2**] на случай сингулярных потенциалов.

Если мера q' является 1-периодической, то спектр оператора $\mathrm{S}(q')$ абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру: спектральные зоны перемежаются со спектральными лакунами, см. [**3**] и ссылки там. Обозначим через $\{\gamma_{q'}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность длин его спектральных лакун. Для локально абсолютно непрерывных мер $\gamma_{q'}(n) \to 0$. Примеры авторов показывают, что существуют периодические *распределения* $q' \in H^{-\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R})$ при всех $\varepsilon > 0$, для которых $\{\gamma_{q'}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathrm{l}^\infty$.

Теорема 3. *Пусть потенциал* q' *является* 1*-периодической мерой. Тогда последовательность* $\{\gamma_{q'}(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{l}^\infty$, *и при* $n > 8\omega/\pi$ *верна оценка*

$$\gamma_{q'}(n) \leq 24\omega + 2\left(\frac{6\omega}{n\pi}\right)^2,$$

где ω *— полная вариация меры* q' *на отрезке* $[0, 1]$.

Список литературы

[1] *Савчук А., Шкаликов А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. Мат. Об-ва. 2003. Т. 64. С. 159–219.

[2] *Brinck I.* Self-adjointness and spectra of Sturm–Liouville operators // Math. Scand. 1959. V. 7. № 1. P. 219–239.

[3] *Mikhailets V., Molyboga V.* One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topology. 2008. V. 14. № 2. P. 184–200.

Задача оптимального граничного управления силой на одном конце струны при заданном режиме силы на другом конце

Моисеев Е. И. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

Холомеева А. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

В данной работе в терминах обобщенного решения из класса W_2^1 одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \ \text{ в области } Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T] \tag{1}$$

решена задача об отыскании в явном аналитическом виде оптимального граничного управления колебаниями струны длины l. Управление производится на одном конце струны

$$u_x(0,t) = \mu(t), \tag{2}$$

а на левом конце задан некоторый известный заранее режим действия силы

$$u_x(l,t) = \nu(t). \tag{3}$$

Задача состоит в нахождении такого управления $\mu(t)$, которое за время T переводит струну из заданного начального состояния

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{4}$$

в заданное финальное состояние

$$u(x,T) = \widehat{\varphi}(x),\ u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x), \tag{5}$$

учитывая заданный граничный режим.

В работе доказана

Теорема 1. *Обобщенное из $W_2^1(Q_T)$ решение начально-краевой задачи для уравнения* (1) *с начальными условиями* (4) *и граничными* (2), (3) *существует и единственно.*

При этом в доказательстве указан способ построения решения.

Далее при больших промежутках времени T проведена оптимизация, т. е. среди всех граничных управлений выбирается то, которое доставляет минимум интегралу

$$\inf \int_0^T (\mu(t))^2\, dt. \tag{6}$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7332.2010.9).

Список литературы

[1] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. С. 89–114.
[2] Моисеев Е. И., Холомеева А. А. Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием нечетности первого рода // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1623–1630.
[3] Холомеева А. А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны с модельными нелокальными условиями одного из двух типов // Доклады Академии Наук. 2011. Т. 437, № 2. С. 164–167.
[4] Моисеев Е. И., Холомеева А. А. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце // Труды Института математики и механики. 2011. Т. 17, № 2.

Формула среднего значения для гармонической функции в круговом секторе

Моисеев Т. Е. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия)

В работе исчерпывающим образом решен вопрос о справедливости формулы среднего значения для гармонической в круговом секторе функции, удовлетворяющей на прямолинейных участках границы этого сектора однородным краевым условиям типа наклонной производной с коэффициентами k и κ, соответственно. Доказана справедливость этой формулы при $k+\kappa \geq 0$ и установлено, что при $k+\kappa < 0$ эта формула, вообще говоря, не справедлива. Доказанная формула обобщает ранее полученные формулы [**1**–**3**].

Введем область

$$D = [\{r,\theta\} \,:\, 0 < r < r_0,\ 0 < \theta < \alpha_0,\ \text{где } \alpha_0 \in (0, 2\pi)], \tag{1}$$

представляющую собой круговой сектор. Здесь r_0 — радиус окружности, α_0 — фиксированное число. В секторе задана гармоническая функция $u(r,\theta)$, т. е. в D

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

а на границе сектора заданы граничные условия

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + k\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\theta=0} = 0, \qquad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \kappa\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\theta=\alpha_0} = 0, \qquad 0 < r < r_0. \tag{4}$$

В работе для гармонической функции $u(r,\theta)$ (функция дважды непрерывно дифференцируема в области D и непрерывна в замыкании области D) установлена формула среднего значения

$$\int\limits_0^{\alpha_0} \frac{u(r,\theta)\,d\theta}{\left[\sin\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha_0}\right)\right]^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \left[\cos\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha_0}\right)\right]^{\frac{2\theta_1}{\pi}}} = \frac{u(0,0)}{\pi}\alpha_0 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_1}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\pi}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\theta_1+\theta_0}{\pi}\right)}. \tag{5}$$

В формуле (5) $\theta_0 = \operatorname{arctg} k$, $\theta_1 = \operatorname{arctg} \kappa$, поэтому интегралы в левой части существуют; $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема 1. *Формула среднего значения* (5) *справедлива при* $k+\kappa \geq 0$ *и, вообще говоря, несправедлива при* $k+\kappa < 0$.

Подробное доказательство формулы среднего значения (5) содержится в [**5**].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00411, программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3514.2010.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Список литературы

[1] *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
[2] Моисеев Е. И.// Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 96.
[3] Моисеев Е. И.// Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 7. С. 1160–1172.
[4] Моисеев Т. Е.// Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 712–714.
[5] Моисеев Т. Е.// Доклады Академии Наук. 2010. Т. 432, № 5. С. 592–593.

Краевая задача для дифференциально-операторного уравнения в частных производных второго порядка с переменными областями определения

Мотевич А. В. (Белорусский Государственный Университет, Беларусь)

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$ и нормой $|\cdot|$ доказана корректная везде разрешимость краевой задачи типа Гурса

$$\mathcal{L}(t)u \equiv u_{t_1t_2}(t) + u_{t_2t_3}(t) + u_{t_1t_3}(t) + A(t)u(t) = f(t),\ \mathcal{T} = \prod_{i=1}^{3}]0, T_i[, \qquad (1)$$

$$l_1u \equiv u|_{t_1=0} = \varphi_1(t_2, t_3), \quad l_2u \equiv u|_{t_2=0} = \varphi_2(t_1, t_3), \quad l_3u \equiv u|_{t_3=0} = \varphi_3(t_1, t_2), \qquad (2)$$

где $A(t)$ — самосопряженные положительные неограниченные операторы в H с зависящими от $t = \{t_1, t_2, t_3\}$ областями определения $D(A(t))$. Нижними индексами функции u обозначены ее частные производные по указанным в индексе переменным.

Определение 1. Сильным решением краевой задачи (1), (2) называется решение операторного уравнения $\overline{L}u = \Phi$, $\Phi \in F$, где $\overline{L}$ — сильное замыкание оператора $L = \{\mathcal{L}(t),\ l_1,\ l_2,\ l_3\} : E \supset D(L) \to F$ в произведении пространств $E \times F$ с плотной областью определения $D(L) = \{u \in \mathcal{H} = L_2(\mathcal{T}, H) : \mathcal{L}(t)u \in \mathcal{H}\}$.

Теорема 1. *Пусть при всех $t \in \mathcal{T}$ обратные операторы $A^{-1}(t)$ к операторам $A(t)$ сильно непрерывны по t в H и имеют в H такие ограниченные сильные производные $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i$, $\partial^2 A^{-1}(t)/\partial t_i \partial t_j = \partial^2 A^{-1}(t)/\partial t_j \partial t_i$, что выполняются неравенства*

$$|((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, g)| \le c_1(A^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H, \quad c_1 \ge 0, \quad i = \overline{1,3},$$
$$|((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, h)| \le c_2|g|(A^{-1}(t)h, h) \quad \forall g, h \in H, \quad 3 > c_2 \ge 0, \quad i = \overline{1,3},$$
$$|((\partial^2 A^{-1}(t)/\partial t_i \partial t_j)g, v)| \le c_3|g|(A^{-1}(t)v, v) \quad \forall g, v \in H, \quad c_3 \ge 0,$$

где $i < j$, $i, j = \overline{1,3}$. Тогда для каждого $\Phi = \{f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \in F = \mathcal{H} \times H_1 \times H_2 \times H_3$ сильное решение $u \in E$ краевой задачи (1), (2) *существует, единственно и удовлетворяет априорной оценке*

$$\|u\|_E^2 \le c_4\biggl(\int_{\mathcal{T}} |f(t)|^2\,dt + \sum_{i=1}^{3} \|\varphi_i\|_{(i)}^2\biggr), \quad c_4 = \frac{3}{2}\exp\{(T_1 + T_2 + T_3)\max\{c_1, 3\}\}.$$

Здесь банахово пространство сильных решений E — замыкание множества $D(L)$ по норме $\|u\|_E = \bigl(\sup_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i,j=1, i<j}^{3} \int_0^{T_j}\int_0^{T_i} \bigl[\frac{1}{2}|u_{t_i}|^2 + \frac{1}{2}|u_{t_j}|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2\bigr]\,dt_i dt_j\bigr)^{1/2}$, гильбертовы пространства H_i — замыкания следов функций u из $D(L)$ при $t_i = 0$ по эрмитовым нормам $\|u\|_{(i)} = \bigl(\int_0^{T_j}\int_0^{T_k} \bigl[\frac{1}{2}|u_{t_j}|^2 + \frac{1}{2}|u_{t_k}|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2\bigr]\big|_{t_i=0}\,dt_k dt_j\bigr)^{1/2}$, $i \ne j$, $i \ne k$, $k < j$, $i, j, k = \overline{1,3}$.

Доклад основан на совместной работе с Ф. Е. Ломовцевым.

Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 4, отвечающие эллиптической кривой: разрешимость системы уравнений Кричевера–Новикова деформации параметров Тюрина

Мохов О. И. (Московский государственный университет, Россия)

Доказывается, что построение коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, которым отвечает четырехмерное расслоение общих собственных функций над эллиптической кривой, т. е. коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 4 и рода 1, сводится к решению систем алгебраических уравнений. Соответствующие коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы (порядков 8 и 12) связаны эллиптическим соотношением и зависят от трех произвольных функций (функциональных параметров).

Общая классификация скалярных обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга $l > 1$ была получена Кричевером [**1**]. Кричевером и Новиковым [**2**] задача построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга $l > 1$ сведена к решению системы уравнений деформации параметров Тюрина расслоения общих собственных функций над соответствующей алгебраической кривой. Полностью система Кричевера–Новикова деформации параметров Тюрина решена для ранга 2, рода 1 (Кричевер, Новиков, см. [**2**]) и для ранга 3, рода 1 (Мохов, [**3**], [**4**]). Недавно Мироновым [**5**], [**6**] построены явные примеры коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 2 и родов 2 и 4.

В данной работе доказана разрешимость системы уравнений Кричевера–Новикова деформации параметров Тюрина для ранга 4 и рода 1 и таким образом решена задача построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 4 и рода 1.

Теорема 1. *Полное решение системы уравнений Кричевера–Новикова деформации параметров Тюрина для ранга 4 и рода 1 и построение коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 4 и рода 1 сводятся к решению систем алгебраических уравнений.*

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00197.

Список литературы

[1] *Кричевер И. М.* Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 3. С. 20–31.

[2] *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 47–68.

[3] *Мохов О. И.* Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой // УМН. 1982. Т. 37. № 4. С. 169–170.

[4] *Мохов О. И.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения // Известия АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 6. С. 1291–1316.

[5] *Миронов А. Е.* Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 5. С. 103–114.

[6] *Миронов А. Е.* О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 // Сиб. электрон. матем. известия. 2009. Т. 6. С. 533–536.

Задача классификации пары q-коммутирующих нильпотентных операторов

Муратов М. А. (Таврический национальный университет, Украина)

Пусть (A, B) — пара линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, связанных соотношениями:

$$\begin{gathered} A^2 = B^3 = AB^2 = 0, \\ AB = qBA, \quad q \neq 0. \end{gathered}$$

Доказывается, чтот задача классификации такой пары операторов, с точностью до преобразования подобия, является „дикой“, т. е. содержит в качестве подзадачи задачу классификации пары операторов без связей.

Пространства Хермандера и их приложения

Мурач А. А. (Институт математики НАН Украины, Украина)

Доклад посвящен гильбертовым пространствам Хермандера $H^\mu := B_{2,\mu}$, параметризованным весовой функцией μ, и их различным приложениям. Эти пространства введены Л. Хермандером в $\mathbf{R}^n$ и в евклидовых областях. Пространство $H^\mu(\mathbf{R}^n)$ состоит из всех распределений $w \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ таких, что $\mu\, Fw \in L_2(\mathbf{R}^n)$, где Fw — преобразование Фурье распределения w.

Введены пространства Хермандера на гладком замкнутом (компактном) многообразии для широкого класса радиальных функциональных параметров μ. Последние являются правильно меняющимися на $+\infty$ (по Й. Карамата) функциями аргумента $|\xi|$. Даны различные эквивалентные определения этих пространств, подобные тем, которые используются для соболевских пространств.

Указаны приложения пространств Хермандера к эллиптическим операторам на многообразиях и эллиптическим краевым задачам, а также к исследованию различных типов сходимости рядов по собственным функциям самосопряженных эллиптических операторов.

Описаны все гильбертовы пространства, интерполяционные для произвольной пары соболевских гильбертовых пространств. Доказано, что первые образуют класс изотропных пространств Хермандера H^μ, где параметр μ является RO-меняющейся на $+\infty$ (по В. Авакумовичу) функцией аргумента $|\xi|$.

Результаты получены совместно с В. А. Михайлецом [**1**–**2**].

Список литературы

[1] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. К.: Ин-т математики НАН Украины, 2010.

[2] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic problems and Hörmander spaces // Oper. Theory Adv. Appl. 2009. V. 191. P. 447–470 (arXiv:0904.0372).

Начально-краевые задачи для волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными

Назайкинский В. Е. (Институт проблем механики РАН, Москва)

Изучается асимптотика при $\mu \to 0$ решения вырождающегося волнового уравнения

$$\eta_{tt} - (c^2(x)\eta_x)_x = 0 \quad \bigl[c(x) > 0, \quad c(x) \xrightarrow{x\to\infty} c_\infty > 0, \quad c(x) \sim \sqrt{x} \text{ при } x \to 0\bigr] \tag{1}$$

для функции $\eta(x,t)$ в области $\{(x,t) : \ x \in (0,\infty), \ t \in [0,T]\}$ с начальными условиями

$$\eta(x,0) = V((x-1)/\mu), \quad \eta_t(x,0) = 0 \quad \bigl[V \in C_0^\infty(\mathbf{R}) \text{ — вещественная функция}\bigr]. \tag{2}$$

Задача (1), (2) возникает при линеаризации одномерных уравнений мелкой воды и хорошо известна в т. н. теории наката (см., напр., [**1**]). Ее строгая постановка подразумевает задание области определения выражения $\ell = -\partial_x c^2(x)\partial_x$. Пусть L_θ, $\theta \in [0,\pi)$ — самосопряженный оператор в $L^2((0,\infty))$, получаемый из ℓ замыканием со множества

$$\{u \in C^\infty((0,\infty)) : \ u(x) = 0, \ x > r = r(u);$$
$$u(x) = a\ln x + b(x), \ b \in C^\infty([0,\infty)), \ a\cos\theta + b(0)\sin\theta = 0\}.$$

Соответствующую задачу обозначим через (1_θ), (2). Для $\theta = 0$ асимптотики ее решений были исследованы в [**2**] (см. также библиографию в [**2**]).

В дальнейшем для упрощения формул считаем, что $c(1) = 1$.

На кривой $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, $\Lambda_\pm = \{(x,p) \in \mathbf{R}^2 \colon x > 0, \ p = \pm c^{-1}(x)\}$, введем координату $\tau = \pm\int_0^x c(\xi)^{-1}\, d\xi$. На пространстве $\widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ гладких при $\tau \neq 0$ кусочно-гладких функций от τ с компактным носителем определим канонический оператор Маслова K_Λ^h с малым параметром h, для чего покроем кривую Λ двумя «неособыми» картами $\{\pm\tau > 1\}$ с координатой x и «особой» картой $\{|\tau| < 2\}$ с координатой p, зафиксируем в этих картах аргументы якобианов, полагая $\arg\partial x/\partial\tau = 0$, $\arg\partial p/\partial\tau = \pi$ при $\tau > 0$ и $\arg\partial x/\partial\tau = \arg\partial p/\partial\tau = -\pi$ при $\tau < 0$, и воспользуемся стандартными формулами из [**3**] (при этом в особой карте возникают несобственные интегралы по переменной p, которые корректно определены как осциллирующие интегралы).

Пусть $\varphi_0 \in \widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ — функция с носителем в окрестности точки $\tau_0 = \int_0^1 c(\xi)^{-1}\, d\xi$, такая что $\varphi_0(\tau) = 1$ вблизи τ_0. Для $t \in \mathbf{R}$ положим $\varphi_t(\tau) = \varphi_0(\tau - t)$ при $\tau > 0$ и

$$\varphi_t(\tau) = \frac{\cos\theta + (2\gamma - \pi i - 2\ln h)\sin\theta}{\cos\theta + (2\gamma + \pi i - 2\ln h)\sin\theta}\, \varphi_0(\tau - t),$$

где γ — постоянная Эйлера, при $\tau < 0$.

Теорема 1. *Асимптотика решения задачи Коши (1_θ), (2) с точностью до $O(\mu)$ в отвечающей оператору L_θ энергетической норме дается формулой*

$$\eta(x,\mu) = 2\,\mathrm{Re}\int_\mu^\infty \bigl(\widetilde{V}(\rho) + \mu\widetilde{V}_1(\rho)\bigr)\Bigl(e^{-it\rho/\mu}[K_\Lambda^{\rho/\mu}\varphi_t](x) +$$

$$+ e^{it\rho/\mu}[K_\Lambda^{\rho/\mu}\varphi_{-t}](x)\Big)\, d\rho,$$

где $V_1(y) = c'(1)V'(y)y^2/2$, *а* $\widetilde{V}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho y}V(y)\,dy$ *— преобразование Фурье функции* $V(y)$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00726-а и 11-01-00973-а. Автор признателен С. Ю. Доброхотову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Пелиновский Е. Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.
[2] *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B.* // Russ. J. Math. Phys. 2010. V. 17. № 4. P. 428–444.
[3] *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.

Краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа

Нахушев А. М.
Нахушева В. А. (Учреждение Российской академии наук Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия)

Доклад состоит из следующих разделов:

1°. Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности.
2°. Внутреннекраевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с характеристической и нехарактеристической нагрузками и их связь с задачей Трикоми.
3°. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности.
4°. Краевые задачи для уравнения теплопроводности смешанного типа.
5°. Задача граничного управления для уравнения с вырождением порядка по временной переменной.
6°. Краевые задачи с нелокальным условием Франкля.

Акцент делается на основные результаты трех последних разделов, где исследуются краевые задачи для следующих нагруженных уравнений второго порядка смешанного типа:

$$D_{0y}^{\alpha H(x)+2H(-x)}u(x+i\eta) = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2}, \quad y>0, \tag{1}$$

$$D_{0y}^{2-H(y)}u(x+i\eta) = [H(y)+c^2H(-y)]\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где D_{0y}^{μ} – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\mu \in \in \{0,1,\alpha\}$ с началом в точке 0 [**1**]; $0<\alpha=\mathrm{const}\le 1$; $H(t)$ – функция Хевисайда; $x,y\in\mathbb{R}$, $z=x+iy$ — комплексная переменная; $u(z)=u(x,y)$.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup A_0B_0$, где

$$\Omega^+ = \{z \,:\, 0<x<r,\ 0<y<T\};$$

$$\Omega^- = \{z \,:\, -x < y < x + T,\ -T/2 < x < 0\};$$
$$A_0B_0 = \{(0, y) \,:\, 0 < y < T\}.$$

В разделе 5 задачи граничного управления для уравнения (2) ставятся в смешанной прямоугольной области $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \{iy : 0 < y < T\}$, где

$$\Omega^+ = \{z \,:\, 0 < x < r;\ 0 < y < T\},$$
$$\Omega^- = \{z \,:\, l < x < 0;\ 0 < y < T\},$$

а в разделе 6 в случае задачи Франкля для уравнения (2) — в области, ограниченной отрезками

$$B_0B_0' = \{iy \,:\, -T \leq y \leq T = \text{const} > 0\},$$
$$B_0'B_p' = \{z \,:\, y = -T;\ 0 \leq x \leq p = cT\},$$
$$B_p'A_p = \{z \,:\, x = p;\ -T \leq y \leq 0\},$$
$$A_pA_r = \{z = x \,:\, p \leq x \leq r\},$$
$$A_rB_r = \{z : x = r,\ 0 \leq y \leq T\},$$
$$B_rB_0 = \{z : y = T,\ 0 \leq x \leq r\}.$$

Проблеме оптимизации граничного управления колебаниями струны посвящен цикл фундаментальных исследований В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [**2**]. Задача Франкля относится к классу краевых задач со смещением на части границы [**3**]. Основные результаты раздела 4 опубликованы в работе [**4**].

Список литературы

[1] *Нахушева В. А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.

[2] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН. 2005. Т. 6, вып. 6 (366). С. 89–114.

[3] *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[4] *Нахушева В. А.* Краевые задачи для уравнения теплопроводности смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12, № 2. С. 39-45.

Разрешимость в пространствах Гельдера краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами аргументов в младших членах

Неверова Д. А. (Российский университет дружбы народов, Россия)

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞. Пусть также оператор $R_Q = P_Q R I_Q$, где I_Q предсталяет собой оператор продолжения нулем на $\mathbb{R}^n \setminus Q$, P_Q — оператор сужения на Q, оператор R определен по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h).$$

Здесь $\mathcal{M}$ — множество, состоящее из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, a_h — вещественные числа.

Рассматривается следующая задача:

$$-\Delta u(x) + R_Q u(x) = f(x) \qquad (x \in Q) \tag{1}$$

с однородным условием Дирихле

$$u\big|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

где $f(x) \in C^{\sigma}(\overline{Q})$, $(0 < \sigma < 1)$.

При предположении положительной определенности оператора $R_Q + R_Q^*$ доказано существование и единственность классического решения $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q})$ задачи (1), (2).

Список литературы

[1] *Skubachevskii A.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhauser. — 1997.

Пограничные и внутренние слои в нелокальной задаче активатор-ингибитор

Нефедов Н. Н. (Московский государственный университет, Россия)
Никитин А. Г. (Московский государственный университет, Россия)

Рассматривается нелинейная интегропараболическая задача, возникающая при моделировании динамики процессов в системах активатор-ингибитор. На основании развитой ранее в работах авторов теории асимптотического исследования задач такого класса установлено существование и получена асимптотика решений с пограничными и внутренними слоями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00319.

Список литературы

[1] *Nefedov N. N., Nikitin A. G., Recke L.* Moving Internal Layers in the Singular Perturbed Integro-Parabolic Reaction-Diffusion-Advection Equations // Preprint Nr. 2007-22. Humboldt University of Berlin, Institute of Mathematic, pp. 1–17.

Об асимптотике решений краевых задач для уравнения $\Delta u - ku = f$ в слое

Никишкин В. А. (Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, Россия)

Рассматриваются краевые задачи для уравнения $\Delta u - ku = f$ в слое, получен первый член асимптотики решений на бесконечности.

Введем обозначения:

$$\Pi = \{(x', x_n) \in R^n \mid x' \in R^{n-1},\ x_n \in (a, b)\}, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad n \geq 3,$$

$$x' = (x_1, x_2, ...x_{n-1}), \quad x = (x', x_n), \quad r' = \left|x'\right|, \quad r = |x|,$$

$$\Gamma^+ = \{x \in R^n | x' \in R^{n-1}, x_n = a)\}, \qquad \Gamma^- = \{x \in R^n | x' \in R^{n-1}, x_n = b)\}.$$

В настоящей работе рассматривается задача

$$\left.\begin{aligned} \Delta u - ku = f \quad & x \in \Pi, \\ -a_+ \frac{\partial u}{\partial x_n} + u = 0 \quad & x \in \Gamma^+, \\ a_- \frac{\partial u}{\partial x_n} + u = 0 \quad & x \in \Gamma^-, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где постоянные $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$.

Пусть λ_1 — первое положительное собственное значение задачи

$$\begin{aligned} y''(t) + \lambda^2 y(t) = 0 \quad & t \in (a,b), \\ -a_+ y'(a) + y(a) = 0, & \\ a_- y'(b) + y(b) = 0. & \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1) *постоянные* $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$, *а функция* $f(x) \in C^\infty(\bar{\Pi})$ *и финитна. Постоянная* k *удовлетворяет условию* $k + \lambda_1^2 > 0$, *где* λ_1 *— первое положительное собственное число задачи* (2), *а* φ_1 *— соответствующая собственная функция. Тогда для решения* $u(x)$ *задачи* (1) *справедливо асимптотическое представление*

$$u(x) = \frac{e^{-\sqrt{k+\lambda_1^2}r'}}{(r')^{\frac{n-2}{2}}} \Phi(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \varphi_1(x_n) + O\left(\frac{e^{-\sqrt{k+\lambda_1^2}r'}}{(r')^{\frac{n}{2}}} \right),$$

где $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ *— дифференцируемая функция.*

Эта работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки, грант АВП РНП 2.1.1/7161.

Список литературы

[1] *Никишкин В. А.* Об оценках решений эллиптических краевых задач в слое// Дифференциальные уравнения. 2011, в печати.

[2] *Никишкин В. А.* Об оценках решений эллиптических краевых задач в слое// Функциональный анализ. 2011, в печати.

Разделение переменных и топология слоения Лиувилля геодезического потока на эллипсоиде общего положения

Николаенко С. С. (Московский государственный университет, Россия)

Как известно, геодезический поток на эллипсоиде является интегрируемой гамильтоновой системой. В работе **[1]** Т. З. Нгуен рассматривает слоение Лиувилля геодезического потока на n-мерном эллипсоиде S^n общего положения. Основной идеей является введение на эллипсоиде эллиптических координат и накрытие его тором T^n, что в конечном счёте приводит к разделению переменных.

Пусть на n-мерном эллипсоиде $\{\sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1\}$ с $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ введены эллиптические координаты $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (λ_i определяется как решение уравнения $\sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1$ на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$). В результате разветвлённого накрытия $T^n = T_1^1 \times \dots \times T_n^1 \to S^n$ координата λ_i становится функцией Морса на T_i^1, а поднятый геодезический поток на T^*K^n (где $K^n = T^n \backslash \{\text{образ точек ветвления}\}$) интегрируется с помощью интегралов $F_1, \dots, F_n$, которые находятся из системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_i^j \cdot F_j = (-1)^{n-i} p_i^2, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где p_i, $i = \overline{1,n}$, — координаты в слое кокасательного расслоения T^*K^n. Это так называемый штеккелев вид интегрируемой системы.

Система (1) доставляет искомое разделение переменных, т. к. каждое уравнение зависит только от переменных на $T^*T_i^1$. Отсюда достаточно просто извлекаются некоторые следствия, касающиеся топологии лиувиллева слоения. В частности, как показал Т. З. Нгуен, все особенности первого порядка геодезического потока на n-мерном эллипсоиде общего положения имеют тип атомов A, C_2 при $n = 2$; A, B, C_2 при $n = 3$; A, A^*, B, C_2 при $n \geq 4$ (см. [**2**]).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Число регулярных торов Лиувилля в прообразе отображения момента регулярного значения равно* 2^{1+N}. *Здесь* N *— число индексов* i *с условием* $I_i > a_i$, $I_{i+1} < a_{i+1}$, *где* $I_1, \ldots, I_{n-1}$ *— последовательные вещественные корни многочлена*

$$F_1 + F_2\lambda + \ldots + F_{n-1}\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00748), программы «Ведущие научные школы РФ» (грант НШ-3224.2010.1), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП-2.1.1.3704), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты 02.740.11.5213 и 14.740.11.0794).

Список литературы

[1] *Нгуен Т. З.* Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере // Труды МИРАН. 1994. Т. 205. С. 73–91.

[2] *Нгуен Т. З., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трёхмерной сфере // УМН. 1990. Т. 45. № 6. С. 91–111.

Сходимость некоторых крыловских методов с предобуславливателем ILU на матрицах с заданным спектром

Никольский И. М. (Московский государственный университет, Россия)

При численном интегрировании уравнений в частных производных возникает необходимость решения СЛАУ вида

$$Ax = b \tag{1}$$

с квадратной невырожденной матрицей $A \in R^{N\times N}$. Матрица A обычно имеет некоторую структуру и является *разреженной*, т. е. количество ненулевых элементов в ней много меньше N^2. Размеры матрицы могут быть очень велики. Для решения таких систем обычно применяют итерационные методы. На СЛАУ с большими разреженными матрицами они оказываются эффективнее прямых.

Скорость сходимости метода зачастую оказывается недостаточной. Эта проблема решается с помощью *предобуславливателей*. Вместо исходной системы (1) решают СЛАУ

$$MAx = Mb. \tag{2}$$

Итерации будут сходиться быстрее, если матрица $M \in R^{N\times N}$ (предобуславливатель) в некотором смысле близка к A^{-1}.

В предлагаемой работе проведено исследование зависимости сходимости некоторых методов крыловского типа (а именно BiCGStab, BiCG, QMR, CGS и GMRes, см. [**1**]) в сочетании с предобуславливателем ILU от распределения собственных значений матрицы СЛАУ. Для тестов использовались матрицы, сгенерированные с помощью специального авторского алгоритма и имевшие заранее заданный спектр (вещественный либо комплексный).

Ранее (см. [**2**]) было показано, что метод BiCGStab дает хорошие результаты при численном решении некоторых дифференциальных уравнений эллиптического типа на плоскости. Результаты настоящей работы показывают, что при некоторых распределениях собственных значений метод BiCGStab может значительно проигрывать методам BiCG, QMR, CGS и GMRes.

Список литературы

[1] *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems// SIAM, 2003.

[2] *Никольский И. М.* Сравнительный анализ эффективности некоторых предобуславливателей// Тезисы конференции ≪Ломоносов-2010≫. Т. 4. С. 147–148.

О релейности оптимальных по быстродействию управлений для некоторых двумерных и трехмерных нелинейных управляемых объектов

Никольский М. С. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Россия)

Свойство релейности оптимальных по быстродействию управлений представляет большой интерес для приложений в силу простоты их технической реализации. Более того, это свойство существенно упрощает практическое нахождение соответствующих оптимальных управлений. Важные критерии релейности оптимальных по быстродействию управлений для линейных управляемых систем имеются в гл. 3 [**1**]. В работе [**2**] для линейного случая были получены оценки сверху для числа точек переключения релейных оптимальных по быстродействию управлений. Для нелинейных управляемых объектов получение общих результатов о релейности оптимальных по быстродействию управлений наталкивается на большие трудности и требует развития нового аппарата (см., например, [**3**]). Доклад посвящен изложению недавних результатов автора по релейности оптимальных по быстродействию управлений для нелинейных двумерных и трехмерных управляемых систем, частично опубликованных в [**4, 5**] и использующих традиционные методы теории оптимального управления.

В работе также получены эффективные оценки сверху для числа точек переключения релейных оптимальных по быстродействию управлений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00633, 09-01-00378).

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976.

[2] *Никольский М .С.* О линейных нестационарных управляемых процессах // Труды МИАН. 2008. Т. 262. С. 196–201.

[3] *Vakhrameev S. A.* Geometrical and topological methods in control theory // J. on Mathematical Sciences. Contemporary Mathematics and its Applications.Thematic Surveys. 1995. V. 76, № 5.
[4] *Никольский М. С.* О задаче быстродействия для двумерных управляемых систем // Диф. уравнения. 2010. № 11. С. 1631–1638.
[5] *Никольский М. С.* О релейности оптимального по быстродействию управления для некоторых билинейных управляемых объектов // Проблемы динамического управления. Сборник трудов. Вып. 5. Факультет ВМК МГУ. М.: Макс-Пресс. 2010. С. 181–191.

Сложность задачи оптимального быстродействия для маятника

Овсеевич А. И. (ИПМех РАН, Россия)

Физический маятник, управляемый приложенным к шарниру моментом, описывается уравнением $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon u$, $|u| \leq 1$, где x — угол отклонения маятника от вертикали, а ε — максимальная амплитуда управляющего момента. Рассматривается задача быстрейшего приведения маятника в состояние устойчивого равновесия. Оптимальное управление релейно, т. е. принимает значения $u = \pm 1$. В аналогичной задаче для линейного маятника на каждой оптимальной траектории имеется конечное число переключений управления, если же рассматривать все оптимальные траектории с произвольным начальным состоянием, то соответствующее количество переключений может быть сколь угодно велико. Мы показываем, что для нелинейного маятника имеется общая верхняя граница для количества переключений на всех оптимальных траекториях. Найдены точные по порядку величины оценки сверху и снизу для этого числа в ситуации, когда возможности управления малы.

Теорема 1. *Пусть $N_\varepsilon(x, \dot{x})$ — количество переключений управления на оптимальной траектории, соединяющей $(x, \dot{x})$ с $(0, 0)$. Тогда величина $N_\varepsilon = \sup N_\varepsilon(x, \dot{x})$, где $\sup$ берется по всему фазовому пространству $S^1 \times \mathbf{R}$, конечна.*

Теорема 2. *Имеются положительные константы c_1, c_2, такие что*

$$\frac{c_1}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon \leq \frac{c_2}{\varepsilon}$$

при достаточно малом положительном ε.

Мы предполагаем, что выполнены не только неравенства, но и асимптотическое равенство:

Гипотеза 1. При $\varepsilon \to 0$ имеется асимптотическая эквивалентность

$$N_\varepsilon \sim \frac{D}{\varepsilon}, \text{ где } D = \frac{1}{2}\,\mathrm{Si}(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{2x}\,dx = 0.925968526\ldots \qquad (1)$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-08-00435.

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
[2] *Решмин С. А.*// Прикладная математика и механика, 2009, т. 73, вып. 4, с. 562–572.
[3] *Белецкий В. В.*// Космич. исслед. 1971. т. 9, вып. 3. с. 366–375.

[4] *Garcia Almuzara J. L., Flügge-Lots I.* Minimum time control of a nonlinear system // J. Differential Equations. 1968. Vol. 4, no. 1, pp. 12–39.
[5] *Ли Э. Б., Маркус Л.* О необходимых и достаточных условиях оптимальности по быстродействию для нелинейных систем второго порядка // Тр. II Междунар. конгр. ИФАК. Базель, 1963, М.: Наука, 1965, С. 155—166.
[6] *Coddington E., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, New York, 1955 (*русск.:* Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Издатинлит, 1958).

Энтропия, софические системы и хаусдорфова размерность

Оселедец В. И. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, и АБИК, Россия)

Пусть D — конечное множество неотрицательных целых чисел. Пусть

$$\zeta = \zeta_1\rho + \zeta_2\rho^2 + ...,$$

где $\zeta_1, \zeta_2, ...$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в D, и $P(\zeta_i = d) = \frac{1}{|D|}$, $(0 < \rho < 1)$. Мы будем называть распределение случайной величины ζ мерой Эрдеша. Обозначим через Λ носитель меры Эрдеша. Задача о вычислении хаусдорфовой размерности множества Λ рассматривалась в работах **[2]**, **[3]**, **[4]**.

Пусть $\beta = \frac{1}{\rho}$ — число Пизо. Мы доказываем, следуя **[1]**, что хаусдорфова размерность множества Λ равна хаусдорфовой размерности некоторого символического софического метрического компакта. Эта последняя размерность есть отношение топологической энтропии и $\ln(\beta)$. Отсюда мы получаем для нее формулу $\frac{\ln(\lambda)}{\ln(\beta)}$, где λ — спектральный радиус 0—1 матрицы, связанной с софическим компактом. Эта формула аналогична формуле Лалли **[4]**.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta = 1 + \sqrt{3}$, $D = \{0, 1, 3\}$. Согласно **[4]**, это наиболее трудный случай, рассмотренный в **[3]**. В **[4]** было показано, что хаусдорфова размерность множества $\Lambda \approx 0.971847$ и меньше этого числа. Мы доказали, что хаусдорфова размерность равна $0.97181524363298\ldots$

Для „свехтрудного“ случая, указанного Лалли в **[4]**, для которого формула Лалли бесполезна, мы вычисляем хаусдорфову размерность множества Λ с большим числом знаков.

Это совместная работа с З. И. Бежаевой.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00982.

Список литературы

[1] *Бежаева З. И., Оселедец В. И.* Меры Эрдеша, софические меры и марковские цепи // Зап. Научн. Сем. ПОМИ, 2005. Т. 326. С. 28–47.
[2] *Pollicott M., Simon K.* Hausdorff dimension λ-expansions with deleted digits // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. № 4. P. 967–983.
[3] *Kean M., Smorodinsky M., Solomyak B.* On the morhilogy of γ-expansions with deleted digits // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. № 4. P. 955–966.
[4] *Lalley Steven. P.* β-expansions with deleted digits for Pisot numbers β // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 347. № 4. P. 4355–4365.

О некоторых тождествах для рациональных функций и формулах следов

Осипов А. С. (НИИ Системных Исследований РАН)

В 1857 году Дж. Булем, для рациональных функций вида

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{\lambda_k - \lambda} - C,$$

было получено следующее тождество:

$$C \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k - \mu_k) = \sum_{k=1}^{N} A_k, \tag{1}$$

где μ_k — нули $F(\lambda)$ [**1**]. Как было отмечено в [**2**], формула (1) является первой в бесконечной последовательности тождеств, связывающих нули и полюса $F(\lambda)$. В работах [**2**]–[**3**] рассматривалась связь между аналогом формулы (1) для функций класса Неванлинны и бесконечномерными эллиптическими координатами. В свою очередь, эти координаты тесно связаны со спектрами разностных операторов, порождаемых бесконечными матрицами Якоби. Используя эти наблюдения, устанавливаются новые формулы следов данных операторов. Кроме того, рассматривается связь тождества Буля со следами дифференциальных операторов [**4**].

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00790.

Список литературы

[1] *Boole G.* On the comparison of transcendents, with certain applications to the theory of definite Integrals // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1857. V. 147. P. 745–803.

[2] *Vaninsky, K. L.* Equations of Camassa–Holm type and Jacobi ellipsoidal coordinates // Commun. Pure Appl. Math. 2005. V. 58. № 9. P. 1149–1187.

[3] *Osipov A.* On some properties of Infinite-dimensional elliptic coordinates // Operator theory: Advances and Applications. 2009. V. 186. P. 339–346.

[4] *Osipov A.* On a G. Boole's identity for rational functions and some trace formulas // Complex Anal. Oper. Theory, to appear (Published online: 13 July 2010).

Алгебра относительных интегральных операторов на многообразии с выделенным подмногообразием

Павленко В. А. (Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Россия)

Основной целью работы является построение алгебры относительных интегральных операторов на многообразии с выделенным подмногообразием.

Пусть $\mathcal{X}$ — компактное многообразие (без края) размерности N, в котором выделено гладкое подмногообразие $\mathcal{Y}$ коразмерности 1. Назовем конормальной функцией на $\mathcal{X}$ любую гладкую функцию u на $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, допускающую асимптотическое разложение определенного вида вблизи $\mathcal{Y}$. Точнее, в любой локальной системе координат с координатами $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$, определенной в окрестности точки $p \in \mathcal{Y}$ и такой, что $\mathcal{Y}$ задается уравнением $x = 0$, справедливо разложение:

$$u(x,y) \sim \sum_{(z,k)\in E} a_{z,k}(y) x^z \ln^k |x| \quad x \to 0,$$

где $a_{z,k}(y)$ — гладкие функции на $\mathcal{Y}$, E — некоторое подмножество в $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (индексное множество функции u). Можно также ввести понятие конормальной функции в случае, когда $\mathcal{Y}$ является конечным объединением гладких подмногообразий, пересекающихся трансверсально.

Пусть X — гладкое компактное многообразие (без края). Предположим, что X_0 — гладкое подмногообразие X коразмерности 1. Относительным интегральным оператором на X называется оператор $A : C_0^\infty(X \setminus X_0) \to C^\infty(X \setminus X_0)$:

$$Af(x) = \int\limits_Y K_A(x,y) f(y)\, d\mu(y), \quad f \in C_0^\infty(X \setminus X_0),$$

ядро $K_A \in C^\infty((X \times X) \setminus (\{X_0 \times X\} \cup \{X \times X_0\}))$ которого является конормальной функцией на $X \times X$ относительно выделенного подмногообразия $\{X_0 \times X\} \cup \{X \times X_0\}$.

Любой относительный интегральный оператор переводит конормальную функцию (при некотором условии на ее индексное семейство) в конормальную. При определенных условиях на индексные семейства ядер относительных интегральных операторов A и B их композиция $A \circ B$ является относительным интегральным оператором.

Относительный интегральный оператор A на X, вообще говоря, не является ядерным оператором, но для него можно определить некоторую регуляризацию следа r-Tr(A), относительный след оператора A. Определено семейство $\{I_\nu(A,\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ интегральных операторов с гладким ядром в пространстве $C^\infty(X_0)$, называемое индициальным семейством оператора A. Доказана формула для относительного следа коммутатора относительных интегральных операторов A и B:

$$\text{r-Tr}([A,B]) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I_\nu(A,\lambda) \circ I_\nu(B,\lambda))\, d\lambda.$$

Данные результаты применяются для исследования некоторых геометрических и аналитических задач на многообразиях со слоением.

Автор выражает благодарность Ю. А. Кордюкову за постановку задачи и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00389-а.

Оптимальное управление дискретно-непрерывной динамической системой

Павленок Н. С. (Белорусский государственный университет, Республика Беларусь)

Рассматривается задача оптимального управления системой, описываемой непрерывными и дискретными уравнениями **[1]**:

$$J(u,v) = c_x' x(t^*) + c_y' y(t^*) \to \max; \quad (1)$$

$$\dot{x} = A_x(t)x + A_{xy}(t)y + B_x(t)u; \quad y = y(t) = y(s), \quad t \in [s, s+h_v[; \quad (2)$$

$$y(s+h_v) = A_y(s)y(s) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s);$$

$$x(t_*) = x_0, \quad y(t_*) = y_0; \qquad g_* \le H^x x(t^*) + H^y y(t^*) \le g^*; \quad (3)$$

$$u_* \le u(t) \le u^*, \quad t \in T = [t_*, t^*]; \quad v_* \le v(s) \le v^*, \quad s \in T_v, \quad (4)$$

где $x = x(t) \in R^{n_x}$ — состояние непрерывной части системы в момент времени t, $y(s) \in R^{n_y}$ — состояние дискретной части в момент s; $u = u(t)$ — значение управляющего воздействия непрерывной части системы, $v(s)$ — дискретной части; $h_u = h_v/M$, $h_v = (t^* - t_*)/N$, M, N — натуральные числа; $c_x \in R^{n_x}$, $c_y \in R^{n_y}$; $H^x \in R^{m\times n_x}$, $H^y \in R^{m\times n_y}$; $g_*, g^* \in R^m$; $x_0 \in R^{n_x}$, $y_0 \in R^{n_y}$; $u_*, u^* \in R^{r_u}$, $v_*, v^* \in R^{r_v}$ — заданные векторы и матрицы; $T_u = \{t_*, t_* + h_u, ..., t^* - h_u\}$, $T_v = \{t_*, t_* + h_v, ..., t^* - h_v\}$; $A_x(t) \in R^{n_x\times n_x}$, $A_{xy}(t) \in R^{n_x\times n_y}$, $B_x(t) \in R^{n_x\times r_u}$, $t \in T$ — кусочно-непрерывные матричные функции; $A_{yx}(s) \in R^{n_y\times n_x}$, $A_y(s) \in R^{n_y\times n_y}$, $B_y(s) \in R^{n_y\times r_v}$, $s \in T_v$ — матрицы. Функции $u(\cdot) = (u(t) \in R^{r_u}, t \in T)$, $v(\cdot) = (v(s) \in R^{r_v}, s \in T_v)$ называются дискретными с периодами квантования h_u, h_v, если $u(t) = u(s)$, $t \in [s, s+h_u[$, $s \in T_u$, $v(\cdot)$ определена в моменты $s \in T_v$.

Управляющие воздействия $u(\cdot), v(\cdot)$ называются программами, если на них выполняются ограничения (4), и соответствующая им траектория системы (2) удовлетворяет условиям (3). Оптимальные программы, в отличие от позиционного решения, формируются до начала процесса управления по априорной информации и не могут учитывать дополнительную информацию, доступную в процессе управления.

Цель данного доклада — описать метод синтеза (построения позиционного решения) оптимальных дискретно-непрерывных систем управления, реализующих современный принцип управления по замкнутому контуру, называемый принципом управления в реальном времени **[2]**. При его использовании оптимальные обратные связи не синтезируются. Вместо этого объект управления замыкается с помощью вычислительных, измерительных и исполнительных устройств , которые по ходу управления создают в режиме реального времени текущие значения оптимальных обратных связей, т. е. формируют текущие значения реализаций оптимальной обратной связи до поступления информации о последующих состояниях объекта.

Результаты иллюстрируются на примере оптимального управления гибридной колебательной системой четвертого порядка.

Список литературы

[1] *Borelli F.* Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 290. Springer, 2003. 293 p.
[2] *Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 838–859.

Потеря симметрии и податтракторы кинетических уравнений

Палин В. В. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)
Радкевич Е. В. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Для трех систем типа Бродуэлла (дискретных уравнений Больцмана) **[3]** получены условия существования в окрестности равновесных состояний податтракторов — притягивающих инвариантных многообразий.

Список литературы

[1] *Аветисов В. А., Гольданский В. И.* Физические аспекты нарушения зеркальной симметрии биоорганического мира // УФН. Т. 166. № 8, С. 873–891.
[2] *Hochberg D., Lesmes F., Mor F., Perez-Mercader J.* Large scale emergent properties of an autocatalytic reaction-diffusion model subject to noise (to appear).
[3] *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // УМН. 1971. Т. XXVI. № 3 (159), С. 3–51.
[4] *Palin V. V., Radkevich E. V.* Mathematical aspects of the Maxwell problem // Applicable Analysis. 2009. V. 88. № 8. P. 1233–1264.

Распространение теоремы Н. Н. Красовского о слабой неустойчивости для семейства дифференциальных включений

Панасенко Е. А. (Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия)

Здесь сформулированы условия неустойчивости динамической системы, распространяющие теорему Н. Н. Красовского (см. **[1]**) на дифференциальные включения. В своих исследованиях я опираюсь на исследования работ **[2, 3]**.

Пусть (Σ, h^t) — топологическая динамическая система с компактным фазовым пространством Σ. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{1}$$

зависящее от параметра $\sigma \in \Sigma$. Здесь $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непустых, замкнутых, выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова Dist **[2]**. Пусть, кроме того, задана функция $M : \Sigma \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, где $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа dist. Для каждого положительного r обозначим $O_r \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\big\}$, $M^r(\sigma) \doteq M(\sigma) + O_r$, $N_+^r(\sigma) \doteq M^r(\sigma) \backslash M(\sigma)$.

Определение 1. Множество $M(\sigma)$ называется *слабо неустойчивым* относительно включения (1), если существует такое число $\varepsilon \in (0, r)$, что для каждого положительного δ найдутся точка $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times N_+^{\delta}(\sigma)$, момент времени $t^* > 0$ и решение $t \to x(t; \sigma, x_0)$ включения (1) такие, что $x(t^*; \sigma, x_0) \notin M^{\varepsilon}(h^{t^*}\sigma)$.

Пусть $r > 0$, а функция $V : \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$ локально липшицева и равна нулю при $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$. Далее, $V^o(\sigma, x; q)$ — обобщенная производная Кларка **[4]** функции V по направлению $q \in \mathbb{R}^n$ в точке (σ, x) и $L_\alpha(V) \doteq \{(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma) : V(\sigma, x) = \alpha\}$ — поверхность уровня функции V, где α неотрицательно и близко к нулю.

Теорема 1. *Пусть функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху (в метрике Хаусдорфа–Бебутова) а функция $M : \Sigma \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна (в метрике Хаусдорфа), и найдется такое $r > 0$, что существует локально липшицева по x функция $V : \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$, не являющаяся в произвольной окрестности множества $M(\sigma)$ знакоотрицательной. Если $V^o(\sigma, x; q) \geqslant 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$, $q \in F(\sigma, x)$, и для каждого $\alpha \in (0, r)$ множество $L_\alpha(V)$ не содержит положительных полутраекторий, то множество $M(\sigma)$ неустойчиво относительно включения* (1).

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-97503; АВЦП «Развитие научного потенциала ВШ», проект 2.1.1/9359; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н.* Об условиях обращения теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1955. Т. 101. № 1.

[2] *Панасенко Е. А., Тонков Е. Л.* Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Ин-та Матем. и Механ. УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.

[3] *Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л.* Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Ин-та Матем. и Механ. УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.

[4] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

О почти периодических решениях уравнений с частными производными первого и второго порядка

Пашева Е. А. (Нижегородский государственный университет, Россия)

В некоторых работах исследуется задача о существовании почти периодических (п. п.) решений различных видов дифференциальных уравнений с частными производными (ДУсЧП) (имеется в виду почти периодичность *по нескольким переменным*), например, **[1]**, **[2]**, **[3]** и т. д. Важным является вопрос об условиях существования или отсутствия таких решений (а также оценке их числа) — в зависимости от класса гладкости, при этом имеются существенные отличия от случая периодических (по нескольким переменным) решений. При определенных условиях представляет интерес задача в классе аналитических п. п. решений.

Сначала рассматривается вопрос о существовании или отсутствии нетривиального п. п. решения класса $C^1(R^2)$ для уравнений первого порядка

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = \gamma(x, y)u, \tag{1}$$

где

1°. a, b, γ — п. п. по x, y, $a > m > 0$, $\gamma > 0$.

Нетрудно установить отсутствие нетривиальных периодических решений. Кроме того, если a, b, γ — функции более общего типа, то возможно существование нетривиального, даже аналитического, решения $u = \varphi(x, y)$ уравнения (1), которое имеет максимумы и минимумы только нулевые.

Теорема 1. *При условии 1 не существует нетривиальных знакопеременных п. п. решений уравнения* (1).

Этот факт следует из того, что из предположения существования знакопеременных п. п. решений появляются противоречивые условия в отношении поведения характеристик уравнения (1).

Для уравнения второго порядка специального вида можно получить результат о существовании более одного п. п. решения.

Теорема 2. *Пусть уравнение $\Delta u = |u| + p(x, y)$ имеет п. п. решение $u = \varphi(x, y)$, причем $|\varphi|$ и $\Delta\varphi$ представляются абсолютно сходящимися рядами Фурье и φ не является положительным, и $|\varphi(x, y)| \geq \Delta\varphi(x, y)$. Тогда уравнение $\Delta u = u + p(x, y)$, где $p(x, y) = -|\varphi(x, y)| + \Delta\varphi(x, y)$, имеет п. п. решение $\psi(x, y)$, которое будет неотрицательным, если оно принимает наименьшее значение, и тем самым $\psi(x, y)$ будет являться п. п. решением исходного уравнения.*

Замечание 1. Возможен случай, когда $\varphi(x, y)$ — знакопеременное, так что при условиях теоремы таковым будет одно из двух п. п. решений. В качестве примера можно взять $\varphi(x, y) = \sin(\omega_1 x + \omega_2 y) + \sin(\omega_2 x + \omega_1 y)$, где ω_1, ω_2 несоизмеримы, и $\omega_1^2 + \omega_2^2 < 1$.

Доклад основан на совместной работе с Е. А. Сидоровым.

Список литературы

[1] *Sibuya Y.* Almost periodic solutions of Poisson's equation // Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 28, No 1 (Apr., 1971), pp. 195–198.

[2] *Умбетжанов Д. У.* Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата, "Наука" КазССР, 1979.

[3] *Сидоров Е. А., Папшева Е. А.* О периодических и почти периодических решениях уравнений с частными производными // Тезисы докл. Междунар. конферен. по дифференц. уравн. и динамич. системам, Суздаль 2–7 июля 2010, стр. 171–172.

Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве

Парусникова А. В. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Рассмотрим пятое уравнения Пенлеве, которое имеет вид

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \quad (1)$$

где α, β, γ, δ — комплексные параметры, z — независимая, w — зависимая комплексные переменные. Уравнение (1) имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$.

В этой работе методами степенной геометрии **[1]**, **[2]** ищем все асимптотические разложения решений уравнения (1) при $z \to 0$ и при $z \to \infty$ вида

$$w = c_r(z)z^r + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s(z)z^s, \tag{2}$$

где $c_r(z), c_s(z), r, s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{K} \subset \{\ s \mid \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r\}$ для разложений при $z \to 0$ и $\mathbf{K} \subset \{\ s \mid \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} r\}$ для разложений при $z \to \infty$; множество $\mathbf{K}$ счетно.

Различаем 5 типов разложений (2):

1°. $c_r(z)$ и $c_s(z)$ — постоянные.
2°. $c_r(z)$ — постоянный коэффициент, $c_s(z)$ — многочлены от $\ln z$.
3°. $c_r(z)$ и $c_s(z)$ — ряды по убывающим степеням $\ln z$.
4°. $c_r(z)$ и $c_s(z)$ — ряды по степеням z^i, в c_r содержится счетное число слагаемых и показатели степеней z^i ограничены либо сверху, либо снизу.
5°. $c_r(z)$ — конечная сумма степеней z^i с комплексными коэффициентами и $c_s(z)$ — ряды по степеням z^i.

При $z \to 0$ получено 30 семейств разложений решений уравнения (1): 22 из них получены из опубликованных разложений решений шестого уравнения Пенлеве **[2]**, среди остальных 8 семейств одно было известно **[3]**, еще два могут быть получены из разложений решений третьего уравнения Пенлеве **[4]**. Новыми являются 3 семейства разложений типа 5 и 2 семейства разложений типа 3. При $z \to \infty$ найдено 10 разложений решений уравнения (1) в степенные ряды (разложения типа 1): 6 из них (по целым степеням z) были известны **[3]**, **[7]**, четыре (по полуцелым) — новые. Подробные выкладки и доказательства по этой работе см. в препринтах **[5]**, **[6]**.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00082 и 11-01-00023.

Список литературы

[1] *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. т. 59, № 3, С. 31–80.
[2] *Брюно А. Д., Горючкина И. В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. // Труды ММО. 2010. т. 71. С. 6–118.
[3] *Gromak V. I., Laine I., Shimomoura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plane // Walter de Gruyter. Berlin, New York, 2002. 303 p.
[4] *Брюно А. Д., Гриднев А. В.* Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт № 10. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. 2010.
[5] *Брюно А. Д., Парусникова А. В.* Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт № 39. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. 2010.
[6] *Брюно А. Д., Парусникова А. В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт № 72. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. 2010.
[7] *Брюно А. Д., Карулина Е. С.* Разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН 2004. Т. 395, № 4, с. 439–444.

Принцип компенсированной компактности и разрешимость обобщенных уравнений Навье–Стокса

Пастухова С. Е. (Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, Россия)

В недавних работах [**1**-**5**] были установлены варианты принципа компенсированной компактности, которые обобщают классическую *div-curl* лемму Тартара–Мюра в различных направлениях. В том числе, были доказаны гидромеханические варианты, обслуживающие стационарные и нестационарные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой неньютоновой жидкости. В этом случае тензор вязких напряжений $A = A(\cdot, D)$ есть нелинейная функция от тензора скоростей деформации D с показателем роста $p \neq 2$. Например, в модельной системе имеем $A = |D|^{p-2}D$, $p>\frac{2d}{d+2}$, (d — размерность пространства), и при $p = 2$ получаем классическое уравнение Навье–Стокса. Наиболее интересен случай псевдопластичных течений, когда $p < 2$. Показатель нелинейности p может быть переменным, и тогда система описывает так называемые электрореологические жидкости [**6**].

На основе принципа компенсированной компактности получены новые результаты о разрешимости обобщенных уравнений Навье–Стокса [**4**, **5**]. Как обычно, решение строится как предел решений регуляризованной задачи. Компенсированная компактность позволяет обосновать предельный переход по параметру регуляризации в самом сложном месте, когда устанавливается слабая сходимость потоков к потоку, $A_n \rightharpoonup A$. Здесь трудность заключается в том, что поток (или тензор вязких напряжений) $A_n = A_n(\cdot, D_n)$ для регуляризованной задачи является нелинейной функцией на слабо сходящейся последовательности $D_n \rightharpoonup D$, и проблему составляет идентификация предела последовательности A_n.

В размерности $d = 3$ начально-краевая задача в ограниченной области для модельной системы разрешима, если $p = p(x, t)$ — измеримая функция, такая что $\alpha \leq p(x, t) \leq \gamma$, а константы α и γ подчинены неравенству

$$\frac{9}{5} < \alpha \leq \gamma < \alpha_0,$$

где $\alpha_0=\frac{5}{3}\alpha$ при $\alpha<3$ и $\alpha_0=\infty$ при $\alpha\geq 3$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08-01-00616, 09-01-12157.

Список литературы

[1] *В. В. Жиков, С. Е. Пастухова*, О принципе компенсированной компактности// Докл. РАН. 2010, Т. 433, № 5, С. 590–595.

[2] *В. В. Жиков, С. Е. Пастухова*, Леммы о компенсированной компактности в эллиптических и параболических уравнениях// Труды мат. института им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 110–137.

[3] *В. В. Жиков*, Об одном подходе к разрешимости обобщенных уравнений Навье–Стокса// Функц. анализ и его приложения. 2009. Т. 43, № 3. С. 190–207.

[4] *С. Е. Пастухова*, Принцип компенсированной компактности и разрешимость обобщенных уравнений Навье–Стокса// Проблемы мат. анализа. 2011. Вып. 55. С. 107-137.

[5] *S. E. Pastukhova*, Zhikov's hydromechanical lemma on compensated compactness: its extension and application to generalised Ssationary Navier–Stokes equations// Elliptic Equations and Complex Variables. 2011. V. 56, № 4. P. 1–18.

[6] *M. Ruzicka*, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics. V. 1748, Berlin–New York: Springer-Verlag, 2000.

Порядковая сходимость Чезаровских средних в симметричных пространствах

Пашкова Ю. С. (Таврический национальный университет, Украина)
Рубштейн Б. А. (Университет Бен-Гуриона, Израиль)

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ — пространство с бесконечной σ-конечной неатомической мерой, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ — пространство всех μ-измеримых почти всюду конечных функций f на $\mathbf{\Omega}$, и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbf{\Omega}, \mu)$, $1 \le p \le +\infty$. В случае, когда $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ и $\mu = \mathbf{m}$ — мера Лебега на $[0, +\infty)$, будем писать: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Линейный оператор $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным сжатием или* $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$*-сжатием*, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$, так и в $\mathbf{L}_\infty$. Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех положительных абсолютных сжатий.

Для любых $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим последовательность чезаровских средних $A_{n,T} f = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k f$.

Банахово пространство $(\mathbf{E}, \| \cdot \|_{\mathbf{E}})$ измеримых функций из $\mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ называется симметричным (с. п.), если из $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $f^* \le g^*$ следует, что $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \le \|g\|_{\mathbf{E}}$ (f^* — невозрастающая перестановка функции $|f|$). Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{E}$ называется *порядково сходящейся* к $f \in \mathbf{E}$ ($f_n \overset{(o)}{\to} f$), если существуют такие $0 \le g_n \in \mathbf{E}$, что $|f_n - f| \le g_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

Если $(\mathbf{\Omega}, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то с. п. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ называется *стандартным.* Для с. п. $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ на произвольном пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ существует единственное стандартное с. п. $\mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ на $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ такое, что $f \in \mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ тогда и только тогда, когда $f^* \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Обозначим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{H}} = \mathbf{E}_{\mathbf{H}}(\mathbf{\Omega}, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu) : \ f^{**} \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})\},$$

где

$$f^{**}(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x f^*(s)\, ds, \quad f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu), \quad x \in (0, +\infty),$$

и положим $\|f\|_{\mathbf{E}_{\mathbf{H}}} = \|f^{**}\|_{\mathbf{E}}$. Пусть $\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon f^*(+\infty) := \lim\limits_{x \to +\infty} f^*(x) = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— с. п. Тогда для всех* $f \in \mathbf{E}_{\mathbf{H}} \cap \mathcal{R}_0$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *последовательность средних* $A_{n,T} f$ *порядково сходится в* $\mathbf{E}$.

Обратно, пусть $\mathbf{E}$ *— такое с. п., что* $\mathbf{E} \ne \mathbf{E}_{\mathbf{H}} \cap \mathcal{R}_0$. *Тогда существуют* $f \in \mathbf{E}$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *такие, что последовательность* $A_{n,T} f$ *не является порядково сходящейся в* $\mathbf{E}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— с. п. Следующие условия эквивалентны:*

1°. *Последовательность чезаровских средних* $A_{n,T} f$ (o)*-сходится в* $\mathbf{E}$ *для всех* $f \in \mathbf{E}$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$;

2°. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{H}}$ *и* $\mathbf{E} \subseteq \mathcal{R}_0$.

Асимптотика вблизи границ спектральных кластеров

Перескоков А. В. (Московский энергетический институт)

Рассматривается задача на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\big(-\hbar^2\big((\partial/\partial q_1)^2+(\partial/\partial q_2)^2\big)+q_1^2+q_2^2+\varepsilon V(q_1,q_2)\big)\psi = \lambda\psi, \qquad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (1)$$

где V — произвольный многочлен 4 степени, $\hbar$, ε — малые параметры, причем $\varepsilon \ll \hbar$.

Лучевой метод **[1]** и общая теория комплексного ростка Маслова **[2]** позволяют строить асимптотические решения, локализованные вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве. Однако указанные методы неприменимы в случае резонанса частот, который имеется в задаче (1). Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М. В. Карасева, начиная с **[3]**. Он основан на операторном усреднении возмущения, переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе.

Особый интерес представляют решения уравнений типа (1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного уравнения, где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются и интегральное представление решения над ними становиться невозможным. Подход к построению асимптотики около границ кластеров с помощью „деформированных“ когерентных состояний был намечен в **[4]**, но его обоснование пока не осуществлено.

В данной работе на примере задачи (1) предложен метод построения асимптотических решений вблизи верхней и нижней границ спектральных кластеров с помощью нового интегрального представления. После применения **[3, 4]** операторного усреднения и когерентного преобразования к задаче (1) на l-ом неприводимом представлении алгебры симметрий невозмущенного оператора мы приходим к задаче на собственные значения в пространстве $\mathcal{P}_\ell$ полиномов степени не выше $\ell \sim 1/\hbar$. Искомый полином удовлетворяет дифференциальному уравнению 2-ого порядка класса Фукса с 4-мя конечными особыми точками. Вначале изучается вспомогательная спектральная задача в классе голоморфных функций с равными нулю характеристическими показателями в конечных особых точках. Далее, асимптотика искомого полинома получается с помощью операции проектирования на подпространство $\mathcal{P}_\ell$, обобщающей интегральное представление Дирака.

Изучена также задача вычисления средних значений дифференциальных операторов на решениях (1) вблизи границ спектральных кластеров. Оказалось, что асимптотика средних в члене порядка $\hbar$ выглядит нетривиально.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00606) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-3439.2010.1).

Список литературы

[1] *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972.
[2] *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
[3] *Karasev M. V.* Birkhoff resonances and quantum ray method. In: Proc. Intern. Seminar ≪Days of Diffraction–2004≫, St. Petersburg, 2004, 114-126.
[4] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле// ТМФ. 1996. Т. 108. No. 3. с. 339–387.

О решениях краевых задач для вырожденных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Перестюк Н. А. (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина)

Король И. И. (Ужгородский национальный университет, Украина)

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной и импульсным воздействием

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a, b], \tag{1}$$

$$\Delta(Bx)|_{t=\tau_i} = S_i B(\tau_i)x(\tau_i) + s_i, \quad \det(\mathbb{E}_n + S_i) \neq 0. \tag{2}$$

где $\operatorname{rank} B(t) = n - r = \mathrm{const}\ \forall t \in [a, b]$, $r > 0$; вектор-функция $f(t)$ и $(n \times n)$-матрицы $A(t)$, $B(t)$ достаточно гладкие, $a \leq \tau_1 < \ldots < \tau_p < b$, $p < \infty$.

Под решением системы (1), (2) мы подразумеваем кусочно непрерывно дифференцируемую на $[a, b] \setminus \{\tau_i\}$, $i = \overline{1, p}$ с разрывами первого рода в точках $t = \tau_i$ функцию $x(t) \in C^1_{loc}([a, b], \mathbb{R}^n)$:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [a, \tau_1], \\ x_j(t), & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j = \overline{1, p-1}, \\ x_p(t), & t \in (\tau_p, b], \end{cases}$$

которая удовлетворяет системе (1) и импульсным условиям (2). Считаем функции $x_i(t)$ определенными и непрерывно дифференцируемыми на соответствующих замкнутых интервалах:

$$x_i(t) \in C^1[\tau_i, \tau_{i+1}], \quad x_i(\tau_i) = x_i(\tau_i + 0) = \lim_{t \to \tau_i + 0} x_i(t),$$

и что решение непрерывно слева, т. е

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i - 0} x_{i-1}(t).$$

Для вырожденных дифференциальных систем с импульсным воздействием (1), (2) построено общее решение, найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

Кроме того, как в некритическом, так и в критическом случаях найдены необходимые и достаточные условия существования и построены периодические решения системы (1), (2) и решения, удовлетворяющие линейным функциональным условиям общего вида

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

где l — линейный m-мерный вектор-функционал над пространством непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций: $\ell : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ — постоянный вектор.

Список литературы

[1] *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Singapore: World Scientific, 1995.
[2] *Самойленко А. М., Шкиль М. И., Яковец В. П.* Линейные системы дифференциальных уравнений с вырождениями. К.: Высшая школа, 2000.

Частотные методы в теории ограниченных решений нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка

Перов А. И.
Коструб И. Д. (Воронежский государственный университет, Россия)

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ рассматривается уравнение n-го порядка следующего вида: $A_0x^{(n)}+A_1x^{(n-1)}+...+A_nx = f(t,x,\dot{x},...,x^{(n-1)})$, коэффициенты которого — постоянные $d\times d$-матрицы. Предполагается, что матричный характеристический многочлен $L_n(\lambda) \equiv \lambda^nA_0 + \lambda^{n-1}A_1 + ... + A_n$ является нерезонансным, т. е. det $L_n^{-1}[(i\theta)] \neq 0$ при $-\infty < \theta < +\infty$. Частотные постоянные вводятся следующим образом: $\sigma_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} |(i\theta)^j L_n^{-1}[(i\theta)]|$, $j = 0,1,...,n-1$. Нелинейная функция

$$f(t,x_0,x_1,...,x_{n-1}) : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \ldots \times \mathbb{R}^d}_{n \text{ раз}} \to \mathbb{R}^d$$

предполагается непрерывной по t и удовлетворяющей условию Липшица

$$|f(t,x_0,x_1,...,x_{n-1}) - f(t,y_0,y_1,...,y_{n-1})| \leq \sum_{j=0}^{n-1} l_j|x_j - y_j|.$$

Непрерывная функция $f_0(t) \equiv f(t,0,0,...,0)$ предполагается ограниченной.

При выполнении частотного условия $q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^{n-1}\sigma_j l_j < 1$ доказаны четыре теоремы:

1°. существования и единственности ограниченного решения и оценки;
2°. сходимости метода последовательных приближений к ограниченному решению;
3°. если $f(t,x_0,x_1,...,x_{n-1})$ почти периодична по t, то ограниченное решение также является почти периодическим и его частоты включены в группу частот нелинейности;
4°. если матричный характеристический многочлен $L_n(\lambda)$ является гурвицевым, то ограниченное решение является асимптотически устойчивым в целом (признак конвергентности).

Один метод исследования краевых задач для не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений

Плужникова Е. А. (Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия)

В работе предлагается метод исследования краевых задач для не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений, использующий теорию накрывающих отображений. Метод позволяет получить условия существования решений и их оценки, доказать утверждения о непрерывной зависимости решений от краевых условий и параметров дифференциального уравнения. В основе метода лежит следующее утверждение о возмущениях накрывающих отображений, действующих в произведении метрических пространств.

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Обозначим через $B_X(u,r)$ замкнутый шар пространства X с центром в точке u радиуса r.

Определение 1. Пусть задано $\alpha>0$. Отображение $\Psi : X\to Y$ называют *α-накрывающим* (*накрывающим*), если для всех $r>0$, $u\in X$ имеет место включение $\Psi(B_X(u,r))\supseteq B_Y(\Psi(u),\alpha r)$.

Пусть заданы метрические пространства (X_i,ρ_{X_i}), (Y_i,ρ_{Y_i}), $i=\overline{1,n}$. Определим в пространствах $X=X_1\times X_2\times ...\times X_n$, $Y=Y_1\times Y_2\times ...\times Y_n$ метрики равенствами $\rho_X=|(\rho_{X_1},\rho_{X_2},...,\rho_{X_n})|$, $\rho_Y=|(\rho_{Y_1},\rho_{Y_2},...,\rho_{Y_n})|$. Пусть, далее, заданы отображения $F_i : X_i\times X\to Y_i$, $i=\overline{1,n}$. Определим отображение $\Phi : X\times X\to Y$, $\Phi(v,x)=\big(F_i(v_i,x)\big)_{i=\overline{1,n}}$.

Теорема 1. *Предположим, что пространства X_i, $i=\overline{1,n}$, являются полными. Пусть для каждого $i,j=\overline{1,n}$, существуют такие $\alpha_i>0$, $\beta_{ij}\geq 0$, что:*

1°. *отображение $F_i(\cdot,x_1,x_2,...,x_n) : X_i\to Y_i$ является замкнутым и α_i-накрывающим для всех $x\in X$;*
2°. *отображение $F_i(v_i,x_1,...,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},...,x_n) : X_j\to Y_i$ является β_{ij}-липшицевым при любых $v_i\in X_i$, $x_1\in X_1$, ..., $x_{j-1}\in X_{j-1}$, $x_{j+1}\in X_{j+1}$, ..., $x_n\in X_n$.*

Тогда, если для спектрального радиуса ϱ матрицы $(\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}$ выполнено $\varrho<1$, то отображение $\Phi : X\times X\to Y$ будет накрывающим.

Пусть заданы $l,m\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$, а также измеримая по первому и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов функция $f : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Применение теоремы 1 к краевой задаче

$$f(t,x(t),\dot{x}(t))=0,\quad t\in[a,b],\quad lx(a)+mx(b)=q,$$

позволяет сформулировать следующий признак ее разрешимости:

1°. отображение $f(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является α-накрывающим при любом $x\in\mathbb{R}^n$;
2°. отображение $f(t,\cdot,y) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является β-липшицевым при любых $y\in\mathbb{R}^n$;
3°. имеет место неравенство $\alpha|l+m|-\beta(b-a)(|l+m|+|m|)>0$.

Доклад основан на совместной работе с Е. С. Жуковским.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-97503; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», государственный контракт № 14.740.11.0349.

Существование решений в задаче оптимального управления для системы гиперболических законов сохранения

Погодаев Н. И. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия)

В докладе рассматривается управляемая система

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+, \\ b(u(t,0+)) = B(t, w(t)), & t \in [0,T], \\ \dot{w}(t) = F(t, u(t,0+), w(t))\alpha(t) + G(t, u(t,0+), w(t)), & t \in [0,T], \\ w(0) = w_0, \quad u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+, \\ \alpha(t) \in A, & t \in [0,T], \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-l}$, $B\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-l}$, $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^m)$, $G\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^p$ — выпуклое компактное множество. Управляющим параметром здесь является α.

Определение 1. Решением системы (1) назовем тройку функций (u, w, α) такую, что

1°. $u \in C\big([0,T]; L^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)\big)$ и $TV(u(t)) < \infty$ для п. в. $t \in [0,T]$, $w\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ — абсолютно непрерывна, $\alpha\colon [0,T] \to A$ — измерима;

2°. $u(0,x) = u_0(x)$ для п. в. $x > 0$ и $\lim\limits_{x\to 0+} b(u(t,x)) = B(t, w(t))$ для п. в. $t \geq 0$;

3°. для всех $x > 0$ функция u является слабым энтропийным решением уравнения $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$;

4°. для п. в. $t \in [0,T]$

$$w(t) = w_0 + \int_0^t \left[F(\tau, u(\tau,0+), w(\tau))\alpha(\tau) + G(\tau, u(\tau,0+), w(\tau))\right] d\tau.$$

Множество всех решений системы (1) обозначим через $\mathcal{S}$.

Пусть $g\colon [0,T]\times L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p \to \overline{\mathbb{R}}$ — некоторая измеримая функция. При определенных, достаточно стандартных, предположениях относительно функций g, f, b, B, F и G мы доказываем существование решения в задаче оптимального управления

$$\int_0^T g(t, u(t), w(t), \alpha(t))\, dt \to \min, \quad (u, w, \alpha) \in \mathcal{S}.$$

Системы вида (1) моделируют процессы, в которых жидкость взаимодействует с твердым телом. Движение твердого тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как движение жидкости подчинено системе уравнений в частных производных. Конкретные примеры таких моделей можно найти в работе [**1**]. Подчеркнем, что данная постановка не исключает возможности возникновения ударных волн.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00132-а) и СО РАН (интеграционный проект СО РАН–УрО РАН № 85).

Список литературы

[1] *Borsche R., Colombo R. M., Garavello M.* On the coupling of systems of hyperbolic conservation laws with ordinary differential equations // Nonlinearity. 2010. V. 23. № 11. P. 2749–2770.

Об усреднении начально-краевой задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для нелинейного параболического уравнения

Подольский А. В. (Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, Россия)
Шапошникова Т. А. (Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

В работе изучено асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ решения u_ε краевой задачи для уравнения $\partial_t u_\varepsilon - \Delta_p u_\varepsilon \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon) = f$, где $p \in [2, n)$, в ε-периодически перфорированной области $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с нелинейным третьим краевым условием вида $\partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma} g(x)$ на границе полостей, где $\partial_{\nu_p} u_\varepsilon \equiv |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}(\nabla u_\varepsilon, \nu)$, ν — вектор внешней единичной нормали к границе полостей. Предполагается, что диаметр полостей равен $C_0\varepsilon^\alpha$, где $C_0 > 0$, $\alpha = n/(n-p)$; $\gamma = \alpha(p-1)$. При таких условиях построена усредненная задача, содержащая новое нелинейное слагаемое, и доказана теорема о сходимости при $\varepsilon \to 0$ решения исходной задачи к решению усредненной.

Положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon$, $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$. В цилиндре $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta_p u_\varepsilon = f(x,t), & (x,t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma} g(x), & (x,t) \in S_T^\varepsilon = S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x, 0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \in [2, n)$, $\partial_{\nu_p} u \equiv |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — внешняя единичная нормаль к S_T^ε, $\gamma = \alpha(p-1)$, и предполагается, что $f \in L_q(Q_T^\varepsilon)$, $q = p/(p-1)$ и $g \in C(\overline{\Omega})$. Предположим, что $\sigma(x, u)$ — непрерывно дифференцируемая по переменным $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in \mathbb{R}$ функция, такая, что $\sigma(x, 0) = 0$ и существуют такие положительные постоянные k_1 и k_2, что выполнены неравенства $(\sigma(x,u) - \sigma(x,v))(u - v) \geq k_1|u - v|^p$, $|\sigma(x,u)| \leq k_2|u|^{p-1}$.

Под решением понимаем $u_\varepsilon \in L_p(0, T; W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon \in L_2(0, T; W^{-1,p'}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$. Имеет место следующая теорема об усреднеии задачи (1).

Теорема 1. *Пусть $n \geq 3$, $2 \leq p < n$, $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = \alpha(p-1)$ и u_ε — обобщенное решение задачи* (1). *Введем функцию $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ как обобщенное* *решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{p-2}H(x,u) = f(x) & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = 0 & \text{при } x \in \Omega, \end{cases}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n *— площадь поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, $H(x,u)$ *— решение уравнения*

$$\mathcal{B}_0|H|^{p-2}H = \sigma(x, u - H) - g(x),$$

где $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{1-p}$. *Тогда* $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Об интегральном представлении решений системы Моисила–Теодореску

Полунин В. А. (Белгородский государственный университет, Россия)
Солдатов А. П. (Белгородский государственный университет, Россия)

Пусть гладкая поверхность $S \subseteq \mathbb{R}^3$ служит границей конечной односвязной области D, и n есть единичная внешняя нормаль на S. Хорошо известно **[1]**, что трехмерный аналог интеграла типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{M^\top(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y)\, d_2y, \quad x \in D, \tag{1}$$

служит решением системы Моисила–Теодореску **[1]**

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u(x) = 0, \quad M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Если $\psi \in C^\mu(S)$, то граничное значение

$$u^+(y_0) = \lim_{x \to y_0, x \in D} u(x), \quad y_0 \in S,$$

функции $u = I\psi$ существует и связано с соответствующим сингулярным интегралом $u^* = I^*\psi$ формулой типа Сохоцкого–Племеля $u^+ = \psi + u^*$. В действительности **[2]** в предположении $S \in C^{1,\mu+0}$ (т. е. $S \in C^{1,\mu+\varepsilon}$ с некоторым малым $\varepsilon > 0$) оператор $\psi \mapsto I\psi$ ограничен $C^\mu(S) \to C^\mu(\overline{D})$. Специальный выбор плотности в интеграле (1) обеспечивает справедливость формулы Коши $2u = Iu^+$ для решения $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (2).

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть $S \in C^{2,+0}$. Тогда для любого решения $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы* (2) *существует единственная 2-вектор-функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(S)$, такая, что*

$$u = I\psi, \quad \psi_i = \begin{cases} \varphi_1, & i = 1, \\ \varphi_2 n_{i-1} & i = 2,3,4. \end{cases}$$

С помощью этого представления и формулы Сохоцкого–Племеля любую краевую задачу для системы Моисила–Теодореску в области D можно легко редуцировать к эквивалентной системе двумерных сингулярных интегральных уравнений на поверхности S.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракты П, П693, № 02.740.11.0613).

Список литературы

[1] *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., 1966.

[2] *Полунин В. А., Солдатов А. П.* Трехмерный аналог интеграла типа Коши // Дифференц. уравнения, 2011, т. 47.

О внутренней гладкости обобщенных решений некоторых эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением

Попов В. А. (Российский университет дружбы народов, Россия)

Рассматривается эллиптическое дифференциально–разностное уравнение с вырождением

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ij} u = f(x) \qquad (x \in Q) \tag{1}$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q), \tag{2}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q, R_{ij} — разностные операторы,

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x+h), \tag{3}$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}$ — конечное множество векторов, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$.

Предполагается, что разностные операторы являются неотрицательными и выполняется условие подчиненности ядер разностных операторов. В отличие от эллиптических дифференциальных уравнений с вырождением, вырождение в задаче (1), (2) носит нелокальный характер. В **[2]**, **[3]** показано, что некоторые классы нелокальных эллиптических задач, возникающих в теории плазмы **[1]**, сводятся к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям с вырождением.

Введем оператор A_R по формуле (1) с областью определения $\mathcal{D}(A_R) = C_0^\infty(Q)$. Для оператора A_R получены априорные оценки, позволяющие построить фридрихсово расширение $\mathcal{A}_R$ оператора A_R **[4]**.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1), (2) с $f \in L_2(Q)$ называется функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ такая, что $\mathcal{A}_R u = f$.

В работе показано, что для любой функции $f \in L_2(Q)$ ортогональная проекция $P_{11}u$ обобщенного решения $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ на образ разностного оператора R_{11} обладает следующим свойством: $P_{11}u \in W_{2,loc}^2(Q_r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

Здесь Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)$, M — аддитивная группа, порожденная множеством $\mathcal{M}$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00395, проект № 09-01-00586), аналитической ведомственной программы „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект № 2.1.1/5328), и в рамках федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009–2013 гг.“

Список литературы

[1] *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.

[2] *Skubachevskii A.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser, 1997.

[3] *Скубачевский А. Л.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением // Труды ММО. 1997. Т. 59. С. 240–285.

[4] *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Секториальные дифференциально-разностные операторы с вырождением // ДАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 450–453.

Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость линейных управляемых систем

Попова С. Н. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Управление $u(\cdot)$ в системе (1) выбирается линейным по фазовым координатам, $u = U(t)x$. Кусочно-непрерывная и ограниченная функция $U : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{mn}$ играет роль матричного управления в замкнутой системе

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U\big)x. \tag{2}$$

Определение 1. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — неограниченное множество. Будем говорить, что система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости относительно множества* $\mathbb{U}$, если при некотором $\vartheta > 0$ для произвольных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется такое $l > 0$, что для любой матрицы $H \in \mathrm{M}_{nn}$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leq \alpha$ и $\det H \geq \beta$, и для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует кусочно-непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{U}$, $\|U\|_C \leq l$, гарантирующее выполнение равенства

$$X_U(t_0 + \vartheta, t_0) = X_0(t_0 + \vartheta, t_0)H,$$

где $X_U(t, s)$ — матрица Коши системы (2).

Определение 2. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — неограниченное множество. Будем говорить, что система (2) обладает свойством *глобальной ляпуновской приводимости относительно множества* $\mathbb{U}$, если для любой кусочно непрерывной и ограниченной матрицы $D : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{nn}$ найдется кусочно непрерывное ограниченное управление $U : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы

$$\dot{z} = D(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

и системы (2) при $U = U(\cdot)$, т. е. существует преобразование Ляпунова, связывающее эти системы.

Определение 3. Система (1) называется равномерно вполне управляемой (в смысле Р. Калмана), если существуют такие $\vartheta > 0$ и $\gamma > 0$, что при всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X_0(t_0, s) B(s)\|^2 \, ds \geq \gamma \|\xi\|^2.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — *неограниченное множество. Если система* (2) *равномерно глобально достижима относительно множества* $\mathbb{U}$, *то соответствующая система* (1) *равномерно вполне управляема (в смысле Р. Калмана).*

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$ — *неограниченное множество. Если система* (2) *равномерно глобально достижима относительно множества* $\mathbb{U}$, *то* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости относительно* $\mathbb{U}$.

Показано, что в общем случае утверждения, обратные теоремам 1 и 2, неверны.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

О некотором классе прикладных динамических систем и их бифуркациях

Потапов В. И. (Норильский индустриальный институт, Россия)
Морозов А. Д. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия)

Изучается класс диссипативных прикладных динамических систем вида

$$\dot{x_i} = F_i(x_1, x_2, ..., x_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_k), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

удовлетворяющих условию $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} < 0$, где x_i — фазовые переменные, а μ_i — параметры.

К системе такого типа приходим при моделировании колебательных режимов в работе паровой машины Уатта с центробежным регулятором:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = -\gamma x_2 + \sin x_1 + x_3^2 \sin x_1 \cos x_1, \\ \dot{x_3} = k(\cos x_1 - \rho). \end{cases} \tag{2}$$

Ее называем трехпараметрической динамической системой Вышнеградского–Понтрягина. В данном докладе подробнее остановимся на системе (2).

Она имеет одно состояние равновесия $O_1(\arccos \rho; 0; \frac{1}{\sqrt{\rho}})$, и дивергенция ее векторного поля всюду отрицательна.

Показано, что в системе (2) при критических значениях параметров $k = 1$, $\rho = 0,815$ и $\gamma = 1,472$ реализуется классическая бифуркация Андронова–Хопфа рождения единственного предельного цикла из седло-фокуса. Далее при $\gamma = 1$ и тех же значениях k и ρ появляются два перекрученных цикла. При уменьшении γ до $0,5$ идет процедура удвоения периода цикла, приводящая к сложному притягивающему множеству фазовых траекторий.

Также в докладе обобщаются свойства решений систем вида (1) на базе динамических систем Чумакова–Слинько, Рикитаки и Франческини–Тибальди.

О сингулярных решениях уравнения КдФ

Похожаев С. И. (Математический институт РАН, Россия)

Во Вселенной Кортевега–де Фриза, как и во всякой расширяющейся Вселенной (каждый год публикуется более 100 статей, и каждые 2–3 года выходит книга, посвященная уравнению Кортевега–де Фриза), имеются черные дыры и происходят взрывы Сверхновых.

Доклад посвящен проблеме черных дыр и взрывам в этой Вселенной КдФ, т. е. сингулярным решениям и их разрушению за конечное время. Рассматриваются начально-краевые задачи на ограниченном пространственном промежутке, на полуограниченном промежутке, и задача Коши.

Устанавливается, что появление сингулярных решений начально-краевых задач, разрушающихся за конечное время, зависит от типа граничных условий; в случае полуограниченного промежутка появление сингулярного решения обуславливается соответствующими “начальным” по x условиями.

В случае задачи Коши появление сингулярного решения, разрушающегося за конечное время, зависит от асимптотики начальных данных, выводящих гладкую начальную функцию из пространства типа $H^s(\mathbb{R})$ с $s > -3/4$.

Для задачи Коши построено семейство гладких решений, разрушающихся за конечное время. На этом примере обсуждается явление самофокусировки построенных решений.

Обратная задача для параболического уравнения с нелокальным условием наблюдения

Прилепко А. И. (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ рассматривается задача нахождения пары $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий:

$$\rho(x,t)\, u_t(x,t) - Lu(x,t) = h(x,t)f(x) + g(x,t) \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \quad u(x,t) = b(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T], \tag{2}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,\tau)\, d\mu(\tau) = \chi(x) \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь функции ρ, h, g, u_0, b, μ, χ заданы, а равномерно эллиптический оператор L имеет вид:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \left(\overrightarrow{b}(x,t), \nabla u \right) + d(x,t) \cdot u.$$

Функция $\mu(t)$ в условии нелокального переопределения (3) — скалярная, имеет ограниченную вариацию на $[0,T]$ и непрерывна при $t=0$ справа. Обозначим через $u^0(x,t)$ решение прямой задачи (1)–(2) с $f=0$, и пусть всюду ниже выполняются следующие условия на заданные функции:

$$a_{ij}(x)\in C^1(\overline{\Omega});\quad \rho,\rho_t\in C(\overline{Q});\quad b_i,\partial b_i/\partial x_i,\partial b_i/\partial t,d,d_t\in L_\infty(Q);$$

$$g,g_t\in L_p(Q);\quad u_0(x)\in W_p^2(\Omega);$$

$$\exists\Phi,\Phi_t\in W_p^{2,1}(Q):\Phi(x,0)=u_0(x)\ x\in\Omega,\ \Phi(x,t)=b(x,t)\ (x,t)\in S;$$

$$\chi(x)\in W_p^2(\Omega);\quad h,\,h_t\in L_{\infty,p}(Q);\quad p\in[2,\infty);\quad l(b)(x)=\chi(x)\ x\in\Gamma;$$

$$\rho(x,t)\ge\rho_1>0,\ d(x,t)\le 0\ (x,t)\in\overline{Q};\quad |l(h)(x)|\ge\delta>0\ x\in\Omega.$$

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи называется пара функций $u(x,t)\in W_p^{2,1}(Q)$, $f(x)\in L_p(\Omega)$, где $p\in[2,\infty)$, удовлетворяющая условиям (1)–(3).

Теорема 1. *Задача (1)–(3) эквивалентна линейному операторному уравнению 2-ого рода с вполне непрерывным в $L_p(\Omega)$ оператором.*

Теорема 2. *Если $b_i\equiv b_i(x)$, а мера $d\mu(t)=\omega(t)dt$ с функцией $\omega(t)\in W_1^1(0,T)$, причем справедливы неравенства $\omega(t)\ge 0$ на $[0,T]$; $(\omega\rho)'_t\le 0$, $l(h)^{-1}\cdot h(x,t)\ge 0$ в Q, то обобщенное решение обратной задачи (1)–(3) существует, единственно и справедлива оценка устойчивости:* $\|u-u^0\|_{p,Q}^{(2,1)}+\|f\|_{p,\Omega}\le C\cdot\|\chi-l(u^0)\|_{p,\Omega}^{(2)}$.

В данной работе результаты, полученные в **[1]** методами теории полугрупп, перенесены на обратные задачи для параболических уравнений в L_p с нестационарным оператором. Случай финального и интегрального наблюдения исследовался в **[2]**.

Доклад основан на совместной работе с А. Б. Костиным.

Работа поддержана ФЦП «Кадры» (проект П268) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6827).

Список литературы

[1] *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58. № 2. С. 167–188.

[2] *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.

Полиномы Литлвуда и спектральная теория динамических систем

Приходько А. А. (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия)

Полином

$$P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n,\quad c_j\in\mathbb{C},$$

называется *унимодулярным*, если $|c_j|=1$ для всех j. Дж. Литлвуд в 1966 г. **[7]** поставил вопрос о том, насколько унимодулярный полином может быть близок к константе по абсолютной величине на единичной окружности

$S^1 = \{z \in \mathbb{Z} \colon |z| = 1\}$. Иными словами, существует ли для заданного $\varepsilon > 0$ унимодулярный полином $P(z)$ степени $n \geq 1$, удовлетворяющий оценке

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \, |P(z)| - 1 \right| < \varepsilon$$

для любой точки $z \in \mathbb{C}$, такой, что $|z| = 1$? Наряду с классом унимодулярных полиномов изучается множество других классов полиномов и экспоненциальных сумм, построенных на основе более общих или более частных ограничений на коффициенты, объединенных под общим названием *полиномы Литлвуда*. Исследование аналитических свойств полиномов Литлвуда имеет большой круг приложений в теории чисел, анализе и теории динамических систем. Положительный ответ на упомянутый вопрос Литлвуда дал Ж. Кахан в 1980 г. **[6]** и, в то же время, многие проблемы, связанные со свойствами полиномов Литлвуда, открыты и сейчас.

Основным объектом нашего исследования является класс $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ полиномов Литлвуда с коэффициентами $\{0, 1\}$ на группе $\mathbb{R}$, возникающий в задачах спектральной теории динамических систем с инвариантной мерой. В настоящей работе устанавливается существование полиномов в классе $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$, являющихся интегрально ε-плоскими на любом заданном компактном подмножестве многообразия $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. А именно, доказывается, что для заданных $0 < a < b$ и $\varepsilon > 0$ существует полином

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i \, t\omega(j)}, \qquad \omega(j) \in \mathbb{R},$$

являющийся *ε-плоским* на отрезке $[a, b]$ по отношению к норме пространства $L^1([a, b])$. Применение данного аналитического результата позволяет дать положительный ответ к гипотезе Стефана Банаха **[4, 2]** о существовании динамической системы с простым лебеговским спектром в классе действий группы $\mathbb{R}$. А именно, доказывается существование потока $\{T^t\}$, где $t \in \mathbb{R}$, действующего сохраняющими меру преобразованиями на пространстве Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, такого, что ассоциированное с ним унитарное представление имеет однократный лебеговский спектр. Конструируемый поток принадлежит классу динамических систем аппроксимационного ранга 1 (см. **[1, 3]**).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00759-а.

Список литературы

[1] *Д. В. Аносов.* О спектральных кратностях в эргодической теории // Совр. пробл. матем., МИАН. 2003. Т. 3, С. 3—85.

[2] *А. А. Кириллов.* Динамические системы, факторы и представления групп // УМН. 1967. Т. 22. № 5(137). С. 67—80.

[3] *А. М. Степин.* Спектральные свойства типичных динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 801—834.

[4] *С. Улам.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.

[5] *J. Bourgain.* On the spectral type of Ornstein class one transformations // Isr. J. Math. 1993. V. 84. P. 53–63.

[6] *J. P. Kahane.* Sur les polynômes à coefficients unimodulaires // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. P. 321–342.

[7] *J. E. Littlewood.* On polynomials, $\sum^n \pm z^m$, $\sum^n e^{\alpha_n i} z^m$, $z = e^{\theta i}$ // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 367–376.

Краевые задачи с нелокальными граничными условиями для уравнения высокого порядка по времени

Пулькина Л. С. (Самарский государственный университет, Россия)

В докладе рассматриваются краевые задачи для уравнения

$$(-1)^{m-1}D_t^{2m}u - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в прямоугольнике $Q = (0,l) \times (0,T)$, где $l, T < \infty$, и доказываются теоремы существования и единственности решений, удовлетворяющих начальным условиям

$$D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, ...m; \qquad D_t^k u|_{t=T} = 0, \quad k = 1, ...m-1, \tag{2}$$

граничному условию $u_x(l,t) = 0$, и одному из следующих нелокальных условий:

$$u_x(0,t) = \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{5}$$

Доказательство разрешимости поставленных задач для $m > 1$ основано на редукции к операторным уравнениям и базируется на полученных априорных оценках в анизотропных пространствах С. Л. Соболева.

Заметим, что нелокальные условия (3)–(5), похожие друг на друга при беглом взгляде на них, качественно различны весьма существенно, что приводит к необходимости индивидуального подхода к выбору способа редукции к операторному уравнению в каждом из трех случаев. Подробное изложение доказательства разрешимости задач с нелокальным условием (3) и одним из граничных условий $u_x(l,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ для уравнения (1) приведено в [**1**].

Список литературы

[1] *Пулькина Л. С.* Краевые задачи с нелокальными граничными условиями для уравнений высокого порядка // Неклассические уравнения математической физики. Сборник научных работ. Новосибирск, 2010. С. 220–232.

Условия представления остаточного члена в формуле Тейлора для голоморфной в области функции в форме Лагранжа

Радзиевская Е. И. (Национальный университет пищевых технологий, Украина)

Исследуется вопрос о представлении голоморфной в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функции f в виде

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z_1 - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + \frac{(z_1 - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \tag{1}$$

и вопрос о локализации ξ в (1). Показано, в частности, что для любых $z_0 \in D$ и $\theta \in (0; \pi/2]$ найдется такое положительное r, что круг $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ целиком лежит в D и для всех $z_1 \in U_r$ и $z_1 \neq z_0$ существует, хотя бы одно, ξ, удовлетворяющее соотношениям $|\xi - (z_1 + z_0)/2| < |z_1 - z_0|/2$, $|\arg((\xi - z_0)/(z_1 - z_0))| < \theta$, для которого справедлива формула (1). Даны условия относительно функции f и числа θ, обеспечивающие единственность указанного ξ, а также приведены условия, как по функции f выбирать эффективные оценки радиуса r круга U_r, для точек z_1 из которого выполняется (1). Из доказаных утверждений, в частности, получен результат для функции e^z: *если* $|z_1 - z_0| < 1,451$ *и* $z_1 \neq z_0$, *то существует единственное* ξ *из круга* $U((z_1 + z_0)/2; |z_1 - z_0|/2)$, *для которого справедлива формула* $e^{z_1} - e^{z_0} = (z_1 - z_0)e^{\xi}$. Этот результат, но при значительно более жестком требовании $|z_1 - z_0| < 0,3$, был установлен Дж. Робертсон в **[1]**.

Список литературы

[1] *Robertson J. M.* A local mean value theorem for the complex plane // Proc. Edinburg Math. Soc. 1969. V. 16 № 4. P. 329–331.

Класс решений для одномерных стохастических нелинейных краевых задач реологии

Радченко В. П. (Самарский государственный технический университет, Россия)

Попов Н. Н. (Самарский государственный технический университет, Россия)

Предложен метод решения стохастических нелинейных краевых задач реологии в цилиндрической системе координат для случая плоского деформированного состояния в предположении, что стохастические свойства материала описываются при помощи случайной функции одной переменной (радиуса r). Метод проиллюстрирован на задачах для толстостенной трубы внутреннего радиуса a под действием внутреннего давления q и всестороннего растяжения усилием ρ бесконечной пластины из стохастически неоднородного материала, ослабленной круговым отверстием радиуса a.

Система стохастических реологических уравнений записана в безразмерных координатах $\rho = r/a$ (a — внутренний радиус трубы) и состоит из уравнения равновесия для напряжений

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0,$$

условия совместимости деформаций

$$\rho\frac{d\dot{\varepsilon_\theta}}{d\rho}+\dot{\varepsilon_\theta}-\dot{\varepsilon_r}=0$$

и определяющих соотношений, принятых в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме

$$\dot{\varepsilon_r}=cs^{n-1}\bar{\sigma}_r(1+\alpha U(\rho)),\qquad \dot{\varepsilon_\theta}=cs^{n-1}\bar{\sigma}_\theta(1+\alpha U(\rho)),$$

где $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ — компоненты тензора девиатора напряжений, s — интенсивность напряжений, $U(\rho)$ — случайная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала, характеристики которой известны: $\langle U\rangle=0$, $\left\langle U^2\right\rangle=1$, число α ($0<\alpha<1$) играет роль коэффициента вариации этих свойств, c и n — постоянные материала.

Для толстостенной трубы решение задачи производится путем разложения радиального напряжения в ряд по степеням малого параметра. Получен рекуррентный вид системы стохастически линейных дифференциальных уравнений, из которых можно найти составляющие радиального напряжения с любой степенью точности. На основе аналитического решения проведен статистический анализ случайного поля напряжений и скоростей деформаций в зависимости от показателя нелинейности n и степени неоднородности материала α.

Выполнен анализ сходимости метода малого параметра для полей напряжений и деформаций.

Для растягиваемой пластины путем введения новых переменных s и φ по формулам $\sigma_r=2\rho\cos\varphi/\sqrt{3}$, $\sigma_\varphi=2\rho\cos(\varphi-\pi/3\varphi)/\sqrt{3}$ краевая задача сводится к системе стохастических нелинейных дифференциальных уравнений, которая линеаризуется на основе первого приближения метода малого параметра. Линейная задача решается численно методом Рунге–Кутта. Приводятся результаты численно-аналитических исследований решений краевых задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00644-а.

О B-параболических системах дифференциальных уравнений

Райхельгауз Л. Б. (Воронежский государственный университет, Россия)

Пусть $x=(x',x'')\in R_N^+=R_n^+\times R_{N-n}$, $x'\in R_n^+=\{x'\colon x_1>0,\ \dots,x_n>0\}$, и пусть $\alpha=(\alpha',\alpha'')$ — целочисленный мультииндекс длины $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_N$. Обозначения:

$$(D_B)^{\alpha'}_{x'}=\left(D^{\alpha_1}_{B_1},\ldots,D^{\alpha_n}_{B_n}\right),\quad D^{\alpha''}_{x''}=(D^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}},\ldots,D^{\alpha_N}_{x_N}),\quad D_{x_j}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D^{\alpha_j}_{B_j}=\frac{1}{i^{\alpha_j}}\begin{cases}B_j^{\alpha_j/2}, & \alpha_j=2k,\\ D_{x_j}B_j^{\frac{(\alpha_j-1)}{2}}, & \alpha_j=2k+1,\end{cases}\qquad k=0,1,2,\ \dots,$$

$$B_j=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{\gamma_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j},\quad \gamma_j>0.$$

Изучается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left((D_B)_{x'}, (D)_{x''}\right)\, u(x,t); \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{1}$$

Применяется полное смешанное преобразование Фурье–Бесселя

$$\mathfrak{F}_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \Lambda_\gamma^+(x\,\xi)\, (x^2)^{\gamma/2}\, dx, \qquad \mathfrak{F}_B^{-1}[f](x) = C_\gamma \mathfrak{F}_B[f](-x),$$

$$\Lambda_\gamma^\pm = \prod_{i=1}^{n} \left(j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\,\xi_i) \mp i\, \frac{x_i\,\xi_i}{\gamma_i+1} j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\,\xi_i) \right) e^{(x'',\xi'')},$$

где $j_\nu(x) = C(\gamma)\, \frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$, а J_ν — функция Бесселя первого рода.

Это преобразование приводит к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравненний

$$\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t} = P(i\xi)\, v(\xi,t), \qquad v(x\xi) = \widehat{u}(\xi,t); \qquad v(\xi,0) = v_0(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)\,.$$

Матрицу нормальной фундаментальной системы решений обозначим $Q(\xi, t_0, t)$, Через $\Phi'(R_N^+)$ обозначим пространство обобщенных функций, построенных по схеме П. И. Лизоркина.

Теорема 1. *Если в пространстве* $\Psi_\gamma(R_N^+) = \mathfrak{F}_B[\Phi_\gamma(R_N^+)]$ *основных функций* $\psi(\xi)$ *(следовательно, и в пространстве весовых распределений* $\Psi'_\gamma(R_N^+)$*) элементы матрицы* $Q(\xi, t_0, t)$ *являются* F_B*-мультипликаторами при любом* $t \geq 0$*, причем собственные значения являются различными и отрицательными, то задача* (1) *имеет решение при любой начальной весовой обобщенной вектор-функции* $v_0(\xi) \in \Psi'^{(m)}(R_N^+)$*:* $v(\xi,t) = \widehat{u}(\xi,t) = Q(\xi,0,t)\, v_0(\xi)$*, причем это решение непрерывно зависит от начальной вектор-функции* $v_0(\xi)$ *в смысле непрерывности, установленной для пространства распределений* $\Psi'^{(m)}(R_N^+)$.

Теорема 2. *Если в пространстве* $\Psi_\gamma(R_N^+)$ *основных функций* ψ *(следовательно, в весовом пространстве распределений* ${\Psi'}_N$*) элементы матрицы* $Q(\xi, t_0, t)$ *являются мультипликаторами при любых* t, $0 \leq t < t_0$*, причем собственные значения являются различными и отрицательными, то задача* (1) *может иметь лишь единственное решение в классе* ${\Psi'}_\gamma^{(m)}(R_N^+)$.

Доклад основан на совместной работе с Л. Н. Ляховым.

Список литературы

[1] *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сборник. 1977. Т. 104, № 1. С. 49–68.

Краевая задача для уравнений диффузии дробного порядка и влагопереноса

Репин О. А. (Самарский государственный экономический университет, Россия)

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,\,y}u = 0 & (y > 0,\ 0 < \alpha < 1), \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0 & (y < 0), \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}u(x,y)$ — частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка α от функции $u(x,y)$ по второй переменной.

Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1) в области D, которая представляет собой объединение квадрата $D^+ = \{(x,y) : 0 \le x,\ y \le 1\}$ и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости ($y < 0$), ограниченной характеристиками $AC : x - \frac{y^2}{2} = 0$; $BC : x + \frac{y^2}{2} = 1$ уравнения (1) и отрезком $[0,\ 1]$ прямой $y = 0$, где $A = (0,\ 0)$, $B = (1,\ 0)$, $C = (\frac{1}{2},\ -1)$.

Для уравнения (1) поставим и исследуем задачу: найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_0(y),\ u(1,y) = \varphi_1(y), \qquad 0 \le y \le 1,$$

$$A_1\left(I^{a+1,\,b+1,\,c}_{0+}u[\theta_0(t)]\right)(x) = \\ = A_2\left(I^{a+1,\,b+1,\,c}_{0+}u(t,0)\right)(x) + A_3\left(I^{a+\frac{3}{2},\,b-\frac{3}{2},\,c}_{0+}u_y(t,0)\right)(x) + A_4x^k$$

($0 < x < 1$, $a > -1$, $b > \frac{1}{2}$, $c > -\frac{3}{2}$, $k > -1$ либо $a > -1$, $b > \frac{1}{2}$, $c < -2$, $k > -\frac{1}{2}$), а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,\,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,\,y) \quad (0 \le x \le 1),$$
$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,\,y)\right)_y = \lim_{y\to 0-} u_y(x,\,y) \quad (0 < x < 1).$$

Здесь $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ — заданные функции, такие, что

$$\varphi_0(y),\ \varphi_1(y) \in \mathtt{C}(\overline{I}),\ \varphi_1(0) = 0,$$

A_i, $i = \overline{1,\,4}$ — действительные константы, такие, что A_1, $A_3 > 0$, $A_1 > A_2$ либо A_1, $A_3 < 0$, $A_1 < A_2$, $\theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,\,0)$ $(0 < x < 1)$, с характеристикой AC, $I^{\alpha,\,\beta,\,\eta}_{0+}f(x)$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре.

Единственность решения исследуемой задачи доказана с помощью принципа экстремума, а существование — сведено к разрешимости дифференциального уравнения порядка $1/2$, которое имеет приложения в теории полярографии, вольтметра, электрохимии. Решение этого уравнения выписывается в явном виде.

Функции Ляпунова и статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами

Родина Л. И. (Удмуртский государственный университет, Россия)

В этом докладе рассматриваются условия, при которых заданное множество M статистически инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$.

Предполагаем, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ выполнены условия:

1°. функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;
2°. функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;
3°. функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывна сверху для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Для непрерывной функции $\sigma \to M(\sigma) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ и множество $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$. В предположении, что *множество достижимости* $D\bigl(t, \sigma, X\bigr)$ системы (1) в момент t из начального множества X существует при всех $t \geqslant 0$, рассмотрим характеристику

$$\mathrm{freq}(\sigma, X) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : D\bigl(t, \sigma, X\bigr) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{2}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (2) существует, то $\mathrm{freq}(\sigma, X)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости системы (1) множеством $M = \Sigma \times M(\sigma)$.

Определение 1. Множество M называется *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (1), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\mathrm{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr) = 1$, то есть $\nu\bigl\{\sigma \in \Sigma : \mathrm{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr) = 1\bigr\} = 1$.

Скалярная функция $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества M, если она локально липшицева по (σ, x) и удовлетворяет условиям:

1°. $V(\sigma, x) \leqslant 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$;
2°. $V(\sigma, x) > 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$.

Через $V^o_{\max}(\sigma, x)$ будем обозначать *верхнюю производную* функции V в силу дифференциального включения, соответствующего системе (1).

Рассмотрим характеристику $\varkappa(\sigma) \doteq \lim\limits_{\vartheta \to \infty} \dfrac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$, где $z^*(t, \sigma)$ — верхнее решение скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Пусть $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для всех $\sigma \in \Sigma_0$ для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения системы (1), удовлетворяющие начальному* *условию $\varphi(0,\sigma,x)=x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функция $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ и функция $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$, такие, что $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и для всех $(\sigma,x)\in\Sigma_0\times\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).$$

Тогда, если $\varkappa(\sigma)=1$ для всех $\sigma\in\Sigma_0$, то множество M статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы (1).

Работа поддержана грантом Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№11.G34.31.0039) и грантом РФФИ (№11-01-00380-а).

Об одном аналоге уравнения Эйлера

Родионов В. И. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Полное метрическое пространство $\langle\,\overline{\mathbb{R}},\varrho\,\rangle$ состоит из расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$ и метрики $\varrho\,(\xi,\eta)\doteq|\,f(\xi)-f(\eta)\,|$, где $\xi,\eta\in\overline{\mathbb{R}}$, $f(z)\doteq\frac{z}{1+|z|}$ при $z\in\mathbb{R}$, $f(-\infty)\doteq-1$ и $f(\infty)\doteq 1$. Если I — это отрезок, интервал или полуинтервал, то через I^2_* обозначим множество $\{\,(\tau,s)\in I^2\,:\,\tau\neq s\}$. Всякая функция $x:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ порождает функцию двух переменных $\Phi_x(\tau,s)\doteq\frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$, определенную на множестве $[a,b]^2_*$.

Определение 1. Функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется RL-*функцией*, если существуют числа $A_x(t)\in\overline{\mathbb{R}}$, $t\in(a,b]$, и $B_x(t)\in\overline{\mathbb{R}}$, $t\in[a,b)$, такие, что

$$\forall\,t\in(a,b]\lim_{\substack{(\tau,s)\,\in\,(a,t\,]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}}\varrho\,(\Phi_x(\tau,s),A_x(t))=0,$$

$$\forall\,t\in[a,b)\lim_{\substack{(\tau,s)\,\in\,[\,t,b)^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}}\varrho\,(\Phi_x(\tau,s),B_x(t))=0.$$

1°. Всякая кусочно-гладкая функция $x\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ является RL-функцией, то есть $\mathrm{KC}^1[a,b]\subset\mathrm{RL}[a,b]$, в частности, $\mathrm{C}^1[a,b]\subset\mathrm{RL}[a,b]$.

2°. Любая функция $x\in\mathrm{RL}[a,b]$ имеет ограниченное изменение.

3°. Если $x\in\mathrm{RL}[a,b]$, то для почти всех $t\in[a,b]$ существует конечная производная $\dot{x}(t)$. Если $\dot{x}(t)$ конечно для некоторого $t\in(a,b)$, то $A_x(t)=B_x(t)=\dot{x}(t)\in\mathbb{R}$. Если $\dot{x}(a)$ конечно, то $B_x(a)=\dot{x}(a)\in\mathbb{R}$. Если $\dot{x}(b)$ конечно, то $A_x(b)=\dot{x}(b)\in\mathbb{R}$.

4°. Если $x\in\mathrm{RL}[a,b]$, то функция $A_x\,:\,(a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ непрерывна слева, а функция $B_x:\,[a,b)\to\overline{\mathbb{R}}$ непрерывна справа.

5°. Пусть $x\in\mathrm{RL}[a,b]$. Функция A_x непрерывна в точке $t\in(a,b)$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция B_x. При этом $A_x(t)=B_x(t)$.

Пространство всех абсолютно непрерывных функций $x\in\mathrm{RL}[a,b]$ обозначим через $\mathrm{RC}\doteq\mathrm{RC}[a,b]$, а его линейное подпространство, состоящее из функций, у которых все предельные числа $A_x(t)$ и $B_x(t)$ конечны, обозначим через $\mathrm{RS}\doteq\mathrm{RS}[a,b]$. Функции $x\in\mathrm{RC}[a,b]$ называются *регулярно непрерывными*, а функции $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ — *регулярно гладкими.* Пространство $\mathrm{RS}[a,b]$ банахово по норме $\|x\|_{\mathrm{Lip}} \doteq |x(a)| + \sup\limits_{(\tau,s)\,\in\,[a,b]^2_*} |\Phi_x(\tau,s)|$ (оно является замыканием пространства ломаных по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$), а $\mathrm{RC}[a,b]$ — полное пространство в метрике $\mathrm{d}(x,y) \doteq |\,x(a)-y(a)\,| + \sup\limits_{(\tau,s)\,\in\,[a,b]^2_*} \varrho\,(\Phi_x(\tau,s),\Phi_y(\tau,s))$.

Пусть непрерывная по совокупности переменных функция $L \doteq L(t,x,y)$ определена на множестве $\Omega \doteq [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и имеет там непрерывные по совокупности переменных частные производные $L_x(t,x,y)$ и $L_y(t,x,y)$. Зафиксируем числа $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{P}_{\alpha\beta} \doteq \{\,x\in\mathrm{RS}[a,b] : \, x(a)=\alpha,\ x(b)=\beta\,\}$.

Теорема 1. *Если функция $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ является точкой локального экстремума (по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$) задачи $J(x(\cdot)) \doteq \int_a^b L(t,x(t),\dot x(t))\,dt \ \to\ \inf$, $x\in\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, то для п. в. $t\in[a,b]$*

$$L_{\dot x}(t,x_0(t),\dot x_0(t)) - \int_a^t L_x(s,x_0(s),\dot x_0(s))\,ds = \mathrm{const}.$$

Теорема 2. *Пусть J_1, J_2, J_3 — инфимумы функционалов $x(\cdot)\to J(x(\cdot))$ $(x(a)=\alpha,\ x(b)=\beta)$ в пространствах* RS, KC^1 *и* C^1 *соответственно. Тогда $J_1 = J_2 = J_3$.*

Решение $x(t) = t^{1/3}$, $t\in[0,1]$, известного примера Гильберта, в котором $a=0,\ b=1,\ \alpha=0,\ \beta=1,\ L(t,x,y) = t^{2/3}\,y^2$, принадлежит пространству $\mathrm{RC}[0,1]$.

Бегущие волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом аргумента и запаздыванием

Романенко Т. Е. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Целью данной работы было исследование решений типа бегущей волны в периодической краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(\varphi,t) - u(\varphi,t) + K(1+\gamma\cos u(\varphi+\theta,t-T)),\ u(0,t) = u(2\pi,t). \tag{1}$$

Это уравнение используется при моделировании взаимодействия световых лучей в нелинейной оптической системе с нелокальной обратной связью в приближении тонкого кольцевого слоя с учетом запаздывания [**1**].

Можно выделить несколько методов, используемых в настоящее время при исследовании периодических решений нелинейных параболических уравнений с запаздыванием. Один из них основан на анализе инфинитезимального производящего оператора компактной C_0-полугруппы, порожденной решениями линеаризованной задачи, и применении теоремы о неявном операторе [**2**]. В основе другого метода, представленного, например, в [**3**], лежит техника, основанная на теории интегральных многообразий. Оба отмеченных подхода в общем случае требуют применения довольно сложной техники.

В рассматриваемой модели, описываемой задачей (1), благодаря пространственной симметрии периодические решения находились в виде одномерных ротационных волн, профиль которых определялся из стационарной задачи после перехода в движущуюся систему координат. Отметим, что переход в движущуюся систему координат применялся ранее для параболических уравнений без запаздывания (см., например, [**4, 5**]). Для уравнений с запаздыванием такой прием при исследовании бифуркации Хопфа впервые предложен в данной работе. В ходе исследования были доказаны теорема существования и теорема единственности периодических решений параболического функционально-дифференциального уравнения с запаздыванием в виде бегущих волн, получены первые члены разложения решения по малому параметру. Бегущие волны, полученные численно для параметров, удовлетворяющих условиям теорем существования и единственности, обладают временны́м периодом и пространственной частотой, предсказанными теорией, и устойчивы.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Список литературы

[1] *Razgulin A. V.* Finite-Dimensional Dynamics of Distributed Optical System with Delayed FeedBack // Computers & Mathematics with applications. 2000, V. 40, № 12, P. 1405–1418.

[2] *Zhou L., Tang Y., Hussein S.* Stability and Hopf bifurcation for a delay competition diffusion system // Chaos, Solitons and Fractals. 2002, V. 14, P. 1201–1225.

[3] *Faria T.* Stability and Bifurcation for a Delayed Predator-Prey Model and the Effect of Diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001, Vol. 254, P. 433–463.

[4] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

[5] *Денисов Г. А.* О математическом описании спиральных волн в распределенных химических системах // Прикладная математика и механика, 1984, т. 48, вып. 2, с. 293–301.

Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения

Рублева О. В. (Московский Государственный Университет им. Ломоносова, Россия)

В докладе будет сформулирован и доказан новый критерий аддитивности конечных метрических пространств, основанный на свойствах минимальных заполнений в смысле М. Громова.

Теорема 1. *Вес минимального заполнения псевдометрического пространства равен полупериметру этого пространства тогда и только тогда, когда пространство аддитивно.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 10–01–00748), Гранта Президента РФ поддержки Ведущих научных школ (НШ–3224.2010.1), Программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП 2.1.1.3704) и Программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 02.740.11.5213).

Список литературы

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, Математ. сборник (2011), (в печати).
[2] M. Gromov, “Filling Riemannian manifolds”, J. Diff. Geom., **18** (1), pp. 1–147 (1983).
[3] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований (2003).
[4] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, (2009).
[5] К. А. Зарецкий, “Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами”, УМН, **20** (6), С. 90–92 (1965).
[6] J. M. S. Simões-Pereira, “A note on the tree realizability of a distance matrix”, J. Combinatorial Th., **6**, P. 303–310 (1969).

Асимптотика интегралов энергии для вариационных задач теории трещин с односторонними ограничениями

Рудой Е. М. (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Россия)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$, ω_0 — подобласть Ω с границей $\partial\omega_0$ такая, что $\overline{\omega} \subset \Omega$. Пусть $\gamma_0 \subset \partial\omega_0$. Определим пространство жестких перемещений

$$R(\omega_0) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x_1, x_2) = Bx + C,\ x = (x_1, x_2) \in \omega_0\},$$

где B — кососимметрическая матрица, C — постоянный вектор.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\sigma_{ij,j}(U_0) = f_i \quad \text{п. в. в } \Omega\backslash\overline{\omega}_0, \tag{1}$$

$$u_{01} = u_{02} = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\Omega, \tag{2}$$

$$U_0 = B_0 x + C_0 \quad \text{п. в. в } \omega_0, \tag{3}$$

$$[U_0]\nu_0 \geq 0 \quad \text{п. в. на } \gamma_0, \tag{4}$$

$$\sigma_\tau(U_0) = 0, \quad \sigma_{\nu_0}(U_0) \leq 0, \tag{5}$$

$$\sigma_{\nu_0}(U_0)[U_0]\nu_0 = 0 \quad \text{на } \gamma_0, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\partial\omega_0} (\sigma(U_0)\nu_0) \cdot \rho = \int\limits_{\omega_0} F\rho\, dx \quad \forall \rho \in R(\omega_0). \tag{7}$$

Здесь U_0 — двухкомпонетный вектор перемещений, $\varepsilon_{ij}(U_0)$, $\sigma_{ij}(U_0)$ — компоненты тензоров деформаций и напряжений соответственно, $F = (f_1, f_2)$ — заданный вектор внешних сил, ν_0 — вектор единичной нормали к γ_0, $\sigma_{\nu_0}(U_0) = \sigma_{ij}(U_0)\nu_{0i}\nu_{0j}$, $\sigma_{\tau i}(U_0) = \sigma_{ij}(U_0)\nu_{0j} - \sigma_{\nu_0}(U_0)\nu_{0i}$, $i = 1, 2$.

Задача подобного рода возникает в двумерной теории упругости для тела, содержащего жесткое включение ω_0 и трещину γ_0. При этом на берегах трещины задано условие непроникания — условие одностороннего ограничения.

Задача (1)–(7) формулируется в виде минимизации функционала энергии

$$\Pi(\Omega_0; U) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U)\, dx - \int\limits_{\Omega_0} FU\, dx$$

на множестве допустимых смещений.

Основная цель работы — найти производную функционала энергии по форме области. Для этого рассматривается возмущение $y = x + \delta V(x)$ ($V \in \{W^{2,\infty}\}^2$) области Ω, зависящее от параметра δ. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Существует производная $\Pi'(U_0)$ функционала энергии по параметру возмущения δ при $\delta = 0$, которая задается формулой*

$$\Pi'(U_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \operatorname{div} V \, \sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(U_0)\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(U_0) E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U_0\right) dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) u_{0i}\,dx - \int\limits_{\omega_0} F \cdot (B_0 V)\,dx -$$

$$- \langle \sigma(U_0)\nu_0, B_0 V\rangle_{1/2,\partial\omega_0} - \left\langle \sigma_{\nu_0}(U_0), \left(\frac{\partial V}{\partial x}[U_0]\right)\nu_0 \right\rangle_{\gamma_0}^{00},$$

$$E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_k} V_{k,j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k} V_{k,i}\right).$$

Эта работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ, проект МК-222.2010.1.

О представлении решений квазилинейных гиперболических систем как набора критических точек вектор-функционалов на траекториях

Рыков Ю. Г. (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия)

Рассмотрим квазилинейную гиперболическую 2×2 систему уравнений

$$U_t + F(U)_x = 0, \tag{1}$$

где $U = (u(t,x), v(t,x))$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Пусть вектор-функция $F(U) \in C^1$, а вектор-функция $U(t,x)$ может, вообще говоря, терпеть разрывы на некоторых кривых.

Известно, что при исследовании вопроса о существовании обобщенных решений аналогичных, $n \times n$, $n > 2$, систем априорных оценок недостаточно. При $n = 2$ ситуацию частично удается разрешить с помощью некоторых специальных методов, например, метода компенсированной компактности [**1**].

В настоящем докладе сделана попытка выработать совершенно иной подход, основанный на поиске представления решений через вариационную постановку, для случая одного уравнения этот подход использовала О. А. Олейник [**2**]. Здесь ограничимся системой 2×2, подобный взгляд может быть проведен и для систем $n \times n$. Рассмотрим следующий вектор-функционал $\overrightarrow{J}$, определенный на траекториях $(x(\tau), U(\tau))$, $x(0) = y$, $x(t) = x$, $U(0) = U_0(y)$,

$$\overrightarrow{J} \equiv \int\limits_0^y U_0(s)\,ds + \int\limits_0^t \{U\dot{x} - F(U)\}\,d\tau. \tag{2}$$

Определение 1. Назовем набор траекторий $x(\tau), U(\tau)$ критическим для функционала (2), если его первая вариация $\delta\overrightarrow{J}$ обращается в ноль при условии $\delta x = l_i(U) \cdot \delta U$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, где $l_i(U)$ — левые собственные вектора матрицы $F'(U)$.

Утверждение 1. *Гладкое решение системы* (1) *может быть представлено как состоящее из критического набора траекторий согласно определению 1 и при $i = 1$, и при $i = 2$.*

Утверждение 2. *Если обобщенное решение системы* (1) *имеет разрывы, то критический набор траекторий функционала* (2), *оканчивающихся на линиях разрыва, является решением вариационной задачи с подвижными концами для $\overrightarrow{J}$ (область вариации концевых точек ограничена линиями разрыва). При этом на линиях разрыва справедливы соотношения Ренкина–Гюгонио для системы* (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00288, и программы № 1 ОМН РАН.

Список литературы

[1] *Serr D.* Systems of conservation laws, 2 vols. Cambridge, Cambridge University Press, 1999, 2000.

[2] *Олейник О. А.* Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Труды Моск. мат. об-ва. 1956. Т. 5. С. 433–454.

Некоторые аналоги теоремы о принципе аргумента для дозвуковых течений и их геометрическая трактовка

Рылов А. И. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск)

Рассматриваются дозвуковые течения, дающие, как известно, хороший пример квазиконформных отображений. Пусть G — замкнутая кривая, являющаяся границей области D указанного течения. Ограничимся изучением поведения углов наклона векторов скорости θ и ускорения ω.

Показано, что для θ точками неоднозначности являются точки торможения, являющиеся аналогами нулей из ТФКП, а аналогов полюсов нет. При положительном обходе точки торможения θ меняется по закону $\theta = -n\phi$. В то же время точки неоднозначности функции ω из дозвуковых течений делятся на два типа. Это стационарные точки (точки обращения в нуль обеих компонент вектора ускорения), для которых в ТФКП аналогом являются нули ($\omega = -n\phi$), и точки торможения, аналогом которых в ТФКП являются полюса ($\omega = \phi$). Здесь ϕ — полярный угол, n — степень особенности.

Утверждение 1 (Аналог теоремы о принципе аргумента). *При положительном обходе границы G и точек неоднозначности k_i суммарное приращение угла θ (угла ω) равно нулю.*

Самая сложная часть доказательства утверждения состоит в выявлении и анализе точек неоднозначности. Последующие детали во многом повторяют изложенное в [**1**].

Приведенные выше результаты могут быть получены и с помощью метода линий уровня, что одновременно дает и геометрическую трактовку. Для простоты ограничимся дозвуковым обтеканием тела равномерным и горизонтальным на бесконечности потоком с точками растекания и схода, расположенными на теле. В этом случае точками неоднозначности функции ω являются лишь стационарные точки, в том числе и бесконечноудаленная точка (БУТ). Рассмотрим новую однородную систему уравнений газовой динамики, построенную на основе предыдущих работ автора [**2**, **3**]:

$$\lambda_\psi = k\frac{U_\varphi}{U} - \lambda\frac{U_\psi}{U}, \qquad \lambda_\varphi = -\lambda\frac{U_\varphi}{U} - \frac{U_\psi}{U}.$$

Отметим лишь, что $\lambda = \tan(\omega-\theta)/\rho$. С использованием свойств монотонности однородных систем [**4**] показано, что из каждой стационарной точки выходит пучек линий $\lambda = \mathrm{const}$, и каждая из этих линий выходит на обтекаемое тело. В то же время не исключены подковообразные линии $\lambda = \mathrm{const}$, начинающиеся и заканчивающиеся на теле, и не связанные со стационарными точками.

Автор благодарит В. М. Миклюкова за ценные советы.

Работа выполнена при поддержке интеграционного пректа 103 СО РАН.

Список литературы

[1] *М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко.* Векторные поля на плоскости. М., Физматгиз, 1963.

[2] *Рылов А. И.* О свойствах однородных систем уравнений газовой динамики для компонент вектора ускорения // Сиб. ж. индустр. математики. 1998. Т. 1. Вып. 2. С. 169–174.

[3] *Рылов А. И.* Топология линий нулевых значений компонент вектора ускорения в дозвуковых течениях // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 400–411.

[4] *Рылов А. И.* Свойства монотонности решений эллиптичских систем первого порядка и их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 758–766.

О полноте корневых функций дифференциального оператора, порожденного простейшим дифференциальным выражением и двучленными двухточечными краевыми условиями

Рыхлов В. С. (Саратовский государственный университет, Россия)

Пусть L — оператор, порожденный на отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением $\ell(y) := y^{(n)}$ и краевыми условиями

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(j-1)}(0) + \beta_j y^{(j-1)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

где $n = 2m+1$, $m \geq 2$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ для $j = \overline{1,n}$, $\alpha_s \neq 0$ и $\beta_s = 0$ для некоторого $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\beta_j = 1$ для $j \neq s$. В [**1**] исследовался случай, когда $\beta_j = 1$, $j = \overline{1,n}$.

Обозначим: $\omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{n}$, $j = \overline{1,n}$, корни n-й степени из -1, $\Omega := \left(\omega_j^{\nu-1}\right)_{\nu,j=1}^n$, $\alpha := (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^T$. Очевидно, $\det\Omega \neq 0$. Введем $a_\nu := \hat{\alpha}_\nu\omega_1^{\nu-1}$, $\nu = \overline{1,n}$, где $\hat{\alpha}_\nu$ есть компоненты вектора $\hat{\alpha} := \left(\Omega^T\right)^{-1}\alpha$. Пусть $\tilde{a}_j := a_j - \frac{2a_{j-1}}{\omega_1^{2(s-1)}} + \frac{a_{j-2}}{\omega_1^{4(s-1)}}$, где индексы изменяются циклически по модулю n. Введем

определители
$$\tilde{\Delta}_{12\ldots k}=\begin{vmatrix}\tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & \ldots & \tilde{a}_{k+5} & \tilde{a}_{k+4}\\ \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 & \ldots & \tilde{a}_{k+6} & \tilde{a}_{k+5}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde{a}_{n-k} & \tilde{a}_{n-k-1} & \ldots & \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2\end{vmatrix},\qquad k=\overline{1,n-2}.$$

Лемма 1. *Оператор L регулярен по Биркгофу (см. [**2**]) т. и т. т., когда $\tilde{\Delta}_{12\ldots m}\neq 0$ и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m+1}\neq 0$.*

Лемма 2. *Оператор L слабо нерегулярен т. и т. т., когда $\tilde{\Delta}_{12\ldots m}\neq 0$ и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m+1}=0$ или $\tilde{\Delta}_{12\ldots m}=0$ и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m+1}\neq 0$.*

Определение 1. Будем называть оператор L сильно нерегулярным, если он не является ни регулярным, ни слабо нерегулярным.

Функции Грина сильно нерегулярных операторов имеют экспоненциальный рост по спектральному параметру по любому направлению.

Лемма 3. *Оператор L сильно нерегулярен т. и т. т., когда и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m}=\tilde{\Delta}_{12\ldots m+1}=0$.*

Множество операторов L, для которых $\tilde{\Delta}_{12\ldots m}=\tilde{\Delta}_{12\ldots m+1}=0$ и выполняется:

1°. $\tilde{\Delta}_{12\ldots m-1}\neq 0$ и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m+2}\neq 0$ — обозначим NR_1;
2°. $\tilde{\Delta}_{12\ldots m-1}\neq 0$ и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m+2}=0$ — обозначим NR_1^0;
3°. $\tilde{\Delta}_{12\ldots m-1}=0$ и $\tilde{\Delta}_{12\ldots m+2}\neq 0$ — обозначим NR_1^1.

Операторы из множеств NR_1, NR_1^0 и NR_1^1 в соответствии с леммой 3 являются сильно нерегулярными.

Теорема 1. *Если оператор $L\in NR_1\cup NR_1^0\cup NR_1^1$, то система корневых функций этого оператора является полной в пространстве $L_2[0,1]$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Список литературы

[1] *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 428. № 6. С. 740–743.
[2] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

О расположении спектра задачи Трикоми для уравнений смешанного типа

Сабитов К. Б. (Стерлитамакский Институт прикладных исследований, Россия)
Турмыева Ю. К. (Стерлитамакский Институт прикладных исследований, Россия)

Рассмотрим уравнение с обобщенным оператором Трикоми
$$Tu\equiv \operatorname{sign} y\cdot|y|^n u_{xx}+u_{yy}-\lambda|y|^n u=0, \tag{1}$$

где $n = \text{const} > 0$, $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$, λ_1 и λ_2 — заданные, вообще говоря, комплексные параметры, в области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, и при $y < 0$ — характеристиками AC и CB уравнения (1).

Пусть $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Задача 1 (Задача Трикоми). Найти на множестве $D_+ \cup D_-$ решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, удовлетворяющее граничным условиям: $u(x,y) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma$, $u(x,y) = \psi(x,y)$, $(x,y) \in AC$, где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$.

В докладе приводятся условия относительно параметров λ_1 и λ_2, при которых однородная задача Трикоми имеет только нулевое решение при любом $n > 0$. Отсюда получены множества на комплексной плоскости λ, где не лежат точки спектра задачи Трикоми. Получен следующий основной результат.

Теорема 1. *На множестве чисел λ_1 и λ_2, удовлетворяющих неравенству*

$$2 \operatorname{Re} \lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_2 > |\lambda_2| - 2p,$$

нет спектра задачи Трикоми, где p — положительная постоянная, зависящая только от меры области D_+.

Отметим, что в работе **[1]** изучен случай $n = 0$.

Список литературы

[1] *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1977–1984.

Теоремы равносходимости для операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами–распределениями

Садовничая И. В. (Московский государственный университет, Россия)

Изучается оператор Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \tag{1}$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ с граничными условиями Дирихле. Предполагается, что потенциал $q(x)$ является распределением первого порядка сингулярности, т. е. $q \in W_2^{-1}[0,\pi]$, а именно, $q(x) = u'(x)$, $u \in L_2[0,\pi]$ (производная здесь понимается в смысле распределений). По поводу определения и свойств операторов такого вида см. **[1]**. Изучается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимости разложения функции f в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L с ее разложением в ряд Фурье по системе синусов — собственных функций оператора $L^0 = -d^2/dx^2$ с теми же граничными условиями. Найдено достаточное условие (в терминах первообразной потенциала) такой равносходимости для любой функции f из пространства $L_1[0,\pi]$.

Теорема 1. *Пусть $Ly = -y'' + q(x)y$ – оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, а комплекснозначная функция $u \in L_\infty[0,\pi]$ и удовлетворяет условию (полагаем u периодически продолженной за отрезок $[0,\pi]$):*

$$\sup_{0\le x\le\pi}\ \sup_{0<h\le\pi} \int\limits_{h\le|t|\le\pi} \left|\frac{u(t+x+h)-u(t+x)}{t}\right| dt \le C < +\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ систему собственных и присоединенных функций оператора L, а через $\{w_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — биортогональную к ней. Тогда для любой функции $f(x)$ из пространства $L_1[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{m} c_{n,0}\sin(nx) \right\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

Здесь $c_n = (f(x), w_n(x))$, $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin nx)$.

Замечание 1. Условию (2) удовлетворяют, например, непрерывные функции, модуль непрерывности которых удовлетворяет оценке $\omega(u;\delta) \le \dfrac{C}{|\ln\delta|}$; функции с интегральным модулем непрерывности $\omega_1(u;\delta) \le C\delta$, в частности, все функции ограниченной вариации.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-90408 и гранта ведущих научных школ НШ-3514.2010.1.

Список литературы

[1] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды Московского Мат. Общества. 2003. Т. 64. С. 159–219.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями

Садыбеков М. А. (Институт математики, информатики и механики, Казахстан)

В докладе в области $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассматривается задача о нахождении решения уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и краевым условиям вида

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t) + b_1u_x(1,t) + a_0u(0,t) + b_0u(1,t) = 0, \\ c_1u_x(0,t) + d_1u_x(1,t) + c_0u(0,t) + d_0u(1,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $a_k, b_k, c_k, d_k,\ k = 0,1$ — комплексные числа.

Задачи параболического типа с двухточечными краевыми условиями общего вида (3) изучались ранее в работе Н. И. Ионкина и Е. И. Моисеева

[1], где в предположении усиленной регулярности условий (3) модифицированным методом разделения переменных построено решение задачи (1)–(3), доказана его единственность и устойчивость по начальным данным в различных нормах.

В случае же, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, вопрос о базисности систем собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора до конца окончательно еще не решен. И в таком случае задача (1)–(3) не всегда может быть решена методом разделения переменных. В [2] был обоснован модифицированный метод разделения переменных при решении задачи (1)–(3) для одного случая краевых условий, называемых в настоящее время условиями Самарского–Ионкина.

Однако, даже в простейшем случае $q(x) \equiv 0$ до сегодняшнего дня не было единого способа решения и доказательства корректности задачи, не зависящего от свойств базисности соответствующего обыкновенного дифференциального оператора.

В настоящем докладе предлагается новый метод решения задачи (1)–(3) для случая, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными. Предлагаемый метод решения задачи может быть применим для построения как классического, так и для различных типов обобщенных решений.

Теорема 1. *Решение задачи* (1)–(3) *в случае регулярных, но не усиленно регулярных условий, при* $q(x) = q(1-x)$ *всегда может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух краевых задач с усиленно регулярными краевыми условиями типа Штурма.*

Список литературы

[1] *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1284–1295.

[2] *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.

О связи сходимости последовательности полугрупп со сходимостью соответствующих им мер

Сакбаев В. Ж. (МФТИ, Россия)
Смолянов О. Г. (МГУ, Россия)

Для описания диффузии и квантовой динамики квазичастицы с эффективной массой, зависимость которой от координаты носит разрывный характер, изучается семейство гамильтонианов (т. е. самосопряженных операторов), являющихся самосопряженными расширениями формального дифференциального оператора с разрывными коэффициентами. При этом исследуются сходимость полугрупп Шредингера, порождаемых сглаженными гамильтонианами, к полугруппе, порождаемой исходным гамильтонианом, а также сходимость последовательности порожденных полугруппами мер на множестве функций со значениями в конфигурационном пространстве.

Пусть $\{\mathbf{L}_n\}$ — последовательность действующих в гильбертовом пространстве $H = L_2(R)$ равномерно эллиптических операторов с гладкими коэффициентами, аппроксимирующих гамильтониан $\mathbf{L}$. Обозначим через Cyl алгебру цилиндрических подмножеств в пространстве $C(R_+, R)$, каждое из которых определяется значениями функций в конечном наборе точек $t_1, ..., t_m \in R_+$. Пусть каждому $n \in \mathbf{N}$ сопоставлен диффузионный случайный процесс ξ_n, производящим оператором которого является гамильтониан $\mathbf{L}_n$. Последовательности случайных процессов $\{\xi_n\}$ соответствует последовательность мер $\{\mu_n\}$ на минимальной σ-алгебре $\digamma$, содержащей алгебру цилиндрических функций Cyl, таким образом, что мера μ_n определяет полугруппу $e^{\mathbf{L}_n t}$ при помощи равенств

$$(v, e^{\mathbf{L}_n t}u) = \int\limits_{C(R,R)} v(\xi(0))u(\xi(t))d\mu_n(\xi), \ \forall \ t > 0, \, u, v \in W_2^2(R). \tag{1}$$

Обозначим через $\urcorner$ топологию на линейном пространстве мер, заданных на измеримом пространстве $(C(R_+, R), \digamma)$, порожденную семейством функционалов $\{P_{v,T}, \ T > 0, \ v \in H\}$, где при каждом $v \in H$, $T > 0$ функционал $P_{v,T}$ задан равенством

$$P_{v,T}(\mu) = \sup_{t \in [0,T], \, \|w\|_H = 1} \left| \int\limits_{C(R,R)} w(\xi(0))v(\xi(t))d\mu(\xi) \right|.$$

Теорема 1. *Пусть μ_n — последовательность мер, соответствующая некоторой последовательности диффузионных процессов ξ_n с производящими операторами $\mathbf{L}_n$. Тогда сходимость последовательности полугрупп $\{e^{\mathbf{L}_n t}\}$ в сильной операторной топологии, равномерная на каждом отрезке полуоси R_+, равносильна сходимости последовательности мер μ_n в топологии $\urcorner$.*

Если одно из равносильных условий выполнено, то тогда предельная оператор-функция $\mathbf{F}$ последовательности полугрупп $\{e^{\mathbf{L}_n t}\}$ является полугруппой, причем предельная мера ν порождает полугруппу $\mathbf{F}$ согласно равенству (1) *и определяется по полугруппе $\mathbf{F}$ системой равенств*

$$\nu(A^{t_1,...,t_m}_{B_1,...,B_m}) = (\chi_{B_m}, \mathbf{F}(t_m - t_{m-1})\mathbf{P}_{B_{m-1}}\mathbf{F}(t_{m-1} - t_{m-2})...\mathbf{P}_{B_2}\mathbf{F}(t_2 - t_1)\chi_{B_1}),$$

для каждого множества $A^{t_1,...,t_m}_{B_1,...,B_m} \in Cyl$, заданного условием

$$A^{t_1,...,t_m}_{B_1,...,B_m} = \{\xi \in C(R_+, R) : \ \xi(t_j) \in B_j \ \forall \ j \in \overline{1,m}\},$$

где $t_1, ..., t_m \in R_+$, B_j — борелевские подмножества R, а $\mathbf{P}_B$ — оператор умножения на индикаторную функцию χ_B множества B.

Дискретизация гиперболических уравнений Лиувиллевского типа

Сакиева А. У. (Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия)

Уравнение в частных производных гиперболического типа

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

называется уравнением типа Лиувилля, если оно имеет интегралы по обоим характеристическим направлениям: т. е. имеет x-интеграл $W(x, y, u, u_y, u_{yy}, ...)$ и y-интеграл $V(x, y, u, u_x, u_{xx}, ...)$.

Аналогично, дифференциально-разностное уравнение вида

$$\frac{d}{dx}u(n+1, x) = f(x, u(n, x), u(n+1, x), \frac{d}{dx}u(n, x)) \tag{2}$$

с неизвестной функцией $u(n, x)$, зависящей от непрерывной переменной x и дискретной переменной n, является полудискретным уравнением Лиувиллевского типа, если существуют функции F и I, зависящие от конечного числа аргументов x, $\{u(n+k, x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\left\{\frac{d^k}{dx^k}u(n, x)\right\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что $D_x F = 0$ и $DI = I$, где D_x — оператор полного дифференцирования по x, а D — оператор сдвига: $Dp(n) = p(n+1)$ (см. [**1**], [**2**]).

Уравнение (2) называется дискретным аналогом уравнения (1), если в пределе при сгущении сетки по $n = y/\epsilon$ уравнение (2) переходит в уравнение(1). В докладе предполагается обсуждение эффективного алгоритма отыскания дискретных аналогов Лиувиллевского типа для уравнений вида (1), которые сами являются уравнениями Лиувиллевского типа. Суть алгоритма состоит в том, что предполагается, что уравнение (1) и его дискретный аналог имеют общий интеграл. Для интегрируемых по Дарбу уравнений (1) построены их полудискретные аналоги. Для этого мы берем для каждого интегрируемого уравнения (1) его интеграл $W(x, y, u, u_y, u_{yy})$ или $V(x, y, u, u_x, u_{xx})$, и по этому интегралу строим полудискретное уравнение $u_{1x} = f(x, u, u_1, u_x)$ такое, что для этого искомого уравнения функция W или V является n-интегралом (см. [**3**]).

Пример 1. Для уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$ y-интегралом является функция $V = u_{xx} - 0.5{u_x}^2$. Вычисления показывают, что полудискретный аналог этого уравнения есть уравнение $u_{1x} = u_x + Ce^{0.5(u+u_1)}$, $C = \mathrm{const}$, для которого эта же функция V является n-интегралом.

Список литературы

[1] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* On Darboux Integrable Semi-Discrete Chains // J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 434017 (14 pp).

[2] *Адлер В. Э., Старцев С. Я.* О дискретных аналогах уравнения Лиувилля // ТМФ. 121:2. 1999. С. 271–289.

[3] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability // arXiv:1102.1236v1 [nlin.SI] 7 feb 2011.

Спектральное разложение на всей прямой функции Грина для двухслойной среды по фундаментальным функциям самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля

Салтыков Е. Г. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Теорема 1. *Решение $u(z,x)$ уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2(z)u = -2\delta(z-z')\delta(x-x'), \qquad (x,z) \in R^2,$$

$k^2(z) = \varepsilon_1$ при $z < 0$, $k^2(z) = \varepsilon_2$ при $z > 0$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,2$, по переменной x не является абсолютно интегрируемой функцией на всей оси x, удовлетворяет в точках разрыва первого рода функции $k^2(z)$ условиям сопряжения (непрерывности функции u и ее нормальной к границе разрыва первого рода коэффициента производной), представимо при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ в виде

$$u(z,x) = \sum_{i=1,2} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\mu^2-\varepsilon_i}|x-x'|}}{\sqrt{\mu^2-\varepsilon_i}} u_i(z,\mu)u_i(z',\mu)\, dp_i(\mu), \qquad x,x',z,z' \in R^1. \tag{1}$$

Функции $u_1 = \psi_1$ и $u_2 = \varphi_2$ являются ограниченными функциями на всей оси z, удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{d^2 u_i}{dz^2} - k^2(z)u_i = (\mu^2 - \varepsilon_i)u_i, \qquad \mu \in R^1, \qquad i = 1,2, \tag{2}$$

и указанным выше условиям сопряжения в точке $z = 0$, а $p_i(\mu)$ — отличные от нуля элементы спектральной меры, представляющей собой диагональную матрицу-функцию,

$$dp_1(\mu) = d\mu/(a_1^{1,2}(\mu)b_1^{1,2}(\mu)\cdot 2\pi), \quad dp_2(\mu) = d\mu/(a_2^{2,1}(\mu)b_2^{2,1}(\mu)\cdot 2\pi).$$

Здесь коэффициенты $a_1^{1,2}$, $a_2^{2,1}$, $b_1^{1,2}$, $b_2^{2,1}$ отличны от нуля при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и определяются из равенств

$$b_1^{1,2}(\mu)\varphi_1(z,\mu) + a_1^{1,2}(\mu)\varphi_1(z,-\mu) = \psi_1(z,\mu),$$
$$b_2^{2,1}(\mu)\psi_2(z,\mu) + a_2^{2,1}(\mu)\psi_2(z,-\mu) = \varphi_2(z,\mu),$$

при этом функции ψ_2 и φ_1 являются неограниченными на всей прямой z решениями уравнений (2).

Представление (1) *понимается в смысле принципа предельного поглощения, применяемого при* $\operatorname{Im} k^2(z) \geqslant 0$ [**1**, **2**].

Представление (1) *понимается в смысле главного значения, когда верхние пределы в обоих интегралах стремятся к бесконечности одновременно.*

Список литературы

[1] *Дмитриев В. И., Салтыков Е. Г.* Новое представление функции Грина задачи Зоммерфельда для проводящего однородного полупространства // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. № 4 (298). С. 79–80.

[2] *Салтыков Е. Г.* Спектральное разложение на всей прямой функции Грина для двухслойной среды по собственным функциям несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля// Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 687–691.

О полиномиальной нормальной форме автономных систем с одним нулевым или двумя мнимыми элементами спектра

Самовол В. С. (Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, Россия)

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\frac{dx}{dt} = Q(x), \tag{1}$$

где $x, Q(x) \in R^{n+l}$, $n > 0$, $l = 1$ или $l = 2$, $Q(x)$ — функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси, и одно нулевое ($l = 1$), либо два чисто мнимых ($l = 2$) собственных числа.

Теорема 1. *Для любой системы вида* (1) *за исключением множества коразмерности бесконечность для любого целого числа $k > 0$ существует невырожденное преобразование класса C^k, приводящее систему к полиномиальной резонансной нормальной форме в малой окрестности начала координат.*

Теорема обобщает теорему Стернберга–Ченя (теорема 12.2 из [**1**]) на случай систем с одним нулевым или двумя чисто мнимыми собственными числами.

Список литературы

[1] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир. 1970.

Асимптотическое решение задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами

Самойленко Ю. И. (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина)

Рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами вида

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad n \in \mathbf{N}, \quad t \in (0;T], \tag{1}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}\right), \tag{2}$$

где

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

$a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k \geq 0$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; функция $f(\eta)$ принадлежит пространству быстро убывающих функций.

При помощи метода погранслоя [**1**] и метода ВКБ [**2**] предложен алгоритм построения асимптотического солитоноподобного решения задачи (1), (2). Показано, что вид такого решения зависит от порядка сингулярности в

(1), т. е. числа n. В частности, при четном n асимптотическое приближение для решения задачи (1), (2) имеет вид **[3, 4]**

$$u_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(V_j(t,\tau_1) + W_j(\tau_1,\tau_2)\right) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$\tau_1 = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}, \quad \tau_2 = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}},$$

где $V_j(t,\tau_1)$, $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, являются быстро убывающими относительно $\tau_1 \in \mathbf{R}$ функциями, бесконечно дифференцируемая функция $x=\varphi(t)$, $t\in[0;T]$, описывающая линию разрыва решения невозмущенного уравнения, определяется в процессе построения решения **[5]**.

Доказана теорема об асимптотической точности построенного решения.

Список литературы

[1] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

[2] *Maslov V. P., Omel'yanov G. A.* Geometric asymptotics for PDE. I., Providence: American Math. Society, 2001.

[3] *Самойленко Ю. И.* Асимптотические разложения для однофазовых солитоноподобных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малой дисперсией // Научный вестник Черновецкого ун-та: Сборник научных работ. Математика. 2007. Вып. 336–337. С. 1641–1647 (на украинском).

[4] *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. И.* Асимптотические решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. 2007. Т. 59, № 1. С. 122–132 (на украинском).

[5] *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. И.* Метод погранслоя и условие типа Гюгонио для уравнения Кортевега–де Фриза // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. № 2. С. 111–129.

Решение уравнений симметричного пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды

Самохин В. Н. (Московский государственный университет печати им. Ивана Федорова, Россия)

Рассматривается стационарная система уравнений пограничного слоя неньютоновской среды, модель которой предложена в **[1]** с целью модификации системы уравнений Навье–Стокса в связи с проблемой однозначной разрешимости этих уравнений. Соответствующие уравнения пограничного слоя являются обобщением системы уравнений Прандтля и имеют вид

$$\nu(1+3k(u_y)^2)u_{yy} - uu_x - vu_y = -U(x)U_x(x), \quad u_x + v_y = 0. \qquad (1)$$

Здесь $(x,y)\in D=\{0<x<X, 0<y<\infty\}$, ν и k — положительные постоянные, $U(x)$ — заданная функция. Задача о продолжении пограничного слоя для системы уравнений (1) рассмотрена в **[2]**, **[3]** и ряде других работ. Доказана однозначная разрешимость задачи и изучены некоторые вопросы качественного поведения полученного решения.

В докладе рассматривается случай симметричного пограничного слоя, то есть система уравнений (1) решается при условиях

$$u(0,y)=0,\ u(x,0)=0,\ v(x,0)=0,\ u(x,y)\to U(x) \qquad \text{при } y\to\infty. \qquad (2)$$

При этом предполагается $U(0) = 0$, $U_x(0) > 0$.

Для решения задачи (1)–(2) применен метод работы [**4**].

Теорема 1. *Предположим, что функция $U(x)$ является гладкой при $0 < x < X$. Тогда в области D существует, причем единственное, решение задачи (1)–(2), обладающее следующими свойствами: $u(x,y) > 0$ в D, производные функций $u(x,y)$, $v(x,y)$, входящие в систему уравнений (1), непрерывны и ограничены в D; $u(x,y) \to 0$, $u_y(x,y) \to 0$, $u_{yy}(x,y) \to 0$ при $x \to 0$; $u_x(x,y) \to a(y)$ при $x \to 0$, где $a(y)$ — решение уравнения*

$$a^2(y) - \int\limits_0^y a(\zeta)\,d\zeta \cdot \frac{da(y)}{dy} - \nu \frac{d^2 a(y)}{dy^2} = (U'_x(0))^2$$

с условиями

$$a(0) = 0,\ a(y) \to U'_x(0) \quad \textit{при } y \to \infty.$$

Список литературы

[1] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, Физматлит, 1970.

[2] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2010. Т. 28.

[3] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей // Вестник Московского государственного университета печати. 2010. Т. 4. С. 64–71.

[4] *Введенская Н. Д.* О решении уравнений пограничного слоя в окрестности критической точки // Ж. вычисл. мат. и матем. физ. 1967. Т. 7. С. 924–929.

Сильная и слабая инвариантность множеств относительно нелинейной импульсной управляемой системы

Самсонюк О. Н. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия)

Рассматривается нелинейная импульсная управляемая система $(\mathcal{D})$ с траекториями ограниченной вариации и управлениями, являющимися ограниченными борелевскими векторными мерами. Множество траекторий этой системы совпадает с множеством обобщенных решений нелинейной управляемой системы [**1, 2**]

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big) + G\big(t, x(t)\big) v(t),\\ u(t) \in U, \quad v(t) \in K \quad \dot{\forall}\, t \in T, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ — абсолютно непрерывная вектор-функция, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — интегрируемые вектор-функции, $U \subset \mathbb{R}^r$ — компактное множество, $K \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый замкнутый конус, $T = [a,b]$ — фиксированный отрезок. Функции $(t,x,u) \to f(t,x,u)$ и $(t,x) \to G(t,x)$ заданы, непрерывны по всем переменным, локально липшицевы по x и удовлетворяют условию не более чем линейного роста по x, множество $f(t,x,U)$ выпукло.

Определение 1. Функция $x(\cdot) \in BV^n(T)$ называется траекторией системы $(\mathcal{D})$, если найдется такая последовательность процессов системы (1) $\big\{\big(x_k(\cdot), u_k(\cdot), v_k(\cdot)\big)\big\}$, что выполняются условия

$$\sup_k ||v_k||_{L_1} < +\infty,$$
$$x_k(t) \to x(t) \quad \forall\, t \in T.$$

Здесь $BV^n(T)$ — банахово пространство n-мерных функций ограниченной вариации на T.

Введены понятия сильно и слабо инвариантных относительно импульсной управляемой системы $(\mathcal{D})$ множеств и доказаны соответствующие проксимальные критерии. В отличие от работы **[3]**, где рассматривалась аналогичная система, но с неотрицательным импульсным управлением ($K \subseteq \mathbb{R}^m_+$), введенные определения адаптированы к неавтономности нелинейной импульсной системы по «быстрому» времени, в котором осуществляется импульсная динамика и, в частности, скачки траекторий.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СО–УрО РАН, интеграционный проект № 85, а также при поддержке РФФИ, грант 11-01-00672.

Список литературы

[1] *Самсонюк О. Н., Сесекин А. Н.* Оценки и свойства интегральных воронок траекторий нелинейных импульсных систем // Тез. докл. II Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 28 июня–4 июля 2010 г. 2010. С. 64–65.

[2] *Dykhta V. A., Samsonyuk O. N.* Some applications of Hamilton-Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems // European Journal of Control. Nonsmooth analysis, Control and Optimization. 2011. Vol. 17. P. 55–69.

[3] *Перейра Ф. Л., Силва Ж. Н., Оливейра В.* Инвариантность для импульсных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 57–71.

Признак базисности Рисса элементов пространства L_2

Сарсенби А. М. (Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Казахстан)

В спектральной теории линейных несамосопряженных дифференциальных операторов особое место занимает вопрос о базисности их корневых векторов в том или ином классе функций. Большинство широко известных систем функций так или иначе связаны с дифференциальными операторами, и их глубокое изучение вызвано отчасти потребностями спектральной теории.

Недавно в работе **[1]** автора настоящей заметки было установлено, что равномерная ограниченность почти всюду модулей корневых векторов прямого и сопряженного дифференциальных операторов второго порядков является необходимым и достаточным условием их базисности Рисса в классе L_2.

В случае произвольных систем из класса L_2, не связанных с конкретным дифференциальным оператором, фактов, подобных перечисленным выше, не наблюдается. Так, системы вида **[2]** $\{|x|^{\alpha}e^{inx}\}$, $\{|x|^{-\alpha}e^{-inx}\}$, где n — целое число, $0 < \alpha < 1/2$, являются биортогонально сопряженными, почти нормированными. Каждая из них образует базис пространства $L_2(-\pi,\pi)$, но не базис Рисса.

Полиномы Лежандра (см., например, [**3**, стр. 44]) образуют базис Рисса пространства $L_2(-1,\ 1)$ (ортонормированный базис), но они не ограничены.

Тем не менее, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть каждая из биортогонально сопряженных систем* $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ *из класса* $L_2(G)$ *полна, и выполнены следующие равномерные оценки:*

$$\|u_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1, \qquad \|v_k\|_{L_\infty(G)} \le C_2.$$

Тогда каждая из этих систем образует базис Рисса в $L_2(G)$.

Список литературы

[1] *Сарсенби А. М.* Критерии базисности Рисса систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // Доклады РАН. 2008. Т. 419. № 5. С. 601–603.

[2] *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях // Доклады АН СССР. 1948. Т. 62. № 2. С. 157–160.

[3] *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: Наука, 1963.

Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля с потенциалом-распределением в пространстве вектор-функций

Сафонова Т. А. (Поморский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия)

Пусть элементы матрицы $P := (p_{ij})_{i,j=1}^n$ — действительнозначные, измеримые на полуоси $R_+ := [0;+\infty)$ функции, такие, что $p_{ij} = p_{ji}$ и $p_{ij}^2 \in L^1_{loc}(R_+)$ при $i,j = 1,2,\dots,n$. Предполагая, что вектор-функции y и $y_P^{[1]} := y' - Py$ уже определены и являются локально абсолютно непрерывными на R_+, рассмотрим однородное симметрическое дифференциальное уравнение второго порядка с матричными коэффициентами

$$-(y_P^{[1]})' - Py_P^{[1]} - P^2 y = 0, \qquad x \in R_+. \tag{1}$$

Пусть далее матрица $P^{(1)} := (p_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^n$ обладает теми же свойствами, что и матрица P, а вектор-функции y, $y_{P^{(1)}}^{[1]} := y' - P^{(1)}y$ определены, причем y, $y_{P^{(1)}}^{[1]} \in AC_{loc}(R_+)$. Через T обозначим фундаментальную матрицу системы решений уравнения

$$-(y_{P^{(1)}}^{[1]})' - P^{(1)} y_{P^{(1)}}^{[1]} - (P^{(1)})^2 y = 0, \qquad x \in R_+. \tag{2}$$

Очевидно, что столбцы матрицы T имеют вид $(u_j, (u_j)_{P^{(1)}}^{[1]})^t$ $(j = 1,2,\dots,2n)$, где u_j — линейно независимые векторные решения уравнения (2). Доклад посвящен установлению достаточных условий на коэффициенты матриц P и $P^{(1)}$ и фундаментальную систему решений уравнения (2), обеспечивающих асимптотическую близость решений уравнений (1) и (2). В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрицы P, $P^{(1)}$ и T таковы, что*

$$\int_0^{+\infty} \left\| T^{-1} \begin{pmatrix} P - P^{(1)} & 0 \\ -P^2 + (P^{(1)})^2 & -P + P^{(1)} \end{pmatrix} T \right\| < +\infty.$$

Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ уравнение (1) имеет решение $\phi(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] u_j(x) \quad \text{и} \quad \phi_P^{[1]}(x) = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] (u_j)_{P^{(1)}}^{[1]}(x),$$

где $a_i(x) = o(1)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ при $x \to +\infty$, а $\|.\|$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы.

Полученные результаты применяются для построения примеров реализации случая максимального дефектного числа для дифференциального оператора, порожденного выражением вида $-y'' + Qy$, где $Q(x)$ — квадратная матрица второго порядка с элементами, содержащими δ-функцию.

Автор выражает признательность проф. Мирзоеву К. А. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ № 11-01-00790-а и АВЦП № 2.1.1/10641.

Топологические инварианты линейных расширений квазипериодических потоков

Сахаров А. Н. (Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Россия)

В докладе обсуждаются вопросы топологической классификации линейных потоков на косом произведении $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^2$ с квазипериодическим потоком на торе $\mathbb{T}^2$. Без ограничения общности, можно считать, что такие потоки порождаются векторными полями вида

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — угловые координаты на торе $\mathbb{T}^2$, $\omega \in \mathbb{R}^2$ — фиксированный вектор с рационально независимыми компонентами, $x \in \mathbb{C}^2$, $A(\varphi)$ — матрица-функция на $\mathbb{T}^2$. Таким образом, рассматриваемые потоки являются линейными расширениями квазипериодического потока на $\mathbb{T}^2$. Так как вектор частот ω фиксирован, то рассматривается задача классификации таких линейных расширений с точностью до послойной топологической эквивалентности.

Линейное расширение индуцирует так называемое проективное расширение — поток на компактном многообразии $\mathbb{T}^2 \times S^2$ [**1**].

Теорема 1. *Линейные расширения, порождаемые векторными полями вида* (1), *послойно топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда индуцируемые ими проективные расширения топологически эквивалентны.*

Важными топологическими инвариантами проективных расширений являются число и тип минимальных множеств.

Теорема 2. *Проективное расширение может иметь одно или два минимальных множества, либо фазовое пространство $\mathbb{T}^2 \times S^2$ является несчетным объединением минимальных множеств.*

В заключение обсуждаются вопросы существования "среднего вращения" слоя $S^2_\varphi = \{\varphi\} \times S^2$, подобного числу вращения слоя вещественных проективных потоков **[2]**. Для некоторых частных случаев доказано существование постоянной матрицы вращения $R \in SO(3)$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00730.

Список литературы

[1] *Коломиец М. Л., Сахаров А. Н.* Классификация проективных расширений квазипериодических потоков // ≪Нелинейные колебания механических систем≫. Н. Новгород. 2008. С. 295–299.

[2] *Johnson R. A, Moser J.* The rotation number for almost periodic potentials // Comm. Math. Phys. 1983. V. 84. № 3. P. 403–435.

Теоремы типа Мюнца–Саса для весовых пространств

Седлецкий А. М. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Речь идет о полноте систем экспонент

$$e(\Lambda) = (e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re}\lambda_n > 0, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$$

в весовых пространствах $C_{0,\alpha} = C_{0,\alpha}[0,\infty)$ и $L^{p,\alpha} = L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$, определяемых следующим образом.

Через $C_{0,\alpha}$ обозначается пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций, таких, что

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)(1+t)^{\alpha} = 0,$$

с нормой

$$\|f\|_{C_{0,\alpha}} = \max_{t\geq 0} f(t)(1+t)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Через $L^{p,\alpha}$ обозначается пространство измеримых на полупрямой $\mathbb{R}_+$ функций с нормой

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p (1+t)^{\alpha}\, dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Основной результат доклада состоит в следующем.

Утверждение 1. *Если B — какое-нибудь из пространств*

$$C_{0,\alpha}, \quad \alpha < 0 \quad \text{или} \quad L^{p,\alpha}, \quad 1 \leq p < \infty,\ \alpha < -1,$$

то полнота системы $e(\Lambda)$ в B равносильна условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1/\operatorname{dist}(iy,\Lambda))}{1+y^2} dy = +\infty, \tag{1}$$

то есть расходимости хотя бы одного из слагаемых в левой части (надо иметь в виду, что данный интеграл может расходиться только к $+\infty$).

Раньше [**1**] была известна необходимость условия (1) для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $C_{0,0}$.

В качестве комментария отметим, что расходимость ряда (так называемое условие Саса) означает, что точек λ_n „достаточно много“, тогда как расходимость интеграла характеризует „достаточно тесное“ прилегание этих точек к мнимой оси.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00225-а, и программы НШ-7322.2010.1.

Список литературы

[1] *Седлецкий А. М.* Аппроксимация типа Мюнца–Саса в прямых произведениях пространств // Известия РАН. Серия матем. 2006. Т. 70, № 5. С. 179–196.

Распределение полных частот и показателей блуждаемости в пространстве решений линейной системы

Сергеев И. Н. (Московский государственный университет, Россия)

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянным оператором $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Каждому ее ненулевому решению x поставим в соответствие следующие величины: характеристические *показатель* и *степень* [**1**]

$$\chi(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|, \qquad \beta(x) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \log_t \left(|x(t)|\, e^{-\chi(x)t}\right),$$

а также *показатель блуждаемости* и *полную частоту* [**2**]

$$\rho(x) \equiv \inf_{L\in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\gamma(Lx), \qquad \sigma(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(x,m,t),$$

где

$$\gamma(x) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) \right| d\tau,$$

а $\nu(x,m,t)$ — число нулей на промежутке $(0;t]$ функции

$$(x(\tau),m) \equiv x_1(\tau)m_1 + \ldots + x_n(\tau)m_n, \qquad x \equiv (x_1,\ldots,x_n), \quad m \equiv (m_1,\ldots,m_n).$$

Теорема 1. *В пространстве решений любой системы* (1) *существует флаг*

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n, \qquad \dim S_i = i, \quad i = 0,1,\ldots,n, \tag{2}$$

удовлетворяющий равенствам

$$\sigma(x) = |\operatorname{Im}\lambda_i|, \qquad x \in S_i \setminus S_{i-1}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — собственные значения оператора A, упорядоченные по нестрогому убыванию чисел $|\operatorname{Im}\lambda_i|$.

Если для каждой жордановой клетки оператора A пронумеровать все m (порядок клетки) отвечающих ей одинаковых собственных значений числами $0,1,\ldots,m-1$, то каждое из n собственных значений λ оператора A получит свой номер $k(\lambda)$.

Теорема 2. *В пространстве решений любой системы* (1) *существует флаг* (2), *удовлетворяющий равенствам*

$$(\chi(x), \beta(x), \rho(x)) = (\operatorname{Re}\lambda_i, k(\lambda_i), |\operatorname{Im}\lambda_i|), \qquad x \in S_i \setminus S_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — *собственные значения оператора* A, *упорядоченные по лексикографическому возрастанию троек* $(\operatorname{Re}\lambda_i, k(\lambda_i), -|\operatorname{Im}\lambda_i|)$.

Замечание 1. Упоминаемые в теоремах 1 и 2 флаги (2) в пространстве решений какой-либо одной системы (1), вообще говоря, не совпадают друг с другом.

Замечание 2. Утверждения о существовании флагов (2), удовлетворяющих равенствам типа (3) или (4), не распространяются на линейные неавтономные системы.

Список литературы

[1] *Демидович Б. П.* Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем // Матем. сб. 66 (108). № 3 (1965). С. 344–353.

[2] *Сергеев И. Н.* Сравнение полных частот и показателей блуждаемости решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1667–1668.

Зависимость почти периодических решений уравнения $\ddot{x} = |x| + p(t) + \varepsilon$ от параметра

Сидоров Е. А. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия)

Иванов И. Ф. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия)

Ранее **[1]** рассматривался вопрос о зависимости знакопостоянных почти периодических (п. п.) решений от параметра ε (> 0) для аналогичного уравнения 1-го порядка. В данном сообщении этот вопрос исследуется для уравнения 2-го порядка, причем и для знакопеременных п. п. решений, с использованием итераций иного типа, чем в **[1]**.

Ниже предполагается, что при $\varepsilon = 0$ для уравнения $\ddot{x} = |x| + p(t)$ существует п. п. (иногда периодическое) решение $x = \varphi(t) \in C^2(R)$, так что уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} = |x| - |\varphi(t)| + \ddot{\varphi}(t) \qquad (1)$$

Теорема 1. *Если п. п. функция* $\varphi(t) \in C^2(R)$ *такова, что* $|\varphi(t)| \geq |\ddot{\varphi}(t)|$, *и не является неотрицательной, то уравнение* (1) *имеет неотрицательное п. п. решение* $x = \varphi_1(t)$.

В случае зависимости п. п. решений от параметра $\varepsilon > 0$ справедлива

Теорема 2. *Пусть п. п. функция* $\varphi(t)$ *класса* $C^2(R)$ *удовлетворяет условиям:*

1°. *Существует последовательность промежутков* $(a_k, b_k), k \in Z$, *таких, что на* $(a_k, b_k) : \varphi(t) > 0$, *а на* $(b_k, a_{k+1}) : \varphi(t) < 0$;

2°. $b_{k+1} - b_k > \beta > 0$; $a_{k+1} - b_k < \alpha$;

3°. *Существует* $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что выполняется неравенство*

$$(\alpha + 2 \cdot \varepsilon_1) \cdot e^{\alpha + 2 \cdot \varepsilon_1} \cdot (1 - e^{-\beta})^{-1} < 1/3;$$

4°. *Функция* $\varphi(t)$ *должна быть такой, что при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует* $\varepsilon_1 (> 0) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Тогда для функции $y = x - \varphi(t)$ *соответствующее уравнение* $\ddot{y} = |y + \varphi| - |\varphi| + \varepsilon$ *имеет п. п. решение* $y = \Phi(t, \varepsilon)$ — *предел итерационной последовательности п. п. функций* $\{y_n(t, \varepsilon)\}$. *При этом* $y_0 \equiv 0$, *а* y_{n+1} *является единственным п. п.решением уравнения*

$$\ddot{y}_{n+1} = y_{n+1} + |y_n + \varphi| - |\varphi| - y_n + \varepsilon.$$

Таким образом, данное уравнение $\ddot{x} = |x| + p(t) + \varepsilon$ $(p(t) = -|\varphi(t)| + \ddot{\varphi(t)})$ *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *имеет п. п решение* $x(t, \varepsilon) = \varphi(t, \varepsilon) + \Phi(t, \varepsilon)$.

При доказательстве устанавливается: итерации y_n определяются индуктивно и являются п. п. функциями, причем $-3\varepsilon \le y_{n+1} \le y_n \le -\varepsilon$, и выполняется оценка $|y_{n+1} - y_n| \le 2/3 \cdot |y_n - y_{n-1}|$ $(n \ge 1)$.

Замечание 1. Утверждение теоремы справедливо и в отношении периодических функций, то есть если $\varphi(t)$ — периодическое решение (при выполнении соответствующих условий).

Замечание 2. Если $\varphi(t)$ не удовлетворяет условиям 3, 4, то исследование задачи становится значительно более сложным.

Список литературы

[1] *Сидоров Е. А.* О сосуществовании разнозначных периодических решений некоторых кусочно-дифференцируемых дифференциальных уравнений // Тезисы международн. конфер. ≪Дифференциальные уравнения и топология≫, посвященной 100-летию Л. С. Понтрягина. Москва, 17–22 июля 2008. С. 194–195.

Различные классы операторов преобразования Бушмана–Эрдейи

Ситник С. М. (Воронежский институт МВД России, Россия)

Операторы Бушмана–Эрдейи являются интегральными операторами специального вида с функциями Лежандра в ядрах. При определенном выборе параметров они являются одновременным обобщением операторов преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта и их сопряженных, операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах E. T. Copson по уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу в конце 1950-х годов. Впервые подробное изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х годах в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи, и продолжено в работах Higgins, Ta Li, Love, Habibullah, K. N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, В. И. Смирнова, В. В. Катрахова, Н. А. Вирченко, А. А. Килбаса и О. В. Скоромник. Название для этого класса операторов предложено автором, оно стало общепринятым.

Важность операторов Бушмана–Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями внутри области, доказательству вложения пространств И. А. Киприянова в весовые пространства С. Л. Соболева, установлению связей между операторами преобразования и волновыми операторами теории рассеяния, обобщению классических интегральных представлений для специальных функций Сонина и Пуассона и операторов преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта.

Основные результаты автора по операторам преобразования Бушмана–Эрдейи получены в [**1**]–[**7**], они подробно изложены в [**3**]–[**4**].

Список литературы

[1] *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток. 1990. 45 с.

[2] *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи// ДАН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.

[3] *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения// Обзор: В книге: ≪Исследования по современному анализу и математическому моделированию≫. (Под ред. В. Ф. Коробейника, А. Г. Кусраева). Владикавказ, ИМ РАН, 2008. С. 226–293.

[4] *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a survey// http://arxiv.org/abs/1012.3741, 141 P.

[5] *Ситник С. М.* Ограниченность операторов преобразования Бушмана–Эрдейи// Труды 5-ой международной конференции ≪Analytical Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE)≫, Том 1: Математический Анализ. Национальная Академия наук Белоруси, институт математики. Минск, 2010. С. 120–125.

[6] *Ситник С. М.* Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина–Пуассона// Научные Ведомости Белгородского государственного университета. 2010, № 5 (76), Выпуск 18, С. 135–153.

[7] *Ситник С. М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений// Вестник Самарского Государственного Университета (СамГУ). Естественнонаучная серия. 2008, № 8/1 (67), С. 237–248.

О существовании ручно вложенной сепаратрисы у диффеоморфизма Морса–Смейла

Скуднякова Д. С. (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия)

Доклад посвящен описанию результатов, полученных в соавторстве с В. З. Гринесом и О. В. Починкой.

Исследование диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности большей двух, представляет собой достаточно сложную задачу ввиду возможности дикого вложения инвариантных многообразий седловых периодических точек. Д. Пикстон [**1**] построил пример диффеоморфизма Морса–Смейла на трехмерной сфере, неблуждающее множество которого состоит из 4 неподвижных точек (источника, двух стоков и седла), и одна из одномерных сепаратрис является дико вложенной. В работе [**2**] показано, что хотя бы одна из одномерных сепаратрис для каждого из рассматриваемых диффеоморфизмов с таким неблуждающим множеством является ручно вложенной.

В докладе рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере $\mathbb{S}^3$, неблуждающее множество которых состоит из шести неподвижных точек, а блуждающее множество не содержит гетероклинических кривых. В силу работы [**3**], диффеоморфизмы рассматриваемого класса допускают дикие вложения сепаратрис седловых точек в окрестности стока или источника. Поэтому, задача топологической классификации диффеоморфизмов сводится к выяснению типа заузливания одномерных сепаратрис в пространстве $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Авторами установлено, что для любого диффеморфизма из рассмативаемого класса, содержащего единственную источниковую (стоковую) точку, хотя бы одна из одномерных сепаратрис является ручно вложенной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00730.

Список литературы

[1] *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16. № 2. P. 167–172.

[2] *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London). 2000. V. 6. № 4. P. 579–602.

[3] *Бонатти Хр., Гринес В. З, Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2005. Т. 250. С. 5–53.

Оценка типа Цвикеля для одного класса операторов Гильберта-Шмидта

Слоущ В. А. (Санкт–Петербургский государственный университет, Россия)

1. Речь пойдет об операторе вида $\mathbb{T}_{fg} := f(H)g(x)$. Здесь H — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$; $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — борелевская ограниченная функция; g — измеримая функция из $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. При этом предполагается, что функции f и g таковы, что оператор $\mathbb{T}_{fg}$ является оператором Гильберта–Шмидта. Для этого случая в работе даны оценки сингулярных чисел оператора $\mathbb{T}_{fg}$ в терминах функций f и g. Требования на гладкость коэффициентов оператора H не накладываются.

2. Более точно, $H = -\operatorname{div} g(x) \operatorname{grad} + p(x)$ — равномерно эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, с вещественными ограниченными коэффициентами. Для простоты можно считать, что $\inf \sigma(H) = 0$. Условимся о некоторых обозначениях:

$$a_0 := 0, \quad a_k := 2^k, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \Omega := [0,1)^d, \quad \Omega_m := \Omega + m, \quad m \in \mathbb{Z}^d. \qquad (1)$$

С каждой ограниченной борелевской функцией f на оси свяжем последовательность

$$u(f) := \{u_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}_+} : \quad u_k(f) := \sup\{|f(\lambda)|, \quad \lambda \in [a_k, a_{k+1})\}. \qquad (2)$$

Для каждой функции $g \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ определим последовательность

$$v(g) := \{v_n(g)\}_{n \in \mathbb{Z}^d} : \quad v_n(g) := \|g\|_{L_2(\Omega_n)}. \qquad (3)$$

Через $u(f)v(g)$ будем обозначать последовательность $\{u_k(f)v_n(g)\}_{(k,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}^d}$. Пусть $dk\,dn$ — считающая мера на $\mathcal{Z}:=\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}^d$; введем меру $d\nu:=a_{k+1}^{d/2}dk\,dn$ на $\mathcal{Z}$. Обозначим через $l_{p,q}(\mathcal{Z},d\nu)$, $p\in(0,\infty)$, $q\in(0,\infty]$, стандартные классы Лоренца, через $\mathfrak{S}_{p,q}$, $p\in(0,\infty)$, $q\in(0,\infty]$, — стандартные классы компактных операторов (см., например, [**1**]). Предположим, что справедливо включение

$$u(f)v(g)\in l_{p,q}(\mathcal{Z},d\nu),\quad p\in(0,2),\quad q\in(0,+\infty],\quad (\text{либо}\ \ p=q=2). \tag{4}$$

Следующее утверждение — основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть функции f и g удовлетворяют условию* (4). *Тогда справедливы включение* $\mathbb{T}_{fg}\in\mathfrak{S}_{p,q}(L_2(\mathbb{R}^d))$ *и оценка*

$$\|\mathbb{T}_{fg}\|_{\mathfrak{S}_{p,q}}\le C(p,q,d,H)\|u(f)v(g)\|_{l_{p,q}}. \tag{5}$$

В условиях теоремы 1 $\mathbb{T}_{fg}$ автоматически принадлежит классу Гильберта–Шмидта.

3. Исходными для нас являются работы [**1**], [**2**] и [**3**], где были получены утверждения о принадлежности оператора $\mathbb{T}_{fg}$ классам $\mathfrak{S}_{p,q}$, $p\in(0,2)$, в случае $H=i\nabla$. Для доказательства теоремы 1 необходимо комбинировать идеи работ [**1**], [**2**] и [**3**] и некоторые соображения, основанные на оценке ядра полугруппы e^{-tH}, $t>0$.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00458-а.

Список литературы

[1] *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32. Вып. 1 (193). С. 17–84.

[2] *Simon B.* Trace ideals and their applications // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979.

[3] *Birman M. Sh., Karadzhov G. E., Solomyak M. Z.* Boundedness Conditions and Spectrum Estimates for the Operators $b(X)a(D)$ and Their Analogs // Adv. in Soviet Math. 1991. № 7. P. 85–106.

Осреднение тонкой пластины, усиленной стержневыми включениями

Слуцкий А. С. (Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики, Россия)

Сообщение посвящено выводу дифференциального уравнения, описывающего изгиб тонкой пластины, армированной периодическими семействами разъединенных тонких стержней. Предполагаются, что пластина имеет малую относительную (безразмерную) толщину h, стержни не соединены, но расположены близко, на расстояниях порядка h. Материал стержней предполагается значительно более жестким, чем материал пластины: упругие коэффициенты пластины по порядку в h раз меньше, чем упругие коэффициенты армирующих пластину стержней. Из-за того, что стержни не соединены и их взаимодействие осуществляется только через податливый материал матрицы, алгоритм построения двумерной модели изгиба пластины существенно отличается от классических процедур теории композитных пластин и результат осреднения не совпадает со случаем стержней, скрепленных в единую периодическую сетку. Так предельная плоская задача о продольной деформации пластины теряет эллиптичность (композитный материал не „выдерживает“ сдвиговых нагрузок), поэтому рассматривается лишь „чистый“ изгиб пластины, подразумевающий симметрию геометрических форм, физических свойств и нагрузок относительно срединной плоскости. Осредненный дифференциальный оператор четвертого порядка получается суммированием неэллиптических операторов, порожденных каждым из семейств стержней. Этот оператор оказывается эллиптическим в том и только в том случае, если стержни хотя бы из двух семейств не являются параллельными. Получены явные формулы для коэффициентов возникающего дифференциального уравнения четвертого порядка. В качестве упрощенного примера рассмотрена аналогичная стационарная задача теплопроводности.

В случае двух пар симметрично расположенных взаимно перпендикулярных систем стержней с одинаковыми свойствами результирующее уравнение изгиба тонкой пластины принимает вид

$$\frac{\pi}{4}\mu R^4 s_1^{-1} s_2^{-1}\left(\frac{7\lambda+10\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial y_1^2\partial y_2^2}+\frac{7\lambda+10\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial y_2^4}\right)=F,$$

где w — прогиб пластины, (y_1, y_2) — декартова система координат в срединной плоскости пластины, λ, μ — коэффициенты Ламе материала тонких круглых стержней, имеющих радиус сечения hR, а hs_i — „шаг“ прямоугольной решетки в направлении оси y_i.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00759-а.

Управление процессом, описываемым разрывным телеграфным уравнением

Смирнов И. Н. (Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Россия)

В терминах обобщенного решения телеграфного уравнения, допускающего существование конечной энергии, изучаются задачи об отыскании явного аналитического вида граничных управлений, производимых на двух концах системы или на одном конце, при условии, что второй конец закреплен или свободен, смещением или упругой граничной силой и переводящих процесс колебаний этой системы из произвольно заданного начального состояния в произвольно заданное финальное состояние.

Для произвольных положительных чисел l_1 и l_2 рассмотрим стержень, расположенный вдоль отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant l_2$ и состоящий из двух участков: участка $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$, имеющего линейную плотность $\rho_1 = \mathrm{const}$ и коэффициент упругости $k_1 = \mathrm{const}$, и участка $0 \leqslant x \leqslant l_2$, имеющего линейную плотность $\rho_2 = \mathrm{const}$ и коэффициент упругости $k_2 = \mathrm{const}$. Если обозначить через $u(x,t)$ смещение точки стержня x в момент времени t, то процесс колебаний такого стержня, протекающий за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$, описывается разрывным телеграфным уравнением

$$u_{tt}(x,t)=\begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x,t)-c^2u(x,t) & \text{в } [-l_1 \leqslant x \leqslant 0]\times[0 \leqslant t \leqslant T], \\ a_2^2 u_{xx}(x,t)-c^2u(x,t) & \text{в } [0 \leqslant x \leqslant l_2]\times[0 \leqslant t \leqslant T], \end{cases} \tag{1}$$

в котором $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$.

Настоящий доклад посвящен проблемам решения указанных задач граничного управления в следующих случаях:

1°. В случае, когда колеблющийся стержень состоит из двух разнородных участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы.

2°. В случае, когда колеблющийся стержень состоит из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но их величины обеспечивают равенство времен прохождения волны по каждому из этих участков.

Для всех изучаемых задач найден явный аналитический вид искомых граничных управлений.

Эта работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, грант 02.740.11.0199, и Программы государственной поддержки ведущих научных школ, грант НШ-3514.2010.1.

Список литературы

[1] *Ильин В. А.* Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Труды матем. института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 133–142.

[2] *Смирнов И. Н.* Формула типа Даламбера для колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, описываемых телеграфным уравнением // Доклады Академии Наук, 2010, Т. 433, № 1, С. 25–29.

[3] *Смирнов И. Н.* Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады Академии Наук, 2010, Т. 435, № 2. С. 173–177.

Определение коэффициента в эллиптическом уравнении в цилиндре

Соловьев В. В. (Национальный Исследовательский Ядерный Университет, МИФИ, Россия)

Пусть $G \subset R_x^n$, G — ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $q > 0$ — фиксированные постоянные, $\Omega = (-q,q) \times G$, $\Omega_- = (-q,0) \times G$ — цилиндры в пространстве точек $R_y \times R_x^n$, $(y,x) = (y,x_1,...,x_n)$. Определим классы функций $U(\Omega) = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \in C^{2,\alpha}(\Omega)\}$, $U_1(\Omega) = \{u \in U(\Omega), u_{yy} \in U(\Omega)\}$, $F(G) = \{f \in C(\bar{G}) : f \in C^{\alpha}(G), f \leq 0\}$, $H(\chi) = \{\chi \in C(\bar{G}) : \chi \in C^{2,\alpha}(G), \Delta_x \chi \in C(\bar{G})\}$. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_1(\Omega_-) \times F(G)$ из условий:

$$-\Delta u(y,x) = f(x)u(y,x), \quad (y,x) \in \Omega_-, \tag{1}$$

$$u(y,x) = \nu(y,x), \quad (y,x) \in \Gamma_- = [-q,0] \times \partial G, \quad u(-q,x) = 0, \quad x \in \bar{G}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = \chi(x), \quad u_y(0,x) = 0, x \in \bar{G}. \tag{3}$$

В условиях (1)–(3) ν, χ — заданные функции. Пусть $\tilde{\nu}(y,x)$ — четное продолжение функции $\nu(y,x)$ на боковую границу цилиндра Ω — множество

$\Gamma = [-q, q] \times \partial G$. Чтобы сформулировать теорему существования и единственности для задачи (1)–(3), определим функцию $\bar{w} \in U(\Omega)$ как решение следующей краевой задачи:

$$-\Delta \bar{w}(y,x) = 0, \quad (y,x) \in \Omega, \quad \bar{w}(y,x) = \tilde{\nu}_{yy}, \quad (y,x) \in \Gamma, \quad \bar{w}(\pm q, x) = 0, x \in \bar{G}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\nu, \nu_{yy} \in C(\Gamma_-)$, *выполнены условия согласования* $\nu(-q,x) = 0$, $\nu_y(0,x) = 0$, $\nu_{yy}(-q,x) = 0$, $x \in \partial G$ *и неравенства* $\nu(y,x) \geq 0$, $\nu_{yy}(-q,x) \leq 0$, $(y,x) \in \Gamma_-$. *Тогда для любой функции* $\chi \in H(G)$, *удовлетворяющей условиям согласования* $\chi(x) = \nu(0,x)$, $x \in \partial G$ *и неравенствам* $\chi(x) \geq \chi_0 > 0$, $\bar{w}(0,x) + \Delta_x \chi(x) \geq 0$, $x \in G$, *существует единственное решение задачи* (1)–(3) *в указанном классе.*

Метод усреднения в задачах оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями

Станжицкий А. Н. (Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина)

Ковальчук Т. В. (Киевский национальный торгово-экономический университет, Украина)

Рассматривается следующая задача оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad I_\varepsilon(u) \to \inf \tag{1}$$

как на асимптотически конечных (порядка $\frac{1}{\varepsilon}$) временных интервалах, так и на полуоси, тут $I_\varepsilon(u)$ — некоторый критерий качества.

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x \in D$ — область в R^n, x — фазовый вектор, $u(t) \subset U \subset R^m$ — вектор управления, $t \geq 0$.

Исходной задаче (1) ставится в соответствие усредненная задача оптимального управления

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y, u(t)), \quad y(0) = x_0, \quad I_\varepsilon \to (u) \inf, \tag{2}$$

где

$$X_0(x,u) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x,u)\, dt. \tag{3}$$

В отличие от предшественников, в которых соответствующий усредненный объект строился довольно сложно (как правило, это некоторое дифференциальное включение), мы предлагаем более простую схему усреднения (3), в которой усреднение по u не проводится. Отметим также, что в нашем случае множество U значений управления не обязательно компакт. Кроме того, данный подход на бесконечном интервале ранее не рассматривался.

Доказываются теоремы о близости соответствующих решений систем (1) и (2) как на асимптотически конечных так и на бесконечных временных интервалах. С помощью этих теорем устанавливается следующий результат: если $u^*(t)$ — оптимальное управление усредненной задачи (2), то оно с точностью до ε реализует критерий качества точной задачи (1), то есть является

ε-оптимальным для точной задачи. Кроме того, в случае линейных по управлению систем, доказано существование оптимальных управлений точной и усредненной задач.

Список литературы

[1] *Станжицкий А. Н., Добродзий Т. В.* Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 2. С. 264–277.

Разрешимость задачи о динамике самодвижущегося твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости

Старовойтов В. Н. (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Россия)

Исследована задача о динамике самодвижущихся абсолютно твердых тел в ограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости. Для описания течения жидкости используются уравнения Навье–Стокса. Тела движутся согласно законам классической механики под действием окружающей их жидкости и благодаря «моторам», работа которых моделируется заданием потока жидкости через границы тел. Доказано, что задача имеет по крайней мере одно слабое решение на произвольном интервале времени, не включающем моменты соударения тел между собой и с границей области течения.

Весовые неравенства для преобразования Гильберта на монотонных функциях

Степанов В. Д. (Российский университет дружбы народов, Москва)

Изучается двухвесовое $L^p - L^q$ неравенство для преобразования Гильберта на конусах монотонных функций. При $0 < p \leq q < \infty$ найдены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства для степенных весовых функций. Аналогичный результат установлен для дискретного преобразования Гильберта.

Суботношение Штейнера для четырех точек на евклидовой плоскости

Степанова Е. И. (Московский Государственный Университет им. Ломоносова, Россия)

В докладе будет рассмотрено суботношение Штейнера — величина, характеризующая связь минимального дерева Штейнера и минимального заполнения в смысле М. Громова для метрических пространств, и равная отношению веса минимального заполнения к длине дерева Штейнера. Для четырехточечных подмножеств плоскости с евклидовой метрикой найдено суботношение Штейнера.

Теорема 1. *Для четырех точек на евклидовой плоскости суботношение Штейнера равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть равно отношению Штейнера.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 10–01–00748), программы «Ведущие научные школы РФ» (грант НШ–3224.2010.1), аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП–2.1.1.3704), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты 02.740.11.5213 и 14.740.11.0794).

Список литературы

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, Математ. сборник (2011), (в печати).
[2] M. Gromov, “Filling Riemannian manifolds”, J. Diff. Geom., **18** (1), P. 1–147 (1983).
[3] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований (2003).
[4] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Задача Штейнера на плоскости или плоские минимальные сети”, Математ. сборник (1991).

Асимптотика теплового ядра и регуляризованный след диффузионной полугруппы

Степин С. А. (МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия)

С помощью представления теплового ядра в виде континуального интеграла получены в некотором смысле точные двусторонние оценки регуляризованного следа соответствующей эволюционной полугруппы.

Теорема 1. *Пусть вещественный потенциал* $V(x) \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^3)$ *непрерывен и ограничен. Тогда при* $t \geqslant 0$ *оператор* $\exp\big(t(\Delta/2+V)\big) - \exp\big(t\Delta/2\big)$ *ядерный и имеют место неравенства*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \big(\exp(tV(x)) - 1\big)\,dx \;\geqslant\; (2\pi t)^{3/2}\mathrm{Tr}\big(e^{t(\Delta/2+V)} - e^{t\Delta/2}\big) \;\geqslant$$
$$\geqslant \int_{\mathbb{R}^3} dx \bigg\{ \exp\bigg(t\int_{\mathbb{R}^3} V(x+\sqrt{t}\xi)\varphi(|\xi|)\,d\xi \bigg) - 1 \bigg\} \;\geqslant\; t\int_{\mathbb{R}^3} V(x)\,dx\,,$$

где $\varphi(r) = \int_0^1 (2\pi s(1-s))^{-3/2} \exp\Big(-\frac{r^2}{2s(1-s)}\Big)\,ds.$

Связь упомянутого представления с методом параметрикса применяется при вычислении (оценках) коэффициентов коротковременного асимптотического разложения фундаментальных решений для определенного класса уравнений диффузионного типа.

Теорема 2. *При условии ограниченности коэффициента переноса* $a(x) \in \mathrm{C}^3(\mathbb{R}^3)$ *для фундаментального решения* $p_a(x,y,t)$ *уравнения* $\partial_t u = \Delta u/2 + a(x)\nabla u$ *при* $t \downarrow 0$ *имеет место формула*

$$p_a(x,y,t) \;=\; (2\pi t)^{-3/2} \exp\bigg(-\frac{|x-y|^2}{2t} + \int_0^1 \big\langle a(\xi(s)), (y-x)\big\rangle\,ds \bigg) \times$$
$$\times \left\{ 1 + t\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \big\langle \Delta a(\xi(s)), (y-x)\big\rangle\, s(1-s)ds - \int_0^1 a^2(\xi(s))\,ds - \right.\right.$$
$$- \int_0^1 \mathrm{div}\, a(\xi(s))\, s ds \;+ \int_0^1 (1-s)ds \int_0^s \Big[\big\langle\, \mathrm{rot}\, a(\xi(s)), \mathrm{rot}\, a(\xi(r))\big\rangle (y-x)^2 -$$

$$- \left\langle \operatorname{rot} a(\xi(s)), (y-x) \right\rangle \left\langle \operatorname{rot} a(\xi(r)), (y-x) \right\rangle \Big] rdr \Bigg) + O\big(t^{5/4}\big) \Bigg\},$$

в которой $\xi(s) = x + (y-x)s$.

При выводе данной асимптотической формулы используется запись диффузионного ядра в виде винеровского интеграла от функционала, который выражается через стохастический интеграл Ито по броуновской траектории. Предложенный подход распространяется на случай пространства произвольной размерности и эволюционных полугрупп, порождаемых эллиптическими операторами высших порядков.

Скрученные янгианы супералгебр Ли

Стукопин В. А. (Донской государственный технический университет, Южный математический институт, Россия)

В последние годы наряду с янгианами простых алгебр Ли ([**1**]) стали изучаться янгианы классических супералгебр Ли (см. [**2**], [**3**]). В данной заметке мы рассматриваем понятие так называемого „скрученного“ янгиана, как квантования скрученной алгебры полиномиальных токов, и рассматриваем простой пример такого объекта. Именно, рассматривается янгиан странной суперале6ры Ли типа Q_2 (см. [**4**]). На основе полученных формул можно определить квантовый дубль янгиана $Y(Q_2)$ странной супералгебры Ли Q_2. Следуя подходу В. Г. Дринфельда мы описываем некоммутативную деформацию скрученных супералгебр Ли полиномиальных токов (связанных с рациональными решениями уравнения Янга–Бакстера). В идейном плане такая деформация похожа на деформации однородных пространств, приводящие к квантовым однородным пространствам, что неудивительно ввиду тесной связи однородных пространств и скрученных алгебр токов. Следует отметить, что вопрос обоснования корректности определения (существования и единственности квантования) в общем случае требует вычисления когомологий Хохшильда. Следующая теорема является основным результатом заметки (сравни с [**4**]).

Теорема 1. *Янгиан $Y(Q_2)$ изоморфен ассоциативной супералгебре Хопфа с единицей над C, порожденной образующими $\tilde{h}_m, k_m, x_m^{\pm}, \hat{x}_m^{\pm}, m \in Z_+$, удовлетворяющими следующей системе определяющих соотношений:*

$$[\tilde{h}_m, \tilde{h}_n] = 0; \quad [k_m, \tilde{h}_n] = 0; \quad \tilde{h}_{m+n} = [x_m^+, x_n^-];$$

$$[\hat{x}_m^+, x_2^- k] = [x_2^+ k, \hat{x}_m^-] = k_{m+2k}; \quad [\hat{x}_m^+, x_{j,2k+1}^-] = [x_{i,2k+1}^+, \hat{x}_{j,m}^-] = 0;$$

$$[\tilde{h}_{k+1}, x_l^{\pm}] = [\tilde{h}_k, x_{l+1}^{\pm}] + (\tilde{h}_k x_l^{\pm} + x_l^{\pm} \tilde{h}_k);$$

$$[x_{k+1}^{\pm}, x_l^{\pm}] = [x_k^{\pm}, x_{l+1}^{\pm}] + (x_k^{\pm} x_l^{\pm} + x_l^{\pm} x_k^{\pm}),$$

$$[\tilde{h}_{k+2}, \hat{x}_l^{\pm}] = [\tilde{h}_{i,k}, \hat{x}_{l+2}^{\pm}] + (h_k \hat{x}_l^{\pm} + \hat{x}_l^{\pm} h_k),$$

$$[k_{m+2}, x_l^{\pm}] = [k_m, x_{l+2}^{\pm}] + (k_m x_l^{\pm} + x_l^{\pm} k_m),$$

$$[x_{k+1}^{\pm}, \hat{x}_l^{\pm}] = [x_k^{\pm}, \hat{x}_{l+1}^{\pm}] + (x_k^{\pm} \hat{x}_l^{\pm} + \hat{x}_l^{\pm} x_k^{\pm}),$$

$$[\hat{x}_{2k+1}^{\pm}, x_l^{\pm}] - [\hat{x}_{2k-1}^{\pm}, x_{l+2}^{\pm}] = 0.$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00671-а, а также федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт номер П1116).

Список литературы

[1] *Drinfeld V.* Quantum groups // Proc. Int. Cong. Math. 1988. V. 1. P. 789–820.
[2] *Nazarov M.* Quantum Berezinian and the classical Capelly identity // Lett. Math. Phys. 1991. V. 21. P. 123–131.
[3] *Стукопин В. А.* О янгианах супер922алгебр Ли типа $A(m, n)$ // Функцион. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 3. С. 217–219.
[4] *Stukopin V.* Quantum Double of Yangian of „strange" Lie superalgebra // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2007. V. 3. P. 1–12.

О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями

Субботина Н. Н. (Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

Рассматривается следующая задача Коши

$$\partial u/\partial t + H(u', x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [-1, 1]; \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{2}$$

Здесь $u' = \partial u/\partial x$, а гамильтониан $H(u', x)$ задан соотношением

$$-H(u', x) = f(x) - 1 + \frac{1+x}{2}e^{2u'} + \frac{1-x}{2}e^{-2u'}. \tag{3}$$

Эта задача возникает (см., например, [**1**]) для модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции. В приложениях интерес представляет вопрос об асимптотике

$$\max_{x \in [-1,1]} u(t, x) \qquad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Задача (1)–(3) не имеет глобального классического решения. Обсуждаются различные известные подходы к определению обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями [**2, 3, 4**].

Предложено [**5**] оригинальное определение непрерывного обобщенного решения задачи (1)–(3). Доказано существование этого решения при достаточно общих предположениях о входных данных $u_0(\cdot)$, $f(\cdot)$. Доказательство конструктивно и опирается на сведение задачи Коши к соответствующей задаче Дирихле, в которой краевое многообразие определяется как объединение начального многообразия задачи Коши (2) и множеств

$$\{(t, x) \mid \; x = \pm 1, \; t \in [0, T], \; T > 0\},$$

на которые гладко продолжена функция $u_0(\cdot)$.

Показано, что обобщенное решение в рассматриваемой задаче неединственно. Обсуждается вопрос о природе неединственности и достаточных условиях существования единственного обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби в задаче Коши с фазовыми ограничениями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00410), программы государственной поддержки ведущих научных школ (грант НШ-64508.2010.1) и федеральной целевой программы содружества УрО РАН с СО РАН.

Список литературы

[1] *Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Physical Review E. 2008. Vol. 78, 041908, 7 p.

[2] *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.* Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2, P. 643–683.

[3] *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhauser, 1997.

[4] *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995.

[5] *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. (в печати)

О некотором аналоге вариационной формулы Адамара

Суетин С. П. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Пусть G — ограниченная конечносвязная область, граница γ которой состоит из конечного числа аналитических кривых, n_z — единичная внутренняя нормаль к кривой γ в точке $z \in \gamma$. Пусть ψ — положительная аналитическая функци натурального параметра на γ. Тогда для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно определить положительный сдвиг $\varepsilon\psi(z)n_z$ внутрь области G по направлению нормали n_z на величину $\delta n_z := \varepsilon\psi(z) > 0$. Кривая γ переходит в кривую γ^*, ограничивающую новую область G^*, $\partial G^* = \gamma^*$, $G^* \Subset G$.

Обозначим через $g(z,\zeta)$ функцию Грина исходной области G с особенностью в точке $\zeta \in K \Subset G$, и пусть $g^*(z,\zeta)$ — соответствующа функция Грина для области G^*. Имеет место следующая вариационная формула Адамара (см. **[1]**):

$$g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\frac{\partial g(w,z)}{\partial n_w}\delta n_w\, ds_w + O(\varepsilon^2), \tag{1}$$

где $z \in G^*$, оценка $O(\varepsilon^2)$ справедлива равномерно по $\zeta \in K \Subset G^*$. Поскольку $G^* \Subset G$, то при $z \in G^*$ очевидно имеем $g^*(z,\zeta) < g(z,\zeta)$. Формула (1) дает *количественную* оценку последнего неравенства.

Формула Адамара (1) имеет многочисленные приложения, так как через функцию Грина выражаются все основные функции, связанные с областью G.

Пусть теперь $h(z)$ — *произвольная* функция, голоморфная в некоторой окрестности V кривой γ. Определим преобразование (вариацию) переменного $z \mapsto z_t$ формулой

$$z_t = z + th(z), \tag{2}$$

где t — малый комплексный параметр (см. **[2]**, **[3]**, **[4]**). При достаточно малом t преобразование (2) конформно и однолистно в V и переводит кривую γ в кривую γ^*, ограничивающую новую область G^*. В (2) в качестве частных случаев содержатся вариация Адамара и вариация Шиффера [**1**]. Справедлива следующая вариационная формула

$$g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma P'(w,\zeta)P'(w,z)h(w)\,dw\right\} + O(t^2), \qquad (3)$$

где $P(w,\zeta) = g(w,\zeta) + i\widetilde{g}(w,\zeta)$ — комплексная функция Грина, $\widetilde{g}(w,\zeta)$ — функция, гармонически сопряженная $g(w,\zeta)$. Из (3) в качестве частных случаев вытекают классические вариационные формулы Адамара и Шиффера (см. также [**2**], [**3**], [**4**]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00330-а, и программы "Ведущие научные школы", грант НШ-8033.2010.1.

Список литературы

[1] *Schiffer M.* Hadamard's formula and variation of domain-functions // Amer. J. Math. 1946. V. 68. P. 417–448.
[2] *Kamvissis S., Rakhmanov E. A.* Existence and regularity for an energy maximization problem in two dimensions // J. Math. Phys. 2005. V. 46. № 8, 083505, 24 pp.
[3] *Martínez-Finkelshtein A., Rakhmanov E.* Critical Measures, Quadratic Differentials, and Weak Limits of Zeros of Stieltjes Polynomials // Comm. Math. Phys. 2011. V. 302. № 1. P. 53–111.
[4] *Мартинес-Финкельштейн А., Рахманов Е. А., Суетин С. П.* Вариация равновесной меры и S-свойство стационарных компактов // Успехи Матем. наук. 2011. Т. 66. № 1. С. 183–184.

Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве посредством их L, A-пар и старая квантовая теория

Сулейманов Б. И. (Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Россия)

Строятся дискретные серии ($n = 1, 2, ...\infty$) явных решений уравнений Шредингера:

$$i\hbar\Psi_t = (-\hbar^2\frac{\Psi_{xx}}{2}) + \frac{\omega^2 x^2}{2}\Psi, \qquad (1)$$

$$i\hbar\Psi_t = -\hbar^2\frac{\Psi_{xx}}{2} + a(\exp(-2x) - 2\exp(-x))\Psi, \quad (a\,\text{— const}) \qquad (2)$$

$$i\hbar\Psi_t = -\hbar^2(x-1)^2(x\Psi_{xx} + \Psi_x) + (cx)\Psi + \quad (c\,\text{— const}) \qquad (3)$$

определяемых гамильтонианами

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \qquad (4)$$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + a(\exp(-2q) - 2\exp(-q)), \qquad (5)$$

$$H(q,p) = q(q-1)^2 p^2 + cq, \qquad (6)$$

гамильтоновых систем

$$q_t = H_p(p,q), \quad p_t = -H_q(p,q). \qquad (7)$$

Данные решения уравнений Шредингера (1)–(3), являющиеся ограниченными при всех значениях x, удовлетворяют также уравнениям вида

$$\Psi_t = B(\hbar, t, x, q(t), p(t))\Psi_x + C(\hbar, t, x, q(t), p(t))\Psi, \qquad (8)$$

коэффициенты которых зависят от дискретных серий решений гамильтоновых систем (4)–(7), выделяемых старым вариантом правила Бора–Зоммерфельда.

Исключение из систем (4)–(7) импульсов p дает обыкновенное дифференциальное уравнение на q, точечно эквивалентное автономной редукции одного из уравнений Пенлеве. Для гамильтониана (4) это есть редукция уравнения

$$\lambda_{\tau\tau} = c_4(2\lambda^3 + \tau\lambda) + c_3(6\lambda^2 + \tau) + c_2\lambda + c_1) \qquad (c_j — \mathrm{const}),$$

для гамильтониана (5) с потенциалом Морса — редукция третьего уравнения Пенлеве для гамильтониана (6) (выражающегося через гамильтониан энергии с модифицированным экспоненциальным потенциалом Пешля–Теллера) — редукция пятого уравнения Пенлеве. Совместность уравнений Шредингера (1)–(3) с соответствующими уравнениями (8) следует из совместности L, A-пар для уравнений Пенлеве, выписанными в классической статье Р. Гарнье [**1**].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-91222 и ФЦП, контракт 02.740.11.0612.

Список литературы

[1] *Garnier R.* Sur des equations differentiellles du troisieme ordre dont l'integrable est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur l'integrale generale a ses points critiques fixess // Annales scientitificues de l'Ecole Normale Superieure. 1912. V. 29. P. 1–126.

Устойчивость авторезонанса

Султанов О. А. (Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия)

В работе решается вопрос устойчивости решений дифференциальных уравнений, связанных с явлением авторезонанса [**1**]. Рассматриваются следующие нелинейные неавтономные уравнения:

$$\frac{dr}{dt} = \sin\psi, \qquad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t\Big] = b\cos\psi; \tag{1}$$

$$\frac{dr}{dt} = r\sin\psi, \qquad \frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t = b\cos\psi; \tag{2}$$

здесь $\lambda, b = \mathrm{const}$. Такие уравнения возникают в теории колебаний при усреднении более сложных нелинейных систем. Для написанных уравнений интерес представляют решения с растущей амплитудой:

$$r_0(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(1), \quad \psi_0(t) = \pi + \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad t \to \infty. \tag{3}$$

Определение устойчивости таких решений составляет основную цель данной работы. Устойчивость по Ляпунову для неавтономных систем понимается в смысле [**2**], стр. 9. Вопрос об устойчивости решения с асимптотикой (3) сводится к исследованию устойчивости нуля в уравнениях, которые получаются из исходных после замены $r \Rightarrow r + r_0(t)$, $\psi \Rightarrow \psi + \psi_0(t)$. На этом пути уравнения приводятся к следующему виду

$$\dot r = -\partial_\psi H(r,\psi,t), \quad \dot\psi = \partial_r H(r,\psi,t) + F(r,\psi,t) \tag{4}$$

с гамильтонианом $H(r,\psi,t) = (r^2+\psi^2)/2 + o(1)$, при $r,\psi \to 0$, $t \to \infty$. Похожая задача рассматривалась в **[3]** при $\partial_t H \equiv 0$ и некоторых ограничениях на функцию $F(r,\psi,t)$. Устойчивость положения равновесия решалась путем построения функции Ляпунова. В случае уравнений (1), (2) конструкция функции Ляпунова несколько изменяется вследствие усложнении структуры возмущения $F(r,\psi,t)$. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Если в системе уравнений* (1) *коэффициент* $b > 1/2$, *то решение* $r_0(t)$, $\psi_0(t)$ *с асимптотикой* (3) *асимптотически устойчиво при* $t \to \infty$. *Если* $b < 1/2$, *то это решение неустойчиво.*

Теорема 2. *Если в системе уравнений* (2) *коэффициент* $b \geq 1$, *то решение* $r_0(t)$, $\psi_0(t)$ *с асимптотикой* (3) *устойчиво при* $t \to \infty$. *Если* $b < 1$, *то это решение неустойчиво.*

Доказательство проводится путем построения функции Ляпунова и мажорантных оценок.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00186.

Список литературы

[1] *Калякин Л. А.* Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, Вып. 5. С. 3–72.

[2] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[3] *Султанов О. А.* Функции Ляпунова для неавтономных систем, близких к гамильтоновым // Уфимский мат. журнал. 2010. Т. 2. № 4. С. 88–98.

О решении граничной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения методом вспомогательных граничных условий

Табаринцева Е. В. (Южно-Уральский государственный университет, Россия)

Рассмотрим граничную обратную задачу, т. е. задачу определения граничного условия $v(t) = u(1,t)$, где $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \qquad (0 < x < 1;\ t > 0); \\ u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u_x(0,t) = \varphi(t). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(t) \in L_2[0,\infty)$ — заданная функция, $f : L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$ — отображение, удовлетворяющая условию Липшица: для всех $u_1, u_2 \in L_2[0,\infty)$

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|.$$

Пусть известно, что задача (1) имеет решение, принадлежащее множеству равномерной регуляризации

$$M = \{v(t) : \|v\|^2_{L_2[0,\infty)} + \|v'(t)\|^2_{L_2[0,\infty)} \leq r^2\},$$

но вместо точных значений функции $\varphi(t)$ известны δ-приближение $\varphi_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности δ такие, что $\|\varphi_\delta - \varphi\| < \delta$. Требуется построить приближенное решение задачи (1) и оценить его уклонение от точного решения.

Для построения устойчивого приближенного решения задачи (1) рассмотрим вспомогательную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \qquad (0 < x < 1;\ t > 0);\\ u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad \varepsilon u(1,t) + u_x(0,t) = g_\delta(t)\end{gathered} \tag{2}$$

В качестве приближенного решения задачи (1) будем рассматривать функцию

$$v_\delta^{\epsilon(\delta)}(t) = u_\delta^{\varepsilon(\delta)}(1,t), \tag{3}$$

где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) и зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выбрана по схеме М. М. Лаврентьева. Оценим погрешность метода вспомогательных граничных условий на множестве M, т. е. оценим величину

$$\Delta(\epsilon,\delta) = \sup\{\|v_\delta^\epsilon - v\| : v \in M; \|\varphi - \varphi_\delta\| \le \delta\}.$$

Выполняется

Теорема 1. *Пусть $v_\delta^\epsilon(t)$ — приближенное решение задачи* (1), *определенное формулой* (3), *$\varepsilon(\delta)$ — значение параметра регуляризации, выбранное по схеме М. М. Лаврентьева. Тогда существуют постоянные $C > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что при всех $\delta \in (0;\delta_0)$*

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C}{\ln^2\delta}.$$

Список литературы

[1] *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.
[2] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

Классификация особых кривых общей специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Тасмамбетов Ж. Н. (Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Казахстан)

Изучена система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} x^2 \cdot p_0 \cdot Z_{xx} + xy \cdot p_1 \cdot Z_{xy} + y^2 \cdot p_2 \cdot Z_{yy} + x \cdot p_3 \cdot Z_x + y \cdot p_4 \cdot Z_y + p_5 \cdot Z = 0,\\ x^2 \cdot g_0 \cdot Z_{xx} + xy \cdot g_1 \cdot Z_{xy} + y^2 \cdot g_2 \cdot Z_{yy} + x \cdot g_3 \cdot Z_x + y \cdot g_4 \cdot Z_y + g_5 \cdot Z = 0,\end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты $p_i = p_i(x,y)$ и $g_i = g_i(x,y)$ $(i = \overline{0,5})$ — многочлены двух переменных второго порядка

$$\begin{gathered} p_i(x,y) = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{2} a_{\mu,\,\nu}^{(i)} \cdot x^\mu \cdot y^\nu \quad (a_{00}^{(i)} \ne 0),\\ g_i(x,y) = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{2} b_{\mu,\,\nu}^{(i)} \cdot x^\mu \cdot y^\nu \quad (b_{00}^{(i)} \ne 0,\ \ i = \overline{0,5}).\end{gathered} \tag{2}$$

Требуется установить классификацию особых кривых системы (1) с коэффициентами вида (2), и построить решения вблизи установленных особенностей.

В общем случае коэффициенты системы могут быть аналитическими функциями или многочленами двух переменных. Такие системы американский математик Е. Вильчинский использовал для обоснования проективно-дифференциальной геометрии, а П. Аппель, В. Горн, Ш. Эрмит и другие рассматривали в связи с изучением гипергеометрических функций или ортогональных многочленов двух переменных [**1**]. Однако, до сих пор, очень мало известно о поведении решений в окрестности точек, где пересекаются более чем две особые кривые или в которых две особые кривые касаются. Остается также мало изученной классификация особых кривых.

Особые кривые систем (1)–(2) определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx}, Z_{xy} и Z_{yy}:

$$\begin{cases} x^2 \cdot p_0(x,y) = 0, \quad xy \cdot p_1(x,y) = 0, \quad y^2 \cdot p_2(x,y) = 0, \\ x^2 \cdot g_0(x,y) = 0, \quad xy \cdot g_1(x,y) = 0, \quad y^2 \cdot g_2(x,y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Особыми кривыми могут быть параллельные прямые, кривые второго порядка — эллипс, парабола, гипербола. Трудности появляются при нахождении точки их пересечения и определении регулярных и иррегулярных особенностей, в зависимости от чего, следует установить вид решения.

Для построения решений вблизи различных особенностей применяется метод Фробениуса–Латышевой. Установлен простой признак определения регулярных и иррегулярных особенностей. Доказан ряд теорем.

Список литературы

[1] *Appel P., Kampe de Feriet M. J.* Fonctions hypergeometriques et hypersperiqes. Polynomes d'Hermite. Paris: Gauthier-Villars, 1926.

Влияние размерности на разрешимость задачи Дирихле для анизотропного аналога уравнения p-лапласиана

Терсенов А. С. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия)

Одним из классических примеров нелинейных вырождающихся и сингулярных эллиптических уравнений является p-лапласиан и его анизотропный аналог. Эти уравнения широко применяются при моделировании течения псевдопластичных и дилатантных неньютоновских жидкостей, жидкостей в среде с разной проводимостью в разных направлениях, а также в теории фильтрации. В отличии от краевых задач для p-лапласиана, которые изучаются интенсивно уже более 30 лет, исследования аналогичных задач для анизотропных эллиптических уравнений приобрели систематический характер лишь с конца 90-х годов прошлого века. Нас интересует вопрос существования ограниченного обобщенного решения задачи Дирихле для указанных уравнений. В частности, рассматривается задача Дирихле для нелинейного анизотропного эллиптического уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^{N}\mu_i(|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i}=c(\mathbf{x})g(u)+f(\mathbf{x})\quad \text{в } \Omega\subset\mathbf{R^N}, \tag{1}$$

где постоянные $\mu_i>0$ и $p_i>1$, $i=1,\dots,N$, а Ω — строго выпуклая ограниченная область. Относительно функции g мы предполагаем, что она удовлетворяет следующему условию

$$g(0)=0,\quad |g(\xi)|\le g(\eta),\quad \forall\xi,\eta\quad \text{таких, что } |\xi|\le\eta. \tag{2}$$

Например, функции $g(u)=\ln(|u|+1)$, $g(u)=|u|^{q-1}u$, $g(u)=|u|^q$ или $g(u)=e^u-1$ удовлетворяют условию (2). Исследуется случай, когда в уравнении (1) присутствуют сингулярные члены, т. е. члены с показателями $1<p_i<2$. Показано, что разрешимость задачи Дирихле в классе ограниченных решений в сингулярном случае существенно зависит от размерности области, в которой она исследуется. Приведено условие, которое определяет число сингулярных p_i-ых (и как следствие размерность), гарантирующее существование ограниченного обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения (1). Аналогичный результат имеет место и для параболических версий p-лапласиана и его анизотропного аналога.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00221.

Список литературы

[1] *Starovoitov V. N, Tersenov Al. S.* Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source // Nonlinear Analysis, 72 (6), (2010), P. 3009–3027.

[2] *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* The problem of Dirichlet for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations// J. Differential Equations, 235 (2), (2007), P. 376–396.

Двухмерные алгебры динамических симметрий ОДУ

Тимошин М. И. (Ульяновский государственный технический университет, Россия)

Софус Ли **[1]**, проведя классификацию двухмерных алгебр точечных симметрий, приводит четыре типа ОДУ второго порядка :

$$\begin{array}{lllll}
\text{I.} & X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y}, & [X_1,X_2]=0, & X_1\vee X_2\ne 0, & y''=f\left(y'\right);\\
\text{II.} & X_1=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=x\frac{\partial}{\partial y}, & [X_1,X_2]=0, & X_1\vee X_2=0, & y''=f\left(x\right);\\
\text{III.} & X_1=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}, & [X_1,X_2]=X_1, & X_1\vee X_2\ne 0, & y''=\frac{1}{x}f\left(y'\right);\\
\text{IV.} & X_1=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=y\frac{\partial}{\partial y}, & [X_1,X_2]=X_1, & X_1\vee X_2=0, & y''=f\left(x\right)y'.
\end{array}$$

В работе **[2]** рассматриваются динамические симметрии, построенные с помощью операции продолжения инвариантов.

Классические точечные симметрии задаются двумя функциями $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$:

$$X=\xi\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x}+\eta\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial y}+\eta_1\left(x,y,y'\right)\frac{\partial}{\partial y}+\eta_2\left(x,y,y',y''\right)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1}$$

где компоненты η_i определяются формулой продолжения С. Ли $\eta_i=\frac{d\eta_{i-1}}{dx}-y^{(i)}\frac{d\xi}{dx}$.

В [**3**] для интегрирования ОДУ предлагается использовать динамические симметрии, порождаемые тремя функциями от двух переменных, которые содержат в себе все множество точечных симметрий.

С помощью этих симметрий были найдены новые решения уравнений Колмогорова–Петровского–Пискунова, Семенова.

В предлагаемой работе рассматриваются двухмерные алгебры, образованные из точечной симметрии (1) и динамической симметрии, приведенной в [**3**]. Показано, что такие алгебры, наряду с четырьмя типами ОДУ, выделенными С. Ли, приводят к уравнению

$$y'' + y'\frac{d\lambda}{dy} = f\left(y' + \lambda\right), \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(y)$. Легко выписать первый интеграл уравнения (2). Обозначив $\frac{d\Phi(v)}{dv} = \frac{1}{f(v)}$, получим интеграл в виде

$$\Phi\left(y' + \lambda(y)\right) = x + C_1. \tag{3}$$

Очевидно, что решение уравнения (3) равносильно решению уравнения

$$\frac{dy}{dv} = \frac{d\Phi}{dv}\left(v - \lambda(y)\right). \tag{4}$$

В докладе приводится множество случаев интегрируемости уравненния (4), среди которых несколько новых случаев интегрируемости уравнения Абеля второго рода.

Список литературы

[1] *Lie S.* Vorlesungen uber Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig: B.G. Teubner. 1891.

[2] *Тимошин М. И.* Динамические симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений // Уфимский Математический журнал 2009. Т. 1. № 3 С. 132–138.

[3] *Timoshin M. I.* Dynamical Symmetries of Second Order ODE // Proceedings of the ≪Third Conference on Nonlinear Science and Complexity≫ that took place in Ankara, Turkey, July 28–31, 2010. `http://nsc10.cankaya.edu.tr/ proceedings/index.html`.

Задача с финальным переопределением для эволюционного уравнения, не разрешенного относительно производной

Тихонов И. В. (НИЯУ «МИФИ», Россия)

Пусть E — комплексное банахово пространство. Рассмотрим в E при фиксированном $T > 0$ дифференциальное уравнение:

$$Bu'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

с неизвестной функцией $u\colon [0,T] \to E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Предполагаем, что A, B — линейные замкнутые операторы в E с областями определения $D(A) \subset E$, $D(B) \subset E$ соответственно. Скалярная функция $\varphi \in C([0,T])$ задана так, что $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$. Спрашивается, будет ли пара $(\,u(t),\, g)$ однозначно восстанавливаться по условию Коши $u(0) = u_0$ и финальному переопределению $u(T) = u_1$? Поскольку речь идет о единственности решения, то можно ограничиться однородными условиями:

$$u(0) = 0, \qquad u(T) = 0. \tag{2}$$

Ясно, что в задаче (1), (2) всегда есть тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Ставится вопрос о наличии других, нетривиальных решений.

Полная теория единственности для задачи (1), (2) в случае единичного оператора $B = I$, т. е. для уравнения, разрешенного относительно производной, была построена в **[1]**, **[2]**. В недавней публикации **[3]** сделана попытка перенести методику работы **[1]** на уравнение «соболевского типа», когда $\ker B \neq 0$ и $D(A) \subset D(B)$, причем потребовались и другие, весьма специальные ограничения на операторы A, B. По-видимому, при изучении задачи (1), (2) более естественно опираться на работу **[2]**, небольшая модификация подходов которой позволяет получить следующий общий результат.

Теорема 1. *Пусть A, B — линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве E. Пусть $\varphi \in C([0,T])$, причем $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(T) \neq 0$. Тогда для того, чтобы задача* (1), (2) *имела на* $[0,T]$ *только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль целой функции*

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda(T-s)}\varphi(s)\,ds, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

не являлся собственным значением операторного пучка $P(\lambda) \equiv \lambda B - A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 1 применима и к классическим, и к обобщенным решениям задачи (1), (2). Функцию (3) естественно считать *характеристической* для задачи (1), (2). Важную роль в получении результатов такого сорта играют некоторые идеи Ю. С. Эйдельмана. Работа выполнена при поддержке ФЦП «Кадры» (проект П268) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6827).

Список литературы

[1] *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Теоремы об отображении точечного спектра для C_0-полугрупп и их применение в вопросах единственности для абстрактных дифференциальных уравнений // Доклады РАН. 2004. Т. 394. № 1. С. 32–35.

[2] *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 2. С. 273–290.

[3] *Уразаева А. В.* Отображение точечного спектра и единственность обратной задачи для уравнения соболевского типа // Известия вузов. Математика. 2010. № 5. С. 55–64.

Проблемы Рохлина и перемешивающие групповые действия

Тихонов С. В. (Российский Государственный Торгово-Экономический Университет, Россия)

В работе вводится метрика, делающая множество перемешивающих действий дискретной группы $\mathcal{G}$ полным сепарабельным пространством. Рассматриваются приложения этой метрики к классическим вопросам Рохлина о кратном перемешивании и однородном спектре конечной кратности.

Пусть (X, Σ, μ) — единичный отрезок с σ-алгеброй Σ и лебеговской мерой μ. Множество обратимых, сохраняющих меру преобразований, действующих на этом пространстве, обозначим через $\mathcal{A}$.

Действием T дискретной группы $\mathcal{G}$ называется отображение $g \mapsto T^g$ из $\mathcal{G}$ в $\mathcal{A}$, согласованное с групповыми операциями. Действие T называется перемешивающим, на подмножестве Γ группы $\mathcal{G}$, если для любых множеств $A, B \in \Sigma$ и любого бесконечного подмножества $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$, имеем

$$\mu\left(T^{g_i} A \cap B\right) \rightarrow \mu(A)\, \mu(B),$$

при $i \rightarrow \infty$.

Множество таких действий обозначим через $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\Gamma}$. Если $\Gamma = \mathcal{G}$, то соответствующие действия называются просто «перемешивающими» (или «однократно перемешивающими»).

Утверждение 1. *Множество $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\Gamma}$ — полное сепарабельное пространство относительно подходящей метрики m.*

Метрика m может быть использована для иссследования типичных и индивидуальных свойств преобразований и $\mathcal{G}$-действий (свойство называется типичным, если выполнено для элементов всюду плотного G_δ-множества). Мы рассматриваем ее всвязи с двумя классическими вопросами Рохлина — о кратном перемешивании и об однородном спектре конечной кратности.

Действие T группы $\mathcal{G}$ называется двукратно перемешивающим, если для любых $A, B, C \in \Sigma$ и бесконечных множеств $\{g_i\}, \{h_i\} \subset \mathcal{G}$ таких, что элементы $h_i g_i$ различны при разных i, имеем

$$\mu\left(T^{h_i g_i} A \cap T^{h_i} B \cap C\right) \rightarrow \mu(A)\, \mu(B)\, \mu(C),$$

при $i \rightarrow \infty$.

Теорема 1. *Типичные перемешивающие $\mathbb{Z}^d$-действия, $d \in \mathbb{N}$, обладают двукратным перемешиванием.*

Заметим также, что аналогичное утверждение верно для перемешивания любой кратности. С каждым преобразованием $T \in \mathcal{A}$ связан унитарный оператор U_T, действующий на пространстве квадратично интегрируемых функций с нулевым средним по формуле $U_T f = f \circ T$. Преобразование T имеет однородный спектр кратности n, если U_T представляется как прямая сумма n экземпляров одного оператора с простым спектром.

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют перемешивающие преобразования с однородным спектром кратности n.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант НШ-8508.2010.1.

Поведение инвариантного множества при малых возмущениях системы разностных уравнений

Ткачук А. Н. (Национальный университет пищевых технологий, Украина)
Семенишина И. В. (Подольский государственный аграрно-технический университет, Украина)

Рассматривается система разностных уравнений вида

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hX(x_n^h), \tag{1}$$

где $h > 0$ — шаг уравнения, $n \in \mathrm{Z}^+$, $x_n^h = x^h(t_0 + nh)$, $x_0^h(t_0) = x_0$, $x \in R^n$, функция $X(x)$ определена и удовлетворяет условию Липшица. Тогда возмущенная система разностных уравнений имеет вид

$$x_{n+1}^h = x_n^h + h\left[X(x_n^h) + \mu Y(x_n^h)\right], \tag{2}$$

$\mu > 0$ — малый параметр, который характеризует возмущения. Функции Xи Y определены и удовлетворяют условию Липшица при всех $x \in D \subset R^n$.

Определение 1. Множество $M \subset D$ называется инвариантным множеством системы (1), если решение системы (1), которое начинается в точке $x_0 \in M$, остается на M при любых $n \in Z$. Если $n \in \mathrm{Z}^+$, то множество M назовем положительно инвариантным множеством системы (1).

Определение 2. Положительно инвариантное множество M системы (1) назовем устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x_0, M) < \delta$, то $\rho(x_n^h(x_0), M) < \varepsilon$ при $n \in \mathrm{Z}^+$. Если множество M устойчиво и удовлетворяет предельному соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n^h(x_0), M) = 0$ при всех x_0 из некоторой δ_0-окрестности множества M, то назовем его асимптотически устойчивым.

Определение 3. Областью притяжения $\Pi(M_0)$ множества M_0 назовем все точки $x_0 \in D$, для которых $\Omega_{x_0} \subset M_0$, где Ω_{x_0} — ω-предельное множество траекторий.

Лемма 1. *Если решения системы* (1) *при* $\mu = 0$, $x_n^h(x_0, 0) = x_n^h(x_0)$ *принадлежат области* D *для* $n \in [0,\, n_0]$ *и* $x_0 \in \mathrm{P} \subset D$ *вместе с некоторой* ε-*окрестностью, то при достаточно малых* μ *решения* $x_n^h(x_0, \mu)$ *системы* (2) *принадлежат при* $n \in [0,\, n_0]$ *области* D *вместе с некоторой окрестностью, и имеет место предельное соотношение* $\sup\limits_{n\in[0,n_0];\; x_0\in P} \left|x_n^h(x_0,\mu) - x_n^h(x_0)\right| \to 0$, $\mu \to 0$.

Получен основной результат, который объясняет характер поведения замкнутого инвариантного множества системы (1) при ее малых возмущениях.

Теорема 1. *Если* M_0 — *замкнутое компактное асимптотически устойчивое инвариантное (положительно) множество системы* (1), *то существуют такие* $\delta > 0$ *и* $\mu_0 = \mu_0(\delta) > 0$, *что при* $\mu < \mu_0$ *система* (2) *тоже имеет замкнутое инвариантное множество* $M = M(\mu, h)$, *для которого* $\lim\limits_{\mu\to 0} \rho(M_0, M) = 0$ *и* $U_\delta(M_0) \subset \Pi(M)$.

Список литературы

[1] *Ткачук А. М.* Інваріантні множини різницевих систем та їх стійкість // Нелінійні коливання. 2005. Т. 8, № 2. С. 258–264.

Об обратной задаче восстановления с вырождающейся диффузией

Тлеубергенов М. И. (Институт математики, Казахстан)
Ибраева Г. Т. (Институт математики, Казахстан)

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в **[1–3]** и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим обратную задачу дифференциальных систем при наличии случайных возмущений. Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y,z,v,w,t), \quad y \in R^{l_1}, \quad z \in R^{l_2}, \quad v \in R^{p_1}, \quad w \in R^{p_2}, \\ \dot{z} = f_2(y,z,v,w,t) + \sigma_1(y,z,v,w,t)\dot{\xi}, \quad \xi \in R^r, \quad l_1 + l_2 + p_1 + p_2 = n, \\ \dot{v} = f_3(y,z,v,w,t) + L_1(y,z,v,w,t)u_1, \\ \dot{w} = f_4(y,z,v,w,t) + L_2(y,z,v,w,t)u_2 + \sigma_2(y,z,v,w,t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \quad \lambda(y,z,v,w,t) = 0, \quad \text{где} \quad \lambda = \lambda(y,z,v,w,t) \in C^{12121}_{yzvwt}, \quad \lambda \in R^m \tag{2}$$

вектор-функции $u_1(y,z,v,w,t) \in R^{k_1}$ и $u_2(y,z,v,w,t) \in R^{k_2}$, $k_1 + k_2 = k$, входящие в коэффициент сноса.

Поставленная задача:

1°. в случае $\sigma_1 \equiv 0$, $\sigma_2 \equiv 0$ отсутствия случайных возмущений достаточно полно исследована в [**2**, **3**] и др.;

2°. обобщает рассмотренную в [**4**] задачу построения уравнений Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \lambda(x,\dot{x},t) = 0, \text{ где } \lambda = \lambda(x,\dot{x},t) \in C^{121}_{x\dot{x}t};$$

3°. иным методом, а именно, методом квазиобращения, решена в [**5**].

Пусть K означает множество функций $\eta(y,z,v,w,t) \in K$, непрерывных по t и Lip по остальным аргументам. Справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы множество* (2) *было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений* (1), *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1°. *квадратные подматрицы* D', G' *матриц* D, G *были невырожденными* $\det\ D' \neq 0$, $\det\ G' \neq 0$;

2°. *при произвольно заданных* u_1, $u_2'' \in K$ *первые* m *координат* u_2' *вектора* u_2 *имели вид* $u_2' = (D')^{-1}\big(N - \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}L_1u_1 - D''u_2''\big)$;

3°. *при произвольно заданных* σ_1, $\sigma_2'' \in K$ *подматрица* σ_2' *матрицы* σ_2 *имела вид* $\sigma_2' = (G')^{-1}\big(B - \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 - G''\sigma_2''\big)$, *где* $D = \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}L_2$, $D = (D', D'')$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial w} = (G', G'')$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}\sigma_2' \\ \sigma_2''\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}u_2' \\ u_2''\end{pmatrix}$, D' *и* G' *есть квадратные подматрицы соответственно матриц* D *и* $\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}$.

Список литературы

[1] *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. Т. XVI. 1952. Т. 6. С. 659–670.

[2] *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. М. Наука, 1986.

[3] *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. М. РУДН, 1986.
[4] *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 714–716.
[5] *Тлеубергенов М. И., Ибраева Г. Т.* К стохастической задаче восстановления с вырождающейся диффузией // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. Алматы. 2006. № 5. С. 8–13.

О граничном условии теплового потенциала

Токмагамбетов Н. Е. (Институт математики, информатики и механики МОН РК, Казахстан)

В цилиндрической области $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^n$ — односвязная и ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим тепловой потенциал

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности **[1]**, т. е.

$$\diamondsuit_{x,t}\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \varepsilon(x-\xi,t-\tau) = \delta(x-\xi,t-\tau), \tag{2}$$

$$\diamondsuit^+_{\xi,\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = (-\frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta_\xi)\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = \delta(x-\xi,t-\tau), \tag{3}$$

$$\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\mid_{\tau=t} = 0. \tag{4}$$

Известно **[2]**, что если функция $f(x,t) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\overline{Q}_T)$, то $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\overline{Q}_T)$, где $0<\alpha<1$ и

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u(x,t) = f(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0. \tag{6}$$

Тепловой потенциал (1) широко используется в решений различных краевых задач для уравнения теплопроводности. Ниже находим боковое граничное условие, которое однозначно определяет тепловой потенциал (1).

Теорема 1. *Для любой $f(x,t) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\overline{Q}_T)$ тепловой потенциал* (1) *удовлетворяет граничному условию*

$$-\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} u(\xi,\tau)\, dS_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\, dS_\xi d\tau = 0, \tag{7}$$
$$\forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

где $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ — производная по внешней нормали боковой границы.

Если функция $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\overline{Q}_T)$ удовлетворяет уравнению (5) *и начальному условию* (6), *а также боковому граничному условию* (7), *то функция $u(x,t)$ однозначно определяет тепловой потенциал* (1).

Теорема 1 остается в силе и для нецилиндрических областей.

Доклад основан на совместной работе с Т. Ш. Кальменовым.

Список литературы

[1] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа, М.: Мир, 1968.

[2] *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гелдера. Новосибирск: 1998.

О граничном условии волнового потенциала

Толеуханов А. Е. (Институт математики, информатики и механики МОН РК, Казахстан)

В ограниченной области $\Omega \equiv \{(x,t) : (0,l) \times (0,T)\}$ рассмотрим одномерный волновой потенциал

$$u(x,t) = \int_\Omega \varepsilon(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = \frac{1}{2}\theta(t-\tau-|x-\xi|)$ — фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения **[1]**, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial x^2} = \delta(x-\xi,t-\tau), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi^2} = \delta(x-\xi,t-\tau), \tag{3}$$

$$\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,|_{\tau=t} = \frac{\partial \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau}\,|_{\tau=t} = \frac{\partial \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t}\,|_{\tau=t} = 0. \tag{4}$$

Известно **[1]**, что если функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, то $u(x,t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ и объемный волновой потенциал (1) удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{5}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{6}$$

Волновой потенциал (1) широко используется при решений различных краевых задач для волнового уравнения. Ниже находим боковые граничные условия, порождаемые волновым потенциалом (1).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, тогда $u(x,t)$ — волновой потенциал* (1) *удовлетворяет боковым граничным условиям*

$$(u_x - u_t)(0,t) = 0, \qquad x = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{7}$$

$$(u_x + u_t)(l,t) = 0, \qquad x = l, \qquad 0 < t < T. \tag{8}$$

Обратно, если функция $u(x,t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ удовлетворяет уравнению (5) *и начальным условиям* (6), *а также боковым граничным условиям* (7)–(8), *то функция $u(x,t)$ однозначно определяет одномерный волновой потенциал* (1).

Отметим, что граничное условие (7)–(8) волнового потенциала (1) является локальным граничным условием, в отличие от граничного условия объемного потенциала Лапласа приведенного в работе [**4**].

Доклад основан на совместной работе с Т. Ш. Кальменовым.

Список литературы

[1] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики, М.: Наука, 1981.
[2] *Hsiao G. C., Wendland W. L.,* Boundary Integral Equations, 2008.
[3] *Пресдорф З., Мазья В. Г.,* Анализ 4. Интегральные уравнения, 1988.
[4] *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.,* К спектральным вопросам объемного потенциала. Доклады академии наук России, 2009, Т. 428, № 4, с. 16–19.

Существование и устойчивость релятивистской свободной границы «плазма-вакуум»

Трахинин Ю. Л. (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия)

Уравнения релятивистской магнитной гидродинамики в пространстве-времени (t,x) Минковского записываются в виде системы законов сохранения, а затем и в виде квазилинейной симметрической гиперболической системы

$$A_0(U)\partial_t U + A_1(U)\partial_1 U + A_2(U)\partial_2 U + A_3(U)\partial_3 U = 0 \tag{1}$$

для вектора $U = (p, u, H, S)$, где p — давление, S — энтропия, u и H — 3-векторы скорости и магнитного поля. Конкретный вид симметрических матриц A_α найден недавно в [**1**]. Уравнения Максвелла $\partial_t\mathcal{H} + \nabla\times E = 0$, $\partial_t E - \nabla\times\mathcal{H} = 0$ для электромагнитного поля $V = (E, \mathcal{H})$ в вакууме также образуют симметрическую систему вида (1) с $A_0 = I$ и постоянными матрицами A_j. Кроме того, имеются дивергентные ограничения div $H = 0$, div $E = 0$ и div $\mathcal{H} = 0$ на начальные данные $(U,V)|_{t=0} = (U_0, V_0)$.

Пусть $\Omega^\pm(t) = \{x^1 \gtrless \varphi(t,x^2,x^3)\}$ — области, занимаемые плазмой и вакуумом соответственно. Тогда на свободной границе $\Sigma(t) = \{x^1 = \varphi(t,x^2,x^3)\}$ задаются условия

$$\partial_t\varphi = v_N, \quad q = (|\mathcal{H}|^2 - |E|^2)/2, \quad E_2 = \mathcal{H}_3\partial_t\varphi - E_1\partial_2\varphi, \quad E_3 = -\mathcal{H}_2\partial_t\varphi - E_1\partial_3\varphi, \tag{2}$$

где $q = p + (|H|^2 + (u,H)^2)/(2+2|u|^2)$ — полное давление, а v_N — нормальная компонента $v = (1+|u|^2)^{-1/2}\,u$. При этом, условия $H_N|_\Sigma = 0$ и $\mathcal{H}_N|_\Sigma = 0$ являются ограничениями на начальные данные. Предполагается, что плотность $\rho|_\Sigma > 0$.

Наша цель — найти условия на начальные данные (U_0, V_0, φ_0), гарантирующие локальное по времени существование и единственность гладкого решения (U, V, φ) задачи со свободной границей для системы (1) в Ω^+ и уравнений Максвелла в Ω^- с граничными условиями (2) на Σ. Следуя [**2, 3**], мы используем «распрямление» границы, переход к «хорошему неизвестному» Алиньяка [**2**] и итерации Нэша–Мозера. Так как $\Sigma(t)$ — характеристическая поверхность, как и в [**2**], априорные оценки выводятся в весовых анизотропных пространствах Соболева H^m_*. Ключевым моментом является нахождение достаточного условия устойчивости плоской границы «плазма-вакуум» с помощью построения *вторичной симметризации* [**5**] уравнений Максвелла.

Требуется, чтобы это условие выполнялось во всех точках начальной поверхности $\Sigma(0)$.

Исследуемая задача важна для приложений в астрофизике. Соответствующая задача для нерелятивистского случая имеет существенные отличия (см. **[4]**).

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00320-а.

Список литературы

[1] *Freistühler H., Trakhinin Y.* Symmetrizations of RMHD equations and their application to relativistic current-vortex sheets // Готовится к печати.
[2] *Trakhinin Y.* The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. V. 191. № 2. P. 245–310.
[3] *Trakhinin Y.* Local existence for the free boundary problem for nonrelativistic and relativistic compressible Euler equations with a vacuum boundary condition // Comm. Pure Appl. Math. 2009. V. 62. № 11. P. 1551–1594.
[4] *Trakhinin Y.* On the well-posedness of a linearized plasma-vacuum interface problem in ideal compressible MHD // J. Differ. Equations. 2010. V. 249. № 10. P. 2577–2599.
[5] *Trakhinin Y.* Stability of relativistic plasma-vacuum interfaces // Препринт на arXiv.org. 2010. http://arxiv.org/abs/1006.1089.

Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

Трынин А. Ю. (Саратовский государственный университет, Россия)

Получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего рода. Для граничных условий первого рода аналогичные соотношения, правда, содержащие производные собственных функций по спектральному параметру, получены в **[1]**.

Пусть $q \in L[0,\pi]$, и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ — n-ое собственное значение задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ \sin\alpha U'(0) + \cos\alpha U(0) = 0, \\ \sin\beta U'(\pi) + \cos\beta U(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

а $y(x,q,\lambda_n) \equiv U_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|y(\cdot,q,\lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Будем нумеровать нули функции U_n таким образом: $0 \le x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} \le \pi$. Зафиксируем некоторые $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q $k+1$-ый нуль слева n-ой собственной функции $y(x,q,\lambda_n[q]) \equiv U_n(x)$. Договоримся обозначать через $D\phi[q,w] = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(q+tw)-\phi(t)}{t}$ дифференциал Гато функционала $\phi : L[0,\pi] \to \mathbb{R}$ при приращении $w \in L[0,\pi]$.

Теорема 1. *Пусть q, $w \in L[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\left[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2} \int_0^\pi w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n) \beta_{k,n}(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где

$$\beta_{k,n}(\tau) = \begin{cases} 1-\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in [0, x_{k,n}], \\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in (x_{k,n}, \pi], \end{cases} \qquad \alpha_{k,n} = \int_0^{x_{k,n}} y^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau.$$

Теорема 2. *Какой бы суммируемый потенциал q ни взять, для любого $\xi \in (0,\pi)$, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$ таких, что $x_{0,n}[q] \not\equiv 0$ или $x_{n,n}[q] \not\equiv \pi$, дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ при приращении*

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,\xi], \\ 1, & \text{если } x \in (\xi,\pi] \end{cases}$$

будет отрицателен, то есть $Dx_{k,n}[q,w] < 0$.

В работе **[2]** содержится доказательство этих результатов в частном случае краевых условий третьего рода, из которых удалены условия первого рода.

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

Список литературы

[1] *McLaughlin J. R.* Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result // J. Differ. Equations. 1988. V. 73. № 2. P. 354-362.

[2] *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. № 9 (460). С. 60-73.

Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с условиями периодичности

Удалова Г. Ю. (Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Россия)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} = f(x) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, где α, β — заданные положительные числа, и следующую задачу.

Задача 1 (Обратная задача). Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad f(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]; \tag{2}$$

$$Lu = f(x), \quad (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Вопросы разрешимости различных обратных задач для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. К. Б. Сабитов [**1**] предложил новый подход — метод спектральных разложений — для обоснования единственности и существования решения прямых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Таким методом решена задача с условиями периодичности (4) для вырождающегося уравнения смешанного типа [**2**]. В работе автора [**3**] для уравнения типа (1) изучена обратная задача с граничными условиями второго рода: $u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0$, $-\alpha \le y \le \beta$.

В настоящей работе изучается обратная задача для уравнения (1) с условиями периодичности (4). Методом спектральных разложений установлен критерий единственности решения задачи (2)–(6). Само решение построено в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Доказана устойчивость решения по заданным граничным функциям (5) и (6).

Список литературы

[1] *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.

[2] *Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г.* Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 45. № 1. С. 105–113.

[3] *Удалова Г. Ю.* Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4 (78). С. 116–122.

Дефект стабильности в игровых задачах управления

Ушаков В. Н. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)
Успенский А. А. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)
Лебедев П. Д. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)
Малев А. Г. (Институт математики и механики УрО РАН, Россия)

Изучается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы с целью в фиксированный момент времени и свойство стабильности [**1**]–[**3**]. Стабильный мост — множество в пространстве позиций игровой задачи, обладающее свойством слабой инвариантности относительно набора дифференциальных включений, определяющих динамику конфликтно управляемой системы.

Предложено расширение концепции стабильности, в рамках которого замкнутому множеству в пространстве позиций игровой задачи ставится в соответствие некоторая неотрицательная функция, заданная на промежутке времени игры. Эта функция оценивает степень несогласованности множества с динамикой конфликтно управляемой системы с точки зрения понятия стабильности. При этом степень несогласованности рассматриваемого множества с максимальным по вложению стабильным мостом выражена интегралом Лебега от этой функции, который называется дефектом стабильности множества [**4, 5**].

Разработаны алгоритмы вычисления дефекта стабильности для множеств с кусочно-гладкой границей, апробированные на конкретных динамических системах. При построении решений игровых задач также используется подход, при котором максимальные по вложению стабильные мосты со сложной геометрией своей границы подменяются множествами с эллиптическими сечениями [**6**]. Целесообразность такого подхода мотивирована возможностью построения множества с гладкой границей, имеющего малый дефект стабильности и позволяющего решать игровую задачу сближения в «мягкой» постановке. «Мягкая» постановка задачи сближения предполагает построение позиционной процедуры управления, обеспечивающей приведение движения конфликтно управляемой системы в окрестность целевого множества.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления», РФФИ (проект 08-01-00587-а) и программы совместных исследований УрО и СО РАН «Разработка вопросов теории, объединяющей задачи реконструкции, обращения и управления».

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н.* Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.

[2] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. — Т. 190, № 3. — С. 523–526.

[3] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. — 456 с.

[4] *Ушаков В. Н., Латушкин Я. А.* Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. — С. 178–194.

[5] *Ушаков В. Н., Малев А. Г.* К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16, № 1. — С. 199–222.

[6] *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser. 1997. — 220 p.

Асимптотическое поведение решений уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды

Фадеева Г. М. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Рассматривается система уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды (см. [**1**]–[**3**])

$$\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (1)$$

в области $D=\{0<x<X,\quad 0<y<+\infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y)=u_0(y),\quad u(x,0)=0,\quad v(x,0)=v_0(x),$$
$$u(x,y)\to U(x)\quad \text{при } y\to+\infty,$$

Данная система сводится (см. [**1**]) к одному квазилинейному уравнению

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0(x)\frac{\partial w}{\partial\psi}=2\frac{dp}{dx} \quad (2)$$

в области $G = \{0 < x < +\infty, \quad 0 < \psi < +\infty\}$ с условиями

$$w(0,\psi) = w_0(\psi), \quad w(x,0) = 0, \quad w(x,\psi) \to U^2(x) \quad \text{при} \quad \psi \to +\infty. \qquad (3)$$

При некоторых условиях система (1) имеет автомодельное решение, которое получается с помощью решения уравнения вида

$$\left(1 + 3k\left(Uf''/\delta\right)^2\right) f''' + ff'' + \beta(1 - (f')^2) = 0,$$

обобщающего уравнение Фалкнера–Скэн, с граничными условиями

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\eta) \to 1, \quad \eta \to +\infty.$$

Теорема 1. *Пусть $U(x) \equiv U_1 = \mathrm{const}$; $w_1(x,\psi)$, $w_2(x,\psi)$ — два решения задачи (2), (3) с начальными условиями $w_1(0,\psi) = w_{10}(\psi)$, $w_2(0,\psi) = w_{20}(\psi)$. Если*

$$\int\limits_0^{+\infty} |\sqrt{w_{10}(\psi)} - \sqrt{w_{20}(\psi)}| d\psi < +\infty,$$

то

$$(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)})^2 \le C(1+x)^{-1/4}$$

при $0 < \psi_0 \le \psi \le \psi_1 < +\infty$, где выбор постоянной C зависит от ψ_0 и ψ_1. При $x \to \infty$ решения $w_i(x,\psi)$ стремятся к автомодельному решению задачи.

Эта работа выполнена совместно с профессорами Г. А. Чечкиным и В. Н. Самохиным при поддержке РФФИ, грант 09-01-00353.

Список литературы

[1] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Модификация О. А. Ладыженской уравнений Навье–Стокса и теория пограничного слоя // Вестник МГУП. 2009. № 5. С. 127–143.

[2] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей // Вестник МГУП. 2010. № 4. С. 64–71.

[3] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Физматлит, 1970.

Формула регуляризованных следов для возмущений из класса σ_p, $p \in \mathbb{N}$

Фазуллин З. Ю. (Башкирский государственный университет, Россия)
Муртазин Х. Х. (Башкирский государственный университет, Россия)

Пусть L_0 — полуограниченный снизу самосопряженный дискретный оператор в гильбертовом пространстве H, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — спектр оператора L_0, пронумерованный в порядке роста с учетом кратностей; $V = V^*$ — оператор из класса σ_p, $p \in \mathbb{N}$. Через $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим спектр оператора $L = L_0 + V$, пронумерованный в порядке возрастания с учетом кратностей. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $V \in \sigma_p$, $\mathbb{N} \ni p \ge 3$ и $\exists \delta > 0$ и $\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что при $m \gg 1$ $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \ge \delta$. Тогда имеет место*

$$\lim_{m\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n_m} (\mu_k - \lambda_k) - \sum_{l=1}^{p-1} \alpha_l^{(m)}\right] = 0,$$

где $\alpha_l^{(m)} = \frac{(-1)^l}{2\pi i} \boldsymbol{sp} \int_{\Gamma_m} z\,(R_0(z)V)^l\,R_0(z)\,dz$, $\Gamma_m = \left\{ z \mid z = \frac{\lambda_{n_m+1}+\lambda_{n_m}}{2} e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$, $R_0(z) = (L_0 - zI)^{-1}$.

Отметим, что при $p = 2$ эта теорема доказана в работе **[1]**, при более жестких условиях: $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \to \infty$, $m \to \infty$, для $p \ge 2$ — в работе **[2]**.

Список литературы

[1] *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Математический сборник, 2005. Т. 196. № 12. С. 123–156.

[2] *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Математический сборник. 2002. Т. 193. № 2. С. 129–152.

О неявных формах и непрерывных аппроксимациях дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

Финогенко И. А. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия)

Исследуется система обыкновенных дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f : (\alpha, \beta) \times \Omega \to R^{n+1}$, (α, β) — интервал на числовой прямой, Ω — некоторая область в пространстве R^n. Предполагается, что функция $f(t, x)$ определена и непрерывна всюду за исключением некоторого множества гладких гиперповерхностей $M_i = \{(t, x) \in \Omega : \phi_i(x) = 0\}$, $i = 1, \ldots, m$. Решение уравнения (1) понимается в смысле А. Ф. Филиппова **[1]**, как решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

где $F(t, x)$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t, x)$ в каждой точке (t, x).

В данной работе для уравнения (1) получено представление в форме неявного дифференциального включения

$$\dot{x} \in \tilde{F}(t, x, \dot{x}) \tag{3}$$

с некоторой многозначной функцией $\tilde{F}(t, x, \dot{x}) \subset F(t, x)$ в правой части, и установлено, что дифференциальные включения (2) и (3) равносильны в том смысле, что множества их решений совпадают.

При односторонних условиях Липшица (или условиях типа монотонности) доказана однозначная определенность вектора $\dot{x} = F_0(t, x)$ из включения (3), и построено однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F_\lambda(t, x), \quad \lambda \ge 0, \tag{4}$$

где $F_\lambda(t, x)$ при $\lambda > 0$ — непрерывные, однозначные функции (аппроксимации Иосиды многозначного отображения $F(t, x)$). Доказана теорема о существовании и единственности медленных правосторонних решений (см. **[2]**) для задачи (1) в эквивалентных формах (3) или (4) при $\lambda = 0$. Получена оценка близости для решений уравнения (1) и аппроксимирующих уравнений (4) при $\lambda > 0$ вида $O(\sqrt{\lambda})$. Аналогичная оценка в пространстве непрерывных функций получена для множеств решений дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F_\lambda(t,x) + U(t,x)$$

при $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$, где $U(t,x)$ — многозначное отображение с выпуклыми, компактными значениями.

Работа выполнена при поддержке СО РАН, интеграционный проект № 85 и РФФИ, грант № 10-01-00132.

Список литературы

[1] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

[2] *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

Об операторе с частными интегралами в одном весовом пространстве

Фролова Е. В. (Липецкий государственный педагогический университет, Россия)

Некоторые задачи теории переноса излучения в атмосферах звезд и планет, теории упругих оболочек и другие приводятся к уравнениям с частными интегралами вида

$$x = Kx + f, \tag{1}$$

где $K = L + M + N$, операторы L, M, N определяются равенствами

$$(Lx)(t,s) = \int_a^{+\infty} l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau, \quad (Mx)(t,s) = \int_c^{+\infty} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau;$$

$t,\tau \in [a,+\infty)$, $s,\sigma \in [c,+\infty)$, l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Пусть $D = [a,+\infty) \times [c,+\infty)$, $C(D)$ — пространство равномерно непрерывных и ограниченных на D функций с supremum-нормой. Через $C_p(D)$ обозначим множество заданных на D функций, таких, что $px \in C(D)$. Норма в $C_p(D)$ определяется равенством $\|x\|_{C_p(D)} = \|px\|_{C(D)}$.

Теорема 1. *Если оператор K действует в пространстве $C_p(D)$, то он непрерывен.*

Критерии действия линейных операторов с частными интегралами в пространстве $C_p(D)$ неизвестны. Рассмотрим достаточные условия действия оператора K в $C_p(D)$.

Определение 1. Пусть $\Omega \in \big\{[a,+\infty),[c,+\infty),D\big\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется L^1-непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot) - u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2|$, $|s_1 - s_2| < \delta$, и L^1-ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq U < \infty$.

Теорема 2. *Пусть*

$$l(t,s,\tau)=p(\tau,s)l_1(t,s,\tau), m(t,s,\sigma)= \\ =p(t,\sigma)m_1(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)=p(\tau,\sigma)n_1(t,s,\tau,\sigma), \quad (2)$$

где функции l_1, m_1, n_1 L^1-*непрерывны и* L^1-*ограничены. Тогда оператор* K *действует в пространстве* $C_p(D)$ *и непрерывен.*

Теорема 3. *Пусть ядра* l,m,n *имеют вид* (2),

$$l_1=\sum_{i=1}^{p} l_i(t)\bar{l}_i(s)a_i(\tau), \quad m_1=\sum_{j=1}^{q} m_j(t)\bar{m}_j(s)b_j(\sigma),$$

$$n_1=\sum_{k=1}^{r} n_k(t)\bar{n}_k(s)c_k(\tau,\sigma),$$

где $l_i,\bar{l}_i$ $(i=1,\dots,p)$, $m_j,\bar{m}_j$ $(j=1,\dots,q)$, $n_k,\bar{n}_k$ $(k=1,\dots,r)$ — *равномерно непрерывные и ограниченные функции;* $\int_a^{+\infty}|a_i(\tau)|\,d\tau<A<\infty$ $(i=1,\dots,p)$, $\int_c^{+\infty}|b_j(\sigma)|d\sigma<B<\infty$ $(j=1,\dots,q)$, $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty}|c_k(\tau,\sigma)|\,d\sigma d\tau<C<\infty$ $(k=1,\dots,r)$; *а системы функций* $\{a_i \mid i=1,\dots,p\}$, $\{b_j \mid j=1,\dots,q\}$ *ортонормированы. Тогда оператор* K *действует в пространстве* $C_p(D)$. *Если же* $|D_1(s)|=\big||\delta_{ik}-\mu_{ik}(s)|\big|\geq\alpha>0$, $|D_2(t)|=\big||\delta_{jl}-\nu_{jl}(t)|\big|\geq\beta>0$, *где* $\mu_{ik}(s)=\int_a^{+\infty}a_i(\tau)l_k(\tau)\bar{l}_k(s)p(\tau,s)\,d\tau$ $(i,k=1,\dots,p)$, $\delta_{ik}=1$ *при* $i=k$, $\delta_{ik}=0$ *при* $i\neq k$; $\delta_{jl}=1$ *при* $j=l$, $\delta_{jl}=0$ *при* $j\neq l$, $\nu_{jl}(t)=\int_c^{+\infty}b_j(\sigma)m_l(t)\bar{m}_l(\sigma)p(t,\sigma)\,d\sigma$ $(j,l=1,\dots,q)$, *то оператор* $I-K$ *и уравнение* (1) *фредгольмовы.*

Порядок сходимости в задаче Стефана при стремлении к нулю удельной теплоемкости

Фролова Е. В. (Санкт-Петербургский Электротехнический университет, Россия)

В **[1]**, **[2]** рассмотрена задача Стефана с малым параметром ε при производной по времени в уравнении, который соответствует удельной теплоемкости. Доказано, что при достаточно малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ гладкое решение существует на некотором интервале времени, не зависящем от ε. Решение сравнивается с решением эллиптической задачи со свободной границей, соответствующей нулевому значению параметра ε.

Предположим, что при $t=0$ границы раздела фаз одинаковы в параболической и эллиптической задачах, но решение эллиптической задачи не совпадает с начальными данными параболической. Вводится вспомогательная функция пограничного слоя, экспоненциально убывающая со временем. Исследование этой функции дает возможность доказать, что несоответствие в начальный момент времени не препятствует сходимости решения двухфазной задачи Стефана к решению предельной задачи при $\varepsilon\to 0$, так как разность решений имеет порядок $O(\varepsilon)+O(e^{-\frac{at}{\varepsilon}})$, $a>0$. Оценки выполнены в пространствах Гельдера.

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00372-а.

Список литературы

[1] *Солонников В. А., Фролова Е. В.* О справедливости квазистационарного приближения для задачи Стефана // Записки научн.сем. ПОМИ. 2007. Т. 348. С. 209–252.
[2] *Фролова Е. В.* Двухфазная задача Стефана с удельной теплоемкостью стремящейся к нулю. // Записки научн.сем. ПОМИ. 2008. Т. 362. С. 337–363.
[3] *Фролова Е. В.* Порядок сходимости в задаче Стефана при стремлении к нулю удельной теплоемкости. // Записки научн.сем. ПОМИ. 2010. Т. 385. С. 206–223.

Полулинейные параболические уравнения нормального типа: свойства динамики и нелокальная стабилизация посредством стартового управления

Фурсиков А. В. (Московский государственный университет, Россия)

Энергетическая оценка определяет многие важные свойства решений для широкого класса уравнений математической физики. Например, из энергетического неравенства выводится существование обобщенного решения у трехмерной системы Навье–Стокса, а отсутствие аналогичной оценки в фазовом пространстве H^1 является серьезным препятствием для доказательства нелокальных теорем существования гладких решений у этой системы.

Параболическое уравнение имеет нормальный тип, если нелинейный оператор B из этого уравнения обладает следующим свойством: для каждого вектора v вектор $B(v)$ коллинеарен v. Другими словами, уравнения нормального типа не удовлетворяют энергетической оценке в наибольшей степени (так как энергетическое неравенство выводится из условия $B(v) \perp v$).

Для простейшего параболического уравнения нормального типа с периодическими краевыми условиями исследована структура ее фазового потока, а именно фазовое пространство рабито на три множества:

1°. множество устойчивости (решения с начальными условиями из этого множества стремятся к нулю, когда время $t \to \infty$ с некоторой заданной оценкой сверху),
2°. множество взрывов, когда решение взрывается за конечное время, и
3°. промежуточное множество, когда решение либо, стремясь к нулю при $t \to \infty$, не удовлетворяет заданной оцеке сверху, либо неограниченно растет при $t \to \infty$.

При любом начальном условии построено стартовое управление с носителем в произвольной фиксированной подобласти, такое, что решение полученной краевой задачи стремится к нулю при $t \to \infty$.

Эта работа поддержана Программой ОМ РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики».

Необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

Хаджи И. А. (Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Россия)

Рассмотрим уравнение эллиптико-гиперболического типа

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sign} y)u_{yy} - b^2 u = f(x,y), \quad b > 0,$$

где

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)| \quad 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β — заданные положительные числа.

Задача 1 (Обратная задача). Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{1}$$

$$f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1], \quad i = 1,2; \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u_y(x,\beta) = h(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad u_y(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где φ, ψ, h и g — заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной работе следуя **[1]** и **[2]** приводится обоснование единственности решения обратной задачи (1)–(6) для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (1)–(6)*, то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \operatorname{sh}\lambda_k\beta - \sin\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha\operatorname{ch}\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha\operatorname{sh}\lambda_k\beta \ne 0, \quad \lambda_k^2 = b^2 + (\pi k)^2.$$

Список литературы

[1] *Сабитов К. Б.* Критерий единственности решения краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа // Труды международ. науч. конф. ≪Дифференциальные уравнения и смежные проблемы≫, посвящ. юбилею академика В. А. Ильина. 2008. № 2. Т. II. С. 154–161.

[2] *Сабитов К. Б, Хаджи И. А.* Краевая задача для уравненения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 44–52.

Управление переходными процессами в нелинейных дифференциальных уравнениях

Хапаев М. М. (Московский государственный университет, Россия)
Терновский В. В. (Московский государственный университет, Россия)

В настоящее время быстродействие электронных устройств подошло к своему физическому пределу, связанному с конечной скоростью перемещения носителей заряда, явлениями самоиндукции и т. д. Возникает вопрос, на который авторы отвечают утвердительно: возможно ли управлять нелинейными устройствами и сократить время переходного процесса? На примере уравнения Ван Дер Поля изучаются процессы управления нелинейными устройствами выходом траектории на предельный цикл за минимальное время. Численный метод поиска неизвестной управляющей функции разработан в соответствии с методикой решения обратных некорректных задач при условии компактности множества достижимости. Обычная практика минимизации регуляризирующего (сглаживающего) функционала несостоятельна в задачах управления с возможными разрывными решениями, так как придется “угадывать” разрывное управление в гладких кривых, исчезают точки переключения. Новый метод сводится к минимизации функционала времени с локальными и интегральными ограничениями. В свою очередь, в интегральные ограничения входят неизвестные фазовые переменные, являющиеся решением краевой задачи. Метод позволяет решать задачи с особыми и неизмеримыми управлениями.

О равновесии упругих тел с жесткими включениями

Хлуднев А. М. (Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Россия)

Рассматривается двумерное упругое тело, содержащее включение и трещину. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия вида неравенств, обеспечивающие взаимное непроникание берегов. Свойства включения зависят от параметра $\lambda \in [0, \infty]$. Случай $\lambda = 0$ соответствует отверстию в упругом теле, $\lambda = \infty$ соответствует жесткому включению, а при $\lambda \in (0, \infty)$ включение является упругим. Пусть параметр δ характеризует возмущение длины трещины. Для каждого λ находится формула для производной функционала энергии $\left.\dfrac{d\Pi(\lambda,\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0}$ по длине трещины и определяется функционал качества

$$J(\lambda) = \left.\frac{d\Pi(\lambda,\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0}.$$

Значение функционала J всегда неположительно. С точки зрения критерия разрушения Гриффитса опасными являются такие значения функционала J, при которых $J = \kappa$, где $\kappa < 0$ — материальный параметр. В работе доказано утверждение.

Теорема 1. *Существует решение задачи оптимального управления*

$$\sup_{\lambda \in [0,\infty]} J(\lambda).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00054) и ФЦП Кадры (грант П597).

Список литературы

[1] *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
[2] *Лойгеринг Г., Хлуднев А. М.* О равновесии упругих тел, содержащих жесткие включения // ДАН. 2010, Т. 430, № 1. С. 1–4.
[3] *Khludnev A. M.* Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2010. V. 29. № 3. P. 392–399.

Об одной смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией

Хромов А. П. (Саратовский госуниверситет, Россия)
Бурлуцкая М. Ш. (Воронежский госуниверситет, Россия)

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x,t) + q_2(x)u(1-x,t), \qquad (1)$$

$$u(0,t)=0, \qquad u(x,0)=\varphi(x), \qquad (2)$$

где $x\in[0,1]$, $t\in(-\infty,\infty)$, β — вещественное число, $q_j(x)\in C^1[0,1]$, $q_1(x)$ — вещественная, $q_2(x)=\overline{q_2(1-x)}$, $q_2(0)=0$, $\varphi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$.

Обозначим через L (L_0) операторы:

$$\begin{array}{ll} L: & Ly = y'(1-x)+q_1(x)y(x)+q_2(x)y(1-x),\ y(0)=0,\\ L_0: & L_0y = y'(1-x)+q_1^0(x)y(x)+q_2^0(x)y(1-x),\ y(0)=0, \end{array}$$

где $q_1^0(x)=\frac{1}{2}[q_1(x)+q_1(1-x)]$, $q_2^0(x)=\frac{1}{2}[q_2(x)-q_2(1-x)]$.

Лемма 1. *Собственные значения λ_n^0 оператора L_0 простые и имеют вид $\lambda_n^0=2\pi n+a$, $n\in\mathbb{Z}$, где $a=\pi/2+\int\limits_0^1 q_1^0(t)dt$.*

Лемма 2. *Собственные значения λ_n оператора L, достаточно большие по модулю, простые, причем $\lambda_n=\lambda_n^0+O(1/n)$.*

Лемма 3. *Собственные функции $y_n(x)$ ($y_n^0(x)$) оператора L (L_0) образуют полную ортонормальную систему.*

Пусть R_λ и R_λ^0 — резольвенты операторов L и L_0 соответственно.

Теорема 1. *Классическое решение задачи* (1)–(2) *существует и имеет вид:*

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t).$$

Здесь

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}\left[p(1-x)f_0(1-x+\beta t)-ip(x)f_0(x+\beta t)\right]\exp\left(a\beta it+\int_0^x q_2^0(\tau)\,d\tau\right),$$

$p(x) = \exp\left(i(ax - \int_0^x q_1^0(\tau)\,d\tau)\right)$, $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \in (-\infty, +\infty)$, периодическая с периодом 1 функция, причем $f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)\right]$ при $x \in [0,1]$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x)\exp\left(-\int_0^x q_2^0(\tau)\,d\tau\right)$;

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi\right)(x)e^{\lambda\beta it}d\lambda,$$

где r настолько велико, что λ_n и λ_n^0, бо́льшие по модулю, чем r, — простые; ряд

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\left(\varphi, y_n\right)y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - \left(\varphi, y_n^0\right)y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right], \qquad (3)$$

и ряды, получающиеся из (3) почленным дифференцированием по x и t, сходятся равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in (-A, A)$, где $A > 0$ любое.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1).

Связанная система уравнений Навье–Стокса–Фоккера–Планка

Хруслов Е. Я. (Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина)

Рассматривается система уравнений, описывающая динамику сильно дисперсной смеси вязкой несжимаемой жидкости с мелкими твердыми частицами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla_x)u - \nu\Delta_x u\alpha\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d} r(u-v)f dv dr - \nabla_x p = g, \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (u, \nabla_x)f + \operatorname*{div}_v[G_r(u,v)f] - \sigma_r\Delta_v f = 0, \qquad (3)$$

$$G_r(u,v) = \beta r^{-2}(u-v) + g_1, \qquad \sigma_r = \sigma r^{-5}. \qquad (4)$$

Здесь неизвестные $u = u(x,t)$, $p = p(x,t)$ — поля скоростей и давления в несущей жидкости и $f = f(x,v,r,t)$ — функция распределения частиц по координатам $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, скоростям $v \in \mathbb{R}^d$ (d=2, 3) и приведенным радиусам $r \in (01)$, $g = g(x,t)$, $g_1 = g_1(x,t)$ — заданные поля внешних сил, α, β, σ — подожительные числа.

При $r = 3$ доказано существование глобальных слабых решений начально-краевой задачи для системы (1)–(4), а при $d = 2$ — существование и единственность классического глобального решения.

Гладкие решения линейных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа

Черепенников В. Б. (Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева, Россия)

Рассматривается скалярное линейное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t) + b(t)x(t/q) + f(t), \quad q > 1, \quad t \in R. \qquad (1)$$

Здесь $p(t), a(t), b(t)$ и $f(t)$ полагаются полиномами. Если $p(t) \equiv p$ — const, $a(t) \equiv a$ — const, $b(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv 0$, то существует бесконечное множество аналитических решений уравнения (1). В других случаях автору не известны результаты о разрешимости уравнения (1) в классе достаточно гладких или аналитических функций. Для исследования поставленной задачи используется метод полиномиальных квазирешений (ПК-решений) [**1**], основанный на представлении функции $x(t)$ в виде полнома степени N. При подстановке этого полинома в уравнение (1) появляется некорректность относительно размерности полиномов, которая компенсируется введением невязки. В работе исследуются вопросы существования ПК-решений различных степеней. Приводится алгоритм нахождения неизвестных коэффициентов x_n ПК-решения и точные формулы невязки, которые позволяют судить о мере возмущения исходной задачи. Рассматриваются как начальная задача с начальной точкой, так и краевая задача. Для начальной задачи с начальной функцией показано, что если в качестве начальной функции задать ПК-решение степени N, то порождаемое решение будет иметь в точках стыковки решений гладкость не ниже N. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

Список литературы

[1] *Cherepennikov V. B., Ermolaeva P. G.* Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations // Opuscula Mathematica. 2006. P. 47–57.

Регулярность решений краевых задач для параболических уравнений произвольного порядка в весовых пространствах Гельдера

Черепова М. Ф. (Московский энергетический институт)

Рассматриваются краевые задачи для линейного равномерно-параболического уравнения порядка $2m$ (m — натуральное) в нецилиндрических областях, возможно, неограниченных (как по x, так и по t), с негладкой (по t) и некомпактной боковой границей. Предполагается, что правая часть и младшие коэффициенты уравнения могут расти определенным образом при приближении к параболической границе области, все коэффициенты уравнения локально гельдеровы, причем их коэффициенты Гельдера растут, вообще говоря, вблизи параболической границы.

Построена шкала гладкости решений этих задач в весовых пространствах Гельдера функций, допускающих определенный рост старших производных вблизи параболической границы области.

Узкие пучки на сетях: случай линейно зависимых времен прохождения ребер

Чернышев В. Л. (Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Россия)

Доклад посвящен динамике узких пучков на геометрическом графе (см. статьи [**1**], [**2**] и ссылки в них). Обсуждаются самосопряженные условия, гарантирующие отсутствие отражения пакета в вершине. Рассматривается статистика распространения гауссовых пакетов для случая линейно зависимых над полем рациональных чисел времен прохождения ребер.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов МК-943.2010.1, РФФИ 10-07-00617-а и 09-07-00327-а, РНП 2.1.1/227 и программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.0794).

Список литературы

[1] *Чернышев В. Л.* Нестационарное уравнение Шредингера: статистика распространения гауссовых пакетов на геометрическом графе // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. 2010. Т. 270, С. 249–265.

[2] *Толченников А. А., Чернышев В. Л., Шафаревич А. И.* Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах. // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 3, С. 623–638.

О линейных динамических играх для систем с импульсными воздействиями

Чикрий А. А. (Институт кибернетики НАНУ, Украина)

Рассматриваются квазилинейные конфликтно управляемые процессы, подверженные одновременно непрерывному и импульсному управлению двух противодействующих сторон. Моменты импульсных воздействий либо фиксированы, либо выбираются игроками, как и величины импульсов, которые принадлежат заданным компактам. Форма выражения импульсного влияния на динамическую систему может быть различной [**1**–**4**].

Приняв сторону первого игрока, стремящегося вывести траекторию процесса на цилиндрическое терминальное множество, даются достаточные условия для реализации этого факта за некоторое гарантированное время при любых противодействиях второго игрока. При этом используется либо предыстория управления второго игрока, либо лишь его мгновенные значения. В качестве базового метода для исследования используется метод разрешающих функций [**5**]. Схема упомянутого метода предполагает выполненным условие Понтрягина или одной из его модификаций с последующим построением специальных многозначных отображений и их опорных функций, названных разрешающими функциями, и характеризующих качество игры первого игрока при известном управлении второго в заданный момент. Накопительная система оценки качества игры позволяет включить в исходную схему метода первый прямой метод Понтрягина, причем ему соответствует бесконечное значение разрешающей функции. Свойство совокупной $L \times B$-измеримости введенных многозначных отображений и соответственно суперпозиционной измеримости их селекторов дают возможность осуществить измеримый выбор управлений первого игрока в непрерывной части по аналогии с теоремой Филиппова–Кастена. Соответствующее условие преимущества первого игрока в импульсной части воздействия также дается. Рассмотрены случаи отдельно только непрерывного управления первого игрока и только импульсного управления второго и наоборот, случаи импульсных управлений обоих игроков. Отметим отдельно, что разрешающие функции, являющиеся ключевым объектом в исследовании, по построению есть в некотором роде обратными функционалами Минковского определенных многозначных отображений **[5]**. Это обстоятельство позволяет строить разрешающие функции в аналитическом виде для широкого класса конфликтно управляемых процессов. Результаты иллюстрируются на многочисленных модельных примерах игровых задач для систем с импульсными воздействиями и толчками, в частности, дается обоснование параллельного сближения в этой ситуации.

Список литературы

[1] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

[2] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Вища школа, 1987. 288 с.

[3] *Миллер Б. М., Рубинович Е. А.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 430 с.

[4] *Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А.* Динамические игры с разрывными траекториями. К.: Наук. думка, 2005. 220 с.

[5] *Чикрий А. А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения. Труды математического института им. В. А. Стеклова, 2010, Т. 271. С. 76–92.

Одна игровая задача о мягкой встрече двух разнотипных объектов

Чикрий Г. Ц. (Институт кибернетики НАНУ, Украина)

Анализ условия Понтрягина **[1]**, лежащего в основе прямых методов преследования теории линейных дифференциальных игр, проведенный М. С. Никольским, показал, что оно может не выполняться для целых классов задач **[2]**. Д. Зонневенд в **[3]** предложил его модификацию, основанную на построении преследователем своего текущего управления по управлению убегающего в прошлом. Выяснение связи модифицированного условия с фактическим переходом к игре с переменным, зависящим от времени запаздыванием информации, которая эквивалентна некоторой игре с полной информацией **[4]**, способствовало развитию иного подхода к исследованию сложных игровых задач. С его помощью было завершено начатое в **[3]** исследование игровой задачи о мягкой встрече двух дифференциальных систем, описывающих ньютоновскую динамику при наличии трения: уточнены условия на параметры игры, достаточные для завершения преследования за конечное время при любых начальных условиях, а также выведены условия, при которых преследование может быть осуществлено строго по геометрической траектории („следу“) противника **[5]**. Аналогичные результаты были получены для линейных управляемых систем второго порядка, совершающих затухающие колебания **[6]**. При этом для достижения своей цели преследователь строит свое управление по управлению противника в прошлом, как если бы информация о его поведении приходит с запаздыванием информации, являющимся непрерывно-дифференцируемой функцией времени. Однако модифицированное условие оказывается применимым и в случае, когда подходящая функция запаздывания разрывна слева на счетной возрастающей последовательности моментов времени и непрерывно-дифференцируема в точках своей непрерывности. Благодаря этому аналогичные результаты удалось получить и в случае разнотипных объектов, когда преследующий объект имеет ньютоновскую динамику (при наличии трения), а движение уклоняющегося от встречи объекта описывается линейными затухающими колебаниями.

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.

[2] *Никольский М. С.* О применении первого прямого метода Понтрягина// Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики. 1972. № 10. С. 51–56.

[3] *Зонневенд Д.* Об одном типе превосходства игрока// Докл. АН СССР. 1973. Т. 208, № 3. С. 520-523.

[4] *Чикрий Г. Ц.* О задаче преследования с переменным запаздыванием информации о состоянии// Докл. АН УССР. Сер. физ.-матем. и техн. науки. 1979. № 10. С. 855–858.

[5] *Чикрий Г. Ц.* Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования// Кибернетика и системный анализ. 2007. № 2. С. 90–105.

[6] *Чикрий Г. Ц.* Об одной задаче сближения для затухающих колебаний // Проблемы управления и информатики. 2009. № 5. С. 5–12.

Законы сохранения и групповые свойства уравнений теплового движения сжимаемого газа

Чиркунов Ю. А. (Новосибирский государственный технический университет, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия)

Тепловое движение сжимаемого газа описывается **[1]** уравнениями

$$\rho\left(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right) + \nabla p = 0, \quad \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0, \quad p_t + \mathbf{u}\cdot\nabla p = 0. \quad (1)$$

Здесь: t — время, $\mathbf{x} \in R^n$ $(n \geq 1)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in R^n$ — вектор скорости, $\rho = \rho\,(t, \mathbf{x})$ — плотность, $p = p\,(t, \mathbf{x})$ — давление. Методом **A**-операторов **[2, 3]** для системы (1) найдены все законы сохранения нулевого порядка. Выполнено групповое расслоение этой системы относительно бесконечной подгруппы, являющейся нормальным делителем ее основной группы Ли преобразований; найдена основная группа разрешающей системы. С помощью перехода к массовым лагранжевым переменным найдены нелокальные симметрии первого порядка для исходной системы. Специальный выбор массовых лагранжевых переменных позволяет привести эту систему к эквивалентной ей редуцированной системе, содержащей $n-1$ пространственных переменных, которая при $n = 2$ с помощью комплексных зависимых и независимых переменных записывается в виде одномерного комплексного уравнения теплопроводности, а при $n = 3$ — в виде

$$x^1_{tt} = -\left[x^2, x^3\right], \quad x^2_{tt} = -\left[x^3, x^1\right], \quad x^3_{tt} = -\left[x^1, x^2\right],$$

где $(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{x}$; $[a,b] = \left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(\xi^1,\xi^2)}\right|$ — скобка Пуассона, ξ^1, ξ^2 — лагранжевы переменные, основная группа Ли преобразований которой бесконечна и порождается операторами:

$$t\partial_t + \xi^1\partial_{\xi^1} + \xi^2\partial_{\xi^2}, \quad t\partial_t - 2\mathbf{x}\cdot\partial_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}\Lambda\partial_{\mathbf{x}}, \quad \partial_{\mathbf{x}}, \quad t\partial_{\mathbf{x}}, \quad g_{\xi^2}\partial_{\xi^1} - g_{\xi^1}\partial_{\xi^2},$$

где $g = g(\xi^1, \xi^2)$ — произвольная функция.

Работа выполнена при финансовой поддержке межрегионального интеграционного проекта СО РАН № 103.

Список литературы

[1] *Овсянников Л. В.* Некоторые итоги выполнения программы ≪Подмодели≫ для уравнений газовой динамики // ПММ. 1999. Т. 63. № 3. С. 362–372.
[2] *Чиркунов Ю. А.* Метод **A**-операторов и законы сохранения для уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 2. С. 53–60.
[3] *Чиркунов Ю. А.* Законы сохранения и групповые свойства уравнений изоэнтропического движения газа // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 1. С. 3–6.

Об условиях коммутирования дифференциальных операторов в двумерии

Шабат А. Б. (Институт Теоретической Физики им. Л. Д. Ландау, РАН, Россия)

Рассматривается вопрос о достаточно общей математической формулировке задачи о коммутирующих дифференциальных операторах в случае двух независимых переменных. Приводятся примеры и формулируются результаты исследования двух модельных задач.

Применение методов теории оптимального управления в решении задачи молекулярной биологии

Шагалова Л. Г. (Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

Рассматривается приведенная в работе **[1]** для модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции задача Коши.

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \quad 0 \le t < \infty, \quad -1 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -1 \le x \le 1. \tag{2}$$

Здесь $H(x,p) = 1 - f(x) - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}$, где $f(x)$ — заданная функция фитнеса.

Рассматриваемая задача с фазовыми ограничениями не имеет глобального классического решения, и для нее не выполняются известные **[2]** условия существования вязкостного решения.

Вводится **[3]** понятие непрерывного обобщенного решения задачи (1)–(2). Рассматривается вспомогательная задача оптимального управления (**OCP**)

$$\dot{x} = -H_p(x,p) = (1+x)e^{2p} - (1-x)e^{-2p}, \quad t \in [0,T], \quad p \in P \tag{3}$$

$$I_{(t_0,x_0)}(p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^\sharp} p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))d\tau + \varphi(t^\sharp, x(t^\sharp)) \to \max, \tag{4}$$

где $P = P([0,T])$ — компакт, $\varphi(\cdot)$ — дифференцируемая функция, являющаяся продолжением функции u_0 на $[0,T]\times[-1,1]$, $t^\sharp$ — момент первого выхода траектории $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, p(\cdot))$, стартующей из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием измеримого управления $p : [0,T] \to P$, на целевое множество

$$G = \{(t,x) |\, 0 \le t \le T, x = 1\} \bigcup \bigcup \{(t,x) |\, 0 \le t \le T,\, x = -1\} \bigcup \{(t,x) |\, t = T,\, -1 \le x \le 1\}.$$

Опираясь на результаты работ **[4, 5, 6]**, показано, что функция цены в задаче **OCP** совпадает с введенным обобщенным решением задачи (1)–(2).

Приводятся результаты численных экспериментов для различных $u_0(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

Доклад основан на совместной работе с Н. Н. Субботиной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00410), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-64508.2010.1) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Список литературы

[1] *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Physical Review E. 2008. Vol. 78, 041908, 7 p.

[2] *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.* Hamilton–Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2, P. 643–683.

[3] *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2 (в печати).

[4] *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995.

[5] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

[6] *Субботина Н. Н.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2004 (Совр. математика и ее прил.; Т. 20).

Об устойчивости решений уравнений, описывающих волны-убийцы

Шамин Р. В. (Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН; Новосибирский государственный университет, Россия)

Смирнова А. И. (Российский университет дружбы народов, Россия)

Волнами-убийцами называются внезапные морские волны аномально большой амплитуды. Такие волны возникают в ходе нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Как правило, волна-убийца представляет собой одиночную волну большой (до 30-ти метров) амплитуды. При изучении этого экстремального явления возникает актуальный вопрос об устойчивости волн-убийц относительно внешних воздействий.

В настоящей работе волны-убийцы изучаются на основе полных нелинейных уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Доказано, что рассматриваемые решения являются устойчивыми относительно малых внешних воздействий и начальным данным.

В ходе масштабных вычислительных экспериментов было установлено, что волны-убийцы являются устойчивыми при наличии ветра. Это является важным результатом в океанологии.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор № 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 между МинОбрНауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

Список литературы

[1] *Шамин Р. В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.

[2] *Захаров В. Е., Шамин Р. В.* О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, том 91 (2010), вып. 2, с. 68–71.

Полные списки первых интегралов в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле

Шамолин М. В. (Московский государственный университет, Россия)

Исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Сразу же отметим, что при исследовании „маломерных“ уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трехмерных) твердых тел в неконсервативном поле сил пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырехмерного твердого тела в аналогично построенном поле **[1, 2, 3]**.

В результате такого обобщения получились несколько случаев интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения.

Более того, на взгляд автора, полученные результаты оригинальны с той точки зрения, что в системе присутствует пара неконсервативных сил.

Ранее автором была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины **[3]**.

Позднее плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска **[1, 2]**.

В предлагаемой работе обобщаются некоторые известные ранее результаты по интегрированию двумерного и трехмерного твердых тел, находящихся под действием неконсервативного момента сил, а также исследуются уравнения движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела в одном из двух логически возможных случаях — в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

Список литературы

[1] *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.

[2] *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.

[3] *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65–68.

О единственности интегрируемого решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

Шапошников С. В. (механико-математический факультет, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Россия)

Исследуется пространство решений задачи Коши

$$\begin{cases} \partial_t \mu = \Delta\mu - \operatorname{div}(b\mu), \\ \mu|_{t=0} = \nu, \end{cases}$$

где $b = (b^i(x,t))_{1\le i\le d}$ — борелевское векторное поле, а $\mu = \mu_t(\,dx)\,dt$ — борелевская мера на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$, заданная семейством борелевских мер $(\mu_t)_{0<t<1}$ на $\mathbb{R}^d$. Предположим, что для некоторого $p > d+2$ коэффициент b лежит в $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d \times (0,1))$. Тогда всякое решение μ задается непрерывной плотностью ϱ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$. Пусть ν — произвольная конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^d$. Через $\mathcal{L}_\nu$ обозначим множество борелевских мер $\mu = \varrho(x,t)\,dx\,dt$ на $\mathbb{R}^d \times (0,1)$, удовлетворяющих задаче Коши с начальным условием ν, для которых $\varrho \in L^\infty((0,1), L^1(\mathbb{R}^d))$, и для всякого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ и некоторого $p > d+2$ верно включение $|b| \in L^p(|\mu|, U\times[0,1])$. Мы приводим достаточные условия единственности решения задачи Коши в классе $\mathcal{L}_\nu$ и строим примеры, показывающие точность условий. Отметим, что единственность задачи Коши в классе интегрируемых решений исследовалась во многих работах, из которых отметим **[1]**, **[2]**, **[3]**, **[4]** и **[5]**. Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть $b \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d \times (0,1))$ для некоторого $p > d+2$. Предположим, что существует такая положительная функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$, и для некоторого числа $C > 0$ и всех*

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,1)$ *выполнены неравенства* $LV(x,t) \geq -C$ *и* $|\nabla V(x)| \leq C$. *Тогда множество* $\mathcal{L}_\nu$ *содержит не более одного элемента.*

Пример 1. Пусть для всякого шара $U \subset \mathbb{R}^d$ функция $|b|$ ограничена на множестве $U\times[0,1]$. Для единственности интегрируемого решения достаточно иметь оценку $(b(x,t),x) \geq -C|x|^2\ln(|x|+1) - C$. Действительно, условия теоремы выполняются для функции $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ такой, что $V(x) = \ln(\ln(1+|x|))$ при $|x| > 1$.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Богачеву за плодотворные обсуждения и замечания. Работа поддержана грантом президента Российской Федерации МК-3674.2011.1, проектами РФФИ 11-01-00348-а, РФФИ 10-01-00518-а и SFB 701 при университете Билефельда.

Список литературы

[1] *Aronson D. G., Besala P.* Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations // J. Math. Anal. Appl., 1966, v. 13, p. 516–526.

[2] *Le Bris C., Lions P. L.* Existence and uniqueness of solutions to Fokker–Planck type equations with irregular coefficients // Comm. Partial Diff. Eq., 2008, v. 33, p. 1272–1317.

[3] *Wu L., Zhang Y.* A new topological approach to the L^∞-uniqueness of operators and L^1-uniqueness of Fokker–Planck equations // J. Funct. Anal., 2006, v. 241, p. 557–610.

[4] *L. Dan Lemle* $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$-Uniqueness of weak solutions for the Fokker-Planck equation associated with a class of dirichlet operators. // Elect. Research Announc. Math. Sci., 2008, v. 15, p. 65–70.

[5] *Bogachev V.I., Da Prato G., Röckner M., Stannat W.* Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures. // Bull. London Math. Soc., 2007, v. 39, № 4, p. 631–640.

Спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на поверхности вращения и квантование некомпактных лагранжевых многообразий

Шафаревич А. И. (Московский Государственный Университет, Россия)

В докладе описана квазиклассическая ($h \to 0$) асимптотика спектра оператора Шредингера с дельта-потенциалом

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + \alpha\delta(x - x_0) \qquad (1)$$

на двумерной компактной поверхности вращения M, гомеоморфной сфере; здесь Δ — оператор Лапласа–Бельтрами, x_0 — полюс поверхности вращения.

Рассмотрим в кокасательном расслоении T^*M лагранжево многообразие Λ, полученное из окружности $\Lambda_0 : x = x_0, |p| = E$ действием геодезического потока. Очевидно, Λ гомеоморфно тору, а некомпактное многообразие $\hat{\Lambda} = \Lambda\backslash\Lambda_0$ — цилиндру. На $\hat{\Lambda}$ выполнены условия квантования Маслова **[1]** и существует канонический оператор Маслова $K_{\hat{\Lambda}} : C^\infty(\hat{\Lambda}) \to C^\infty(M\backslash\{x_0\})$. Обозначим через γ траекторию геодезического потока, лежащую на $\hat{\Lambda}$.

Теорема 1. *Пусть* E — *решение уравнения*

$$\mathrm{tg}(\frac{1}{2h}\oint_\gamma (p,dx) + O(h)) = \frac{2}{\pi}\left(\ln(\frac{\sqrt{2E}}{h}) + \frac{\pi h^2}{\alpha} + c\right), \qquad (2)$$

где c — постоянная Эйлера. Тогда существует точка спектра E_0 оператора H, такая что $|E-E_0| = o(h)$ при $h \to 0$.

Замечание 1. Пусть $(\frac{\pi h^2}{\alpha} + \ln \frac{1}{h}) \to \infty$. Тогда условие квантования принимает стандартный вид:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_\gamma (p, dx) = k + \frac{1}{2} + o(1),$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$ $(k \sim \frac{1}{h}, h \to 0)$.

Пусть теперь правая часть в условии квантования стремится к константе B при $h \to 0$ (это возможно, если $\alpha = \frac{\pi h^2}{B + \ln h + o(1)}$). Тогда спектр находится из нестандартного условия квантования

$$\mathrm{tg}(\frac{1}{2h}\oint_\gamma (p, dx)) = \frac{1}{\pi}(\ln 2E + 2c + B) + o(1).$$

Замечание 2. Асимптотика собственных функций вне сколь угодно малой окрестности полюса x_0 имеет вид $\psi = K_{\hat{\Lambda}}(1) + O(h)$.

Список литературы

[1] *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. Москва: Наука, 1976.

[2] *Филатова Т. А., Шафаревич А. И.* Квазиклассические спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на прямой и на сфере. // Теоретическая и математическая физика, Т. 164, № 2, 2010. С. 279–298.

Один признак регулярности дифференциальных операторов

Ширяев Е. А.

Пусть L — оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = (-i)^n y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y \tag{1}$$

и n линейно независимыми нормированными краевыми условиями вида

$$U_j(y) := a_j y^{(k_j)}(0) + b_j y^{(k_j)}(1) + \sum_{s=0}^{k_j-1}\Big(a_{j,\,s}y^{(s)}(0) + b_{j,\,s}y^{(s)}(1)\Big) = 0, \tag{2}$$

где $j = 1, \dots, n$. Предполагаем, что коэффициенты $p_j(x)$, $j = 1, \dots, n$ — суммируемые комплексные функции на отрезке $[0,1]$; $n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$, $k_j > k_{j+2}$. Считаем, что L действует в пространстве $L_2(0,\,1)$ и определен равенством $L(y) = l(y)$ на области

$$D(L) = \{y \mid y^{(s)} \in AC[0,\,1],\ s = 0, 1, \dots, n-1,\\ l(y) \in L_2, \quad U_j(y) = 0,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Определение регулярности дифференциального оператора дано Дж. Биркгофом. Его можно найти в известной монографии М. А. Наймарка.

Известно, что резольвента L есть интегральный оператор

$$(L-\rho^n)^{-1}f(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\rho)f(\xi)\,d\xi,$$

где $G(x,\xi,\rho)$ — ядро Грина. Если оператор порожден регулярными краевыми условиями, то для его ядра Грина есть оценка вида $|G(x,\xi,\rho)| \leqslant M|\rho|^{-n+1}$. Сформулируем результат, содержащий обратное утверждение.

Теорема 1. *Пусть L — дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением* (1) *и краевыми условиями вида* (2). *Пусть при $n = 2m$ найдется луч $\gamma = \{\rho \mid \arg\rho = \varphi \in (0, \pi/n)\}$, на котором (при достаточно больших $|\rho| > c_0$) выполнена асимптотическая оценка*

$$|G(x,\xi,\rho)| \leqslant M|\rho|^{-n+1} \tag{3}$$

где $M = M(\varepsilon, c_0)$ — некоторая постоянная. Тогда оператор L регулярен.

При нечетном $n = 2m-1$ утверждение формулируется следующим образом: если найдутся два луча $\gamma_1 = \{\rho \mid \arg\rho = \varphi_1 \in (0, \pi/n)\}$ и $\gamma_2 = \{\rho \mid \arg\rho = \varphi_2 \in (\pi/n, 2\pi/n)\}$, на которых выполнена асимптотическая оценка (3)*, то L регулярен.*

Работа выполнена под руководством профессора А. А. Шкаликова при поддержке РФФИ, грант № 10-01-00423.

Список литературы

[1] М. А. Наймарк. *Линейные дифференцальные операторы.* М.: Наука, 1969.

Ограниченность дробного B-интеграла Лиувилля

Шишкина Э. Л. (Воронежский государственный университет, Россия)

В работе **[1]** были введены различные формы представления дробных степеней дифференциального оператора Бесселя.

Рассмотрим дробные B-интегралы Лиувилля (отрицательные степени оператора Бесселя нецелого порядка), введенные Ляховым Л. Н. и Саниной Е. Л., следующего вида

$$B^{-\alpha/2}f(x) = (I^\alpha_\gamma f)(x) = C(\alpha,\gamma)\int\limits_0^{+\infty} f(y)T^y_x x^{\alpha-1-\gamma}y^\gamma\,dy, \quad 0<\alpha<2, \quad \gamma>0, \tag{1}$$

где $C(\alpha,\gamma)$ — нормирующая постоянная. В формуле (1) B — оператор Бесселя:

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}, \tag{2}$$

а T^y_x — оператор обобщенного сдвига (см. **[2]**):

$$T^y_x f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi})\sin^{\gamma-1}\varphi\,d\varphi. \tag{3}$$

Пусть $1 \leq p < \infty$. Пространство $L^\gamma_p = L^\gamma_p(0,+\infty)$ состоит функций f, таких что

$$||f||_{L^\gamma_p} = \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p x^\gamma\,dx\right)^{1/p} < \infty. \tag{4}$$

Следуя [**3**], была получена теорема

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \geq 0$, $f \in L_p^\gamma$, *где* $p > 1 + \gamma$ *и*

$$0 < \alpha < \frac{1}{p}, \qquad q = \frac{p(1+\gamma)}{1+\gamma-\alpha p}, \tag{5}$$

тогда $I_\gamma^\alpha f \in L_q^\gamma$, *и*

$$\|I_\gamma^\alpha f\|_{L_q^\gamma} \leq K\|f\|_{L_p^\gamma}, \tag{6}$$

где $K = K(p,\gamma,\alpha)$ *— некоторая константа.*

Список литературы

[1] Lyakhov L. N., Sanina E. L. Schlömilch polynomials: Riesz's interpolation formula for B-derivatives and Bernstein's inequality for Weyl–Marchaud fractional B-derivatives. Doklady Mathematics, 2007, Vol. 76, № 3, pp. 916–920.

[2] Левитан Б. М., Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье, Успехи матем наук, т. VI, № 2 (42), 1951, С. 102–143.

[3] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. Ленинград, 4-я типография им. Евг. Соколовой треста ≪Полиграфкнига≫ ОГИЗа, 1947.

О методе возмущенного характеристического уравнения в теории асимптотического интегрирования систем дифференциальных уравнений

Шкиль Н. И. (Национальный педагогический университет, Украина)

Самусенко П. Ф. (Национальный педагогический университет, Украина)

Асимптотические решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad t \in [0;T], \tag{1}$$

где $x = x(t,\varepsilon)$ — искомый n-мерный вектор, $A(t,\varepsilon)$ — квадратная матрица n-го порядка, причем $A(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s\geq 0} \varepsilon^s A_s(t)$, ε — малый параметр, в случае простых корней характеристического уравнения

$$det(A_0(t) - \lambda E) = 0 \tag{2}$$

можно искать в виде формальных рядов по степеням параметра ε.

В работах М. Хукухары, Й. Сибуйи, М. Ивано, С. Ф. Фещенко доказаны теоремы о асимптотическом расщеплении системы (1), с помощью которых можно понизить ее порядок. Таким образом, случай, когда характеристическое уравнение системы имеет несколько корней был сведен к более простому случаю, когда это уравнение имеет только один корень.

Сама же проблема кратного корня была решена в работах Н. И. Шкиля, где доказано, что в этом случае решения системы (1) можно представить в виде асимптотических рядов по дробным степеням параметра ε, показатели которых зависят как от кратности корней уравнения (2) и соотвестующих им элементарных делителей, так и от поведения возмущающих коэффициентов системы.

В данной работе асимптотические решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений (1) построены с помощью метода возмущенного характеристического уравнения, позволяющего случай кратного корня свести к случаю простых корней соответствующего характеристического уравнения.

Согласно методу возмущенного характеристического уравнения считаем, что матрица

$$B_0(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t)$$

имеет простые собственные значения $w_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, для всех $t \in [0;T]$.

Положим $B(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s\ge 0} \varepsilon^s B_s(t,\varepsilon)$, где $B_1(t,\varepsilon) \equiv 0$, $B_s(t,\varepsilon) = A_s(t)$, $s \ge 2$. Тогда все корни соответствующего характеристического уравнения (возмущенное характеристическое уравнение) будут простыми и потому для нахождения асимптотических решений преобразованной системы можно воспользоваться классическими результатами, изложенными, например, в **[1]**.

Список литературы

[1] *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К.: Наук. думка, 1966.

Асимптотические представления решений существенно нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями

Шлепаков О. Р. (Одесский национальный университет, Украина)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i = \overline{1,n-1}), \\ y_n' = \alpha_n p_n(t)\varphi_1(y_1), \end{cases} \tag{1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i = \overline{1,n})$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[\quad (i=\overline{1,n})$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0;+\infty[$ $(i=\overline{1,n})$ ($\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$) — дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i'(z) \ne 0 \text{ при } z \in \Delta(Y_i^0), \qquad \lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta(Y_i^0)}} \varphi_i(z) = \Phi_i^0 \in \{0,+\infty\},$$

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta(Y_i^0)}} \frac{\varphi_i''(z)\varphi_i(z)}{[\varphi_i'(z)]^2} = \gamma_i,$$

где $\prod_{i=1}^n (1-\gamma_i) \ne 1$.

При $\gamma_i = 1$ функция $\varphi_i(z)$ является быстро меняющейся, при $\gamma_i \ne 1$ функция $\varphi_i(z)$ является правильно меняющейся порядка $\frac{1}{1-\gamma_i}$ (См. **[1]**, **[2]**).

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1), заданное на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решением, если функции $u_i(t) = \varphi_i(y_i(t))$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} u_i(t) = \Phi_i^0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)u_{i+1}'(t)}{u_i'(t)u_{i+1}(t)} = \Lambda_i \quad (i = \overline{1,n-1}).$$

Для системы (1) в случае, когда $\Lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$, получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений. Также, при $t \uparrow \omega$, получены асимптотические представления вида:

$$\frac{\varphi_i(y_i(t))}{\varphi_i'(y_i(t))\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i\beta_i \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau [1 + o(1)], \qquad \text{если } i \in \mathfrak{I},$$

$$\frac{\varphi_i(y_i(t))}{\varphi_i'(y_i(t))\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i\beta_i \frac{\int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau) \int\limits_{A_l}^{\tau} p_l(s)\, ds\, d\tau}{\int\limits_{A_l}^{t} p_l(\tau)\, d\tau} [1 + o(1)], \quad \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}},$$

где $\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \dots, n\} \,:\, 1 - \Lambda_i - \gamma_i \neq 0\}$, $\bar{\mathfrak{I}} = \{1, ..., n\} \backslash \mathfrak{I}$, $l = \min \mathfrak{I}$, а β_i — некоторые точно определяемые отличные от нуля постоянные.

При некоторых дополнительных ограничениях на функции $\varphi_i(z)$ асимптотические представления для решений системы (1) могут быть значительно упрощены.

Список литературы

[1] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука., 1985.
[2] *Maric V.* Regular variation and differential equations. Springer, 2000.

О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях

Шнурников И. Н.

Пусть замкнутое связное двумерное риманово многообразие M^2 имеет постоянную гауссову кривизну, и набор Γ состоит из n различных замкнутых геодезических на M^2. Пусть $f(\Gamma)$ обозначает число компонент связности дополнения в многообразии M^2 к объединению геодезических из набора Γ. Как устроено множество $F(M^2, n)$ всех возможных чисел $f(\Gamma)$ для фиксированных многообразия M^2 и числа геодезических n? Впервые этот вопрос рассмотрел Б. Грюнбаум [**1**] для прямых на вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Н. Мартинов [**2**] полностью нашел множество $F(\mathbb{RP}^2, n)$, которое содержит почти все целые числа отрезка $\left(n; 1 + \frac{n(n-1)}{2}\right)$ при $n \to \infty$. При $n \geqslant 3$ оставшиеся числа представляют собой объединение $\left[\sqrt{2n - 5\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right]$ лакун, причем лакуна номер i состоит из $n - \frac{i^2+i}{2} - 2$ целых чисел.

В отличие от проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, для тора T^2 и бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками множества $F(T^2, n)$ и $F(KL^2, n)$ являются бесконечными множествами, содержащими одну лакуну при $n \geqslant 6$ и $n \geqslant 7$ соответствнно.

Теорема 1. *Для тора T^2 и бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками верно $F(T^2, 1) = \{1\}$ и $F(KL^2, 1) = \mathbb{N}$. Множества $F(T^2, n)$ и $F(KL^2, n)$ при $n \geqslant 2$ имеют следующий вид:*

$$F(T^2, n) = \{n{-}1, n\} \bigcup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geqslant 2n{-}4\}, \qquad F(KL^2, n) = F(T^2, n) \bigcup \{n{+}1\}.$$

Пусть $p_1 : \mathbb{R}^2 \to T^2$ — универсальное локально изометричное накрытие. Пусть вектора u и v образуют базис в решетке прообраза p_1^{-1} произвольной точки тора.

Определение 1. Для взаимно простых целых чисел k, l *геодезической типа* (k, l) на торе T^2 (с базисом $p_1(u), p_1(v)$) назовем замкнутую геодезическую, для которой любая ее накрывающая прямая параллельна вектору $ku + lv$.

Лемма 1. *Две замкнутые геодезические на торе с евклидовой метрикой типов* (a, b) *и* (c, d) *пересекаются в* $|ad - bc|$ *точках.*

Пусть KL^2 изометрична параллелограмму с отождествленными противоположными сторонами, которые параллельны некоторым векторам u и v, причем стороны, параллельные v, отождествляются неориентированно. Пусть w — ортогональная к v составляющая u. Пусть $p_2 : \mathbb{R}^2 \to KL^2$ — локально изометричное накрытие.

Определение 2. *Геодезической типа* (k, l) на KL^2 назовем замкнутую геодезическую, для которой найдется накрывающая ее прямая, параллельная вектору $2kw + lv$.

Лемма 2. *Замкнутая геодезическая типа* (k, l) *на плоской бутылке Клейна* KL^2 *имеет* $|kl|$ *точек самопересечения, кратности два каждая.*

Данная работа была проделана при поддержке РФФИ (грант 10-01-00748) и программы «Ведущие научные школы РФ» (грант НШ-3224.2010.1).

Список литературы

[1] *Grünbaum B.* Arrangements and Spreads. AMS, Providence, Rhode Island, 1972.
[2] *Martinov N.* Classification of arrangements by the number of their cells // Discrete and Comput. Geometry 1993. V. 9. № 1. P. 39–46.

Об усреднении уравнений акустики для пористых вязкоупругих материалов, заполненных вязкой жидкостью

Шумилова В. В. (Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Россия)

Рассматривается математическая модель малых колебаний в пространстве $\mathbb{R}^3$ для ε-периодической комбинированной среды, состоящей из пористого вязкоупругого материала с мгновенной памятью и вязкой жидкости, заполняющей поры [**1**], [**2**]. С помощью метода двухмасштабной сходимости [**3**] строится усредненная модель, включающая в себя систему интегро-дифференциальных уравнений линейной вязкоупругости. Полученная усредненная модель есть модель малых колебаний для сплошного вязкоупругого материала с долговременной памятью, а усредненное уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}) + \beta_{ijkh} e_{kh}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) + g_{ijkh}(t) * e_{kh}(\mathbf{u}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}(x,t)$ — вектор смещений. Коэффициенты α_{ijkh}, β_{ijkh} и $g_{ijkh}(t)$ $(1 \le i,j,k,h \le 3)$ определяются через решения трех вспомогательных периодических задач, заданных с помощью системы дифференциальных уравнений.

Усредненная модель также строится для ε-периодической комбинированной среды, в которой, в отличие от рассмотренного ранее случая, вместо вязкоупругого материала с мгновенной памятью взят вязкоупругий материал с долговременной памятью. В этом случае усредненное уравнение состояния также имеет вид (1), причем две из трех вспомогательных периодических задач для нахождения коэффициентов α_{ijkh}, β_{ijkh} и $g_{ijkh}(t)$ $(1 \le i,j,k,h \le 3)$ задаются системами дифференциальных уравнений, а третья — системой интегро-дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью // ДАН. 2011. Т. 436. № 2. С. 199–202.

[2] *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 92–103.

[3] *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. № 3. P. 608–623.

О стабилизационных индексах

Шутова А. И. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия)

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространство S_n линейных систем с непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

наделенное топологией равномерной на $\mathbb{R}^+$ сходимости коэффициентов.

Определение 1. Индексом условной (соответственно, условной экспоненциальной) устойчивости $\mathrm{ind}_s(A)$ $(\mathrm{ind}_{es}(A))$ системы (1) назовем максимальное число k, для которого система (1) условно устойчива (соответственно, условно экспоненциально устойчива) с индексом k.

Определение 2. Стабилизационным индексом $s(A)$ (соответственно, $es(A)$) системы (1) назовем минимальную полунепрерывную сверху мажоранту индекса условной (соответственно, условной экспоненциальной) устойчивости, рассматриваемого как функция на пространстве S_n.

Пусть M — некоторое топологическое пространство, а $A(\cdot,\cdot)\colon M \times \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$ — произвольное непрерывное отображение. Рассмотрим функции из M в $\{0,1,\ldots,n\}$, определяемые следующими формулами:

1°. $\mu \mapsto es(A(\mu,\cdot))$;

2°. $\mu \mapsto s(A(\mu,\cdot))$.

Теорема 1. *Множество точек полунепрерывности сверху (снизу) каждой из функций 1° и 2° плотно в M.*

Определение 3. Свойство точки топологического пространства называется типичным по Бэру, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ (под которым понимается пересечение счетной последовательности открытых множеств). Точки, обладающие типичным свойством, будем также называть типичными.

Теорема 2. *Существуют такие полное метрическое пространство M и непрерывное отображение $A(\cdot,\cdot)\colon M\times\mathbb{R}^+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, что в типичной точке множества M отсутствует полунепрерывность снизу каждой из функций 1° и 2°, а множество точек непрерывности каждой из этих функций пусто.*

Теорема 3. *Существуют такие полное метрическое пространство M и непрерывное отображение $A(\cdot,\cdot)\colon M\times\mathbb{R}^+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, что в типичной точке множества M отсутствует полунепрерывность сверху каждой из функций 1° и 2°, а множество точек непрерывности каждой из этих функций пусто.*

Теоремы 1–3 решают задачу [**1**].

Список литературы

[1] *Миллионщиков В. М.* Задачи о стабилизационных индексах // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2017.

О продолжимости решений нелинейных алгебро–дифференциальных систем

Щеглова А. А. (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия)

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений
$$F(t,x(t),x'(t))=0,\quad t\in\mathrm{R}=(-\infty,+\infty),\tag{1}$$
где $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция; n-мерная вектор-функция $F(t,x,y)$ определена на прямом произведении $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n$; $\det\frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y}\equiv 0$. Системы такого рода называются алгебро–дифференциальными (АДС). Мерой неразрешенности АДС относительно производной служит целочисленная величина $r:\ 0\le r\le n$, называемая индексом.

Вопрос о неограниченной продолжимости решений нелинейных АДС вида (1) индекса неразрешенности больше единицы в настоящее время остается открытым. Это объясняется двумя основными причинами.

Известен следующий подход [**1**–**3**] к доказательству теоремы о существовании решения задачи Коши $x(t_0)=x_0$. Строится система вида
$$x'(t)=f(t,x(t)),\tag{2}$$
которая эквивалентна АДС (1) в смысле решения. Система (2) определена в некоторой окрестности начальной точки (t_0,x_0), поскольку получается как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей r-продолженной системе. Под r-продолженной системой можно понимать совокупность АДС (1) и r

ее полных производных по t, рассматриваемую в качестве системы конечных уравнений с независимыми переменными $t, x, x', x'', \ldots, x^{(r+1)}$.

Для анализа проблемы продолжимости нужно, чтобы функция $f(t,x)$ была определена всюду в $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$. Таким образом, первая из причин связана с необходимостью использования для нахождения системы (2) некоторого глобального варианта теоремы о неявной функции.

Вторая причина связана с тем, что функция $f(t,x)$ заведомо должна удовлетворять некоторой оценке, ограничивающей скорость изменения (производную) решения уравнения (2) таким образом, чтобы норма этого решения не могла сделаться бесконечно большой за конечное время.

В работе эти трудности были преодолены, и была доказана теорема о неограниченной продолжимости решений нелинейной АДС вида (1) произвольно высокого индекса неразрешенности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00132, и СО РАН, Междисциплинарный интеграционный проект 107, Интеграционный проект 85.

Список литературы

[1] *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск : Наука, 2003.

[2] *Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. D.* Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14). Philadelphia: SIAM, 1996.

[3] *Kunkel P., Mehrmann V.* Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination // Numer. Math. 1998. № 79. P. 581–600.

Приближенные формулы для эффективных модулей композитов и оценки их погрешности

Эглит М. Э. (МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия)
Якубенко Т. А. (Институт механики МГУ, Россия)

Для вычисления эффективных модулей композитов и пористых сред периодической структуры в случае, когда отношение ε масштаба неоднородности к глобальному линейному масштабу процесса мало, можно использовать метод двухмасштабных асимптотических разложений по ε. При этом для нахождения величин эффективных модулей требуется решение так называемых задач на ячейке. Для сред сложной структуры решения задач на ячейке можно получить только численно, поэтому явные формулы для эффективных модулей отсутствуют. В этой работе приводится вывод приближенных явных формул для эффективных коэффициентов теплопроводности и упругости композитов и пористых сред специальной структуры, в описании которых, кроме ε, присутствуют дополнительные малые параметры. Доказывается, что погрешность этих формул стремится к нулю при стремлении к нулю дополнительных малых параметров. Для определения и исследования величины погрешности явных формул в случае малых, но конечных значений ε и дополнительных параметров проводится вычисление эффективных модулей с помощью решения задач на ячейке и полученные величины сравниваются с рассчитанными по явным приближенным формулам.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-01-00625а, 11-01-00188а.

Список литературы

[1] *Якубенко Т. А.* Эффективные характеристики трехмерной пористой среды специальной структуры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 89–100.
[2] *Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.* Эффективные модули композитов, армированных системой пластин и стержней // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 5. С. 813–834.
[3] *Эглит М. Э., Якубенко Т. А.* Об эффективных модулях неоднородных сред, характеризующихся несколькими малыми папаметрами // Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 103–113.

Асимптотический анализ уравнения диффузии-поглощения с быстро и сильно осциллирующим коэффициентом поглощения

Эльберт А. Е. (Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия)

Рассматривается уравнение Гельмгольца с быстро осциллирующим коэффициентом поглощения и постоянным коэффициентом отражения. Оно моделирует поглощение света в средах, содержащих периодическое множество тонких сосудов крови. Предполагается, что поглощение происходит только внутри этих сосудов. Коэффициент отражения предполагается постоянным, в то время как коэффициент поглощения предполагается малым везде, кроме множества периодических тонких полос, моделирующих сосуды крови, где коэффициент поглощения равен большому параметру ω. В задаче имеются два других параметра: ε — отношение расстояния между осями сосудов к характерному макроскопическому размеру, и δ — отношение толщины тонких сосудов к периоду. Оба параметра ε и δ предполагаются малыми.

Одномерная постановка:

$$-u'' + q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u = f(x), \quad \xi = x/\varepsilon,$$

$$q(\xi) = \begin{cases} \omega, & 0 < \xi < \dfrac{\delta}{2}, \\ 0, & \dfrac{\delta}{2} < \xi < 1 - \dfrac{\delta}{2}, \\ \omega, & 1 - \dfrac{\delta}{2} < \xi < 1. \end{cases}$$

Рассматриваются три постановки задачи: на всей оси $\mathbb{R}$, с периодическими граничными условиями, и краевая задача Дирихле.

Классический метод осреднения применим только в случае $\varepsilon^2\omega\delta \to 0$, $\omega\delta \to \infty$, тогда как при $\varepsilon^2\omega\delta \to \mathrm{const}$ или $\varepsilon^2\omega\delta \to \infty$ он не работает, и построение асимптотических приближений было открытой проблемой.

Строится и обосновывается асимптотическое решение в виде

$$u = \frac{v(x)}{\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^k v.$$

Двумерная постановка:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)u=f(x_1,x_2).$$

Строится асимптотическое решение в виде

$$u=\frac{v(x_1,x_2)}{\omega}+\sum_{k,j=0}^{\infty}\varepsilon^{k+2j}N_{k,2j}(x_1/\varepsilon)D^{k,2j}v(x_1,x_2).$$

Список литературы

[1] *Mottin S., Panasenko G., Sivaji Ganesh S.* Multiscale modeling of light absorption in tissues: limitations of classical homogenization approach // PLoS ONE, to appear.

[2] *Elbert A., Panasenko G.* Asymptotic analysis of the one-dimensional diffusion-absorption equation with rapidly and strongly oscillating absorption coefficient // SIAM Journal on Mathematical Analysis (SIMA), to appear.

О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка

Юлдашев Т. К. (Сибирский государственный аэрокосмический университет, Россия)

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=f((t,x,u(t,x)) \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$\left[\begin{array}{ll} u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_1(x), & u_t(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_2(x),\\ u_{tt}(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_3(x), & u_{ttt}(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_4(x),\end{array}\right. \qquad (2)$$

$$u(t,x)\big|_{x=0}=u(t,x)\big|_{x=l}=u_{xx}(t,x)\big|_{x=0}=u_{xx}(t,x)\big|_{x=l}=0, \qquad (3)$$

где $f(t,x,u)\in C(D\times R)$, $\varphi_i(x)\in C^5(D_l)$,

$$\varphi_i(x)\big|_{x=0}=\varphi_i(x)\big|_{x=l}=\varphi_i''(x)\big|_{x=0}=\varphi_i''(x)\big|_{x=l}=0, \qquad i=\overline{1,4},$$

$D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l,]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

Рассматривается вопрос однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора в левой части уравнения. Ищем решение смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье [**1**]

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\ (t,x)\in D,$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$

Отметим, что обычная методика разделения переменных в случае уравнения (1) не применима, то есть переменные в этом уравнении не разделяются. Более того, применение ряда Фурье позволяет нам в отличие от других работ (см. напр. [**2**, **3**]) отказываться от непрерывной дифференцируемости правой нелинейной части уравнения (1). Кроме того, такой подход позволяет нам на основе принятия интегрального тождества свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой доказывается методом последовательных приближений. С помощью принятого интегрального тождества доказывается сходимость полученного ряда Фурье.

Список литературы

[1] *Юлдашев Т. К.* Уравнения в частных производных четвертого порядка. Ош: ОшГЮИ, 2010. 136 с.

[2] *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: МГУ, 1991. 112 с.

[3] *Вагабов А. И., Абдурахманов З. А.* Аналитический метод решения смешанной задачи для квазилинейной параболической системы // Изв. вузов. Математика. 2006. № 7. С. 3–12.

Обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе с двумя нелокальными граничными условиями

Юнусова Г. Р. (Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Россия)

Рассмотрим уравнение с оператором Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu = u_{xx} + (\text{sign }\ y)u_{yy} - b^2u = f(x) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geq 0$ — заданные действительные числа.

Задача 1 (Обратная задача). Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]; \tag{3}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x), \quad (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{4}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{6}$$

$$u_y(x,-\alpha) - u_y(x,\beta) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \tag{7}$$

$$u(x,-d) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\alpha < -d < 0, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $d > 0$ — заданное действительное число.

Ранее краевые задачи с условиями периодичности вдоль оси $y = 0$ изучались в работах [**1**, **2**]. В данной работе для уравнения (1) в прямоугольной области D изучена обратная задача (2)–(8) с двумя нелокальными условиями (6) и (7), которые связывают значения искомого решения и ее производной, принадлежащих разным типам рассматриваемого уравнения. Здесь на основании работы [**3**] установлен критерий единственности и методом спектральных разложений решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказана устойчивость решения по граничным условиям (6)–(8).

Список литературы

[1] *Лернер М. Е., Репин О. А.* Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 6. С. 1260–1275.

[2] *Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г.* Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 105–113.

[3] *Юнусова Г. Р.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе // Всерос. науч. семинар ≪Неклассические уравнения математической физики≫, посвящ. 65-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова. Часть II: Тез. докл. / Якутск: Филиал изд-ва СВФУ: ИМИ, 2010. С. 70–75.

О восстановлении дифференциальных полиномиальных пучков

Юрко В. А. (Саратовский государственный университет, Россия)

Рассмотрим краевую задачу L вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \quad q(x) \in L_2(0,\pi), \tag{1}$$

$$U_\xi(y) := R_{\xi 1}(\lambda)y'(\pi\xi) + R_{\xi 0}(\lambda)y(\pi\xi) = 0, \quad \xi = 0,1, \tag{2}$$

$$R_{\xi k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{r_{\xi k}} R_{\xi k j}\lambda^{r_{\xi k}-j}, \quad \xi, k = 0,1, \quad r_{\xi k} \ge 0. \tag{3}$$

Пусть для определенности $r_{\xi 1} = r_{\xi 0} \ge 0$, $\xi = 0,1$, $R_{\xi 10} = 1$. Через $Z_k = \{z_{ks}\}_{s=\overline{1,r_{0s}}}$ обозначим нули $R_{0k}(\lambda)$, $k = 0,1$. Пусть $\Phi(x,\lambda)$ — решение уравнения при условиях $U_0(\Phi) = 1$, $U_1(\Phi) = 0$. Положим $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. Функция $M(\lambda)$ называется *функцией Вейля* для L. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ — собственные значения L кратностей m_n ($\lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m_n-1}$). Положим $S := \{n : \lambda_{n-1} \ne \lambda_n\}$.

Теорема 1. *Справедливо представление*

$$M(\lambda) = \sum_{n\in S} \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\lambda-\lambda_n)^{\nu+1}}, \tag{4}$$

где $M_{n+\nu}$ — коэффициенты главной части ряда Лорана для $M(\lambda)$ в окрестности полюса λ_n.

Множество $\Omega := \{\lambda_n, M_n\}_{n\ge 0}$ назовем спектральными данными для L. Исследуется обратная задача восстановления потенциала $q(x)$ по спектральным данным при условии, что $Z_k = \{z_{ks}\}_{s=\overline{1,r_{0s}}}$, $k = 0,1$, известны.

Теорема 2. *Задание спектральных данных $\Omega = \{\lambda_n, M_n\}_{n\ge 0}$ однозначно определяет потенциал q и коэффициенты краевых условий.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [**1**] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Список литературы

[1] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Наука, 2007.

Эффекты фильтрационного течения в пористых средах

Яковлев А. А. (Уфимский государственный авиационный технический университет, РН-УфаНИПИнефть, Россия)

При изучении вытеснения флюидов в пористой среде существенны вопросы сложности проводимых построений, вычислений и устойчивости полученных решений. Часто на практике данные вопросы ассоциируются с простыми, "быстрыми" двумерными (2D) и сложными, "медленными" трехмерными (3D) моделями. Однако, ввиду отсутствия аналитического решения задачи фильтрации в 2D и в 3D, возникает необходимость численного моделирования, и как следствие, вопрос определения параметров сетки, ее размеров, типа, и задания в ней фильтрационно-емкостных свойств (ФЕС). В случае если линейные размеры неоднородности пласта много меньше характерных размеров исследуемого объекта (например, расчетной ячейки сетки, элемента разработки), возможно осреднение свойств пористой среды, определение ее эффективных характеристик на рассматриваемом объекте. При геолого-гидродинамическом моделировании разработки месторождений данный вопрос является важным, поскольку ФЕС пласта заданы непрерывным случайным образом (посредством геостохастического моделирования). Более того, задача осложняется недостаточно развитым математическим аппаратом осреднения процессов в случайных средах. Например, при оценке эффективной проницаемости случайных сред даже вопрос положительности тензора проницаемости может вызывать большие затруднения. В частности, для этого необходимо предопределение факта связности случайной структуры, которое в свою очередь является нерешенной ключевой задачей теории перколяции. Физически при заводнении пласта возможно возникновение неустойчивости фронта вытеснения с образованием „прорывов“ вытесняющего агента от нагнетательных скважин к добывающим. Данный факт связан с проникновением (за счет случайных возмущений) частиц более подвижного флюида в область, занятую менее подвижным флюидом, при этом движение частиц ускоряется. Если более подвижный флюид является вытесняющим, это может привести к разрастанию возмущений (возникновение вязких пальцев). Разница в подвижностях, различное начальное насыщение и сама случайная среда пласта усложняют процесс фильтрации и могут влиять на коэффициент извлечения нефти (КИН). Таким образом, при определении эффективных (осредненных) характеристик пласта (в том числе, при переходе из 3D в 2D или укрупнении сетки) необходимо заботиться о сохранении рода фильтрационного течения. В работе рассмотрены вопросы описания случайной среды с точки зрения вытеснения (посредством линий тока) и геометрии (через топологические, геометрические и перколяционные характеристики). Рассмотрены некоторые ключевые задачи осреднения случайных и периодических сред. Получены новые эффекты фильтрационного течения в случайных и однородных средах. Показано возможное увеличение коэффициента извлечения нефти в неоднородных средах посредством создания точечных возмущений фронта вытеснения на нагнетательных скважинах.

Проблема П. Л. Чебышева об интегральных неравенствах (с постоянными пределами интегрирования)

Якубов А. Я. (Чеченский государственный университет, Россия)
Якубов Я. А. (Дагестанский филиал ОАО РусГидро, Россия)

В 1882 г. П. Л. Чебышев [**1**] для интегральных средних значений функций f, g и $f \cdot g$ получал интегральное неравенство

$$\left(\int_a^b fgdt\right) / \int_a^b dt > \left(\int_a^b fdt \cdot \int_a^b pgdt\right) / \left(\int_a^b pdt\right)^2, \qquad (1)$$

если обе функции f и g возрастают или обе убывают на $[a,b]$, и обратное неравенство, если одна функция возрастает, другая убывает на $[a,b]$. Неравенства (1) вызвали особый интерес многих математиков всего мира (Ш. Пикар, Ш. Эрмит и т. д.) в связи с широкими возможностями их приложения, и решались вопросы распространения их на более широкие классы функций, чем класс монотонных функций.

В работе дается описание всех измеримых функций, для которых имеют место неравенства Чебышева.

Пусть Ω_a^b — n-мерный брус в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Будем говорить, что измеримые на брусе $\Omega_{a,b}$ функции f и g интегрально синхронны на $\Omega_{a,b}$, если квадратичная форма

$$\psi(u,v) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[f(t)u - f(y)v][g(t)u - g(y)v]\,dtdy$$

является положительно определенной на $\Omega_{a,b}$, и интегрально антисинхронны на $\Omega_{a,b}$, если квадратичная форма

$$\overline{\psi}(u,v) = \int_a^b \int_a^b p(t)p(y)[f(t)u - f(y)v][g(t)u - g(y)v]\,dtdy$$

является положительно определенной на $\Omega_{a,b}$ для всех нетривиальных $h = h(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 1. *Для того, чтобы измеримые на $\Omega_{a,b}$ функции f и g удовлетворяли прямым (обратным) неравенствам Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы функции f и g были интегрально синхронны (соответственно, антисинхронны) на $\Omega_{a,b}$* [**2**].

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00441.

Список литературы

[1] *Чебышев П. Л.* О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах // Сообщ. и проток. зас. Мат. общ. при Харьковском Имп. Унив., II, 1882, 93–98.
[2] *Yakubov Ya. A* Convolutions of weakly sinchronous functions // Integral Transforms and Special Functions, 8(3-4): 287–298, 1999.

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с неклассическим поведением решений

Якубов В. Я. (Московский государственный институт электроники и математики, Россия)

Известно, что линейные уравнения второго порядка различными способами (см., например, [**3**]) можно привести к так называемому стандартному виду $y'' + a(x)y = 0$, который, в свою очередь, при $a(x) > 0$ приводится к виду

$$y'' + (1 + \varphi(x))y = 0. \tag{1}$$

До тридцатых годов двадцатого века считалось, что если выполнено условие

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0, \tag{2}$$

то все решения уравнения (1) ограничены и, следовательно, уравнение (1) устойчиво. В 1929 году П. Фату [**1**] даже опубликовал доказательство этого факта, однако оно оказалось ошибочным, ибо в 1930 году О. Перрон [**2**] постороил уравнение вида (1) с условием (2), решение которого вело себя при $x \to \infty$ как $\sqrt{x}$ и, таким образом, не являлось ограниченным.

Нам удалось построить уравнения вида (1), коэффициенты φ которых удовлетворяют условию (2), и эти уравнения имеют решения, выраженные в элементарных функциях, и максимумы модулей которых при $x \to \infty$ растут как логарифмическая, степенная и даже как экспоненциальная функции.

Основные результаты.

1°. Уравнение

$$y'' + \left(1 + \frac{8\alpha}{t \ln t}\left(\sin 2x - \frac{2}{t}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{\ln t}\right)\cos^4 x\right)\right)y = 0,$$

где $t = 2x + \sin 2x$, имеет решение $y = |\ln t|^{\alpha - 1} \ln t \cos x$, $t > 0$, $t \neq 1$, $\alpha > 0$.

2°. Уравнение

$$y'' + \left(1 + \frac{8\alpha}{t}\left(\sin 2x - \frac{2(\alpha - 1)}{t}\cos^4 x\right)\right)y = 0,$$

где $t = 2x + \sin 2x$, имеет решение $y = t^\alpha \cos x$, $t > 0$, $\alpha > 0$.

3°. Уравнение

$$y'' + \left(1 + \frac{8\alpha}{t^{1-\alpha}}\left(\sin 2x - \frac{2}{t^{1-\alpha}}\left(\alpha + \frac{\alpha - 1}{t^\alpha}\right)\cos^4 x\right)\right)y = 0,$$

где $t = 2x + \sin 2x$, имеет решение $y = \exp t^\alpha \cos x$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Заменяя в предыдущих уравнениях $\cos^4 x$ на $\sin^4 x$ и полагая $t = 2x - \sin 2x$, получим семейства уравнений, решения которых получаются из соответсвующих решений уравнений, приведенных выше, заменой $\cos x$ на $\sin x$.

Список литературы

[1] *Fatou P.* // C.R. Acad. Sci. Paris 1929. V. 189.
[2] *Perron O.* // Nachr. Math. Ges. Gottengen 1930. P. 28–29.
[3] *Якубов В.Я.* // Дифф. ур-я 2008. Т. 44. № 1 С. 69–74.

Система уравнений движения воздуха с фазовым переходом воды

Яшима-Фужита Х. (Государственный университет Гэльма, Алжир; Государственный университет Турин, Италия)

Мы рассматриваем систему уравнений, которая моделирует движение воздуха с фазовым переходом воды в атмосфере (ддя описания физических процессов, см. **[1]**) Искомыми функциями системы являются скорость воздуха $v(x,t)$, температура $T(x,t)$, плотности сухого воздуха $\varrho(x,t)$, водяного пара $\pi(x,t)$, жидкой воды $\sigma(m,x,t)$ и водяного кристалла $\nu(m,x,t)$ (m — масса капли или ледяного куска), а давление $p(x,t)$ и скорости капель $u(x,t)$ и ледяных кусков $w(x,t)$ определяются функциями

$$p = p(\varrho,\pi,T), \qquad u = u(m,v), \qquad w = w(m,v).$$

Наша система состоит из следующих уравнений:

$$(\varrho+\pi)\big(\partial_t v + (v\cdot\nabla)v\big) = \eta\Delta v + (\zeta+\eta/3)\nabla(\nabla\cdot v) + \\ -\nabla p - \Big[\int_0^\infty (\sigma(m)+\nu(m))dm + \varrho + \pi\Big]\nabla\Phi, \quad (1)$$

$$(\varrho+\pi)c_v(\partial_t T + v\cdot\nabla T) = \kappa\Delta T - p\nabla\cdot\vec{v} + \\ +\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\zeta(\nabla\cdot v)^2 + \\ + L_{gl}H_{gl} + L_{ls}H_{ls} + L_{gs}H_{gs} + E, \quad (2)$$

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t\pi + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma(\cdot)) - H_{gs}(T,\pi,\nu(\cdot)), \quad (4)$$

$$\partial_t\sigma + \nabla\cdot(\sigma u) + \frac{\partial(mh_{gl}\sigma)}{\partial m} = h_{gl}\sigma + F(m,T,\pi,\sigma,\nu), \quad (5)$$

$$\partial_t\nu + \nabla\cdot(\nu w) + \frac{\partial(mh_{gs}\nu)}{\partial m} = h_{gs}\nu + G((m,T,\pi,\sigma,\nu), \quad (6)$$

где H_{gl}, H_{ls}, H_{gs} — количества конденсации, отвердения и сублимации, L_{gl}, L_{ls}, L_{gs} — скрытое тепло, E — источник тепла, $h_{gl} = h_{gl}(m)$, $h_{gs} = h_{gs}(m)$ — количества конденсации и сублимации на капле и кристалле массы m. Фазовый переход воды определяется разностью $\pi - \pi_{vs}(T)$, где $\bar{\pi}_{vs}(T)$ — плотности насыщенного пара.

Мы доказываем существование и единственность локального решения легко модифицированной системы уравнений (1)–(6) (см. **[2]**; см. также **[3]**, **[4]**).

Список литературы

[1] *Матвеев Л. Т.* Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1965.

[2] *Selvaduray S., Fujita Yashima H.* Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido // Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino, № 16 (2010).

[3] *Fujita Yashima H., Campana V., Aissaoui M. Z.* Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère // à paraître sur Ann. Math. Africaines.

[4] *Belhireche H., Aissaoui Z. M., Fujita Yashima H.* Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau // à paraître sur Sciences Techn. Univ. Constantine.

Author Index

Научное издание

**Международная конференция,
посвященная 110-ой годовщине
И. Г. Петровского**

**XXIII совместное заседание
Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского**

Москва, 30 мая – 4 июня 2011 г.

Тезисы докладов

Компьютерная верстка и подготовка оригинал–макета: Владимиров А. А.,
Коньков А. А.

Типография ЗАО «Новые печатные технологии»