

Санкт-Петербургский государственный университет

Saint-Petersburg State University

# IX Поляховские чтения

Материалы

международной научной конференции по механике,  
9-12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия

## The Ninth Polyakhov's Reading

Proceedings

of the International Scientific Conference on Mechanics,  
March 9-12, 2021, Saint-Petersburg, Russia



Санкт-Петербург  
2021

Санкт–Петербургский государственный университет

Saint–Petersburg State University

# IX Поляховские чтения

Материалы

международной научной конференции по механике,  
9–12 марта 2021 г., Санкт–Петербург, Россия

# The Ninth Polyakhov's Reading

Proceedings

of the International Scientific Conference on Mechanics,  
March 9–12, 2021, Saint–Petersburg, Russia

Санкт–Петербург

2021

УДК 531/534+537+539+51-7+52  
ББК 22.00  
В 00

В 00 IX Поляховские чтения : Материалы международной научной конференции по механике, 9–12 марта 2021 г., Санкт–Петербург, Россия. — СПб.: Издательство ВВМ, 2021. 000 с.

ISBN 978-5-0000-0000-0

В сборник включены расширенные тезисы докладов, представленные на международную научную конференцию по механике IX Поляховские чтения, которая посвящена 200-летию выдающегося русского математика и механика, академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 100-летию академика Дмитрия Евгеньевича Охоцимского — основателя научной школы в области динамики космического полёта. Обсуждаются современные проблемы теоретической и прикладной механики, динамики естественных и искусственных небесных тел, гидрогазодинамики, физико-химической аэромеханики, механики деформируемого твёрдого тела, устойчивости и стабилизации механических и электромеханических систем, биомеханики, физической механики и истории механики.

Под редакцией:

А.А. Тихонова, Е.В. Кустовой, М.П. Юшкова, А.В. Орехова, Г.В. Павилайнен

ISBN 978-5-0000-0000-0

© Авторы, 2021

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Поляховские чтения были впервые проведены в 1997 году в формате Всероссийской конференции в связи с 90-летием выдающегося учёного, профессора Н.Н. Поляхова (1906–1987), оставившего яркий след в истории отечественной науки. Конференция привлекла широкое внимание российских и зарубежных учёных-механиков. С 2003 года Поляховские чтения приобрели статус международной конференции и по традиции проводятся в Санкт-Петербурге один раз в три года. Тематика Поляховских чтений охватывает практически все фундаментальные направления современной механики и в последнее время имеет ярко выраженный междисциплинарный характер. Эта особенность конференции связана с многогранностью научных интересов профессора Н.Н. Поляхова.

Начиная с 2012 года Поляховские чтения посвящаются также памяти и других крупных учёных. Настоящие Поляховские чтения посвящаются 200-летию выдающегося русского математика и механика, академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 100-летию академика Дмитрия Евгеньевича Охочимского — основателя научной школы в области динамики космического полета.

### **Научные направления конференции:**

1. Теоретическая и прикладная механика
2. Динамика естественных и искусственных небесных тел
3. Газодинамика
4. Физико-химическая аэромеханика
5. Механика деформируемого твёрдого тела
6. Устойчивость и стабилизация механических и электромеханических систем
7. Биомеханика
8. Физическая механика
9. История механики

**Рабочие языки конференции — русский и английский.**

**Организатор конференции:**

Санкт-Петербургский государственный университет

**Соорганизаторы конференции:**

- Российская Академия Наук (РАН)
- Национальный Комитет по Теоретической и прикладной механике
- Институт проблем машиноведения РАН
- Санкт-Петербургский Дом учёных РАН
- ФГУП Крыловский государственный научный центр
- Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
- Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского
- Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
- Балтийский государственный технический университет «Военмех»

**Председатель конференции:**

Морозов Никита Федорович, академик РАН, СПбГУ

**Организационный комитет конференции:**

Сопредседатели:

Кустова Е.В. (СПбГУ), Разов А.И. (СПбГУ), Тихонов А.А. (СПбГУ)

Ученые секретари:

Ковачев А.С. (СПбГУ), Нестерчук Г.А. (СПбГУ), Орехов А.В. (СПбГУ)

### Члены оргкомитета:

Быков В.Г. (СПбГУ), Ворошилова Ю.Н. (СПбГУ), Даль Ю.М., Датаяшева К.К. (Дом учёных РАН), Исаев С.А. (СПбГУТА), Мехоношина М.А. (СПбГУ), Морозов В.А. (СПбГУ), Нагнибеда Е.А. (СПбГУ), Павилайнен Г.В. (СПбГУ), Павловский В.А. (СПбГМТУ), Полянский В.А. (ИПМаш РАН), Поляхова Е.Н. (СПбГУ), Реснина Н.Н. (СПбГУ), Рябинин А.Н. (СПбГУ), Смирнов А.Л. (СПбГУ), Соловьёв С.Ю. (ФГУП «КГНЦ»), † Товстик П.Е. (СПбГУ), Трифоненко Б.В. (СПбГУ), Филиппов С.Б. (СПбГУ), Циркунов Ю.М. (БГТУ Военмех), Щербаков В.И. (ВКА им. А.Ф. Можайского), Юшков М.П. (СПбГУ).

### Научный программный комитет конференции:

Александров А.Ю. (Россия)	Альтенбах Х. (Германия)
Бауэр С.М. (Россия)	Беляев А.К. (Россия)
† Блехман И.И. (Россия)	Влахос Д. (Греция)
Гайфуллин А.М. (Россия)	Голубев Ю.Ф. (Россия)
Горячева И.Г. (Россия)	Доличанин Ч. (Сербия)
Егоров И.В. (Россия)	Индейцев Д.А. (Россия)
Карапетян А.В. (Россия)	Каспер Р. (Германия)
Качанов М.Л. (США)	Козлов В.В. (Россия)
Красильников П.С. (Россия)	Кривцов А.М. (Россия)
Левин В.А. (Россия)	Лещенко Д.Д. (Украина)
Маркеев А.П. (Россия)	† Матвеев С.К. (Россия)
Михайлов Г.К. (Россия)	Михасев Г.И. (Беларусь)
Мэй Фунсян (Китай)	Овчинников М.Ю. (Россия)
Папаставридис Дж. Г. (США)	Паскаль М. (Франция)
Петров Ю.В. (Россия)	Петухов В.Г. (Россия)
Радев С. (Болгария)	Ребров А.К. (Россия)
Смирнов Е.М. (Россия)	Спасич Д. (Сербия)
Старинова О.Л. (Россия)	Степанов С.Я. (Россия)
Тихонов А.А. (Россия)	† Товстик П.Е. (Россия)
Тхай В.Н. (Россия)	Утешев А.Ю. (Россия)
Филиппов С.Б. (Россия)	Фомин В.М. (Россия)
Черноузько Ф.Л. (Россия)	Чернышев С.Л. (Россия)
Чиненова В.Н. (Россия)	Эрикссон А. (Швеция)
Юшков М.П. (Россия)	

## FOREWORD

The Polyakhov's reading has first been held in 1997 as an all-Russian conference dedicated to the 90th anniversary of the outstanding scientist, Professor N.N.Polyakhov (1906-1987), who left a bright trace in the history of Russian science. The conference attracted the attention of Russian and foreign scientists, involved in problems of modern mechanics. Since 2003, Polyakhov's reading has acquired the status of an international conference and is traditionally held in St. Petersburg once in three years. The conference scope covers almost all the fundamental areas of modern mechanics and lately has had a pronounced interdisciplinary nature. This feature of the conference is associated with broad scientific interests of Professor N.N. Polyakhov.

Since 2012, Polyakhov's Reading has also been dedicated to the memory of other major scientists. The Ninth Polyakhov's Reading is dedicated to the 200th anniversary of the outstanding Russian mathematician and mechanician, Acad. Pafnutii Lvovich Chebyshev (1821–1894) and the 100th anniversary of Acad. Dmitry Yevgenyevich Okhotsimsky (1921–2005) – Russian aerospace engineer, the scientist who was the pioneer of space ballistics in the USSR and the founder of a scientific school in the field of space flight dynamics.

### **Conference Topics:**

1. Theoretical and Applied Mechanics
2. Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies
3. Mechanics of Fluids and Gases
4. Physico-chemical aeromechanics
5. Mechanics of Solids
6. Stability and Stabilization of Mechanical and Electromechanical Systems
7. Biomechanics
8. Physical Mechanics
9. History of Mechanics

**Working languages of the conference are Russian and English.**

**Conference organizer:**

Saint Petersburg State University (SPbU)

**Conference co-organizers:**

- Russian Academy of Sciences (RAS)
- Russian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics
- Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS
- Saint Petersburg House of Scientists, RAS
- Krylov State Research Centre
- Saint–Petersburg State Naval Technical University
- A.F. Mozhaysky’s Military–Space Academy
- Saint Petersburg State University of Civil Aviation
- Saint Petersburg State Polytechnical University
- Baltic State Technical University “Voenmech”

**Conference Chairman:**

Nikita Morozov, Academician of the Russian Academy of Sciences, SPbU.

**Organizing Committee:**

Co-chairs:

Kustova E.V. (SPbU), Razov A.I. (SPbU), Tikhonov A.A. (SPbU)

Scientific secretaries:

Kovachev A.S. (SPbU), Nesterchuk G.A. (SPbU), Orekhov A.V. (SPbU)



### Members:

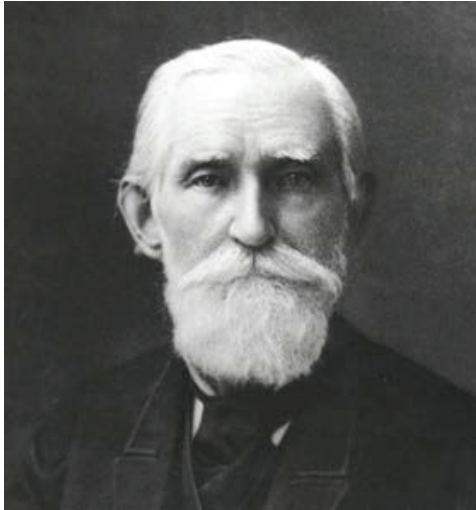
Bykov V.G. (SPbU), Voroshilova Yu.N. (SPbU), Dahl Yu.M., Datayasheva K.K. (Saint Petersburg House of Scientists, RAS), Isaev S.A. (SPbGUGA), Mekhonoshina M.A. (SPbU), V.A. Morozov (SPbU), E.A. Nagnibeda (SPbU), Pavilainen G.V. (SPbU), Pavlovsky V.A. (SPbGMTU), Polyansky V.A. (IPMash RAS), E. N. Polyakhova (SPbU), N. N. Resnina (SPbU), Ryabinin A.N. (SPbU), Smirnov A.L. (SPbU), Soloviev S.Yu. (Krylov State Research Centre), † Tovstik P.E. (SPbU), Trifonenko B.V. (SPbU), Filippov S.B. (SPbU), Tsirkunov Yu.M. (BSTU “Voenmekh”), Shcherbakov V.I. (A.F. Mozhaysky’s Military–Space Academy), Yushkov M.P. (SPbU).

### Scientific Program Committee:

Aleksandrov A.Yu. (Russia)	Altenbach H. (Germany)
Bauer S.M. (Russia)	Bel’aeV A.K. (Russia)
† Blekhan I.I. (Russia)	Chernous’ko F.L. (Russia)
Chernyshev S.L. (Russia)	Chinenova V.N. (Russia)
DolicaniC. (Serbia)	Egorov I.V. (Russia)
Eriksson A. (Sweden)	Filippov S.B. (Russia)
Fomin V.M. (Russia)	Gaifullin A.M. (Russia)
Golubev Yu.F. (Russia)	Goryacheva I.G. (Russia)
Indeitsev D.A. (Russia)	Kachanov M.L. (USA)
Karapetyan A.V. (Russia)	Kasper R. (Germany)
Kozlov V.V. (Russia)	Krasilnikov P.S. (Russia)
Krivtsov A.M. (Russia)	Leshchenko D.D. (Ukraine)
Levin V.A. (Russia)	Markeev A.P. (Russia)
† Matveev S.K. (Russia)	Mei Fengxiang (China)
Mihasev G.I. (Belarus)	Mikhailov G.K. (Russia)
Ovchinnikov M.Yu. (Russia)	Papastavridis J. G. (USA)
Pascal M. (France)	Petrov Yu.V. (Russia)
Petukhov V.G. (Russia)	Radev S. (Bulgaria)
Rebrov A.K. (Russia)	Smirnov E.M. (Russia)
Spasic D. (Serbia)	Starinova O.L. (Russia)
Stepanov S.Ya. (Russia)	Tikhonov A.A. (Russia)
Tkhai V.N. (Russia)	† Tovstik P.E. (Russia)
Uteshev A.Yu. (Russia)	Vlahos D. (Greece)
Yushkov M.P. (Russia)	



**Николай Николаевич Поляхов**  
*(1906–1987)*



**Пафнутий Львович Чебышёв** (4 [16] мая 1821 – 26 ноября [8 декабря] 1894) — выдающийся русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Императорской Санкт-Петербургской академии наук.

В 1841 году Пафнутий Львович окончил Императорский Московский университет. В 1846 году он успешно защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В 1847 году Пафнутий Львович был утверждён в звании адъюнкт-профессора Петербургского универ-

ситета. Чтобы получить право чтения лекций в университете, он защитил ещё одну диссертацию — на тему «Об интегрировании с помощью логарифмов». В 1849 году П. Л. Чебышёв защитил в Петербургском университете докторскую диссертацию «Теория сравнений», после чего в 1850 году он стал профессором Петербургского университета; данную должность он занимал до 1882 года.

Пафнутий Львович получил фундаментальные результаты в теории чисел (распределение простых чисел) и теории вероятностей (центральная предельная теорема, закон больших чисел), построил общую теорию ортогональных многочленов, теорию равномерных приближений и многие другие. Основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал ряд практически важных концепций механизмов.

В области механики П. Л. Чебышёва интересовали вопросы прикладной механики и в особенности — теории механизмов. В 1850-е годы Чебышёв заинтересовался шарнирно-рычажными механизмами, служащими для приближённого преобразования кругового движения в прямолинейное и наоборот.

В 1853 году академики П. Н. Фусс, В. Я. Струве, Б. С. Якоби, В. Я. Буняковский представили Чебышёва к избранию в адъюнкты Императорской Санкт-Петербургской академии наук, особо отметив важность его работ в области практической механики. В том же году он был избран в адъюнкты, а в 1856 году стал экстраординарным академиком. В 1858 году в связи с его работами по теории шарнирных параллелограммов и теории приближения функций академики В. Я. Буняковский, М. В. Остроградский, Э. Х. Ленц, Б. С. Якоби, А. Я. Купфер, О. В. Струве подписали представление к избранию Чебышёва ординарным академиком, что и произошло в следующем, 1859 году.

**Дмитрий Евгеньевич Охоцимский** (26 февраля 1921 – 18 декабря 2005) — выдающийся ученый, создатель научной школы в области динамики космического полёта и интеллектуальной робототехники, автор фундаментальных трудов в области прикладной небесной механики, робототехники и мехатроники, академик РАН.

С 1946 г. Дмитрий Евгеньевич работал в Математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР (МИАН) — в отделе М. В. Келдыша, который в 1953 был преобразован в Отделение прикладной математики МИАН АН СССР, а затем в 1966 в



Институт прикладной математики АН СССР. В Институте он занимал должность заведующего отделом «Механика космического полёта и управление движением». Им впервые был разработан метод вычисления полной вариации как вырожденных, так и невырожденных функционалов в задачах управления.

Дмитрий Евгеньевич Охоцимский успешно руководил выбором, расчётом и баллистико-навигационным обоснованием траекторий, по которым летали первые советские космические аппараты. В 1960 году Д. Е. Охоцимского избирают членом-корреспондентом АН СССР, в 1991 году — действительным членом РАН. В 1957 году Д. Е. Охоцимскому присуждена Ленинская премия — за вклад в обеспечение запуска Первого искусственного спутника Земли, в 1961 Дмитрий Евгеньевич становится Героем Социалистического Труда — за вклад в осуществление первого в мире полёта советского человека в космическое пространство на корабле-спутнике «Восток».

В 1959 году по инициативе Н. Г. Четаева Дмитрий Евгеньевич Охоцимский по совместительству стал профессором, а затем в 1962 году заведующим кафедрой теоретической механики механико-математического факультета МГУ. С его приходом на кафедре получило всестороннее развитие направление, связанное с механикой космического полёта.

С 1970 года под руководством Д. Е. Охоцимского в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН и на кафедре теоретической механики мехмата МГУ были начаты работы по созданию интеллектуальных робототехнических систем. Расширение тематики этих исследований привело к появлению на мехмате МГУ новой специализации «мехатроника». В 1999 году кафедра теоретической механики получила новое название: «кафедра теоретической механики и мехатроники».

СОДЕРЖАНИЕ (*CONTENTS*)Пленарные доклады  
(*Plenary reports*)

<i>Тихонов А.А.</i> Пафнутий Львович Чебышёв: человек науки на службе России . . . . .	30
<i>Юшков М.П., Солтаханов Ш.Х., Додонов В.В.</i> Обобщенная задача Чебышёва в неголономной механике и теории управления . . . . .	39
<i>Зобова А.А., Горячева И.Г., Карапетян А.В.</i> Исследование асимптотической динамики систем с трением на основе инвариантных множеств . . . . .	44
<i>Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Муратиков К.Л., Семёнов Б.Н., Вавилов Д.С.</i> О термомеханике токопроводящих материалов . . . . .	46
<i>Боровин Г.Б., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Тучин А.Г.</i> Академик Дмитрий Евгеньевич Охоцимский — выдающийся механик, основатель научной школы в области динамики космического полёта (К 100-летию со дня рождения) . . . . .	50
<i>Филиппов С.Б.</i> Памяти Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, лауреата Государственной премии Российской Федерации, профессора Петра Евгеньевича Товстика . . . . .	55
<i>Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Кулижников Д.А., Товстик П.Е., Товстик Т.М., Товстик Т.П.</i> Одномерный и многомерный маятник Капицы . . . . .	60
<i>Циркунов Ю.М., Панфилов С.В., Романюк Д.А.</i> Двухфазные течения газа с частицами в задачах аэродинамики: взгляд учёного и инженера, проблемы и результаты . . . . .	63
<i>Кузнецов Н.В.</i> Г.А. Леонов и его научная школа: от устойчивости движения к анализу скрытых колебаний . . . . .	68
<i>Гайфуллин А.М., Жвик В.В., Накрохин С.А.</i> Вихревые течения вязкого газа . . . . .	70

*Бардин Б.С.*

- О локальных координатах в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы . . . . . 71

**Секция 1. Теоретическая и прикладная механика**  
(*Theoretical and Applied Mechanics*)

*Бардин Б.С., Рачков А.А.*

- О периодических режимах движения тела с внутренней подвижной массой по шероховатой горизонтальной поверхности в случае анизотропного трения . . . . . 75

*Беличенко М.В.*

- Об устойчивости положений равновесия тела с центром масс на главной оси инерции с вибрирующим вдоль наклонной прямой подвесом . . . 77

*Буров А.А., Никонова Е.А.*

- О движении тетраэдра в центральном поле сил . . . . . 79

*Бурьян С.Н.*

- Особые точки механических систем . . . . . 81

*Влахова А.В., Новодерова А.П.*

- Моделирование начальной стадии заноса четырёхколесного аппарата при различных условиях взаимодействия колес с опорной плоскостью . . . 83

*Гарбуз М.А., Климкина Л.А.*

- Динамика стопоходящей машины Чебышёва с ветроприводом . . . . . 85

*Голуб А.П., Самсонов В.А.*

- Моделирование движения колёсной машинки по поверхности воды . . . 87

*Гусак Г.В.*

- Математическое моделирование контактного взаимодействия деформируемого колеса и дороги . . . . . 89

*Галляев А.А., Самохин А.С., Самохина М.А.*

- Поиск оптимального пути между точками на плоскости при наличии неподвижных обнаружителей и заданном ограничении на длину пути . . . 91

*Дегилевич Е.А., Смирнов А.С.*

- Оптимизация демпфирования колебаний линейного осциллятора по временному критерию . . . . . 92

*Дмитриев Н.Н.*

- Движение твёрдых тел по горизонтальной плоскости, опирающихся на канонические области контакта с учётом согласованного анизотропного трения . . . . . 94

<i>Додонов В.В., Козлова А.С.</i>	
К вопросу о движении спутника Земли после фиксирования величины его ускорения как к задаче с неголономной связью третьего порядка . . . . .	97
<i>Досаев М.З.</i>	
Скольжение инерциоида на упругих опорах. . . . .	98
<i>Елисеев С.В., Миронов А.С., Елисеев А.В.</i>	
Особенности системных представлений о динамике механических колебательных структур при несимметричных связях . . . . .	101
<i>Кальницкий В.С.</i>	
Малые колебания механической системы с вырождением высокого порядка . . . . .	103
<i>Климина Л.А.</i>	
Формирование асинхронных колебаний аэродинамического маятника в условиях дефицита управляющих воздействий . . . . .	106
<i>Косенко И.И.</i>	
Об одном способе построения компьютерной модели динамики систем твёрдых тел . . . . .	108
<i>Ковалёв М.Д.</i>	
О геометрическом определении шарнирного механизма и теореме Кемпе . . . . .	109
<i>Кулешов А.С.</i>	
Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжёлого однородного шара по поверхности вращения . . . . .	112
<i>Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А.</i>	
Возмущённые движения твёрдого тела, близкого к волчку Лагранжа, под действием нестационарных восстанавливающего и возмущающего моментов сил . . . . .	113
<i>Муравьев А.С., Смирнов А.С.</i>	
Оптимизация демпфирования колебаний маятника с упруго-подвижной точкой подвеса . . . . .	115
<i>Nedić S.</i>	
Kepler's Area-Law and Untenability of the Cyclic-Coordinate First Integral . . . . .	117
<i>Нестерова О.П., Уздин А.М., Федорова М.Ю.</i>	
Особенности применения динамических гасителей колебаний для сейсмозащиты зданий и сооружений . . . . .	119
<i>Петрова В.И.</i>	
Исследование динамики гексапода с помощью уравнений в избыточных координатах . . . . .	121

<i>Смирнов А.С., Смольников Б.А.</i> Нелинейные формы колебаний пространственного двойного маятника	123
<i>Смирнова Н.В., Черкасов О.Ю.</i> К задаче о брахистохроне с квадратичным сопротивлением и ограничениями на угол наклона траектории.	125
<i>Сухов Е.А.</i> Численно-аналитическая методика исследования бифуркации периодических движений автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы	127
<i>Тхай В.Н.</i> Равновесия и колебания в обратимой механической системе	129
<i>Холостова О.В.</i> О нелинейных колебаниях периодических по времени гамильтоновых систем при наличии двойных резонансов четвертого порядка	131
<i>Черкасов О.Ю., Макиева Э.И.</i> Задача оптимальной встречи с ограничениями на переменные состояния	133
<i>Чекина Е.А.</i> Периодические движения тела по горизонтальной шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс	134
<i>Шамолин М.В.</i> Семейства портретов маятниковых систем с диссипацией	136

## **Секция 2. Динамика естественных и искусственных небесных тел** *(Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies)*

<i>Андреев А.С., Перегудова О.А., Петровичева Ю.В.</i> Об управлении спутником в точках либрации без измерения скоростей	139
<i>Бардин Б.С., Авдюшкин А.Н.</i> Об устойчивости точки либрации $L_1$ в плоской ограниченной круговой фотогравитационной задаче трёх тел при наличии резонансов	141
<i>Бардин Б.С., Волков Е.В.</i> Анализ устойчивости и бифуркаций центральных конфигураций в ограниченной плоской круговой задаче четырёх тел	143
<i>Дериглазов А.П., Тихонов А.А.</i> О влиянии градиентности геомагнитного поля на управление электродинамической тросовой системой	145



<i>Доброславский А.В.</i>	
Эволюция орбит во внутренней круговой ограниченной задаче трёх тел со световым давлением . . . . .	147
<i>Каленова В.И., Морозов В.М., Рак М.Г.</i>	
Стабилизация стационарных движений спутника при помощи магнитных моментов. . . . .	148
<i>Косенко И.И., Сальникова Т.В., Степанов С.Я.</i>	
Об одной упрощенной модели эволюции гравитирующих масс . . . . .	150
<i>Минглибаев М.Дж., Бижанова С.Б.</i>	
Поступательно-вращательное движение осесимметричного спутника переменной массы и размера в нестационарном центральном гравитационном поле . . . . .	152
<i>Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М.</i>	
Новые нестационарные треугольные и прямолинейные решения классической круговой ограниченной задачи трёх тел . . . . .	154
<i>Патель И.К., Тихонов А.А.</i>	
Об использовании электромагнитной индукции для бесконтактного захвата объекта космического мусора . . . . .	156
<i>Поляхова Е.Н., Королев В.С., Потоцкая И.Ю., Степенко Н.А., Турешбаев А.Т.</i>	
Структурные особенности фотогравитационной небесной механики . . . . .	158
<i>Прошкин В.А., Чура А.С.</i>	
Импульсное управление опасным астероидом в области резонанса 1:1 . . . . .	160
<i>Родников А.В.</i>	
Особенности относительного движения космической тросовой системы с неидеальным солнечным парусом . . . . .	162
<i>Рожков М.А., Старинова О.Л.</i>	
Замкнутые траектории межпланетных перелётов с солнечным парусом . . . . .	164
<i>Сальникова Т.В., Самохин А.С.</i>	
Исследование возможных областей накопления космических масс в Солнечной системе . . . . .	166
<i>Сидоренко В.В.</i>	
Адиабатическое приближение Уиздома при изучении резонансов средних движений небесных тел . . . . .	167
<i>Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б.</i>	
О сближениях и соударениях астероидов с Луной и планетами . . . . .	169
<i>Степанов С.Я., Сальникова Т.В.</i>	
Анализ периодических ко-орбитальных движений в задаче трёх тел . . . . .	171

<i>Тихонов А.А., Яковлев А.Б.</i>	
Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на его прочностные характеристики . . . . .	172
<i>Титов В.Б.</i>	
Прямолинейные траектории в общей задаче трёх тел . . . . .	174
<i>Турешбаев А.Т., Тхай В.Н., Мырзаев Р.С.</i>	
Об устойчивых облачных скоплениях микрочастиц в точках либрации двойной звезды . . . . .	176
<i>Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А.</i>	
Оптимальные соединительные траектории в круговой задаче трёх тел	178
<i>Яковлев А.Б.</i>	
Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на динамику паруса при движении по цандеровской траектории .	180

### Секция 3. Гидрогазодинамика (*Mechanics of Fluids and Gases*)

<i>Аксенова О.А., Халидов И.А.</i>	
Определение параметров шероховатости по её аэродинамическим характеристикам в разреженном газе путём решения обратной задачи . .	183
<i>Алексеева М.М., Каун Ю.В., Чернышов М.В., Яценко А.А.</i>	
Влияние проницаемости поверхности на газодинамические характеристики высокоскоростного полёта . . . . .	185
<i>Амелюшкин И.А., Стасенко А.Л.</i>	
Математические модели и алгоритм расчёта льдофобных свойств покрытий при высокоскоростном взаимодействии переохлажденных капель с твёрдым телом . . . . .	186
<i>Богатко В.И., Потехина Е.А.</i>	
О математическом моделировании гиперзвукового обтекания тонкого крыла переменной формы . . . . .	188
<i>Борейшо А.С., Джгамадзе Г.Т., Моисеев А.А., Савин А.В., Смирнов П.Г., Смоленцев С.С.</i>	
Моделирование гидродинамики ванны металлического расплава в процессе селективного лазерного сплавления . . . . .	190
<i>Быков Н.Ю., Хватов А.А., Калюжная А.В., Бухановский А.В.</i>	
Метод генеративного дизайна моделей на основе нерегулярных данных в приложении к задачам теплопередачи . . . . .	192

<i>Виноградов О.Н., Корнушенко А.В., Павленко О.В., Петров А.В., Пигусов Е.А., Чинь Т.Н.</i>	
Влияние диаметра воздушного винта, установленного в концевом сечении крыла большого удлинения, на аэродинамические характеристики	194
<i>Гаджиев Д.А., Гайфуллин А.М.</i>	
Взаимодействие звука с локализованным вихревым течением . . . . .	195
<i>Гайфуллин А.М., Жвик В.В.</i>	
Нелокальный закон сохранения в свободной затопленной незакрученной струе . . . . .	197
<i>Губский В.В., Павленко О.В., Петров А.В.</i>	
Численные исследования аэродинамической интерференции фюзеляжа и винто-кольцевого движителя для увеличения тяги системы . . .	199
<i>Добров Ю.В., Лашков В.А., Ренев М.Е., Машек И.Ч., Хоронжук Р.С.</i>	
Тепловой поток на поверхности обтекаемого тела после локального энерговложения . . . . .	201
<i>Завьялов О.Г.</i>	
Исследование оптимальной геометрии опор с газовой смазкой при больших числах Маха . . . . .	203
<i>Засимова М.А., Иванов Н.Г., Марков Д.</i>	
Исследование автоколебаний воздушного потока в многоструйной системе вентиляции . . . . .	204
<i>Campli L.</i>	
UnDiFi-2D: an Unstructured Discontinuity Fitting code for 2D grids . . .	206
<i>Капралова А.С., Чернышов М.В., Шалимов В.П.</i>	
Анализ эмпирических соотношений, описывающих параметры ударной волны в ближней зоне источника импульсного энерговыделения . . . .	208
<i>Кауфман Д.В., Рябинин А.Н.</i>	
Затухающие вращательные колебания длинного цилиндра с диском в воздушном потоке . . . . .	210
<i>Краснюк А.А.</i>	
Расчетные исследования камеры сгорания ГТУ-65.0 . . . . .	212
<i>Кудрявцева В.В., Засимова М.А., Иванов Н.Г.</i>	
Численное исследование режимов истечения плоской воздушной струи в прямоугольную полость . . . . .	213
<i>Кузьмин А.Г, Гувернюк С.В., Симоненко М.М., Бабарыкин К.В.</i>	
Гистерезис при сверхзвуковом обтекании осесимметричного тела с кольцевой ступенькой под углами атаки . . . . .	215

<i>Курбатова Г.И., Виноградова Е.М.</i> Аналитические и численные решения двумерных задач теплопроводности и электронной оптики . . . . .	217
<i>Лобачев М.П., Багаев Д.В., Рудниченко А.А.</i> Апробация и валидация методики расчёта ходкости на основе суперкомпьютерных вычислений . . . . .	218
<i>Могилевский Е.И.</i> Влияние продольных колебаний опорной плоскости на стекание пленки неньютоновской жидкости . . . . .	220
<i>Моисеев А.А., Борейшо А.С., Джгмадзе Г.Т., Савин А.В., Смирнов П.Г., Смоленцев С.С.</i> Моделирование формирования дисперсной фазы при лазерном плавлении металлического порошка . . . . .	222
<i>Павленко О.В., Петров А.В., Пигусов Е.А.</i> Численное исследование по определению оптимального коэффициента импульса выдуваемой струи для различных вариантов отклонения адаптивного элемента хвостовой части крыла с системой управления пограничным слоем . . . . .	224
<i>Павловский В.А.</i> Степенное обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости в форме тензорного реологического соотношения и вытекающие из него варианты построения моделей течения . . . . .	226
<i>Панфилов С.В., Циркунов Ю.М.</i> Модель отскока несферических частиц от поверхности тел в задачах двухфазной аэродинамики . . . . .	227
<i>Рулева Л.Б., Солодовников С.И.</i> Экспериментальные исследования клиновых моделей входных групп воздухозаборников . . . . .	229
<i>Рябинин А.Н.</i> Множественность режимов трансзвукового течения в каналах с разветвлениями . . . . .	231
<i>Савелова К.Э., Алексеева М.М., Чернышов М.В.</i> Ударно-волновые структуры перспективного комбинированного реактивного двигателя . . . . .	233
<i>Савин А.В., Смирнов П.Г., Сергеев А.В.</i> Вычислительное моделирование инверсии трёхмерных газовых струй .	234

<i>Смирнов П.Г., Савин А.В., Моисеев А.А., Джгмадзе Г.Т., Смоленцев С.С., Тимофеев В.А.</i> Вычислительное моделирование плоской турбулентной струи вблизи поверхности . . . . .	236
<i>Смирнов С.И., Колесник Е.В., Смирнов Е.М.</i> Структура турбулентной свободной конвекции в обогреваемой быстро-вращающейся междисковой полости с приосевым стоком тепла . . . . .	238
<i>Шишкина И.А., Колесник Е.В.</i> Тестирование трёх методов подавления ударно-волновой неустойчивости на задаче гиперзвукового обтекания цилиндра . . . . .	240

#### Секция 4. Физико-химическая аэромеханика (*Physico-chemical aeromechanics*)

<i>Алексеев И.В., Тань Лэй, Кустова Е.В.</i> Исследование структуры ударной волны на основе континуального подхода и методом прямого статистического моделирования . . . . .	244
<i>Бечина А.И., Кустова Е.В., Облапенко Г.П.</i> Коэффициенты переноса в поуровневом приближении с учётом вращательного возбуждения . . . . .	246
<i>Брагин М.Д., Брыкина И.Г.</i> О влиянии коэффициента теплопередачи на моделирование энерговыделения разрушенного метеороида . . . . .	248
<i>Брыкина И.Г., Егорова Л.А.</i> О факторе неопределённости в аппроксимации коэффициента теплопередачи в задаче моделирования взаимодействия метеорного тела с атмосферой . . . . .	250
<i>Быков Н.Ю., Захаров В.В., Андреева Т.А.</i> Истечение в вакуум газовой смеси с большим отношением масс компонентов . . . . .	252
<i>Gorbachev Yu., Kupova O., Shoen G., Bondar Ye.</i> Non-equilibrium Dissociation and Relaxation behind the Shock Wave within Two-temperature Approach . . . . .	253
<i>Гориховский В.И., Нагнибеда Е.А.</i> Моделирование кинетики углекислого газа за фронтом ударной волны в полном поуровневом приближении . . . . .	255

<i>Демидов И.В., Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Тихоновец А.В.</i> Асимптотически точное значение функции распределения пар молекул в ударно сжатой сильно диспергированной смеси газов . . . . .	258
<i>Истомин В.А., Кустова Е.В.</i> Использование нейронных сетей при изучении процессов переноса в атомарных газах с электронным возбуждением . . . . .	260
<i>Campoli L.</i> Machine Learning for State-to-State . . . . .	262
<i>Косарева А.А., Кунова О.В., Кустова Е.В., Нагнибеда Е.А.</i> Поуровневые и многотемпературные модели колебательно-химической кинетики в смесях, содержащих CO <sub>2</sub> . . . . .	264
<i>Косарева А.А., Кустова Е.В., Мехоношина М.А.</i> Исследование многотемпературной колебательной кинетики углекис- лого газа на основе новых моделей времён релаксации . . . . .	266
<i>Маламанов С.Ю.</i> Поток электромагнитной энергии при движении проводящей жидкости в кольцевом зазоре двух соосных цилиндров . . . . .	268
<i>Мельник М.Ю., Кустова Е.В.</i> Моделирование релаксации двухатомных молекул в поуровневом при- ближении с учётом электронной кинетики . . . . .	269
<i>Прозорова Э.В.</i> Моментные напряжения в механике сплошной среды . . . . .	271
<i>Ренев М.Е., Добров Ю.В., Лашков В.А., Машек И.Ч.</i> Численный анализ динамики нагрева воздуха межэлектродным разря- дом . . . . .	274
<i>Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н.</i> Стохастическое моделирование теплопроводности разреженных газов .	276
<i>Рыдалевская М.А., Шаламов И.Ю.</i> Сокращенное описание локально равновесных течений диссоциирован- ного многократно ионизованного кислорода . . . . .	278
<i>Савельев А.С., Кустова Е.В.</i> Обобщенные поуровневые и многотемпературные модели скорости хи- мических реакций в воздухе и CO <sub>2</sub> . . . . .	280
<i>Тимохин М.Ю., Рухмаков Д.И.</i> Восстановление локальной неравновесной функции распределения с помощью метода Грэда и метода Чепмена-Энскога . . . . .	282

**Секция 5. Механика деформируемого твердого тела**  
(*Mechanics of Solids*)

<i>Abakarov A.M., Pronina Y.G.</i>	
On the effective elastic properties of materials with mutually perpendicular systems of parallel cracks . . . . .	285
<i>Артемьев Ю.М., Орехов А.В., Павилайнен Г.В.</i>	
Изменение механических свойств полимерных композитов, содержащих фотоактивные неорганические компоненты, под воздействием света солнечного диапазона. . . . .	287
<i>Арутюнян А.Р.</i>	
Исследование длительного старения ударопрочных полистиролов . . . . .	289
<i>Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.</i>	
О потере устойчивости симметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин . . . . .	291
<i>Богачев И.В., Ватульян А.О.</i>	
Об отслоении неоднородного полимеркомпозитного покрытия . . . . .	293
<i>Бочкарёв А.О.</i>	
Учёт нелинейности поверхностного натяжения при закритических деформациях нанопластины . . . . .	295
<i>Vakaeva A.B., Grekov M.A.</i>	
Stress concentration and distribution in an elastic body with a nearly circular hole . . . . .	297
<i>Вильде М.В., Сурова М.Ю.</i>	
О квазифронте планарной краевой волны в тонкой пластине при действии внезапно приложенной нагрузки на торце . . . . .	299
<i>Вильде М.В., Плешков В.Н., Сергеева Н.В.</i>	
Теоретическое и экспериментальное исследование влияния внутреннего трения на распространение фундаментальной симметричной краевой волны . . . . .	301
<i>Васильев Г.П., Смирнов А.Л.</i>	
Собственные колебания неоднородных тонких пластин . . . . .	303
<i>Ватульян А.О., Недин Р.Д., Юров В.О.</i>	
О некоторых прямых и обратных задачах для предварительно напряжённых цилиндров и волноводов . . . . .	305
<i>Вьюненко Ю.Н., Носковец А.А., Хлопков Е.А., Киселев А.Ю., Волков Г.А.</i>	
Механизм остаточных напряжений ЭПФ и деформационные явления в никелиде титана . . . . .	307

*Дзедзисавицки Г.Т.*

- Применение поправочных коэффициентов в методе Рэлея при расчете основной частоты колебаний цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением . . . . . 310

*Забавникова Т.А.*

- Задача циклического нагружения материалов . . . . . 311

*Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Смирнов В.М.*

- Моделирование деформационных и прочностных свойств металломатричного композита, армированного карбидными структурами . . . . . 313

*Ибраһим А.А.*

- Elastic-plastic analysis of reinforced concrete frame buildings: Developing a new software package . . . . . 315

*Казаков К.Е.*

- О влиянии неоднородности внешнего покрытия трубы на контактные напряжения, возникающие под жёсткими втулками . . . . . 317

*Карачева Н.В., Филиппов С.Б.*

- Колебания стержня с переменным сечением . . . . . 319

*Коваленко М.Д., Кержаев А.П., Меньшова И.В.*

- Точное решение для частично защемленного прямоугольника с трещиной . . . . . 320

*Kostyrko S.A., Grekov M.A., Altenbach H.*

- Nonlinear boundary perturbation analysis of wrinkled ultra-thin film coating . . . . . 322

*Кукуджанов К.В., Левитин А.Л., Угурчиев У.Х.*

- Макромеханическое моделирование залечивания повреждённости под действием импульсов тока высокой плотности . . . . . 324

*Любомиров Я.М., Ярцев Б.А.*

- Гидроупругие колебания композитных лопастей судовых движителей . 326

*Наумова Н.В., Иванов Д.Н., Дорофеев Н.П.*

- Колебания пластины с периодически изменяющимися параметрами . . 328

*Нестерчук Г.А.*

- Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами разной жесткости . . . . . 330

*Ожолова Д.Д., Седова О.С.*

- Напряжённое состояние сосуда под давлением с множественными случайно распределёнными дефектами . . . . . 331

*Орехов А.В.*

- Интегрально-оценочные критерии для границ применения закона Гука 333



<i>Остроупико Е.С.</i>	
Влияние скорости и температуры предварительного деформирования на эффекты памяти формы в сплаве TiNi . . . . .	336
<i>Павилайнен Г.В.</i>	
Учёт пластической анизотропии стальных вертикальных опор буровых платформ . . . . .	338
<i>Помыткин С.П.</i>	
Базовые эксперименты и решение основных задач холодной ползучести в рамках эндохронной теории неупругости . . . . .	340
<i>Федоровский Г.Д.</i>	
Физико-математическое исследование функциональных термо-оптико-механических свойств и взаимосвязей полиметилметакрилата . . . . .	342
<i>Рябов В.М., Ярцев Б.А.</i>	
Неклассические колебания моноклинной композитной полосы . . . . .	343
<i>Рябов В.М., Ярцев Б.А., Паршина Л.В.</i>	
Рассеяние энергии при колебаниях трехслойных композитных пластин	346
<i>Филиппов С.Б.</i>	
Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкреплённой кольцевыми пластинами . . . . .	348
<i>Franus D.V., Pavilaynen G.V.</i>	
SD-effect for circular elastic-plastic plates from biological materials . . . . .	350
<i>Shuvalov G.M., Kostyrko S.A.</i>	
Diffusion driven surface morphological instability in ultra-thin film coating	352

**Секция 6. Устойчивость и стабилизация механических  
и электромеханических систем**  
*(Stability and Stabilization of Mechanical  
and Electromechanical Systems)*

<i>Andreev A.S., Peregodova O.A.</i>	
On the Steady Motions Control of Robot Manipulators with Viscoelastic Joints . . . . .	356
<i>Александров А.Ю.</i>	
О полиустойчивости движений сложных систем . . . . .	358
<i>Александров А.Ю., Тихонов А.А.</i>	
О трёхосной стабилизации твёрдого тела в условиях управления с распределённым запаздыванием . . . . .	360

<i>Алферов Г.В., Федоров В.М., Хохрякова А.А.</i> Корректировка движения мобильного робота при использовании модифицированного алгоритма D* . . . . .	362
<i>Александров В.В., Бугров Д.И., Бугрова М.И., Пилмогина С.К.</i> О размерах области достижимости линейной системы второго порядка	363
<i>Андреев А.С., Перегудова О.А., Колегова Л.В.</i> Об управлении движением трёхколесного робота с вязко-упругими колёсами по горизонтальной плоскости . . . . .	365
<i>Барабанов И.Н., Тхай В.Н.</i> Цикл в связанной механической системе . . . . .	367
<i>Bezglasnyi S.P., Dorogovtseva E.V.</i> On the motion control of heavy solid body without velocities measurement	369
<i>Bezglasnyi S.P.</i> Stabilization in large of gyrostat program motion with cavity filled with viscous fluid . . . . .	371
<i>Быков В.Г.</i> Синхронные прецессии и автоколебания динамически неуравновешенного ротора при ограниченном возбуждении . . . . .	373
<i>Быков В.Г., Ковачев А.С.</i> Аналитическое и численное исследование процесса автобалансировки динамически неуравновешенного жёсткого ротора, закрепленного в ортотропных вязко-упругих опорах . . . . .	374
<i>Гладун А.В.</i> О стабилизации вращательного движения твёрдого тела со спарками гиродинов . . . . .	377
<i>Злобин Д.Ю., Шиманчук Д.В., Желонкина О.С., Князев Н.П., Курочкин В.Ю., Ившин А.М.</i> О возможных походках четырёхногого робота . . . . .	379
<i>Зубов С.В.</i> Стабилизация движения линейных систем при наличии ограниченных возмущений . . . . .	380
<i>Ильина А.Ю., Ковачев А.С.</i> Динамика статически неуравновешенного ротора при наличии активного магнитного подшипника . . . . .	383
<i>Красинский А.Я., Ни А.В., Юлдашев А.А.</i> О стабилизации заданного положения схвата дельта-робота . . . . .	385
<i>Курочкин В.Ю., Злобин Д.Ю., Шиманчук Д.В.</i> Управляемое движение гуманоидного робота в задаче приседания . . . . .	387

<i>Латонов В.В.</i>	
Минимаксная стабилизация линии визирования инерционного объекта на подвижном основании при наличии трения . . . . .	389
<i>Ожунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А.</i>	
Устойчивость вертикального спуска тяжёлого оперённого тела в сопротивляющейся среде . . . . .	391
<i>Платонов А.В.</i>	
Анализ устойчивости решений одного класса механических систем с кусочно-постоянными коэффициентами . . . . .	393
<i>Селюцкий Ю.Д.</i>	
О динамике одной аэроупругой системы с двумя степенями свободы . . . . .	395
<i>Шмигирилов Р.В., Рябинин А.Н.</i>	
Физическое и математическое моделирование колебаний сегмента моста . . . . .	397

### Секция 7. Биомеханика (*Biomechanics*)

<i>Бауэр С.М., Венатовская Л.А., Качанов А.Б.</i>	
Изменение напряжённо-деформированного состояния корнеосклеральной оболочки глаза после операций по коррекции зрения . . . . .	401
<i>Бегун П.И., Ваганова Д.А., Лебедева В.А., Лебедева Е.А., Сафронова А.А., Семенова Ю.Д., Тихоненкова О.В.</i>	
Биомеханические исследования состояния структур опорно-двигательного аппарата при реконструкции у детей раннего возраста . . . . .	403
<i>Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д., Зи М.С., Lai Y.X.</i>	
О моделировании внедрения канюли в мягкую ткань . . . . .	405
<i>Дружинин В.Г., Морозов В.А.</i>	
Подбор коэффициентов для двухмерной модели, описывающей отклонение кончика иглы от прямолинейного движения в тканях человека . . . . .	407
<i>Kipelkin I.M., Gerasimova S.A., Kazantsev V.B.</i>	
Modeling biological — neurons using memristive devices . . . . .	409
<i>Иомдина Е.Н., Корников В.В.</i>	
Статистический анализ совокупности биомеханических и гемодинамических параметров глаза с первичной открытоугольной глаукомой . . . . .	411
<i>Кравченко Д. С., Филиппов С.Б.</i>	
Простейшая модель хрусталика глаза . . . . .	413

<i>Кручинина А.П.</i> О возможности замыкания математической модели нейронного управления глазодвигательным аппаратом . . . . .	414
<i>Крылова А.С.</i> Деформация решетчатой пластинки диска зрительного нерва в рамках неклассических теорий оболочек . . . . .	416
<i>Кучеренко Д.В.</i> Математическая модель пороупругой оболочки для решения задач биомеханики . . . . .	418
<i>Паутов А.А., Бауэр С.М., Иванова О.В., Сапач Ю.О., Крылова Е.Г.</i> Форма замыкающих клеток влияет на устьичные движения . . . . .	420
<i>Тихомолова Л.Г., Иванова Я.Ф., Южнев А.Д., Гатаулин Я.А., Смирнов Е.М., Калмыкова Р.В., Морозов А.Н., Супрунович А.А., Вrabий А.А., Хубулава Г.Г.</i> Пациент-ориентированный расчёт кровотока в месте соединения кровеносного сосуда с протезом . . . . .	422
<i>Штейн А.А., Моисеева И.Н.</i> Эффективный учет нелинейных упругих свойств корнеосклеральной оболочки при математическом моделировании тонометрии и внутриглазных инъекций . . . . .	424

### Секция 8. Физическая механика (*Physical Mechanics*)

<i>Гунько Ю.Ф., Гунько Н.А.</i> Влияние граничных условий на поверхности эмитирующих тел на потоки частиц в их окрестности . . . . .	428
<i>Епифанов В.П., Сазонов К.Е.</i> Волновой метаморфизм льда . . . . .	430
<i>Кац В.М., Морозов В.А., Севастьянов Я.А.</i> Расчет напряжений, инициированных электрическим взрывом проводников в составном толстостенном цилиндре . . . . .	432
<i>Колесников Е.К., Ключников Г.Н.</i> Области высыпания на Землю электронов высокой энергии, инжектированных точечным источником, движущимся по эллиптической околоземной орбите . . . . .	435

<i>Рудяк В.Я., Белкин А.А., Краснолуцкий С.Л.</i> Экспериментальное изучение и молекулярно-динамическое моделирование диффузии углеродных нанотрубок . . . . .	436
<i>Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н.</i> Об анизотропии процессов переноса в нано- и микроканалах . . . . .	438
<i>Яковлев А.Б.</i> Модель зарядки тонкой алюминиевой плёнки в космической плазме . . . . .	440

### Секция 9. История механики (*History of Mechanics*)

<i>Корытников Д.Г.</i> Особенности проектирования и реализации онлайн уроков по математике и информатике в соответствии с ФГОС . . . . .	444
<i>Кутеева Г.А.</i> Несколько работ о механизмах Чебышёва . . . . .	445
<i>Кутеева Г.А., Синильщикова Г.А., Трифоненко Б.В., Юшков М.П.</i> Коллекция механизмов П.Л. Чебышёва на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета . . . . .	448
<i>Голубев Ю.Ф., Мелкумова Е.В.</i> К 100-летию со дня рождения академика Дмитрия Евгеньевича Охотимского . . . . .	450
<i>Орехов А.В.</i> О современных проблемах преподавания математики, физики, механики и информатики в Российской Федерации . . . . .	452
<i>Павилайнен Г.В., Рудакова Т.В., Сабанеев В.С.</i> История науки как важная составляющая системного подхода к образованию . . . . .	454
<i>Смольников Б.А., Смирнов А.С.</i> История резонанса — от простого резонанса до авторезонанса . . . . .	457
<i>Солтаханов Ш.Х., Товстик П.Е., Юшков М.П.</i> Четвёртое издание учебника Н.Н. Поляхова, С.А. Зегжды, П.Е. Товстика, М.П. Юшкова «Теоретическая и прикладная механика» . . . . .	459
<i>Шарков Н.А., Шаркова О.А.</i> Значение научного диалога академика А.Н. Крылова и инженера-кораблестроителя И.Г. Бубнова по вопросам остойчивости, плавучести и строительной механики для развития кораблестроительной школы Санкт-Петербурга (1890–1910 годы) . . . . .	461
<b>АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ (<i>AUTHOR INDEX</i>)</b> . . . . .	465

Пленарные доклады

*Plenary reports*

## Пафнутий Львович Чебышёв: человек науки на службе России

*Тихонов А.А.*

*a.tikhonov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* Чебышёв П.Л., 200 лет, биография

К 200-летию со дня рождения П.Л. Чебышёва (1821–1894) — великого русского ученого, представляющего гордость и славу нашей страны, предлагается ретроспективный взгляд на современную ему эпоху и делается попытка осмысления роли гениальной личности не только в истории науки и техники, но и в истории страны, которой он служил всеми своими талантами, в том числе научным и педагогическим.

### Традиция служения Отечеству в семье Чебышёвых

Традиция служения Отечеству — преимущественно на ратном поприще — присуща семье П.Л. Чебышёва и прослеживается в судьбе деда, отца и братьев.

Дед — Павел Петрович, по окончании обучения (1754) в Академической гимназии при Санкт-Петербургском университете был определён на военную службу — прапорщиком в один из гвардейских полков. Имел склонность к математике.

Отец — Лев Павлович Чебышёв (1789–1861), служил офицером Тульского 1-го конноказацкого полка. В 1812–1813 участвовал в сражениях под Малоярославцем, Вязьмой, Красным, Бауценом. Награждён боевым орденом. В 1814 Л.П. Чебышёв принимал участие во взятии Парижа русскими войсками.

Пафнутий Львович родился 4 мая 1821, на два года позже сестры Елизаветы, и был старшим из братьев. С детства он имел одну ногу сведенной, поэтому немного хромал и ходил с палкой. Этот физический недостаток был предметом печали его родителей, желавших видеть своего старшего сына офицером. За Пафнутием шёл брат Павел, проживший недолгую жизнь, но успевший послужить судьей Боровского уездного суда. Второй брат Пафнутия, Пётр, был военным. Все трое его сыновей — Лев, Пафнутий и Владимир — учились в кадетском корпусе, потом в военном училище и вышли офицерами в гвардию.

Николай (1830–1875) и Владимир (1832–1905) — самые младшие братья Пафнутия Львовича. Оба окончили артиллерийское училище и академию и были оставлены по рекомендации М.В. Остроградского при академии для преподавания математики. Впоследствии Николай Львович в чине полковника был начальником Варшавского учебного полигона. Скончался в чине генерал-майора и в должности начальника Кронштадтской крепостной артиллерии. Владимир

Львович, генерал от артиллерии, был заслуженным профессором Артиллерийской академии, основоположником патронного и ружейного дела в России, а также основоположником учения о свойствах поверхности. Он первым в 1874, исследуя процесс цилиндрического фрезерования, установил причины, вызывающие микронеровности на обработанной поверхности, и вывел уравнение для определения высоты микронеровностей. Сделанные им выводы не утратили своего значения до настоящего времени. Из братьев Владимир Львович был ближе всех Пафнутию Львовичу и частично передал ему интерес к математическим аспектам военного дела [1].

### **П.Л. Чебышёв в Императорской Санкт-Петербургской Академии наук (48 лет)**

Переехав в С.-Петербург в 1847 по приглашению акад. В.Я. Буняковского, П.Л. Чебышёв сразу же приступил к работе при Академии наук, где он вместе с акад. В.Я. Буняковским готовил к изданию рукописные труды Л. Эйлера по теории чисел. В 1853 академики П.Н. Фусс, В.Я. Струве, Б.С. Якоби, В.Я. Буняковский представили П.Л. Чебышёва к избранию в адъюнкты Императорской академии наук, особо отметив важность его работ в области практической механики. В 1853 он был избран в адъюнкты, а в 1856 стал экстраординарным академиком. В 1858 в связи с его работами по теории шарнирных параллелограммов и теории приближения функций академики В.Я. Буняковский, М.В. Остроградский, Э.Х. Ленц, Б.С. Якоби, А.Я. Купфер, О.В. Струве подписали представление к избранию П.Л. Чебышёва ординарным академиком, что и произошло в 1859 году. Научные труды академика П.Л. Чебышёва относятся к следующим областям: 1) теории чисел, 2) теории вероятностей, 3) интерполированию, 4) теории наилучшего приближения функций, 5) интегральному исчислению, 6) картографии, баллистике и астрономии, 7) теории механизмов. Из этого перечня видно, как широк был диапазон его творчества. В каждой из перечисленных областей П.Л. Чебышёв получил результаты фундаментального значения, создавшие ему мировую славу [1]–[3].

### **Работа Чебышёва в СПб университете (35 лет)**

После успешного окончания в 1841 Московского университета и защиты магистерской диссертации (1846), П.Л. Чебышёв переехал в СПб в 1847 и в том же году был утверждён в звании адъюнкт-профессора СПб университета. Чтобы получить право чтения лекций в университете, он защитил ещё одну диссертацию, после чего читал лекции по высшей алгебре, теории чисел, теории вероятностей, геометрии, теории эллиптических функций, практической механике (1852-1856). В 1849 П.Л. Чебышёв защитил в СПб университете докторскую диссертацию, удостоенную Демидовской премии Академии наук. С 1850 по 1882 он занимал должность профессора СПб университета.



Профессор П.Л. Чебышёв был выдающимся педагогом. Вот что писал о нем профессор СПб университета К.А. Поссе: «В конце 60-х годов, когда я был студентом 3-го и 4-го курсов, Чебышёв читал нам теорию определенных интегралов, интегрирование уравнений, теорию чисел и теорию вероятностей. Лекции его были чрезвычайно увлекательны, и многие из нас слушали его курсы по 2 раза, на 3-м и 4-м курсах, сожалея, что время не позволяло прослушать вторично излагаемые им предметы» [4].

«Лекции П.Л. Чебышёва были невелики по объему, но содержательны и очень доступны» — вспоминал его ученик А.М. Ляпунов. Он же отмечал, что «П.Л. Чебышёв заботился не столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов, именно поэтому большинство студентов усваивали эти лекции очень легко».

Профессор П.Л. Чебышёв был талантливым лектором, внимательным и справедливым экзаменатором, остроумным оппонентом на научных диспутах. Расставаясь с Пафнутием Львовичем в 1882, ректор А.Н. Бекетов от имени Совета университета сказал: «Приветствуя вас в настоящий день, Совет университета желает почтить в лице вашем знаменитого учёного, в течение 35 лет потрудившегося на пользу науке и юношеству, в честь и славу России. Глубокомысленные ваши исследования по разным отраслям математического анализа создали вам громкое имя, известное по всей Европе; исследования эти навсегда принадлежат науке; деятельность же ваша на поприще русского просвещения неразрывно связана с нашим университетом и всегда будет служить одним из лучших украшений его летописи».

Здесь же, в главном здании университета, в его домовая церковь, состоялось отпевание П.Л. Чебышёва 29 ноября 1894.

### **Работа Чебышёва в Артиллерийском отделении Военно-учёного комитета (40 лет)**

В ходе военных реформ 1860–70-х происходил переход русской армии от гладкоствольных орудий к нарезной артиллерии. Разработкой и производством артиллерийского вооружения в стране руководило Главное артиллерийское управление (ГАУ) (образовано в 1862). В процессе перевооружения перед ГАУ возник ряд новых баллистических проблем, а также непростых вопросов, связанных, в частности, с устройством орудийных стволов, замков и лафетов. К решению этих и многих других вопросов были привлечены выдающиеся учёные, в том числе и П.Л. Чебышёв, сделавшие крупные открытия в связанных с артиллерией фундаментальных и прикладных науках.

П.Л. Чебышёв стал работать в ГАУ с начала 1856. Он получил приближённую формулу дальности полета снаряда, спроектировал несколько типов снарядов и разработал методы интерполирования траекторий, позволившие создать таблицы стрельбы. Уже в 1859 П.Л. Чебышёв был награждён в связи с этой работой орденом Св. Анны 2-ой степени [2].

В течение 40 лет П.Л. Чебышёв принимал активное участие в работе ГАУ, направленной на повышение дальноточности и точности артиллерийской стрельбы. Для обработки результатов опытных стрельб он применил методы теории вероятностей. В курсах баллистики до наших дней сохранилась формула Чебышёва для вычисления дальности полета снаряда. В 1873 он вывел так называемые «квадратурные формулы Чебышёва», позволяющие упростить вычисления и сократить их объём.

В 1867 П.Л. Чебышёв был избран членом ГАУ, а в 1870 — почетным членом Артиллерийской академии. Многолетними трудами в ГАУ, где он работал вплоть до своей внезапной кончины, П.Л. Чебышёв оказал большое влияние на развитие русской артиллерийской науки и на приобщение учёных-артиллеристов к математике. Он был руководителем и консультантом многих выдающихся русских артиллеристов (Н.В.Маиевского, П.М.Альбицкого и др.) по вопросам, имевшим отношение к мат. анализу. Способствовал правильной постановке курсов математики в Артиллерийской академии и училище.

Поэтому не случайно, что именно в разгар Великой Отечественной войны, в 1944 (год 50-летия со дня кончины П.Л. Чебышёва), когда артиллерия проявила свою выдающуюся роль, АН СССР учредила премию им. П.Л. Чебышёва.

### **Работа Чебышёва в Учёном комитете Министерства народного просвещения (17 лет)**

Министерство народного просвещения (МНП) (1802-1817, 1824-1917) — это центральное государственное учреждение в Российской империи, руководившее учреждениями народного просвещения и науки. В ходе реформ Александра II штат МНП сократился с 194 человек (в 1862) до 42 человек! При этом центральный аппарат МНП состоял из Совета министра, Департамента народного просвещения и Учёного комитета. В ведении МНП находились Императорская СПб Академия наук, Николаевская главная обсерватория, Императорская публичная библиотека и Румянцевский музей. Учёный комитет (1817-1831, 1856-1917) МНП ведал составлением учебных программ, рассмотрением самих учебников, наблюдением за тем, в каких руководствах нуждаются учебные заведения для более успешного преподавания. Комитет состоял из председателя и по одному(!) члену «по каждой из главных отраслей наук: 1) по русской словесности, 2) по древней филологии, 3) по новой филологии, 4) по истории и географии, 5) по математической науке и 6) по естественным наукам». В 1856 статский советник П.Л. Чебышёв был назначен членом Учёного комитета МНП по математике. На него возлагалась ответственность за 1) участие в разработке уставов низших, средних и высших школ; 2) рецензирование математических учебников, 3) постоянное наблюдение за тем, в каких учебных руководствах по математике нуждаются школы для более успешного преподавания, и нахождение средств для удовлетворения этой нужды, 4) составление и рассмотрение программ по математике для низших и средних училищ, 5) рассмотрение книг

физико-математического содержания, предназначавшихся для поднесения царю и членам его семьи, как особенно полезных, или распространение которых в обществе необходимо было предупредить, как недоброкачественных, 6) рекомендация книг математического содержания, которые предполагались для распространения в учебных заведениях страны.

Эти обязанности П.Л.Чебышёв исполнял в течение 17 лет (1857–1873). В частности, он принимал участие в составлении и утверждении в трёх редакциях нового университетского устава 1863. Ему же принадлежит проект организации реальных курсов при уездных училищах. К началу 1870-х годов П.Л. Чебышёв остался единственным старейшим членом Учёного комитета, причем деятельность его проходила в наиболее трудный период жизни самого комитета: надлежало подготовить и осуществить на деле одну из великих реформ того времени — реформу образования. Ни один из вопросов, касающихся математики и связанных с этой реформой, не был решён без участия П.Л. Чебышёва, голос которого, как одного из авторитетнейших ученых своего времени, был почти всегда решающим. Анализ этой стороны деятельности П.Л.Чебышёва свидетельствует о том, что он был не только гениальным ученым, но и крупным деятелем в области народного просвещения, много поработавшим на пользу русских школ всех уровней.

Рассмотрим подробнее некоторые аспекты деятельности П.Л. Чебышёва в рамках Учёного комитета министерства народного просвещения.

#### **Чебышёв и университетский устав 1863 г.**

П.Л. Чебышёв, будучи на 3 года моложе Императора Александра II, в полной мере пережил непростой период великих реформ, а также потрясений в общественной жизни, спровоцированных террористическими организациями («Земля и Воля», «Народная воля», «Черный передел» и др.). Буквально сразу после Земельной реформы (февраль 1861) начали разворачиваться студенческие волнения, набравшие силу к маю 1861. Особенно сильно они проявились в столице — в СПб университете. В мае 1861 были составлены новые правила для студентов, запрещавшие, между прочим, сходки и ограничивавшие число освобождённых от платы. Для обсуждения этих правил Совет СПб университета создал особую комиссию под председательством статского советника и профессора П.Л. Чебышёва. Комиссия оказалась в затруднительном положении, однако сумела подготовить компромиссный вариант решения проблемы. Министерство народного просвещения (МНП) утвердило эти правила в заметно искажённом виде, что вызвало оппозицию со стороны Совета СПб университета. Вспыхнули студенческие волнения, приведшие к столкновениям с войсками и массовым арестам студентов. Наиболее влиятельные профессора вместе с ректором Плетневым вынуждены были покинуть университет. Этот разгром СПб университета послужил толчком для разработки проекта нового университетского устава. К этой работе снова был привлечен П.Л. Чебышёв. Будучи таким

образом вовлечённым в реформу образования, П.Л. Чебышёв продолжал эту деятельность в последующие годы. Сохранились его замечания к проекту университетского устава. В частности, Учёным комитетом было учтено замечание, касавшееся необходимости отделить практическую механику от аналитической. По уставу 1863 университеты получили отдельных профессоров по аналитической и практической механике. Также было учтено замечание П.Л. Чебышёва о том, чтобы будущий профессор имел непременно ученую степень по той науке, которая входит в состав его кафедры [1]. Выступал он и по поводу прав и обязанностей проректора, приват-доцентов, структуры университетского суда, слияния восточного факультета СПб университета с Академией наук и др. С учётом этой немалой работы П.Л. Чебышёв в 1863 получил чин действительного статского советника с формулировкой «за отличие».

### **Рекомендательная библиография в 1860-х годах в России**

В 1860-е гг., когда Россия после «великих реформ» вступила на путь капиталистического развития, требовалось всенародное повышение грамотности и профессионализма во всех сферах деятельности. Усилиями русских педагогов эту задачу стала решать рекомендательная библиография, призванная ответить на вопрос — что читать народу для образования? Дешёвых книг для народного чтения было мало — преобладали дорогие книги и учебники.

Учёный комитет Министерства народного просвещения (МНП) в 1863 поручил А.Д. Галахову и А.Н. Бекетову составить «Реестр книг, которые могли бы быть с пользою употреблены в начальных народных училищах» [5]. В 1-м реестре отражены 37 книг и даны отрицательные отзывы вообще о качестве народных изданий. После того как к этой работе подключился П.Л. Чебышёв, в 1865 был опубликован 2-й список учебников для народных школ (21 название), подготовленный новым коллективом авторов — А.Д. Галахов, П.Л. Чебышёв и Н.Х. Вессель. Осознавая серьезность и значимость разработки рекомендательной библиографии, МНП распространило эту работу не только на учебники и учебные пособия, но и на книги для школьных и народных библиотек.

Обратим внимание на «Обзор книг и руководств для общего образования» (1868–1870). Обзор был задуман широко и предусматривал охват всех отраслей знания, но осуществлены лишь два отдела — естествознание и математика. В этом, без сомнения, проявился личный результат трудов П.Л. Чебышёва, ответственного за математическое направление в России.

К отбору книг и учебников П.Л. Чебышёв подходил внимательно, часто давал отрицательные отзывы на книги, написанные даже авторитетными учёными, но недостаточно хорошо изложенные или слишком сложно написанные для понимания учащимися. Кроме того, при отборе учебников он руководствовался правилом: «Новое в преподавании математики полезно только тогда, когда на опыте проверено, что оно лучше старого».

В целом, рекомендательная библиография в России, начиная со второй половины XIX в., приобрела явно выраженный поступательный характер и даёт такие совершенные образцы, которые пока недостижимы в наше время.

### **Чебышёв и преподавание математики в начальных школах**

Существенный вклад внес П.Л. Чебышёв в дело совершенствования преподавания математики в начальных школах России. Он одним из первых представил свой проект программы по математике для начальных школ. В ней впервые обращается внимание на твёрдое усвоение механизма арифметических вычислений и на верное и быстрое решение устных и письменных задач. Относительно характера преподавания геометрии в уездных училищах в примечании к программе сказано кратко: «Ничего не должно быть предлагаемо без доказательств». Вместе с тем П.Л. Чебышёв рекомендовал упражнять учеников в решении задач «не только в классе черчением и вычислением, но и в поле с помощью астролябии, цепи и других землемерных инструментов, дабы, с одной стороны, утвердить в них теоретические знания, а с другой — ознакомить их с практическим приложением наук меры и числа». Особо выделялись задачи с практическим содержанием как развивающие соображение учащихся. В течение нескольких лет П.Л. Чебышёв принимал активное участие в разработке учебных планов и программ по математике для гимназий. В проекте устава 1858 им были четко сформулированы цели преподавания математики в гимназиях: 1) развитие умственных способностей; 2) сообщение сведений, необходимых для всякого образованного человека; 3) подготовка специальными занятиями физ.-мат. науками и приложениями к практической деятельности.

Являясь профессором СПб университета, П.Л. Чебышёв, тем не менее, пристальное внимание уделял школьным учебникам, стараясь оградить школы от плохих учебников математики. По свидетельству проф. К.А. Поссе (1847–1928), «главный контингент лиц, недовольных Чебышёвым, составляли авторы плохих учебников по элементарной математике, к которым Чебышёв, в бытность свою членом Учёного Комитета министерства нар. просвещения, относился с неумолимой строгостью, зная весь вред, приносимый этими учебниками ученикам и ту пользу, которую, в случае одобрения комитетом, извлекали для себя авторы. Весьма возможно, что если бы Чебышёв подольше оставался действительным членом Учёного Комитета..., то многие из существующих теперь учебников, выдержавших десятки изданий, не дошли бы и до второго» [4].

О степени строгости П.Л. Чебышёва при рецензировании учебников говорят следующие цифры: из 44 сочинений по математике, поступивших на конкурсы, объявленные в 1864 и 1865, П.Л. Чебышёв ни одно не нашел вполне удовлетворяющим требованиям конкурса. Кроме этого, он дал отзыв еще о 167 математических сочинениях, предназначенных в качестве учебников для начальных и средних школ. Вот требования, которые П.Л. Чебышёв предъявлял к учебникам математики:

- 1) должны быть приспособлены не только к уровню науки, но ещё в большей мере к потребностям школьной системы;
- 2) «в немногом многое», наличие основного ядра;
- 3) не должно быть излишних подробностей, особенно в вопросах второстепенной важности;
- 4) чёткое разграничение существенного и второстепенного;
- 5) отработанность языка, ясность и строгость доказательств;
- 6) полнота содержания;
- 7) изложение материала не должно отклоняться от общепринятой системы преподавания в школе.

Таким образом, несомненна деятельность П.Л. Чебышёва, направленная на совершенствование школьных учебников математики и развитие методики преподавания математики. Позднее известный русский педагог А.П. Киселёв (1852–1940), ученик П.Л. Чебышёва, создал выдающийся школьный учебник математики, строго выдерживая принципы, сформулированные учителем.

#### **Чебышёв и систематическая подготовка инженеров в России**

Во 2-й половине XIX века острейшая потребность в квалифицированных технических кадрах, вызванная бурным развитием машиностроения, поставила перед российской высшей школой вопрос о значительном увеличении числа подготавливаемых инженеров-машиностроителей. Весной 1876 для усовершенствования университетского устава (1863) были созданы четыре специальные комиссии. В одну из них — комиссию по физ.-мат. факультету — вошел П.Л. Чебышёв. Среди прочих, в ней обсуждался вопрос об организации при физ.-мат. факультетах технических отделений. Этот вопрос представлял несомненную важность для системы высшего образования в России. Профессор Киевского университета И.И. Рахманинов предложил готовить таких инженеров на физ.-мат. факультетах университетов. П.Л. Чебышёв аргументированно выступил против этого предложения, считая более целесообразным сосредоточить подготовку инженеров в высших технических учебных заведениях, а в университетах готовить специалистов по фундаментальным наукам. Именно по этому пути — пути создания значительного числа технических ВУЗов различного профиля — и пошла российская высшая школа. К 1913–1914 г. в России помимо 10 университетов (35695 учащихся) действовали 15 инженерно-промышленных институтов (23329 учащихся), 8 военных и военно-морских (1182 учащихся), 6 земледельческих (3307 учащихся) [6].

Сам П.Л. Чебышёв вовсе не был склонен пренебрегать техническим образованием в угоду фундаментальному физико-математическому. Тем более, что имел большой опыт преподавания технических дисциплин и, вообще, проявлял удивительные способности и интерес к технике и промышленности. Так, в 1852–1858, будучи экстраординарным профессором СПб ун-та, он в то же

время читал лекции по практической механике — достаточно новой в то время дисциплине — в Александровском лицее. Кроме того, он принимал участие в постановке преподавания математики в военно-учебных заведениях. Наконец, свидетельством высочайшего инженерного уровня П.Л. Чебышёва являются его механизмы, которых он изобрел более 40. Некоторые из них участвовали во Всемирных выставках: паровая машина (1876, Филадельфия), «стопоходящая машина» (1878, Париж), «самокатное кресло», «автоматический арифмометр», механизмы для сортировки зерна и преобразования движений (1893, Чикаго).

В целом, работа Чебышёва в течение 17 лет в Ученом комитете МНП (1856–1873), как научно-педагогическом центре России, сыграла важную роль в период «Великих реформ» Императора Александра II.

### **Чебышёв и создание русской математической школы**

Для П.Л. Чебышёва не меньшее значение, чем конкретные научные результаты, всегда имела задача развития российской математической школы. Созданию этой школы во многом способствовали качества П.Л. Чебышёва как профессора. П.Л. Чебышёв был не только хорошим лектором, но и замечательным научным руководителем, обладавшим редкой способностью удачно выбирать и точно ставить перед молодыми исследователями новые вопросы, занятия которыми всегда приводили к более или менее ценным результатам. Каждую субботу от 14 до 16 часов у П.Л. Чебышёва был приёмный день, когда двери его квартиры были открыты для каждого, кто хотел о чем-либо посоветоваться по поводу своих исследований. Редко кто уходил, не обогатившись новыми мыслями и новыми планами [7].

Позднее многочисленные ученики П.Л. Чебышёва внесли самостоятельный значительный вклад в науку. Среди них такие известные математики, механики и физики, как А.В. Васильев, Г.Ф. Вороной, Д.А. Граве, Е.И. Золотарёв, А.Н. Коркин, Д.А. Лачинов, А.М. Ляпунов, А.А. Марков (старший), К.А. Поссе, И.Л. Пташицкий, П.И. Сомов, Ю.В. Сохоцкий, М.А. Тихомандрицкий.

П.Л. Чебышёв и его ученики сформировали ядро того научного коллектива математиков, за которым со временем закрепилось название Петербургской математической школы. Эта научная школа, созданная П.Л. Чебышёвым, представляла исключительный по силе научный коллектив и отличалась особым направлением. По свидетельству А.М. Ляпунова «П.Л. Чебышёв и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими) и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев. Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов

и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П.Л. Чебышёва и учёных, усвоивших его взгляды» [8].

Идти от практики к теории, подчинить дело создания теории делу решения конкретных вопросов, соблюдая при этом математическую строгость, — вот что характерно для П.Л. Чебышёва и созданной им научной школы.

Труды П.Л. Чебышёва на пользу России были отмечены высокими государственными наградами — орденами Святого Александра Невского, Святого Владимира II степени, Святой Анны I степени, Святого Станислава I степени.

### Литература

- [1] Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышёв. Л.: Изд-во «Наука», 1976.
- [2] Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. Прочие сочинения. Биографические материалы. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1951. 474 с.
- [3] Чебышёв П. Л. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
- [4] Поссе К. А. Чебышёв, Пафнутий Львович // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). СПб., 1890–1907.
- [5] Журнал Министерства народного просвещения. 1863, № 6.
- [6] Иванов А. Е. Высшая школа России в конце XIX – начале XX века. М., 1991.
- [7] Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых. Т. 6, С.-Петербург, 1897–1904.
- [8] Ляпунов А. М. П.Л. Чебышёв. Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, т. 4, 1895, № 5–6.

## Обобщенная задача Чебышёва в неголономной механике и теории управления

*Юшков М.П.,<sup>1</sup> Солтаханов Ш.Х.,<sup>2,3</sup> Додонов В.В.<sup>1</sup>*  
*yushkovmp@mail.ru, soltakhanov@ya.ru, v\_dod@mail.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Грозненский государственный нефтяной технический университет  
им. акад. М.Д. Миллионщикова,

364902, Российская Федерация, г. Грозный, пр. им. Х.А. Исаева, 100,

<sup>3</sup>Академия наук Чеченской Республики,  
364024, Российская Федерация, Грозный, пр-т, им. М. Эсамбаева, 13

*Ключевые слова:* неголономная механика, теория управления, принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса, связи высокого порядка.

Широко известны выдающиеся работы Пафнутия Львовича Чебышёва (1821–1894) в самых различных областях математики и механики. В частности,



он был создателем теории синтеза механизмов, с помощью которой можно, например, подобрать такие размеры стержней четырёхзвенного механизма, которые будут обеспечивать остановку нужного звена в заданных положениях. Ряд таких механизмов, изготовленных под руководством Пафнутия Львовича или им лично, часть из которых имеют его собственноручные пометки [1], бережно сохраняются на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Назовем постановку такой задачи из области синтеза механизмов *задачей Чебышёва*.

Под *обобщённой задачей Чебышёва* будем понимать задачу, в которой требуется найти такие управляющие силы, которые при наличии заданных обобщённых сил, действующих на механическую систему с конечным числом степеней свободы, обеспечат одновременное удовлетворение дополнительной системы дифференциальных уравнений, линейной относительно старших производных выше второго порядка. Тем самым, в теории управления вводится новый класс задач управления, в котором программа движения задаётся в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка.

Одновременно поставленную новую задачу управления можно рассматривать как задачу несвободного движения, когда на движение механической системы, положение которой описывается обобщёнными координатами  $q^\pi$ ,  $\pi = \overline{1, p}$ , накладывается  $k$  идеальных линейных неголономных связей высокого порядка  $n \geq 3$ .

На кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ были созданы две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. В первой из них обобщённые реакции (множители Лагранжа) рассматриваются как  $k$  неизвестных функций времени  $t$ , подлежащих определению наряду с  $p$  искомыми обобщёнными координатами. Строится совместная система дифференциальных уравнений относительно этих  $p+k$  неизвестных функций. Вторая теория базируется на использовании обобщённого принципа Гаусса [2].

Применение обеих теорий иллюстрируется исследованием движения ИСЗ после закрепления величины его ускорения в некоторый момент времени. Такая задача является одним из первых примеров движения реальной механической системы (в нашем случае из области космонавтики) после наложения связи высокого порядка [3, 4]. Результаты численных расчётов приведены в статье [5]. Оказывается, что при использовании первой теории после фиксации величины ускорения (то есть после наложения нелинейной неголономной связи второго порядка, которая после дифференцирования по времени рассматривается как линейная неголономная связь третьего порядка) спутник начинает двигаться между двумя концентрическими окружностями с центром в центре Земли, попеременно касаясь каждой из них. В случае же применения второй теории спутник, превращаясь в космический аппарат, сделал один или несколько обо-

ротов вокруг Земли, асимптотически стремится к равноускоренному движению по прямой.

Наиболее интересным в практическом отношении оказалось применение второй теории для нахождения управляющей силы, переводящей механическую систему за указанный промежуток времени из имеющегося фазового состояния в новое заданное фазовое состояние, в частности, для решения задач гашения колебаний. Большое количество подобных примеров приведено в монографии [6]. Интересно, что применение обобщённого принципа Гаусса оказывается более эффективным для решения сформулированных задач, чем использование классического принципа максимума Понтрягина.

Основная идея предлагаемого нового метода демонстрируется при решении модельной задачи об отыскании управляющей силы, приложенной к горизонтально перемещающейся тележке, несущей  $s$  осей математических маятников. Требуется найти такую оптимальную управляющую силу, которая за указанное время переведёт тележку с маятниками из имеющегося начального фазового состояния в заданное конечное фазовое состояние. Если последнее состояние соответствует положению равновесия, то говорят о гашении колебаний механической системы. Для удобства вычислений и начальное фазовое состояние принималось в виде покоя системы, что позволяло движение тележки с маятниками описывать интегралами Дюамеля.

Первоначально поставленная краевая задача решалась с помощью принципа максимума Понтрягина для минимизации функционала от квадрата искомой управляющей силы. При записи уравнений малых колебаний системы в нормальных координатах удалось построить дифференциальное уравнение относительно искомой управляющей силы с постоянными коэффициентами, зависящими лишь от собственных частот системы. При этом было обнаружено интересное свойство решения, полученного с помощью применения принципа максимума Понтрягина — если подставить в соответствующее размерное дифференциальное уравнение для определения управляющей силы её выражение, взятое из исходной системы дифференциальных уравнений, то получим относительно размерных обобщённых координат системы дифференциальное уравнение порядка  $2s + 4$ . При  $s = 2$  оно имеет вид

$$\begin{aligned} a_{8,x} \frac{d^8 x}{dt^8} + a_{8,\varphi_1} \frac{d^8 \varphi_1}{dt^8} + a_{8,\varphi_2} \frac{d^8 \varphi_2}{dt^8} + a_{6,x} \frac{d^6 x}{dt^6} + a_{6,\varphi_1} \frac{d^6 \varphi_1}{dt^6} + \\ + a_{6,\varphi_2} \frac{d^6 \varphi_2}{dt^6} + a_{4,x} \frac{d^4 x}{dt^4} + a_{4,\varphi_1} \frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} + a_{4,\varphi_2} \frac{d^4 \varphi_2}{dt^4} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x$  — координата тележки,  $\varphi_1, \varphi_2$  — углы отклонений маятников, а коэффициенты уравнения (1) являются постоянными величинами, вычисляемыми через параметры механической системы.

Иными словами, оказалось, что при решении рассматриваемой задачи управления с помощью применения принципа максимума Понтрягина, минимизирующего функционал от квадрата управляющей силы, непрерывно выполняется линейная неголомомная связь высокого порядка (даже при двух маятниках связь оказалась восьмого порядка). Это наталкивает на мысль о возможности применения для решения поставленной краевой задачи методов неголомомной механики со связями высокого порядка ( $n \geq 3$ ). Поэтому вместо применения принципа максимума Понтрягина используем обобщенный принцип Гаусса [2], свойственный этой теории и предложенный еще в 1983 г. Это позволяет получить управление в виде полинома. Как показали расчеты [6], в случае управления движением тележки с двумя маятниками ( $s = 2$ ) при кратковременном движении решения, полученные по двум методам (из которых первый является классическим методом теории управления) практически совпадают. Это позволяет оценивать предложенный новый метод, использующий обобщенный принцип Гаусса, как вполне работоспособный. В то же время наблюдается резкое различие результатов в случае длительного движения механической системы. Это можно объяснить тем, что управление, полученное с помощью принципа максимума Понтрягина, содержит гармоники с собственными частотами системы, что стремится ввести систему в резонанс. В отличие от этого применение обобщенного принципа Гаусса дает управление в виде полинома, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Интересно обратить внимание еще на одно обстоятельство — применение принципа максимума Понтрягина всегда создает скачки управляющей силы в начале и в конце движения. Если же используется обобщенный принцип Гаусса, то при длительном времени движения подобные скачки исчезают. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли удалить скачки управления и при кратковременном движении системы. Оказывается, что для этого достаточно дополнительно потребовать выполнения еще двух граничных условий — требования равенства нулю ускорения тележки в начале и в конце движения. Такую задачу назовем расширенной (обобщенной) краевой задачей первого порядка. Важно подчеркнуть, что решить сформулированную обобщенную краевую задачу с помощью применения принципа максимума Понтрягина невозможно, так как полученное с его помощью управление будет содержать количество неизвестных произвольных постоянных, недостаточное для удовлетворения всех поставленных граничных условий. В отличие от этого применить к сформулированной расширенной краевой задаче обобщенный принцип Гаусса можно, увеличив его порядок на две единицы.

Однако, формулировка и решение расширенной краевой задачи не всегда оказываются полезными. Дело в том, что, как показывают расчеты [7], результаты движения механической системы под действием управления, полученного в результате решения обобщенной краевой задачи, существенно зависят от без-

размерного параметра  $K = T/T_1$  (здесь  $T$  — безразмерное время движения системы, а  $T_1$  — безразмерный наибольший период колебаний среди подвешенных к тележке маятников). Оказывается, что существует счётное множество таких значений параметра  $K$ , при приближении к которым в системе развиваются интенсивные колебания. Эти значения  $K$  были названы особыми точками решений расширенных краевых задач.

Аналитическое решение задачи  $u(\tau)$ , не содержащее особых точек, предлагается строить как линейную комбинацию  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\tau)$  ( $\tau$  — безразмерное время) решений расширенных краевых задач первого и второго порядков:  $u(\tau) = u_1(\tau) + \mu(u_2(\tau) - u_1(\tau))$ . Отметим, что в обобщенной краевой задаче второго порядка вводятся и требования равенства нулю в начале и в конце движения производных по времени от ускорения тележки. Избежать вычисления особых значений решений  $u_1$  и  $u_2$  и построить аналитическое решение, непрерывно зависящее от параметра  $K$ , позволяет определение параметра  $\mu$  из условия минимальности интеграла от квадрата функции  $u(\tau)$  за время перемещения  $T$ .

Изложенная теория, опирающаяся на аппарат движения неголономных систем со связями высокого порядка, была применена к решению ряда практических задач [6]. В последнее время ведутся исследования, направленные на отыскание управляющего момента, плавно переводящего твёрдое тело за указанное время из одного углового состояния в другое [8]. Более подробно содержание данного пленарного доклада изложено в статьях [9, 10].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00280.

## Литература

- [1] Kuteeva G., Yushkov M., Rimushkina E. Pafnutii Lvovich Chebyshev as a mechanician 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov’s Reading. 2015. pp. 1–3. doi: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106746
- [2] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.
- [3] Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 3 (№ 5). С. 77–83.
- [4] Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1991. Вып. 4 (№ 22). С. 26–29.
- [5] Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P. The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic of the third-order constraint // Eighth Polyakhov’s Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959(1). P. 030006-1–030006-6 doi: 10.1063/1.5034586

- [6] Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А. Неголономная механика и теория управления. М.: Наука. Физматлит. 2018. 234 с.
- [7] Зегжда С. А., Гаврилов Д. Н. Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 73–83.
- [8] Додонов В. В., Юшков М. П. Нахождение управляющего момента, переводящего твердое тело из одного углового состояния в другое, с помощью минимизации различных функционалов // XII Всеросс. съезд по фундамент. проблемам теорет. и прикладн. механики. 19 – 24 авг. 2019 г. Сб. трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладн. механика. Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 199–200.
- [9] Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 680–701.
- [10] Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. II // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 714–733.

## Исследование асимптотической динамики систем с трением на основе инвариантных множеств

*Зобова А.А.<sup>1</sup> Горячева И.Г.<sup>1,2</sup> Карапетян А.В.<sup>1</sup>*

*alexandra.zobova@math.msu.ru, goryache@ipmnet.ru, avkarapetyan@yandex.ru*

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1,

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,

119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101, к.1

*Ключевые слова:* асимптотическая динамика, трение, качение с проскальзыванием

В докладе излагаются результаты исследования некоторых задач динамики систем твёрдых тел с трением. В каждой задаче естественным образом возникает малый параметр, при нулевом значении которого уравнения допускают первый интеграл, при этом полная механическая энергия системы является невозрастающей функцией времени. Это позволяет строить инвариантные множества в фазовом пространстве невозмущенной задачи [1]. При возмущении задачи значения первых интегралов медленно меняются с течением времени, а изображающая точка в фазовом пространстве быстро приходит в окрестность инвариантного множества и затем всё время движется в его окрестности. Таким образом проводится качественный анализ решений возмущенной задачи.

### **Торможение однородного вязкоупругого цилиндра на горизонтальной плоскости из того же материала.**

Рассматривается динамика бесконечного вязкоупругого цилиндра радиуса  $R$  веса  $P$ , катящегося с проскальзыванием по полупространству из того же ма-

териала в однородном поле силы тяжести. Ось цилиндра и недеформированная граница опорного полупространства горизонтальны. В области контактного взаимодействия касательные напряжения описываются моделью сухого трения Амонтона–Кулона. Параметры контактного взаимодействия и, следовательно, сила и момент трения, действующие на цилиндр, определяются решением квазистатической задачи вязкоупругости [2]. Показано, что эта задача является возмущением задачи о качении с проскальзыванием упругого цилиндра. В невозмущенной задаче существует первый интеграл, линейный по скорости оси цилиндра  $V$  и его угловой скорости  $\omega$ .

Малый параметр задачи равен  $\varepsilon = (\alpha - 1)\varkappa^{-1}$ , где  $\alpha = T_\varepsilon/T_\sigma \geq 1$  задает отношение времени последствия к времени релаксации и равен единице для упругих материалов. Параметр  $\varkappa = \sqrt{\frac{\pi ER}{32(1-\nu^2)P}} \gg 1$  представляет собой отношение радиуса цилиндра к длине участка контактного взаимодействия в покое ( $E$  — модуль упругости материала,  $\nu$  — коэффициент Пуассона).

Инвариантное множество невозмущенной системы состоит из стационарных движений цилиндра, на которых происходит полное сцепление материалов цилиндра и опорного полупространства. Проведено качественное исследование динамики торможения, построен фазовый портрет системы [3].

### **Устойчивость прямолинейных движений омниэкипажа при добавлении вязкого трения.**

Рассматривается движение по инерции экипажа повышенной маневренности с двумя параллельными и перпендикулярным им третьим омниколесами. При добавлении вязкого трения, пропорционального скорости проскальзывания параллельных омниколес с коэффициентом  $k$ , при  $k \rightarrow +\infty$  динамика экипажа после короткого переходного периода совпадает с динамикой саней Чаплыгина. Однако при  $k = 0$  условие устойчивости равномерных прямолинейных движений, составляющих инвариантное множество невозмущенной системы, противоположно такому условию для саней Чаплыгина. Невозмущенные уравнения движения допускают два первых интеграла — энергии и линейный по скоростям. С помощью теории возмущений изучен механизм потери устойчивости таких движений при малых значениях  $k$ .

### **Перевероты волчка тип-топ на плоскости с трением.**

Рассматривается движение неоднородного динамически симметричного абсолютно твердого шара, движущегося по деформируемой плоскости с трением (модель одномерного вязкоупругого основания). При довольно общих условиях на силу трения и нулевом моменте трения задача допускает линейный по скоростям первый интеграл — интеграл Джелетта. Исследована устойчивость стационарных движений волчка, составляющих инвариантные множества невозмущенной системы, и построены бифуркационные диаграммы Смейла [1]. В

возмущенной задаче момент трения пропорционален малому параметру, и динамика системы описывается движением изображающей точки пространства Смейла в окрестности инвариантных множеств. Это позволяет описать перевороты волчка тип-топ с основания на ножку при его быстрой закрутке вокруг оси симметрии и возвращение в положение устойчивого равновесия [4].

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00140.

### Литература

- [1] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. Эдиториал УРСС Москва, 1998. 168 с.
- [2] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [3] Zobova A. A., Goryacheva I. G. Effect of contacting bodies' mechanical properties on the dynamics of a rolling cylinder // Acta Mechanica (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02800-w>
- [4] Karapetyan A. V., Zobova A. A. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized smale diagrams and overturns // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, no. 6. P. 1007–1013.

### О термомеханике токопроводящих материалов

*Морозов Н.Ф.*,<sup>1,4</sup> *Индейцев Д.А.*,<sup>1,2</sup> *Муратиков К.Л.*,<sup>3</sup>  
*Семёнов Б.Н.*,<sup>4</sup> *Вавилов Д.С.*<sup>1,5</sup>

*n.morozov@spbu.ru, dmitry.indeitsev@gmail.com, klm.holo@mail.ioffe.ru,*  
*semenov@bs1892.sbp.edu, londr@yandex.ru*

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН,  
 199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
 Большой пр. Васильевского острова, 61,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>3</sup>Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН,  
 194021, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26,

<sup>4</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
 199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>5</sup>Военно-космическая академия им. А.Ф.Можайского,  
 197198, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13

*Ключевые слова:* динамическая термоупругость, дефекты, электронный газ.

Исследование динамической задачи термоупругости, начатое в работе [1], опирается на известное соотношение, связывающее тензор напряжений  $\sigma_i$  кристаллической решётки с тензором деформации  $\epsilon$  и температурой  $\theta$ . В литературе

оно носит название закона Дюгамеля–Неймана, который в случае изотропного тела записывается в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_i = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_\theta\theta)\mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\mu$  и  $\lambda$  — постоянные Ламе,  $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$  — первый инвариант тензора деформации,  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор. Считается, что данный подход одинаково применим как к диэлектрикам, так и проводникам. Отличие динамического отклика разных материалов в рамках данного подхода учитывается лишь через значения физических параметров, входящих в выражение (1). Однако развитие фотоакустических методов показывает, что для адекватного описания динамического поведения термоупругой среды при использовании всё более коротких по времени лазерных импульсов становится важно учитывать механизм возбуждения акустического сигнала, существенным образом зависящий от типа материала. В проведённых в последнее время экспериментальных исследованиях [2] отмечается, что поведение акустического отклика металлов на импульсное воздействие наносекундной длительности носит более сложный характер, чем теоретически предсказываемый в [1]. Так, для металлов после начала воздействия лазерного импульса действительно наблюдается поведение акустического сигнала, близкое к предсказываемому в указанной работе. Однако на последующих этапах происходит сравнительно медленный рост сигнала (в микросекундном диапазоне), который не описывается разработанной теорией.

Ключевое отличие проводящих материалов от диэлектриков заключается в наличии электронного газа, который в общем случае содержит как свободные, так и связанные электроны. Основные уравнения двухкомпонентной модели металла имеют вид:

$$\begin{aligned} -\nabla P_e &= \rho_e \dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{Q}_{ei} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i &= \rho_i \dot{\mathbf{v}}_i + \mathbf{Q}_{ie}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $P_e$  — давление электронного газа,  $\mathbf{Q}_{ei} = -\mathbf{Q}_{ie}$  — внутренние силы воздействия электронного газа и решётки,  $\rho_e, \rho_e$  — плотность электронного газа и материала решётки. Преобразуем систему уравнений (2), сложив первое и второе уравнения. В результате получим:

$$\frac{\partial(\rho_i \mathbf{v}_i + \rho_e \mathbf{v}_e)}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m - \frac{m}{e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (3)$$

где общий тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{\sigma}_i - P_e \mathbf{E}$  складывается из тензора решётки, определяемого законом Дюгамеля–Неймана, и давления электронного газа,  $\mathbf{j} = en_e \mathbf{v}_r$ ,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $m$  — его масса,



$\mathbf{v}_r$  — скорость движения электронов относительно решётки,  $n_e$  — концентрация электронов. Уравнение движения (3) в представленной форме совпадает с уравнением движения теории упругости металлов работы [3].

В соответствии с известными результатами число свободных электронов в металле, подверженных тепловому возбуждению, определяется соотношением  $n_e^f = \frac{k\theta_e}{\varepsilon_F} n_e$ , где  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\theta_e$  — температура электронного газа. При высоких температурах оно может быть достаточно большим и его необходимо учитывать при расчёте деформаций. Его влияние на термоакустический сигнал в проводнике определяется разностью температур электронного газа и решётки. Подробный анализ этого влияния на основе двухтемпературной модели представлен в работе [4]. В данной работе мы ограничимся рассмотрением ситуации лазерного воздействия на металл, приводящего к относительно небольшому повышению температуры, при котором  $k\theta_e \ll \varepsilon_F$ , и в дальнейшем везде полагаем  $\theta_e = \theta_i = \theta$ . При таком источнике, частоты рассматриваемых процессов находятся гораздо ниже плазменной (ленгмюровской) частоты, и поэтому допустимо считать, что выполняется условие электронейтральности  $n_e \approx n_i$ , где  $n_i$  — концентрация ионов, откуда следует равенство деформаций решётки и электронного газа. Тогда в уравнении (3) можно пренебречь слагаемым с током по сравнению со слагаемыми, стоящими в левой части. Кроме того, в силу различия плотностей решетки и электронов, в левой части уравнения движения (3) можно пренебречь слагаемым с электронной плотностью и представить его в виде

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m. \quad (4)$$

В соответствии с уравнением (4) для определения деформаций решетки необходимо знать распределение температуры и давления электронного газа в металле. В приближении свободных электронов для последнего справедливо следующее представление

$$P_e = \frac{2}{5} n_e \varepsilon_F + \frac{\pi^2}{6} n_e \varepsilon_F \left( \frac{k\theta_e}{\varepsilon_F} \right)^2. \quad (5)$$

В рамках линейной модели изменение давления может быть представлено в виде

$$\tilde{P}_e = a \tilde{n}_e + b \tilde{\theta}_e, \quad (6)$$

где  $\tilde{\theta}_e = \theta_e - \theta_0$  и  $\tilde{n}_e = n_e - n_0$  — отклонения соответствующих величин от состояния равновесия,

$$a = \frac{2}{5} \varepsilon_F \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{k\theta_0}{\varepsilon_F} \right)^2 \right), \quad b = \frac{\pi^2}{3} \frac{n_0 \varepsilon_F}{\theta_0} \left( \frac{k\theta_0}{\varepsilon_F} \right)^2.$$

Тогда общее реологическое уравнение для среды с учётом равенства температур электронного газа и решётки запишется в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_m = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + ((\lambda + an_0)I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) - ((3\lambda + 2\mu)\alpha_\theta + b)\tilde{\theta})\mathbf{E}, \quad (7)$$

т.е. в идеальном кристалле закон Дюгамеля–Неймана сохраняет свою форму с незначительными поправками на упругий модуль и коэффициент теплового линейного расширения.

Наличие локализованных электронов связано с присутствием в металле дефектов различной природы (андерсоновская локализация) [5, 6]. Подобная ситуация хорошо изучена для полупроводников, в которых продемонстрировано присутствие так называемой «прыжковой» проводимости. В выполненных недавно исследованиях электропроводности плёнок металлов было обнаружено, что для плёнок с сильно разупорядоченной структурой характерны переходы электронов из одного локализованного состояния в другое [7]. В металлах переход локализованных электронов из связанного состояния в свободное может происходить по нескольким механизмам. Например, он может осуществляться активационным образом при повышении температуры дефекта в результате поглощения энергии лазерного импульса. В этом случае некоторые захваченные электроны могут получить энергию, достаточную для переходов из локализованного состояния в состояния вблизи уровня Ферми металла. Свободные электроны при лазерном воздействии также могут появляться в результате разрыва связей между атомами решётки вблизи концентраторов напряжений, концов трещин, границ доменов и т.п. Данный переход, осуществляемый в результате действия температурных и деформационных полей, приводит к изменению давления в электронном газе в зависимости от числа новых свободных электронов. Именно они, как показано в данной работе, осуществляют существенную динамическую зависимость коэффициента линейного теплового расширения от параметров структуры материала. В результате задача сводится к решению системы эволюционных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) &= -\alpha(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), \theta)n_e + \beta(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), \theta)n_{es} \\ \frac{\partial n_{es}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{es} \mathbf{v}_i) &= \alpha(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), \theta)n_e - \beta(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}), \theta)n_{es}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n_{es}$  — концентрация локализованных электронов. Через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначены коэффициенты, зависящие от температуры и шаровой части тензора деформаций, которые определяют интенсивность перехода электронов из одного состояния в другое. Анализ решения нестационарных задач термоупругости качественно хорошо описал экспериментальные факты поведения акустических сигналов в проводниках, а также влияние дефектов на изменение формы сигнала в зависимости от нового операторного вида коэффициента линейного теплового расширения [8].

## Литература

- [1] Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. // Прикладная математика и механика. 1950. Т. 14. №. 3. С. 316–318.
- [2] Вовненко Н.В., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В. Экспериментальные исследования термоупругих напряжений в тепло-и нетеплопроводящих твердых телах при субмикросекундных длительностях лазерного нагрева. // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. №. 6. С. 56–62.
- [3] Конторович В.М. Динамические уравнения теории упругости в металлах. // Успехи физических наук. 1984. – Т.142.–№ 2.– С.265–307.
- [4] Индейцев Д.А., Осипова Е.В. Двухтемпературная модель оптического возбуждения звука в проводниках. // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473. №. 2. С. 154–158.
- [5] Эфрос А.Л. Локализация электронов в неупорядоченных системах (переход Андерсона). // Успехи физических наук. 1978. Т. 126. №.9. С.41–65.
- [6] Lebanon E., Müller M. Memory effect in electron glasses: Theoretical analysis via a percolation approach. // Physical Review B. 2005. V. 72. №. 17. P.174202
- [7] Eisenbach A. et al. Glassy dynamics in disordered electronic systems reveal striking thermal memory effects. // Physical review letters. 2016. V. 117. №. 11. P. 116601.
- [8] Муратиков К.Л., Глазов А.Л. Теоретическое и экспериментальное исследование фотоакустического и электронно-акустического эффектов в твердых телах с внутренними напряжениями. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. №. 8. С. 69–76.

## Академик Дмитрий Евгеньевич Охоцимский — выдающийся механик, основатель научной школы в области динамики космического полета (К 100-летию со дня рождения)

*Боровин Г.Б., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Тучин А.Г.*  
*borovin@keldysh.ru, golubev@keldysh.ru, alexgrush@rambler.ru,*  
*tag@kiam1.rssi.ru*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

*Ключевые слова:* космический аппарат, баллистико-навигационное обеспечение

Исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося русского учёного Дмитрия Евгеньевича Охоцимского. С годами некоторые, казавшиеся важными события, тускнеют и обретают черты ординарности, в то время, когда иные, неочевидные аспекты высвечиваются и, неожиданно, приобретают знаковые

формы. В парадигме развития современной астродинамики эта тенденция не является экстраординарной, а, наоборот, характерна для неё. Вековой юбилей со дня рождения выдающегося сына российского народа — академика Д.Е. Охоцимского — знаковый повод для проведения максимально возможной, уже неконъюнктурной, пожалуй, да и беспристрастной оценки его самоотверженной деятельности на благо Родины, как учёного, и как человека. Современная летопись прорыва человечества в космос немислима без легендарных страниц зарождения и развития нашей, отечественной космонавтики, в которой должны быть адекватно отражены и описаны её основные столпы. Среди них особые, высокотехнологичные ключевые позиции, занимают представители всемирно известного ныне Института прикладной математики РАН: его основатель и бессменный руководитель, академик М.В. Келдыш, и, практически, его правая рука, руководитель крупнейшего его, «космического» подразделения — Пятого отдела академик Д.Е. Охоцимский. В роскошном Историческом здании ИПМ на Миусской площади их кабинеты расположены один над другим. В одном сейчас находится туристическая Мекка астродинамиков со всего мира, от Японии до Франции, — Мемориальный Музей-кабинет М.В. Келдыша, в другом, с глобусами Луны и Венеры, продолжает руководить именитым, «космическим» Пятым отделом, ученик Дмитрия Евгеньевича, один из авторов этого доклада.

Дела не всегда обстояли таким образом. Как писал один из учеников Охоцимского, чл.-корр. РАН Владимир Васильевич Белецкий: «слава Института долгое время носила сугубо локальный характер, так как деятельность Института была жёстко засекречена и об этой деятельности, даже о самом существовании Института, знали только такие же секретные учреждения, с которыми Институт сотрудничал. С течением времени, особенно в эпоху прорыва человечества в космос, деятельность Института стала носить всё более открытый характер и сейчас уже широко известна та роль, какую Институт играл в создании ядерного щита Родины, разработке средств доставки ядерного оружия и, особенно, в космической эпопее» [1]. Подобно «инверсии айсберга», подлинная вершина принятия решений в астродинамике долгое время была скрыта под водой, в то время, когда открытая «надводная» глыба их результатов ошеломительно поменяла историю.

Дмитрий Евгеньевич родился 26 февраля 1921 г. в Москве. В 1939 году он поступил в МГУ на механико-математический факультет. В трудные годы войны, с июля 1941 года он работал на строительстве оборонительных сооружений, участвовал в работе пожарной команды МГУ, работал токарем на одном из московских заводов. Был награждён медалью «За оборону Москвы». В 1942 году Дмитрий Евгеньевич был мобилизован в армию, служил рядовым. После демобилизации с осени 1942 года возобновил учёбу в МГУ. В 1946 году он окончил механико-математический факультет МГУ по специальности «механика». Затем он работал в ЦАГИ и в должности м.н.с. в МИАН им. В.А. Стеклова

СССР, там же поступил в аспирантуру. Окончил её в 1949 году и защитил диссертацию.

Ещё будучи студентом, он был увлечён проблемами движения ракет, с которыми познакомился на семинаре замечательного педагога, учёного и энтузиаста ракетодинамики профессора А.А. Космодемьянского (1909–1988). С 1943 г. А.А. Космодемьянский начал читать в МГУ курс по механике тел переменной массы, а с 1944 г. под его руководством начал работать научно-исследовательский семинар на механико-математическом факультете МГУ, сыгравший значительную роль в подготовке специалистов по ракетодинамике.

В своей книге «Теоретическая механика и современная техника» [2] А.А. Космодемьянский писал: «Думаю, что для некоторых известных в наши дни учёных, интерес к определенным проблемам современной механики зародился в результате работы в научных кружках и семинарах механико-математического факультета МГУ. Я могу назвать, например, следующих товарищей: члены-корреспонденты АН СССР — Д.Е. Охоцимский и Т.М. Энеев, доктора физико-математических наук В.А. Егоров, В.В. Белецкий, В.А. Сарычев ...».

М.В. Келдышу удалось собрать в стенах Института плеяду этих и ряда других блистательных учёных, составивших славу и гордость ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, сделавших этот Институт всемирно известным научным центром, глубоко почитаемым научной общественностью в стране и за рубежом. Ещё раз дадим слово В.В. Белецкому [1]. «Пятидесятые годы — годы подготовки и реализации прорыва в космос — были годами невиданного взлёта инициированных и руководимых М.В. Келдышем научных исследований в институте вообще и в отделе Д.Е. Охоцимского в том числе. Созданный и руководимый Д.Е. Охоцимским отдел в нашем Институте прошёл триумфальный путь научных свершений, которые носят новаторский характер, направлены на решение конкретных научно-технических проблем и выполнены на высочайшем научном уровне. Школа динамики космического полета Келдыша–Охоцимского ныне всемирно известна. . . И по сей день, Школа живет, развивается и зажигает новые звезды на научном небосклоне. . . ». Достаточно указать, уже в контексте текущих крупнейших событий международной космонавтики, на активное участие ИПМ в баллистическом сопровождении международного проекта — полёта рентгеновских обсерваторий КА «Спектр-РГ» в дальнем космосе в окрестности коллинеарной точки либрации Лагранжа системы Солнце–Земля.

Руководимый Д.Е. Охоцимским коллектив непосредственно участвовал в подготовке и осуществлении и первого полёта человека в космос, и первых полётов автоматических аппаратов к Луне и планетам Солнечной системы. Большая часть результатов по проектированию орбит космических аппаратов была реализована в конкретных полётах. Видимо поэтому, направление, на котором действовали сотрудники школы Келдыша–Охоцимского, получило название «прикладная небесная механика».

Воистину эпохальными были первые в мире детальные расчёты эволюции траекторий искусственного спутника Земли. Работа Д.Е. Охоцимского на эту тему с соавторами Т.М. Энеевым и Г.П. Таратыновой [3] была опубликована в год запуска первого искусственного спутника Земли, но за несколько месяцев до этого события. В преддверии космической эры возникали совсем новые задачи, не рассматриваемые или недостаточно рассмотренные в классической, «университетской» динамике твёрдого тела. Дмитрий Евгеньевич уделял большое внимание исследованию возможности и способов использования естественных свойств гравитационного поля для пассивной стабилизации искусственного спутника Земли. Эту идею Охоцимский выдвинул ещё в 1954 году [4]. Много позже (в 1970 г.) Дмитрий Евгеньевич с коллективом исследователей был удостоен Государственной премии за работы в этой области.

В 1958 году Д.Е. Охоцимский защитил докторскую диссертацию, в 1960 был избран член-корреспондентом АН СССР, а впоследствии — академиком РАН. В 1959 г. Д.Е. Охоцимский, без отрыва от основной работы в Институте прикладной математики, стал (по инициативе Н.Г. Четаева) профессором кафедры теоретической механики на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова (на условиях «полставки» — ведь основное место работы у него осталось в ИПМ), а в 1962 г. возглавил эту кафедру и руководил ею до конца своих дней.

По инициативе С. П. Королева и М. В. Келдыша на базе ИПМ был создан баллистический центр (БЦ). Этот БЦ вырос внутри отдела Д.Е. Охоцимского, опирался на мощную поддержку и ресурсы института и успешно выполнял (под руководством чл.-корр. РАН Э.Л. Акима), и ныне выполняет (под руководством его ученика д.ф.-м.н. А.Г. Тучина) ответственные работы по баллистико-навигационному обеспечению полётов отечественных и международных космических аппаратов. Для координации работы баллистических центров трёх ведомств (Министерства обороны, Министерства общего машиностроения и Академии наук) решением руководителей этих ведомств была создана межведомственная Главная баллистическая группа. Созданный под руководством и при непосредственном творческом участии Д.Е. Охоцимского Баллистический Центр ИПМ АН СССР в тесном взаимодействии со смежными организациями более пятидесяти лет успешно выполняет работы по баллистическому обеспечению управления полётом всех автоматических аппаратов «Луна», «Венера», «Марс», предназначенных для исследования Луны и планет, аппаратов «Вега», проводивших исследование кометы Галлея, пилотируемых кораблей «Союз», «Союз-Т», «Союз-ТМ», орбитальных станций «Салют» и «Мир», грузовых кораблей «Прогресс» и др. Для управления полетами космических аппаратов в реальном времени в ИПМ АН СССР создан высокоавтоматизированный интерактивный информационно-вычислительный комплекс. В нынешнее время БЦ ИПМ, после завершения успешнейшего международного проекта «Спектр-Р»,

активно участвует в баллистическом сопровождении полёта международных космических обсерваторий КА «Спектр-РГ» в дальнем космосе.

В начале 70-х годов Дмитрий Евгеньевич Охоцимский занялся сам и нацелил группу своих сотрудников на совершенно новую проблематику — исследование возможности создания роботов с элементами искусственного интеллекта. Имелись в виду не только теоретические исследования, но и создание действующих макетов роботов в «железе» — в сотрудничестве с лабораторией Евгения Андреевича Девянина (Институт механики МГУ), с Институтом проблем передачи информации с другими организациями. Дмитрий Евгеньевич создал семинар по этой тематике в МГУ, подключил к исследованиям студентов, а в своем отделе в ИПМ АН СССР ориентировал на эти работы сектор А.К. Платонова.

За выдающиеся заслуги перед государством и наукой академику Д.Е. Охоцимскому было присвоено звание Героя Социалистического труда, он был награждён двумя орденами Ленина, орденом Октябрьской революции, орденом Трудового Красного знамени, многими медалями, среди которых Дмитрий Евгеньевич особо отмечал медаль «За оборону Москвы». Ему были присуждены Ленинская премия и Государственные премии СССР, Золотая медаль имени М.В. Келдыша и другие правительственные награды. Д.Е. Охоцимский уделял много внимания подготовке молодых научных кадров, как в ИПМ, так и в МГУ, где он возглавлял кафедру теоретической механики и мехатроники. Следует отметить, что, хотя работы Д.Е. Охоцимского были посвящены решению важных проблем науки и техники и имели чёткую прикладную направленность, развиваемые в них методы и предлагаемые пути решения, как правило, выходили далеко за рамки первоначальной постановки и имели определяющее значение для развития небесной механики и методов управления сложными механическими системами.

## Литература

- [1] Белецкий В.В. Шесть дюжин. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 688 с.
- [2] Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П. Успехи физических наук», 1957, Т. 63, №1 а.
- [3] Космодемьянский А.А. Успехи физических наук», 1957, Т. 63, №1 а. Теоретическая механика и современная техника. М.: Просвещение, 1975. 248 с.
- [4] Охоцимский Д.Е., Зонов Ю.В., Токарь Е.Н., Князев Д.А., Лурье А.И. предварительное исследование проблемы создания ориентированного спутника Земли // Отчет Отделения прикладной математики, 1956, 137 с.

**Памяти Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, лауреата Государственной премии Российской Федерации, профессора Петра Евгеньевича Товстика**

*Филлипов С.Б.*

*s\_b\_filippov@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

30 декабря 2020 года всего через два дня после своего 85-летия ушёл из жизни профессор Петр Евгеньевич Товстик, кавалер Ордена почёта, Заслуженный деятель науки РФ, лауреат Государственной премии РФ, премии РАН имени М.А. Лаврентьева, двух Первых университетских премий за научные труды.

Вся его жизнь была неразрывно связана с математико-механическим факультетом Ленинградского, а затем Санкт-Петербургского государственного университета. В 1958 году Петр Евгеньевич с отличием окончил факультет и был оставлен в аспирантуре. После защиты в 1963 году кандидатской диссертации он работал в лаборатории вибраций НИИ Математики и Механики (НИИММ) ЛГУ. Защитив в 1968 году докторскую диссертацию, он стал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической и прикладной механики, с 1978 года и до последних дней своей жизни он заведовал этой кафедрой.

Первые научные исследования, выполненные П.Е. Товстиком в лаборатории вибраций НИИММ под руководством заведующего лабораторией доцента Г.Н. Бухаринова, были посвящены асимптотическому анализу уравнений колебаний винтовых пружин.

В дальнейшем его увлекли сложные задачи теории свободных колебаний тонких оболочек вращения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, содержащими малый параметр. Для решения целого класса таких уравнений Петр Евгеньевич разработал новый асимптотический метод интегрирования. Найденные асимптотические разложения были использованы для определения частот и форм колебаний оболочки вращения. Эти результаты вошли в 1968 году в его докторскую диссертацию. В 1970 году за цикл работ по теории оболочек он был удостоен Первой премии ЛГУ за научные труды. Результаты исследований П.Е. Товстика по теории колебаний оболочек вращения включены в совместную с А.Л. Гольденвейзером и В.Б. Лидским книгу «Свободные колебания тонких упругих оболочек», опубликованную в 1979 году в издательстве «Наука».

В середине 1980-х годов Петром Евгеньевичем был разработан новый асимптотический метод приближенного определения низших частот колебаний и критических нагрузок потери устойчивости некруговых цилиндрических и кони-



ческих оболочек. С помощью этого метода получены простые приближенные решения большого числа задач теории колебаний и устойчивости оболочек, для которых характерна локализация форм колебаний и форм потери устойчивости вблизи так называемых наиболее слабых образующих. Ранее для этих задач были известны лишь отдельные численные результаты. Применению и развитию этого метода посвящены докторские диссертации его учеников Г.И. Михасева и С.Б. Филиппова.

Были изучены и другие виды локализации. В том числе случаи, когда малые вмятины сосредоточены вблизи наиболее слабой точки на срединной поверхности или в окрестности слабо закрепленного края. Основные результаты своих исследований по теории устойчивости оболочек Петр Евгеньевич изложил в монографиях «Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы» (М.: Наука, 1995) и в совместной с А.Л. Смирновым монографии “Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells” (World Scientific, 2001).

В 1998 году за цикл работ «Фундаментальные проблемы теории тонкостенных конструкций» П.Е. Товстик в составе авторского коллектива под руководством А.Л. Гольденвейзера удостоен звания лауреата Государственной премии Российской Федерации в области науки и техники. В том же году П.Е. Товстику присвоено звание «Заслуженный деятель науки РФ».

В нелинейных задачах погрешность теории оболочек возрастает с увеличением деформаций, причём основную неточность вносят соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с деформациями. В работах П.Е. Товстика из трёхмерных уравнений теории упругости выведены уточненные соотношения упругости, при использовании которых погрешность нелинейной теории оболочек имеет порядок безразмерной толщины оболочки. Уточненные соотношения упругости являются новым фундаментальным результатом нелинейной теории оболочек. Они вошли в монографию «Общая нелинейная теория упругих оболочек», изданную в издательстве СПбГУ в 2002 г. (совместно с С.А. Кабрицем, Е.И. Михайловским, К.Ф. Черныхом, В.А. Шаминой). За эту монографию ее авторам в 2002 году присуждена Первая премия СПбГУ за научные труды.

В последние годы внимание Петра Евгеньевича привлекали неклассические задачи статики и динамики тонких оболочек и пластин. К ним относятся задачи устойчивости и колебаний многослойных оболочек и пластин, оболочек и пластин, лежащих на упругом основании, балок, пластин и оболочек, изготовленных из материала с общей анизотропией и др.

Большая серия работ Петра Евгеньевича посвящена исследованию балок, пластин и оболочек, изготовленных из линейно упругого однородного анизотропного материала общего вида, соотношения упругости которого содержат 21 упругий модуль.

Получены двумерные уравнения, описывающие прогиб и поперечные колебания тонкой пластины из линейно упругого однородного анизотропного материала общего вида. Оказалось, что в отличие от ортотропных материалов как гипотезы Кирхгофа–Лява, так и гипотезы Тимошенко–Рейсснера приводят к двумерным моделям, ошибочным в главных членах по отношению к малому параметру тонкостенности, равному отношению толщины пластины к длине волны. Для вывода корректной двумерной модели используется обобщенная гипотеза Тимошенко–Рейсснера. Показано, что в случае преимущественно изгибной деформации построенная двумерная модель является асимптотически точной в главных членах по отношению к малому параметру тонкостенности.

На базе обобщенных гипотез Тимошенко–Рейсснера исследованы свободные колебания и устойчивость под действием однородного внешнего давления тонких упругих цилиндрических оболочек, изготовленных из материала с общей анизотропией. Асимптотическим методом получены приближённые формулы для определения частот и форм колебаний, критического внешнего давления и форм потери устойчивости. Достоверность асимптотических результатов подтверждается численными расчетами методом конечных элементов.

Совместно с академиком Н.Ф. Морозовым решены задачи о свободных колебаниях и устойчивости сжатого трансверсально изотропного пространства, полупространства и трансверсально изотропной сжатой пластины. Особое внимание уделено анализу форм потери устойчивости как самого упругого основания, так и пластины, лежащей на нем. Нелинейный анализ энергии после критической деформации приводит к выводу о реализации шахматной формы потери устойчивости, что соответствует экспериментальным результатам.

Научные интересы П.Е. Товстика никогда не ограничивались исследованиями в области теории оболочек. Долгие годы он руководил многочисленными и разнообразными хозяйственными работами. Удивительная интуиция помогала ему сразу же выделить основные черты изучаемой механической системы и создать для неё адекватную математическую модель. Многие его труды посвящены решению самых разнообразных прикладных задач механики. Отметим здесь только некоторые из них.

В рамках многолетнего сотрудничества с Государственным оптическим институтом выполнен большой цикл работ, связанных с расчётом облегчённых металлических зеркал телескопов. Зеркало телескопа моделировалось кольцевой слоистой пластиной переменной толщины. Основные результаты этих исследований отражены в монографии «Расчёт и оптимизация металлических зеркал телескопов», вышедшей в издательстве СПбГУ в 1997 г. (совместно с С.М. Бауэр, А.М. Ковалевым, М.Б. Петровым, В.В. Тихомировым, М.И. Улитиним, С.Б. Филипповым).

С 1994 года Петр Евгеньевич принимал активное участие в приложении теории оболочек и пластин к проблемам офтальмологии. Предложенные моде-

ли помогают при описании патологических изменений в склере глаза, а также изменения напряженно-деформированного состояния оболочек глаза после хирургических вмешательств. Некоторые результаты, полученные им в этой области, отражены в совместной с С.М. Бауэр и Б.А. Зиминым монографии «Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии» (Издательство СПбГУ, 2000).

В 2013–2015 годах Петр Евгеньевич занимался классической задачей Ишлинского–Лаврентьева о динамическом поведении стержня, сжатого продольной силой. Применение метода двухмасштабных асимптотических разложений позволило исследовать главные и комбинационные резонансы при поперечных колебаниях стержня, вызванных его продольными колебаниями, получить оценку максимальной величины прогиба. Исследован режим биений, связанных с перекачкой энергии продольных колебаний в энергию поперечных, и наоборот. Изучено влияние формы начальных несовершенств на развитие поперечных колебаний. С использованием интегральных преобразований установлена связь наиболее опасных несовершенств с наиболее быстро растущими формами прогиба, установленными в работе А. Ишлинского и М. Лаврентьева. В 2015 г. за серию работ «Динамика стержня при продольном сжатии. Развитие идеи М. А. Лаврентьева и А. Ю. Ишлинского» коллективу авторов в составе Никиты Фёдоровича Морозова, Александра Константиновича Беяева и Петра Евгеньевича Товстика присвоена премия имени М.А. Лаврентьева Российской академии наук за выдающиеся результаты в области математики и механики.

До последних дней Петр Евгеньевич сохранял такой научный потенциал, которому могут позавидовать многие более молодые коллеги. В 2016–2020 годах П.Е. Товстиком опубликовано более 40 научных статей, 27 из которых — в престижных российских и зарубежных журналах, а в 2020 году в CRC Press. Taylor&Francis Group вышла в свет совместная с Г.И. Михасевым монография “Localized Dynamics of Thin-Walled Shells”.

В общей сложности П.Е.Товстику принадлежат более 270 научных публикаций, в том числе 10 монографий. В наукометрические базы Web of Science и Scopus входит около 100 его работ.

В этих работах содержатся постановки актуальных и сложных задач в самом общем виде и изящное их решение с использованием асимптотических методов, в разработку которых Петр Евгеньевич внёс большой вклад. Общие фундаментальные теоретические результаты в его работах неизменно сопровождаются решением конкретных примеров, которые он сам доводил до числа, составив и отладив множество компьютерных программ.

Начиная с 1994 года, П.Е. Товстик постоянно являлся руководителем проектов РФФФ, посвящённых теории оболочек. Основные результаты, полученные по этим грантам неизменно принадлежали ему.

Петр Евгеньевич не жалел времени и сил на своих многочисленных учеников, среди которых 9 докторов физико-математических наук и более 30 кандидатов физико-математических наук. Он щедро делился с ними своими идеями. Петр Евгеньевич создал научную школу по применению асимптотических методов в теории тонких оболочек. Совместно со своими учениками он написал несколько отличных учебников по применению асимптотических методов в механике твёрдых тел.

Петр Евгеньевич стимулировал научный рост сотрудников кафедры, которую он возглавлял 42 года, дольше, чем кто-либо из его знаменитых предшественников. При вступлении в должность заведующего кафедрой он был единственным профессором на ней. За время его заведования на кафедре появились пять профессоров, являющихся её выпускниками. Широта интересов П.Е. Товстика позволяла ему развивать научные направления, которые были на кафедре при Н.Н. Поляхове, возглавлявшем её с 1952 по 1978 год. В 2020 году совместно с проф. М.П. Юшковым он сдал в печать в издательство СПбГУ двухтомный учебник по теоретической механике. Одновременно Петр Евгеньевич является ответственным редактором этого двухтомного учебника. Подготовлен перевод этого учебника на английский язык для издательства Springer, причем выход в свет первого тома намечен на март месяц текущего года.

Петр Евгеньевич всегда вёл большую научно-общественную работу. Он являлся членом Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, экспертом Российского Фонда фундаментальных исследований, главным редактором журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия», председателем специализированного ученого совета по защите докторских диссертаций, председателем секции теоретической механики имени Н.Н.Поляхова Санкт-Петербургского Дома Учёных им. М. Горького РАН, председателем методической комиссии математикомеханического факультета, членом Учёного Совета Санкт-Петербургского университета. Он обладал энциклопедическими знаниями во многих разделах современной механики, что позволяло ему блестяще справляться со всеми его многочисленными обязанностями.

Дверь в его кабинет всегда была открыта для студентов, аспирантов, сотрудников кафедры и факультета. Не отказывал он в консультации и другим людям, которые обращались к нему за помощью. И все они получали чёткие и ясные ответы на свои вопросы.

Петр Евгеньевич награжден орденом Почёта, Почётным знаком «За отличные успехи в работе в области высшего образования СССР» и Почётной грамотой СПбГУ «За педагогическое мастерство и подготовку научных кадров». Следует отметить, что полученные им награды и премии Петр Евгеньевич не считал личной заслугой, а воспринимал их как положительную оценку деятельности всей кафедры.

Петр Евгеньевич был заботливым мужем и отцом двух замечательных дочерей. Его жена Татьяна Михайловна, доцент кафедры статистического моделирования, является соавтором его работ, в которых исследуются случайные воздействия. Созданная ею семейная атмосфера любви и теплоты, постоянная поддержка мужа позволили ему добиться таких выдающихся успехов в науке. Старшая дочь Таня, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, постоянно помогала отцу и является соавтором многих его последних работ. Младшая, Саша, выбрала другой путь и стала художником. На её счету около 30-ти художественных выставок и членство в Творческом союзе художников России.

Петр Евгеньевич был неутомимым путешественником, а Татьяна Михайловна его неизменной спутницей. Началось всё с гор Кавказа, но и в поездках на конференции он стремился подняться на любую гору, которая была в пределах досягаемости. Следующим увлечением стало плавание на байдарке, в том числе и по северным рекам и озерам. Вместе с Татьяной Михайловной он до последних дней совершал многочасовые прогулки по лесам в окрестностях Петергофа. В сфере его спортивных интересов был не только туризм, П.Е. Товстик — заядлый шахматист, кандидат в мастера спорта.

Высокий профессионализм, ответственное отношение к делу и постоянная готовность прийти на помощь снискали Петру Евгеньевичу авторитет и уважение коллег и учеников.

Нам будет очень не хватать Петра Евгеньевича — великого учёного, любимого учителя, человека большого таланта.

Светлая ему память.

## Одномерный и многомерный маятник Капицы

*Морозов Н.Ф.*<sup>1,2</sup> *Беляев А.К.*<sup>1,2</sup> *Кулижников Д.А.*<sup>1</sup>  
*Товстик П.Е.*<sup>1</sup> *Товстик Т.М.*<sup>1</sup> *Товстик Т.П.*<sup>2</sup>

*morozov@nm1016.spb.edu, l3augen@mail.ru, dima.kulizhnikov@mail.ru,*  
*peter.tovstik@mail.ru, tmtovstik@mail.ru, tovstik\_t@mail.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН,  
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
Большой пр. Васильевского острова, 61

*Ключевые слова:* полигармоническое и случайное возбуждение, области устойчивости и притяжения, асимптотическое интегрирование.

Классическая задача Капицы [1, 2] заключается в исследовании динамики невесомого вертикального стержня с точечной массой на конце под действи-

ем вертикальных вибраций основания. Различные обобщения задачи Капицы содержатся в монографии [3], в работах авторов [4]–[6] и др.

Первую группу работ образуют системы с одной степенью свободы, в которых маятник колеблется в одной вертикальной плоскости. Рассматривается гармоническое, полигармоническое и случайное возбуждение. Также рассмотрен маятник с упруго закреплённым нижним концом [4]. Последняя задача моделирует задачи об устойчивости упругого вертикального стержня со свободным верхним концом под действием вибраций основания [5, 6].

Используется метод асимптотического интегрирования [7], согласно которому неизвестные функции представляются в виде суммы

$$y(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) + \varepsilon V(t, \tau, \varepsilon), \quad \tau = \varepsilon t, \quad \varepsilon \ll 1,$$

медленно меняющихся функций  $U$  и малых быстро колеблющихся функций  $\varepsilon V$  с нулевым средним по  $t$  значением. Уравнение нулевого приближения для медленно меняющихся функций  $L(U_0) = 0$  позволяет найти область параметров, при которых нулевое решение устойчиво, а также найти область притяжения вертикального положения. При её построении находим область начального отклонения  $G$ , считая начальную скорость в исходной постановке нулевой ( $\dot{y}(0, \varepsilon) = 0$ ). Оказывается, что  $U'_0(0) = v_0 \neq 0$ , причём величина  $v_0$  зависит от начальной фазы  $\beta$  возмущения  $f(t) = a \sin(\omega t + \beta)$ .

В результате область притяжения оказалась состоящей из двух частей  $G = G_a + G_p$ . В области  $G_a$  сходимости  $U_0(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  имеет место при всех  $\beta$ , а в области  $G_p$  — лишь при некоторых. Эта же особенность области притяжения проявляется и во всех рассматриваемых ниже задачах. При случайном возбуждении функция  $f(t)$  предполагается случайным стационарным процессом, роль начальной фазы играет случайность величины  $f(0)$ , а области устойчивости и притяжения могут быть построены лишь с определенной вероятностью.

Во вторую группу входят системы с двумя и тремя степенями свободы. В общем случае сферического маятника при гармонических вибрациях опоры [8] приводят к достаточно сложному непериодическому движению. Нами рассмотрена более простая задача об устойчивости вертикального положения маятника с учетом сил трения и об области притяжения этого положения. При этом предположение об отсутствии начальной скорости сводит сферическое движение к плоскому. Поэтому предполагается наличие исчезающе малой начальной скорости.

Движение в поле силы тяжести твёрдого тела с неподвижной точкой, которая, в свою очередь, совершает малые высокочастотные гармонические колебания, изучается в достаточно общей постановке. Начальная скорость считается нулевой, учитываются малые силы трения. Приводится система уравнений Эйлера и выведена система уравнений, описывающих медленные движения тела.

Точки покоя этой системы, описывают (в случае их устойчивости) предельные положения, вблизи которых тело совершает малые колебания. Рассмотрен простейший частный случай осесимметричного тела (случай Лагранжа). В общем случае анализ не завершен. Численное интегрирование уравнений Эйлера показало, что во всех рассмотренных случаях с течением времени тело стремится к некоторому предельному положению, вблизи которого оно совершает малые колебания.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 19.01.00280-а, 20-51-S52001 МНТ-а.

### Литература

- [1] Stephenson A. On an induced stability. *Phil. Mag.* 1908. V. 15. pp. 233–236.
- [2] Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физических наук.* 1951. Т. 44. № 1. С. 7–20.
- [3] Блехман И. И. *Вибрационная механика.* М. : Наука. 1994.
- [4] Kulizhnikov D. B., Tovstik P. E., Tovstik T. P. The Basin of Attraction in the Generalized Kapitsa Problem // *Vestnik St.Petersburg University, Mathematics.* Pleiades Publishing, Ltd., 2019. 52(3). pp. 309–316.
- [5] Tovstik T. M., Belyaev A. K., Kulizhnikov D. B., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. On an attraction basin of the generalized Kapitsa's problem // 7th ECCOMAS. Greece. 2019. URL: <https://2019.compdyn.org/proceedings/> (дата обращения: 06.12.2020).
- [6] Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик Р. Е., Товстик Т. М., Товстик Т. Р. Области притяжения в обобщенной задаче Капицы // *Доклады РАН.* 2019. Т. 487. № 5. С. 25–29.
- [7] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М. : Наука. 1969.
- [8] Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // *ПММ.* 1999. Т. 63. № 2. С. 213–219.

## Двухфазные течения газа с частицами в задачах аэродинамики: взгляд учёного и инженера, проблемы и результаты

*Циркунов Ю.М., Панфилов С.В., Романюк Д.А.*

*yury-tsirkunov@rambler.ru, panfilov\_sv@rambler.ru, romanyuk-da@rambler.ru*

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* двухфазные течения «газ-частицы», аэродинамика, газовая динамика, континуально-кинетическая модель, эффекты случайной природы, численное моделирование.

Как известно, полёты самолетов в запылённой атмосфере запрещены международными правилами гражданских перевозок. Тем не менее, такие полёты приходится осуществлять, например, при внезапном извержении вулканов. В настоящее время учёные насчитывают около полутора тысяч опасных вулканов, в год происходит извержение около 50 вулканов. По оценкам вулканологов при извержении особо крупных вулканов в атмосферу может быть выброшено до 5 тыс. кубических километров пепла, который способен подняться на высоту до 30 километров и оставаться в тропосфере и стратосфере долгое время (несколько месяцев). Полёты самолётов могут также осуществляться в приземном слое над пустыней в условиях песчаной бури, при тушении крупных лесных пожаров в условиях сильной задымленности и т.п. Другим примером движения тела в запыленной атмосфере может служить спуск космической капсулы в атмосфере Марса, где время от времени возникают пылевые бури планетарного масштаба. В настоящее время существует программа систематических наблюдений за атмосферой Марса, но гарантированно предсказать отсутствие пылевой бури при подлёте и спуске космической капсулы пока не представляется возможным. При движении летательного аппарата или спускаемой космической капсулы в запыленной атмосфере возникает ряд новых по сравнению с обычной аэродинамикой прикладных и фундаментальных задач, связанных с присутствием в потоке дисперсных частиц примеси. Такие частицы, будучи более инерционными по сравнению с несущим газом, сталкиваются с большой скоростью с поверхностью аппарата [1] и элементами его двигателя (например, в случае турбореактивного или турбовентиляторного двигателя, частицы сталкиваются с лопатками винта, компрессора, стенками проточного тракта и т.п.) [2]. При столкновении частицы могут осаждаться на обтекаемой поверхности, отскакивать от неё, вызывать абразивную эрозию, усиливать теплообмен, влиять на течение несущего газа. Двухфазная среда «газ-частицы» значительно более сложный объект по сравнению с чисто газовой средой, что приводит к большому разнообразию картин течения даже в случае монодисперсной при-



меси [3]. Поведение дисперсной фазы в потоке во многом определяет свойства всего течения. Динамика примеси зависит от таких важных факторов, как её концентрация, инерционность частиц, их форма и разброс по размерам, параметры ударного взаимодействия с обтекаемой поверхностью, шероховатость поверхности, параметры столкновений между частицами.

Необходимо отметить, что при исследовании задач двухфазной аэро- и газодинамики взгляды инженера и академического исследователя на рассматриваемый объект заметно отличаются. С прикладной точки зрения основной целью является определение силового и теплового воздействия двухфазного потока на обтекаемую поверхность, предсказание эрозии поверхности и, как следствие, времени её безопасного функционирования, интенсивность осаждения частиц, выявление определяющих факторов и изучение возможности управления свойствами течения. С точки зрения фундаментальной науки основной интерес представляют те явления в двухфазном потоке, которые собственно и определяют его свойства. Это, прежде всего, взаимодействие несущего газа с частицами, ударное взаимодействие частиц с поверхностью, возможные столкновения частиц между собой в потоке и возникающие здесь коллективные эффекты, влияние примеси на параметры течения несущего газа. Таким образом, предметом исследования академической науки являются «элементарные» процессы и коллективные явления в двухфазной среде, в то время как основной целью прикладных исследований являются функционалы двухфазных течений. Понятно, что прикладные задачи не могут быть решены с достаточной предсказательной точностью без глубокого понимания физических аспектов микро- и макроявлений и создания их адекватных математических моделей.

Классическая теория двухфазных течений [4] основана на ряде довольно сильных допущений: частицы сферические, монодисперсные, столкновения между ними не учитываются, обтекаемая поверхность гладкая, частицы либо поглощаются обтекаемой поверхностью, либо регулярно от неё отскакивают. Однако в реальных течениях эти допущения практически никогда не выполняются, поэтому в последние два с половиной десятилетия значительное внимание исследователей было сфокусировано на развитии тех аспектов теории, в которых учитывались бы «неклассические» эффекты, прежде всего, эффекты случайной природы [5]–[11].

В докладе рассмотрено состояние современной теории течений газа с твёрдыми частицами. Основное внимание уделено наиболее трудным вопросам, связанным с моделированием таких течений: рассеянию частиц несферической формы при их отскоке от обтекаемой поверхности, отскоку частиц от гладкой и шероховатой поверхности, разброс частиц по размерам, столкновения частиц между собой и влияние столкновительной среды частиц на течение несущего газа.

При моделировании обтекания тел падающие частицы отскакивают от обтекаемой поверхности, они могут сталкиваться с падающими и между собой, что приводит к хаотизации движения частиц. Учёт столкновений между частицами существенно усложняет модель двухфазного течения, и здесь очень важным является вопрос о том, при каких параметрах потока, в частности, при какой концентрации примеси следует учитывать столкновения между частицами. Ясно, что если концентрация частиц в невозмущённом потоке исчезающе мала, то столкновения между частицами не будут играть никакой роли. При этом примесь также не будет оказывать и влияния на течение несущего газа. Однако при увеличении концентрации оба эффекта, очевидно, станут существенными и их придётся учитывать в модели течения. В работе [3] показано, что при обтекании затупленных тел потоком газа с достаточно инерционными частицами с ростом их концентрации сначала начинают играть заметную роль столкновения между падающими и отражёнными частицами (уже при объёмной концентрации порядка  $10^{-6}$ ). При этом обратное воздействие примеси на течение газа остаётся несущественным. Оно становится важным с увеличением концентрации на порядок и более. Данный результат позволил развить кинетическую модель столкновительной примеси, движущуюся в известном поле течения газовой фазы [5]. Позже эта кинетическая модель была включена в модель двухфазного течения, в которой учитывались как столкновения между частицами, так и обратное влияние примеси на течение несущей среды [6]. Один фундаментальный вопрос здесь остаётся пока открытым: моделирование парных столкновений частиц в случае, когда они имеют несферическую форму.

Моделирование течений дисперсной фазы, когда сферические частицы распределены случайным образом в невозмущённом потоке и имеется разброс частиц по размерам, в принципе, сравнительно просто в рамках лагранжева описания динамики примеси, и здесь останавливаться на этом вопросе не будем.

Одним из трудных вопросов является ударное взаимодействие частиц с обтекаемой поверхностью. Моделирование такого взаимодействия при небольших скоростях удара (несколько метров в секунду), характерных, например, для пневмотранспорта дисперсных сред, рассматривается в большом числе работ. Однако в задачах движения летательных аппаратов в запылённой атмосфере скорости соударения велики (от нескольких десятков до нескольких сотен метров в секунду). В этом диапазоне скоростей при описании удара приходится опираться на экспериментальную информацию. Наиболее надёжными являются данные по коэффициентам восстановления компонент скорости центра масс частиц. Следует однако отметить, что в работах приводятся средние значения коэффициентов, полученные для большого числа частиц, причём частицы в экспериментах имеют как правило, несферическую форму и заметный разброс по размерам. Эту неопределённость следует иметь в виду при разработке и оценки адекватности модели удара. Наиболее трудной задачей является

создание сравнительно простой модели ударного взаимодействия, не требующей каждый раз численного расчёта удара методами механики твёрдого тела с детальным описанием возникающих упруго-пластических деформаций. Авторами доклада была предложена относительно простая полуэмпирическая модель удара несферических частиц с поверхностью в трёхмерной постановке [7]. Эта модель была основана на уравнениях импульса и момента импульса для отдельной частицы. Для замыкания системы использовались предположения об отсутствии проскальзывания частицы относительно поверхности в процессе удара и о постоянстве коэффициента восстановления нормальной скорости точки контакта для заданного угла падения. Позже эта модель была усовершенствована за счёт учёта возможного проскальзывания частицы относительно поверхности, а также влияния ориентации частицы в момент соударения на параметры отскока [9, 11].

Ещё более трудной задачей является моделирование возникновения и развития шероховатости поверхности при множественных ударах частиц. Влияние рельефа поверхности, полученной в результате её абразивной эрозии в эксперименте, на рассеяние частиц при отскоке исследовано в [7], где показано, что шероховатость может очень сильно влиять на рассеяние отражённых частиц. Позже было показано, что такое рассеяние кардинально изменяет распределение частиц во всей возмущённой области течения.

В докладе приведены примеры численных расчётов стационарных двухфазных течений около тел простой формы [11] и нестационарных течений в системе решёток профилей [12]. Для описания двухфазных течений использовались два подхода: континуально-траекторный и континуально-кинетический. Несущий газ описывался уравнениями Эйлера или Навье–Стокса, численное моделирование осуществлялось с помощью собственного кода, реализующего методы вычислительной гидромеханики. Бесстолкновительное движение дисперсной примеси моделировалось методом Лагранжа. Динамическое поведение столкновительной примеси моделировалось методом Монте–Карло. Представлены как известные, так и совершенно новые результаты, основанные на новой модели отскока несферических частиц от поверхности. Дан анализ роли различных факторов случайной природы при формировании картин распределения частиц в возмущённой области. Определена относительная значимость факторов с точки зрения их влияния на свойства и характеристики рассмотренных течений. Обсуждаются также некоторые трудности экспериментальных исследований задач двухфазной аэродинамики.

Большинство представленных результатов было получено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Последние результаты получены в рамках проекта, получившего грант РФФИ № 20-08-00711.

## Литература

- [1] Majid U., Bauder G., Herdrich M., Fertig M. Two-Phase Flow Solver for Hypersonic Entry Flows in a Dusty Martian Atmosphere. // *J. Thermophysics and Heat Transfer*. 2016. Vol. 30, N 3. pp. 418–428.
- [2] De Giorgi M.G., Campilongo S., Ficarella A. Predictions of Operational Degradation of the Fan Stage of an Aircraft Engine Due to Particulate Ingestion // *J. of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2015. Vol. 137. N 5. 052603. 15 p.
- [3] Tsirkunov Yu.M. Gas-particle flows around bodies – key problems, modeling and numerical analysis // *CD-ROM Proc. 4th Int. Conf. on Multiphase Flow* (Ed.: E. Michaelides). 2001. Paper No. 607. 31 p.
- [4] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [5] Волков А.Н., Циркунов Ю.М. Кинетическая модель столкновительной примеси в запыленном газе и ее применение к расчету обтекания тел // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2000. № 3. С. 81–97.
- [6] Volkov A.N., Tsirkunov Yu.M., Oesterle B. Numerical Simulation of a Supersonic Gas-Solid Flow over a Blunt Body: the Role of Inter-Particle Collisions and Two-Way Coupling Effects // *Int. J. Multiphase Flow*. 2005. Vol. 31. pp. 1244–1275.
- [7] Панфилов С.В., Циркунов Ю.М. Рассеяние несферических частиц примеси при отскоке от гладкой и шероховатой поверхностей в высокоскоростном потоке газозвеси // *Прикладная механика и техническая физика*. 2008. Т. 49. № 2. С. 79–88.
- [8] Моллесон Г.В., Стасенко А.Л. Взаимодействие двухфазной струи и твердого тела с образованием «хаоса» частиц // *Теплофизика высоких температур*. 2013. Т. 51. № 4. С. 598–611.
- [9] Arboleda B.Q., Qadir Z, Sommerfeld M., Beatove S.L. Modelling the wall collisions of regular non-spherical particles and experimental validation // *Proc. of the ASME, FEDSM2014-21610*. 2014. 12 p.
- [10] Амелюшкин И.А., Стасенко А.Л. Взаимодействие потока газа, несущего несферические микрочастицы, с поперечным цилиндром // *Инженерно-физический журнал*. 2018. Т. 91. № 2. С. 307–318.
- [11] Tsirkunov Yu.M., Romanyuk D.A., Panfilov S.V. Two-phase gas-particle flow over bodies: modelling and simulation of random effects // *Proc. 8th European Conf. for Aeronautic and Space Sciences — EUCASS-2019*. 2019. 15 p. DOI: 10.13009/EUCASS2019-455.
- [12] Романюк Д.А., Циркунов Ю.М. Нестационарные двухфазные течения газа с частицами в решетках профилей // *Известия РАН, Механика жидкости и газа*. 2020. № 5. С. 33–45.

## **Г.А. Леонов и его научная школа: от устойчивости движения к анализу скрытых колебаний**

**Кузнецов Н.В.**

*n.v.kuznetsov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,  
Институт проблем машиноведения РАН,  
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
Большой пр. Васильевского острова, 61

*Ключевые слова:* устойчивость движения, стабилизация, динамические системы, аттракторы, теория скрытых колебаний.

23 апреля 2018 г. на 72-м году жизни после тяжелой болезни скончался декан математико-механического факультета СПбГУ, заведующий кафедрой прикладной кибернетики СПбГУ, заведующий лабораторией информационно-управляющих систем Института проблем машиноведения РАН, член-корреспондент РАН, иностранный член Финской академии наук и литературы, доктор физико-математических наук, профессор Геннадий Алексеевич Леонов [1].

Г.А. Леонов — признанный специалист в области теории устойчивости, теории управления, теории синхронизации электромеханических и электронных систем, теории колебаний. Он автор более 470 научных работ, в том числе 22 монографий. Г.А. Леоновым создана всемирно известная научная школа в области математической теории управления и нелинейной динамики, где разработаны новые математические методы и решены трудные математические задачи, важные для создания новых технологий в системах управления, электронных и информационных системах, аэрокосмической технике.

Среди известных теоретических работ Г.А. Леонова в области устойчивости движения и теории управления можно выделить обобщение критериев глобальной устойчивости Барбашина–Красовского и Лурье–Попова для дифференциальных включений и цилиндрического фазового пространства [2]; развитие метода анализа подвижных сечений Пуанкаре для получения критериев устойчивости по Жуковскому и синтеза обратной связи для управления движением механических систем [3]; решение в 2000 году одной из проблем столетия в математической теории управления — проблемы нестационарной стабилизации, которую поставил известный ученый Роджер Брокетт в книге “Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory” в 1999 г. [4].

Для практических задач анализа устойчивости и синтеза управления часто требуются точное определение границ глобальной устойчивости в пространстве параметров, оценка зазора между имеющимися достаточными условиями гло-

бальной устойчивости и необходимыми (линейными) условиями устойчивости, локализация колебательных режимов в фазовом пространстве при нарушении условий устойчивости. Границы глобальной устойчивости в пространстве параметров определяются либо локальными бифуркациями в фазовом пространстве (тривиальные участки границы, для анализа которых хорошо развиты аналитические методы) или нелокальными бифуркациями (скрытые участки границы, связанные с рождением скрытых колебаний) [5]

Среди известных практических задач, решенных Г.А. Леоновым и его учениками в этом направлении, можно отметить исследование причины аварии Саяно–Шушенской ГЭС (в рамках которого, была построена замкнутая нелинейная динамическая модель управления гидроагрегатом, учитывающая совместную работу генератора, турбины, нагрузки и системы управления) [6], проведение строгого анализа глобальной устойчивости и возникновения скрытых колебаний в задаче Андронова–Вышнеградского о нелинейном анализе различных модификаций регулятора Уатта, решение задачи Келдыша о нелинейном анализе систем подавления флаттера [7]; анализ и синтез различных систем управления фазовой синхронизацией [8]; анализ эффекта Зоммерфельда для различных электромеханических систем [9].

Работа выполнена при поддержке программы Ведущие научные школы РФ (проект 2624.2020.1).

## Литература

- [1] Памяти Геннадия Алексеевича Леонова. Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. № 5. Т. 63. С. 701–704.
- [2] Kuznetsov N.V., Lobachev M.Y., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V., Kudryashova E.V., Kuznetsova O.A., Rosenwasser E.N., Abramovich S.M. The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference (ECC). 2020. pp. 769–774. doi:10.23919/ECC51009.2020.9143726.
- [3] Ширяев А.С., Хусаинов Р.Р., Мамедов Ш.Н., Гусев С.В., Кузнецов Н.В. О методе Г.А. Леонова вычисления линеаризации трансверсальной динамики и анализа устойчивости по Жуковскому // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 544–554.
- [4] Leonov G.A., Shumafov M.M. Vibrational stabilization and the Brockett problem // Differential Equations. 2011. Vol. 47. pp. 1853–1915.
- [5] Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и Системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.
- [6] Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Соловьева Е.П. Математическая модель гидротурбины, генератора и системы управления Саяно–Шушенской ГЭС // Доклады академии наук. 2016. № 6. Т. 466. С. 654–659.
- [7] Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations

- of classical theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62. pp. 2454–2464.
- [8] Kiseleva M.A., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Hidden attractors in electromechanical systems with and without equilibria // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. pp. 51–55.
- [9] Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. pp. 1–50.

## Вихревые течения вязкого газа

*Гайфуллин А.М., Жвик В.В., Накрохин С.А.*

*gaifullin@tsagi.ru, vladzhvick@yandex.ru, semen.nakrokhin@phystech.edu*

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,  
140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

*Ключевые слова:* рециркуляционные течения, струи, вихревые трубки.

Рассматриваются несколько задач о течении вязкого газа. Хорошо известна задача об обтекании пластины с движущейся против потока поверхностью. В случае несжимаемой жидкости в зависимости от отношения скорости движения поверхности к скорости набегающего потока реализуются различные режимы: стационарный режим с замкнутой рециркуляционной областью, периодический режим с пульсирующими вихревыми структурами, режим с движущейся против потока вихревой областью. Подобные режимы наблюдаются и в случае сжимаемого газа. Но, к ним при трансзвуковых скоростях набегающего потока добавляется еще один — периодическое течение с интегрально ненулевой подъемной силой по периоду. Знак силы выбирается случайно и зависит от выхода течения на периодический режим.

Известны два типа осесимметричных закрученных струй — с сохранением момента количества движения сквозь сечение струи [1] и с сохранением циркуляции азимутальной скорости по контуру вокруг струи [2]. Обсуждается вопрос о возможности практической реализации таких струй. Если реализация закрученной струи с сохранением момента количества движения не вызывает сомнения, то вопрос о возможности создания струи с сохраняющейся циркуляцией остается открытым.

Исследуется взаимодействие и слияние двух противоположно закрученных струй. В случае ламинарного течения взаимодействие струй приводит к квадрупольному распределению продольной завихренности. При турбулентном течении основную роль при взаимодействии струй играет неустойчивость Гельмгольца.

Процесс растяжения вихревых трубок, наряду с их искривлением, обеспечивает каскадную передачу энергии от больших масштабов в меньшие в турбулентном течении. Растяжение вихревых трубок присуще только трёхмерным

течениям, и, как правило, происходит за счёт внешнего поля скоростей, которое индуцируют другие вихри. Данный процесс рассмотрен на примере двух вложенных друг в друга бесконечных разнонаправленных вихревых решёток. Рассматриваются сценарии взаимодействия вихрей на масштабах сравнимых с колмогоровским и на больших масштабах.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00163.

## Литература

- [1] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [2] Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.

## О локальных координатах в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы

*Бардин Б.С.*

*bsbardin@yandex.ru*

Московский авиационный институт,  
(национальный исследовательский университет),  
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,  
Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
119334, Российская Федерация, Москва, ул. Бардина, 4

*Ключевые слова:* орбитальная устойчивость, гамильтоновы системы, нормальные формы, локальные координаты.

Общий подход к исследованию орбитальной устойчивости семейств периодических движений автономных гамильтоновых систем состоит во введении в окрестности периодического движения локальных координат, что позволяет свести задачу об орбитальной устойчивости к задаче об устойчивости положения равновесия периодической гамильтоновой системы.

В данной работе рассматривается автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы, которая имеет семейство периодических движений, лежащих на инвариантной двумерной плоскости четырёхмерного фазового пространства. Одним из возможных способов введения локальных координат в этом случае является построение канонической замены, позволяющей в области периодического движения на инвариантной двумерной плоскости перейти к переменным действие-угол. Если такую замену удастся построить в явном виде, то в качестве локальных координат, описывающих движение в окрестности



периодической траектории, можно выбрать возмущение переменной действия и возмущения, ортогональные к инвариантной плоскости. Такой подход, в частности, применялся в задачах об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твёрдого тела [1]–[6]. При использовании данного подхода можно столкнуться с рядом технических затруднений, которые состоят как в построении указанной выше канонической замены переменных, так и в получении явных выражений для коэффициентов разложения гамильтониана в ряд в окрестности невозмущенного периодического движения.

Другой метод введения локальных координат был предложен в статье [7]. На основании этого метода локальные координаты вводятся при помощи линейной канонической замены переменных. Данный метод дает возможность обойти упомянутые выше технические затруднения и позволяет решать широкий круг задач об орбитальной устойчивости, но в ряде случаев его применение также может оказаться затруднительным из-за появления сингулярности в коэффициентах соответствующей линейной замены.

В настоящей работе предлагается метод введения локальных координат при помощи построения нелинейной канонической замены переменных. Предложен конструктивный алгоритм построения указанной замены переменных в виде рядов по степеням новых переменных — локальных координат. Данный метод позволяет избежать сингулярности при введении локальных координат и может применяться для исследования орбитальной устойчивости периодических движений как при наличии их аналитического представления, так и в случае, когда периодические движения были найдены численно. Получен явный вид разложения гамильтониана в ряд по степеням локальных координат с точностью до членов четвертого порядка включительно.

В качестве приложения рассмотрена задача об орбитальной устойчивости периодических движений тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Бобылева–Стеклова. Результаты исследования орбитальной устойчивости полностью согласуются с результатами, полученными ранее другим методом в работе [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.

### Литература

- [1] Маркеев А.П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите. // Космич. исслед., 1975, Т. 13, Вып. 3. С. 322–336.
- [2] Markeev A.P., Bardin B.S. On stability of planar oscillations and rotations of satellite in a circular orbit. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2003, Vol. 85, No. 1, pp. 51–66.
- [3] Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской. // *ПММ*, 2001, Т. 65, Вып. 1, С. 51–58.

- 
- [4] Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev-Steklov case. // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. Vol. 17. № 6. pp. 533–546.
  - [5] Bardin B.S., Savin A.A. On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point. // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. Т. 17. № 3–4. pp. 243–257.
  - [6] Бардин Б.С., Савин А.А. Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой. // *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. № 6. С. 806–821.
  - [7] Маркеев А. П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений. // *ПММ*, 2002, Т. 66, Вып. 4, С. 929–928.
  - [8] Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова. // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5. № 4. С. 535–550.

Секция 1

Теоретическая и прикладная  
механика

*Theoretical and Applied  
Mechanics*

## О периодических режимах движения тела с внутренней подвижной массой по шероховатой горизонтальной поверхности в случае анизотропного трения

*Бардин Б.С.*<sup>1,2</sup> *Рачков А.А.*<sup>1</sup>

*bsbardin@yandex.ru, alexey-rachkov@yandex.ru*

<sup>1</sup>Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

<sup>2</sup>Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,

119334, Российская Федерация, Москва, ул. Бардина, 4

*Ключевые слова:* сухое трение, анизотропное трение, периодическое движение, мобильные роботы.

Рассматриваются периодические режимы движения механической системы, состоящей из твёрдого тела (корпуса) и материальной точки, движущейся внутри тела по окружности, центр которой совпадает с центром масс тела. Предполагается, что корпус перемещается по горизонтальной шероховатой поверхности, относительное движение точки происходит в вертикальной плоскости с постоянной по модулю скоростью, а между корпусом и поверхностью действует сила сухого анизотропного трения. Данная механическая система является простейшей моделью мобильного робототехнического устройства — капсульного робота, который перемещается посредством относительного движения внутренних элементов.

Исследованию динамики тел, содержащих внутренние элементы, посвящено множество работ. Библиографию по этому вопросу можно найти в [1]–[3]. Для рассматриваемой механической системы полное качественное исследование динамики было выполнено в случае, когда трение между корпусом и поверхностью является изотропным и описывается классическим законом Кулона [3]–[5]. В работе [6] аналогичное исследование было выполнено в предположении, что на корпус действуют как силы сухого кулоновского, так и силы вязкого трения.

В данной работе были найдены и исследованы следующие периодические режимы движения.

1. Корпус перемещается только в положительном направлении, совершая остановки через равные промежутки времени. После остановки корпус в течение конечного интервала времени находится в состоянии покоя (залипает), а затем продолжает движение.

2. Корпус перемещается как в положительном, так и в отрицательном направлениях, совершая две остановки за время полного оборота внутренней массы по окружности. После каждой остановки корпус остаётся в покое в течение

конечного интервала времени, после которого начинает движение в противоположном направлении.

3. Корпус перемещается как в положительном, так и в отрицательном направлениях, совершая две остановки за время полного оборота внутренней массы по окружности. В момент остановки корпуса после движения в положительном направлении он не залипает, а сразу начинает движение в отрицательном направлении. В случае остановки корпуса после движения в отрицательном направлении он залипнет и через конечный интервал времени начнет движение в противоположном направлении.

4. Корпус перемещается как в положительном, так и в отрицательном направлениях без залипания, совершая две остановки за время полного оборота внутренней массы по окружности. После каждой остановки корпус сразу начинает движение в противоположном направлении.

Интервалы движения и покоя корпуса во всех случаях повторяются периодически, а моментам остановок корпуса соответствуют одни и те же положения внутренней массы на окружности.

Было установлено, что при фиксированном наборе значений параметров системы может существовать только один из перечисленных режимов периодического движения. При любой начальной скорости корпуса его движение либо выходит на периодический режим за конечный промежуток времени, либо асимптотически приближается к нему.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проекта №19-11-00116).

## Литература

- [1] Черноусько Ф. Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс. // ДАН, 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
- [2] Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л. Новые задачи динамики и управления для локомоторных систем без внешних движителей. // В сборнике: Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. 2017. С. 28–39.
- [3] Bardin B. S., Panev A. S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle. // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2016, Vol. 8. pp. 135–141.
- [4] Бардин Б. С., Панёв А. С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности. // Труды МАИ, 2015, Выпуск № 84.
- [5] Bardin B. S., Panev A. S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane. // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, Vol. 14, No. 4, pp. 519–542.

- [6] Бардин Б. С., Панёв А. С. О поступательном прямолинейном движении твёрдого тела, несущего подвижную внутреннюю массу // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019, Т. 65, № 4, С. 557–592.

## Об устойчивости положений равновесия тела с центром масс на главной оси инерции с вибрирующим вдоль наклонной прямой подвесом

*Беличенко М.В.*

*tuzemec1@rambler.ru*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* вибрация, положения равновесия, устойчивость.

Существует множество работ, посвящённых исследованию динамики твёрдого тела, точка подвеса которого совершает вибрации. В монографии [1] было исследовано движение математического маятника, точка подвеса которого совершает произвольные вибрации в плоскости движения. Было показано, что этот случай вибраций сводится к случаю вибраций вдоль наклонной прямой, и рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости положений относительного равновесия маятника. Получено, что плоскость параметров задачи разделяется на две области, в одной из которых существует два положения относительного равновесия, одно из которых устойчиво, а в другой области — четыре положения, два из которых устойчивы. В работе [2] А. П. Маркеева с помощью теории возмущений была получена приближенная автономная система уравнений движения твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса в случае произвольной геометрии масс тела для произвольных периодических или условно-периодических вибраций точки подвеса. В этой системе влияние вибраций на динамику тела представлено в виде дополнительного вибрационного потенциального поля. В рамках этой приближенной системы проведено множество исследований существования и устойчивости частных случаев движения твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса [3]–[5].

В данной работе рассматривается движение тяжёлого твёрдого тела с центром масс на главной оси инерции, точка подвеса которого совершает высокочастотные вибрации малой амплитуды вдоль наклонной прямой. Движение точки подвеса задаётся с помощью двух параметров — угла  $\alpha$  между линией вибраций и горизонталью и среднего значения квадрата скорости точки подвеса за период  $\sigma$ . Выписана приближенная автономная система уравнений движения тела. В рамках этой системы уравнений рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости положений относительного равновесия тела.

Показано, что для всех положений равновесия радиус-вектор центра масс тела располагается в вертикальной плоскости, содержащей линию вибраций, а одна из двух других главных осей инерции тела перпендикулярна этой плоскости. Пространство параметров  $\alpha$  и  $\sigma$  разделено на три области. В первой области равновесие достигается при четырёх качественно различных положениях тела, во второй — при шести, и в третьей — при восьми.

Для полученных положений равновесия выписан гамильтониан возмущённого движения и исследованы необходимые и достаточные условия устойчивости по отношению к пространственным возмущениям. Необходимые условия устойчивости получены в виде условия равенства нулю действительных частей корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущённого движения. Достаточные условия устойчивости найдены в виде отражающем то, что квадратичная часть гамильтониана возмущённого движения положительно определена.

Исследование показало, что достаточные условия устойчивости в первой и второй областях выполняются для одного из четырёх или шести положений равновесия, соответственно, а в третьей области — для двух из восьми. При этом устойчивыми могут быть лишь те положения, при которых момент инерции, отвечающий перпендикулярной к линии вибраций главной оси инерции, больше момента инерции, отвечающего другой главной оси инерции, не содержащей центр масс. Получено, что необходимые условия устойчивости совпали с достаточными.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00116).

## Литература

- [1] Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2016. 308 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=30666409>
- [2] Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика, 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15634409>
- [3] Беличенко М.В., Холостова О.В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика, 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104. <https://doi.org/10.20537/nd1701006>
- [4] Вишенкова Е.А., Холостова О.В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // Вестник Удмуртского университета. Механика, 2017. Вып. 1. С. 98–120. <https://doi.org/10.20537/vm170109>

- [5] Kholostova O.V. On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2020. Vol. 16. № 1. pp. 59–84. <https://doi.org/10.20537/nd200106>

## О движении тетраэдра в центральном поле сил

*Буров А.А.*<sup>1</sup>, *Никонова Е.А.*<sup>2</sup>

*jtm@yandex.ru, nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, 119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2,

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, Российская Федерация, Москва, Мясницкая ул., 20

*Ключевые слова:* конус Штауде, перманентные вращения, твёрдое тело с неподвижной точкой в центральном поле сил, равногранный тетраэдр, теория Рауса.

Изучаются существование и устойчивость установившихся движений в задаче о движении вокруг неподвижной точки твёрдого тела в форме равногранного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил в предположении о том, что равные массы сосредоточены во всех четырёх вершинах такого тетраэдра. Выясняется связь этих движений с изученными ранее в [1] установившимися движениями (перманентными вращениями) правильного тетраэдра в центральном поле сил.

Кроме того, в предположении о том, что равногранный тетраэдр является однородным, изучается обобщённый конус Штауде (ср. [2, 3]) — множество осей его перманентного вращения вокруг центра масс в предположении о центральности поля сил ньютоновского притяжения. В частности, изучается характер вырождения конуса Штауде в случае, когда равногранный тетраэдр стремится к правильному. Также показывается, как уравнения обобщённого конуса Штауде могут быть получены в рамках теории Рауса.

Работа инспирирована публикацией [4], в которой был развит оригинальный подход, позволяющий эффективно учитывать дискретные симметрии в распределении масс при изучении установившихся движений в задачах динамики твёрдого тела с неподвижной точкой.

Как известно, равногранный тетраэдр — тетраэдр, все грани которого равны между собой, но, в общем случае, не являются правильными треугольниками (см., например [5]), — является естественным обобщением правильного тетраэдра и наследует некоторые его геометрические свойства. Естественно ожидать, что такой тетраэдр будет в определённой мере наследовать и динамические свойства правильного тетраэдра.

Рассмотрена задача о существовании перманентных вращений равногранного тетраэдра, подвешенного в его центре масс. Равноудалённость всех вершин,



по предположению содержащих равные массы, от общего центра масс, позволила ввести параметр (ср. [6]), позволяющий единообразно рассматривать как случай, когда размеры тетраэдра много больше расстояния до притягивающего центра, так и случай, когда размеры тетраэдра много меньше расстояния до притягивающего центра.

Для исследования установившихся движений использовано разложение потенциала по введённому параметру вплоть до слагаемых четвёртого порядка малости. Показано, что установившиеся движения образуют семейства, зависящие от параметров, определяющих геометрию тетраэдра, и найденные ранее перманентные вращения правильного тетраэдра принадлежат этим семействам. В частности, показано, что перманентные вращения вокруг бимедиан существуют при любых значениях угловых скоростей. Выполненное исследование с помощью теории Рауса достаточных условий устойчивости перманентных вращений показало, что достаточно неожиданные условия устойчивости, полученные для правильного тетраэдра, остаются справедливыми и для равногранных тетраэдров, близких к правильным.

Для однородного равногранного тетраэдра определено с точностью до членов четвёртого порядка малости разложение потенциала притяжения  $U_N(\gamma)$  в ряд по естественному параметру, определяющему отношение размеров тела к расстоянию до притягивающего центра. Здесь и далее  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$  — единичный вектор, направленный от притягивающего центра  $N$  к точке подвеса  $O$ , заданный в проекциях на оси системы отсчёта  $Ox_1x_2x_3$ , направленные вдоль главных центральных осей инерции.

При стремлении равногранного тетраэдра к правильному все три главные компоненты его центрального тензора инерции стремятся к одному и тому же значению, и поэтому в пределе, в случае правильного тетраэдра, обобщённый конус Штауде вырождается. Однако, если, например, бимедианы равногранного тетраэдра имеют вид  $a_1 = a(1 - a)$ ,  $a_2 = a$ ,  $a_3 = a(1 + a)$ , и безразмерный параметр  $a$  стремится к нулю, то при малых значениях  $a$  обобщённый конус Штауде описывается уравнением

$$S = 0, \quad S = 2\gamma_1^2\gamma_3^2 - \gamma_1^2\gamma_2^2 - \gamma_2^2\gamma_3^2.$$

## Литература

- [1] Суликашвили Р. С. О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 57–66.
- [2] Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // Journ. für reine und angew. Math. 1894. Vol. 118, S. 318–334.

- [3] Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. 128 с.
- [4] Карапетян А. В., Нараленкова И. И. О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // ПММ. 1998. Т. 62, № 1. С. 12–21.
- [5] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. Серия Библиотека математического кружка, выпуск 19. М.: Наука, 1989. 288 с.
- [6] Vashkoviak M. A. On the stability of circular 'asteroid' orbits in an N-planetary system // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1976. Vol. 13. No. 3. pp. 313–324.

## Особые точки механических систем

*Бурьян С.Н.*

*burianserg@yandex.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* особая точка, голономная связь, множители Лагранжа.

В классической механике особенности конфигурационного пространства механической системы связаны с вырождением голономных связей, которые наложены на свободную систему. В типичном случае конфигурационное пространство представляет собой гладкое многообразие  $K$ . Рассмотрим случай, когда на систему наложены  $k$  голономных связей:  $f_j(q) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Уравнения Лагранжа для идеальных голономных связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Уравнения в матричных обозначениях:

$$M(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = Q + C(q)^T \Lambda.$$

Матрица  $C$  составлена из градиентов уравнений связей, множители Лагранжа сгруппированы в общий вектор  $\Lambda$ , матрица  $N = M^{-1}$ . Для нахождения неизвестных сил реакций нужно решить систему уравнений:

$$(CNC^T)\Lambda = h + CN(Q - B). \quad (1)$$

Вектор  $h$  имеет следующие компоненты:  $h_i = \dot{q}^T f_i'' \dot{q}$ . В случае независимых голономных связей матрица  $C$  имеет полный ранг, матрица  $CNC^T$  обратима. В этом случае получаем явное дифференциальное уравнение движения:

$$\ddot{q} = -N(Q - B) + N[C^T(CNC^T)^{-1}C]N(Q - B) + NC^T(CNC^T)^{-1}h. \quad (2)$$

Для случая избыточных или зависимых связей можно доопределить реакции связей в особой точке. Например, можно взять псевдо-обратную матрицу  $(CNC^T)^+$  в уравнении (1).

Предположим, что у системы в  $\mathbb{R}^n$  есть  $n - 1$  голономных связей, и ранг связей падает на 1 в особой точке  $s$ . В этом случае строки матрицы  $CNC^T$  связаны одним линейным ограничением  $u^T(CNC^T) = 0$ . Можно проверить, что векторы в правой части (1) тоже удовлетворяют этому ограничению. Тогда правая часть уравнения (1) всегда лежит в образе матрицы  $CNC^T$ , если скорости и ускорения в особой точке конечные. Силы реакции  $\Lambda$  в особой точке определены неоднозначно, но сумма  $C^T\Lambda$  постоянна. В общем случае векторное поле в (2) не является гладким векторным полем на объемлющем пространстве  $T\mathbb{R}^N$ .

Рассмотрим следующее конфигурационное пространство: объединение двух кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые трансверсально пересекаются в точке  $s$ , где ранг голономных связей падает на единицу,  $k = n - 1$ . Тогда пространство допустимых скоростей  $T_0\Gamma$ , для которых  $C^T\dot{q} = 0$ , в особой точке будет не одномерным, а двумерным. Будем считать, что движение вне особой точки описывается уравнениями Лагранжа. Если механическая система проходит через особую точку, то ее движение такое: сначала траектория движется по фазовому пространству  $T\Gamma_1$ , проходит через поверхность вырождения связей  $T_0\Gamma$  и затем продолжает движение по  $T\Gamma_1$  или по  $T\Gamma_2$ . Через особую точку при нулевой начальной скорости могут проходить две траектории движения.

Предположим теперь, что кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют касание первого порядка в особой точке. Тогда пространство  $T_0\Gamma$  одномерное. Если бы векторное поле, определенное уравнением (2) было бы гладким векторным полем на объемлющем пространстве, то движение на  $T\Gamma$  было бы определено однозначно. Но в особой точке для заданного ненулевого вектора скорости  $\dot{q}_0$  существуют две траектории, проходящие через точку  $(0, \dot{q}_0) \in T\Gamma$ .

Для плоского двойного маятника, свободная вершина которого движется по заданной кривой (эллипсу), получается следующий результат: конфигурационное пространство состоит из двух касающихся кривых. Через особую точку проходят две траектории: одна  $C^2$ -гладкая и одна  $C^1$ -гладкая. В эксперименте получено, что траектория движения на конфигурационном пространстве является только  $C^1$ -гладкой кривой.

Таким образом, зависимость голономных связей в особой точке приводит к тому, что уравнения движения (2) не задают гладкого векторного поля на всем пространстве  $T\mathbb{R}^N$ . Они могут быть доопределены, но неоднозначно. В случае двух кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с общей точкой  $s$  гладкими являются только сужения уравнений (2) на пространства  $T\Gamma_1$  и  $T\Gamma_2$ . Гипотеза состоит в том, что можно геометрически «расширить» фазовое пространство  $T\Gamma$  для того, чтобы разрешить особенность на поверхности вырождения связей  $T_0\Gamma$ .

## Литература

- [1] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1985. 536 с.; М.: Высшая школа, 2000. 592 с.
- [2] Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.
- [3] Закалюкин И. В. Управляемость механических систем вблизи подмножества вырождения неголономных связей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6, с. 23–31.
- [4] Mukharlyamov R.G., Deressa Chernet Tuge. Stabilization of redundantly constrained dynamic system // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2015. №1, с. 60–72.
- [5] Бурьян С. Н. Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т.5(63). Вып. 4. С. 658–669.
- [6] Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the motion of one-dimensional double pendulum // AIP Conference Proceedings 1959, 030004 (2018).

## Моделирование начальной стадии заноса четырёхколесного аппарата при различных условиях взаимодействия колес с опорной плоскостью

*Влахова А.В., Новодерова А.П.*

*vlakhova@mail.ru, an.novoderova@yandex.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* занос колесного аппарата, трение верчения, модель увода, «микст».

Доклад посвящён описанию динамики двухосного четырёхколёсного аппарата (автомобиля, робота и т.д.) на начальной стадии заноса, происходящего при блокировке или пробуксовке колес одной из осей, либо при попадании на «микст» [1, 2] — участок опорной плоскости, содержащий области с разными коэффициентами трения (рассматривается случай, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес), и отысканию алгоритмов, препятствующих его развитию. Исследование уравнений динамики проводится с использованием подходов фракционного анализа (разделения движений), теории возмущений [3, 4], приближённых методов интегрирования дифференциальных уравнений и метода фазовой плоскости. Результаты могут применяться при формировании

программного обеспечения автомобильных тренажёров и средств активной безопасности.

### **Движение аппарата на однородной опорной плоскости.**

Рассматривается задача о блокировке или пробуксовке колес ведущей (передней или задней) оси аппарата в случаях, когда колеса другой оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью или начинают скользить по ней. Предполагается, что опорная плоскость однородна, характеристики сцепления с ней для колес одной оси различаются мало, углы наклона корпуса аппарата малы, и нормальные реакции для колес одной оси принимают близкие значения. В рамках этих предположений динамика аппарата, как и в [4]–[6], описывается велосипедной моделью. Указаны случаи, когда такое движение может привести к заносу аппарата, исследовано влияние на него поворота передних колес. Проведено сравнение моделей движения аппарата, в рамках которых для описания скольжения колес используются модель сухого трения Кулона и модель поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва [7], учитывающая трение верчения в областях контакта колес с опорной плоскостью. Обозначены области применимости полученных результатов.

### **Движение аппарата на «миксте».**

Для описания движений, отвечающих различным условиям взаимодействия колес ведущей оси с опорной плоскостью, используется четырёхколёсная модель аппарата, корпус которой не имеет наклонов, построенная в предположении, что нормальные реакции для колес одной оси принимают близкие значения [1, 2]. Построена математическая модель движения аппарата на «миксте» в случаях, когда передние колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью, а колеса задней (ведущей) оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью или скользят по ней. Исследован быстрый процесс выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси (в случае, когда хотя бы одно из этих колес сохраняет сцепление с опорной плоскостью) и быстрый процесс перехода к постоянному значению угловой скорости выходного вала двигателя (в случае скольжения обоих колес ведущей оси), найдены условия их реализации, даны оценки импульса угловой скорости, получаемого корпусом аппарата после завершения быстрых процессов. Установлена неправомерность использования модели, запрещающей проскальзывание передних колес аппарата в поперечном направлении. Проводится анализ более медленной поперечной и угловой динамики корпуса аппарата на «миксте». Исследовано влияние трения верчения в областях контакта колес с опорной плоскостью [8] на занос аппарата.

### **Литература**

- [1] Влахова А.В., Новодерова А.П. Занос колесного аппарата на «миксте» // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2020. № 5. С. 38–50.

- [2] Новожилов И.В., Павлов И.С., Фрольцов В.А. О поведении автомобиля на «миксте» // Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 61–67.
- [3] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
- [4] Влахова А.В. Математические модели движения колесных аппаратов. М. Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2014. 148 с.
- [5] Влахова А.В., Новодерова А.П. О влиянии моментов трения вращения на занос колесного аппарата // Фундамен. и прикл. математика. 2018. Т. 22. Вып. 2. С. 117–132.
- [6] Влахова А.В., Новодерова А.П. Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 23–49.
- [7] Андронов В.В., Журавлёв В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: Ин-т космич. исслед., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 184 с.
- [8] Расајка Н.В. Tyre and vehicle dynamics. Warrendale, PA. Soc. Automotive Eng., 2005. 621 p.

## Динамика стопоходящей машины Чебышёва с ветроприводом

*Гарбуз М.А., Климина Л.А.*

*misha-garbus@yandex.ru, klimina@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* стопоходящая машина Чебышёва, ветротурбина, стационарное движение.

Задача построения шарнирного механизма, преобразующего движение по окружности в приближенное к прямолинейному, стояла со времён разработки паровых машин. Один из наиболее элегантных вариантов решения этой задачи был предложен Пафнутием Львовичем Чебышёвым. Это плоский трёхзвенный механизм, состоящий из кривошипа, шатуна и рычага, который стал известен как  $\lambda$ -механизм. Нижние концы кривошипа и шатуна шарнирно закреплены на раме. Центр рычага шарнирно соединён со свободным концом шатуна, а один из концов рычага соединён со свободным концом кривошипа. На основе  $\lambda$ -механизма Чебышёв сконструировал первую в мире стопоходящую машину, которую представил на всемирной выставке в Париже в 1878 году [1].

В ряде работ рассматривается возможность конструирования робототехнических систем на основе стопоходящей машины Чебышёва, (например, [2]).

В настоящей работе рассмотрим шагающий механизм, состоящий из машины Чебышёва и пропеллерной ветротурбины, который может перемещаться за

счет энергии ветра. Будем рассматривать движение, при котором центр масс системы перемещается против потока.

Отметим, что шагающие машины, перемещающиеся за счет энергии потока, были предложены Тео Янсенем. Его машины основаны на кинематической схеме, существенно отличающейся от  $\lambda$ -механизма, и предназначены для перемещения в направлении, перпендикулярном потоку (подробнее, например, в [3]).

Рассматриваемая механическая система состоит из стопоходящей машины Чебышёва и пропеллерной ветротурбины, установленной на корпусе машины, так что плоскость пропеллера ортогональна направлению движения корпуса. Вал турбины соединен с кривошипами  $\lambda$ -механизмов ног машины посредством редуктора с коэффициентом  $k$  передачи. Стопоходящая машина перемещается по абсолютно шероховатой горизонтальной поверхности и находится в потоке ветра, направленном параллельно линии движения корпуса.

Пренебрегаем возможными отклонениями «голеней» (звеньев, на которых закреплены «стопы» машины) от вертикали. Показано, что в моменты смены опорных ног скорости всех четырёх «стоп» нулевые. Таким образом, система имеет одну степень свободы.

Активные силы, действующие на систему, представлены аэродинамическим воздействием на пропеллер, а также сопротивлением корпуса и описываются на основе квазистатической модели [4, 5].

Уравнения движения системы получены на основе формализма Лагранжа.

На установившемся движении наблюдается баланс между обобщенной силой, которая соответствует аэродинамическому моменту, действующему на ветротурбину, и обобщенной силой, отвечающей лобовому сопротивлению пропеллера и корпуса. За счет выбора коэффициента  $k$  передачи (в механизме редуктора, передающего вращение вала турбины на кривошипы ног) можно обеспечить желаемое соотношение между виртуальными перемещениями, соответствующими каждой из указанных обобщенных сил. Тем самым можно добиться существования установившегося режима, при котором корпус движется против ветра за счет энергии ветра.

Подобный результат о существовании режима движения против потока в модели мобильного устройства, оснащенного ветроустановкой, ранее был получен для колесной машины в работе [6], а также для водного транспортного средства в [7].

Научное исследование проведено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-31-20029.

## Литература

- [1] Чебышёв П. Л. Избранные труды. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1955. 929 с.

- [2] Павловский В. Е. О разработках шагающих машин // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. 2013. № 0. С. 101–32.
- [3] Фомин А. С., Киселев С. В., Олексенко А. В. Структурный анализ механизма Янсена // Вестник Сибирского государственного индустриального университета. 2017. № 4 (22). С. 51–53.
- [4] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
- [5] Досаев М. З., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О динамике малой ветроэлектростанции // ДАН. 2007. Т. 416. № 1. С. 50–53.
- [6] Klimina L., Dosaev M., Selyutskiy Yu. Asymptotic Analysis of the Mathematical Model of a Wind-powered Vehicle // Applied Mathematical Modelling. 2017. V. 46. P. 691–697. doi: 10.1016/j.apm.2016.06.022
- [7] Garbuz M. A., Holub A. P., Klimina L. A. The modeling of the catamaran equipped with the wind turbine // 2018 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). Moscow, 2018. P. 1–2. doi: 10.1109/STAB.2018.8408355

## Моделирование движения колёсной машинки по поверхности воды

*Голуб А.П., Самсонов В.А.*

*holub.imech@gmail.com*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* гидродинамика, качение по воде, квазистатический подход.

Исследуется движение колёсного объекта по поверхности воды [1]. Возможность качения по воде позволяет получить ряд преимуществ по сравнению с глиссерами и судами на подводных крыльях: увеличить скорость движения надводных судов и уменьшить расход топлива. Кроме того, они являются амфибиями, то есть могут двигаться по суше и мелководью с высокой скоростью. Это заставляет подумать о практическом использовании этой идеи и объясняет интерес к вопросам определения гидродинамических сил, возникающих при качении по поверхности воды [2].

В работе исследуется взаимодействие колёс машинки с водой, сопротивление воздуха не учитывается. При соприкосновении колёс с водой на машинку действуют сила сопротивления и подъёмная сила, зависящие от глубины погружения и скорости машинки. В то же время скорость машинки зависит от тяги колёс, которая зависит от угловой скорости их вращения. Определяется диапазон значений параметров, при котором машинка будет ехать по поверх-



ности воды, а не тонуть. Для описания подъёмной силы и силы сопротивления используется квазистатический подход [3].

Также рассматривается приближенная теоретическая модель механической системы, использующаяся при определении силы тяги в задаче о движении колёсной системы с грунт-зацепами по поверхности воды. Для определения тяги колёс используется формула:

$$F = 0.5\rho kb(0.5y_1(1 - \operatorname{sgn}(y_1))0.5(1 + \operatorname{sgn}(l + y_1)) + 0.5l(1 - \operatorname{sgn}(l + y_1)))(\omega r - v)^2.$$

Здесь  $\rho$  — плотность воды,  $k$  — коэффициент, определяющий часть зацепов, находящихся в воде,  $b$  — ширина колеса,  $r$  — радиус колеса (учитывая длину зацепа),  $l$  — длина зацепа,  $y_1$  — координата нижней части зацепа,  $\omega$  — угловая скорость вращения колёс,  $v$  — линейная скорость машинки. В данной формуле учитывается глубина погружения машинки. Если машинка погружена в воду более глубины зацепа, то считается тяга полностью погруженного зацепа, если машинка погружена на глубину, меньшую, чем  $l$ , то считаем тягу от погруженной части, если же машинка выходит из воды, то тяга нулевая. Считается, что скорость конца колеса больше, чем линейная скорость машинки, иначе движение по поверхности воды будет невозможно.

Проведен анализ действующих сил и рассмотрен ряд предельных случаев, позволяющих определить силу тяги. Приведена зависимость безразмерного коэффициента тяги от безразмерного параметра, равного отношению абсолютных скоростей грунт-зацепов колёс и надводной части модели. Дана оценка применимости данного подхода к задаче о движении машинки по поверхности воды.

Работа выполнена при поддержке научной школы МГУ «Математические методы анализа сложных систем».

## Литература

- [1] Boyko A. V., Golub A. P., Yeroshin V.A., Samsonov V. A. Hydrodynamics of new high-speed surface systems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. doi: 10.1088/1742-6596/1666/1/012008
- [2] Ерошин В. А., Бойко А. В. Новые тенденции в гидродинамике скоростных надводных систем // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019. Том 20, № 1.
- [3] Голуб А. П., Селюцкий Ю. Д. Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Том 196, №6, С. 380–386

## Математическое моделирование контактного взаимодействия деформируемого колеса и дороги

*Гусак Г.В.*

*g\_gusak@mail.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* деформируемое колесо, стержневой протектор, силы в пятне контакта, проскальзывание.

Работа посвящена аналитическому описанию статического и динамического взаимодействия деформируемого колеса и недеформируемой дороги.

Понимание механизмов контактного взаимодействия колеса и дороги важно с точки зрения повышения безопасности и экономичности колесных транспортных средств. Сохранение сцепления в пятне контакта и недопущение перехода в режим заноса является критически важным для управляемости и безопасности движения транспортного средства. Нежелательное проскальзывание в зоне контакта приводит также к преждевременному износу колёс. Качество сцепления с дорогой определяется распределением и величиной реакций, возникающих в контактной области. Для расчёта и анализа этого и других параметров контактного взаимодействия с целью последующего совершенствования конструкции колёс и уменьшения их подверженности негативным динамическим эффектам учёными разработаны различные математические модели [1].

Так называемые «щёточные» модели [1, 2] основаны на математическом описании простого физического аналога деформируемой периферии колеса — представления её в виде набора деформируемых стержней или пружинок. Значительное упрощение представления периферии колеса относительно реального необходимо, чтобы, с одной стороны, математическое описание не было слишком громоздким и могло применяться при моделировании динамики транспортных средств, а с другой, отражало бы такие важные аспекты как сопротивление качению, частичное или полное скольжение в пятне контакта, зависимость силы трения от относительного проскальзывания и другие.

В настоящей работе используется представление колеса в виде абсолютно твёрдого диска и деформируемого протектора, образованного множеством радиально расположенных упругих стержней [3]–[5]. Взаимодействие элемента протектора и дороги описывается в рамках модели сухого трения Кулона. Деформации колеса определяются как совокупность деформаций элементов протектора. Сначала рассматривается дискретная модель с конечным числом стержней, затем осуществляется переход к непрерывной модели протектора. Стержневой протектор служит моделью среды, поглощающей энергию и обуславливающей сопротивление качению.

Границы области контакта, участков сцепления и проскальзывания внутри нее, величины и направления сил реакции считаются заранее неизвестными и определяются в ходе исследования в зависимости от приложенных к диску колеса нагрузок, жесткостных и геометрических характеристик протектора, трения с дорогой.

Сначала рассматриваются задачи о статическом нагружении колеса вертикальной и горизонтальной силами, крутящим моментом. Конструктивные отличия предлагаемой модели [3]–[5] от известных щёточных моделей [1, 2] позволяют уменьшить количество используемых гипотез. Так, в предшествующих моделях распределение вертикальных реакций в контактной области считалось заданным (линейным или параболическим), а в новой модели оно рассчитывается в зависимости от характеристик протектора и условий трения с дорогой. Также с помощью новой модели получено аналитическое обоснование изменения картины распределения вертикальных реакций в зоне контакта в зависимости от типа внешних усилий, прикладываемых к диску колеса. Приложение к колесу помимо вертикальной нагрузки (веса) дополнительного крутящего момента вызывает смещение равнодействующей вертикальной реакции в переднюю часть зоны контакта, а приложение дополнительной горизонтальной силы приводит к смещению равнодействующей вертикальной реакции в заднюю часть зоны контакта.

Далее, в рамках исследования динамики выводятся уравнения движения деформируемого колеса с учётом проскальзывания в зоне контакта. Изучается стационарный режим движения, при котором линейная и угловая скорость колеса остаются постоянными. Определяются условия, необходимые для поддержания заданного стационарного режима движения. Анализируется зависимость горизонтальной реакции в контактной области от относительного проскальзывания колеса и дороги.

## Литература

- [1] Pacejka H. V. *Tyre and Vehicle Dynamics*. L.: Elsevier. 2005. 621 p.
- [2] Новожилов И. В. *Фракционный анализ*. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
- [3] Вильке В. Г., Гусак Г. В. Об одной модели армированной шины со стержневым протектором // *ПММ*. 2011. Т.75. Вып.3. с. 435–448.
- [4] Гусак Г. В. Силы реакции при статическом нагружении колесной пары с развалом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*. 2018. №4. с. 40–47.
- [5] Гусак Г. В. Гистерезисные потери при нагрузке-разгрузке колеса со стержневым протектором // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика*. 2020. №2. с. 28–34.

## Поиск оптимального пути между точками на плоскости при наличии неподвижных обнаружителей и заданном ограничении на длину пути

Галаев А.А.<sup>1,2</sup> Самохин А.С.<sup>1,2</sup> Самохина М.А.<sup>1,2</sup>  
galaev@ipu.ru, samokhin@ipu.ru, ph@ipu.ru

<sup>1</sup>Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,  
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65,  
<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* оптимальное управление, конфликтная среда, поиск пути, численные методы, материальная точка, уклонение.

В работе рассматривается задача оптимизации траектории уклоняющегося объекта (УО) на плоскости. Начальное и конечное положение УО задано точками. Конфликтная среда представлена конечным набором сенсоров — неподвижных обнаружителей, расположение которых известно УО. Предполагается, что поля обнаружения равномерные круговые с неограниченным радиусом действия. Данная задача актуальна в связи с повышенным интересом в последние годы к охране территорий автоматизированными средствами.

Задача формализуется как задача оптимального управления в понатригинской форме. УО представляет собой материальную точку и управляется вектором скорости. Задача решается в предположении заданного времени перехода из точки в точку с ограничением на максимальную скорость УО и общую длину пути, а также разными коэффициентами влияния различных сенсоров. УО минимизирует функционал риска своего обнаружения.

В работе разрабатывается методика решения полученной задачи оптимизации. На основе принципа максимума решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи. Краевая задача решалась численно с использованием модифицированного метода Ньютона. Возникающие задачи Коши интегрировались методом Рунге–Кутты с автоматическим шагом. Авторами был разработан соответствующий программно-аппаратный комплекс [1, 2].

При численном решении метод Ньютона запускался из узлов сетки пространства параметров пристрелки задачи и сходил к каждой локально-оптимальной траектории десятки раз. Траектории с полными оборотами вокруг сенсоров отбрасывались. Из каждого семейства близких экстремалей выбиралась одна траектория.

В результате решения задачи была проведена классификация путей для различного числа и различных конфигураций обнаружителей. Построены графики траекторий, проведены параметрические исследования.

Задача допускает развитие: рассмотрение более сложных полей обнаружителей, рассмотрение трёхмерной задачи, рассмотрение подвижных детекторов вместо неподвижных обнаружителей, рассмотрение обратной задачи наилучшего противодействия УО.

## Литература

- [1] Самохин А. С., Самохина М. А. Решение задачи Коши многомерным методом Рунге-Кутты, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 8(7), с автоматическим выбором шага. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020611811, 11.02.2020.
- [2] Самохина М. А., Самохин А. С. Поиск оптимального пути между точками на плоскости в конфликтной среде при наличии одного сенсора. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020611810, 11.02.2020.

## Оптимизация демпфирования колебаний линейного осциллятора по временному критерию

*Дегилевич Е.А.<sup>1</sup>, Смирнов А.С.<sup>1,2</sup>*

*degilevichegor@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>1,2</sup>Институт проблем машиноведения РАН,  
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
Большой пр. Васильевского острова, 61

*Ключевые слова:* колебания, осциллятор, демпфирование, оптимизация.

Задачам пассивного и активного подавления колебаний различных механических систем посвящено большое количество работ [1, 2]. Наиболее часто в качестве критерия оптимизации в подобных задачах выступает максимизация степени устойчивости [3], однако используются и другие критерии, например, интегральный энерго-временной показатель качества и локальный критерий, основанный на максимизации средней мощности потерь механической энергии [4]. Тем не менее, на этом возможности конструирования критериев оптимизации не исчерпываются. В настоящей работе предлагается еще один критерий качества, который характеризует эффективность процесса гашения колебаний и основан на минимизации временных характеристик затухания этого процесса.

Рассмотрим простейшую линейную механическую систему – диссипативный осциллятор с вязким трением. Положим, что его масса равна  $m$ , жёсткость пружины равна  $c$ , а демпфирующие свойства характеризуются диссипативным

коэффициентом  $b$ . Поставим вопрос: как осуществить наилучший выбор этого коэффициента по указанному критерию? С этой целью запишем уравнение движения рассматриваемого осциллятора [5]:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — обобщённая координата,  $k = \sqrt{c/m}$  — частота колебаний при отсутствии трения,  $n = b/(2m)$  — фактор затухания. Решение уравнения (1) удобно записать в комплексной форме:

$$x(t) = e^{-nt} (Ae^{ik_1t} + Be^{-ik_1t}), \quad (2)$$

где обозначено  $k_1^2 = k^2 - n^2$ , а константы интегрирования  $A$  и  $B$  являются комплексными, причем из условия вещественности  $x$  следует, что  $B = \bar{A}$ . При этом  $k_1$  может быть как вещественной, так и мнимой величиной. Принимая во внимание начальные условия  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$ , находим

$$A = \frac{x_0(ik_1 + n) + \dot{x}_0}{2ik_1}, \quad B = \frac{x_0(ik_1 - n) - \dot{x}_0}{2ik_1}. \quad (3)$$

Начальные условия удобно задать на фазовой плоскости  $(x_0, \dot{x}_0/k)$  как

$$x_0 = \rho \cos \mu, \quad \dot{x}_0 = k\rho \sin \mu, \quad (4)$$

т. е. через их полярные координаты  $\rho$  и  $\mu$ , где  $\rho \in [0, \infty)$  характеризует начальный уровень энергии осциллятора, а  $\mu \in [0, 2\pi)$  характеризует соотношение между начальными условиями. После подстановки (2), (3) и (4) в выражение для полной механической энергии осциллятора

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 \quad (5)$$

оно преобразуется к следующему виду:

$$E = \frac{E_0 e^{-2nt}}{k_1^2} [k^2 + kn \sin 2\mu - n(n + k \sin 2\mu) \cos 2k_1t + k_1n \cos 2\mu \sin 2k_1t], \quad (6)$$

где использовано, что начальный уровень энергии есть  $E_0 = mk^2\rho^2/2$ . Ясно, что теоретически время затухания колебаний в линейной модели является бесконечным. Однако на практике естественно считать, что процесс подавления колебаний завершен, если какая-либо величина, характеризующая движение системы, понизится до такой степени, что войдет в некоторый коридор (обычно  $3 \div 5$  %-ный) от ее начального значения. В данной задаче естественно в качестве такой величины принять именно энергию  $E$ . Обозначая время вхождения в этот коридор за  $T$  и считая его ширину равной  $\alpha E_0$ , а также вводя

безразмерное время  $\tau = kT$  и безразмерный диссипативный параметр  $\nu = n/k$ , получим из (6) следующую неявную зависимость  $\tau = \tau(\nu, \mu)$ :

$$\frac{e^{-2\nu\tau}}{1-\nu^2} [1 + \nu \sin 2\mu - \nu(\nu + \sin 2\mu) \cos(2\tau\sqrt{1-\nu^2}) + \nu\sqrt{1-\nu^2} \cos 2\mu \sin(2\tau\sqrt{1-\nu^2})] = \alpha. \quad (7)$$

Будем действовать по принципу гарантированного успеха, т. е. определим наилучшее значение  $\nu$  по критерию минимума времени  $\tau$  для наихудшей совокупности начальных условий, задаваемой параметром  $\mu$ . Эта задача сводится к нахождению  $\min_{\nu>0} \max_{\mu} \tau(\nu, \mu)$ , т. е. к процедуре отыскания минимакса функции  $\tau(\nu, \mu)$ , которую несложно решить численными методами. Так, для  $\alpha = 0.03 \div 0.05$  получим, что  $\nu_* = 0.68 \div 0.69$ . Подчеркнем, что данные значения не сильно расходятся с оптимальными параметрами демпфирования, полученными по другим критериям качества [4].

## Литература

- [1] Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
- [2] Смирнов А.С., Смольников Б.А. Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 3 (52). С. 8–15.
- [3] Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. 312 с.
- [4] Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
- [5] Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

## Движение твёрдых тел по горизонтальной плоскости, опирающихся на канонические области контакта с учётом согласованного анизотропного трения

*Дмитриев Н.Н.*

*dn7@rambler.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* анизотропное трение, динамика систем с трением.

Изучение влияния анизотропного трения на движение твёрдых тел активно началось в середине XX века. При этом сам факт зависимости сил трения

от направления скольжения был замечен достаточно давно, например, трение вдоль и поперек волокон древесины. Кроме того, в работах [1, 2] введено понятие динамически согласованного трения, согласно которому при движении твёрдого тела с плоским основанием предполагается, что угловая скорость тела перпендикулярна плоскости опоры и должны выполняться общие теоремы динамики, записанные относительно осей, проходящих через центр масс тела. Поэтому представляется целесообразным изучить влияние анизотропного трения на динамику движения тела при учете концепции динамически согласованного трения.

Следуя указанным работам и [3], считаем, что давление распределено по закону

$$p = p_0 + p_1\xi + p_2\eta \quad (1)$$

где координаты  $\xi$  и  $\eta$  откладываются по соответствующим осям системы координат, связанной с площадкой контакта. Кроме того, полагаем, что проекция центра масс тела на плоскость контакта совпадает с центром площадки контакта. Через центр масс, находящийся над плоскостью опоры, на расстоянии  $h$  проведем оси параллельно осям  $\xi$  и  $\eta$  и обозначим их через  $C\xi'$ ,  $C\eta'$ . Для определения коэффициентов  $p_0, p_1, p_2$  в (1) составляются уравнения, соответствующие равенству нулю моментов сил трения и реакций опоры относительно осей  $C\xi'$ ,  $C\eta'$  и равенству силы реакции опорной плоскости силе тяжести твердого тела. Так как сила трения в рассматриваемых задачах обладает анизотропными свойствами, то при составлении указанных уравнений необходимо учитывать ориентацию площадки контакта относительно осей, связанных с плоскостью скольжения, в которых определен закон анизотропного трения. В общем случае коэффициенты  $p_0, p_1, p_2$  являются функциями  $\beta = v_0/\omega$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ , где  $v_0$  и  $\omega$  — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно,  $\vartheta$  — угол, определяющий направление скорости центра масс тела, относительно системы координат, связанной с плоскостью скольжения,  $\varphi$  — угол, задающий относительную ориентацию подвижной и неподвижной систем координат,  $f_x, f_y$  — компоненты тензора трения.

Когда плотность давления (1) определена, появляется возможность найти проекции силы трения на оси координат и момент трения на движущиеся твердое тело, и записать дифференциальные уравнения движения центра масс тела в проекциях на неподвижные оси и проекцию теоремы об изменении кинетического момента на ось, проходящую через центр масс перпендикулярно плоскости скольжения:

$$m\ddot{x} = T_x, \quad m\ddot{y} = T_y, \quad J_{Cz}\ddot{\varphi} = M_{Cz} \quad (2)$$

или на оси естественного трёхгранника, связанного с центром масс тела:

$$m\dot{v} = T_\tau, \quad mv\dot{\vartheta} = T_n, \quad J_{Cz}\ddot{\varphi} = M_{Cz} \quad (3)$$



Здесь  $m$  — масса твёрдого тела,  $J_{Cz}$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости скольжения,  $M_{Cz}$  — момент сил трения относительно этой же оси,  $T_x, T_y, T_\tau, T_n$  — проекции силы трения на оси неподвижной системы координат или на тангенциальную и нормальную оси естественного трёхгранника.

Подчеркнем, что плотность давления, проекции сил трения на оси и момент трения вычисляются для конкретных параметров состояния системы, т.е. для значений  $\beta = v_0/\omega, \vartheta, \varphi$  в данный момент времени. Изучение финального этапа движения твёрдого тела проводилось методами, описанными в работах [4]–[6].

В проведенном исследовании показано, что при опоре на круговую и кольцевую области при движении по инерции параметры финального движения зависят от момента инерции твёрдого тела относительно оси, перпендикулярной плоскости скольжения, соотношения между коэффициентами трения вдоль осей декартовой системы координат и расстояния до центра масс от плоскости скольжения. Если опора тела на плоскость происходит на эллиптическую или прямоугольную площадку, то финальные кинематические характеристика движения зависят от угла  $\varphi_*$  [6, 7].

## Литература

- [1] Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 189–203.
- [2] Иванов А.П. Основы теории систем с трением. Ижевск: Ижевский ин-т компьютер. исслед., РХД, 2011. 304 с.
- [3] Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. М.: Изд. иностр. лит., 1951. 478 с.
- [4] Розенблат Г.М. Динамические системы с трением. Москва-Ижевск: Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 204 с.
- [5] O. Silantyeva, N. Dmitriev. A study of sliding motion of a solid body on a surface with asymmetric friction // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik 2018, 98(7), с. 1210–1223
- [6] Дмитриев Н. Н., Хан Х. Скольжение узкой прямоугольной пластины по горизонтальной плоскости с асимметричным ортотропным трением при равномерном распределении давления // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 6. С. 790–802
- [7] Дмитриев Н.Н. Силантьева О.А. Финальное движение тонкой эллиптической пластины по горизонтальной плоскости с ортотропным трением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 1. С. 164–172.

## К вопросу о движении спутника Земли после фиксирования величины его ускорения как к задаче с неголономной связью третьего порядка

*Додонов В.В., Козлова А.С.*

*v\_dod@mail.ru, askozlova@outlook.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* неголономная связь, связи высокого порядка, движение спутника, постоянное ускорение, программа движения, обобщенный принцип Гаусса.

Кафедра теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ на протяжении многих лет проводит исследования движения неголономных систем со связями высокого порядка. Результаты этой работы отражены в монографиях [1, 2]. Среди этих исследований большое внимание уделялось движению спутника Земли после фиксирования величины его ускорения в заданный момент времени, что эквивалентно наложению нелинейной неголономной связи второго порядка или линейной неголономной связи третьего порядка. Такая задача была сформулирована как один из первых примеров движения реальных механических систем при наложении связи высокого порядка и была опубликована в статьях [3, 4].

Для решения такой задачи используются две разные теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. По первой теории составляются три дифференциальных уравнения относительно полярных координат спутника  $r, \varphi$  и обобщенной управляющей силы  $\Lambda$ . Тогда спутник движется между двумя концентрическими окружностями. В случае применения второй теории решения подобных задач применяется обобщенный принцип Гаусса [5]. Интересно, что в этом случае спутник, превращаясь в космический аппарат, стремится асимптотически к прямолинейному движению. Подробные численные расчеты движения спутника при закреплении величины его ускорения в перигее и апогее орбиты были изложены в статьях [6, 7].

В настоящем докладе исследование подобных движений продолжается. Сильно упрощаются полученные ранее уравнения движения. В первой теории из системы исключается переменная  $\Lambda$  и частично интегрируется одно из уравнений. По второй теории в системе выделяется неголономная связь. В качестве нововведения осуществляется переход к безразмерным переменным и рассмотрение изменения движения спутника в зависимости от траектории до наложения связи. Таким образом осуществляется анализ возможных результатов применения теорий. Особое внимание уделяется анализу противоположности получаемых решений. Объясняются причины возможного различия результа-

тов по разным теориям. Подводится некоторый итог по рассматриваемому вопросу.

## Литература

- [1] Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Физматлит, 2005. 272 с.
- [2] Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А. Неголономная механика и теория управления. М.: Физматлит, 2018. 234 с.
- [3] Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 3, № 15. С. 77–83.
- [4] Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1991. Вып. 4, № 22. С. 26–29.
- [5] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.
- [6] Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P. The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic third-order constraint // AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959(1). P. 030006-1–030006-6. doi: 10.1063/1.5034586.
- [7] Додонов В. В. Движение спутника Земли после фиксирования величины его ускорения в апогее // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2020. С. 51–63.

## Скольжение инерциоида на упругих опорах

*Досаев М.З.*

*dosayev@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* инерциоид, сухое трение, математическое моделирование.

Движению роботов по шероховатой плоскости посвящено множество работ [1, 2]. В последние годы внимание учёных привлечено к разработке устройств, которые приводятся в движение внутренними массами. Подобные роботы можно, в частности, использовать для движения в условиях внешней агрессивной среды и малой гравитации. В [3] была предложена конструкция

инерционного робота с одним несбалансированным ротором и одним маховиком. Вариант такого робота с опорой на две точки опоры предложен в [4]. При разработке системы с упругими опорами возникла проблема: для реализации связи в шарнирах зачастую необходима бесконечная величина тангенциальной реакции в точках опоры. Сухое трение покоя не в состоянии удержать по крайней мере одну из ног от скольжения. Для преодоления проблемы предложено ввести в рассмотрение податливость материала опор.

В этой работе рассмотрена задача о скольжении тела  $ABCD$ , у которого  $AB = 2a$ ,  $AD = 2b$ , массой  $m$  с двумя упругими (коэффициент жесткости  $k$ ) опорами  $AA_1$  и  $BB_1$  по горизонтальной плоскости. Трение скольжения описано с помощью закона Кулона с коэффициентом трения  $\mu$ . Рассмотрено скольжение динамически симметричного тела и влияние на это скольжение смещения центра масс из геометрического центра робота (без ограничения общности примем, что центр масс смещен в сторону правой границы  $CB$  на расстояние  $d$ ). Взаимодействие упругих сил с силами сухого трения приводит к образованию динамических систем переменной структуры. Система в общем случае обладает тремя степенями свободы. Когда одна из ног останавливается, возникают дополнительные связи, уменьшающие число степеней свободы на единицу. Если обе точки опоры неподвижны, то тело может совершать только поступательное движение вдоль опор. В этом случае у системы одна степень свободы. В качестве обобщенных координат возьмем координаты центра масс  $x_G$ ,  $y_G$  и угол  $\varphi$  между направляющими опор и вертикалью.

Рассмотрим переходное движение системы к состоянию покоя (равновесия). В качестве начальных условий для симметричного тела возьмем ненулевую скорость центра масс (для определенности) вправо; для несимметричного тела — положение покоя при уравновешенных пружинах:  $\varphi = 0$ ,  $(x_G, y_G) = (d, -mg/2k)$ . Такое движение можно разделить на три основные фазы: скольжение двух опор в одну сторону, скольжение опор в разные стороны, а также остановка одной опоры и скольжение второй. В моменты, когда скорость какой-нибудь из опор становится равной нулю, определим состояние скольжения или покоя этой опоры из знака разности силы сухого трения покоя и модуля тангенциальной реакции:  $\Delta_i = \mu N_i - \text{abs}(F_{tan i})$ ,  $i = 1, 2$ . Пусть обе ноги скользят по опоре. Уравнения движения запишем из теорем динамики механической системы:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G &= F_{tan1} + F_{tan2} \\ \ddot{y}_G &= -mg + N_1 + N_2 \\ J\ddot{\varphi} &= N_1((l_1 + b) \sin \varphi + (a + d) \cos \varphi) - N_2((a - d) \cos \varphi - (l_2 + b) \sin \varphi) - \\ &\quad - (F_{tan1} + F_{tan2})(l_0 + b + y_G). \end{aligned}$$

Здесь  $J$  — центральный момент инерции тела,  $l_1$  и  $l_2$  — длины стержней  $AA_1$  и  $BB_1$ ,  $l_0$  — длина стержней при недеформированных пружинах. Пусть в какой-

то момент времени скорость левой опорной точки  $A_1$  ноги  $AA_1$  стала равной нулю. Если опора  $A_1$  попала в конус трения, то в момент остановки и последующие моменты времени  $\Delta_1 > 0$ . Если же это неравенство не выполнено, то после мгновенной остановки нога начнет скользить в другую сторону. Для симметричного тела расчёты показывают, что в момент остановки точки  $A_1$  ее скорость меняет свой знак, и эта точка начинает движение в обратную сторону. Через некоторое время останавливается правая точка  $B_1$ . При этом  $\Delta_2 > 0$ . Таким образом, правая опора в последующие мгновения времени будет покоиться. В случае несимметрии, поскольку правая опора  $B_1$  нагружена больше, чем левая, первой останавливается правая опора. В большинстве случаев она попадает в конус трения и останавливается на конечное время. В дальнейшем необходимо перейти к рассмотрению системы с двумя степенями свободы. В зависимости от величины  $\mu$  правая точка может оставаться в покое или может вновь вернуться к скольжению на некоторое время.

Работа проведена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

## Литература

- [1] Kudra G. et al. On some approximations of the resultant contact forces and their applications in rigid body dynamics // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2016. Vol. 79. pp. 182–191. doi: 10.1016/j.ymssp.2016.02.036
- [2] Rozenblat G. Motion of a body sliding on a rough horizontal plane and supported at three points // *Doklady Physics*. 2017. Vol. 62, pp. 430–433. doi: 10.1134/S1028335817090038
- [3] Dosaev M., Samsonov V., Holub A. Plane-parallel motion of a friction-powered robot moving along a rough horizontal plane // *Advances in Mechanism and Machine Science*. IFToMM WC 2019. Mechanisms and Machine Science. 2019. Vol. 73. pp. 2559–2565. doi:10.1007/978-3-030-20131-9\_253
- [4] Dosaev M., Samsonov V., Hwang Sh.-Sh. Construction of control algorithm in the problem of the planar motion of a friction-powered robot with a flywheel and an eccentric weight // *Appl. Math. Modelling*. 2021. Vol. 89. pp. 1517–1527. doi:10.1016/j.apm.2020.08.022

## Особенности системных представлений о динамике механических колебательных структур при несимметричных связях

*Елисеев С.В., Миронов А.С., Елисеев А.В.*

*art.s.mironov@mail.ru, eavsh@ya.ru*

Иркутский государственный университет путей сообщения,  
664074, Российская Федерация, Иркутск, ул. Чернышевского, 15

*Ключевые слова:* механическая колебательная система, частотная функция, функция демпфирования, динамические связи, связность движений, рычажные связи, экстремальные свойства, вязкое трение, структурные образования.

Общая теория систем находит свои приложения не только в объектах, которые имеют развитые системы управления, в которых обрабатывается информация, используются вычислительные средства. Свойства систем проявляются и в других объектах, которые могут представлять собой механические колебательные системы. Такие механические колебательные системы представляют собой широкий класс расчётных схем, которые используются для решения многочисленных задач динамики машин, механизмов, робототехнических устройств и средств мехатроники [1]–[5]. Развитие математического аппарата или методов системного анализа является задачей актуальной, поскольку механические колебательные системы обладают широким спектром динамических свойств, которые во многом предопределяются структурой и спецификой связей между составными элементами в форме структурных образований. Вопросы оценки динамических свойств диады, как варианта структурного образования, рассматривались в ряде работ [6, 7]; получены интересные результаты, что предопределило интерес к оценке особенностям динамических взаимодействий, когда диады входят в структуру реальных систем, взаимодействующих с основанием или ограничителями движений. Рассматривается диада, которая обладает внутренними связями между массами, но в отличие от рассматриваемых случаев диада взаимодействует с неподвижным основанием. Диада, представляющая собой совокупность элементов, интерпретируется как объект общей теории систем, с учетом того, что в организации движения не участвуют управляемые источники энергии. Вместе с тем, в организации динамических взаимодействий существуют новые формы движений, в частности, связность движений, наличие специфических форм взаимодействия (определение положения центров вращения или центров колебания). Однако, диады в реальных условиях, связанных с созданием технических средств, должны рассматриваться во взаимодействии с объектами, которые имеют вид неподвижного основания. В связи с этим рассматривается динамика механической колебательной системы, которая состоит из диады, соединенной с основанием. Свойства диады опреде-

ляются в режиме свободных движений. Вместе с тем, возможно рассмотрение диады в динамическом режиме, когда к массам прикладываются синфазные гармонические силовые воздействия. Колебание системы с несколькими степенями свободы рассматривается с позиции выделения структурных образований и учета особенностей их взаимодействий. Предложено рассмотрение механической колебательной системы с выделением объекта в виде структурного образования и аппарата учета динамических свойств выделенного структурного образования. Сделан переход от задачи с рассматриваемым объектом в виде простейших образований или сосредоточенных масс, динамические свойства которого характеризуются собственными числами, к задаче оценки взаимодействия элементов колебательных систем с несколькими степенями свободы, интерпретируемых как системы с рассматриваемым объектом в виде структурных образований, представляющих собой звенья нового типа, динамические свойства которых оцениваются частотной функцией и функцией демпфирования.

Сделан переход от задачи с рассматриваемым объектом в виде простейших образований или сосредоточенных масс, динамические свойства которых характеризуются собственными числами, к задаче взаимодействия элементов колебательных систем с несколькими степенями свободы, интерпретируемых как системы из структурных образований в виде звеньев нового типа, динамические свойства которых оцениваются частотной функцией и функцией демпфирования.

Для механической колебательной системы с учётом сил вязкого трения разработан метод построения частотной функции и функции демпфирования, зависящих от коэффициента форм связности координат свободных движений.

Показано, что частотная функция и функции демпфирования аргумента коэффициента связности могут быть представлены в двух вариантах; если коэффициент связности удовлетворяет условию «малых» сил вязкого трения, то частотная функция принимает положительное значение, а функция демпфирования — одно отрицательное; если коэффициент связности удовлетворяет условию «больших» сил вязкого трения, то частотная функция принимает нулевое значение, а функция демпфирования — два отрицательных и может рассматриваться как двузначная функция.

Установлено, что совокупность экстремальных значений частотной функции и функции демпфирования отображает собственные характеристики механической колебательной системы с учетом сил вязкого трения.

Предложен метод построения возможных вариантов частотных функций и функций демпфирования для различных значений параметров системы на основе параметризующей функции, позволяющей определить области значений коэффициента форм связности, в которых выполняется условие малости сил вязкого трения. Предложен критерий классификации частотных функций и

функций демпфирования в зависимости от топологических особенностей их графиков.

### Литература

- [1] Clarence W. de Silva. *Vibration. Fundamentals and Practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
- [2] Karnovsky I.A., Lebed E. *Theory of Vibration Protection*, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
- [3] Rocard Y. *General Dynamics of Vibrations*. Paris: Masson, 1949. 458 p.
- [4] Eliseev S.V., Eliseev A.V. *Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects*. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
- [5] Елисеев А.В. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов. / А. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. О. Московских. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.
- [6] Елисеев А.В. Диада как основа формирования механических колебательных систем / А.В. Елисеев, С.В. Елисеев., Системы. Методы. Технологии. БрГУ. Братск. №4(36). 2017. С. 25–38. DOI: DOI: 10.18324/2077-5415-2017-4-25-38
- [7] Елисеев С.В. Структурные образования в механических колебательных системах: диады, их свойства, возможности изменения динамических состояний / С.В. Елисеев, А.И. Орленко, А.В. Елисеев // Транспорт Урала. 2017. № 3 (54). С. 56–63. DOI: 10.20291/1815-9400-2017-3-56-63

## Малые колебания механической системы с вырождением высокого порядка

*Кальницкий В.С.*  
*st006987@spbu.ru*

Военная академия материально-технического обеспечения  
им. генерала армии А. В. Хрулёва,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, наб. Макарова, 8,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* двойной математический маятник, малые колебания, конфигурационное пространство с особенностями.

В данном исследовании получены точные аналитические условия, определяющие характер малых колебаний двойного маятника с вырожденным конфигурационным пространством, вопрос о которых был поставлен автором в работе [1].



Рассмотрим плоский двойной математический маятник, состоящий из двух невесомых жёстких стержней  $OA = 2$  м и  $AB = 1$  м, закреплённый шарнирно в точке  $O$ . Материальные точки  $A$  и  $B$  имеют равные массы  $m_A = m_B = 1$  кг. Точка  $B$  удерживается на неизменяемой связи. В вертикально расположенной системе координат с центром в точке, расположенной под точкой  $O$  на расстоянии 1 м, связь задана графиком выпуклой чётной функции. Потребуем, чтобы этот график, касающийся окружности радиуса 1 с центром в точке  $O$ , лежал строго ниже неё в выколоте окрестности точки касания.

Это требование будет удовлетворено, если в разложении в ряд Тейлора функции связи первый член, отличный от соответствующего члена ряда Тейлора, задающего окружность, будет иметь меньший коэффициент. В описанных условиях точка минимума задает положение устойчивого равновесия системы.

Для заданного угла  $\varphi$  отклонения от вертикали звена  $OA$  возможны два положения звена  $AB$ : «внешнее» (дальше от оси  $Oy$ ) с углом  $\psi_1$  и «внутреннее» (ближе к оси  $Oy$ ) с углом  $\psi_2$ . Зависимость углов  $\psi_{1,2}$  от  $\varphi$  полностью определяется функцией связи. Движение системы в конфигурационном пространстве тем самым может осуществляться по двум ветвям, которые имеют общую точку — положение равновесия:

$$\varphi = 0, \quad \psi_{1,2} = 0.$$

Какая из ветвей движения при переходе через положение равновесия гладкая — «внешняя-внешняя» или «внешняя-внутренняя», полностью определяется главным членом разложения функций  $\psi_{1,2}$  по  $\varphi$ .

При нечётной степени главного члена гладкими являются ветви «внешняя-внешняя» и «внутренняя-внутренняя», при чётной степени — «внешняя-внутренняя» и «внутренняя-внешняя». В первом случае будем говорить о симметричных колебаниях, во втором — об асимметричных.

Представленная механическая система имеет одну степень свободы, действующие силы потенциальны и связь предполагается идеальной. Для нахождения уравнения движения использовалось уравнение Лагранжа [2], которое является существенно нелинейным и для малых колебаний мы рассматривали разложения кинетической и потенциальных энергий до различных порядков малости в зависимости от порядка малости углов  $\psi_{1,2}$  по  $\varphi$ .

Так как связь симметрична, то и в её разложении присутствуют лишь члены чётной степени, поэтому порядок касания связи и окружности может быть лишь чётным  $r = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Прямые вычисления показывают, что если порядок касания равен  $r = 2k$ , то зависимость углов  $\psi_{1,2}$  от  $\varphi$  имеет вид

$$\psi_{1,2} = \mu_{1,2} \cdot \varphi^k + o(\varphi^k).$$

Тем самым мы наблюдаем смену режимов колебаний в зависимости от чётности показателя  $k$ . Известные к настоящему времени данные приведены в таблице соответствующих режимов и уравнений для малых колебаний.

Таблица. Режимы и уравнения малых колебаний.

Уравнение связи, порядок касания	Углы $\psi_{1,2}$ , режим и уравнение колебаний
$y = \lambda x^2 + o(x^2)$ $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}, r = 2, k = 1$	$\psi_{1,2} = \frac{\pm(2\lambda - 1) + \sqrt{2 - 4\lambda}}{1 + 2\lambda} \varphi + o(\varphi)$ симметричные колебания, $\varphi'' + \frac{g(3 + 2\mu - \mu^2)}{5 + 2\mu + \mu^2} \varphi = 0$
$y = 1/2x^2 + \lambda x^4 + o(x^4)$ $\lambda < \frac{1}{8}, r = 4, k = 2$	$\psi_{1,2} = \pm\sqrt{1/8 - \lambda}\varphi^2 + o(\varphi^2)$ асимметричные колебания, $5\varphi'' + \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi'^2 + 3g\varphi = 0$ , при $\lambda = 0$
$y = 1/2x^2 + 1/8x^4 + \lambda x^6 + o(x^6)$ $\lambda < \frac{1}{16}, r = 6, k = 3$	$\psi_{1,2} = \mu_{1,2}\varphi^3 + o(\varphi^3)$ симметричные колебания,

В работе [3] было предложено реализовывать связь нерастяжимой нитью, закреплённой в фокусах эллипса, расположенного вертикально. Попадание в тот или иной режим колебаний зависит от фактических параметров эллипса. Случай общего положения задаёт симметричный режим. Условие равенства кривизны эллипса в точке покоя единице соответствует асимметричному режиму ( $k = 2$ ) с параметром  $\lambda = \frac{1}{8a}$ , где  $a > 1$  — величина большой полуоси. Однако, данная конструкция маятника задаёт неудерживающую связь, и поэтому вопрос о реализуемости асимметричного режима в этом случае остаётся открытым.

## Литература

- [1] Burian S.N., Kalnitsky V.S. On the motion of one-dimensional double pendulum // AIP: Conference Proceedings, v. 1959, 030004 (2018), pp. 1–7.
- [2] Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 2000. 592 с.
- [3] Burian S.N., Kalnitsky V.S. The Phase Space of Mechanical System with Singularities // Abstracts of International Conference "Recent Advances in Hamiltonian and Nonholonomic Dynamics", Moscow, June 15-18, 2017, p.32–33

## Формирование асинхронных колебаний аэродинамического маятника в условиях дефицита управляющих воздействий

*Климина Л.А.*

*klimina@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* колебания, управление, аэродинамический маятник.

Для механической системы с двумя степенями свободы, находящейся в потоке среды, рассмотрим задачу формирования колебаний с заданной средней амплитудой. При этом будем считать, что в системе присутствует одно управляющее воздействие. Предположим, что на программном режиме средняя амплитуда колебаний по каждой координате остается близка к постоянной, но при этом частоты колебаний по двум степеням свободы несоизмеримы друг с другом. Такому режиму в динамической системе отвечает близкая к периодической, например, квазипериодическая траектория. Таким образом, методы формирования несинхронизированных колебаний тесно коррелированы с методами поиска квазипериодических траекторий динамических систем [1].

Для случая механической системы с двумя вращательными степенями свободы близкая задача (формирование ротационных режимов с несоизмеримыми средними угловыми скоростями элементов) рассмотрена в [2] на примере двухроторной ветроэнергетической установки.

Итак, рассматривается маятник, который состоит из державки, закреплённой в неподвижном шарнире  $O$  (ось шарнира вертикальна), и пластины площади  $S$ , упругозакреплённой на свободном конце  $C$  державки. Плоскость пластины вертикальна. Система находится в горизонтальном потоке воздуха скорости  $V$  плотности  $\rho$ . Система имеет две степени свободы, которые будем описывать углом  $\varphi$  поворота державки, отсчитываемым от направления скорости ветра, и углом  $\vartheta$  относительной ориентации пластины, отсчитываемым от направления перпендикулярного державке. В шарнире  $C$  присутствует спиральная пружина, ненапряжённое состояние которой соответствует значению  $\vartheta = 0$ , а также в этом шарнире действует момент линейного вязкого трения. В шарнире  $O$  приложен управляющий момент  $M_u$ .

Пусть  $r$  – длина державки  $OC$ ,  $J_1$  – момент инерции державки относительно точки  $O$ ,  $m$  – масса пластины, центр масс пластины расположен в точке  $C$ ,  $J_2$  – момент инерции пластины относительно точки  $C$ .

На пластину действуют аэродинамические силы со стороны потока воздуха. Будем считать, что они могут быть представлены в виде силы сопротивления  $D$  и подъёмной силы  $L$ , приложенных в точке  $C$ , значения которых описываются

на основе квазистатической модели [3]. Будем использовать для зависимостей коэффициентов силы сопротивления и подъёмной силы от угла атаки  $\alpha$  простые аппроксимации:  $C_d(\alpha) = 0.1 + \sin^2\alpha$ ,  $C_l(\alpha) = \sin(2\alpha)$ .

Введем следующие обозначения для безразмерных переменных и времени:  $\omega = V^{-1}r\varphi'$ ,  $z = V^{-1}r\vartheta'$ ,  $\tau = r^{-1}Vt$  (штрихом обозначена производная по времени  $t$ ). В безразмерных обозначениях уравнения движения системы имеют вид (точкой обозначена производная по  $\tau$ ):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\vartheta} = z, \\ \dot{\omega} = aF(\varphi, \vartheta, \omega) + p(\varkappa\vartheta + \chi z) + u, \\ \dot{z} = -aF(\varphi, \vartheta, \omega) - \varkappa\vartheta - \chi z - u; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0.5(J_1 + mr^2)^{-1}\rho S r^3, \\ p = (J_1 + mr^2 + J_2)^{-1}J_2. \end{cases}$$

$$F(\varphi, \vartheta, \omega) = \sqrt{\cos^2\varphi + (\omega - \sin\varphi)^2} (C_l(\alpha) \cos\varphi - C_d(\alpha)(\omega - \sin\varphi)),$$

$$\alpha = \arctg((\omega - \sin\varphi)^{-1} \cos\varphi) + \vartheta.$$

Здесь  $\varkappa$  — безразмерный коэффициент упругости пружины, установленной в шарнире  $C$ ,  $\chi$  — безразмерный коэффициент вязкого трения в шарнире  $C$ . Безразмерное управляющее воздействие  $u$  выберем в следующем виде:

$$u = -b_1\omega + b_2\operatorname{sgn}z.$$

Требуется подобрать  $b_i$  так, чтобы существовала близкая к периодической траектория, отвечающая колебаниям, амплитуды которых по  $\varphi$  и  $\vartheta$  примерно равны  $\varphi^*$  и  $\vartheta^*$  соответственно. В системе присутствует дефицит управляющих воздействий, соответствующие сложности обсуждаются, например, в [4].

В работе предложен метод поиска значений  $b_i$ , подобный подходу [2] и основанный на построении вспомогательных систем второго порядка, усреднении, итерационном методе формирования периодических траекторий. Рассмотрены примеры определения  $b_i$  для различных амплитуд колебаний. Так, например, для  $\varphi^* = \vartheta^* = 0.2$  получены значения:  $b_1 \approx 0.8$ ,  $b_2 \approx -0.1$ .

Научное исследование проведено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-31-20029.

## Литература

- [1] Schilder F., Osinga H. M., Vogt W. Continuation of quasi-periodic invariant tori // SIAM J. Applied Dynamical Systems. 2005. Vol. 4. iss. 3. pp. 459–488. doi: 10.1137/040611240
- [2] Климина Л. А. Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 6. С. 3–14. doi: 10.31857/S0002338820060062

- [3] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
- [4] Формальский А. М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.

## Об одном способе построения компьютерной модели динамики систем твёрдых тел

*Косенко И.И.*

*kosenkoi@gmail.com*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет),  
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1,  
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,  
119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2

*Ключевые слова:* графовые представления, визуальные модели, алгебра кватернионов, контактные модели.

Простейшие компьютерные модели механических систем могут быть построены с использованием нормальной формы Коши. Дальнейшее усложнение механической модели приводит нас к применению неявных функций на следующем уровне сложности модели. Особую трудность имеет процесс построения компьютерных моделей динамики систем тел.

Для организации таких моделей имеются различные способы. В большинстве случаев эти способы сводятся к преобразованию к виду системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Эти последние соответствуют уравнениям Лагранжа первого рода. Заметим, что в большинстве случаев дифференциальные уравнения упомянутых систем ДАУ соответствуют динамическим и кинематическим уравнениям механики. В то же время, подсистемы алгебраических уравнений систем ДАУ «генерируются» ограничениями, наложенными на систему (механическими связями).

Вычислительная практика показывает, что возможна классификация объектов динамики систем тел [1]. Такие модели состоят из объектов двух классов. Они соответствуют понятиям «тело» и «связь». Заметим также, что эти два класса объектов задают структуру неориентированного графа такого, что объекты класса «тело» играют роль вершин графа, а объекты класса «связь» — роль его ребер.

Имеется также еще одна интерпретация при помощи теории графов — в виде двухцветного двудольного графа. В этом случае и тела, и связи интерпре-

тируются как вершины графа. Объекты тел составляют одну долю вершин, которые раскрашены в один цвет, в то время, как объекты связей составляют дополнительную долю вершин и раскрашены в другой цвет. Ребра, соединяющие вершины долей графа, построены так, что для вершины из доли связей существуют в точности две вершины из доли тел. Так реализуется участие отдельного тела в той или иной связи. Два упомянутых выше способа построения графа системы тел определяют способы конструирования визуальной модели такой системы, задавая в результате структуру межпортовых соединений.

Различные случаи реализации компьютерной модели динамики систем тел рассматривались в качестве примеров. В частности, это были следующие механические системы: а) кельтский камень; б) снейкборд; в) скейтборд; г) волчок тип-топ; д) шариковый подшипник; е) прямозубое эвольвентное зацепление; ж) экипаж с омни-колесами.

## Литература

- [1] Kosenko, I. I., Stepanov, S. Y. and Gerasimov, K. V. Contact tracking algorithms in case of the omni-directional wheel rolling on the horizontal surface // Multibody System Dynamics. V. 45. P. 273–292. 2019.

## О геометрическом определении шарнирного механизма и теореме Кемпе

*Ковалёв М.Д.*

*mdkovalev@mtu-net.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* шарнирный механизм, конфигурационное пространство механизма, теорема Кемпе.

Мы рассматриваем плоские шарнирные механизмы.

Занимаясь ими, П.Л. Чебышёв не ощущал потребности в формализации самого понятия шарнирного механизма. Не ощущал её и А.Кемпе, описавший (1876) построение шарнирного механизма для черчения произвольной плоской алгебраической кривой [1]. Лишь в конце прошлого века появились математические определения шарнирного механизма. Одно из них принадлежит автору (1994) [2, 3], другое было выдвинуто в работах [4, 5] (1998), посвящённых осмыслению результата Кемпе на языке современной алгебраической геометрии. Однако, игнорирование авторами последних работ кинематической природы механизмов привело к обвинениям Кемпе в пробелах в доказательстве его «теоремы». Дело в том, что Кемпе в основной своей работе [1] не формулировал каких-либо теорем. И это дало почву для приписывания ему утверждений,

которых он не доказывал, и для доказательства которых рассуждения Кемпе недостаточны.

Принимая моё определение шарнирного механизма можно дать строгую формулировку теоремы Кемпе, для доказательства которой достаточно аргументов Кемпе с минимальными уточнениями. Далее будет приведено это определение, разъяснена неосновательность претензий к рассуждениям Кемпе, и дана правильная формулировка теоремы Кемпе.

### Формализация.

Считаем механизм составленным из прямолинейных стержней (рычагов), несущих на концах шарниры (вращательные пары). Структуру механизма задаём шарнирной структурной схемой (ШСС) — связным графом  $G(V, E)$  без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам. Множество  $V$  вершин распадается на два подмножества:  $V_1$ , отвечающих свободным шарнирам, и  $V_2$  — отвечающих закреплённым шарнирам. Граф  $G(V, E)$  удовлетворяет условиям:

- его подграф на множестве  $V_1$  свободных вершин связан,
- в  $G(V, E)$  нет рёбер, соединяющих вершины из  $V_2$  между собой.

Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) назовём ШСС, каждой закреплённой вершине  $v_i \in V_2$  которой сопоставлена точка  $p_i \in R^2$ , — положение закреплённого шарнира. Пусть  $|V_1| = m$ ,  $|E| = r$ , тогда закреплённая шарнирная схема определяет отображение  $F : R^{2m} \rightarrow R^r$ , задающееся формулами  $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, v_i v_j \in E$ . Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным*. Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных конструкций. Точки  $\{d_{ij}\} = \mathbf{d} \in R^r$  назовём *кинематическими шарнирными схемами (КШС)*. Шарнирником называем точку  $\mathbf{p} \in R^{2m}$ . Это либо ферма, либо положение шарнирного механизма. Полный прообраз  $F^{-1}(\mathbf{d})$  точки называем *конфигурационным пространством КШС  $\mathbf{d}$* . При таком подходе каждой компоненте связности множества  $F^{-1}(\mathbf{d})$  отвечает определённое шарнирное устройство. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство представляет собой шарнирную ферму. В противном случае компонента связности есть множество положительной размерности — *конфигурационное пространство  $K$  шарнирного механизма*.

### Претензии к рассуждениям Кемпе.

Пусть  $\pi$  — проекция на плоскость положений шарнира  $p_j$ . Если принять такую формулировку:

*Для плоской алгебраической кривой  $A$  и точки  $x \in A$  найдутся окрестность  $U$  точки  $x$  и механизм  $K$ , для которого  $\pi K \cap U = A \cap U$ ,*

то аргументов Кемпе недостаточно для её доказательства. Причина в том, что в точку  $x$  могут проектироваться и далёкие от начального положения  $\mathbf{p}$

точки конфигурационного пространства  $K$  шарнирного механизма. То есть, при большом движении механизм попадает в новое положение, в котором шарнир  $p_j$  опять оказывается в точке  $x$ . Это может произойти, если, например, используемый в рассуждениях Кемпе антипараллелограмм распрямится и далее будет двигаться как параллелограмм. Исключая такие возможности путём введения дополнительных рычагов в механизмы Кемпе, можно подправить доказательство Кемпе до доказательства последней теоремы [6].

Однако, и эта формулировка неверна, если понимать как в [4, 5] под конфигурационным пространством механизма всё множество  $F^{-1}(\mathbf{d})$ , поскольку шарнир  $p_j$  может находиться в точке  $x$  и для шарнирников  $\mathbf{p}$  из других компонент связности множества  $F^{-1}(\mathbf{d})$ . С точки зрения кинематики это возражение несущественно, ибо мы не можем непрерывно перевести наш механизм на эти другие компоненты.

### **Правильная формулировка теоремы Кемпе, как теоремы «в малом»:**

*Для плоской алгебраической кривой  $A$  и точки  $x \in A$  найдётся механизм  $K$  и такая окрестность  $U \subset R^2$  точки  $x$ , а также окрестность  $W \subset R^{2m}$  точки  $\mathbf{p} \in K$ , ( $\pi\mathbf{p} = x$ ), что  $\pi(K \cap W) = A \cap U$ .*

### **Литература**

- [1] Kempe A. B. On a general method of describing plane curves of the  $n^{th}$  degree by Linkwork // Proc. of the London Math. Soc. 1876. V. 7, № 102. p. 213–216.
- [2] Ковалёв М. Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, т.58, №1, с.45–70.
- [3] Ковалёв М. Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 с.
- [4] Kapovich M., Millson J. J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology, v.41 (2002), №6, p. 1051–1107.
- [5] King Henry C. Planar Linkages and Algebraic Sets // arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 p.
- [6] Power S. Elementary proofs of Kempe universality // arXiv:1511.09002v2 [math.MG] 26 Apr 2017



## Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжёлого однородного шара по поверхности вращения

*Кулешов А.С.*

*kuleshov@mech.math.msu.su*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* однородный шар, поверхность вращения, алгоритм Ковачича, лиувиллевы решения.

Задача о качении без скольжения однородного шара по неподвижной поверхности под действием силы тяжести является одной из классических задач механики неголономных систем. Обычно при рассмотрении этой задачи, следуя подходу, предложенному в трактате Э. Дж. Рауса [1], принято задавать в явном виде поверхность, по которой движется центр шара, а не опорную поверхность, по которой катится шар. Поверхность, по которой движется центр шара, является эквидистантной к поверхности, по которой движется точка контакта. Еще из работ Э. Дж. Рауса [1] и Ф. Нетера [2] было известно, что если при качении шара по поверхности под действием силы тяжести его центр движется по поверхности вращения, то задача сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты скорости центра шара в проекции на направление касательной к параллели поверхности вращения. В общем случае (для произвольной поверхности вращения) получить решение этого уравнения в явном виде невозможно. Поэтому представляет интерес вопрос, для каких поверхностей вращения соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции. Лиувиллевы функции — это функции, которые строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [3]. Необходимые и достаточные условия существования решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, выражающегося через лиувиллевы функции, дает так называемый алгоритм Ковачича [4]. В данном докладе мы приводим наш собственный способ получения линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится задача о качении тяжёлого шара по неподвижной поверхности такой, что центр шара при качении движется по заданной поверхности вращения. Применяя затем к полученному линейному дифференциальному уравнению второго порядка алгоритм Ковачича, мы показываем, что для случаев, когда центр шара принадлежит параболоиду и эллипсоиду

вращения, общее решение данного уравнения выражается через лиувиллевы функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00140 и грант № 20-01-00637).

## Литература

- [1] Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2./ пер. с англ. М.: Наука., 1983. 544 с.
- [2] Noether F. Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen. Leipzig: B. Teubner, 1909. 56 S.
- [3] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру./ пер. с англ. М.: Издательство иностранной литературы. 1959. 85 с.
- [4] Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. V. 2. pp. 3–43. doi: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4

## Возмущенные движения твёрдого тела, близкого к волчку Лагранжа, под действием нестационарных восстанавливающего и возмущающего моментов сил

*Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А.*

*leshchenkodmytro@gmail.com, kushpil.t.a@gmail.com*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры  
65029, Украина, Одесса, ул. Дидрихсона, 4

*Ключевые слова:* случай Лагранжа, метод усреднения, сопротивление среды.

Анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии [1]–[3]. В теоретическом аспекте эти задачи представляют интерес для специалистов в области теоретической механики [1]–[8]. При этом во многих случаях в качестве порождающего движения твёрдого тела, учитывающего основные моменты сил, действующих на тело, может рассматриваться движение Лагранжа. Напомним, что в этом случае тело предполагается имеющим неподвижную точку и находящимся в поле силы тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела.

В работе исследуются возмущённые движения твёрдого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов

сил, зависящих от медленного времени. Кроме того, величина восстанавливающего момента зависит от малого угла нутации. Рассматривается асимптотическое поведение решений системы уравнений движения при значениях малого параметра, отличных от нуля, на достаточно большом интервале времени. Для анализа нелинейной системы уравнений движения применяется метод усреднения. В отличие от процедуры усреднения по движению Эйлера-Пуансо, усреднение по движению Лагранжа позволяет нам рассматривать движение с немалыми по абсолютной величине моментами внешних сил как порождающее движение. Выделяются медленно и быстро меняющиеся переменные. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации и описана процедура усреднения для медленных переменных возмущенного движения твёрдого тела в первом приближении.

В качестве примера развитой методики рассматривается возмущённое движение твёрдого тела, близкое к волчку Лагранжа, с учетом моментов сил, действующих на твёрдое тело со стороны внешней среды. Усредненная система интегрируется численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Исследован новый класс вращательных движений динамически симметричного твёрдого тела относительно неподвижной точки с учетом возмущающего и восстанавливающего моментов сил.

## Литература

- [1] Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer, 2017. 241 p. doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7
- [2] Aslanov V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017. 400 p.
- [3] Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.
- [4] Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko F. L. Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1979. Vol. 43, N 5. pp. 829–837. doi.org/10.1016/0021-8928(79)90171-0
- [5] Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2017. Vol. 82, N 2. pp. 79–84. doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
- [6] Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium // Journal of Nonlinear Science, 1994. Vol. 4. pp. 35–57. doi.org/10.1007/BF02430626
- [7] Amer W. S. The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments// Results in Physics, 2019. Vol. 12. pp. 1429–1435. doi.org/10.1016/j.rinp.2019.01.037

- [8] Zabolotnov Yu. M. Resonant motions of the statically stable Lagrange spinning top // *Mechanics of Solids*, 2019. Vol. 54, N 5. pp. 652–658. doi.org/10.3103/S0025654419050212

## Оптимизация демпфирования колебаний маятника с упруго-подвижной точкой подвеса

Муравьев А.С.,<sup>1</sup> Смирнов А.С.<sup>1,2</sup>

Muravyoff97@mail.ru, smirnov.alexey.1994@gmail.com

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>1,2</sup>Институт проблем машиноведения РАН, 199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большой пр. Васильевского острова, 61

*Ключевые слова:* маятник, пружина, демпфирование, оптимизация.

Вопросам гашения колебаний механических систем при помощи демпферов вязкого трения посвящены многочисленные труды [1, 2]. В качестве критерия эффективности процессов затухания обычно выбирается максимизация степени устойчивости [3]. Наиболее часто рассматриваются системы с одной и двумя степенями свободы, поскольку именно для них удается получить аналитическое решение в конечной форме [4]. Однако иногда приходится иметь дело с т. н. системами с нецелым числом степеней свободы, детальному рассмотрению которых было посвящено гораздо меньшее количество трудов [5, 6], а задачи оптимизации параметров таких систем и вовсе не получили должного внимания. В настоящей работе предлагается восполнить этот пробел, и она посвящена изучению диссипативной системы с 1.5 степенями свободы, для которой определяются оптимальные значения коэффициента демпфирования в зависимости от её параметров.

Рассмотрим математический маятник массы  $m$  и длины  $l$ , точка подвеса которого не является неподвижной, а закреплена на пружине жесткости  $c$  и может двигаться лишь по горизонтали [7]. Предположим, что гашение колебаний осуществляется за счет демпфера вязкого трения с диссипативным коэффициентом  $\beta$  в шарнире маятника. Принимая в качестве обобщенных координат угол поворота маятника  $\varphi$  и смещение его точки подвеса  $y$  и ограничиваясь анализом малых колебаний, запишем кинетическую и потенциальную энергии, а также диссипативную функцию вязкого трения:

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi} + \dot{y}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(mgl\varphi^2 + cy^2), \quad R = \frac{1}{2}\beta\dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Отвечающие им линейные уравнения движения тогда примут вид:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y} + \beta\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \\ m\ddot{y} + ml\dot{\varphi} + cy = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Характеристическое уравнение этой системы оказывается кубическим:

$$\frac{\beta}{ml^2}\lambda^3 + \left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l}\right)\lambda^2 + \frac{\beta}{ml^2}\frac{c}{m}\lambda + \frac{c}{m}\frac{g}{l} = 0, \quad (3)$$

и именно поэтому данную систему можно назвать системой с 1.5 степенями свободы [5]. Если теперь ввести в рассмотрение величины

$$k^2 = \frac{g}{l}, \quad \gamma = \frac{cl}{mg}, \quad \nu = \frac{\beta}{ml^2k}, \quad p = \frac{\lambda}{k}, \quad (4)$$

где  $k$  – частота малых колебаний маятника длины  $l$ ,  $\gamma$  – безразмерная жёсткость,  $\nu$  – безразмерный диссипативный коэффициент, а  $p$  – безразмерный корень характеристического уравнения, то полином (3) примет вид

$$\nu p^3 + (1 + \gamma)p^2 + \nu\gamma p + \gamma = 0. \quad (5)$$

Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению такого диссипативного коэффициента  $\nu$  в зависимости от  $\gamma$ , который максимизирует степень устойчивости системы, т. е. максимально отодвигает от мнимой оси на комплексной плоскости близлежащий к ней корень характеристического уравнения (5). Решение этой задачи можно осуществить аналитическими методами, и оно оказывается весьма громоздким. Поэтому ограничимся здесь лишь конечным результатом, приведя искомую зависимость  $\nu_*(\gamma)$ :

$$\nu_* = \begin{cases} \frac{2(\gamma+1)^{3/2}}{\sqrt{\gamma}(\gamma+2)}, & 0 < \gamma \leq 4 \\ \frac{\sqrt{2}(\gamma+1)^{3/2}}{3\sqrt{\gamma}(\gamma-2)}, & 4 < \gamma \leq 8 \\ \frac{2\sqrt{2}(\gamma+1)^{3/2}\sqrt{\gamma-2-\sqrt{\gamma^2-8}}}{\sqrt{\gamma}(5\gamma-4-3\sqrt{\gamma^2-8\gamma})}, & \gamma > 8 \end{cases} . \quad (6)$$

Видно, что эта зависимость оказывается кусочной и состоит из трёх участков. Отметим, что второй участок совпадает с частью кривой на плоскости  $\gamma\nu$ , которая отвечает такому расположению корней полинома (3), когда все они лежат на одной вертикали, а третий участок совпадает с частью кривой, которая соответствует наличию у полинома двухкратного корня. Подчеркнем также,

что кривая (6) полностью совпадает с результатом, полученным при помощи процедуры численной оптимизации в пакете прикладных программ.

### Литература

- [1] Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
- [2] Леонтьев В.А., Смирнов А.С., Смольников Б.А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 2 (19). С. 52–59.
- [3] Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. 312 с.
- [4] Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
- [5] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Изд. 4-е, перераб. М.: Наука, 1987. 352 с.
- [6] Муравьев А.С., Смирнов А.С. Динамика и устойчивость движения тягача с сцепом // Неделя науки СПбПУ. 2019. С. 92–95.
- [7] Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. М., Л.: ГИТТЛ, 1946. 423 с.

## Kepler's Area-Law and Untenability of the Cyclic-Coordinate First Integral

*Nedić S.*

*nedics@uns.ac.rs; nedic.slbdn@gmail.com*

University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences,  
21102, Republic of Serbia, Novi Sad, Dr Zorana Dindica 1

*Keywords:* Kepler's equation, First Integrals, Orbital Mechanics, Non-conservativity.

Along the total energy consisted by sum of the kinetic and potential energies, it is the angular momentum ( $L = r^2\dot{\varphi}$ ) of an orbital body that has been taken as time-invariant during the whole orbital period ( $T$ ), thus forming the so-called (the two) First Integrals for the process of solving the related (essentially, non-oscillatory) non-linear differential equations of motion. While the Energy Integral can be shown to have been an untenable postulate<sup>1</sup> (either by direct analytical and/or numerical evaluation, and/or by application of the full time derivative of the related expression in polar coordinates), for the angular momentum — and it's Kepler's Second (Area) Law counterpart — that turns out to be quite subtle and very intricate an issue.

<sup>1</sup> Quite rare textbooks' authors attempt to prove its validity either through non-justifiably presumed co-linearity of the position and velocity vectors, unfulfilled either in initial conditions or in the produced solutions, or relying on here refuted zero-valuedness of the transverse acceleration.

However, since the very presence of non-zero tangential acceleration in the observed trajectories of orbital bodies as well as in the produced solutions, the validity of the related First Integral ‘status’ of this quantity should have long been questioned because the constant angular momentum<sup>2</sup> implies the annulling of the suitably transformed transverse acceleration  $\ddot{r} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$  into  $(1/r)(dL^2/dt)$ , equating thus the radial and tangential ones — a situation possible only for the rectilinear motion, if not considering the traditional notion of the circular motion with the centrally directed ‘acceleration’.

This means that the validity of angular momentum as one of the First integrals should have long been reconsidered, in particular that based on it has been developed the whole mechanics/dynamics of natural orbital systems, and subsequently analytical and rational mechanics, as well as the quantum mechanics, GTR and most recently the String Theory, with “spilling-over” into mathematics through the Symplectic Topology (“geometry of ‘conservative’ motion”) and the Symplectic Integration (actually, artificially ensuring the angular momentum constancy — the availability of the so-called “Cyclic coordinate”).

Based on an in-depth analysis and elaboration, for the angular momentum is produced the following expression (with major semi-axis  $a=1+e$  and  $e$  - eccentricity)

$$L = r^2 \cdot \dot{\varphi} = (1+e)^2 \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{1-e \cdot \cos(E)}{\cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + \frac{1+e}{1-e} \cdot \sin^2\left(\frac{E}{2}\right)},$$

and — although not, or at least hardly recognizable by visual inspection — is constant for all eccentricity factors  $e$ , so that the transformed transverse acceleration indeed is zero-valued. Yet, the individually evaluated sum-terms of the transverse acceleration

$$\begin{aligned} r \cdot \ddot{\varphi} &= 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + \frac{1+e}{1-e} \cdot \sin^2\left(\frac{E}{2}\right)} \cdot \frac{1}{[1-e \cdot \cos(E)]} \cdot \times \\ &\times \left\langle \left[ -\frac{e}{1-e} \right] \frac{\cos\left(\frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{E}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + \frac{1+e}{1-e} \cdot \sin^2\left(\frac{E}{2}\right)} + \frac{e \cdot \sin(E)}{[1-e \cdot \cos(E)]} \right\rangle \\ 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} &= 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{e \cdot \sin(E)}{\cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + \frac{1+e}{1-e} \cdot \sin^2\left(\frac{E}{2}\right)} \cdot \frac{1}{[1-e \cdot \cos(E)]^2}, \end{aligned}$$

reveal its time variation, except for circular trajectory,  $e=0$ .

Due mainly to his rather singular and unphysical Equation, the subsequent developments of Orbital mechanics have made it as though Kepler — the mathematician had largely won over Kepler — the physicists. Nevertheless, Kepler’s systematic adherence in contemplating the geometry underlying physical processes which imply a two-component central acceleration/force, should have been given due attention to be leading towards development of consistent orbital mechanics

<sup>2</sup> With presumed co-linearity of the position and acceleration vectors, also never taking place.

and dynamics — in line with those of Descartes', Leibniz, Boscovich's and further justified by the rightfully called Kepler–Ermakov system of differential equations [1].

## References

- [1] P.G.L. Leach and K. Andriopoulos, The Ermakov Equation: A commentary, Appl. Anal. Discrete Math, 2 (2008), pp. 146–157.

## Особенности применения динамических гасителей колебаний для сейсмозащиты зданий и сооружений

*Нестерова О.П.*,<sup>1</sup> *Уздин А.М.*,<sup>2</sup> *Федорова М.Ю.*<sup>3</sup>  
mgfed@mail.ru

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4,

<sup>2</sup>Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I,

190031, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московский пр-т, 9,

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* сейсмические воздействия, динамический гаситель колебаний (ДГК) большой массы, критическая масса

Целью исследований является оценка эффективности и особенностей работы динамических гасителей колебаний (ДГК) при сейсмических воздействиях. Основное внимание уделено работе ДГК большой массы. Рассматривается влияние демпфирования в ДГК и защищаемом объекте на настройку ДГК. Анализируется критическая масса ДГК, при которой эффект гашения исчезает. Полученные аналитические зависимости позволяют исследовать влияние демпфирования на настройку и эффективность ДГК, а также на величину критической массы.

Землетрясения занимают первое место в мире среди стихийных бедствий по числу человеческих жертв и второе (после наводнений) по материальному ущербу. В сейсмически опасных районах расположено более 20% территории России. В связи с этим сейсмозащита является важнейшей государственной проблемой. Хорошо известно, что сейсмические нагрузки не являются для сооружений чисто внешними, а генерируются самой конструкцией в процессе сейсмических колебаний. Поэтому эффективными средствами сейсмозащиты является сейсмоизоляция и динамическое гашение колебаний. Применение динамических гасителей колебаний для гашения сейсмических колебаний имеет ряд специфических особенностей.



С формальной точки зрения задача подбора параметров ДГК при сейсмическом воздействии отличается от классической задачи наличием нагрузки на обе массы: массу сооружения  $M$  и массу ДГК  $m$ . При этом амплитуда колебаний основной массы недемпфированной системы при гармоническом возмущении с частотой  $\omega$  записывается в виде (см. [1]):

$$S_1 = \frac{P_1(c_r - m\omega^2) + P_2c_r}{\Delta},$$

где  $\Delta = (-M\omega^2 + (c_0 + c_r))(c_r - m\omega^2) - c_r^2$ . Если в классическом случае ( $P_2 = 0$ ) ДГК настраивают на частоту возмущения из условия  $c_r - m\omega^2 = 0$ , то для сейсмического воздействия для обращения в 0 амплитуды  $S_1$  получаем настройку

$$f = \omega \frac{P_1}{P_1 + P_2}.$$

Если учесть, что при сейсмическом воздействии  $P_1 = M\omega^2$  и  $P_2 = m\omega^2$ , то получим:

$$f = \omega \frac{1}{1 + \nu},$$

где  $\nu = \frac{m}{M}$  — относительная масса ДГК.

Помимо изменения настройки появляются сложности реализации ДГК на физическом уровне. Основная из них связана с точностью настройки ДГК. Хорошо известно (см. [2]), что для ДГК малой массы с  $\nu < 0.05$  малые отклонения в параметрах системы, неизбежные в процессе эксплуатации сооружения, приводят к отстройке ДГК и выключению его из работы. Для обеспечения эффективности ДГК большой массы в качестве гасителя используется часть самого сооружения. В этом случае величина  $\nu$  может достигать величины 2 – 3. Эффективность ДГК сохраняется для любой массы гасителя, но настройка ДГК стремится к 0, при этом существует некоторая критическая масса ДГК, начиная с которой эффект гашения пропадает. Отмечается, что эта масса  $\nu \approx 2$ . В работе О.П.Нестеровой (см. [3]) уточнено значение величины  $\nu_{кр}$ , показано, что она существенно зависит от затухания в сооружении.

В данной работе на основании аналитических зависимостей, подкреплённых соответствующими численными расчетами, проведен более корректный учёт различных видов затухания в сооружении, его влияния на параметры сооружения.

В работе даны оценки учёта демпфирования на настройку и эффективность ДГК, а также на величину критической массы.

## Литература

- [1] Сахарова В.В., Симкин А.А., Никитин А.А., Уздин А.М. Использование пролетного строения для гашения сейсмических колебаний опор мостов. Экспресс-

- информация ВНИИС, Сер.14.Сейсмостойкое строительство, Москва, 2015, Вып.4, С. 14–18.
- [2] Нестерова О.П., Уздин А.М. Особенности работы динамических гасителей колебаний при силовом и кинематическом возмущении демпфированных сооружений Известия российской Академии ракетных и артиллерийских наук, Москва, 2016, Вып. 2(92), С. 84–89.
- [3] Полоротова Н.А., Нестерова О.П., Уздин А.М. Задание демпфирующих характеристик динамических систем и построение матрицы демпфирования. Строительная механика и расчет сооружений, Москва, 2019, №6, С. 40–49

## Исследование динамики гексапода с помощью уравнений в избыточных координатах

*Петрова В.И.*

*vikkka97@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* гексапод, платформа Стюарта, уравнения в избыточных координатах, специальная форма уравнений движения, теория управления, обратная связь.

Гексаподы (платформы Стюарта) получили широкое распространение и применение в машиностроении, транспорте, медицине и т. д. Отметим, что изучение их движения до сих пор привлекает внимание исследователей. Сложность решения этой задачи механики можно, прежде всего, объяснить тем, что, во-первых, конструкция гексапода изначально создает неустойчивость этой системы, и, во-вторых, задача оказывается нелинейной.

Обычно для составления дифференциальных уравнений движения платформы Стюарта применяются либо основные теоремы динамики (см., например, [1, 2]), либо уравнения Лагранжа (см., например, [3]). В работах [4, 5] для этой же цели используется специальная форма дифференциальных уравнений движения (система дифференциальных уравнений в избыточных координатах), предложенная в статье [6].

Согласно этой теории нагруженная платформа Стюарта рассматривается как твёрдое тело, положение которого задается «векторными координатами» радиус-вектором центра масс  $\boldsymbol{\rho}$  и ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  связанной системы координат. Шесть уравнений ортонормированности этих ортов рассматриваются как некоторые абстрактные голономные связи, наложенные на движение твёрдого тела. В результате удается записать векторную форму четырёх уравнений Лагранжа второго рода с множителями. Этим векторным уравнениям соответствует двенадцать скалярных уравнений относительно скалярных неизвестных в виде

трёх координат центра масс и девяти направляющих косинусов ортов связанной системы.

Проводится численное интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений для стандартных движений гексапода — вертикальных колебаний и колебаний в горизонтальной плоскости.

Устойчивое движение рассматриваемой механической системы удаётся получить лишь при введении обратных связей, при этом оказывается, что при достаточно большом коэффициенте обратных связей можно не вводить управления, обеспечивающего устойчивость рассматриваемого движения.

### Литература

- [1] Leonov G. A., Zegzhda S. A., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P. Motion of a Solid Driven by Six Rods of Variable Length // ISSN 1028-3358. Doklady Physics. 2014. Vol. 59. No. 3. P. 153–157.
- [2] Leonov G. A., Zegzhda S. A., Zuev S. M., Ershov B. A., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P. Dynamics and Control of the Stewart Platform // ISSN 1028-3358. Doklady Physics. 2014. Vol. 59. No. 9. P. 405–410.
- [3] Зуев С. М. Стабилизация положения равновесия платформы Стюарта с тремя степенями свободы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Серия 1. Вып. № 4. С. 84–92.
- [4] Зегжда С. А., Юшков М. П. Применение новой формы уравнений динамики для управления движением платформы робототехнического стенда с помощью стержней переменной длины // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Серия 1. 1996. Вып. 3. № 15. С. 112–114.
- [5] Zegzhda S. A., Petrova V. I., Yushkov M. P. Application of a Special Form of differential equations to Study Movements of a Loaded Stewart Platform // ISSN 1063-4541. Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2020. Vol. 53. No. 1. P. 82–90.
- [6] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309. № 4. С. 805–807.

## Нелинейные формы колебаний пространственного двойного маятника

*Смирнов А.С.*<sup>1,2</sup> *Смольников Б.А.*<sup>1,2</sup>

*smirnov.alexey.1994@gmail.com, smolnikovba@yandex.ru*

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН,  
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
Большой пр. Васильевского острова, 61,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

*Ключевые слова:* двойной маятник, неколлинеарные шарниры, нелинейные формы колебаний.

Двойной маятник в последнее время является одним из наиболее популярных объектов исследования в аналитической механике, что связано с активным развитием робототехники, сопровождающимся конструированием многочисленных манипуляторов. Это привело к необходимости создания многозвенных маятников, снабженных силовыми приводами и контурами управления. На этом пути основной интерес представляет именно двойной маятник, на примере которого можно качественно и количественно описать динамику самых разнообразных робототехнических конструкций. Наиболее часто рассматривается плоский двойной маятник, у которого оси обоих шарниров коллинеарны [1]. Тем не менее, у многих реальных манипуляторов шарнирные оси составляют между собой некоторый угол. В результате такой двойной маятник становится пространственным, что делает более сложными его возможные конфигурации [2]. Эти системы имеют большое перспективное значение, и в настоящей работе исследуются колебания именно такого маятника, причем обсуждается его нелинейная модель.

Рассмотрим двойной маятник, состоящий из двух шарнирно соединённых одинаковых математических маятников длиной  $l$  и с концевыми грузами массой  $m$ , оси цилиндрических шарниров которых горизонтальны и образуют между собой угол  $\alpha$ , т. е. неколлинеарны друг другу. Нелинейные уравнения движения этой системы были получены в [3], и они имеют вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}) = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = \|\theta_1, \theta_2\|^T$  – столбец обобщённых координат,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – углы поворота в шарнирах, а матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  и столбцы  $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$  суть:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{pmatrix} 2 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \theta_2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_2 & \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) \\ \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = ml^2 \sin \theta_2 \left\| - \begin{pmatrix} 2(1 + \sin^2 \alpha \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 + \cos \alpha \dot{\theta}_2 \\ (1 + \sin^2 \alpha \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \right\|, \quad (3)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = mgl \left\| \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \alpha \cos \theta_2 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \sin \theta_1 + \cos \alpha \sin \theta_2 \cos \theta_1 \right\|. \quad (4)$$

В [3] была рассмотрена лишь линейная модель такого пространственного маятника и найдены частоты  $k_{s0}$  и формы  $\mathbf{U}_{(s)}$  малых колебаний, однако наибольший практический интерес представляют нелинейные режимы его движения, когда он совершает регулярные колебания с достаточно большими амплитудами. Поэтому мы приходим к задаче о нахождении нелинейных форм колебаний рассматриваемого маятника, которую целесообразно решать при помощи асимптотических методов нелинейной механики [4].

Под нелинейной формой колебаний понимаются одночастотные движения по всем степеням свободы в нелинейной системе. Основными характеристиками линейной формы является частота и соотношение амплитуд колебаний. В нелинейной системе помимо частоты недостаточно иметь лишь соотношение амплитуд колебаний. Для полной оценки нелинейной формы необходимо дать конкретную зависимость обобщенных координат от времени.

Для решения задачи уравнение (1) приближенно переписывается в виде

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{A}_0 = ml^2 \left\| \begin{matrix} 5 & 2 \cos \alpha \\ 2 \cos \alpha & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \left\| \begin{matrix} 3 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{matrix} \right\|, \quad (5)$$

где в столбце  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  содержатся нелинейные слагаемые третьего порядка малости по  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Решение в первом приближении разыскивается в виде колебаний по одной из форм  $\mathbf{U}_{(s)}$  линейной системы:

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}_{(s)} a \cos \psi, \quad \dot{\psi} = k_{s0}(1 + \rho_s a^2) = k_s(a), \quad (6)$$

где  $a$  – малый параметр,  $k_s$  – частота колебаний нелинейной системы, зависящая от  $a$ ,  $\rho_s$  – поправочный коэффициент,  $\psi$  – полная фаза. Коэффициент  $\rho_s$  определяется из уравнения гармонического баланса:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{(s)}^T (\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) \cos \psi d\psi = 0, \quad (7)$$

которое следует выполнить с необходимой точностью. После этого из уравнения (5) можно найти поправку  $\mathbf{u}_s(a, \psi)$  третьего порядка малости, которая обусловлена величиной  $\mathbf{Q}$  в (5). В результате получим решение:

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}_{(s)} a \cos \psi + \mathbf{u}_s(a, \psi) = (\mathbf{U}_{(s)} a + \mathbf{u}_{1s} a^3) \cos \psi + \mathbf{u}_{3s} a^3 \cos 3\psi, \quad (8)$$

где  $\mathbf{u}_{1s}$  и  $\mathbf{u}_{3s}$  – столбцы поправочных слагаемых. Таким образом, решение будет периодическим, но уже не гармоническим. Чтобы отобразить его наглядно, следует построить фазовые портреты при движении по нелинейной форме колебаний. Для проверки результатов можно рассмотреть частные случаи плоского ( $\alpha = 0$ ) и ортогонального ( $\alpha = \pi/2$ ) двойного маятника.

## Литература

- [1] Формальский А. М. Управление движением неустойчивых объектов. М: Физматлит, 2014. 232 с.
- [2] Смирнов А. С., Смольников Б. А. Статический анализ двухзвенного манипулятора с неколлинеарными шарнирами // Робототехника и техническая кибернетика. 2017. № 4 (17). С. 47–51.
- [3] Смирнов А. С., Смольников Б. А. Колебания двойного математического маятника с неколлинеарными шарнирами // Современное машиностроение. Наука и образование. 2020. № 9. С. 153–165.
- [4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958. 406 с.

## К задаче о брахистохроне с квадратичным сопротивлением и ограничениями на угол наклона траектории

*Смирнова Н.В., Черкасов О.Ю.*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* оптимальный синтез, брахистохрона, фазовые ограничения, принцип максимума Понтрягина, краевая задача.

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и вязкого трения, пропорционального скорости во второй степени. В качестве управления рассматривается скорость изменения угла наклона траектории. Задача состоит в максимизации горизонтальной дальности за заданное время или в минимизации времени перехода на заданное расстояние по горизонтали (задача о брахистохроне). Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол наклона траектории. В научной литературе известны постановки задачи о брахистохроне без трения при наличии фазовых ограничений. В работе [1] рассматривались ограничения на угол наклона траектории, а в работах [2, 3] — ограничения вида  $y \geq ax + b$ . При этом учет фазовых ограничений производился при помощи численных процедур. В настоящей работе строится синтез оптимального управления с фазовыми огра-

ничениями на угол наклона траектории, аналитически устанавливается количество дуг движения по ограничению. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{v} = -v^2 - \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x$  – дальность,  $y$  – высота,  $v$  – скорость,  $\theta$  – угол наклона траектории, на который наложено фазовое ограничение вида  $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ ,  $u$  – управление, кусочно-непрерывная функция, ограничения на управление отсутствуют.

Начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0.$$

Значение  $\theta(0), y(T), v(T)$  свободны.

Функционал имеет вид:

$$J = -x(T) \rightarrow \min, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Переходя к редуцированной системе с управлением  $\theta$ , получаем регулярную оптимальную задачу с ограничениями на управление. С помощью принципа максимума задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v^2 - \sin \theta, \\ \dot{\psi}_v = 2v\psi_v - \cos \theta. \end{cases} \quad (2)$$

$$v(0) = v_0, \quad \psi_v(T) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_1, & -\arctg(\psi_v/v) < \theta_1, \\ -\arctg(\psi_v/v), & -\arctg(\psi_v/v) \in [\theta_1, \theta_2], \\ \theta_2, & -\arctg(\psi_v/v) > \theta_2. \end{cases}$$

В результате применения принципа максимума аналитически устанавливается, что оптимальная траектория может содержать не более одной дуги движения по нижнему ограничению и не более двух дуг движения по верхнему ограничению. При отсутствии сопротивления показывается, что оптимальная траектория содержит не более одной дуги с движением по каждому из ограничений.

## Литература

- [1] Cheng D. Conrad. Optimum translation and the brachistochrone // American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Aerospace Sciences Meeting, 1964. doi:10.2514/6.1964-49.
- [2] Stuart Dreyfus. The Numerical Solution of Variational Problems // Journal of mathematical analysis and applications, 1962. pp. 30–45
- [3] Brian C. Fabien. Numerical Solution of Constrained Optimal Control Problems with Parameters // Applied mathematics and computation, 1996. pp. 43–62
- [4] Зароднюк А.В., Бугров Д.И., Черкасов О.Ю. О свойствах реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде // Фундаментальная и прикладная математика., издательство Интуит. М., том 22, No.2, 2018. С. 147–158.

## Численно-аналитическая методика исследования бифуркации периодических движений автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

*Сухов Е.А.*

*sukhov.george@gmail.com*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* периодические движения, бифуркация, гамильтонова система, орбитальная устойчивость.

Рассматривается задача о бифуркации и орбитальной устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Аналитическому решению указанной задачи посвящено большое количество работ [1]–[4]. Однако, эти результаты справедливы лишь в частных случаях — в окрестности стационарных движений или положений равновесия. В настоящей работе предложена численно-аналитическая методика, позволяющая исследовать вопрос об орбитальной устойчивости и бифуркации периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при любых допустимых значениях параметров задачи.

Исследование бифуркации и орбитальной устойчивости периодических движений производится в три этапа. На первом этапе для частных значений параметров задачи строятся так называемые опорные периодические движения. Данные движения могут быть получены как аналитически [1, 3], так и численно, например, с помощью метода сечений Пуанкаре. На втором этапе опорные движения численно продолжают по параметрам до границ своих областей



существования с помощью алгоритма [5, 6]. В процессе численного продолжения производится поиск точек бифуркации и построение бифуркационной диаграммы в виде графиков зависимости периодов исследуемых движений от параметров задачи, а также решается задача об их орбитальной устойчивости в линейном приближении. На третьем этапе для верификации и иллюстрации результатов вблизи точек бифуркации строятся сечения Пуанкаре.

В качестве примера в данной работе исследован вопрос о бифуркации и орбитальной устойчивости периодических движений динамически симметричного спутника, рождающихся из его регулярных прецессий: цилиндрической, конической и гиперболоидальной. В трёхмерном пространстве параметров задачи построены диаграммы бифуркации и орбитальной устойчивости рассматриваемых движений в линейном приближении, дополняющие и уточняющие выводы работ [8, 7]. В окрестности регулярных прецессий полученные результаты хорошо согласуются с аналитическими выводами работ [1, 3, 4].

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.

## Литература

- [1] Маркеев А. П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 757–769.
- [2] Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса 3:1 // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 976–988.
- [3] Бардин Б. С., Чекин А. М. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3.
- [4] Сокольский А. Г., Хованский С. А. Периодические движения, близкие гиперболоидальной прецессии спутника на круговой орбите // Космические исследования. 1979. Т. 17. Вып. 2. С. 208–217.
- [5] Каримов С. Р., Сокольский А. Г. Метод численного продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем // Препринт ИТА АН СССР №9. 1990.
- [6] Бардин Б. С., Сухов Е. А. Об алгоритме продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // тез. докл. LIV Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва. 2018.
- [7] Sukhov E. Analytical and Numerical Computation and Study of Long-periodic motions Originating from Hyperboloidal Precession of a Symmetric Satellite // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. No. 040021.
- [8] Sukhov E. A. Bifurcation analysis of periodic motions originating from regular precession of a dynamically symmetric satellite // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. No. 4.

## Равновесия и колебания в обратимой механической системе

**Тхай В.Н.**

tkhaivn@ya.ru

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,  
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65

*Ключевые слова:* обратимость, периодическое движение, глобальное продолжение.

К нижнему равновесию математического маятника примыкает ляпуновское семейство периодических движений. Глобальное продолжение этого семейства приводит к семейству симметричных периодических движений (СПД), связывающему равновесия разных типов: центр и седло. Для равновесия период не определяется. Для нижнего равновесия период малых колебаний является предельным значением периода семейства СПД. Верхнее равновесие маятника также будет предельной точкой семейства СПД, если за параметр семейства берется, например, начальный угол отклонения маятника. При приближении к верхнему равновесию период колебаний маятника неограниченно растёт.

В модельной задаче о маятнике проблема глобального продолжения СПД не стоит. В общей ситуации задача о глобальном семействе СПД оказывается далеко не простой. В [1] получены условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте  $\Omega \in \mathbb{R}^{2n}$  продолжение ляпуновского семейства на границу  $\partial\Omega$ ; результаты впоследствии развиты в [2]. В работе [3] для механической системы, подверженной действию позиционных сил, даётся глобальное двустороннее продолжение СПД до границ области существования СПД. В частности, проанализированы ляпуновские семейства. В данной работе результат [3] обобщается и уточняется для общего случая обратимой механической системы.

Исследуется обратимая механическая система

$$\begin{aligned} \dot{u} &= U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v), \quad u \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad l \geq n, \\ U(u, -v) &= -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Системой (1) описываются ряд классических моделей механики: уравнение Ньютона, механическая система под действием позиционных сил, уравнения в квазикоординатах, задача трёх тел, задача о вращении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки и т.д.

Фазовый портрет системы (1) симметричен относительно неподвижного множества  $M = \{u, v : v = 0\}$  обратимой системы; постоянные решения системы (1), принадлежащие  $M$ , называются равновесиями обратимой механической системы. На них  $v = 0$ ,  $V(u, 0) = 0$ . Равновесия системы предполагаются изолированными. Симметричное движение пересекает ось  $u$ . На СПД пересечение происходит в двух различных точках.



Необходимые и достаточные условия существования СПД периода  $T$  записываются в виде:

$$\dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2, \quad s = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где за  $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$ ,  $q^0 \in M$ , обозначается начальная точка СПД при  $t = 0$ .

При  $\tau = 0$  система (2) совместна. При  $\tau = T/2$  получается система из  $n$  уравнений с  $n + 1$  неизвестным. Следовательно, СПД всегда образуют семейство  $\Sigma$ , например, по параметру  $T$ .

**Определение.** Случай  $\text{rank} \left\| \frac{\partial \dot{q}(q^0, T/2)}{\partial q^0} \right\| = n$  называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД — невырожденным.

Согласно определению семейство колебаний математического маятника будет невырожденным, а колебания линейного осциллятора — вырожденными.

Для простоты изложения рассматривается система (1), где  $l = n$ . Предполагается, что система (1) допускает невырожденное СПД. Проводится двустороннее продолжение СПД по параметру  $T$  до глобального семейства СПД. Дается анализ предельных траекторий на границе семейства. Приводятся примеры.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00146).

## Литература

- [1] Zevin A. A. Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1997. V. 28. Iss. 9. P. 1499–1507.
- [2] Zevin A. A. Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1339–1349.
- [3] Tkhai V. N. A family of oscillations that connects equilibria // 2020 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference). 2020. IEEE Xplore. INSPEC Accession Number: 17932453, doi: 10.1109/STAB.2018.8408408 <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408408/>

## О нелинейных колебаниях периодических по времени гамильтоновых систем при наличии двойных резонансов четвертого порядка

*Холостова О.В.*

*kholostova\_o@mail.ru*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* гамильтонова система, двойной резонанс четвертого порядка, устойчивость, формальная устойчивость, периодические движения, спутник, цилиндрическая прецессия.

Рассматриваются движения  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. Характеристические показатели  $\pm i\lambda_j$  ( $j = 1, 2$ ) линеаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые. При этом величины  $4\lambda_1$  и  $\lambda_1 + 3\lambda_2$  (или  $\lambda_1 - 3\lambda_2$ ) — целые или близки к целым числам, то есть в системе реализуется двойной, основной и комбинационный, резонанс четвертого порядка.

В малой, порядка  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), окрестности начала координат фазового пространства гамильтониан возмущенного движения приводится к нормальной форме в слагаемых до четвертой степени включительно. После перехода от времени  $t$  к новой независимой переменной  $\tau = \varepsilon^2 t$  нормализованный гамильтониан в симплектических полярных координатах  $R_j, \Phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) принимает вид

$$\Gamma_{\pm} = -\mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 + c_{20} R_1^2 + c_{11} R_1 R_2 + c_{02} R_2^2 + a R_1^2 \cos 4\Phi_1 + b R_1^{1/2} R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 \pm 3\Phi_2) + O(\varepsilon). \quad (1)$$

Здесь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — резонансные расстройки,  $a$  и  $b$  ( $a > 0, b > 0$ ) — резонансные коэффициенты,  $O(\varepsilon)$  — совокупность слагаемых, периодических по  $\tau$  с периодом  $24\pi\varepsilon^2$ . Знаки  $+$  и  $-$  отвечают случаям сильного и слабого комбинационного резонанса. Условия устойчивости и неустойчивости при наличии в системе одного сильного резонанса (основного или комбинационного) выписаны в [1]; при наличии одного слабого комбинационного резонанса тривиальное равновесие формально устойчиво.

Рассмотрим случай точного резонанса ( $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ). Построена функция Четаева и показано [2], что для значений параметров из области неустойчивости одного основного резонанса тривиальное равновесие систем с гамильтонианами (1) остается неустойчивым при любых значениях  $b$ .

Пусть, далее, квадратичная форма  $c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2$  является знакоопределённой при  $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$ . Тогда при отсутствии резонансов четвёртого порядка тривиальное равновесие формально устойчиво [1]. В плоскости параметров  $a, b$  найдена [2] примыкающая к началу координат область, в которой данное равновесие остаётся формально устойчивым при наличии обоих резонансов; получено уравнение границы этой области. Показано, что для системы с гамильтонианом  $\Gamma_+$  данная область лежит внутри области, где каждый резонанс, рассматриваемый по отдельности, устойчив. Для системы с гамильтонианом  $\Gamma_-$  эта область лежит в области устойчивости основного резонанса, при этом коэффициент  $b$  слабого резонанса принимает значения из ограниченного диапазона.

Для произвольных значений резонансных расстроек решён вопрос о существовании и числе резонансных периодических (с периодом  $24\pi$ ) движений систем с гамильтонианами (1). Эти движения порождаются нетривиальными положениями равновесия приближенных автономных систем, получаемых из (1) путем отбрасывания последнего слагаемого. Указанные равновесия описываются соотношениями  $\sin 4\varphi_1 = 0, \sin(\varphi_1 \pm 3\varphi_2) = 0$  и

$$-2\nu_1 u_1 + 4C_{20}u_1^3 + 2C_{11}u_1u_2^2 + u_2^3 = 0, \quad -\nu_2 + C_{11}u_1^2 + 2C_{02}u_2^2 + \frac{3}{2}u_1u_2 = 0, \quad (2)$$

$$u_j = \sqrt{R_j}, \quad \nu_j = \frac{\mu_j}{b\delta_2} \quad (j = 1, 2), \quad C_{20} = \frac{c_{20} + a\delta_1}{b\delta_2}, \quad C_{11} = \frac{c_{11}}{b\delta_2}, \quad C_{02} = \frac{c_{02}}{b\delta_2},$$

где  $\delta_1 = \text{sign} \cos 4\varphi_1 = \pm 1, \delta_2 = \text{sign} \cos(\varphi_1 \pm 3\varphi_2) = \pm 1$ .

В общем случае  $\nu_1 \neq 0, \nu_2 \neq 0$  число решений системы (2) может меняться от нуля до трёх. Границами областей с различным числом решений служат прямые  $\nu_1 = \varkappa\nu_2$  в плоскости параметров  $\nu_1, \nu_2$ , где  $\varkappa$  — вещественный корень некоторого многочлена четвёртой степени с коэффициентами — функциями  $C_{ij}$ . Число таких областей равно 8, 4 или 0. Если  $\nu_1 = 0$  или  $\nu_2 = 0$ , то максимальное число решений системы (2) уменьшается до двух. При  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  система (2) имеет решения только для специального соотношения между коэффициентами.

Так как система (2) содержит в себе четыре системы, получаемые при различных наборах  $\delta_1, \delta_2$ , то наибольшее число положений равновесия рассматриваемой приближенной автономной системы, а значит и порождаемых ими периодических движений полных неавтономных систем может равняться 12. Выписана система неравенств, задающая условия устойчивости (в линейном приближении) найденных периодических движений.

Полученные теоретические результаты применены в задаче о движении динамически симметричного спутника-пластинки вблизи его цилиндрической прецессии в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

## Литература

- [1] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [2] Холостова О.В. О кратных резонансах четвертого порядка в неавтономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 275-294.

## Задача оптимальной встречи с ограничениями на переменные состояния

*Черкасов О.Ю., Макиева Э.И.*

*oyuche@yandex.ru, elinamakieva@live.com*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* принцип максимума Понтрягина, метод пропорционального наведения, фазовый портрет, задача оптимального управления.

Задача оптимальной встречи двух материальных точек, движущихся в горизонтальной плоскости, рассматривается в нелинейной постановке.

Скорости точек постоянны по модулю. Время процесса фиксировано. Начальные условия заданы, конечные принимаются свободными. Целью управления является минимизация конечного расстояния между Игроком 1 (И1), для которого ищется оптимальная стратегия, и Игроком 2 (И2), использующим метод пропорционального наведения. Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол между линией визирования (ЛВ) и вектором скорости И1. Работа продолжает исследования, начатые в работе [1].

В исходной системе управление входит в правую часть только одного уравнения, что позволяет опустить это уравнение и перейти к редуцированной системе, в которой фазовые ограничения исходной задачи переходят в ограничения на управление для редуцированной системы. В редуцированной системе в качестве управления принят угол между вектором скорости И1 и ЛВ.

Оптимальная задача для редуцированной системы с помощью принципа максимума Понтрягина сводится к краевой для системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Построены и проанализированы фазовые портреты при различных соотношениях скоростей игроков. Проведен анализ качественных характеристик экс-

тремальных траекторий, определены области начальных условий, из которых возможно достижение конечного многообразия. Установлено, что оптимальная траектория может содержать не более одного участка движения по ограничению.

Проведено численное решение краевой задачи, иллюстрирующее аналитические результаты.

После определения регулярного управления в оптимальной задаче для редуцированной системы было найдено управление в исходной задаче с фазовыми ограничениями для исходной системы.

## Литература

- [1] Макиева Э.И., Черкасов О.Ю. Об одной нелинейной задаче оптимальной встречи. Инженерный журнал: наука и инновации (электронное научно-техническое издание), 2020, т.100, №4.

## Периодические движения тела по горизонтальной шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс

*Чекина Е.А.*

*chekina\_ev@mail.ru*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* плоское движение, периодические движения, внутренние массы, кулоновское трение.

Проводится анализ поступательного движения тела, несущего две подвижные внутренние массы, по горизонтальной шероховатой поверхности. Массы совершают гармонические колебания в вертикальной плоскости, частоты которых равны, а амплитуды и фазы могут быть произвольными. Предполагается, что значения параметров задачи выбраны таким образом, что движение тела происходит без отрыва от поверхности. Трение между телом и поверхностью описывается законом Кулона.

Исследование динамики подобных механических систем представляет интерес для проектирования и создания капсульных роботов. Задача о движении твёрдого тела по горизонтальной поверхности посредством перемещения внутренних подвижных масс рассматривалась во многих работах в различных постановках (см., например, [1]– [4]).

В данной работе проведён анализ периодических безотрывных движений тела по горизонтальной поверхности в зависимости от трёх параметров: коэффициента трения скольжения, фазы гармонических колебаний и параметра, характеризующего отношение силы тяжести, приложенной к системе, и силы инерции, возникающей за счет относительного движения внутренней массы по вертикали. Проведена классификация возможных режимов движения тела с периодически меняющейся скоростью.

Были найдены условия на параметры задачи, при которых существуют периодические движения с одним или двумя интервалами покоя тела за период движения. Также были найдены условия, при которых движение корпуса происходит без интервалов покоя, со сменой направления движения после остановки корпуса. В трёхмерном пространстве параметров задачи были построены области, в которых периодические движения носят качественно различный характер. В частности было показано, что существуют следующие режимы движения корпуса с периодически меняющейся скоростью. В первом режиме корпус движется в одном направлении с одной остановкой и последующим интервалом покоя за период движения. Остановка корпуса и начало его движения происходят при одном и том же положении центра масс системы относительно корпуса.

Во втором режиме корпус движется с двумя интервалами покоя с последующей сменой направления движения. Моментам остановок корпуса и начала его движения соответствуют одни и те же положения центра масс системы относительно корпуса. Первая остановка корпуса за период в третьем режиме происходит без последующего интервала покоя, корпус сразу начинает двигаться в обратном направлении. За второй остановкой корпуса следует интервал покоя. Как и в предыдущих случаях, остановкам корпуса и началу его движения соответствуют одни и те же положения центра масс системы относительно корпуса. В четвертом режиме корпус движется с двумя остановками без последующих интервалов покоя, сразу начиная движение в обратном направлении. Установлена единственность описанных периодических режимов движения, а также показано, что движение корпуса носит предельный характер: движение корпуса выходит на периодический режим за конечный промежуток времени или асимптотически приближается к нему.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00116).

## Литература

- [1] Черноушко Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. №6. С. 915–946.



- [2] Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. Т. 70. №5. С. 157–167.
- [3] Bardin B. S., Panev A. S. On the Motion of a Body with a Moving Internal Mass on a Rough Horizontal Plane // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018. Vol. 14 no.4 pp. 519–542
- [4] Бардин Б.С., Панёв А.С. О поступательном прямолинейном движении твёрдого тела, несущего подвижную внутреннюю массу // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019, Т. 65, № 4, С. 557–592.

## Семейства портретов маятниковых систем с диссипацией

*Шамолин М.В.*

*shamolin@imec.msu.ru, shamolin.maxim@yandex.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* динамическая система, диссипация, фазовый портрет.

В динамике твёрдого тела в неконсервативном поле, в теории колебаний, в теоретической физике, а также во множестве других нелинейных наук возникают так называемые системы маятникового типа (см., например, [1]). В ряде других работ автора также изучались такие системы, например, в плоской и пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. В данной работе обсуждаются методы качественного анализа, позволяющие обобщить предыдущие результаты автора. При этом затрагиваются некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем, от решения которых зависит исследование ряда рассматриваемых нами систем.

В результате исследования систем более общего вида (систем с более общими правыми частями, чем ранее) показано, что такие системы обладают (известным ранее в другом классе задач) семейством неэквивалентных между собой фазовых портретов. Такое семейство состоит из бесконечного множества портретов с совершенно различными качественными свойствами. Каждый такой портрет неэквивалентен другому в том смысле, что не существует никакого непрерывного преобразования, способного отобразить один фазовый портрет на другой так, чтобы соответствующие фазовые траектории одного портрета переходили в соответствующие фазовые траектории другого портрета (с сохранением движения вдоль сепаратрис, притягивающих или отталкивающих предельных множеств и т.д.).

Типичные фазовые портреты рассматриваемого семейства (абсолютно) грубы (структурно устойчивы), т.е. любое его достаточно малое шевеление (т.е. ше-

вление правой части соответствующей ему системы) во всем множестве правых частей не повлияет на его тип. Но при переходе от одного (типичного) грубого неэквивалентного типа фазового портрета к другому мы сталкиваемся с негрубыми фазовыми портретами, также обладающими интересными нелинейными свойствами. Так, например, при одном шевелении таких негрубых портретов они сохраняют свои качественные свойства, а при другом — кардинально меняют их, все время оставаясь неэквивалентными любому фазовому портрету рассматриваемого семейства.

При проводимом исследовании в работе рассматриваются динамические системы на двумерной плоскости (или двумерном цилиндре), хотя многое можно перенести и на более общие гладкие ориентированные двумерные поверхности. При этом используются известные понятия топографических систем Пуанкаре [2, 3, 4]; у автора также имеются обзоры на эту тему [5, 6, 7].

## Литература

- [1] Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54.
- [2] Бендиксон И. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи матем. наук. 1941. № 9. С. 119–211.
- [3] Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.–Л.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
- [4] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
- [5] Шамолин М.В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 2. С. 66–70.
- [6] Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. Вып. 3. С. 177–178.
- [7] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

## Секция 2

Динамика естественных и  
искусственных небесных тел

*Dynamics of Natural and  
Artificial Celestial Bodies*

## Об управлении спутником в точках либрации без измерения скоростей

*Андреев А.С., Перегудова О.А., Петровичева Ю.В.*  
asa5208@mail.ru, peregudovaoa@gmail.com, petrovichevayulia@yandex.ru

Ульяновский государственный университет,  
432017, Российская Федерация, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42

*Ключевые слова:* спутник, стабилизация движения, ориентация, синтез управления.

В работе предлагается новый подход **решения** задачи управления космическим аппаратом с учетом действия сил гравитации. Новизна подхода состоит в построении управления без измерения скоростей спутника. Решаются задачи о стабилизации центра масс спутника в точках либрации ограниченной круговой задачи трёх тел, о заданной ориентации его оси симметрии.

### Введение.

Несмотря на классический характер проблемы, исследования, посвящённые проектам использования точек либрации ограниченной круговой задачи трёх тел, остаются предметом изучения целого ряда работ [1]–[3]. В настоящее время перспективными представляются работы, связанные с помещением в этих точках информационных спутников, с использованием спутника, центр масс которого расположен вблизи прямолинейной точки либрации системы Земля-Луна, как ретранслятора для связи наземного пункта с космическим аппаратом, находящимся на поверхности Луны. При разработке законов управления таким спутником преимущественно пользуются подходы, ориентированные на использование гравитационного поля и неполное измерение фазовых координат.

В настоящем докладе представлено решение задачи управления движением спутника в нелинейной постановке, при измерении только координат его пространственного положения.

### Основной результат.

Рассматривается движение спутника, моделируемого твёрдым телом, под действием сил ньютоновского притяжения к двум материальным точкам или телам со сферическими распределениями масс, движущимся одно относительно другого по окружностям относительно радиуса  $a$ . Масса спутника  $m$  предполагается пренебрежимо малой по сравнению с массами  $m_1$  и  $m_2$  двух других тел. Центр  $O_1$  масс  $m_1$  и  $m_2$  примем за начало равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$  системы координат  $O_1xyz$ , ось  $x$  которой проходит через центры  $M_1$  и  $M_2$  масс  $m_1$  и  $m_2$  соответственно [4, 5]. Главные центральные оси инерции спутника примем за оси системы координат  $Ox_1x_2x_3$ . Положение спутника в системе координат  $O_1xyz$  будем определять координа-

тами  $x, y, z$  его центра масс  $O$ , углами Эйлера  $\theta, \psi, \varphi$ , вводимыми обычным образом.

Найдено, что при пренебрежении влиянием вращательного движения спутника на его поступательное, уравнения движения при отсутствии управляющих обобщенных  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$  имеют решения, которые соответствуют совпадению положения центра масс спутника с [5]:

1) одной из трёх прямолинейных точек либрации

$$x = x_{l0}, \quad y = z = 0, \quad l = 1, 2, 3;$$

2) с одной из двух треугольных точек либрации при

$$z = 0, r_1 = r_2 = r, \quad y = \pm(r^2 - a^4/4)^{1/2}, \quad x_i^2 = a^2/4; \quad i = 1, 2.$$

На основе метода исследования из [6] решены две следующие задачи.

Задача 1. О стабилизации положения спутника, при котором его центр масс постоянно совпадает с точкой либрации, при этом действие вращательного движения на поступательное принимается как постоянно действующее возмущение. Решение задачи достигнуто выбором управления  $Q_1, Q_2, Q_3$  в виде

$$Q_i = -k_i \nu_i + \beta_i \int_0^t e^{\alpha_i(\tau-t)} \nu_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\nu_1 = x - x_0, \nu_2 = y - y_0, \nu_3 = z - z_0$  — возмущения.

Задача 2. Об ориентации оси симметрии осесимметричного спутника при условии, что его центр масс постоянно совпадает с одной из точек либрации. При этом задача об ориентации осесимметричного спутника перпендикулярно плоскости орбиты решена посредством управляющего момента, реализуемого при измерении только угла отклонения оси симметрии спутника от нормали к плоскости орбиты.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00791-а.

## Литература

- [1] Wong B., Patil R., and Misra A. Attitude Dynamics of Rigid Bodies in the Vicinity of the Lagrangian Points // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2008. Vol. 31. N 1. pp. 252–256.
- [2] Krasilnikov P. Fast non-resonance rotations of spacecraft in restricted three body problem with magnetic torques // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 73. pp. 43–50.
- [3] Красильников П. С. Вращение твердого тела относительно центра масс в ограниченной задаче трех тел. М.: Изд-во МАИ, 2018. 172 с.

- [4] Кондударь В. Т., Шинкарик Т. К. О точках либрации в ограниченной обобщенной задаче трех тел // Бюллетень Института теоретической астрономии, т. XIII, № 2, 1972.
- [5] Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами в точках либрации Publications de l'Institut Mathematique. Nouvelle serie. 1974. Tome 17 (31). pp. 139–148.
- [6] Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 2. С. 137–153.

## Об устойчивости точки либрации $L_1$ в плоской ограниченной круговой фотогравитационной задаче трёх тел при наличии резонансов

*Бардин Б.С.*,<sup>1,2</sup> *Авдюшкин А.Н.*<sup>1</sup>

*bsbardin@yandex.ru, avdyushkin.a.n@yandex.ru*

<sup>1</sup>Московский авиационный институт,

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

<sup>2</sup>Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,

119334, Российская Федерация, Москва, ул. Бардина, 4

*Ключевые слова:* фотогравитационная задача трёх тел, устойчивость движения, гамильтоновы системы, КАМ-теория, нормальная форма, точки либрации.

Рассматривается движение частицы малой массы под действием двух притягивающих центров — тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения и движущихся по известным круговым орбитам. Предполагается, что помимо сил гравитационного притяжения на частицу действуют репульсивные силы светового давления. В данной задаче существует частный случай движения — коллинеарная точка либрации  $L_1$ , когда частица во все время движения располагается между притягивающими центрами на одной с ними прямой. Устойчивость данной коллинеарной точки исследовалась ранее [1]–[3]. Наиболее строгие и полные результаты были получены в случае равных масс и равных интенсивностей излучения притягивающих центров. В частности, был выполнен нелинейный анализ устойчивости как для круговых, так и для слабоэллиптических орбит притягивающих центров [4], а также исследовалась задача об устойчивости  $L_1$  при наличии пространственных возмущений [5].

В данной работе предполагается, что притягивающие центры движутся по круговым орбитам, а их массы и интенсивности излучения могут принимать произвольные значения. На основании анализа системы первого приближения в трёхмерном пространстве параметров задачи была построена область устой-

чивости в линейном приближении. Вне найденной области коллинеарная точка либрации  $L_1$  неустойчива. Для получения более строгих выводов об устойчивости в указанной области было выполнено нелинейное исследование. С этой целью функция Гамильтона задачи была нормализована до членов четвёртой степени включительно по каноническим переменным. Были получены явные формулы линейной замены переменных, приводящей квадратичную часть гамильтониана к сумме двух гармонических осцилляторов. Нормализация членов третьей и четвёртой степени гамильтониана проводилась отдельно для нерезонансного случая и случаев резонансов третьего и четвёртого порядков. Для каждого случая в явном виде были получены выражения коэффициентов нормальной формы через параметры задачи.

На основании методов КАМ-теории [6]–[8] было показано, что при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно неустойчивость может возникнуть лишь на двумерной поверхности вырождения в трёхмерном пространстве параметров. Также было установлено, что на двумерной резонансной поверхности, отвечающей резонансу третьего порядка, существует одномерное множество — кривая, где точка либрации  $L_1$  устойчива по Ляпунову. Вне указанной кривой на этой резонансной поверхности имеет место неустойчивость по Ляпунову. Показано, что в случае резонанса четвёртого порядка коллинеарная точка либрации  $L_1$  всегда устойчива по Ляпунову.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №20-31-90065 и грант № 20-01-00637).

## Литература

- [1] Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трёх тел // Письма в Астрон. Ж. 1983. Т. 9. № 7. С. 432–435.
- [2] Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации при внутреннем резонансе третьего порядка // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 121–126.
- [3] Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трёх тел при внутреннем резонансе четвёртого порядка // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 610–615.
- [4] Bardin B.S., Avdushkin A.N. Stability of the collinear point  $L_1$  in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries. 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 927 012015 (2020). doi:10.1088/1757-899X/927/1/012015
- [5] Bardin B.S., Avdushkin A.N. Stability analysis of an equilibrium position in the photogravitational Sitnikov problem. AIP Conference Proceedings 1959, 040002 (2018). doi: 10.1063/1.5034605

- [6] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. № 6(114). С. 91–192.
- [7] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М. : Мир, 1973. 167 с.
- [8] Маркеев А. П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 312 с.

## Анализ устойчивости и бифуркаций центральных конфигураций в ограниченной плоской круговой задаче четырех тел

*Бардин Б.С.*,<sup>1,2</sup> *Волков Е.В.*<sup>1,2</sup>

*bsbardin@yandex.ru, evvolkov94@mail.ru*

<sup>1</sup>Московский авиационный институт,

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

<sup>2</sup>Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,

119334, Российская Федерация, Москва, ул. Бардина, 4

*Ключевые слова:* задача четырёх тел, центральная конфигурация, устойчивость по Ляпунову, бифуркация.

Рассматривается ограниченная задача четырёх тел. Предполагается, что тело малой массы движется под действием гравитационного притяжения трёх массивных тел, взаимодействующих по ньютоновскому закону всемирного тяготения и движущихся по круговым орбитам, образуя равносторонний треугольник неизменных размеров — лагранжеву постоянную конфигурацию. Движение всех четырёх тел происходит в одной плоскости. Тело малой массы не влияет на движение трёх других тел, а параметры задачи удовлетворяют условию Рауса, гарантирующему устойчивость лагранжевой конфигурации.

В связанной с лагранжевой конфигурацией вращающейся системе координат тело малой массы может находиться в положении относительного равновесия, т.е. составлять с тремя другими телами постоянную конфигурацию неизменной формы и размеров, так называемую центральную конфигурацию. Исследованию устойчивости центральных конфигураций в задаче четырёх тел посвящено много работ. Полное решение задачи об устойчивости по Ляпунову центральных конфигураций получено в случае двух равных масс притягивающих тел [1, 2, 4, 5]. Задача об устойчивости центральных конфигураций при произвольных массах рассматривалась в работах [3, 6, 7, 8].

При выполнении условия Рауса, может существовать восемь различных центральных конфигураций. В данной работе аналитически и численно исследовалась устойчивость и возможный сценарий бифуркации данных центральных конфигураций. В случаях, когда одна из трёх притягивающих точек имеет ма-



люю массу, центральные конфигурации были построены аналитически в виде рядов по степеням малого параметра. При произвольных значениях параметров исследование бифуркаций и устойчивости проводилось численно. Оказалось, что бифуркация возможна только в предельном случае, когда одна из масс обращается в ноль, и происходит по следующему сценарию: четыре из восьми центральных конфигураций переходят в одну из треугольных (лагранжевых) точек либрации. Других бифуркаций не существует.

Линейный анализ устойчивости центральных конфигураций показал, что пять из них всегда неустойчивы, три другие могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Для этих конфигураций были построены области устойчивости в линейном приближении. Внутри указанных областей был выполнен нелинейный анализ. С этой целью, при помощи метода нормальных форм и КАМ — теории, функция Гамильтона приводилась к нормальной форме до членов четвертой степени включительно.

На основании теоремы Арнольда–Мозера были получены строгие выводы об устойчивости центральных конфигураций по Ляпунову. Оказалось, что в областях устойчивости центральных конфигураций в линейном приближении при отсутствии резонансов до четвертого порядка, центральная конфигурация будет устойчива за исключением, возможно, вырожденного случая, который реализуется на кривой вырождения в плоскости параметров задачи. В настоящей работе также были получены выводы об устойчивости по Ляпунову в резонансных случаях, включая резонансы первого и второго порядков, имеющие место на границах областей устойчивости в линейном приближении.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00116).

## Литература

- [1] Budzko D. A. Linear Stability Analysis of Equilibrium Solutions of Restricted Planar Four—Body Problem // Computer algebra systems in teaching and research, 2009. Vol. 1.
- [2] Brumberg V. A. Permanent configurations in the problem of four bodies and their stability // Soviet Astronomy 1, 1957. pp. 57–79.
- [3] Grebenikov E. A., Gadomski L., Prokopenya A. N. Studying the stability of equilibrium solutions in a planar circular restricted four—body problem // Nonlinear Oscillations, 2007. Vol. 10, №1. pp. 66–82
- [4] Bardin B. S., Volkov E. V. Stability Study of a Relative Equilibrium in the Planar Circular Restricted Four—Body Problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 927, 2020.

- [5] Bardin B. S., Esipov P. A. Investigation of Lyapunov stability of a central configuration in the restricted four-body problem // AIP Conference Proceedings, 2018.
- [6] Будько Д. А. Исследование устойчивости равновесных решений ограниченной задачи четырёх тел // Вестник Национальной Академии Наук Белоруссии, 2011. №4, С. 55–59.
- [7] Будько Д. А., Прокопья А. Н. Символьно — численный анализ равновесных решений в ограниченной задаче четырёх тел // Программирование, 2010. Т. 36, №2. С. 13–20.
- [8] Eduardo S. G. Leandro On the central configurations of the planar restricted four-body problem // Journal of Differential Equations 226, 2006. pp. 323–351.

## О влиянии градиентности геомагнитного поля на управление электродинамической тросовой системой

*Дериглазов А.П., Тихонов А.А.*

*alexeideriglazov@gmail.com, a.tikhonov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* электродинамическая тросовая система, геомагнитное поле, космический мусор

Рассматривается электродинамическая тросовая система (ЭДТС), включающая проводящий трос и движущаяся в околоземном пространстве. Ток, протекающий вдоль троса, порождает силу Ампера, которая может быть использована в качестве тормозящей силы для троса и объекта, присоединенного к нему [1, 2]. В этом варианте ЭДТС является перспективным средством для удаления с околоземной орбиты космического мусора, представляющего опасность для функционирующих спутников и космических аппаратов, особенно пилотируемых. Наибольшей эффективностью отличаются ЭДТС, ориентированные вдоль местной вертикали [1]. В данном режиме ориентации достигается наибольшее тормозящее воздействие со стороны силы Ампера. Подобный возможный режим движения для тросов в центральном ньютоновском поле [1] разрушается под действием момента сил Ампера [2]. Существующие приемы стабилизации ЭДТС путем управления/отключения тока снижают эффективность ЭДТС как средства удаления мусора с околоземной орбиты.

Предлагается рассмотреть модель, снабженную разноименными зарядами на концевых телах, за счёт чего возникает дополнительный момент сил Лоренца [3], оказывающий стабилизирующий эффект на ЭДТС [4]. Путем управления концевыми зарядами возможно добиться асимптотической устойчивости

движения [5]. Поскольку ЭДТС является довольно протяженным объектом, который может достигать в длину даже десятков километров, имеет смысл поставить вопрос о влиянии градиентности геомагнитного поля на динамику управляемого движения ЭДТС. Для решения данной задачи была рассмотрена ЭДТС на круговой кеплеровой экваториальной орбите. Конструкция включает проводящий трос с массивными коллекторами зарядов, прикрепленными к его концам. В силу большой протяженности троса коллекторы моделируются точечными концевыми массами. На этих точечных массах сосредоточены разноименные заряды, отрицательный расположен ближе к поверхности Земли. Гравитационное поле Земли моделируется центральным ньютоновским гравитационным полем, а магнитное — полем прямого магнитного диполя. Поскольку упругие деформации троса и его изгиб не рассматриваются, ЭДТС моделируется тонким проводящим однородным стержнем с точечными грузами на концах. Далее для простоты будем называть такую систему связкой. Устойчивость по линейному приближению у положения относительного равновесия, характеризующегося небольшим отклонением связки от местной вертикали, была доказана в [6]. В данной работе для обеспечения асимптотической устойчивости найденного положения равновесия ЭДТС предложено рассматривать заряды, содержащие постоянные и переменные (управляемые) части. Управление строится пропорционально относительной угловой скорости связки с отрицательным коэффициентом. Полученный способ управления в условиях неоднородности геомагнитного поля отличается от предложенного в [5], где асимптотическая устойчивость движения связки обеспечивалась управлением только отрицательным зарядом на нижнем коллекторе. Установлено, что при учете градиентности геомагнитного поля возможно реализовать управление, формирующее диссипативный момент и обеспечивающее асимптотическую устойчивость рабочего режима движения связки путем управления как отрицательным, так и положительным зарядом. Таким образом подтверждено стабилизирующее воздействие момента сил Лоренца на ЭДТС и доказано, что путём управления зарядами коллекторов можно обеспечить асимптотическую устойчивость движения связки. Полученные аналитические результаты проверены и подтверждены численно в математических пакетах MATLAB и Maple.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

### Литература

- [1] Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
- [2] Corsi J., Iess L. Stability and control of electrodynamic tether for de-orbiting applications // *Acta Astronautica*. 2001. Vol. 48, N 5–12. pp. 491–501.
- [3] Petrov K. G., Tikhonov A. A. The moment of Lorentz forces, acting upon the charged satellite in the geomagnetic field. Part 1. The strength of the Earth's magnetic field

- in the orbital coordinate system // Vestnik of St.Petersburg State University, Ser. 1. 1999. N. 1. pp. 92–100.
- [4] Tikhonov A. A., Shcherbakova L. F. On Equilibrium Positions and Stabilization of Electrodynamic Tether System in the Orbital Frame // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, N. 040023.
- [5] Tikhonov A. A. A Control Method for Angular Stabilization of an Electrodynamic Tether System // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81, N. 2. pp. 91–114.
- [6] Deriglazov A. P., Tikhonov A. A. The effect of the nonuniformity of the Earth's magnetic field on electrodynamic space tether system dynamics // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2020. Vol. 53, N. 3. pp. 366–375.

## Эволюция орбит во внутренней круговой ограниченной задаче трёх тел со световым давлением

*Доброславский А.В.*  
*a.dobroslavskiy@gmail.com*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет),  
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* световое давление, ограниченная задача трёх тел, искусственный спутник Солнца

Рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трёх тел в нерезонансном случае. Предполагается, что пассивно гравитирующее тело (спутник) имеет большую парусность, поэтому учитывается световое давление. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются дважды усредненные уравнения движений в Кеплеровском фазовом пространстве, когда в качестве невозмущенной орбиты берётся кеплеровский эллипс с фокусом в притягивающем и излучающем теле (Солнце). Также на спутник воздействуют гравитационные силы со стороны внешнего тела, движущегося по круговой орбите в плоскости эклиптики (Юпитера).

Известно, что аналитическое исследование интегрируемой усредненной модели в классическом случае, когда световым давлением пренебрегают, сталкивается с немалыми трудностями ввиду отсутствия аналитического описания усредненной силовой функции. Впервые показано, что эта функция допускает, на основе применения формулы Парсевалея, явное аналитическое представление через известные специальные функции, допускающие разложение в сходящиеся степенные ряды. Показано также, что усредненные уравнения движений, учитывающие дополнительно влияние светового давления, интегрируются: со-

храняет постоянное значение большая полуось орбиты спутника, усреднённое значение возмущенной силовой функции, имеет место классический интеграл Лидова-Козаи.

Исследованы стационарные режимы колебаний в случае малых значений большой невозмущенной полуоси спутника (хилловский случай), их бифуркации в зависимости от коэффициента светового давления. Построены фазовые портреты колебаний при фиксированных значениях интеграла Лидова-Козаи и различных значениях коэффициента светового давления.

Исследования выполнены в Московском авиационном институте при поддержке гранта РФФИ №18-01-00820 А.

### Литература

- [1] Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трёх тел. Качественное исследование // Космические исследования, Т. 19, №1, 1981. С. 5–18.
- [2] Доброславский А.В., Красильников П.С. Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче трёх тел с учетом светового давления // Письма в астрономический журнал, Т. 44, №8–9, 2018. С. 618–630.

## Стабилизация стационарных движений спутника при помощи магнитных моментов.

*Каленова В.И., Морозов В.М., Рак М.Г.*

*kalenova44@mail.ru, moroz@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* стабилизация, спутник, магнитные системы управления, стационарные движения, нестационарная система, приводимость, алгоритмы управления.

Стационарные движения, такие как положения равновесия и регулярные прецессии — одни из распространенных и важных рабочих режимов движений спутника около центра масс при его движении по круговой орбите в гравитационном поле. Устойчивость этих движений подробно исследована. При этом характер устойчивости не является асимптотическим, и вопрос об их стабилизации тем или иным способом представляет практический интерес. Один из таких способов — стабилизация при помощи магнитных систем, которые широко используются в практике космических исследований. Методы создания стабилизирующего управляющего момента основаны на различных типах взаимодействия спутника с внешним магнитным полем. При одном методе используется эффект взаимодействия внутреннего магнитного момента спутника, создавае-

мого магнитными катушками, с геомагнитным полем. Другой метод управления основан на использовании электродинамического влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника [1]. Особенно много публикаций посвящено вопросам стабилизации положений равновесия спутника при помощи магнитных моментов. Обзор работ содержится в [2]. Работ, в которых рассматривается стабилизация вращательных движений спутника (в частности, регулярных прецессий), мало (см., например [3]).

Цель предлагаемой работы — представить строгий аналитический подход к задаче стабилизации регулярных прецессий симметричного спутника, центр масс которого движется по круговой орбите, при помощи магнитных моментов. Эта задача, как и ранее рассматривавшиеся задачи стабилизации положений равновесия, — существенно нестационарна. так как управляющий момент является функцией геомагнитного поля, которое изменяется во время движения спутника по орбите. Нестационарность задачи вносит, как известно, принципиальные трудности как в изучение управляемости, так и в разработку алгоритмов управления.

Предлагаемый подход основан на приводимости исходной линеаризованной нестационарной системы (ЛНС) к стационарной системе большей размерности. Этот подход был развит для ЛНС определенного класса и ранее применялся для решения ряда прикладных задач [4], в том числе для задачи стабилизации положения относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов различной природы [5]–[7]. Рассмотрены вопросы управляемости системы. Для приведенной стационарной системы строятся оптимальные алгоритмы стабилизации, основанные на LQR–методе на бесконечном интервале времени, который приводит к управлению в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость приведенной стационарной системы. Построенное стабилизирующее управление вводится в исходную нестационарную систему при помощи вспомогательных переменных, которые выбираются таким образом, чтобы преобразование от исходных переменных к переменным стационарной системы было невырожденным.

Работоспособность и эффективность предлагаемых алгоритмов подтверждается математическим моделированием.

## Литература

- [1] Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A. Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 139. pp. 122–129. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.06.033.
- [2] Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников // *Космические аппараты и технологии*. 2019. Т.3. №2(28). DOI: 10.26732/2618-7957-2019-2-73-86.

- [3] Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // *Advances in Space Research*, 2018. 62, pp. 142–151.
- [4] Каленова В.И., Морозов В.М. *Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики*. М.: Физматлит. 2010. 208 с.
- [5] Morozov V.M., Kalenova V.I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems // *AIP Conference Proceedings (The Eighth Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics)*, Vol. 1959. P. 020003-020003. DOI: 10.1063/1.5034579.
- [6] Kalenova V.I., Morozov V.M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // *Aerospace Science and Technology*, 2020. V.106. DOI: 10.1016/j.ast.2020.106105.
- [7] Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // *Косм. исслед.* 2020. Т. 58. №3. С.199–207.

## Об одной упрощенной модели эволюции гравитирующих масс

**Косенко И.И.<sup>1,3</sup> Сальникова Т.В.<sup>2</sup> Степанов С.Я.<sup>3</sup>**  
*kosenkoi@gmail.com, tatiana.salnikova@gmail.com, stepsj@yandex.ru*

<sup>1</sup>Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1,

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2

*Ключевые слова:* уравнения Власова–Пуассона, круговая ограниченная задача трёх тел, численная модель, метод частиц, пучок траекторий.

Хорошо известно, что динамика самогравитирующих масс описывается при помощи уравнений Власова–Пуассона [1]. Для построения решений этих уравнений применяются различные численные методы [2]. Наиболее популярными являются методы частиц. При этом вычисления требуют значительных компьютерных ресурсов.

В таком случае вполне естественной представляется задача построения упрощенных динамических моделей. Эти модели возникают естественным образом как этапы стадий эволюции гравитирующей системы. В качестве иллюстрации можно рассмотреть пример взаимодействующих облаков [3] в двумерной динамической модели. На начальном этапе рассматриваются два облака,

движущиеся навстречу друг другу. Численная симуляция процесса эволюции показывает, что большая часть массы «конденсируется» в две (почти) точечные массы, формируя, таким образом, систему двух частиц (тел) плюс разреженное облако, остающейся малой массы.

Приближенно будем считать, что этот остаток не влияет на движение сформированной системы двух тел. Дальнейшее поведение остающейся малой массы будем рассматривать в рамках модели круговой ограниченной задачи трёх тел: а) двух тел круговой задачи плюс б) пассивно гравитирующей частицы из состава остающегося разреженного облака. В последнем случае частицы облака друг с другом не взаимодействуют.

Таким образом, задача дальнейшей динамической эволюции может быть приближенно сведена к рассмотрению круговой ограниченной задачи трёх тел. Сам процесс эволюции иллюстрируется при помощи пучка траекторий, заполняющих в начальный момент некоторую область двумерного конфигурационного пространства ограниченной задачи. Сформируем эту область.

Круговую ограниченную задачу будем рассматривать в синодических координатах. Пучок траекторий в начальный момент будет заполнять кольцо. Начальные скорости предполагаются (в синодической системе) равными нулю. Это означает, что в сидерической координатной системе частицы начального облака совершают мгновенное твердотельное движение вместе с гравитирующими массами и треугольниками точек либрации  $L_4$ ,  $L_5$ . Угловая скорость этого движения предполагается порядка единицы.

Кольцо, заполняемое начальными конфигурациями, имеет центр в центре масс  $C$  всей механической системы — точно посередине между гравитирующими центрами. Наружный радиус кольца принимается большим расстояния  $|\overrightarrow{CL_4}|$ , а внутренний — меньшим этого расстояния. Вычисления производились с использованием достаточно плотного пучка траекторий. Результаты симуляции на относительно длинном промежутке времени могут иметь следующую динамическую интерпретацию.

Имеется область в орбитальной плоскости задачи, обладающая центральной симметрией и имеющая два рукава, соединенных перемычкой. Указанная область имеет плотность в два-три раза большую, чем плотность масс окружающего пространства. Такая конфигурация соответствует галактическому типу  $SB$  по классификации Э. Хаббла [1]. Ко всему прочему заметим, что внутри перемычки можно обнаружить две треугольные конфигурации, составленные из равносторонних треугольников, имеющих основание в виде отрезка, протяжённого между гравитирующими массами, и вершин  $L_4$ ,  $L_5$ . Эти конфигурации постепенно рассеиваются.



## Литература

- [1] Combes F., Boissé P., Mazure A., Blanchard A. Galaxies and cosmology / Translated by Mark Semour. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2004. 444 pp.
- [2] Hockney R. W., Eastwood J. W. Computer simulation using particles / New York : Taylor and Francis Group, 1988. 540 pp.
- [3] Salnikova T. V., Stepanov S. Ya., Kugushev E. I. Possible models of the planetary systems formations // Internat. J. Modern Phys. A. V. 35. № 02n03. Online Ready. 2020.

## Поступательно–вращательное движение осесимметричного спутника переменной массой и размера в нестационарном центральном гравитационном поле

*Минглибаев М.Дж.,<sup>1,2</sup> Бижанова С.Б.<sup>1</sup>*

*minglibayev@gmail.com, bizhanova.saltanat92@gmail.com*

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби,

050040, Казахстан, Алматы, пр. аль-Фараби 71,

<sup>2</sup>Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова,

050020, Казахстан, Алматы, Обсерватория, д. 23

*Ключевые слова:* поступательно–вращательное движение, нестационарное осесимметричное тело, вековые возмущения.

В гравитирующих двойных системах в ходе эволюции меняются массы, размеры и формы реальных небесных тел [1]–[3]. В связи с этим становится актуальным создание математических моделей задачи двух небесных тел с переменными массами, размерами и формами.

Допустим выполнение следующих условий:

1. Первое тело — «центральное», с переменной массой  $m_1 = m_1(t)$  есть шар с переменной плотностью, со сферическим распределением и с переменным радиусом  $l_1 = l_1(t)$ .

2. Второе тело — «спутник», с массой  $m_2 = m_2(t)$  обладает осесимметричным динамическим строением и формой с характерным линейным размером  $l_2 = l_2(t)$ , а его моменты инерции второго порядка переменные и заданные известные функции времени. Такой «спутник» обладает переменным сжатием и его главные центральные моменты инерции  $A, B, C$  удовлетворяют соотношениям  $A(t) = B(t) \neq C(t)$ ,  $C(t) - A(t)/C(t) \neq const$ .

3. Нестационарное осесимметричное тело обладает экваториальной плоскостью симметрии. Следовательно, оно обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии [1]–[4].

4. Массы центрального тела и спутника изменяются в различных темпах изотропно, при этом не появляются реактивные силы и дополнительные вращательные моменты  $\dot{m}_1/m_1 \neq \dot{m}_2/m_2$ .

5. Оси собственной системы координат направим вдоль линий пересечения этих трёх взаимно перпендикулярных плоскостей, совпадающие с главными осями инерции тела. Ориентация этих осей относительно тела в ходе эволюции остается неизменной.

6. В выражении для силовой функции ограничимся приближением с точностью до второй гармоники включительно.

Уравнения поступательно-вращательного движения описаны в аналогах переменных Делоне–Андуайе. При этом невозмущенное движение является аналогом движения Эйлера–Пуансо — вращательное движение свободного нестационарного осесимметричного тела вокруг собственного центра инерции [1]–[3].

Эволюционных уравнений сводится к системе четвертого порядка с одним первым интегралом [3]

$$\dot{H} = \left( \frac{E(t)}{\tilde{m}(t)} \right) \left[ \frac{\partial I}{\partial h} \right], \quad \dot{h} = - \left( \frac{E(t)}{\tilde{m}(t)} \right) \left[ \frac{\partial I}{\partial H} \right], \quad \dot{H}' = E(t) \left[ \frac{\partial I}{\partial h'} \right], \quad \dot{h}' = -E(t) \left[ \frac{\partial I}{\partial H'} \right], \quad (1)$$

$$I = I(H, h, H', h') = I_0 = const. \quad (2)$$

$$W_{sec} = \frac{\mu_0^2}{2\sigma^2(t)} \left( \frac{1}{L^2} \right) + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left( \frac{f m_1 (C - A)}{2\sigma^3} \left[ \frac{1}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \right] \right) - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left( \frac{3f m_1 (C - A)}{2\sigma^3} \left[ \frac{I}{4a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \right] \right) - \frac{1}{2} b \sigma^2 \left[ a^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \right] \quad (3)$$

$$F_{sec} = \frac{1}{2A} (G'^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) (L'^2) + \frac{f m_1 (C - A)}{2\sigma^3} \left[ \frac{1}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \right] - \frac{3f m_1 (C - A)}{2\sigma^3} \left[ \frac{I}{4a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \right] - \frac{1}{2} b \sigma^2 \left[ a^2 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \right] \quad (4)$$

После **решение система** (1) интегрируются оставшиеся уравнения

$$\dot{L}_{sec} = 0, \quad \dot{G}_{sec} = 0, \quad \dot{l}_{sec} = - \frac{\partial W_{sec}}{\partial L_{sec}}, \quad \dot{g}_{sec} = - \frac{\partial W_{sec}}{\partial G_{sec}} \quad (5)$$

$$\dot{L}'_{sec} = 0, \quad \dot{G}'_{sec} = 0, \quad \dot{l}'_{sec} = \frac{\partial F_{sec}}{\partial L'_{sec}}, \quad \dot{g}'_{sec} = \frac{\partial F_{sec}}{\partial G'_{sec}} \quad (6)$$

Полученные эволюционные уравнения исследуются численными методами.

## Литература

- [1] Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Германия: Изд-во «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012. 229 с.

- [2] Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Bizhanova S.B. Investigation of the Secular Perturbations in the Two-Body Problem with Variable Masses // Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Vol. IX. 2020. pp. 204–219.
- [3] Бижанова С.Б., Минглибаев М.Дж., Прокопеня А.Н. Исследование вековых возмущений поступательно-вращательного движения в нестационарной задаче двух тел с применением компьютерной алгебры // Журнал вычислительной математики и математической физики. Том 60, №1. 2020. С.29–38. doi:10.1134/S0965542520010054
- [4] Баркин Ю.В., Демин В.Г. Поступательно-вращательное движение небесных тел. Итоги науки и техн. АН СССР. Астрономия. 1982. Т. 20. С. 115–134.

## Новые нестационарные треугольные и прямолинейные решения классической круговой ограниченной задачи трёх тел

*Минглибаев М.Дж.*<sup>1,2</sup> *Жумабек Т.М.*<sup>1</sup>  
minglibayev@gmail.com, torebekzhumabek@hotmail.com

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
050040, Казахстан, Алматы, пр. аль-Фараби 71,

<sup>2</sup>Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова,  
050020, Казахстан, Алматы, Обсерватория, д. 23

*Ключевые слова:* ограниченная задача трёх тел, неинерциальная центральная система координат, точные частные нестационарные решения.

Движения малого естественного или искусственного небесного тела в поле тяготения двух основных тел хорошо описывается математической моделью широко известной ограниченной задачей трёх тел [1]–[4]. В связи с отсутствием общего аналитического решения в конечном виде, многие аспекты задачи изучены различными качественными и численными методами. Поиск новых точных частных аналитических решений, кроме известных [1,2], представляются актуальным.

В настоящей работе аналитически исследуется классическая ограниченная задача трёх тел на основе новой концепции. Новая концепция базируется на понятие центра сил. Центр сил существующий в классической задаче трёх тел [4] также сохраняется в ограниченной задаче трёх тел [5]–[7]. Получены дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трёх тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил. При этом массы основных тел различные. Исходя из свойств новой специальной неинерциальной центральной системы координат, найден инвариант центра сил ограниченной задачи трёх тел в аналитической форме в этой же системе координат. Во введенной новой специальной неинерциальной центральной си-



стеме координат ограниченная задача трёх тел разделена на две отдельные задачи на уровне дифференциальных уравнений [6, 7]. Первая — треугольная ограниченная задача трёх тел, когда три тела всё время движения образуют треугольник. Вторая — коллинеарная ограниченная задача трёх тел, когда три тела всё время движения лежат на одной и той же прямой. Корректность такого разделения исследуемой задачи на две в специальной неинерциальной системе координат обеспечивается инвариантом центра сил найденный в этой же системе координат. Эти две ограниченные задачи трёх тел аналитически исследуются с использованием инварианта центра сил, установленного в специальной неинерциальной центральной системе координат.

Найдены новые точные аналитические частные нестационарные плоские решения дифференциальных уравнений движения круговой ограниченной задачи трёх тел в виде равнобедренного треугольника с переменной высотой в специальной неинерциальной центральной системе координат [5, 8]. Решение дифференциальных уравнений движения круговой равнобедренной ограниченной задачи трёх тел сведено к квадратурам, которая совпадает с соответствующей формулой частного случая симметричной задачи двух неподвижных центров [2]. Отдельно выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трёх тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных. Анализированы найденные решения круговой ограниченной задачи трёх тел в форме равнобедренного треугольника с переменной высотой.

Также выведены дифференциальные уравнения коллинеарной ограниченной задачи трёх тел во вращающейся неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных. Получены три новые дифференциальные уравнения движения коллинеарной ограниченной задачи трёх тел, в трёх областях возможного расположения безмассового тела, стационарные решения которых соответствует трем точкам либрации Эйлера. Установлены новые точные нестационарные частные аналитические решения полученных трёх новых дифференциальных уравнений движения круговой коллинеарной ограниченной задачи трёх тел.

## Литература

- [1] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [2] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 456 с.
- [3] Демин В.Г., Косенко И.И., Красильников П.С., Фурта С.Д. Избранные задачи небесной механики. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 210с.
- [4] Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 524с.

- [5] Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М. Новые уравнение движения ограниченной задачи трёх тел в специальной неинерциальной системе координат // Вестник Казахского Национального Педагогического Университета им. Абая, серия «физико-математические науки». 2015. №1 (49). С. 62–68.
- [6] Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М., Маемерова Г.М. Исследование ограниченной задачи трёх тел в специальной неинерциальной центральной системе координат // Вестник Карагандинского университета, серия «Математика». 2017. №3(87). С. 95–108.
- [7] Minglibayev M.Zh., Zhumabek T.M. New exact particular analytical solutions of the triangular restricted three-body problem // Bulletin of the Karaganda university, mathematics series. 2020. № 1(97). pp. 111–121. DOI: 10.31489/2020M1/111-121.
- [8] Жумабек Т.М., Минглибаев М.Дж. Об одном случае плоской ограниченной задачи трёх тел // Математический журнал. Институт математики и математического моделирования. Алматы. 2016. №4 (62). С. 99–120.

## **Об использовании электромагнитной индукции для бесконтактного захвата объекта космического мусора**

*Патель И.К., Тихонов А.А.*

*st083917@student.spbu.ru , a.tikhonov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* космический мусор, бесконтактный захват, электромагнитная индукция.

Анализируется возможность бесконтактного захвата электропроводящего объекта космического мусора (ОКМ) с использованием электромагнитной индукции на основе закона индукции Фарадея и закона Ленца. Предполагается, что космический аппарат (КА), осуществляющий захват ОКМ, снабжен тороидальной электрической катушкой, генерирующей достаточно сильное магнитное поле и индуцирующей магнитное поле на ОКМ, приближающемся к КА. Орбитальная динамика движения ОКМ относительно КА изучается с помощью численного моделирования. Предложенный метод электромагнитного захвата электропроводящего ОКМ может быть использован для перевода ОКМ на орбиту захоронения.

### **Мотивация к исследованию.**

В настоящее время, по оценкам Orbital Debris Program Office (NASA), в околоземном пространстве находится примерно 23000 объектов космического мусора с характерными размерами более 10 см., 500000 объектов космического мусора с характерными размерами от 1 до 2.5 см и более 100 миллионов

объектов космического мусора с характерными размерами порядков 1 мм и меньше. Все эти объекты космического мусора (ОКМ) представляют опасность для искусственных спутников Земли (ИСЗ), пилотируемых КА и орбитальных станций. При этом, как показывают результаты математического моделирования [1], вероятность столкновения ИСЗ с ОКМ примерно на 30% больше, чем вероятность столкновения спутников между собой. Поэтому задача активного удаления ОКМ является актуальной для уменьшения риска опасных столкновений. Для решения этой задачи разрабатываются контактные и бесконтактные способы удаления ОКМ. Контактные способы захвата и удаления ОКМ основаны на использовании контактирующих устройств, таких как роботизированная рука или трос, для прикрепления к ОКМ. Эти способы достаточно сложны в применении ввиду ограниченного числа степеней свободы и малой приспособленности к взаимодействию с вращающимися объектами ОКМ. Например, наибольшая скорость вращения ОКМ, которую может выдержать жесткий захват, составляет всего лишь 4-5 град/с [2]. Бесконтактные методы удаления ОКМ имеют большое преимущество по сравнению с контактными методами, поскольку не требуют решения проблем, связанных с захватом и удержанием вращающегося ОКМ. Существенным общим недостатком известных бесконтактных методов удаления ОКМ является отсутствие контроля над траекторией ОКМ после выхода ОКМ из зоны взаимодействия с активным КА.

### **Результаты.**

В данной работе анализируется возможность бесконтактного захвата электропроводящего ОКМ с использованием электромагнитной индукции. Предполагается, что КА, осуществляющий захват ОКМ, снабжен тороидальной электрической катушкой, генерирующей достаточно сильное магнитное поле и индуцирующей магнитное поле на ОКМ, приближающемся к КА. В соответствии с законом индукции Фарадея и законом Ленца, возбуждается сила Лоренца, действующая на магнитно восприимчивый ОКМ, движущийся через неоднородное магнитное поле КА [3]. В результате воздействия силы Лоренца магнитно восприимчивый ОКМ оказывается захвачен магнитным полем катушки с током. При этом не требуется решать известную при уборке космического мусора задачу предварительного погашения угловой скорости ОКМ, поскольку наличие угловой скорости ОКМ не препятствует захвату ОКМ магнитным полем КА. Более того, вихревые токи Фуко, возникающие внутри вращающегося проводящего ОКМ, способствуют погашению угловой скорости ОКМ в магнитном поле КА. Орбитальная динамика движения ОКМ относительно КА изучается с помощью численного моделирования. Предложенный метод электромагнитного захвата электропроводящего ОКМ может быть использован для перевода ОКМ на орбиту захоронения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

## Литература

- [1] Horstmann, A., Kerschull, C., Müller, S., Gamper, E., Hesselbach, S., Soggeberg, K., Ben Larbi, M.K., Becker, M., Lorenz, J., Wiedemann, C., Stoll, E., 2018. Survey of the Current Activities in the Field of Modeling the Space Debris Environment at TU Braunschweig. *Aerospace* 5, 37.
- [2] Castronuovo M.M. Active space debris removal – a preliminary mission analysis and design, *Acta Astronautica*. 2011. Vol. 69. N 9. p. 848-859.
- [3] Griffiths D.J. Introduction to electrodynamics. Pearson, fourth edition, 2013, p. 599.

## Структурные особенности фотогравитационной небесной механики

*Поляхова Е.Н.*<sup>1</sup>, *Королев В.С.*<sup>1</sup>, *Потоцкая И.Ю.*<sup>1</sup>, *Степенко Н.А.*<sup>1</sup>,  
*Туреибаев А.Т.*<sup>2</sup>

*pol@astro.spbu.ru, vokorol@bk.ru, irinapototskaya@yandex.ru, nick\_st@mail.ru,*  
*aturesh@mail.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Кызылординский Государственный Университет им. Коркыт Ата,  
120000, Казахстан, Кызылорда, ул. Айтеке Би 29А

*Ключевые слова:* световое давление, солнечный парус, управление, точки либрации, устойчивость.

Если гравитационное поле притяжения дополняется полем сил светового отталкивания, то образуется фотогравитационное силовое поле [1]. Отметим основные задачи фотогравитационной небесной механики.

Гелиоцентрические движения в рамках задачи двух тел или орбитальные переходы с учётом светового давления, в том числе гелиоцентрические переходы с орбиты Земли к Солнцу, планетам, астероидам или кометам. Исследуется управление движением космического аппарата (КА) с учётом светового давления (орбитальная динамика или переходы с малой тягой сил давления на солнечный парус), которое позволяет определить оптимальные траектории по затратам или времени маневрирования.

Геоцентрические движения в рамках ограниченной задачи трёх тел в системе Солнце-Земля-КА. Использование паруса для геоцентрического разгона и ухода на орбиту Луны или выхода из сферы действия Земли, исследование устойчивости и стабилизации положения КА в окрестности точек либрации, орбитальная коррекция или формирование геосинхронных широтных орбит с использованием солнечных парусов, использование Солнечного паруса в качестве пространственного отражателя для освещения полярных областей на поверхности Земли.

Движение в рамках ограниченной задачи трёх тел в системе с двумя излучающими звёздами (двойная Звезда и КА). Нестационарные модификации фотогравитационных двух- или трёхмерных задач с переменными физическими параметрами.

Вращательные движения КА при учете давления солнечной радиации. Контроль ориентации и управление положением в пространстве под действием момента сил светового давления с учетом изменения размеров паруса или при использовании относительных перемещений элементов.

В рамках общей классификации фотогравитационных задач рассматривается: специфика управления КА и солнечными парусами, которая учитывает поступательное и вращательное движение всей конструкции; учет влияния на объекты светового давления со стороны излучающих тел (Солнце или двойные звёзды) как возмущающего фактора в движении тела (КА или частицы), которые зависят от положения и ориентации системы парусов, что позволяет адекватно моделировать реальную картину задач небесной механики [2, 3].

Уравнения движения с учетом возмущений могут быть представлены в разных формах, основанных на моделях задачи двух или трёх тел, используя удобные системы координат и основные параметры. Гелиоцентрический полет к планетам, астероидам или к Солнцу можно рассматривать в первом приближении как движение в фотогравитационном поле при действии дополнительной силы светового давления лучей на поверхность паруса для фиксированного угла ориентации нормали к плоскости паруса. При проектировании геоцентрических орбит вблизи Земли или для размещения КА в точках либрации системы Солнце-Земля-КА требуется использовать более общую модель фотогравитационной ограниченной задачи трёх тел [4]. Получены условия и даны примеры существования точек либрации в задачах с одним и с двумя излучающими центрами.

Предварительные кинематические ограничения на траектории полёта КА с солнечным парусом в околосолнечные области предлагаются в виде уравнений известных классических кривых. Сравнение различных случаев не кеплеровых орбит произведено по времени полета и по энергетике. Последний критерий имеет в виду выбор такого управления углом установки паруса, при котором затраты энергии на поворот плоскости паруса минимальны как по числу контролируемых поворотов, так и в смысле величин их углов.

В пространственной задаче с двумя излучающими главными телами (двойная звезда) существуют треугольные точки либрации, которые формально устойчивы для почти всех значений параметров из области устойчивости в линейном приближении. Применение преобразования Биркгофа позволяет записать функцию Гамильтона канонических уравнений в удобном виде [4].



## Литература

- [1] Поляхова Е. Н. К столетию фотогравитационной небесной механики. Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. Вып. 4. 2004. С. 89–118.
- [2] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М. Наука. 1986. 306 с. (2-е и 3-е изд. М. URSS (Либроком) 2010, 2018).
- [3] Korolev V. S., Polyakhova E. N., Pototskaya I. Y., Stepenko N. A. Mathematical Models of a Solar Sail Spacecraft Controlled Motion // Proceedings of 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2020, 2020, 9140472.
- [4] Пережогин А. А., Турешбаев А. Т. Об устойчивости треугольных точек либрации в фотогравитационной задаче трёх тел // Астрон. журнал. 1989. Т. 66. С. 859–865.

## Импульсное управление опасным астероидом в области резонанса 1:1

*Прошкин В.А., Чура А.С.*

*proschkin@mail.ru, anton4405anton@yandex.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* опасный астероид, импульсное управление, резонанс.

В работе исследуется возможность импульсного управления астероидом, сближающимся с Землей. Под резонансом 1:1 понимается совпадение периодов обращения астероида и Земли по их оскулирующим кеплеровским эллипсам вокруг Солнца. Задача о движении опасных астероидов рассматривается как возмущение круговой ограниченной задачи трёх тел (Солнце–Земля–астероид).

В невозмущенной задаче в системе координат, вращающейся вместе с Землей вокруг Солнца, рассмотрим торическую область  $\mathbf{T}$  с центром в Солнце, содержащую все точки либрации  $L_1, \dots, L_5$  и Землю. «Толщина» этой области равна нескольким расстояниям между точками  $L_1$  и  $L_2$ . Меридиональными сечениями разобьём область  $\mathbf{T}$  на две части: область  $\mathbf{ТП}$ , содержащую точки  $L_3, L_4, L_5$  (подковообразная область), и область  $\mathbf{ТО}$  — все остальное (окрестность Земли с точками  $L_1$  и  $L_2$ ). В фазовом пространстве круговой ограниченной задачи трёх тел как возмущенной задачи Кеплера существует многообразие, соответствующее резонансу 1:1. В его окрестности есть орбиты, расположенные в области  $\mathbf{T}$  [1]. Из них опасными будем называть орбиты, проходящие через область  $\mathbf{ТО}$ , безопасными — остальные. Из опасных выделим орбиты квазиспутников, они целиком лежат в  $\mathbf{ТО}$ . В [1] описана теория, с помощью которой для каждого астероида в области резонанса 1:1 можно определить тип траектории в области  $\mathbf{T}$ , на которой он находится. Мгновенное изменение ско-

рости астероида (импульс скорости) может изменить тип траектории. На этом основана предлагаемая двухимпульсная схема управления.

Первый импульс делается за несколько месяцев до момента сближения. Цель импульса — использовать сближение с Землей для перевода астероида в резонансную область. Для крупных астероидов такой перевод без использования гравитационного поля Земли практически невозможен. Второй импульс и момент его выполнения выбираются в зависимости от цели управления и от того, на траектории какого типа он оказался после сближения.

Для численного построения траекторий астероида в работе использовалась более точная модель, чем круговая ограниченная задача трёх тел. В ней учитывались гравитационные поля Солнца, Земли, Юпитера и Луны, а также одна из моделей солнечного ветра. В качестве конкретных примеров рассматривались задачи об управлении астероидами Дуэнде (2012 DA14, сближение с Землей было 15.02.2013) и Апофис (2004 MN4, тесное сближение с Землей предстоит в апреле 2029 года). Цель управления — перевод астероидов либо на одну из безопасных орбит, либо на орбиту квазиспутника. В возмущенной задаче эти орбиты являются оскулирующими. Задача точной оптимизации не ставилась, но из любого множества импульсов скорости, решающих конкретную задачу перехода, выбирался импульс, наименьший по модулю.

В обоих случаях оказалось, что множество импульсов, переводящих астероиды в резонансную область, существует. При длине интервала времени между моментом выполнения импульса и моментом сближения порядка одного года модуль достаточного импульса имеет порядок  $1\text{ м/с}$ .

Для того чтобы астероиды в среднем удалялись от Земли в относительном движении, Апофис необходимо перевести на оскулирующую кеплеровскую орбиту с периодом меньше года, а Дуэнде — больше года. При этом они оба оказываются на опасных орбитах в области **T**. Но следующее сближение в обоих случаях может произойти не раньше, чем через сотню лет. Выбор момента выполнения второго импульса для перехода в область **ТII** существенного значения не имеет. Так, через 30 лет для обоих астероидов достаточным оказывается импульс порядка  $20\text{ м/с}$ .

Для перехода на орбиты квазиспутников в области **ТО** нужно, наоборот, Апофис перевести на орбиту с кеплеровским периодом больше года, а Дуэнде — меньше. Затем, примерно через 10 лет, сделать импульс порядка  $15\text{ м/с}$ .

Полученные оценки показывают, что вторые импульсы практически нереализуемы. Действительно, импульс порядка  $3\text{ м/с}$  Апофису может сообщить либо ядерный взрыв на его поверхности, либо столкновение с другим, более мелким (но не слишком) астероидом [2, 3]. Однако при наличии достаточно большого запаса времени (как при переходе в область **ТII**) ту же задачу можно решить

с помощью нескольких доступных импульсов, выбирая их каждый раз по той же методике.

### Литература

- [1] Сидоренко В.В., Нейштадт А.И., Артемьев А.В., Зеленый Л.М. Формирование и разрушение квазиспутникового режима движения малых небесных тел // ДАН. 2013. Т. 450. № 3. С. 286–290.
- [2] Ивашкин В.В., Стихно К.А. О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей. // *Астрономический вестник*. 2009. Т. 43. № 6. С. 502–516.
- [3] Эйсмонт Н.А., Боярский М.Н., Ледков А.А., Назиров З.З., Данхем Д., Шустов Б.М. О возможности наведения малых астероидов на опасные небесные объекты с использованием гравитационного маневра. // *Астрономический вестник*. 2013. Т. 47. № 4. С. 1–9.

## Особенности относительного движения космической тросовой системы с неидеальным солнечным парусом

*Родников А.В.*

*rodnikovav@mai.ru*

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет),

125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* солнечный парус, космическая тросовая система, относительное движение.

В настоящее время теоретические исследования динамики космических аппаратов (КА) с солнечным парусом начали реализовываться в практических космических миссиях [1]. При этом, как в теории, так и на практике, изучается влияние солнечной радиации на «глобальное» движение КА, то есть на его движение относительно больших тел Солнечной системы (Земли, Солнца, других планет) [2, 3]. Однако, солнечный парус может оказаться эффективным двигателем также и при решении «локальных» задач, например, при строительстве или изменении конфигурации тяжёлой гелиоцентрической космической станции (КС), когда в условиях дефицита топлива требуется перемещать грузы относительно ядра (базового блока) такой станции. В [4] показано, что если ограничить движение КА с солнечным парусом некоторой связью, например, тросом, закрепленным на КС, то давление солнечной радиации на поверхность паруса позволяет создавать ускорение, составляющее острый угол с направлением на Солнце, то есть способствовать движению в сторону Солнца. При этом

для КС с радиусом орбиты порядка 1 а.е., парус, размеры которого допустимы современными технологиями, способен перемещать грузы массой до 1 тонны на расстояние нескольких километров за несколько часов. Необходимо, тем не менее отметить, что в [4] рассмотрен парус с идеальной отражающей поверхностью, в то время как реализуемые миссии используют материал, отражающий лишь 90% солнечной радиации.

Если считать, что только отраженные и поглощенные фотоны передают импульс солнечному парусу, то силу солнечной радиации, действующую на парус, можно определить как

$$\mathbf{F} = S\tilde{p} \left( \varkappa n_x^2 \mathbf{n} + \frac{1 - \varkappa}{2} n_x \mathbf{e}_x \right), \quad (1)$$

где  $S$  — площадь солнечного паруса,  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к плоскости паруса,  $\mathbf{e}_x$  — единичный вектор местной вертикали, направленный от Солнца,  $n_x = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_x)$  — косинус угла между нормалью к парусу и местной вертикалью,  $\varkappa$  — коэффициент отражения, по-видимому, несколько меньший, чем соответствующий эталонный коэффициент для материала паруса, а  $\tilde{p}$  — величина, имеющая размерность давления, несколько меньшая, с учетом различных факторов, в частности, рассеивания, эталонной величины давления солнечной радиации на идеальную отражающую поверхность, ортогональную солнечным лучам, на рассматриваемом расстоянии от Солнца.

Принимая коэффициент  $\varkappa$  независимым от угла наклона паруса к местной вертикали, нетрудно убедиться, что угол между  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{e}_x$  не превосходит  $\arcsin \varkappa$ . Из этого, в частности, следует, что если КА с солнечным парусом движется по прямолинейному тросу, концы которого закреплены на КС, то проекция ускорения, создаваемого солнечной радиацией на трос может быть направлена «в сторону Солнца», только если угол между тросом и направлением на Солнце будет меньше, чем  $\arccos \varkappa$ , то есть имеет место явление, аналогичное тому, что в парусном судовождении обозначается термином «левентик», означающем невозможность движения против ветра под слишком острым углом к направлению ветра.

Аналогичная ситуация возникает, когда КА с солнечным парусом связан тросом с какой-нибудь точкой КС. В этом случае движение КА в орбитальной системе отсчета описывается, с учетом (1), уравнением

$$\mathbf{r}'' = \varkappa n_x^2 \mathbf{n} + \frac{1 - \varkappa}{2} n_x \mathbf{e}_x - 2\varepsilon [\mathbf{e}_z, \mathbf{r}'] + \lambda \mathbf{r}, \quad \lambda \leq 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}) \leq 1, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}$  — безразмерный радиус вектор КА,  $\lambda$  — множитель Лагранжа,  $\varepsilon$  — малый параметр, определяемый орбитальным движением КС,  $\mathbf{e}_z$  — орт, направленный перпендикулярно орбите КС, а штрихом обозначена производная по специальному безразмерному времени. Если назвать ближайшую к Солнцу точку сферы  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 1$  «южным полюсом», а противоположную ей точку — «северным

полюсом», то окажется, что солнечный парус не может создавать ускорение, направленное «в сторону Солнца» в пределах некоторого экваториального пояса. Кроме того, некоторая окрестность «южного полюса» оказывается недоступной для маятниковых движений с постоянно ориентированным солнечным парусом.

### Литература

- [1] LIGHTSAIL Flight by light for CubeSats [Электронный ресурс]. URL: <https://www.planetary.org/explore/projects/lightsail-solar-sailing/>
- [2] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: Наука., 1986. 304 с.
- [3] McInnes, Colin R.B. Solar Sailing Technology, Dynamics and Mission Applications. Springer, Heidelberg, 2004
- [4] Rodnikov, A. Coastal navigation by a solar sail // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, 868. 012021.

## Замкнутые траектории межпланетных перелётов с солнечным парусом

*Рожков М.А., Старина О.Л.*  
*rozhkovmiro@gmail.com, solleo@mail.ru*

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С. П. Королёва  
443086, Российская Федерация, Самара, Московское ш., 34

*Ключевые слова:* Оптимальные траектории, гелиоцентрический перелёт, моделирование движения.

В работе рассматриваются замкнутые траектории движения солнечного паруса, с помощью которых космический аппарат сможет непрерывно курсировать от одной планеты к другой. Предлагаемый ряд траекторий между Землей и планетами земной группы, позволит сформировать постоянный поток груза при использовании нескольких аппаратов одновременно. Траектории в данной работе были получены путём оптимизации по принципу максимума Понтрягина.

### Доставка грузов солнечным парусом.

Солнечные паруса, несмотря на малую тягу, имеют ряд преимуществ по сравнению с другими средствами передвижения в космосе. Их высокая массовая эффективность обуславливается отсутствием необходимости в топливе, что является важным фактором для длительных миссий. Традиционно солнечные паруса применяются для осуществления высокоэнергетических перелётов к Солнцу, формирования синхронных стационарных широтных орбит или набора скорости для увода корабля за пределы солнечной системы [1]. Однако,

существуют работы, подтверждающие эффективность использования солнечного паруса для транспортировки грузов при многократном использовании [2]. Таким образом были спроектированы целые проекты по доставке грунта с поверхности различных планет на Землю при помощи давления солнечного света [3]. Исследования в области построения оптимальных траекторий для данного класса миссии продолжают предоставлять новые результаты и траектории [4].

### **Замкнутые перелёты с парусом.**

Существующие работы по изучению межпланетных перелётов солнечного паруса с возвращением на Землю включают в себя ожидание даты старта для осуществления оптимального перелёта по быстродействию или в следствие некоторых ограничений. Однако, существуют траектории, которые позволяют космическому аппарату совершать пролёты вблизи целевой планеты и возвращаться к начальной без ожидания и оптимально по критерию минимизации времени [5]. В данной работе строятся именно такие траектории с использованием принципа максимума Понтрягина, которые позволяют солнечному парусу осуществлять непрерывные перелёты между Землёй и целевой планеты (Марс, Венера, Меркурий). Результаты сравниваются с известными траекториями для аналогичных перелётов, показывая их достоинства и недостатки. Дополнительно, при построении траекторий учитываются температурные ограничения [6] и неидеальность отражающей поверхности [7]. Полученные результаты могут быть использованы для проектирования транспортной сети космических аппаратов с солнечным парусом, выполняющих доставку грузов от Земли к планетам земной группы.

### **Литература**

- [1] Поляхова Е. Н. Космический полёт с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука., 1986. 304 с.
- [2] Robert H. F. Solar Sails for Mars Cargo Mission // AIP Conference Proceedings, 2002. Vol. 608, pp. 374–380. doi: 10.1063/1.1449747
- [3] Hughes G. W., Macdonald M., McInnes C. R., Atzei A., Falkner P. Sample return from Mercury and other terrestrial planets using solar sail propulsion // Journal of spacecraft and rockets, 2006. Vol. 43(4), pp. 828–835. doi: 10.2514/1.15889
- [4] Vergaaij M, Heiligers J. Time-optimal solar sail heteroclinic-like connections for an Earth-Mars cyler // Acta Astronautica, 2018. Vol. 152, pp. 474–485. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.08.008
- [5] Ишков С. А., Милокумова О. Л., Салмин В. В. Оптимизация замкнутых межпланетных перелётов Земля-Марс-Земля с малой тягой // Космические исследования. 1995. №33(2). С. 210–219.

- [6] Chernyakina I. V., Rozhkov M. A., Starinova O. L. Influence of temperature restrictions on the heliocentric motion controlling of a solar-sailing spacecraft // InIOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020. Vol. 984, No. 1, P. 012027. doi: 10.1088/1757-899X/984/1/012027
- [7] Хабибуллин Р. М. Программа управления для некомпланарного гелиоцентрического перелёта к Венере космического аппарата с неидеально отражающим солнечным парусом // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. №18(4). С. 117–128. doi: 10.18287/2541-7533-2019-18-4-117-128

## Исследование возможных областей накопления космических масс в Солнечной системе

*Сальникова Т.В.<sup>1</sup>, Самохин А.С.<sup>1,2</sup>*

*tatiana.salnikova@gmail.com, samokhin@ipu.ru*

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1,

<sup>2</sup>Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,

117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65

*Ключевые слова:* накопление космических масс, Солнечная система, материальная точка, численное моделирование, зоны скопления масс, гравитационный захват частиц, скопления пыли.

Космические массы, малые тела: астероиды, частицы и облака пыли наполняют межпланетное пространство Солнечной системы. До сих пор нет однозначного ответа, почему вместо одной планеты мы имеем стабильную конфигурацию пояса астероидов с небольшими телами вроде Цереры. Есть много гипотез о формировании пояса.

Наше исследование направлено на изучение вопроса формирования Солнечной системы и получение знаний о заселении межпланетного пространства небесными телами. Причинами интереса к этой теме являются изучение космического пространства в практических целях, выяснение реальности космических угроз, а также возможность, используя новые знания о малых телах, прояснить модели эволюции Солнечной системы в целом.

Целью данного исследования является поиск траекторий малых небесных тел, начальная параболическая скорость которых из-за пролёта зоны влияния Юпитера уменьшится до скорости, близкой к круговой относительно Солнца, создавая тем самым зоны скопления пыли на определенных орбитах.

Траектории малых космических тел, прибывающих в Солнечную систему из глубокого космоса, изучались в работе в плоском случае на основе возмущенной задачи Кеплера. Учитывалось притяжение Солнца, Юпитера и, в ча-

сти исследования, Земли. В процессе численного моделирования система дифференциальных уравнений движения решалась методом Рунге–Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага. Программно-аппаратный комплекс реализован авторами на языке С.

При исследовании движение частиц моделировалось из окрестности Юпитера, а затем просчитывалось вперёд во времени на протяжении нескольких сотен лет, если Юпитер существенно снижал скорость движения частицы относительно Солнца, и назад во времени, для выяснения, из какой области частица прилетела.

В результате исследования определена зона захвата — область в пространстве параметров задачи, находясь в которой, тела попадают под влияние Юпитера и продолжают дальнейшее движение на околокруговых и эллиптических орбитах вокруг Солнца. Построены графики движения частиц с различным количеством пертурбационных маневров относительно Юпитера и Солнца. Построено распределение изменения эксцентриситетов малых тел за 100 и 1000 лет с учётом влияния только Юпитера, а также с учётом влияния Юпитера и Земли.

Задача допускает развитие: проведение исследования с более точной трёхмерной моделью, учётом притяжения большего числа планет и на более длительном интервале времени.

## **Адиабатическое приближение Уиздома при изучении резонансов средних движений небесных тел**

*Сидоренко В.В.*

*sidorenk@keldysh.ru*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4

*Ключевые слова:* резонансы средних движений, адиабатические инварианты, вековая эволюция

Если в некоторой планетной или спутниковой системе отношение периодов обращения двух тел вокруг основного тела (звезды или планеты) приблизительно равно отношению двух малых целых чисел, то тогда говорят, что эти тела находятся в резонансе средних движений (РСД). При резонансе средних движений влияние взаимных возмущений усиливается. В одних случаях это делает систему неустойчивой, в других, наоборот, усиливает устойчивость (в частности, предотвращает тесные сближения).

В большинстве случаев современные аналитические исследования резонансов средних движений (РСД) в рамках ограниченной или неограниченной зада-



чи трёх тел опираются на различные модификации «второй фундаментальной модели резонанса» [1]. Данная модель применима тогда, когда эксцентриситеты и наклонения орбит тел, движущихся в резонансе, достаточно малы — порядка некоторой степени малого параметра задачи, которым является отношение массы этих тел к массе центрального тела.

В последние десятилетия XX века стало понятно, что при изучении резонансных эффектов в динамике небесных тел полезно принимать во внимание поведение приближённых интегралов движения, называемых адиабатическими инвариантами.

Стандартная схема построения адиабатического приближения, предложенного Дж. Уиздомом [2] для исследования РСД, в качестве первого шага предполагает усреднение по самому быстрому динамическому процессу — по орбитальному движению небесных тел (с учетом имеющейся соизмеримости). В усреднённых уравнениях движения необходимо выделить подсистему, описывающую динамический процесс «промежуточной» временной шкалы — изменение резонансной фазы. Данная подсистема может быть интерпретирована как гамильтонова система с одной степенью свободы, в которую медленно изменяющиеся переменные входят как параметры. Следовательно, значение переменной «действие» этой гамильтоновой системы будет адиабатическим инвариантом. Анализ топологии линий уровня указанного адиабатического инварианта в подпространстве медленных переменных даст представление о характере вековой эволюции орбит небесных тел при РСД.

Описание РСД в подходе Уиздома полностью эквивалентно той картине резонансных эффектов, которая приводится в руководствах по современной теории гамильтоновых систем (см., например, [3]). Примечательно, что подход Уиздома применим в малоисследованном случае резонансных движений с большими наклонениями и эксцентриситетами. Сложность для подобного подхода представляет ситуация неединственности резонансных режимов движения. В частности, в такой ситуации необходимо выделить области фазового пространства, где резонансные режимы могут сосуществовать, сравнить вероятности захвата в различные резонансные режимы движения и установить, возможен ли переход между этими режимами. Интересные примеры проявления указанных эффектов можно найти в динамике реальных небесных тел.

В 2014–2020 гг. автор использовал подход Уиздома для изучения различных вековых эффектов при РСД 1:1 в рамках ограниченной задачи трёх тел. В [4] были установлены условия формирования и разрушения квазиспутниковых режимов движения небесных тел. В [5] с помощью подхода Уиздома исследована возможность преобразования у астероидов-«тройнец» движения в окрестности точки  $L_4$  в движение в окрестности точки  $L_5$  (и наоборот). В [6] рассматривалась ситуация, когда планета и астероид движутся по близким ор-

битам, но в противоположном направлении. Краткий обзор этих исследований будет наглядной демонстрацией эффективности подхода Уиздома.

Автор выражает РФФИ благодарность за финансовую поддержку (грант 20-01-00312А).

## Литература

- [1] Henrard J., Lemaître A. A second fundamental model for resonance // *Celest. Mech.* 1983. V. 30. pp. 197–218. doi: 10.1007/BF01234306
- [2] Wisdom J. A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability // *Icarus*. 1985. V. 63. pp. 272–286. doi: 10.1016/0019-1035(85)90011-9
- [3] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
- [4] Sidorenko V.V., Neishtadt A.I., Artemyev A.V., et al. Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance. Perturbative treatment // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2014. V. 120. pp. 131–162. doi: 10.1007/s10569-014-9565-4
- [5] Sidorenko V.V. Dynamics of “jumping” Trojans: a perturbative treatment // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2018. V. 130:67. 18 p. doi: 10.1007/s10569-018-9860-6
- [6] Sidorenko V.V. A perturbative treatment of the retrograde co-orbital motion // *Astronomical Journal*. 2020., V. 160:237. 9 p. doi: 10.3847/1538-3881/abbb38

## О сближениях и соударениях астероидов с Луной и планетами

*Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А.,  
Эскин Б.Б.*

*l.sokolov@spbu.ru, g.kuteeva@spbu.ru, balasteravan@yandex.ru,  
petrov@astro.spbu.ru, esk@astro.spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* астероиды, соударения, сближения.

Цели настоящей работы — нахождение и исследование возможных соударений и сближений астероидов с Землей, Луной и другими планетами, а также оценка вероятности этих событий. Решение этих задач важно для обеспечения астероидной безопасности Земли, что является сегодня одной из актуальных проблем. Этой теме посвящено огромное число работ. Много информации об опасных астероидах приводится на регулярно обновляемом сайте [neo.jpl.nasa.gov/sentry/](https://neo.jpl.nasa.gov/sentry/) (сайт НАСА). В настоящее время известно порядка

тысячи астероидов с ненулевой вероятностью соударения с Землей в ближайшие сто лет. В работе [1] изложен метод выделения траекторий соударения астероидов с Землей, разработанный на кафедре небесной механики Санкт-Петербургского государственного университета, приводятся примеры его применения. Сравнение полученных результатов с данными, приведенными на сайте НАСА, показывает в целом хорошее совпадение для большинства исследованных нами астероидов. Обычно нам удавалось найти существенно больше возможных соударений с Землей, чем было известно ранее. В то же время разработанный метод имеет большую вычислительную трудоемкость, и мы смогли подробно исследовать всего несколько опасных астероидов. Особенно много результатов было получено нами по знаменитому астероиду Апофис.

Недавно на кафедре небесной механики СПбГУ был разработан новый программный комплекс для прогнозирования движения астероидов, нахождения возможных сближений и соударений с планетами, обладающий большим быстродействием [2]. Быстродействие обусловлено тем, что в полной мере использована однотипность проводимых вычислений, возможность распараллеливания и т.п. В статье приведен пример оценки кумулятивной вероятности соударений с Луной и планетами Солнечной системы для двухсот опасных астероидов (размер больше 30 метров, кумулятивная вероятность соударения с Землей с сайта НАСА больше одной стомиллионной) на интервале времени до 2132 года. Фактически использовался метод Монте-Карло. Для каждого астероида вычислено  $10^7$  траекторий. Сравнение с данными НАСА для соударений с Землей показало в целом удовлетворительное согласие.

В настоящей работе мы приводим и обсуждаем некоторые другие результаты, полученные с использованием новой программы методом Монте-Карло. Для ряда опасных астероидов получены кумулятивные оценки вероятностей сближений на 100 и 10 радиусов соответствующей планеты; получены оценки вероятностей соударения в некотором году.

Например, для астероида 2008 EX5 получены три возможных соударения с Луной: 09.10.2050 с вероятностью  $0.31 \cdot 10^{-5}$ , 09.10.2077 с вероятностью  $0.46 \cdot 10^{-5}$ , 09.10.2093 с вероятностью  $0.14 \cdot 10^{-5}$ . Ранее на кафедре небесной механики СПбГУ с использованием старого метода [1] было найдено 12 возможных соударений 2008 EX5 с Луной [3], из них три основных (с большими размерами щелей, ведущих к соударениям) по датам совпадают с вышеприведенными, большим вероятностям соответствуют большие размеры щелей. Остальные 9 соударений имеют размеры щелей на 1–3 порядка меньше.

Для астероида 2003 UQ25 кроме соударений с Землей получено соударение с Марсом 19.11.2112 с вероятностью  $1.0 \cdot 10^{-7}$ .

Для астероида 2011 QF48 кроме соударений с Землей получено соударение с Марсом 15.06.2117 с вероятностью  $1.0 \cdot 10^{-7}$ .

Для астероида 2019 BE5 кроме соударений с Землей и Луной получено два соударения с Венерой: 27.03.2047 с вероятностью  $1.0 \cdot 10^{-7}$ , 04.11.2071 с вероятностью  $1.0 \cdot 10^{-7}$ , и три соударения с Меркурием: 20.07.2067 с вероятностью  $2.0 \cdot 10^{-7}$ , 13.11.2078 с вероятностью  $1.0 \cdot 10^{-7}$ , 31.12.2114 с вероятностью  $1.0 \cdot 10^{-7}$ .

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-32-90149.

## Литература

- [1] Petrov N., Sokolov L., Polyakhova E., Oskina K./; Predictions of asteroid hazard to the Earth for the 21st century. / AIP Conference Proceedings 1959, 040012 (2018); doi: 10.1063/1.5034615
- [2] Баляев И.А. Об ускорении численного интегрирования уравнений движения астероидов. / *Астрономический вестник*, 2020, т.54, N 6, с. 567-576.
- [3] Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б./; Возможные соударения и сближения с Землей некоторых опасных астероидов. / *Астрономический вестник*, 2021, т.55, N 1.

## Анализ периодических ко-орбитальных движений в задаче трёх тел

*Степанов С.Я.<sup>1</sup> Сальникова Т.В.<sup>2</sup>*

*stepsj@yandex.ru, tatiana.salnikova@gmail.com*

<sup>1</sup>Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,

119333, Российская Федерация, Москва, ул. Вавилова, д. 40,

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* Янус, Эпиметей, подковообразные траектории, орбитальная устойчивость.

Планета Сатурн замечательна не только своими кольцами, но и семейством более 80 спутников с различными уникальными свойствами. Открытые в 1966 году десятый спутник Сатурна Янус и через 12 лет одиннадцатый спутник Эпиметей, двигаясь по близким орбитам, меняются орбитами примерно каждые четыре земных года. Так что примерно каждые восемь земных лет они возвращаются к исходной конфигурации. Во вращающейся системе координат их орбиты имеют подковообразную форму.

В работе [1] методами КАМ теории исследовался вопрос существования и устойчивости этих траекторий. Теория КАМ применяется к плоской задаче трёх тел для достаточно малого отношения массы лун к массе центрального тела. Астрономические наблюдения траекторий Януса и Эпиметей определяют

интегрируемое приближение для этой динамической системы — две независимые задачи Кеплера. В самом деле, две луны меняют свои орбиты, достигнув относительного расстояния, превышающего 10000 км, которое гораздо больше их соответствующей сферы Хилла с радиусом около 150 км. Следовательно, гравитационное влияние планеты доминирует в орбитальной динамике Януса и Эпиметей, в то время как их взаимное притяжение рассматривается как возмущение. В отличие от рассмотренной В.И. Арнольдом задачи трёх тел с невозмущенным гамильтонианом, соответствующем нерезонансным кеплеровским орбитам, в рассматриваемой модели имеет место резонанс 1:1.

Целью настоящей работы является анализ различных типов периодических ко-орбитальных подковообразных движений и выяснение диапазонов их существования и устойчивости в пространстве параметров. При этом обсуждается также вопрос о необходимости требования выполнения условия малости отношения массы лун к массе центрального тела. Рассматриваемая своеобразная динамика интересна не только в чисто теоретическом аспекте, но и возможностью практического использования в космической навигации.

Научное исследование проведено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-01-00887.

## Литература

- [1] Niederman L., Pousse A., Robutel P. On the Co-orbital Motion in the Three-Body Problem: Existence of Quasi-periodic Horseshoe-Shaped Orbits, *Comm. Math. Phys.*, 2020, vol. 377, pp. 551–612

## Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на его прочностные характеристики

*Тихонов А.А., Яковлев А.Б.*

*a.tikhonov@spbu.ru , a.b.yakovlev@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* космический аппарат, солнечный парус, наведенный электрический заряд, прочность.

Рассматривается космический аппарат с солнечным парусом. Рассчитывается плотность электрического заряда, наведённого на поверхности паруса в процессе его движения в плазме около солнечного пространства. Анализируется влияние наведённого электрического заряда на прочность паруса на разрыв.

### **КА с солнечным парусом.**

Развитие космических исследований, особенно при осуществлении полетов вблизи границ Солнечной системы, требует исследования возможностей использования альтернативных двигательных систем. В научной и научно-популярной литературе [1, 2] активно обсуждается применение для таких целей предложенного Фридрихом Артуровичем Цандером солнечного паруса. На данный момент решено большое количество траекторных задач, задач управления и оптимизации движения с учётом множества факторов космического пространства, в частности эффекта тени Земли. Однако, внимание исследователей до настоящего времени не было привлечено к проблеме влияния возможной зарядки солнечного паруса на его динамику и прочностные характеристики. Влияние на динамику рассмотрено в представленном на 9 Поляховские чтения докладе [3].

### **Парус как тонкая плёнка.**

Любой находящийся в космической плазме объект приобретает электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы, степени освещённости Солнцем и электрофизических характеристик тела, а также от положения и ориентации тела в процессе движения. Однако в отличие от большинства рассмотренных процессов зарядки тел в космической плазме [4]–[6], зарядка тонких плёнок, таких как солнечный парус, обладает рядом особенностей. Важнейшей из них является частичная проницаемость плёнки для заряженных частиц космической среды. В связи с этим возникает необходимость модернизации теории зарядки поверхности с учётом их частичной проницаемости. Результаты первой попытки такой модернизации рассмотрены в представленном на 9 Поляховские чтения докладе [7].

### **Результаты.**

На основе предложенного в [7] метода в нашей работе проведены расчеты плотности наведённого на поверхности солнечного паруса поверхностного заряда в области между орбитой Земли и поверхностью Солнца и для характеристик существующих и перспективных полимерных плёнок для солнечного паруса проведен анализ их устойчивости на разрыв. Выбор именно этой области пространства связан с тем, что плотность электрического заряда растёт при уменьшении расстояния от Солнца, а также с предложениями по использованию солнечного паруса для полётов в околосолнечную область.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

### **Литература**

- [1] Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом. М. : Либроком., 2011. 320 с.

- [2] Поляхова Е.Н., Дикарев В.В. Космоплавание под парусом — фантастика или реальность недалекого будущего? // Планетарий. 2005. Вып. 3–4. С. 4–6.
- [3] Яковлев А.Б. Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на динамику паруса при движении по цандеровской траектории // Тезисы докладов на 9 Поляховские чтения.
- [4] Fu J.H.M. Surface potential of a photoemitting plate // J. Geophys. Res. 1971. Vol. 76, N 10. pp. 2506–2509.
- [5] Yakovlev A.B. The corrected method for calculation of electrostatic potential near to surface of nonatmospheric space body and the analysis of possible modes of dust particles motion // International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov’s Reading (Saint-Petersburg, Febr. 2–6, 2015). — IEEE. 2015. doi:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106785.
- [6] Москаленко А.М. Электростатический потенциал у поверхности Луны // Кинематика и физика небесных тел. 1992. Т. 8, N 5. С. 31–40.
- [7] Яковлев А.Б. Модель зарядки тонкой алюминиевой пленки в космической плазме // Тезисы докладов на 9 Поляховские чтения.

## Прямолинейные траектории в общей задаче трёх тел

*Титов В.Б.*

*tit@astro.spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* общая задача трёх тел, регуляризация, прямолинейные траектории.

Частное решение коллинеарной задаче трёх тел было получено еще Леонардом Эйлером [1]. Вместе с появившимся несколько лет спустя равносторонним решением Лагранжа, эти решения более, чем 2 столетия были единственными известными решениями задачи трёх тел, не связанным с численным интегрированием. Прямолинейная орбита важна не только в теоретическом плане, как решение задачи трёх тел, но и на практике, поскольку позволяет использовать свойства коллинеарных решений и методы регуляризации при численном моделировании задачи трёх тел, в котором нужно учитывать тесные сближения. Коллинеарные орбиты рассматривались многими авторами. Шубарт [2] численно нашел первую периодическую коллинеарную орбиту. Свойства коллинеарных орбит изучались в [3]. Регуляризация, устраняющая особенность в уравнениях движения задачи двух тел, была предложена Леви-Чивитой для плоской задачи, а затем, через 60 лет, была распространена на пространственный случай Кустаанхеймо и Штифелем, в настоящей работе используется регуляризация Леметра [4].

После решений Эйлера и Лагранжа следующее решение появилось только на рубеже XX–XXI веков, это знаменитая восьмерка Шансине–Монтгомери [5] для трёх равных масс. При доказательстве существования восьмерко-образной орбиты авторы воспользовались вариационным методом, вычисляя величину действия на сфере форм. Сама сфера (и пространство) форм появилась в работах по небесной механике чуть раньше, в 1956 году Г. Леметр [4] предложил метод глобальной регуляризации общей (все три массы не нулевые) задачи трёх тел. В контексте численного моделирования задачи  $N$  тел оказались предпочтительными более простые методы регуляризации и метод Леметра практически не использовался. Тем не менее пространство форм используется теперь при рассмотрении различных аспектов задачи трёх тел, в том числе и регуляризации [6, 7, 8]. Свойства регуляризации Леметра в плоской задаче 3 тел, особенно для случая прямолинейного движения, позволяют ввести удобную параметризацию, вычислить ряд коллинеарных орбит и более детально изучить их свойства.

Редукцией по переносам и вращениям задача сводится к задаче движения в трёхмерном конфигурационном пространстве. Таким образом, коллинеарные траектории можно рассматривать в двух измерениях. Для этого случая выведены уравнения движения в пространстве (плоскости) форм и соответствующие регуляризованные (по Леметру) уравнения движения.

Изучаются свойства коллинеарных траекторий. Одно из таких свойств, а именно ортогональность траекторий линиям двойных соударений, сводит для фиксированного значения постоянной энергии множество начальных условий к одномерному множеству, что служит основанием для утверждения о хаотичности рассматриваемого движения. Численно строятся траектории, в том числе траектории свободного падения.

## Литература

- [1] Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.*, 11 (1767), P 144–151.
- [2] Schubart J. Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem, *Astr. Nachr.*, 283 (1956), P. 17–22.
- [3] Tanikawa K. and Mikkola S. Symbols sequences and orbits of the free-fall three-body problem, *Publ. Astron. Soc. Japan* 67 (2015).
- [4] Lemaitre G. Regularization of the Three-Body Problem, *Vistas in Astronomy*, 1 (1955), P. 207–215, [https://doi.org/10.1016/0083-6656\(55\)90028-3](https://doi.org/10.1016/0083-6656(55)90028-3)
- [5] Chenciner A. and Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Annals of Math.*, 152 (2000), P. 881–901.
- [6] Moeckel R. A topological existence proof for the Schubart orbits in the collinear three-body-problem, *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS SERIES B*, 10, 2&3, September & October 2008, P.609–620



- [7] Orlov V.V, Titov V.B, Shombina L.A Periodic Orbits in the Free-Fall Three-Body Problem, *Astronomy Reports*, 2016, 60, 12 (2016), P. 1083–1089
- [8] Titov V. Some solutions of the general three body problem in form space, *AIP Conference Proceedings*, 1959, 040024 (2018); doi: 10.1063/1.5034627

## Об устойчивых облачных скоплениях микрочастиц в точках либрации двойной звезды

*Турешбаев А.Т.,<sup>1</sup> Тхай В.Н.,<sup>2</sup> Мырзаев Р.С.<sup>1</sup>*

*aturesh@mail.ru, tkhaivn@ya.ru, myrza\_ramatilla@mail.ru*

<sup>1</sup>Кызылординский Государственный Университет им. Коркыт Ата,  
120000, Казахстан, Кызылорда, ул. Айтеке Би 29А,

<sup>2</sup>Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,  
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65

*Ключевые слова:* световое давление, задача трех тел, коллинеарные точки либрации, устойчивость.

На движение малых частиц в космическом пространстве, наряду с гравитацией, влияние оказывают силы различной негравитационной природы, среди которых наиболее значительной является сила светового давления  $F_p$ , исходящая от звезд. В ряде случаев световой поток, исходящий от звезды, бывает вполне достаточным, чтобы сила  $F_p$  могла конкурировать с силой тяготения  $F_g$  или даже превосходить её по величине. Поэтому во многих задачах небесной механики и звездной динамики принимается во внимание суммарное действие этих сил на малые тела. Это действие определяется коэффициентом редукции массы звезды  $Q$  по формуле  $Q = 1 - F_p/F_g$  и не зависит от расстояния между телами [1]. Из данной записи видно, что  $Q$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если  $Q < 0$  — световая репульсия преобладает над силой тяготения, а при  $Q > 0$  — доминирует гравитация, причём всегда  $Q \leq 1$ . Репульсивная сила светового давления звезды учитывается в постановке фотогравитационной ограниченной задачи трёх тел [1].

Введение в математическую модель задачи трёх тел фактора световой репульсии привело к ряду новых качеств, которые отсутствовали в классической постановке задачи при отсутствии светового давления. Задача допускает девять точек либрации, которые образуют семейства. Пять из них расположены в плоскости движения основных тел, существуют как в круговой, так и эллиптической задаче, называются коллинеарными и треугольными точками либрации и существуют в классической задаче трёх тел. Четыре новые — компланарные точки либрации, находятся вне указанной плоскости, существуют только в круговой задаче и только в случае, если коэффициенты редукции  $Q_1$  и  $Q_2$



имеют разные знаки [2]. При этом коллинеарная точка либрации может быть устойчивой (в линейном приближении).

Исследованию устойчивости точек либрации посвящены многочисленные работы (Радзиевский, Куницын, Лукьянов, Simmons, Пережогин, Турешбаев, Кочеткова и другие).

В системе двойной звезды положение точки либрации зависит от характеристик частицы. Поэтому для каждой индивидуальной частицы получается своя точка либрации. С другой стороны, в каждой точке либрации могут **находиться** частицы с разными размерами, значениями плотности, коэффициента отражения света. Поэтому все микроскопические частицы, находящиеся в точках либрации, могут **образуют** гигантские комплексы микроскопических тел и частиц газопылевой материи (облака). Облако представляет собой пульсирующее образование — гетерогенный ансамбль, где каждая из частиц движется по своей индивидуальной траектории. Возможность существования облаков в рамках эллиптической фотогравитационной задачи трёх тел показана в [3], где выводы об устойчивости основаны на линеаризованных уравнениях.

Результаты нелинейного анализа устойчивости известны пока в случае круговой задачи. Обнаружена неустойчивость коллинеарных точек [4] для резонанса 1:2; при резонансе 1:3 эти точки устойчивы [5]. Треугольные точки исследованы в [6] как в резонансном, так и нерезонансном случаях. В данном докладе с позиции подхода [3] даются результаты исследования коллинеарных точек для нерезонансного случая.

## Литература

- [1] Радзиевский В. В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // Астрон. журн. 1950. Т. 27. Вып. 4. С. 249–256.
- [2] Радзиевский В. В. Пространственный случай ограниченной задачи трех излучающих и гравитирующих тел // Астрон. журн. 1953. Т. 30. Вып. 3. С. 265–273.
- [3] Тхай В Н., Зимовщиков А. А. О возможности существования облачных скоплений микрочастиц в точках либрации двойной звезды // Астрон. журн. 2009. Т. 86. Вып. 6. С. 598–606.
- [4] Тхай Н В. Устойчивость коллинеарных точек либрации при внутреннем резонансе третьего порядка // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 121–126.
- [5] Тхай Н В. Устойчивость коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел при внутреннем резонансе четвертого порядка // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 610–615.
- [6] Tureshbaev A. Stability of libration points of the photogravitational restricted three body problem with two radiating masses // Proc. 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE Xplore. doi: 10.1109/STAB.2016.7541234

## Оптимальные соединительные траектории в круговой задаче трёх тел

*Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А.*  
*d.shimanchuk@spbu.ru, a.shmyrov@spbu.ru, v.shmyrov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
 199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* круговая задача трёх тел, модель Хилла, точки либрации, управление, соединительная траектория

Задача построения траекторий, соединяющих окрестности коллинеарных точек либрации в круговой задаче трёх тел изучается уже несколько десятилетий. Так, космический аппарат Genesis совершал перелет между окрестностями точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  системы Солнце-Земля в 2003 году.

В данной работе исследование задачи перелёта изучается в модели Хилла, обладающей дополнительными свойствами симметрии по сравнению с более общей моделью — круговой задачей трёх тел. Эти свойства симметрии существенно используются на первом этапе — перелёте между окрестностями точек либрации. На втором этапе рассматривается задача оптимального управления, для перехода на галоорбиты в окрестностях точек либрации, а также задачи управления с другими постановками.

### Уравнения движения, точки либрации.

Применив метод Хилла для разложения солнечного потенциала в круговой задаче трёх тел, уравнения движения можно привести к виду [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1 \\ \dot{x}_3 &= y_3 \\ \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u \\ \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1 \\ \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$  - положение КА во вращающейся системе координат, ось  $OX_1$  направлена на Солнце,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ - импульсы. Точки либрации  $L_1$  и  $L_2$  в системе (1) неподвижны и имеют координаты:

$$\begin{aligned} L_1 : \quad x^* &= (1, 0, 0), \quad y^* = (0, 1, 0); \\ L_2 : \quad x^{**} &= (-1, 0, 0), \quad y^{**} = (0, -1, 0). \end{aligned}$$

Неуправляемая система (1) имеет гамильтонову форму с гамильтонианом

$$H_3(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{\|x\|^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2.$$

Значения энергетической константы (гамильтониана) в точках либрации  $L_1$  и  $L_2$  одинаковые, что позволяет ставить задачу неуправляемого перехода между окрестностями этих точек. Симметрии в модели Хилла позволяют существенно упростить задачу построения переходных траекторий. Следует отметить, что в исходной модели — круговой задачей трёх тел, энергетические константы различны [3] и такой подход использовать некорректно.

При достижении окрестности точки либрации с помощью подхода, учитывающего симметричность точек либрации в модели Хилла, далее решаются задачи оптимального управления с различными постановками для линеаризованных уравнений. Для точки либрации  $L_1$  такие уравнения имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + y_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + y_2 \\ \dot{x}_3 &= y_3 \\ \dot{y}_1 &= 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1) + u(x, y) \\ \dot{y}_2 &= -4x_2 - y_1 \\ \dot{y}_3 &= -4x_3.\end{aligned}\tag{2}$$

Построенные решения могут быть использованы в качестве начального приближения при построении соединительных траекторий в эллиптической задаче трёх тел.

## Литература

- [1] Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$ . Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 1–2. С. 192–198.
- [2] Aminov R., Shmyrov A., Shmyrov V. Impulse control flight to the invariant manifold near collinear libration point. Cybernetics and Physics, 2019. iss 8 (2), pp. 51–57. doi: 10.35470/2226-4116-2019-8-2-51-57
- [3] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.

## Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на динамику паруса при движении по цандеровской траектории

**Яковлев А.Б.**

*a.b.yakovlev@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* космический аппарат, солнечный парус, наведённый электрический заряд, цандеровская траектория.

Планирование и осуществление полетов к границам Солнечной системы требует исследования возможностей использования альтернативных двигательных систем. В частности, в научной литературе [1, 2] активно обсуждается применение для таких целей предложенного Ф. А. Цандером солнечного паруса. На данный момент опубликовано решение большого количества траекторных задач, задач управления и оптимизации движения с учетом различных факторов космического пространства, в частности эффекта тени Земли. Однако, до настоящего времени недостаточное внимание было привлечено к проблеме влияния возможной зарядки солнечного паруса на его динамику и прочностные характеристики. Влияние на прочностные характеристики рассмотрено в представленном на 9 Поляховские чтения докладе [3].

### Особенности процесса зарядки тонких плёнок.

Все тела, находящиеся в космической плазме, приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы, степени освещенности Солнцем и электрофизических характеристик тела, а, таким образом, от положения и ориентации тела в процессе движения. Однако зарядка тонких плёнок, таких как солнечный парус, в отличие от большинства рассмотренных процессов зарядки тел в космической плазме [4]–[6] обладает рядом особенностей. Наиболее важной из них является частичная проницаемость пленки для заряженных частиц космической среды. В связи с этим возникает необходимость модернизации теории зарядки поверхности с учетом их частичной проницаемости.

### Результаты.

Используя предложенный в [7] метод, в нашей работе проведены расчёты плотности наведённого на поверхности солнечного паруса заряда в области космического пространства, в которой проходят эллиптические цандеровские траектории [1] орбита Земли — орбита Марса и орбита Земли — орбита Юпитера. При расчете плотности электрического заряда принимались во внимание: во-первых, адиабатичность расширения коронального газа для вычисления скоро-

сти солнечного ветра, и, во-вторых, сохранение потока для определения плотности солнечного ветра [8].

Наличие наведённого на поверхности паруса электрического заряда приводит к возникновению силы Лоренца, которую можно считать возмущением, приводящим к движению перпендикулярно плоскости траектории невозмущённого движения. Расчет силы Лоренца проводился с учетом изменения величины и направления магнитного поля при удалении от поверхности Солнца [8].

Получены величины нормального отклонения при движении по эллиптическим канделеровским траекториям орбита Земли — орбита Марса и орбита Земли — орбита Юпитера.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант № 19-01-00146-а.

## Литература

- [1] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М. : Либроком., 2011. 320 с.
- [2] Поляхова Е. Н., Шмыров А. С. Об оптимальном управлении орбитальным геоцентрическим движением космического аппарата при полете с солнечным парусом. В : Научные проблемы авиации и космонавтики. История и современность. М. 1985. С. 147–151.
- [3] Тихонов А. А., Яковлев А. Б. Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на его прочностные характеристики // Тезисы докладов на 9 Поляховские чтения.
- [4] Fu J. H. M. Surface potential of a photoemitting plate // J. Geophys. Res. 1971. Vol. 76, N 10. P. 2506–2509.
- [5] Yakovlev A.B. The corrected method for calculation of electrostatic potential near to surface of nonatmospheric space body and the analysis of possible modes of dust particles motion // International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading (Saint-Petersburg, Febr. 2-6, 2015). IEEE. 2015. doi:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106785.
- [6] Москаленко А. М. Электростатический потенциал у поверхности Луны // Кинематика и физика небесных тел. 1992. Т. 8, N 5. С. 31–40.
- [7] Яковлев А. Б. Модель зарядки тонкой алюминиевой пленки в космической плазме // Тезисы докладов на 9 Поляховские чтения.
- [8] Акасофу С. -И., Чепмен С. Солнечно-земная физика./ пер. с англ. М. : Мир. 1974. Т. 1. 384 с.

## Секция 3

# Гидрогазодинамика

## *Mechanics of Fluids and Gases*

Секция Гидрогазодинамики посвящает свою работу 110-летию профессора Исаака Павловича Гинзбурга — видного ученого в области прикладной газовой динамики.

The Hydrogasdynamics Section dedicates its work to the 110th anniversary of Professor Isaac Pavlovich Ginzburg — a prominent scientist in the field of applied gas dynamics

## Определение параметров шероховатости по её аэродинамическим характеристикам в разреженном газе путём решения обратной задачи

*Аксенова О.А.<sup>1</sup> Халидов И.А.<sup>2</sup>*

*olga.a.aksenova@gmail.com, iskander.khalidov@gmail.com*

<sup>1</sup>Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ,

198514, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Разводная ул., 15,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

*Ключевые слова:* разреженный газ, аэродинамические характеристики, шероховатость поверхности, полигауссовские случайные поля.

Исследуется предложенная нами в [1, 2] модель учёта влияния шероховатости на аэродинамические характеристики поверхности при ее взаимодействии с разреженным газом. Модель строится на базе полигауссовских случайных процессов и полей. Для многих распространенных на практике способов обработки поверхностей моделирование полигауссовскими (негауссовскими) профилями значительно лучше отвечает реальности, чем моделирование гауссовскими полями или фрактальными структурами [3]. Это подтверждается как экспериментальными измерениями статистических параметров, так и сопоставлением измеренных статистических показателей с результатами численных расчетов [3]. Совместная плотность распределения значений случайного процесса (или поля) в  $n$  точках шероховатой поверхности  $x_1, \dots, x_n$ , отвечающих моментам времени движения молекулы разреженного газа  $t_1, \dots, t_n$ , для полигауссовской модели приобретает вид

$$p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \frac{\exp\{-(x - \sigma(v))R_n^{-1}(v)(x - \sigma(v))^T/2\}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|R_n(v)|}} dF(v), \quad (1)$$

где  $\sigma(v)$  и  $R_n(v)$  — векторное математическое ожидание и корреляционная матрица ( $|R_n(v)|$  — ее определитель) значений процесса в заданных точках,  $F(v)$  — неубывающая на  $[0; \infty)$  весовая функция, удовлетворяющая требованию сходимости несобственного интеграла. Для численного моделирования реализаций полигауссовских процессов мы применяем базирующийся на преобразовании гауссовских распределений алгоритм, описанный в работе [4], ориентированной на приложения в таких областях, как рассеяние света на шероховатой поверхности, выращивание тонких плёнок в микроэлектронике, диагностика поверхности методами электронной спектроскопии и контактные явления, включая трение и износ изделий в машиностроении.



Аэродинамические свойства шероховатой поверхности, обтекаемой разреженным газом, определяются через вероятность отсутствия выбросов случайного поля за уровень, задаваемый траекторией движущейся молекулы газа, или же через факториальные моменты числа выходов случайного поля за уровень. Эти факториальные моменты для полигауссовского поля вычисляются путем выражения на основе формулы (1) через соответствующие факториальные моменты гауссовского поля, которые могут быть найдены с помощью представления поля через винеровский процесс [2, 3].

Вычислительный алгоритм, состоящий из 6 этапов [1], позволяет применить рассмотренный подход к решению обратной задачи: восстановлению параметров шероховатой поверхности по известным ее аэродинамическим характеристикам. Решение обратной задачи — одна из наиболее актуальных задач аэродинамики разреженного газа, так как величины параметров шероховатой поверхности, полученные другими способами (в частности, из профилограмм поверхности под электронным микроскопом [4]), оказываются заниженными [1], и приводят к недооценке влияния шероховатости. Основная причина данного эффекта состоит в том, что большую часть вклада в воздействие шероховатости вносят наименьших масштабов, близких к молекулярным, которые не могут улавливаться профилограмметрическими методами.

Проведенные на основе предложенного подхода расчёты потоков разреженного аргона около поверхностей из алюминия и каптона (применяемого в космической технике пластика) показали возрастание значений основного параметра шероховатости на 20–35% по сравнению с экспериментальными измерениями на базе профилограмм. Подобная недооценка влияния шероховатости может привести к еще большей погрешности при расчете коэффициентов обмена касательным импульсом, и, соответственно, аэродинамического сопротивления движущихся в разреженной атмосфере летательных аппаратов (а также проводимости каналов с шероховатыми стенками в вакуумной технике).

## Литература

- [1] Aksenova O. A., Khalidov I. A. Inverse problem of finding surface roughness parameters in rarefied gas flow. In: Yonghao Zhang (ed.) Rarefied Gas Dynamics 2018. AIP Conference Proceedings, vol 2132. Melville, NY, 2019. P. 170005-1-8. doi: 10.1063/1.5119658
- [2] Халидов И. А. Особенности взаимодействия разреженного газа с шероховатой поверхностью с позиций полигауссовской математической модели // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского политехнического университета, №4, 2014. С. 129–138.
- [3] Аксенова О. А., Халидов И. А. Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. СПб.: Изд-во ВВМ Санкт-Петербургского государственного университета, 2004. 120 с.

- [4] Литвак М. Я., Малюгин М. И. Полигауссовские модели негауссовской случайно-шероховатой поверхности // Журнал технической физики, т. 82, №4, 2012. С. 99–107.

## Влияние проницаемости поверхности на газодинамические характеристики высокоскоростного полёта

*Алексеева М.М., Каун Ю.В., Чернышов М.В., Яценко А.А.*  
amara96@mail.ru, y.kaun13@gmail.com, mvcher@mail.ru, anuta\_sf\_18@mail.ru  
Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* сверхзвуковой полет, волновое сопротивление, пористая поверхность, тепловая защита.

Важнейшими параметрами высокоскоростного полёта являются хорошая маневренность и теплозащита. В настоящее время существуют различные способы управления сопротивлением и аэродинамическими характеристиками, а также различные методы тепловой защиты. Оказать заметное влияние на тепловые потоки на поверхности летательного аппарата и волновое сопротивление в целом, согласно [1], может использование газопроницаемых поверхностей в головной части и в качестве центрального тела высокоскоростного летательного аппарата (ВЛА).

В работе исследуется применение газопроницаемых поверхностей во внешнем покрытии ВЛА. Сравняются газодинамические структуры высокоскоростных потоков при наличии вдува с поверхности тела и без вдува в двумерной постановке. Численное моделирование газопроницаемой поверхности проводилось в пакете программ инженерного анализа с использованием модуля вычислительной газодинамики. Математическая модель процесса высокоскоростного обтекания изделия, имеющего проницаемые поверхности, состоит из системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса для двумерного течения, осредненных по Рейнольдсу с использованием замыкающей высокорейнольдсовой модели турбулентности типа  $\kappa - \varepsilon$ . Для настроек решателя выбирается связанный решатель Density-Based. Расчетная область вокруг изделия строится таким образом, чтобы головная ударная волна не взаимодействовала со входной и боковыми границами. Вниз по течению располагается выходная граница, где реализуется выход сжимаемого потока. На стенке изделия ставятся граничные условия непротекания и проскальзывания, а также адиабатичности [2]. Универсальная методика проведения расчета газопроницаемых поверхностей позволит снизить экономические затраты на создание новых образцов ракетно-космической техники.

В результате проведения численного моделирования было установлено, что перед телом без проницаемых поверхностей образуется присоединенный скачок уплотнения. Наличие вдува приводит к увеличению угла наклона ударной волны и уменьшению температуры поверхности тела. С увеличением скорости вдува присоединенная ударная волна становится отошедшей. Таким образом, необходимо подбирать параметры вдува газа с поверхности для достижения необходимых аэродинамических характеристик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Создание опережающего научно-технического задела в области разработки передовых технологий малых газотурбинных, ракетных и комбинированных двигателей сверхлегких ракет-носителей, малых космических аппаратов и беспилотных воздушных судов, обеспечивающих приоритетные позиции российских компаний на формируемых глобальных рынках будущего», № FZWF-2020-0015).

### Литература

- [1] Fomin V. M., Zapryagaev V. I., Lokotko A. V., Volkov V. F., Lutskii A. E., Men'shov I. S., Maksimov Yu. M., Kiryashkin A. I. Aerodynamic characteristics of a body of revolution with gas-permeable surface areas // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2010. Vol. 51. No. 1. pp. 65–73. doi: 10.1007/s10808-010-0010-5
- [2] Алексеева М. М., Брыков Н. А., Вихрова И. А. Особенности численного моделирования высокоскоростных летательных аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. Вып. 1. С. 1–14. doi: 10.18698/2308-6033-2020-1-1946

## Математические модели и алгоритм расчёта льдофобных свойств покрытий при высокоскоростном взаимодействии переохлажденных капель с твёрдым телом

*Амелюшкин И.А., Стасенко А.Л.*

*Amelyushkin\_Ivan@mail.ru, Stasenko@serpantin.ru*

Московский физико-технический институт,

141701, Российская Федерация, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9

*Ключевые слова:* льдофобные покрытия, обтекаемое тело, микро и нано рельеф

В приложении к проблеме обледенения летательных аппаратов получены оценки конфигурации рельефа гидрофобных покрытий твёрдого тела в переохлажденном воздушно-капельном потоке, при которых капли жидкости не примерзают к обтекаемому телу при столкновениях с его поверхностью. Использование гидрофобных покрытий представляет интерес в широкой области

технических приложений, в частности в задачах противодействия обледенению летательных аппаратов [1]–[4]. Такие покрытия, как правило, эффективны при незначительных отношениях сил инерции к силам поверхностного натяжения жидкости при взаимодействии с рельефным обтекаемым телом. Однако при превышении поверхностной плотности кинетической энергии капли некоего критического значения, льдофобные свойства приводят к отрицательным эффектам ввиду проникновения переохлажденной капли в углубления и отвердевания в них. Для того, чтобы элементы капли, деформирующейся при ударе, не проникали в углубления (или в поры) гидрофобного покрытия, необходимо превышение давления сил поверхностного натяжения над характерным значением скоростного напора жидкости в капле. При этом расстояние между выступами рельефа  $L$  предполагается не больше диаметра капли:  $L < 2a$ . В настоящей работе получена следующая обобщенная интерполяция периода неровностей гидрофобного покрытия:

$$L_{max}/D = 2 \exp[1/4Stk]/We \quad (1)$$

Здесь  $Stk$  и  $We$  — числа Стокса и Вебера соответственно, рассчитанные по скорости полёта летательного аппарата  $V$ . С точки зрения гидромеханики капли, для которой основным масштабом времени является отношение её диаметра к скорости звука в воде, наиболее важным является рост эффективной вязкости жидкости, связанный с возникновением и ростом нанозародышей кристаллизации. Зависимость этого коэффициента переноса суспензии от относительного объема диспергированной фазы описывается классической формулой Эйнштейна и подтверждена во многих областях науки. Ясно, что эффективная теплопроводность суспензии также зависит от относительного объема кристаллической фазы. Таким образом, учитывая отличие динамического угла смачивания от статического, мы имеем дело с трёхмерной трёхфазной нестационарной динамикой деформируемой дробящейся и отвердевающей капли, взаимодействующей с рельефной поверхностью твёрдого тела.

Развитые в настоящей работе модели и методы расчета противообледенительных свойств покрытий могут быть использованы при их проектировании и производстве.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-29-13024.

## Литература

- [1] Cao L., Jones A.K., Sikka V.K., Wu J. and Gao D. Anti-icing superhydrophobic coatings // *Langmuir*, 2009. 25(21), pp. 12444–12448.
- [2] Amelyushkin I.A., Stasenko A.L. Interaction of supercooled droplets and nonspherical ice crystals with a solid body in a mixed cloud // *CEAS Aeronautics Journal*. 9(4), 2018. pp. 711–720.

- [3] Aboud D.G.K., Kietzig A.M. On the oblique impact dynamics of drops on superhydrophobic surfaces. Part II: Restitution coefficient and contact time // *Langmuir*, 2018. V. 34. pp. 9889–9896.
- [4] Амелюшкин И.А., Кудров М.А., Морозов А.О., Стасенко А.Л., Щеглов А.С. Модели процессов, сопровождающих кристаллизацию переохлажденных капель // *Труды Института системного программирования РАН*. 2020. Т. 32. № 4. С. 235–244.

## О математическом моделировании гиперзвукового обтекания тонкого крыла переменной формы

*Богатко В.И., Потехина Е.А.*

*aerovib@mail.ru, 225@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* математическое моделирование газовой динамика, гиперзвуковое обтекание тел, нестационарные течения, дифференциальные уравнения в частных производных, малый параметр.

Пространственная задача гиперзвукового обтекания тонкого крыла представляет значительный практический интерес и имеет ряд характерных особенностей. При обтекании тел гиперзвуковым потоком газа образуется сильная головная ударная волна, за фронтом которой происходит значительное изменение состояния газа. Задача состоит в определении параметров течения в области между головной ударной волной и обтекаемым телом. Форма головной ударной волны также подлежит определению. Течение газа в ударном слое описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для построения приближенного аналитического решения задачи используется метод тонкого ударного слоя [1], основанный на малости отношения плотностей газа на фронте ударной волны. Этот малый параметр физически обоснован, а хорошее совпадение результатов расчетов, полученных с помощью этого метода, с результатами численных расчетов и экспериментальными данными (см., например, [1]–[3]) позволяет сделать вывод о возможности его применения для построения моделей течения газа в задачах газовой динамики с интенсивными ударными волнами.

Стационарный случай обтекания тонкого крыла был исследован в рамках метода тонкого ударного слоя в работе [4], позднее авторами данной работы был предложен ряд частных решений, которые позволили для конкретных задач получить формулы для определения параметров течения на поверхности обтекаемого крыла [5]. Пространственная нестационарная задача обтекания ги-

перезвуковым потоком тонкого крыла переменной формы в рамках этого метода исследовалась в [6]. В предположении, что головная ударная волна присоединена к передней кромке крыла, по крайней мере в одной точке, в первом приближении было построено решение упрощенной системы уравнений, зависящее от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта головной ударной волны. Для определения этих функций получена интегро-дифференциальная система уравнений.

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию задачи обтекания тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа. Используется полуобратный метод решения этой системы, при котором задается вид одной из произвольных функций. При этом предлагаемый вариант полуобратного метода позволяет не только построить решение, но и дополнительно задать уравнение передней кромки крыла, а в случае, когда головная волна присоединена вдоль всей передней кромки и наклон поверхности крыла на передней кромке. Получены формулы для определения формы фронта ударной волны, поверхности обтекаемого тела, расстояния между ударной волной и поверхностью тела, параметров течения на поверхности крыла. Полученные результаты являются новыми.

Влияние реальных свойств газа на газодинамические параметры потока за фронтом интенсивной ударной волны достаточно хорошо можно учесть уменьшением показателя адиабаты [3]. В этом случае малый параметр также уменьшается, что способствует улучшению практической сходимости метода тонкого ударного слоя. Если газ за ударной волной находится в состоянии термодинамического равновесия, то эффективный показатель адиабаты мало меняется во всей зоне течения. Это дает возможность моделировать течение за фронтом сильной ударной волны движением некоторого совершенного газом, показатель адиабаты которого определяется в зависимости от числа Маха и термодинамического состояния газа в ударном слое. При этом уравнение состояния можно взять в квазисовершенном виде. Предлагаемая математическая модель может дополнить численное моделирование и при исследовании неравновесных течений (см., например, [7]).

### Литература

- [1] Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1959. 220 с.
- [2] Hayes W. D., Probst R. F. Hypersonic flow theor. New York and London, Acad. press, 1959. 607 p.
- [3] Лунев В. В. Течения реальных газов с большими скоростями М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 760 с.

- [4] Голубинский А. И., Голубкин В. Н. О пространственном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа // Доклады АН СССР. 1977. Т. 234. № 5. С. 794–802.
- [5] Bogatko V. I., Potekhina E. A., Kolton G. A. An approach to solution of spatial hypersonic flow past a thin wing problem. // International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov’s Reading 2015. DOI:10.1109/POLYAKHOV.2015.
- [6] Bogatko V. I., Гриб А. А., Колтон Г. А. Обтекание тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 4. С. 94–101.
- [7] Кузнецов М. М. О неравновесном обтекании тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа // Труды Центрального Аэрогидродинамического Института. 1983. Вып. 2177. С. 77–95.

## Моделирование гидродинамики ванны металлического расплава в процессе селективного лазерного сплавления

*Борейшо А.С.<sup>1,2</sup> Джгамадзе Г.Т.<sup>1</sup> Моисеев А.А.<sup>1</sup> Савин А.В.<sup>1,2</sup>  
Смирнов П.Г.<sup>1</sup> Смоленцев С.С.<sup>1</sup>*

*DgvancaT96@mail.ru*

<sup>1</sup>АО «Лазерные системы»,

198515, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Связи, 28, корп. 2, стр. 1,

<sup>2</sup>Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* микроуровневая модель, адаптированная сетка, краевые эффекты.

Процесс взаимодействия лазерного излучения с металлическими порошками охватывает такие явления, как конвекция металлического расплава, поверхностное натяжение, «эффект Марангони», конвективный и лучистый теплообмен, абляция и возникающая вследствие этого реактивная сила, которые лежат в основе соответствующей математической микроуровневой модели [1]–[3].

В представленной работе предложена модифицированная микроуровневая модель, которая может быть реализована в рамках программных пакетов, предназначенных для моделирования гидродинамики, с дополнениями, описывающими переменные свойства среды [4]. Новая формулировка источникового члена, соответствующего сдерживающей силе в уравнении импульсов, позволяет снизить требования к дискретизации по времени, следовательно, избавиться от численной неустойчивости и повысить эффективность вычислений, поскольку она не содержит произвольных постоянных, более гладкая и имеет нулевую производную в нуле.

Для моделирования процесса взаимодействия излучения с порошком применяется композитный подход к построению вычислительной сетки, т.е. сгущение сетки происходит локально в тех областях, где это необходимо. Такой подход позволяет уменьшить объем вычислений. Ещё одним требованием к сетке является её способность трансформироваться, что позволит сохранить детальное описание геометрии микроуровневой структуры, поскольку положение поверхности раздела фаз изменяется с течением времени.

В работе приведены примеры численных экспериментов. Выявлено, что циркуляция жидкого металла возникает из-за явлений поверхностного натяжения, «эффекта Марангони», «силы Архимеда», силы тяжести и реактивной силы отдачи. Форма ванны расплава определяется «эффектом Марангони» и силой отдачи. В результате расчётов также были обнаружены краевые эффекты: углубление ванны расплава в конце прохода лазерного излучения, утолщение ванны расплава в начале прохода.

Микроуровневая модель процесса взаимодействия лазерного излучения с порошком может стать полезным инструментом, позволяющим исследовать влияние режимов обработки на качество получаемого изделия и оценивать их границы применимости.

## Литература

- [1] Zhang Y., Zhang J. Modeling of solidification microstructure evolution in laser powder bed fusion fabricated 316L stainless steel using combined computational fluid dynamics and cellular automata // *Journal Additive Manufacturing*, 2019. № 28. pp. 750–765
- [2] Chunlei Qiu, Chinnapat Panwisawas, Mark Ward, Hector C. Basoalto, Jeffery W. Brooks, Moataz M. Attallah. On the role of melt flow into the surface structure and porosity development during selective laser melting // *Journal Additive Manufacturing*, 2015. № 96. pp. 72–79
- [3] Tang C., Tan J.L., Wong C.H. A numerical investigation on the physical mechanisms of single track defects in selective laser melting // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018. Т. 126. pp. 957–968
- [4] Борейшо А.С., Джгамадзе Г.Т., Зыбина В.В., Моисеев А.А., Савин А.В., Смирнов П.Г., Смоленцев С.С., Тимофеев В.А., Третьяк П.С. Микроуровневое моделирование теплофизических и гидродинамических процессов селективного лазерного сплавления. ТВТ, 2021 (представлено для публикации)



## Метод генеративного дизайна моделей на основе нерегулярных данных в приложении к задачам теплопередачи

*Быков Н.Ю.<sup>1,2</sup> Хватов А.А.<sup>2</sup> Калюжная А.В.<sup>2</sup>  
Бухановский А.В.<sup>2</sup>*

*nbykov2006@yandex.ru, alex\_hvatov@itmo.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>2</sup>Университет ИТМО,

197101, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

*Ключевые слова:* генеративный дизайн моделей, нерегулярные данные, уравнение теплопроводности

Разработка методов генеративного дизайна моделей (ГДМ), в частности, управляемых данными моделей, является перспективным направлением создания инструментов контроля и прогнозирования сложных мультифизических процессов техногенного и природного характера. Управляемые данными модели получили своё широкое распространение в различных применениях нейронных сетей и других регрессионных моделей. В области классических моделей машинного обучения [1], в настоящее время вопрос получения модели, наиболее точно воспроизводящей имеющийся набор данных (наблюдений) не является актуальным. В современных методах [2] жертвуют точностью воспроизведения данных в пользу получения упрощённой модели, которая описывает наиболее существенную часть процесса, частной реализацией которого являются имеющиеся наблюдения. Такой подход обеспечивает получение устойчивой структуры модели для различных наборов данных, описывающих явления схожей природы.

Одним из недостатков классических моделей машинного обучения является неинтерпретируемость [3]. В последние несколько лет активно разрабатываются методы ГДМ для определения структуры управляемых данными моделей в виде дифференциальных уравнений, которые в некоторых случаях могут быть понятны работающему в предметной области эксперту с одной стороны и проанализированы классическими методами математической физики с другой. Подобные методы тестируются на модельных задачах и применяются для решения практических задач [4, 5]. В большей части работ, посвящённых проблеме ГДМ, для дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) используется метод конечных разностей. При решении как тестовых, так и реальных прикладных задач используются синтетические данные полученные на регулярных сетках. Однако, с учетом специфики по-

лучения экспериментальной информации в общем случае данные могут иметь нерегулярную структуру.

В настоящей работе на этапе дискретизации предлагается использовать метод конечных элементов [6]. В качестве тестовой задачи рассматривается одномерная задача о прогреве металлического стержня. Для получения синтетических данных используется уравнение теплопроводности, описывающее нестационарный одномерный процесс распространения тепла. Рассматриваемая задача имеет аналитическое решение. Для задачи восстановления уравнения получены массивы данных на нерегулярных сетках. Рассматриваются несколько видов сеток: с чередуемыми шагами по пространственной координате и с шагом, увеличивающимся в арифметической прогрессии с заданной разностью прогрессии.

В работе на первом этапе алгоритма ГДМ метод конечных элементов с использованием линейных аппроксимирующих функций применяется для дискретизации возможной модели уравнения. В дальнейшем поиск подходящего дизайна модели осуществляется с использованием как простейших алгоритмов перебора всех возможных вариантов дизайна, так и оригинальных методов оптимизации. Результатом применения алгоритма ГДМ является восстановленное ДУЧП.

В работе обсуждается эффективность метода генерации дизайна модели в зависимости от степени «нерегулярности» данных и перспективность предлагаемого подхода.

## Литература

- [1] Guyon I. et al. Analysis of the AutoML Challenge Series // Automated Machine Learning. 2019. P. 177. doi: 10.1007/978-3-030-05318-5\_10
- [2] Kalyuzhnaya A. V. et al. Automatic evolutionary learning of composite models with knowledge enrichment // Proceedings of the 2020 Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. 2020. pp. 43–44. doi: 10.1145/3377929.3398167
- [3] Lipton Z. C. The mythos of model interpretability // Queue. 2018. V. 16. N 3. pp. 31–57. doi: 10.1145/3236386.3241340
- [4] Maslyaev M., Hvatov A., Kalyuzhnaya A. Data-Driven Partial Derivative Equations Discovery with Evolutionary Approach // International Conference on Computational Science. Springer, Cham, 2019. pp. 635–641. doi: 10.1007/978-3-030-22750-0\_61
- [5] Kondrashov D., Chekroun M. D., Ghil M. Data-driven non-Markovian closure models // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. V. 297. pp. 33–55. doi: 10.1016/j.physd.2014.12.005
- [6] Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. / пер. с англ. М.: Мир., 1986. 318 с.

## Влияние диаметра воздушного винта, установленного в концевом сечении крыла большого удлинения, на аэродинамические характеристики

*Виноградов О.Н.,<sup>1</sup> Корнушенко А.В.,<sup>1</sup> Павленко О.В.,<sup>1</sup>  
Петров А.В.,<sup>1</sup> Пигусов Е.А.,<sup>1</sup> Чинь Т.Н.<sup>2</sup>*  
*oleg.vinogradov@tsagi.ru*

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, 140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1,

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, 141701, Российская Федерация, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9

*Ключевые слова:* тянущий воздушный винт, интерференция воздушного винта, крыло большого удлинения.

В настоящее время актуальной задачей является создание летательных аппаратов (ЛА) длительного полета. В мире ведутся исследования экспериментальных ЛА, с электрическими двигателями и комбинированными источниками питания, сочетающие аккумуляторные и солнечные батареи [1]–[3].

При проектировании ЛА на солнечных батареях возникает проблема размещения силовой установки на крыле большого удлинения. Размещение солнечных батарей по всей верхней поверхности крыла приводит к необходимости компоновки силовой установки в концевом сечении крыла. Исследование взаимодействия струй воздушных винтов (ВВ) в данной аэродинамической компоновке является актуальной задачей и ей посвящены ряд расчётно-экспериментальных исследований [4, 5]. Обтекание и аэродинамические характеристики крыла, расположенного в следе за ВВ зависят от множества условий: скорости набегающего на крыло потока, диаметра ВВ, частоты его вращения, угла установки лопасти, а также расстояния от вращающихся лопастей ВВ до передней кромки крыла.

В данной работе рассматривается влияние изменения диаметра ВВ на крейсерские характеристики самолета с крылом большого удлинения в продольном канале. Численные исследования проведены по программе, основанной на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса. Расчет проведен при скорости потока  $V = 25$  и  $50$  м/с, которые соответствуют числам Рейнольдса  $Re = 0.17$  и  $0.35 \cdot 10^6$  вычисленным относительно средней аэродинамической хорды крыла. Исследовано обтекание прямого крыла большого удлинения с работающим тянущим двухлопастным ВВ с диаметрами 0.22 и 0.33 м, установленный в концевом сечении крыла самолета, а также без ВВ. Углы атаки варьировались в диапазоне от  $1^\circ$  до  $7^\circ$ .

В результате получено, что при увеличении диаметра ВВ на поверхности крыла, находящейся в следе за ВВ, происходит перераспределение давления, когда на нижней поверхности передней кромки крыла увеличивается разрежение, а на верхней — повышается давление. Вследствие чего в зоне обдува струями ВВ подъемная сила крыла снижается. Так, на угле атаки  $1^\circ$  подъемная сила ЛА с ВВ диаметром 0.33 м уменьшается на 6 процентов по сравнению с ВВ диаметром 0.22 м.

### Литература

- [1] Kiss T., Lustbader J., Leighton D. Modeling of an Electric Vehicle Thermal Management System in MATLAB/SimulinkNREL/CP-5400-63419. Posted with permission. Presented at the SAE 2015 World Congress & Exhibition, 21–23 April 2015, Detroit, Michigan.
- [2] Тулинова Е.Е., Ковалев К.Л., Иванов Н.С., Ларионов А.Е. Обзор разработок полностью электрических самолетов. *Электричество*, № 4, 2016. С. 15–25
- [3] Мясичев А.А. Построение БПЛА длительного полета с использованием солнечных модулей. *Technical sciences, ISSN 23075732, Herald of 132 Khmelnytskyi national university, Issue 2, 2017 (247)*. С. 132–136
- [4] Корнушенко А.В., Кудрявцев О.В., Теперин Л.Л., Теперина Л.Н., Шустов А.В., Орфинежад Фарид, Тхейн Мьё Использование принципа полезной интерференции для повышения аэродинамического совершенства компоновки воздушного винта и крыла. *Ученые записки ЦАГИ*, Т.47, № 8, 2016. С. 42–49.
- [5] Корнушенко А.В., Кудрявцев О.В., Теперин Л.Л., Теперина Л.Н., Шустов А.В., Орфинежад Фарид, Тхейн Мьё Исследование полезной интерференции тянущей и толкающей схем воздушных винтов, установленных на концах крыла// *Ученые записки ЦАГИ*, Т.48, № 1, 2017. С. 3–9.

## Взаимодействие звука с локализованным вихревым течением

*Гаджиев Д.А., Гайфуллин А.М.*

*gadzhiev@phystech.edu, gaifullin@tsagi.ru*

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, 140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

*Ключевые слова:* звук, вихрь, рассеяние.

Работа посвящена классической проблеме рассеяния плоской акустической волны цилиндрическим вихрем в идеальном газе. Согласно общепринятой постановке, в качестве вихря берётся двумерное осесимметричное течение с циркуляцией скорости, отличной от нуля на сколько угодно больших расстояниях от центра вихря, — например, вихревая нить или вихрь Ранкина. Имеют-

ся различные решения [1]–[6], причём ни одно из них не имеет вид расходящейся цилиндрической волны с регулярным распределением амплитуды, как в «обычных» двумерных задачах рассеяния. В действительности, такая постановка некорректна: взаимодействие звука с вихрем, имеющим ненулевую циркуляцию на бесконечности, существенно во всём пространстве; поэтому не существует дальней области, в которой можно выставить граничное условие уходящих волн. Заметим, что такой вихрь имеет бесконечную кинетическую энергию и поэтому не может существовать в неограниченном пространстве.

В данной работе рассмотрена задача рассеяния звука на вихре с нулевой циркуляцией на бесконечности:  $\Gamma(r) = \Gamma_* (r/\delta)^2$  при  $r \leq \delta$  и  $\Gamma(r) = \Gamma_* e^{-\varepsilon^2 r^2}$  при  $r > \delta$ , который близок к вихрю Ранкина в ограниченной области пространства  $\delta \ll r \ll \varepsilon^{-1}$ , где  $\varepsilon, \delta$  — малые параметры. Такой вихрь может быть создан вращением в вязкой среде бесконечно протяжённого кругового цилиндра радиуса  $\delta$  с циркуляцией  $\Gamma_*$  в течение долгого времени.

Решение удовлетворяет уравнениям Эйлера с начальными условиями в виде поля скоростей вихря и граничными условиями в виде плоской волны на бесконечности. Вихрь и падающая волна рассматриваются как независимые малые возмущения относительно покоящегося газа, соответствующие числа Маха  $M_0$  и  $M'$  считаются малыми параметрами. Решение ищется в виде двухпараметрического степенного ряда по обоим числам Маха. Так, для поля плотности

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_0^i (M' e^{-it})^j \rho_{ij}(\mathbf{r}; \varepsilon, \delta).$$

Рассеянная волна в главном приближении описывается слагаемым порядка  $O(M_0 M')$  и таким образом является малой поправкой к суперпозиции вихря и падающей волны. Решение удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \rho_{11} + \rho_{11} = -2i(\mathbf{k} \cdot \nabla) \left( \frac{(\mathbf{e}_z, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{r^2} e^{-\varepsilon^2 r^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right),$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичный волновой вектор падающей волны и единичный вектор завихренности в ядре вихря, и выписывается в виде свёртки правой части с функцией Грина.

Асимптотическая структура поля рассеянной волны  $\rho_{11}$  оказывается аналогичной структуре, которая наблюдается в известной задаче дифракции плоской волны на щели шириной порядка масштаба вихря  $\varepsilon^{-1}$ . В дальнем поле  $r \gg \varepsilon^{-2}$ , которое является аналогом области дифракции Фраунгофера, решение имеет вид расходящейся цилиндрической волны

$$\rho_{11} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{i\theta - i\pi/4} \cos \theta \cot \frac{\theta}{2} \left( 1 - e^{-\theta^2/4\varepsilon^2} \right)$$

с угловым максимумом порядка  $\varepsilon^{-1}/\sqrt{r} \ll 1$  в области малых углов  $\theta \sim \varepsilon$ . В ближнем поле  $r \sim \varepsilon^{-2}$ , соответствующем области дифракции Френеля, имеем волну сложного вида с амплитудой порядка  $O(1)$ .

Полученное решение содержит известные ранее решения в виде различных предельных случаев. Решение в области  $r \ll \varepsilon^{-1}$ , где вихрь близок к вихрю Ранкина, совпадает с решениями [2]–[5].

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-31-90057.

### Литература

- [1] Pitaevskii L.P. Calculation of the phonon part of the mutual friction force in superfluid helium. *Sov. Phys. JETP*, vol. 35, 1958. pp. 1271–1275.
- [2] Sakov P.V. Scattering of sound by a vortex filament. *Acoust. Phys.*, vol. 39, 1993. pp. 280–282.
- [3] Ford R., Llewellyn Smith S. Scattering of acoustic waves by a vortex. *J. Fluid Mech.*, vol. 386, 1999. pp. 305–328.
- [4] Howe M.S. On the scattering of sound by a rectilinear vortex. *J. Sound Vib.*, vol. 227, 1999. pp. 1003–1017.
- [5] Belyaev I.V., Kopiev V.F. On the statement of the problem of sound scattering by a cylindrical vortex. *Acoust. Phys.*, vol. 54, 2008. pp. 699–711.
- [6] Aharonov Y., Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, vol. 115, 1959. pp. 485–491.

## Нелокальный закон сохранения в свободной затопленной незакрученной струе

*Гайфуллин А.М., Жвик В.В.*

*gaifullin@tsagi.ru, VladZhvick@yandex.ru*

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, 140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

*Ключевые слова:* затопленная струя, пограничный слой, закон сохранения.

Поле скорости в незакрученной осесимметричной затопленной струе вязкой несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя описывается уравнениями:

$$\begin{cases} (ru)_z + (rv)_r = 0 \\ uu_z + vv_r = \nu r^{-1}(ru_r)_r \end{cases} \quad (1)$$

где  $z$  — осевая координата,  $r$  — радиальная координата,  $u$  — осевая скорость,  $v$  — радиальная скорость,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости (молекулярной или турбулентной).

Первое уравнение системы (1) выражает закон сохранения массы. Складывая первое уравнение (1), умноженное на  $u$ , со вторым уравнением, умноженным на  $r$ , получим дивергентную форму закона сохранения импульса:

$$(ru^2)_z + (rvu - \nu ru_r)_r = 0 \quad (2)$$

Нелокальный закон сохранения [1] получим, умножив (2) на  $\psi - \nu z$ :

$$((\psi - \nu z)ru^2)_z + ((\psi - \nu z)(rvu - \nu ru_r) + \nu(ur)^2/2)_r = 0 \quad (3)$$

где  $\psi$  — функция тока:  $u = r^{-1}\psi_r$ ,  $v = -r^{-1}\psi_z$  ( $\psi = 0$  при  $r = 0$ ).

Из законов сохранения (2), (3) выводятся инварианты затопленной струи. В предположении  $u = O(r^{-4})$ ,  $v = O(r^{-1})$  при  $r \rightarrow \infty$  в струе при любом  $z$  сохраняются интегралы:

$$J = 2\pi \int_0^\infty u^2 r dr, \quad E = \int_0^\infty u^2 (\psi - \nu z) r dr \quad (4)$$

Первый интеграл (4) имеет смысл потока осевой компоненты импульса через поперечное сечение струи. Второй интеграл является обобщением инварианта плоской пристенной струи [2], [3] на осесимметричные течения и не имеет общезначимого смысла.

Рассмотрим координатное разложение дальнего поля ( $z \rightarrow \infty$ ) незакрученной струи [4, 5]:

$$\psi(z, r) = \Psi_1(z, \eta) + \beta \Psi_2(\eta) + o(1), \quad \eta = r/(\nu z) \quad (5)$$

где

$$\Psi_1(z, \eta) = \nu z \frac{\alpha^2 \eta^2}{1 + \alpha^2 \eta^2/4},$$

$$\Psi_2(\eta) = -\frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \frac{1 - \alpha^2 \eta^2/4}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^2}$$

С помощью инвариантов (4) определяются неизвестные константы в разложении (5):

$$\alpha = \sqrt{\frac{3J}{16\pi}}, \quad \beta = \frac{3E}{2\alpha^2} \quad (6)$$

Формулы (6) позволяют связать дальнее поле струи с характеристиками источника струи в начальном сечении  $z = 0$ . Общепринятый способ определения константы  $\beta$  через расход в сечении струи  $z = 0$ , предложенный в работе [5], некорректен. Сохранение интегралов (4) и правильность констант (6) проверены на численном решении уравнений (1) для струй с параболическим и линейным начальными профилями скорости.

Определение константы  $\beta$  с помощью инварианта  $E$  является решением проблемы скрытых инвариантов [6] в случае малой вязкости. Различные варианты решения этой проблемы для случая произвольной вязкости предложены в работах [7, 8].

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00163.

### Литература

- [1] Naz R. Conservation laws for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl // *Applicable Analysis*. 2012. V. 91, N 5. pp. 1045–1052.
- [2] Акатнов Н.И. Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та* 1953. № 5. С. 24–31.
- [3] Glauert M.V. The wall jet // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. pp. 625–643.
- [4] Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung // *Z. angew. Math. Mech.* 1933. Bd 13, N 4. pp. 260–263.
- [5] Лойцянский Л.Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // *Прикл. математика и механика*. 1953. Т. 17, № 1. С. 3–16.
- [6] Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1989. 336 с.
- [7] Гольдштик М.А., Яворский Н.И. О затопленных струях // *Прикл. математика и механика*. 1986. Т. 50, № 4. С. 573–583.
- [8] Яворский Н.И. О скрытом интеграле сохранения в теории затопленных струй // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. 19–24 августа 2019 г., г. Уфа. 2019. С. 92.

### Численные исследования аэродинамической интерференции фюзеляжа и винто-кольцевого движителя для увеличения тяги системы

*Губский В.В., Павленко О.В., Петров А.В.*

*Vitaly.Gubsky@tsagi.ru, Olga.v.pavlenko@yandex.ru, Albert.Petrov@tsagi.ru*

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, 140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

*Ключевые слова:* винто-кольцевой движитель, фюзеляж, толкающий винт

Тяга изолированного винта, существенно уменьшающаяся с ростом скорости набегающего потока, увеличивается при установке винта за фюзеляжем в



зоне заторможенного потока, а также при расположении винта в кольце. Преимущества установки в кольце следуют из импульсной теории, которая подтверждается результатами расчетов, а также практикой использования толкающих винтов и винтов в кольце на многих транспортных средствах. Такая конструктивная схема способствует не только увеличению тяги, но и защите самого винта от повреждений, повышению безопасности полета и снижению шума. Для увеличения тяги воздушного толкающего винта были рассмотрены следующие варианты: модификация исходной кормовой части тела вращения на основе использования геометрии крыльевых профилей Либика [1], с соблюдением условия безотрывного обтекания по теории Стрэдфорда [2], и использование конструкции «винт в кольце». Расчет различных компоновок моделей был проведен по программе, основанной на численном решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса на неструктурированной сетке.

В процессе численных исследований обтекания профиля кольца в зависимости от местного угла атаки в следе за телом вращения были рассчитаны аэродинамические характеристики изолированного профиля. Находясь в следе за телом вращения, кольцо влияет (за счёт изменения давления) на обтекание хвостовой части тела вращения. Поэтому углы атаки изолированного кольца и, как следствие, местные углы атаки кольца в следе за телом вращения взаимосвязаны. Это позволило оптимизировать положение кольца относительно фюзеляжа, что привело к росту его тяги.

Другим решением стала оптимизация профиля кольца для обеспечения полета с большими скоростями. С целью определения влияния параметров и кривизны профиля кольца на тягу ВКД поиск новой формы проведен для одинакового диаметра, неизменной хордой и фиксированного расстояния наибольшей толщины профиля на внутренней стороне кольца. Согласно этим ограничениям был спроектирован новый профиль кольца который имеет меньшую относительную толщину и измененное положение максимальной толщины. Проведенные расчеты показали, что новая форма кольца позволила достичь больших величин тяги ВКД для больших скоростей полета. Расчёт выявил, что величина максимальной тяги винта зависит от формы кормовой части фюзеляжа, и в меньшей степени от формы профиля кольца и его положения.

Проведенные исследования показали, что изменение только исходной формы кормовой части исходного тела вращения, уменьшает донное разрежение не создавая отрыва и приводит к небольшому увеличению тяги винта во всем расчетном диапазоне скоростей полета; установка винта в кольце приводит к существенно большему увеличению тяги винта также во всем расчетном диапазоне скоростей полета. В процессе численных исследований были рассчитаны аэродинамические характеристики изолированного профиля кольца. Было выявлено, что углы атаки изолированного кольца и местные углы атаки кольца в следе за телом вращения взаимосвязаны. Анализ полученных результатов, так-

же показал, что на характеристики тяги винта в кольце влияет местный угол атаки, при котором поток набегаает на кольцо. При этом тяга воздушного винта зависит от местного угла атаки профиля кольца, а местный угол атаки профиля кольца зависит от формы кормовой части тела вращения. Наибольшую тягу винт в кольце создает при местном угле атаки изолированного профиля кольца, соответствующего максимальному аэродинамическому качеству. Показано, что для достижения наибольшей тяги необходима комплексная оптимизация обводов кормовой части тела вращения, профиля и угла установки кольца.

### Литература

- [1] Liebeck R. H. Low Reynolds number airfoil design at the Douglas aircraft company // Proceedings of conference on Aerodynamics at low Reynolds numbers, Vol 1, paper N 7, 1986.
- [2] Stratford B. S. An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise // J. of Fluid Mech., 1959. vol. 5, N 1

## Тепловой поток на поверхности обтекаемого тела после локального энерговложения

*Добров Ю.В., Лашков В.А., Ренев М.Е., Машек И.Ч.,  
Хоронжук Р.С.  
youdobrov@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* локальное энерговложение, тепловой поток, сверхзвук.

Локальное энерговложение в сверхзвуковой поток газа позволяет управлять газодинамическими параметрами высокоскоростных потоков и воздействовать на характер обтекания различных тел. Вклад энергии при этом возможно осуществлять разными типами высокочастотных газовых разрядов, например, СВЧ-разрядом или лазерно-инициированным оптическим пробоем. В зависимости от вида разряда можно получать необходимые геометрические конфигурации возмущённой области газа для изучения различных физических явлений. Численное моделирование показало [1, 2], что в результате взаимодействия протяжённого разреженного газового канала с ударной волной происходит распад ударно-волновой конфигурации и образование тороидального вихря, движущегося вверх по потоку к поверхности обтекаемого цилиндра. В экспериментальных работах [3, 4] было подтверждено, что при реализации СВЧ-разряда на оси симметрии поперечно обтекаемого цилиндра происходит значительное падение давления в критической точке торца цилиндра и отход ударной волны

от поверхности тела. Похожие экспериментальные исследования [5] были проведены с применением фемтосекундного лазерного излучения, аналогично показавшие возможность значительного снижения давления на лицевой поверхности плохообтекаемого тела. В работе [6] указано, что лазерная инициация позволяет изменять длину плазменного филамента СВЧ-разряда, таким образом меняя геометрию следа разряда.

В рамках данной работы было проведено экспериментальное исследование взаимодействия области газа, возмущенной при помощи электрического разряда, с косым скачком уплотнения на пластине, расположенной под углом атаки.

Для осуществления энерговложения использовался межэлектродный разряд с силой тока 25 А, напряжением 20 кВ; длительность разряда составляла 2.5 мкс. В ходе эксперимента варьировался угол между осью симметрии разряда и вектором скорости набегающего потока, поверхность модели располагалась под углом  $22^\circ$  к вектору скорости набегающего сверхзвукового потока, число Маха – 2.1. На поверхности экспериментальной модели в плоскости симметрии устанавливался датчик теплового потока.

Так как характерное время процесса составляет порядка 100 мкс, то необходимо было использовать быстродействующую измерительную аппаратуру с высоким временным разрешением. В эксперименте использовался градиентный датчик теплового потока, изготовленный из монокристалла висмута в Санкт-Петербургском политехническом университете. Принцип работы датчика основан на поперечном эффекте Зеебека [7]. В результате были получены экспериментальные данные о динамике теплового потока в точке на поверхности пластины и теневые фотографии взаимодействия возмущенной разрядом области газа с косым скачком уплотнения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 19-31-90071 и № 18-08-00707). При расчетах использовались компьютерные ресурсы, предоставленные РЦ «Вычислительный центр СПбГУ».

## Литература

- [1] Артемьев В. И., Бергельсон В. И., Немчинов И. В., Орлова Т. И., Рыбаков В. А., Смирнов В. А., Хазинс В. М. Формирование новых структур газодинамических течений при возмущении плотности в тонких протяженных каналах перед фронтами ударных волн. // Мат. моделирование. 1989, 1(8), С. 1–11
- [2] Azarova O.A. Generation of Richtmyer–Meshkov and secondary instabilities during the interaction of an energy release with a cylinder shock layer. // *Aerospace Science and Technology*, 2015, 42, pp. 376–383. doi:10.1016/j.ast.2015.01.027.
- [3] Knight D., Kolesnichenko Yu., Brovkin V., Khmara D., Lashkov V. and Mashek I. Interaction of Microwave-Generated Plasma with a Hemisphere Cylinder at Mach 2.1. // *AIAA Journal*, 2009, 47(12), pp. 2996–3010 doi:10.2514/1.43657.

- [4] Lashkov V., Mashek I., Anisimov Yu., Ivanov V., Kolesnichenko Yu., Ryvkin M. Gas Dynamic Effect of Microwave Discharge on Supersonic Cone-shaped Bodies. 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2004, doi:10.2514/6.2004-671.
- [5] Elias P.-Q., Severac N., Luyssen J.-M., Andre Y.-B., Doudet I., Wattellier B., Tobeli J.-P., Albert S., Mahieu B., Bur R., Mysyrowicz A., Houard A. Improving supersonic flights with femtosecond laser filamentation. // Science Advances. 2018, 4(11) doi:10.1126/sciadv.aau5239.
- [6] Khoronzhuk R.S., Karpenko A.G., Lashkov V.A., Potapeko D.P. and Mashek I.Ch. Microwave discharge initiated by double laser spark in a supersonic airflow. J. Plasma Physics. 2015, 81 doi:10.1017/S0022377814001299.
- [7] Mityakov A.V., Sapozhnikov S.Z., Mityakov V.Y., Snarskii A.A., Zhenirovsky M.I., Pyrhonen J.J. Gradient heat flux sensors for high temperature environments. Sensors and Actuators A, 2012, 176. doi:10.1016/j.sna.2011.12.020.

## Исследование оптимальной геометрии опор с газовой смазкой при больших числах Маха

*Завьялов О.Г*

*zavog@yandex.ru*

Челябинский государственный университет,  
454001, Российская Федерация, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129,  
Южно-Уральский Технологический Университет,  
457022, Российская Федерация, Челябинская обл., г. Пласт, ул. 9 Января, 2б

*Ключевые слова:* газовая смазка, эффект клина, эффект внешнего нагнетания смазки, эффект колеблющейся стенки, число Маха.

Известно, что в теории газовой смазки существует три принципа создания избыточного давления в газовом слое опор скольжения [1, 2], названные принципами газовой смазки:

1. эффект клина;
2. эффект внешнего нагнетания смазки;
3. эффект колеблющейся стенки.

Рассматривается работа опор, работающих на эффекте клина с учетом сжимаемости газа и числа Маха. Произведенные расчёты показывают, что течения газового слоя существенно различны при  $\overline{M} < \overline{M}_k$  и  $\overline{M} > \overline{M}_k$ , где под  $\overline{M}_k$  понимается критическое число Маха.

При малых числах Маха  $\overline{M} \ll \overline{M}_k$  реакции опор с газовой смазкой были найдены в результате интегрирования поля давлений, определенного с помощью уравнений Рейнольдса.

Рассмотрены конструкции опор скольжения при больших числах Маха  $\overline{M} > \overline{M}_k$ . В таких опорах, работающих на эффекте клина, для создания избы-

точного давления смазка должна поступать в расширяющийся клиновидный зазор.

Для цилиндрической опоры в результате произведенного анализа получены реакции газового слоя. На основании произведенных расчётов для цилиндрической опоры решён вопрос оптимального проектирования таких опор с точки зрения обеспечения устойчивости центрального равновесного положения шипа. Произведенные расчёты показали, что при условии  $\bar{M} < \bar{M}_k$  работа цилиндрической опоры существенно отличается от работы этой же опоры при  $\bar{M} > \bar{M}_k$ .

Оптимальная геометрия профиля опор с газовой смазкой определена с помощью принципа максимума Понтрягина. Исследованы реакции опор с оптимальной геометрией профиля зазора при малых и больших числах Маха, т. е.  $\bar{M} < \bar{M}_k$  и  $\bar{M} > \bar{M}_k$ .

Произведены подробные расчёты изменения реакции газового слоя при изменении числа Маха.

## Литература

- [1] Матвеев С.К., Завьялов О.Г. Нестационарное течение тонкого слоя вязкой жидкости между параллельными поверхностями / «Наука и технологии», Краткие сообщения XXXVII Российской школы, посвященной 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра «КБ им. Академика В.П. Макеева» (26-28 июня 2007г., г. Миасс), Екатеринбург, 2007, С. 21–27.
- [2] Матвеев С.К., Завьялов О.Г. Нестационарное течение тонкого слоя вязкой жидкости между колеблющимися параллельными плоскостями // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2007. № 3. С. 65–69.

## Исследование автоколебаний воздушного потока в многоструйной системе вентиляции

*Засимова М.А.<sup>1</sup>, Иванов Н.Г.<sup>1</sup>, Марков Д.<sup>2</sup>*

*zasimova\_ma@spbstu.ru, ivanov\_ng@spbstu.ru, detmar@tu-sofia.bg*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>2</sup>Технический университет Софии,

1756, Болгария, София, Студентски Комплекс, бул. св. Климент Охридски, 8

*Ключевые слова:* вентиляция, автоколебания струй, интенсивность сквозняка.

Одним из ключевых параметров, используемых при оценке степени комфорта человека в помещении, является измеряемая в процентах величина интенсивности сквозняка [1]:  $DR = (34 - T_a)(V_a - 0.05)^{0.62}(0.37V_aTu + 3.14)$ , зависящая от осреднённых по времени значений модуля скорости,  $V_a$ , м/с, температуры

воздуха,  $T_a, ^\circ C$ , а также интенсивности турбулентности,  $Tu, \%$ . Согласно стандартам [1], в рабочей (обитаемой для человека) области величина  $DR$  не должна превышать 20%. Определить поля скорости, температуры и интенсивности турбулентности можно с помощью численного моделирования (CFD) трёхмерных турбулентных течений или на основе экспериментальных исследований. В зависимости от расположения приточного отверстия в помещении могут сформироваться как стационарный, так и нестационарный (автоколебательный) режим течения (см., например, [2]). Автоколебания воздушного потока с большой вероятностью могут проявиться при использовании сложных вентиляционных систем с многоструйной подачей. При наличии низкочастотных колебаний параметры рециркуляционного течения воздуха в рабочей зоне, и, как следствие,  $DR$ , могут существенно меняться во времени.

В настоящей работе рассматривается вентиляционное течение в аудитории Софийского технического университета, размер которой составляет  $5.4\text{ м} \times 11.8\text{ м} \times 3.2\text{ м}$ . Система вентиляции состоит из четырёх припотолочных диффузоров: каждый диффузор имеет по четыре прямоугольных приточных отверстия размера  $7\text{ см} \times 17.7\text{ см}$  и одно вытяжное  $50\text{ см} \times 50\text{ см}$ ; такая система обеспечивает подачу 16 разнонаправленных воздушных струй. Угол наклона лопаток диффузора ( $25^\circ \dots 45^\circ$ ), а также количество включенных в работу диффузоров может варьироваться. Детальные геометрические параметры помещения см. в [3]. Для определения параметров воздухообмена в помещении проводились как натурные измерения, так и численное моделирование.

Вблизи приточных отверстий одного из диффузоров были проведены измерения скорости и температуры воздуха; контролировался расход воздуха через приточные и вытяжное отверстия, в среднем величина объемного расхода составила  $190\text{ м}^3/\text{ч}$ , соответствующее значение скорости равно  $4.26\text{ м/с}$ , а число Рейнольдса —  $2 \times 10^4$ . В расчетах на всех приточных отверстиях включенных диффузоров задавался обеспечивающий экспериментальный расход однородный профиль скорости. Расчеты выполнены в изотермическом приближении, т.к. согласно данным эксперимента температура в помещении менялась слабо.

В натуральных исследованиях с помощью датчиков термоанемометра в рабочей зоне проведены измерения модуля скорости в четырёх точках мониторинга, расположенных на различной высоте помещения ( $0.1 \dots 1.7\text{ м}$ ).

Моделирование турбулентного течения воздуха осуществлялось в CFD-коде ANSYS Fluent с использованием подхода URANS, основанного на решении осредненных по Рейнольдсу нестационарных уравнений Навье–Стокса, замыкаемых различными моделями турбулентности (стандартной  $k - \varepsilon$ ,  $k - \varepsilon$  RNG и  $k - \omega$  SST). Дискретизация пространственных и временных производных осуществлялась со вторым порядком точности.

Анализ расчётных данных показывает, что в помещении наблюдается сложное существенно трёхмерное нестационарное движение воздуха, характеризую-

щиеся квазипериодическими колебаниями струй, которые могут поворачиваться относительно исходного направления вплоть до  $360^\circ$ . В зависимости от рассматриваемого варианта, период колебаний составляет 10 минут и более, при этом амплитуда колебаний сопоставима со средним значением скорости. Данные эксперимента подтверждают наличие низкочастотных колебаний струй.

Особое внимание уделяется оценке выбора необходимого интервала времени для накопления данных в рабочей зоне помещения. Как по расчетным, так и по экспериментальным данным отмечено, что поле скорости существенно изменяется со временем за счет колебаний струй. Локальные значения  $DR$  оказываются чувствительными к продолжительности интервала сбора статистики. Так диапазон осредненных за 3 мин (рекомендованная в [1] длина выборки) значений  $DR$  для одной из точек рабочей зоны помещения составляет 8.6...24.7%, в зависимости от начала сбора данных, при этом независимое от длины промежутка осреднения значение  $DR$  равно 13.8%. Для выборки в 15 мин диапазон  $DR$  — 10.8...19.9%. Представлены рекомендации по определению продолжительности выборки, достаточной для оценки параметров воздухообмена в условиях интенсивных низкочастотных колебаний воздушного потока.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-58-18013).

### Литература

- [1] ISO 7730:2005 Ergonomics of the Thermal Environment. Analytical Determination and Interpretation of Thermal Comfort Using Calculation of the PMV and PPD Indices and Local Thermal Comfort Criteria. 2005.
- [2] Mataoui A., Schiestel R., Salem A. Flow regimes of interaction of a turbulent plane jet into a rectangular cavity: experimental approach and numerical modelling. Flow, Turbulence and Combustion, vol 67, 2001. pp. 267–304.
- [3] Markov D., Ivanov N., Pichurov G., Zasimova M., Stankov P., Smirnov E., Simova I., Ris V., Angelova R., Velichkova R. On the procedure of draught rate assessment in indoor spaces. Applied Science, vol 10 №15, 2020. (5036) 20 p.

## UnDiFi-2D: an Unstructured Discontinuity Fitting code for 2D grids

*Campoli L.*

*l.kampoli@spbu.ru*

Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Ключевые слова:* CFD, Fortran, C, shock-fitting, shock-capturing, unstructured grids

When it comes to simulating high-speed compressible flows, both open-source and commercial CFD codes rely upon the so-called shock-capturing approach

to model gas-dynamic discontinuities, such as shock-waves and slip-lines. Shock-capturing, which can be traced back to the work by von Neumann and Richtmyer [1] lays its foundations in the mathematical theory of weak solutions, which allows to compute all kind of flows, including those affected by shock-waves, using the same discretization of the conservation-law-form of the governing equations at all grid cells. This yields obvious consequences in terms of coding simplicity, since the same set of operations is repeated within all control volumes of the mesh, no matter how complicated the flow might be. Coding simplicity comes not for free, however, and shock-capturing calculations of shocked-flows are plagued by several troubles, all of which are rooted to the fact that “the thickness of a von Neumann shock is unacceptable” [2].

In reality, there is an old and alternative approach to shock-capturing that is immune to all these problems: the shock-fitting approach, which dates back to a World War II NACA technical report by Emmons [3].

Fitting/tracking methods consist in first locating and then tracking the motion of the discontinuities, which are treated as boundaries between regions where a smooth solution to the governing partial differential equations (PDEs) exists. The flow variables on the two sides of the discontinuities can be analytically computed by using the Rankine-Hugoniot (R-H) jump relations, algebraic equations connecting the states on both sides of the discontinuity and its local speed. Then, this solution is used to compute the space-time evolution of the discontinuity, that is, to track its motion.

The paper presents *UnDiFi-2D*, an Unstructured Discontinuity Fitting algorithm code, in its first public release and describes currently implemented features, results of more than a decade of research and ongoing developments [4, 5]. *UnDiFi-2D* features and capabilities are illustrated by means of steady and unsteady two-dimensional examples test cases obtained by coupling it with unstructured shock-capturing solvers. The modular design of *UnDiFi-2D* allows it to be easily included in existing CFD codes and is aimed at ease the code reuse and readability. In the present version, *UnDiFi-2D* uses two different CFD solvers: EulFS, developed by Bonfiglioli [6] and NEO, developed by Ricchiuto [7] but the code can be easily adapted to use any unstructured, node-centered gasdynamic solver.

In order to improve usability, maintenance, enhancement and collaboration, the documentation has been particularly cared in the form of comments in the source code and in detailed user manual. Moreover, the `git` distributed versioning system has been adopted and a repository hosted by `github` has been made publicly available.

The work is supported by the Russian Science Foundation, grant 19-11-00041.



## References

- [1] Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. // Journal of applied physics. 1950. V. 21, N. 3, pp. 232–237.
- [2] Moretti G. Thirty-six years of shock fitting. // Computers & Fluids. 2002. V. 31, N. 4–7, pp. 719–723.
- [3] Emmons H. W. The numerical solution of compressible fluid flow problems, NACA-TN 932, NASA(1944).
- [4] Paciorri, R. and A. Bonfiglioli. A shock-fitting technique for 2D unstructured grids. //Computers & Fluids, 2009. V. 38(3) pp. 715–726.
- [5] Bonfiglioli, A., Paciorri, R., Campoli, L. Unsteady shock-fitting for unstructured grids. // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2016. V. 81(4), pp. 245–261. <https://doi.org/10.1002/fld.4183>. Fld.4183
- [6] Bonfiglioli, A. Fluctuation splitting schemes for the compressible and incompressible Euler and Navier-Stokes equations. // International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2000. V. 14(1) pp. 21–39.
- [7] Arpaia, L., Ricchiuto M., and Abgrall R. An ALE Formulation for Explicit Runge–Kutta Residual Distribution. //Journal of Scientific Computing, 2015. V. 63(2), pp. 502–547.

## Анализ эмпирических соотношений, описывающих параметры ударной волны в ближней зоне источника импульсного энерговыведения

*Капралова А.С., Чернышов М.В., Шалимов В.П.*

*kapralovaa@yahoo.com, mvcher@mail.ru, vitaly-spb@yandex.ru*

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* ударная волна, ближнее поле взрыва, взрывозащита.

В настоящее время разработано множество взрывозащитных устройств разной степени эффективности. Одним из самых распространенных видов таких устройств является взрывозащитная урна — жёсткий контейнер открытого типа, принцип работы которого заключается в формировании выделенного направления распространения взрывной волны. Предполагается, что при взрыве в открытом контейнере ударная волна и поражающие осколки распространяются вверх, в результате чего воздействие взрыва на окружающие объекты сводится к минимуму.

Однако результаты экспериментов и вычислительный анализ наиболее известных контейнеров открытого типа показывают, что ударная волна, огибая

края такого устройства, в дальнейшем распространяется по всем направлениям и ослабляется крайне мало [1]. Для повышения эффективности взрывоподавления необходимо использование и других физических механизмов. К числу таких механизмов относится, например, поглощение энергии взрыва специальной многофазной средой, используемой в разрушаемых закрытых устройствах семейства «Фонтан» [2, 3].

В работах [4, 5] рассматриваются конструкции и результаты испытаний новых прототипов взрывозащитной урны с использованием специальных взрывопоглощающих элементов из многофазной релаксационной среды аномально высокой сжимаемости. Эффективность подавления фугасного действия взрыва для данного устройства определяется экспериментальным путём с последующим сравнением полученных результатов с аналогичными эмпирически полученными характеристиками открытых (нелокализованных) взрывов. Эмпирическим путём показано, что модифицирование конструкции взрывозащитной урны путем размещения защитной прослойки позволяет существенно повысить ее эффективность и уменьшить величину избыточного давления до безопасного уровня уже в непосредственной окрестности устройства.

Исследование взаимодействия ударной волны с многофазной средой в непосредственной близости от источника импульсного энерговыделения требует задания (хотя бы эмпирического) параметров взрывной волны, которые в данном случае не описываются соотношениями Садовского, Броуда и других авторов, пригодными для дальнего поля взрыва. В данной работе проводится сопоставление отечественных [6] и зарубежных методик описания параметров взрывной волны, в дальнейшем требующих верификации в лабораторных и полигонных условиях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90065.

## Литература

- [1] Gelfand B.E., Silnikov M.V., Chernyshov M.V. On the efficiency of semi-closed blast inhibitors // *Shock Waves*. 2010. Vol. 20. No. 4. pp. 317–321. doi: 10.1007/s00193-010-0250-6
- [2] Сильников М.В., Михайлин А.И., Орлов А.В. Характеристики и применение локализаторов взрыва «Фонтан» // *Вопросы оборонной техники*. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. 2003. Вып. 1–2. С. 40–45.
- [3] Silnikov M.V., Mikhaylin A.I. Protection of flying vehicles against blast loads // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 97. pp. 30–37. doi: 10.1016/j.actaastro.2013.12.012
- [4] Takayama K., Silnikov M.V., Chernyshov M.V. Experimental study of blast mitigating devices based on combined construction // *Acta Astronautica*. 2016. Vol. 126. pp. 541–545. doi: 10.1016/j.actaastro.2016.04.024

- [5] Chernyshov M.V., Kapralova A.S., Matveev S.A. Combined device for suppression of damaging effects of detonation of the condensed media // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1214. Paper No. 012002. 7 pp. doi: 10.1088/1742-6596/1214/1/012002
- [6] Шушко Л.А., Каганер Ю.А. Расчет параметров поля взрыва бесосколочных зарядов взрывчатых веществ. Методическое пособие. Часть I. Расчет интенсивности ударной воздушной волны. М.: НПЦ «Квазар ВВ», 1999.

## Затухающие вращательные колебания длинного цилиндра с диском в воздушном потоке

*Кауфман Д.В., Рябинин А.Н.*

*kifadan@mail.ru, a.ryabinin@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* аэродинамическая труба, затухающие колебания, вращательная производная.

Известно, что диск перед цилиндром значительно уменьшает лобовое сопротивление [1]. Поэтому диск размещают перед грузами, переносимыми на внешней подвеске под вертолетом [2]. Грузы на внешней подвеске подвержены колебаниям. Одной из форм колебаний являются вращательные колебания вокруг вертикальной оси. Колебания цилиндров с дисками в головной части изучены слабо. Исключением является изучение автоколебаний и затухающих колебаний цилиндров с удлинением  $\lambda = L/D$  с дисками [3], где  $L$  — длина цилиндра;  $D$  — диаметр. В этой работе рассматривается цилиндр с удлинением  $\lambda = 9$ .

Эксперименты выполнены в аэродинамической трубе АТ-12 Санкт-Петербургского государственного университета, которая имеет открытую рабочую часть. Диаметр выходной части сопла 1.5 м. Методика проведения эксперимента описана в работе [4]. Цилиндр подвешивается в рабочей части на провололочной подвеске, которая обеспечивает его вращение вокруг оси, перпендикулярной оси цилиндра и вектору средней скорости набегающего потока. Ниже оси по потоку к цилиндру крепятся провололочные тяги, соединенные с пружинами, расположенными выше и ниже воздушной струи. В положении равновесия проволоки и пружины поддерживают цилиндр в горизонтальном положении. Натяжение нижней пружины измеряется полупроводниковым тензодатчиком С-50. Сигнал от тензопреобразователя передается на РС осциллограф Velleman-PCS500A. Осциллограф связан с компьютером, на котором записывается в файл зависимость сигнала от времени. Во время эксперимента цилиндр отклоняют от положения равновесия на некоторый угол и отпускают. Колеба-

ния затухают во всех опытах. Время записи равно 17 с. Значения натяжения пружины считываются с частотой 100 Гц.

В наших экспериментах варьировались диаметр коаксиального диска  $d$ , размещаемого перед передним торцом, расстояние между диском и торцом цилиндра  $g$  и положение оси вращения. Диаметр диска  $d$  принимал значения  $0,625D$ ,  $0,75D$ ,  $0,875D$ ,  $1,0D$  и  $1,25D$ . Расстояние  $g$  было равно  $0,5D$ ,  $0,6D$ ,  $0,7D$  и  $0,8D$ . Ось вращения проходила либо через центр цилиндра, либо через поперечное сечение цилиндра, находящееся на расстоянии  $1,5D$  от переднего торца.

Были определены аэродинамические производные коэффициента момента  $m_z^\omega + m_z^{\dot{\theta}}$  цилиндра. Эти производные, определенные для второй оси вращения, превышают аэродинамические производные, найденные для первой оси. Диски, диаметр которых превосходит диаметр цилиндра, не оказывают сильного влияния на затухание колебаний упруго закрепленного цилиндра. Диски меньшего диаметра способствуют более быстрому затуханию колебаний. При фиксированном расстоянии между цилиндром и диском аэродинамические производные максимальны по абсолютной величине при некотором диаметре диска. Положение максимума зависит от расстояния между диском и цилиндром.

Эксперимент позволил определить также другой коэффициент вращательной производной  $m_z^\theta$ . Оказалось, что цилиндр без диска и с диском статически неустойчив ( $m_z^\theta > 0$ ), если ось вращения проходит через центр цилиндра, и устойчив ( $m_z^\theta < 0$ ), если ось вращения смещена к головной части. Наличие диска большого диаметра приводит к уменьшению коэффициента. При фиксированном расстоянии между цилиндром и диском  $m_z^\theta$  максимален для обеих осей вращения, если диаметр диска составляет  $0,75$  диаметра цилиндра.

## Литература

- [1] Koenig K., Roshko A. An experimental study of geometrical effects on the drag and flow field of two bodies separated by a gap. *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 156. P. 167–204.
- [2] Устройство для перевозки крупногабаритных грузов на внешней подвеске вертолета. Пат. Российской Федерации № 2002676; заявители Зырянов Т.П. и др.; заявка 90 4907895 10.12.1990; опубл. 15.11.1993. Бюл. № 41–42.
- [3] Kiselev N., Ryabinin A. The study of shielding influence of the disks placed coaxially on rotational oscillations of the cylinder in the airflow // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. No. 050016. 7 p.
- [4] Kaufman D. V., Ryabinin A. N. Effect of coaxially mounted disks on oscillations of a cylinder of large aspect ratio in air flow // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 927. No. 012002. 5 p.

## Расчетные исследования камеры сгорания ГТУ-65.0

**Краснюк А.А.**

*n7alex2012@googlemail.com*

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* газотурбинные установки, камера сгорания, численное моделирование.

Газотурбинные установки (ГТУ) получили широкое распространение в различных отраслях промышленности, на воздушном, наземном, водном транспорте. Энергетические ГТУ стали неотъемлемой частью тепловых электростанций (ТЭС). Первые ГТУ имели мощность 4 МВт и КПД 0,18. Агрегатная мощность современных установок на ТЭС достигает 300 МВт, а КПД 0,4. Надежность и эффективность функционирования ГТУ зависит в значительной степени от конструкции камеры сгорания, которая определяет внутреннюю газодинамику, смешение компонентов топлива, полноту сгорания, теплообмен и т.п.

В данной работе численно исследованы газодинамические процессы в камере сгорания разрабатываемой в настоящее время ГТУ 65.0. На раннем этапе проектирования в ходе выполнения проверочных расчетных работ было выявлено наличие метана в кольцевом канале. В связи с этим возникла необходимость о доработке кольцевой камеры сгорания для предотвращения попадания газообразного топлива в кольцевой канал. Для этого было разработано техническое решение (ТР) по доработке элементов камеры сгорания. Согласно ТР предлагается закрыть центральный канал модуля смешения и установить кольцо на козырек горелочного устройства.

Целью данной работы являлось расчетное обоснование технического решения по доработке форсуночных блоков кольцевой камеры сгорания. Рассматривалась модель совершенного газа. Математическая модель представляла собой осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (RANS-подход) для сжимаемого совершенного газа с учетом уравнения энергии и уравнений переноса концентраций компонентов топливной смеси. Для замыкания системы уравнений использовалась SST k-omega модель турбулентности. Расчеты проводились для сектора 6 градусов с условиями периодичности на боковых границах сектора. Также был проведен газодинамический расчет в нестационарной постановке с моделированием процессов горения для получения температурных полей. Для проведения численного моделирования использовался программный комплекс ANSYS Fluent.

В ходе анализа результатов трехмерных газодинамических расчетов течения в камере сгорания с доработанным вариантом камер смешения на режиме полной нагрузки наличие метана в кольцевом канале выявлено не было, что подтверждает эффективность технического решения по доработке горелочных устройств и форсуночных блоков. Доработка не оказала существенного влияния на поля скоростей, концентраций метана и полной температуры на выходе из модуля смешения, а также на температурное поле на выходе из жаровой трубы перед первым сопловым аппаратом. Картина течения в полости кольцевого канала практически не изменилась. Стоит отметить наличие вихревых структур и застойных зон в кольцевом канале.

## Численное исследование режимов истечения плоской воздушной струи в прямоугольную полость

*Кудрявцева В.В., Засимова М.А., Иванов Н.Г.*

*kudryavtseva.vv@edu.spbstu.ru, zasimova\_ma@spbstu.ru, ivanov\_ng@spbstu.ru*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

*Ключевые слова:* плоская струя, численное моделирование, режимы истечения струи.

Параметры воздухообмена и уровень комфорта в помещениях зависят от структуры течения воздушного потока, формируемого приточными струями. Структура течения может сильно зависеть как от параметров подаваемого воздушного потока, так и от расположения приточных диффузоров. Проводить исследование влияния этих факторов на вентиляционное течение можно с использованием простых геометрических конфигураций. Один из примеров модельной задачи — истечение плоской одиночной струи в ограниченное пространство (полость) прямоугольной формы. Даже для такой простой конфигурации в зависимости от расположения приточного отверстия в полости за счёт взаимодействия струи с ограничивающими стенками полости и её открытой границей, могут реализовываться различные режимы течения. Так, в работе [1] фиксировался как стационарный режим без колебаний, так и нестационарные режимы с низкочастотными колебаниями струи, периодическими или нерегулярными. Цель настоящей работы — численное исследование истечения струи в прямоугольную полость для трёх вариантов расположения сопла, относящихся к двум режимам распространения струи (стационарному и нестационарному с периодическими колебаниями). Моделирование выполнено для условий эксперимента Mataoui [1].

Задача решается в двумерной постановке, в качестве расчётной области выбрана прямоугольная полость шириной 0.5 м и высотой 0.2 м. Воздух поступает

в полость через сужающееся сопло по направлению к одной из торцевых стенок (параллельно ширине сопла), при этом с противоположной стороны полость открыта — через эту поверхность воздух покидает помещение. Высота приточного отверстия (наиболее узкого сечения сопла), через которое воздух поступает в полость, равна  $h_0 = 0.01$  м. Высота сопла до сужения составляет 0.03 м. Положение приточного отверстия варьируется за счёт изменения расстояний от его оси до нижней стенки полости,  $H_0$ , и от его поверхности до торцевой стенки,  $X_0$ . Рассмотрены три различных варианта расположения сопла в полости: I — при размещении сопла вблизи торцевой стенки ( $X_0 = 0.1$  м) примерно по центру полости ( $H_0 = 0.085$  м); II и III — при размещении сопла на удалении от торцевой стенки ( $X_0 = 0.4$  м), как в окрестности нижней стенки ( $H_0 = 0.04$  м, вариант II), так и по центру полости ( $H_0 = 0.1$  м, вариант III).

В качестве входного граничного условия на срезе сопла задавался однородный профиль скорости:  $U_0 = 6$  м/с. На стенках полости задавалось условие прилипания. На выходной (открытой) границе задавались мягкие граничные условия, обеспечивающие постоянный уровень давления. Задача решалась в несжимаемой постановке с постоянными физическими свойствами среды (воздуха) при температуре 20°C (коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с). Определяющий параметр задачи — число Рейнольдса  $Re = h_0 U_0 / \nu = 4000$ .

Расчеты выполнены с использованием гидродинамического пакета ANSYS Fluent 19.1. Решались стационарные и нестационарные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS/Unsteady RANS-подход), замкнутые с использованием различных моделей турбулентности. Для решения задачи в пакете ICEM CFD 19.1 были построены квазиструктурированные сетки с прямоугольными элементами общей размерностью 6 на 372 тысяч ячеек.

Исследовано влияние на решение размерности расчётной сетки и выбора модели турбулентности. Показано, что решение, полученное с использованием расчётных сеток общей размерностью от 30 тысяч ячеек обеспечивает сеточно-независимое решение. Решения, полученные с использованием четырёх моделей турбулентности (стандартной  $k - \varepsilon$ ,  $k - \varepsilon$  RNG,  $k - \omega$  SST и модели Спаларта-Аллмараса), предсказывают схожие между собой поля скорости в области распространения струи. В области возвратного течения решение существенно зависит от выбора модели турбулентности.

Получены детальные данные о структуре течения для различных режимов распространения струи. В соответствии с экспериментальной картой режимов [1] для двух вариантов расчета (I и II) получен стационарный режим распространения струи. В этих случаях формируется устойчивая структура течения, осредненные по Рейнольдсу поля скорости качественно и количественно схожи с картиной течения, наблюдаемой при визуализации в эксперименте. Для варианта III режим течения — нестационарный с периодическими колебаниями

струи. Период колебаний в расчёте составил 1.16 с, что качественно согласуется с экспериментальным, 1.47 с (отличия составляют 26%). Амплитуда колебаний согласуется с наблюдаемой в эксперименте в той же степени: в зависимости от расположения точки мониторинга, отличия в амплитуде колебаний оказались в диапазоне от 11 до 35%.

Исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-58-18013.

### Литература

- [1] Mataoui A., Schiestel R., Salem A. Flow regimes of interaction of a turbulent plane jet into a rectangular cavity: experimental approach and numerical modelling. Flow, Turbulence and Combustion, vol 67, 2001. pp. 267–304.

## Гистерезис при сверхзвуковом обтекании осесимметричного тела с кольцевой ступенькой под углами атаки

Кузьмин А.Г.<sup>1</sup>, Гувернюк С.В.<sup>2</sup>, Симоненко М.М.<sup>2</sup>, Бабарыкин К.В.<sup>1</sup>  
a.kuzmin@spbu.ru, guv@mail.ru, sim1950@mail.ru, konst20@mail.ru

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* удлиненное тело, прямая кольцевая ступенька, отрыв потока, гистерезис.

Сверхзвуковое обтекание удлиненного осесимметричного тела под углом атаки сопровождается возникновением отрывных структур на подветренной стороне поверхности тела. При этом вдоль подветренной поверхности происходит уменьшение толщины пограничного слоя и формируется узко локализованное высоконапорное сверхзвуковое течение, которое может вызывать повышение давления на выступающих препятствиях [1]. Локальное повышение давления на подветренной стороне прямой кольцевой ступеньки, расположенной на поверхности цилиндриконического тела, под углом атаки было зарегистрировано ранее экспериментально и численно [2]. Имеющиеся экспериментальные данные [2] позволяют заключить, что при сверхзвуковом обтекании рассмотренного тела с прямой кольцевой ступенькой возможен гистерезис по углу атаки.

В настоящей работе представлены результаты численного исследования сверхзвукового обтекания заостренного на конус удлиненного осесимметричного цилиндрического тела с прямой кольцевой ступенькой на поверхности.



Целью работы являлось определение границ области возможного гистерезиса по углу атаки и изучение эволюции структуры течения при увеличении и уменьшении угла атаки.

Рассматриваемое осесимметричное тело состоит из цилиндрического корпуса (диаметр  $d=30$  мм) с коническим наконечником с углом полураствора  $20^\circ$ . Кольцевая ступенька высотой  $h=8$  мм расположена на цилиндрической поверхности тела на расстоянии  $L=136$  мм от основания конического наконечника.

Численное исследование выполнено на основе модели вязкого совершенного газа в предположении, что течение турбулентное и подчиняется уравнениям Рейнольдса (URANS), замыкаемым с помощью двухпараметрической дифференциальной модели турбулентности  $k-\omega$  SST. На поверхности тела ставятся условия прилипания и адиабатичности. На внешних границах расчётной области — условие сверхзвуковой скорости течения. Решения строятся методом установления с помощью решателя пакета ANSYS-15. В качестве граничных условий брались параметры набегающего потока [2]: число Маха  $M_\infty = 3$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ , полное давление  $P_0 = 430$  кПа, температура торможения  $T_0 = 275$  К, единичное число Рейнольдса  $Re_1 = 3.7 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Угол атаки варьировался в диапазоне  $\alpha = 8^\circ - 13^\circ$ .

В результате проведенных исследований получены границы области гистерезиса по углу атаки, а также найдены интервалы угла атаки, в которых развиваются автоколебания потока.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00242, расчеты проведены с использованием ресурсов Вычислительного центра СПбГУ (<http://cc.spbu.ru>).

## Литература

- [1] Guvernyuk S. V., Kuzmin A. G., Simonenko M. M. Development of the vortex flow structure on the leeward side of an axisymmetric body in supersonic free stream at an angle of attack // Fluid Dynamics. 2020. Vol. 55, № 5. pp. 653–656. DOI: 10.1134/S0015462820050080
- [2] Simonenko M. M., Zubkov A. F., Kuzmin A. G. On the supersonic three-dimensional flow over an axisymmetric body with a forward-facing annular step // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, Article ID 050031. DOI: 10.1063/1.5034659

## Аналитические и численные решения двумерных задач теплопроводности и электронной оптики

*Курбатова Г.И., Виноградова Е.М.*

*gi\_kurb@mail.ru, vincat2008@yandex.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* двумерные задачи нестационарной теплопроводности, эффективный численный метод, точное аналитическое решение, суммарный тепловой поток в трубопроводе при разных вариантах заглубления.

Расчёт процессов транспортировки природного газа по морским трубопроводам включает в себя решение задачи теплообмена газа с окружающим грунтом при разных вариантах заглубления трубопровода. Представлен результат сравнительного анализа эффективности следующих четырёх методов численного решения нестационарной двумерной задачи теплопроводности в цилиндрической системе координат при отсутствии осевой симметрии: схемы переменных направлений Писмена–Рекфорда, локально одномерной схемы Самарского, метода стабилизирующей поправки Дугласа–Рекфорда и семейства схем расщепления Яненко.

Для сравнения эффективности данных численных методов было найдено новое точное аналитическое решение двумерной задачи теплопроводности в установленном режиме при граничных условиях, представляющих практический интерес. Двумерное уравнение Лапласа решалось методом разделения переменных в цилиндрической системе координат. Решение указанной краевой задачи получено в виде рядов по собственным функциям по радиальной переменной с логарифмической добавкой. Это позволило обеспечить точное выполнение заданных краевых условий. Коэффициенты рядов вычислены в явной форме. Даны необходимые оценки сходимости рядов. Таким образом, найдено точное аналитическое решение указанной задачи теплопроводности в установленном режиме. Для сравнения точности расчётов по перечисленным четырём численным методам вычислялись модули относительного отклонения значений температуры в узлах сетки в моменты времени, большие времени выхода на установившийся режим, от найденного точного аналитического решения этой тестовой задачи.

Как показало проведенное исследование, наиболее эффективным для решения рассматриваемых двумерных задач теплопроводности является метод Писмена–Рэкфорда. Он позволяет наиболее точно рассчитать временные характеристики, так как этот метод имеет второй порядок точности по шагу по времени в отличие от остальных методов, имеющих первый порядок точности.

Кроме того, из проведенных расчётов следует, что метод Писмена–Рэкфорда не уступает остальным рассмотренным методам в точности расчёта установившегося распределения температуры. Сказанное подтверждает выводы, приведенные в наших предыдущих исследованиях [1], для которых в качестве тестовой задачи использовались более простые аналитические решения двумерного уравнения Лапласа. Представлен пример расчёта методом Писмена–Рэкфорда суммарного теплового потока в трубопровод при разных вариантах его заглубления в грунт. Отметим, что приведенное аналитическое решение краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа имеет большое значение в задачах электронной оптики для расчета поля фокусирующих систем при транспортировке пучков заряженных частиц [2].

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант № 20-07-01086.

### Литература

- [1] Kurbatova G.I., Klemeshev V.A. Effective numerical methods for calculating non-stationary heat and glaciation dynamic processes for offshore gas pipelines // Energy. 2020. Vol. 205. N 117995.
- [2] Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Старикова А.В., Вараюнь М.И. Расчет мультипольной цилиндрической электростатической системы // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. № 5. С. 772–775.

## Апробация и валидация методики расчёта ходкости на основе суперкомпьютерных вычислений

*Лобачев М.П., Багаев Д.В., Рудниченко А.А.*

*lobachevm@mail.ru, d\_bagaev@ksrc.ru, rudnik.mail@gmail.com*

«Крыловский государственный научный центр»,

196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

*Ключевые слова:* численное моделирование, ходовые испытания.

В данной работе рассматривается методика расчёта ходкости проектируемых транспортных судов на основе суперкомпьютерных вычислений. Валидация настоящей методики проводится на основе заводских ходовых испытаний судов трёх проектов, проведённых и описанных во второй половине XX века. Основным источником исходной информации для выполнения проектных работ в задачах корабельной гидродинамики в настоящее время по-прежнему являются экспериментальные исследования, проводимые в опытовых бассейнах, аэродинамических и кавитационных трубах. Каждый из этих экспериментов имеет свои особенности, однако, общим для них является то, что они проводятся с нарушением законов подобия, в первую очередь по числу Рейнольдса,

т.е. по схемам частичного моделирования. Это относится и к прогнозированию ходовых качеств судов, т.е. оценки достижимой скорости хода при заданной мощности энергетической установки. Для оценки влияния не учитываемого при проведении модельного эксперимента критерия подобия разрабатываются инженерные методики, основанные в основном на статистической обработке натуральных испытаний судов. Однако эти методики не являются универсальными и включают так называемые корреляционные надбавки, которые к тому же принимаются своими в каждом гидродинамическом центре.

В настоящее время за счёт использования современных методов численной гидродинамики, а также высокопроизводительных вычислительных технологий (суперкомпьютерных технологий) появилась возможность создания существенно более универсальных методик. Основой таких методик является использование для моделирования течений вязкой жидкости уравнений Рейнольдса, замкнутых полуэмпирическими моделями турбулентности (в данной работе  $k$ -SST). Так как в отличие от экспериментальных исследований при численном моделировании возможно рассмотрение судна натурального масштаба, то проблема частичного моделирования исчезает. Нет так называемой проблемы масштабного эффекта при пересчёте данных модельных испытаний на натурные условия. Для натурального судна расчёт выполняется при одновременном моделировании как по числу Фруда, так и по числу Рейнольдса. Это дает возможность корректного прогнозирования ходовых качеств судов новых типов, для которых еще не накоплены статистические данные для разработки инженерных методик оценки масштабного эффекта. Недостатком таких методик являются только необходимость привлечения значительных вычислительных ресурсов и некоторый недостаток фактических данных по характеристикам турбулентности при больших числах Рейнольдса ( $10^9$ ).

При этом и при численном моделировании в ряде случаев, в том числе и на разных стадиях выполнения проектных работ, требуется внесение эмпирических поправок для учета элементов геометрии корпуса судна, которые либо еще не определены, либо их численный учет нецелесообразен. Они в ряде случаев совпадают с поправками, традиционно используемыми в практике экспериментальных исследований при пересчете результатов модельных испытаний на судно натурального масштаба: на выступающие части, воздушное сопротивление палубной надстройки, на шероховатость и сопротивление сварных швов поверхности корпуса судна. В статье описаны вводимые поправки на сопротивление немоделируемых геометрических элементов ввиду отсутствия подробного описания (выступающих частей и палубной надстройки), а также поправки на сопротивление, вызванное наличием сварных швов на поверхности корпуса судна, численное моделирование сопротивления которой затруднено в силу многочисленности швов и их малых размеров, что приводит при численном моделировании к неоправданному росту вычислительных ресурсов.

Однако часть корреляционной надбавки, а именно поправка на шероховатость, может быть заменена на численное моделирование движения судна с учетом шероховатости его поверхности и поверхности гребного винта. В статье рассматриваются методы определения коэффициентов вводимой для учета шероховатости «функции шероховатости» и ее применения в среде ПО вычислительной гидродинамики «Star-CCM+». В качестве результатов валидации приводится сопоставление результатов заводских ходовых испытаний и результатов численного моделирования движения судна с учетом работы гребного винта как с учетом вводимых поправок на шероховатость поверхности судна и гребного винта, так и с учетом «функции шероховатости», применяемой в процессе численного моделирования.

### Литература

- [1] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика: теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
- [2] Лобачев М.П., Овчинников Н.А., Пустошный А.В. Опыт использования современных методов численной гидродинамики. Академик А.Н. Крылов. // К 150-летию со дня рождения: Сборник статей. ФГУП «Крыловский государственный научный центр», СПб, 2013, С. 15–32.
- [3] Таранов А.Е. Определение локальных и интегральных гидродинамических характеристик контейнеровоза в цифровом бассейне. // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019, 3(389), С. 73–82.
- [4] Лобачев М.П., Овчинников Н.А., Таранов А.Е., Чичерин И.А. Масштабный эффект в задачах судостроения – современные возможности оценки. // Труды международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России» 26-27 сентября 2016 г. Москва, С. 233–244. <http://2016.russianscdays.org/files/pdf16/232.pdf>

## Влияние продольных колебаний опорной плоскости на стекание пленки неньютоновской жидкости

*Могилевский Е.И.*

*evgey.mogilevskiy@math.msu.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* неньютоновские жидкости, гидродинамическая устойчивость, длинные волны, теория Флоке

Рассматривается задача о стекающем слое нелинейно-вязкой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Изучается возможность

управления интегральными параметрами течения, например, расходом или продольными колебаниями опорной плоскости, так как сдвиговые напряжения, возникающие при этом, изменяют средние значения коэффициента вязкости. Также рассматривается слой нелинейно-вязкой жидкости, стекающий по наклонной плоскости, которая совершает гармонические колебания в своей плоскости в направлении, параллельном наискорейшему спуску, то есть вдоль направления течения жидкости по неподвижной плоскости.

Реология жидкости в общем случае считается обобщенно-ньютоновской, то есть тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций, причем коэффициент пропорциональности зависит от второго инварианта последнего — скорости сдвига. Для расчётов используются модели ньютоновской жидкости (вязкость постоянна), модель степенной жидкости (вязкость является степенной функцией скорости сдвига), модель Карро, которая обеспечивает гладкий переход от конечной вязкости при малых скоростях сдвига к нулевой или бесконечной при больших. Модель Карро содержит два безразмерных параметра, один из которых (число Карро) переводит модель Карро в модель ньютоновской жидкости при нулевом значении и в модель степенной жидкости при большом.

### **Безволновое течение**

Безволновым течением называется течение слоя с плоской свободной поверхностью, причем скорость жидкости является периодической функцией времени, период которой совпадает с периодом колебаний опорной плоскости. Имеется одна ненулевая (продольная) компонента скорости, которая зависит от времени и поперечной координаты, ее эволюция описывается нелинейным уравнением в частных производных параболического типа. В случае колебаний плоскости малой амплитуды или частоты приближенное решение получено аналитически методами теории возмущений, для произвольных значений параметров решение строится численно методом установления.

Получено, что продольные колебания увеличивают средний расход псевдопластических жидкостей при фиксированной толщине слоя. Для дилатантных жидкостей наблюдается обратный эффект. Детали расчётов и сравнение полученных данных с экспериментами [1] приведено в работе [2].

### **Длинноволновая неустойчивость.**

Рассматривается задача об устойчивости безволнового течения к малым возмущениям в линейной постановке, применяется метод нормальных мод. Развитие возмущений описывается системой эволюционных уравнений в частных производных относительно функции тока. Так как коротковолновые возмущения в плёночных течениях подавляются силами поверхностного натяжения, рассматриваются только длинные волны, что позволяет использовать разложение по малому параметру и свести решение исходной задачи к последова-

тельности более простых задач. Метод решения аналогичен приведённому в работе [3] для ньютоновской жидкости.

Для заданных параметров системы (реологические параметры, параметры колебаний плоскости) получено значение критического числа Рейнольдса. Отличие полученного значения от такового на неподвижной плоскости является показателем влияния колебаний на устойчивость течения. Обнаружено, что эффект качественно не зависит от амплитуды колебаний плоскости. Колебания низкой частоты всегда дестабилизируют течения; для дилатантных жидкостей при всех рассмотренных значениях реологических параметров имеется диапазон частот, который соответствует стабилизации, для псевдопластических жидкостей в некотором диапазоне реологических параметров любые колебания плоскости приводят к дестабилизации течения [4].

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант № 18-01-00762.

### Литература

- [1] Sobolik V. Film flow of pseudoplastic liquids along an oscillating wall // *Rheologica Acta* 33 (2), 1994, pp. 136–144.
- [2] Mogilevskiy E., Vakhitova R. Falling film of power-law fluid on a high-frequency oscillating inclined plane // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 269. pp. 28–36.
- [3] Bauer R.J., von Kerczek C.H. Stability of liquid film flow down an oscillating wall // *J. Appl. Mech.* 58, 1991, pp. 278–282.
- [4] Mogilevskiy E. Stability of a generalized newtonian liquid falling film on an oscillating inclined plane // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 282. P. 104334–1–104334–11.

## Моделирование формирования дисперсной фазы при лазерном плавлении металлического порошка

*Моисеев А.А.,<sup>2</sup> Борейшо А.С.,<sup>1,2</sup> Джгмадзе Г.Т.,<sup>2</sup> Савин А.В.,<sup>1,2</sup>  
Смирнов П.Г.,<sup>2</sup> Смоленцев С.С.<sup>2</sup>*  
*terminalmachine@yandex.ru*

<sup>1</sup>Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1,  
<sup>2</sup>АО «Лазерные системы»,

198515, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Связи, 28, корп. 2, стр. 1

*Ключевые слова:* Многофазные течения, плавление металлов лазером, volume of fluid

Физическая картина взаимодействия лазерного излучения с металлическими порошками в микро масштабе представляет собой сочетание таких явлений,

как конвекция металлического расплава, поверхностное натяжение, «эффект Марангони», конвективный и лучистый теплообмен, абляция и возникающая вследствие этого реактивная сила. Эти явления традиционно составляют основу численных моделей соответствующих процессов [1]–[3]. В то же время более сложные гидродинамические явления, такие, как кавитация, образование кумулятивных струй, отрыв фрагментов жидкой фазы и появление вследствие этого мелкодисперсных частиц металла, до настоящего времени находились вне поля зрения. Отрыв мелких частиц и соответствующий источник массы и энергии может оказывать заметное влияние на баланс вещества и энергии в очаге плавления. Описание подобных явлений требует определенной модификации существующих моделей и подходов.

Методы типа «Volume of fluid», традиционно используемые для моделирования гидродинамики капельных жидкостей со свободной поверхностью, необходимо дополнять моделями, описывающими аэродинамику двухфазных газовых потоков. В наиболее применяемой модели микромасштабного моделирования сплавления металлических порошков есть такая особенность, что затвердевание жидкой фазы моделируется источниковыми членами в уравнении движения, подобными закону Дарси [1, 2]. Коэффициент проницаемости при этом является функцией локальной температуры. Такой подход эффективен при моделировании движения расплава в жидкой ванне очага плавления и жидких капель, но не позволяет рассчитывать движение твёрдых частиц. Для решения этой проблемы к оторвавшимся фрагментам можно применить преобразование VOF-to-DPM для оптимизации вычислений при моделировании большого количества частиц, в том числе твёрдых. В этом случае объем оторвавшегося металла замещается твёрдой сферической частицей, с соответствующими диаметром, массой, скоростью и температурой. Поскольку в реальном физическом процессе образовавшиеся капли в ходе воздействия лазера улетают из области плавления, то обратное преобразование DPM-to-VOF не требуется.

В представленной работе сделана попытка построения модели описанной конфигурации, а также приведены примеры результатов численных расчётов. Анализ производится на упрощённой постановке задачи, включающей несколько частиц порошка на подложке. Производится оценка источников энергии и массы, связанных с уносом частиц из зоны плавления, при различных скоростях движения лазерного пятна и мощности лазера. Одна из целей этого исследования — определить массу частиц, их тепловую энергию и размерный спектр уносимых частиц. Полученные результаты могут использоваться для замыкания моделей мезо- и макроуровня.



## Литература

- [1] Гордеев Г.А., Кривилев М.Д., Анкудинов В.Е. Компьютерное моделирование селективного лазерного плавления // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, № 3. С. 293–312.
- [2] Tang C., Tan J.L., Wonga C.H. A numerical investigation on the physical mechanisms of single track defects in selective laser melting // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018. Т. 126. pp. 957–968
- [3] Борейшо А.С., Джгамадзе Г.Т., Зыбина В.В., Моисеев А.А., Савин А.В., Смирнов П.Г., Смоленцев С.С., Тимофеев В.А., Третьяк П.С. Микроуровневое моделирование теплофизических и гидродинамических процессов селективного лазерного сплавления. ТВТ, 2021 (представлено для публикации).

## Численное исследование по определению оптимального коэффициента импульса выдуваемой струи для различных вариантов отклонения адаптивного элемента хвостовой части крыла с системой управления пограничным слоем

*Павленко О.В., Петров А.В., Пигусов Е.А.*

*olga.v.pavlenko@yandex.ru, albert.petrov@tsagi.ru, evgeniy.pigusov@tsagi.ru*  
Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,  
140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

*Ключевые слова:* управление пограничным слоем, адаптивная механизация крыла.

Основными резервами улучшения несущих характеристик механизированного крыла транспортного самолета, если не рассматривать энергетические способы повышения подъёмной силы, являются увеличение площади механизации, числа звеньев закрылка и степени его выдвижения, что приводит к росту сопротивления, весу и сложности всей системы [1]. На современном этапе широкое распространение получила механизация задней кромки крыла с однощелевым закрылком типа Фаулера оптимизация параметров, которой позволила достичь величин коэффициента подъёмной силы сопоставимых с двухщелевым закрылком, но при этом упростить конструкцию и снизить массу [2, 3].

Кинематика закрылка типа Фаулера с выдвижением по рельсам позволяет достичь большего выдвижения (увеличения площади крыла) и позволяет получить дополнительную оптимизацию положения для среднего положения выпуска закрылка (для взлетных режимов), но поворотный закрылок обеспечивает меньшую сложность системы и меньший вес конструкции [4, 5]. Более простая кинематика поворотного закрылка для сохранения эффективности требует использования адаптивной «крыши» (слабо искривленная хвостовая часть кры-

ла – интерцептор, отклоняемый вниз) с целью управления потоком воздуха, проходящего через щель, вдоль поверхности отклоненного закрылка. Таким образом, адаптивная «крыша» позволяет отклонять поворотный закрылок на большие углы при сохранении безотрывного обтекания. Но, в тоже время, применение адаптивного элемента имеет ограничения: при отклонении на большие углы происходит отрыв потока, который снижает эффективность системы. В работе [6] показано, что применение тангенциального выдува струи воздуха на отклоненный адаптивный элемент позволяет существенно повысить эффективность одноцелевой механизации крыла.

В настоящей работе с целью определения оптимального коэффициента импульса выдуваемой струи  $C\mu$  проведены расчётные исследования для различных вариантов отклонения адаптивного элемента хвостовой части крыла с системой управления пограничным слоем. Расчёты проведены в двумерной постановке на профиле крыла с фиксированными отклонения щитка Крюгера на угол  $120^\circ$  и поворотного закрылка на угол  $45^\circ$ , соответствующие посадочной конфигурации взлетно-посадочной механизации крыла. Адаптивный элемент отклонялся в диапазоне углов от  $12^\circ$  до  $20^\circ$ , обеспечивая изменение относительной высоты щели между закрылком и хвостовой частью крыла от 0 до  $3^\circ$ .

В процессе исследований варьировался коэффициент импульса выдуваемой струи от 0 до 0.1 при фиксированных числах Маха  $M = 0.15$  и Рейнольдса  $Re = 2 \times 10^6$ . Углы атаки варьировались в диапазоне от  $-6$  до  $18^\circ$ . В результате расчётных исследований показано, что применение адаптивного элемента с системой управления пограничным слоем является эффективным способом повышения подъёмной силы крыла. При отклонении адаптивного элемента на угол  $20^\circ$  с полным перекрытием щели для нулевого угла атаки подъёмная сила увеличивается в 2 раза с  $Cy = 1.65$  (при  $C\mu = 0$ ) до  $Cy = 3.5$  (при  $C\mu = 0.05$ ). Для рассмотренных вариантов отклонения адаптивного элемента оптимальным коэффициентом импульса выдуваемой струи является значение  $C\mu = 0.05$ , дальнейшее увеличение интенсивности приводит к существенному увеличению расхода воздуха и не является целесообразным.

## Литература

- [1] Smith A. M. O. High-lift aerodynamics. / AIAA Paper No. 74-939., 1974. pp. 501–530.
- [2] Rudolph P. High-Lift Systems on Commercial Subsonic Airliners. / NASA-CR 4746, 1996. 150 P.
- [3] Wedderspoon J. R. The High-Lift Development of the A320 Aircraft. In: ICAS 1986. ICAS-86-2.3.2, 1986.
- [4] Reckzeh D. Multifunctional wing moveables: design of the A350XBW and the way to future concepts. In: 29th ICAS. ICAS 2014-0133, 2014.

- [5] Henning S. The aerodynamic design of the A350 XWB-900 high lift system. In: 29th ICAS 2014. ICAS 2014–0298, 2014.
- [6] Павленко О.В., Пигусов Е.А. Численные исследования эффективности применения адаптивной механизации крыла с тангенциальным выдувом струи // Материалы Девятнадцатой международной школы-семинара МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИКИ. 2019. С. 96–97.

## Степенное обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости в форме тензорного реологического соотношения и вытекающие из него варианты построения моделей течения

*Павловский В.А.*

*v.a.pavlovsky@gmail.com*

Санкт-Петербургский морской технический университет,  
190121, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

*Ключевые слова:* степенные формулы, реологическое соотношение, турбулентность, аналитические решения, система уравнений, формула Блазиуса.

Выполнено обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости за счёт придания ей степенного вида. После введения в рассмотрение соответствующего тензора скоростей деформаций выполнено обобщение на пространственный случай течения и записано реологическое соотношение в тензорном виде. В зависимости от показателя степени в этом реологическом соотношении можно прийти или к описанию ламинарного режима течения (в форме уравнений Навье–Стокса), или к описанию течения в турбулентном режиме. В последнем случае имеет место система дифференциальных уравнений с выполнением граничного условия прилипания, существенно отличающаяся от таковой для ламинарного режима течения, но которая также позволяет находить аналитические решения для простых сдвиговых течений и получать для течения в трубе закон сопротивления Блазиуса [1]. Этим рассматриваемый подход к решению задач турбулентных течений выгодно отличается от современных дифференциальных моделей турбулентности [2]. Приведены решения для течений жидкости в круглой трубе и плоском канале между двумя параллельными пластинами, которые в части профилей скорости и коэффициентов сопротивления удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Но это согласование несколько хуже, нежели при использовании дифференциальных моделей турбулентности, которые приводят к более точным результатам расчётов за счёт большого количества эмпирических констант, зачастую подобранных под решение конкретной задачи. Поэтому предлагаемая система

уравнений турбулентного движения жидкости может быть полезна, по крайней мере, для получения предварительных, оценочных характеристик турбулентного течения перед началом численного моделирования с использованием дифференциальных моделей турбулентности.

Предлагаемое реологическое соотношение при некоторых значениях показателя степени также может быть использовано для описания поведения степенных жидкостей, а также жидкостей с малыми добавками полимеров при проявлении эффекта Томса.

### Литература

- [1] Путеводитель Праנדтля по гидроаэродинамике. [Электронный ресурс] / ред.: Г. Эртель, пер.: Н.В. Вершинина М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007 . 776 с. Режим доступа: <https://rucont.ru/efd/301360>
- [2] Павловский В.А. Никущенко Д.В. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы. СПб.: Лань, 2018. 368 с.

## Модель отскока несферических частиц от поверхности тел в задачах двухфазной аэродинамики

*Панфилов С.В., Циркунов Ю.М.*

*panfilov\_sv@rambler.ru, yury-tsirkunov@rambler.ru*

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова, 190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* двухфазные течения, несферические частицы, отражение от поверхности, рассеяние при отскоке.

В задачах двухфазной аэродинамики важную роль играет взаимодействие частиц примеси с обтекаемой поверхностью. Модель отскока, связывающая параметры частицы до и после удара, является неотъемлемым элементом модели двухфазного течения в целом. Обычно в модели отскока используются простые соотношения для нормальной и касательной компонент скорости центра масс частицы

$$V_{pn}^+ = -a_n V_{pn}^-, \quad V_{p\tau}^+ = a_\tau V_{p\tau}^-,$$

где  $a_n$  и  $a_\tau$  — коэффициенты восстановления. При этом частицы считаются сферическими, удар — плоским, а изменение угловой скорости частицы определяется из закона изменения момента импульса и соотношений, связывающих нормальную и касательную компоненты ударного импульса.

В реальных течениях частицы являются несферическими и их отскок в том или ином направлении является случайным. В результате происходит рассеяние отражённых частиц, что может существенно влиять на их распределение в потоке и на динамику примеси в целом. В последние примерно два десятилетия возрос интерес к моделям, описывающим рассеяние реальных частиц, однако здесь есть ряд трудностей.

Экспериментальные исследования позволяют найти зависимости коэффициентов восстановления компонент скорости центра масс частицы от скорости и угла столкновения, но какие-либо данные о характеристиках рассеяния отсутствуют.

Моделирование ударного взаимодействия частицы с поверхностью методами механики деформируемого твёрдого тела само по себе является достаточно сложной задачей, что не позволяет использовать этот подход для расчёта течения примеси, когда необходимо рассматривать миллионы столкновений.

В докладе предложена модель отскока несферической частицы, основанная на законах механики и экспериментальных данных. Удар рассматривается в трёхмерной постановке. Контакт частицы с поверхностью считается точечным. Если контакт происходит по линии или по поверхности (например, по ребру или по грани многогранника), то в качестве точки контакта принимается геометрический центр соответствующей линии или поверхности. Полагается, что изменением положения частицы за время удара  $\delta t$  можно пренебречь, а значит радиус-вектор  $\mathbf{r}_c$ , проведённый из центра масс частицы в точку контакта, за время удара не изменяется и определяется формой частицы и её ориентацией относительно поверхности.

Уравнения изменения импульса и момента импульса частицы при ударе в интегральной форме имеют вид

$$m_p \Delta \mathbf{V}_p = \mathbf{S}, \quad \|\mathbf{J}_p\| \Delta \boldsymbol{\Omega}_p = \mathbf{r}_c \times \mathbf{S},$$

где  $m_p, \|\mathbf{J}_p\|$  — масса и тензор инерции частицы,  $\mathbf{V}_p, \boldsymbol{\Omega}_p$  — скорость поступательного движения центра масс и угловая скорость частицы,  $\mathbf{S}$  — ударный импульс, действующий на частицу в точке контакта.

В данной модели полагается, что касательный импульс пропорционален нормальному импульсу и средней касательной скорости точки контакта за время удара. С учётом кинематического соотношения  $\Delta \mathbf{V}_c = \Delta \mathbf{V}_p + \Delta \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r}_c$  компоненты вектора  $\Delta \mathbf{V}_p$  в неподвижной системе координат  $(x, y, z)$ , связанной с поверхностью (ось  $y$  направлена по нормали к поверхности), определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta V_{py} &= \Delta V_{cy} - \Delta \Omega_{pz} r_{cx} + \Delta \Omega_{px} r_{cz}, \\ \Delta V_{px} &= -C_f \Delta V_{py} (V_{cx}^- + 0.5 \Delta V_{cx}) / |\mathbf{V}_c|, \end{aligned}$$

$$\Delta V_{pz} = -C_f \Delta V_{py} (V_{cz}^- + 0.5 \Delta V_{cz}) / |\mathbf{V}_c|,$$

где  $C_f$  — коэффициент динамического сопротивления, зависящий от ориентации частицы при ударе

$$C_f = \exp \left[ \frac{(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{V}_p)}{|\mathbf{r}_c| |\mathbf{V}_p|} \right].$$

Для определения  $\Delta V_{cy}$  используется эмпирическая зависимость  $a_n(\mathbf{V}_p^-)$ , полученная для коэффициента восстановления нормальной компоненты скорости центра масс частицы, с заменой  $\mathbf{V}_p$  на  $\mathbf{V}_c$

$$\Delta V_{cy} = -V_{cy}^- (a_{nc} + 1), \quad a_{nc} = a_n(\mathbf{V}_c^-).$$

Методом прямого численного моделирования отскока большого числа частиц ( $\sim 10^8$ ) при их случайной ориентации исследованы характеристики рассеяния частиц различной формы. Показано, что результаты расчётов по предложенной модели удара согласуются с опытными данными. Получены пространственные и двумерные (в плоскости удара) индикатрисы рассеяния частиц.

Данное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-08-00711.

## Экспериментальные исследования клиновых моделей входных групп воздухозаборников

*Рулева Л.Б., Солодовников С.И.*

*ruleva@ipmnet.ru, sis63@yandex.ru*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101, к.1

*Ключевые слова:* аэротермодинамика, высокоскоростной поток, ударная аэродинамическая труба.

Аэротермодинамика входных групп воздухозаборников высокоскоростных летательных аппаратов исследуется на моделях сопряженным численным [1, 2] и физическим [3] моделированием. Эксперименты проводятся на лабораторной ударной аэродинамической трубе на высоких числах Маха и Рейнольдса. Она является многорежимной установкой кратковременного действия. Недавние работы по улучшению характеристик установки, позволили увеличить время квазистационарного течения потока в ударной трубе и за срезом сопла, которое пригодно для валидации. Это подтверждено расчётами и экспериментом [4]. Варианты моделей для исследования воздухозаборников, содержащие верхние одинарный и двойной полуклинья в сочетании с острой или затупленной нижней кромкой, дополнены моделью тройного полуклина с затупленной

кромкой. В экспериментах менялись взаимная ориентация между моделями и сдвиг нижней модели от среза сопла. Ударно-волновые структуры, возникающие в канале, образованном верхней моделью и затупленной кромкой, при обтекании высокоскоростным потоком, визуализировались с помощью высокоскоростной видеокамеры. Области давлений регистрировались высокочастотными сертифицированными датчиками. Температурное поле в потоке определялось методом люминесцентных преобразователей. Перед валидирующими экспериментами исследовалось поле течений за срезами конических сопел, как по отклонению от оси сопла, так и на разных дистанциях от среза сопла. Применена методика частичного слива пограничного слоя при истечении из сопла [5] в высоковакуумной среде аэродинамического блока.

В экспериментах получены графики давлений датчиков в ударной части установки, а также в аэродинамическом блоке на верхней и нижней частях модели в абсолютных величинах. Выявлены области наибольшего давления, близкие к затупленной кромке модели. На верхней модели наибольшее давление выявлено на передней грани и в средней области плоского канала. Нормированные графики распределения отдельных областей давлений на верхних и нижних поверхностях модели сравнивались с численным моделированием, которые показали удовлетворительное согласие. При физическом и численном моделировании определено распределение температуры нагрева поверхности клиновидной модели. Графики давлений датчиков на модели сопоставлялись с соответствующими по времени видеокадрами теневых картин визуализации ударно-волновых структур, образованных в канале между моделями.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690135-5 и частично при поддержке РФФИ (грант № 19-01-00515).

## Литература

- [1] Surzhikov S.T. Validation of computational code UST3D by the example of experimental aerodynamic data // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 815 (2017) 012023. doi: 10.1088/1742-6596/815/1/012023.
- [2] Surzhikov S.T. Comparative Analysis of the Results of Aerodynamic Calculation of a Spherical Blunted Cone on a Structured and Unstructured Grid // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 1250 (2019). doi: 10.1088/1742-6596/1250/1/012007.
- [3] Kotov M.A., Ruleva L.B., Solodovnikov S.I. Review of experimental work performed at the hypersonic aerodynamic shock tube // AIP Conference Proceedings. 2027 (2018) doi: 10.1063/1.5065174.
- [4] Panasenko A.V., Ruleva L.B., Solodovnikov S.I. Increasing hypersonic aerodynamic shock tube working time duration // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 927 (2020) 012082. doi: 10.1088/1757-899X/927/1/012082.

- [5] Ruleva L.B., Solodovnikov S.I. The possibility of draining the boundary layer from the hypersonic nozzle. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 927 (2020) 012081. doi:10.1088/1757-899X/927/1/012081.

## Множественность режимов трансзвукового течения в каналах с разветвлениями

*Рябинин А.Н.*

*a.gyabinin@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* трансзвуковое течение, численный расчет, бифуркация.

Каналы с переходом от сверхзвукового течения к дозвуковому являются частями многих устройств, таких как воздухозаборники реактивных двигателей, диффузоры аэродинамических труб и т. п. Проблемы неустойчивости скачков уплотнения изучались в [1]–[3] для каналов с изогнутой или изломанной стенкой. Расчеты выявили гистерезис положения скачков уплотнения по отношению к числу Маха набегающего потока. Трансзвуковые течения в канале с центральным телом рассматривались в [4, 5]. Центральное тело разделяло поток на два узких канала. Начальный участок канала до центрального тела был расходящимся. Из-за наличия расширяющегося центрального тела следующие участки в узких каналах были сужающимися. Боковые наружные стенки узких каналов имели излом, увеличивающий угол расширения. После излома узкие каналы расширялись.

Численное моделирование двумерного трансзвукового течения в канале с центральным телом обнаружило гистерезис положения скачка уплотнения по отношению к числу Маха, задаваемого на входе в канал. Это явление существует как для невязкого, так и для вязкого газа. Диапазон чисел Маха на входе включает в себя область существования асимметричных решений уравнений Эйлера и Рейнольдса.

В настоящей работе исследовалось течение в канале, в котором центральное тело представляло собой тонкую пластину, разделяющую канал на два узких канала. Передняя кромка пластины располагалась на некотором расстоянии от входного расширяющегося участка канала. На боковых стенках было два излома. После первого излома канал становился сужающимся, после второго излома — расширяющимся. Изучалось течение невязкого газа.

Неструктурированные сетки были сгенерированы с использованием пакета Gmsh. Программа, написанная на языке Паскаль, преобразовывала их в трехмерные сетки, поперечный размер которых был равен одному элементу. Преобразованные сетки получены в формате TGrid/Fluent, который подходит для



расчета в коммерческом пакете Ansys CFX. На стенках задавалось отсутствие потока тепла. Большинство расчетов выполнено с сеткой, насчитывающей около 200000 элементов. Некоторые расчеты были повторены с сеткой, содержащей в два раза больше элементов. Более мелкая сетка использовалась, главным образом, для расчетов при входных числах Маха, которым соответствует смена режимов. На входе задавалось сверхзвуковое течение, исходящее из точечного источника, расположенного на большом удалении, при этом у стенок вектор скорости был параллелен стенкам. Тем самым исключались возмущения, создаваемые стенками на входе. На входной границе задавались число Маха  $M_{in}$ , давление  $p_{in}$  и температура  $T_{in}$ .

Качественно режимы течения и переходы от одного режима к другому совпадали с режимами, установленными для канала с клиновидным центральным телом [5]. Диапазон чисел Маха, при котором существует гистерезис, несколько увеличился ( $1.52 < M_{in} < 1.7$ ). Как и в случае с клином, внутри диапазона гистерезиса существуют несимметричные решения с различной структурой скачков уплотнения в верхней и нижней частях канала.

Следующим объектом исследования были течения в канале, в котором были расположены тела, разделяющие канал на четыре узких канала. В каждом узком канале присутствовали сходящийся участок и расходящийся участок.

Расчеты показали существование множественности режимов течения в определенном диапазоне чисел Маха  $M_{in}$ , задаваемых на входной границе, имеющей форму дуги. Реализация одного из многих режимов зависит от входного числа Маха и от начального условия. Некоторые режимы асимметричны. Асимметричные решения получают в два этапа. На первом этапе задаются различные входные числа Маха для верхней и нижней частей входной границы. На втором этапе выполняется симметричное входное граничное условие. В качестве начального условия принимается асимметричное решение, полученное на первом этапе. Определены диапазоны существования различных режимов.

Исследования выполнены с использованием вычислительных ресурсов, предоставленных Вычислительным центром С.-Петербургского университета (<http://cc.spbu.ru>).

### Литература

- [1] Kuzmin A. Shock wave bifurcation in convergent–divergent channels of rectangular cross section // Shock Waves. 2016. Vol. 26. pp. 741–747.
- [2] Kuzmin A. Shock wave bifurcation in channels with a bend // Arch. Appl. Mech. 2016. Vol. 86. pp. 787–795.
- [3] Бабарькин К.В., Кузьмин А.Г., Рябинин А.Н. Бифуркации трансзвукового течения в каналах с изломом стенок // Вестник С.-Петерб. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62), вып. 1. С. 104–112

- [4] Ryabinin A.N., Suleymanov A.F. Transonic flow in a channel with a central body // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2017. Vol. 12, No. 4. pp. 1008–1013.
- [5] Ryabinin A. Numerical simulation of the transonic flow past the blunted wedge in the diverging channel // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. No. 050026. 5 p.

## **Ударно-волновые структуры перспективного комбинированного реактивного двигателя**

*Савелова К.Э., Алексеева М.М., Чернышов М.В.*

*karinkamurz@yandex.ru, amara96@mail.ru, mvcher@mail.ru*

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* реактивный двигатель, детонация, тройная конфигурация.

Ввиду необходимости в достижении новых высот и скоростей полёта, во всём мире ведутся разработки новых ракетных двигателей. В последнее время возрастает интерес к разработке нового комбинированного типа реактивного двигателя.

В камере сгорания детонационных двигателей используется детонационный процесс горения топлива. Такие двигатели разрабатываются уже несколько десятков лет и имеют большие перспективы в будущем. Теоретически они обладают рядом преимуществ. Применение детонационного горения топлива в реактивных двигателях может позволить создать прямоточный двигатель приемлемой массы, размеров и тяги для полётов в большом диапазоне скоростей ( $M=0-20$  [1]). Применение детонационного горения даёт ощутимые преимущества и в жидкостных ракетных двигателях, типичное давление в камере сгорания которого более 200 атм. Чтобы обеспечить аналогичные условия сжигания топлива в ударных волнах, компоненты топлива нужно подавать под давлением не более 10 атм, что позволяет отказаться от использования турбокомпрессоров и усиленных трубопроводов [2].

В данной работе рассматривается задача о подачи топлива на ударную волну (на главный скачок уплотнения тройной конфигурации). Это необходимо, потому что температура за главным скачком значительно выше, чем за падающим [3]. Поставленная задача решается с помощью пакета программ инженерного анализа с подключением модуля вычислительной газодинамики ANSYS Fluent.

Среди теоретически известных способов перемешивания смеси существует и может быть реализован в перспективном двигателе метод подачи топлива прямо в воздухозаборник. При этом часть воздухозаборника становится камерой сгорания. В расчетах, иллюстрирующих работу двигателя, смесь загорается

и детонирует. Достоинство данного метода состоит в том, что фронт пламени, распространяясь по всему каналу, не соприкасается с корпусом, и интенсивное охлаждение стенок не требуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Создание опережающего научно-технического задела в области разработки передовых технологий малых газотурбинных, ракетных и комбинированных двигателей сверхлегких ракет-носителей, малых космических аппаратов и беспилотных воздушных судов, обеспечивающих приоритетные позиции российских компаний на формируемых глобальных рынках будущего», № FZWF-2020-0015).

### Литература

- [1] Булат П.В., Денисенко П.В., Волков К.Н. Тенденции разработки детонационных двигателей для высокоскоростных воздушно-космических летательных аппаратов и проблема тройных конфигураций ударных волн. Часть I. Исследования детонационных двигателей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 1–21. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-1-1-21
- [2] Булат П.В., Ильина Е.Е. О проблеме создания детонационного двигателя — современные тенденции в аэрокосмическом двигателестроении // Фундаментальные исследования. 2013. № 10–10. С. 2140–2142.
- [3] Чернышов М.В. Экстремальные тройные конфигурации с отрицательным углом наклона отраженного скачка // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 2. С. 82–88. doi: 10.3103/S1068799819020120

## Вычислительное моделирование инверсии трёхмерных газовых струй

*Савин А.В.<sup>1</sup>, Смирнов П.Г.<sup>2</sup>, Сергеев А.В.<sup>3</sup>*

*izooandrey@inbox.ru, petr.s.8314@mail.ru, Sergeev.Anton@smcru.com,*

<sup>1</sup>Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова, 190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1,

<sup>2</sup>Концерн «Струйные Технологии», 198097, Российская Федерация, Санкт-Петербург, пр. Стачек, 47,

<sup>3</sup>Учебный центр ООО «ЭС ЭМ СИ Пневматик», 195197, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Кондратьевский пр., 15, корпус 3

*Ключевые слова:* трёхмерные турбулентные струи, метод крупных вихрей, уравнения Рейнольдса, газодинамическая инверсия

Газодинамические струйные устройства, используемые в технологических процессах, в типичных случаях имеют сложную геометрию, далекую от при-

нятых в академических исследованиях упрощенных форм. В этих случаях экспериментально наблюдается изменение формы поперечного сечения струи. В настоящей работе рассмотрена инверсия сверхзвуковой недорасширенной плоской (щелевой) затопленной струи на основном дозвуковом турбулентном участке. Нерасчетность  $n = 3.7$ , число Маха на срезе сопла  $Ma = 1$ , число Рейнольдса  $Re = 3104$ . Соотношение сторон прямоугольного выходного сечения сопла — 14.

Измерения полей давления Пито в поперечных сечениях струи показывают, что на расстояниях от сопла порядка длинной стороны сопла, в данном случае — на основном (дозвуковом) участке, наблюдается инверсия, то есть длинная сторона эллипсоидного распределения полного давления перпендикулярна длинной стороне сопла. При этом численные расчеты с использованием уравнений Рейнольдса и  $k - \omega$  модели турбулентности (RANS) показывают переход от щелевой формы сечения вблизи сопла к симметричной круглой форме на дистанциях порядка длинной стороны сопла, что на качественном уровне не соответствует результатам физических измерений. Моделирование методом LES [1] демонстрирует инверсию. Это позволяет прояснить причины и механизмы инверсии в дозвуковой части турбулентной сверхзвуковой плоской струи, вероятно, связанные с динамикой крупномасштабных вихрей.

В работе проведен анализ динамики изолированного эллиптического вихревого кольца с соотношением осей  $\varepsilon = 10$ . Последовательность таких колец является простейшей моделью плоской (щелевой) струи. Показано, что самовоздействие эллиптического кольца приводит к такому изменению его формы, которое качественно соответствует инверсии струи.

Турбулентные струи сложной геометрии ранее исследовались комбинированным методом (RANS/LES) [2]. В данной работе показано, что даже в таком относительно простом течении, как плоская (щелевая) турбулентная струя, существует сильное влияние динамики крупных вихрей на структуру потока. В таких случаях для получения правильного решения, соответствующего физическому эксперименту, необходимо применять методы, явно учитывающие динамику крупных вихрей.

## Литература

- [1] Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
- [2] Бендерский Л.А., Любимов Д.А. Применение RANS/ILES метода высокого разрешения для исследования сложных турбулентных струй. УЗ ЦАГИ, 2014, № 2, С. 22–36.

## Вычислительное моделирование плоской турбулентной струи вблизи поверхности

*Смирнов П.Г.,<sup>1</sup> Савин А.В.,<sup>1,2</sup> Моисеев А.А.,<sup>1</sup> Джгмадзе Г.Т.,<sup>1</sup>  
Смоленцев С.С.,<sup>1</sup> Тимофеев В.А.<sup>1</sup>*

*petr.s.8314@mail.ru, izooandrey@inbox.ru*

<sup>1</sup>АО «Лазерные системы»,

198515, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Связи, 28, корп. 2, стр. 1,

<sup>2</sup>Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,

190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* Плоские струи, RANS, LES.

Плоские газовые струи, развивающиеся вдоль различных поверхностей, имеют широкое распространение в различных технических задачах, причем должна обеспечиваться достаточная равномерность потока по ширине струи. Формирование плоской струи обеспечивается целевым соплом, высота которого определяет дальность струи. Обычно требуются такие скорости истечения на срезе сопла ( $>2$  м/с), что течение на выходе является уже сильно турбулентным. При этом возникающие вихревые структуры генерируют поперечную неустойчивость потока. Для подавления этого эффекта применяются сопла с дополнительными элементами, разрушающими вихри в поперечном направлении.

В ряде случаев требуется выполнить систему подвода и раздающих рабочую среду коллекторов в компактном исполнении, что требует тонкой оптимизации конфигурации данных элементов для предотвращения проникновения неравномерности раздачи в формируемую струю. Данная задача решается методом вычислительного эксперимента. Турбулентные течения моделируются различными методами: решение уравнений Рейнольдса с замыканием одной из моделей турбулентности в стационарной постановке (RANS) или методом крупных вихрей (LES) [1]. Метод крупных вихрей достаточно затратно вычислительным ресурсам, так как производится расчет трехмерного нестационарного течения с достаточно малым шагом по времени. Однако, как было показано в работе [2], RANS подход для плоского щелевого сопла не позволяет получить эффекты, наблюдаемые в эксперименте.

В работе рассматривается численный эксперимент по моделированию истечения плоской турбулентной струи из плоского сопла (отношение ширины сопла к высоте 22, число Рейнольдса по высоте сопла  $\sim 3000$ , число Маха  $\sim 0.01$ ) вдоль стенки и сравнение полученных результатов с данными эксперимента.

Рабочая среда — аргон, модель среды — несжимаемый идеальный газ. Динамическая вязкость —  $2.16 \cdot 10^{-5}$  Па·с. Температура аргона на входе 300К.

Расчёт течения производился двумя методами: решение уравнений Рейнольдса (RANS) и метод крупных вихрей (LES). Для метода RANS использовалась модель турбулентности  $k$ - $\omega$  SST. В качестве подсеточной модели LES использовалась модель Смагоринского. Безразмерный шаг по времени для LES  $u\Delta t/b \sim 0.1$  (размерный шаг  $\sim 1$  мс,  $b=15$  мм,  $u=3$  м/с), где  $u$  — скорость газа на срезе сопла,  $b$  — высота сопла. Для расчёта поля течения в обоих случаях используется метод коррекции давления — метод SIMPLE. Схемы дискретизации по пространству — второй порядок. Для дискретизации по времени для LES используется неявная схема второго порядка. Неструктурированная расчетная сетка содержит 22 млн. тетраэдральных элементов. На всех поверхностях построен призматический подслой.

Для сравнения результатов расчета методом LES с измерениями производилась запись поля течения на плоскости, расположенной на расстоянии  $b/2$  от поверхности, вдоль которой истекает струя. Запись происходила каждые 10 мс, количество выборок 750, т.е. время осреднения 750 мс. Для набора полученных данных было произведено осреднение результатов по времени.

Данные для сравнения с результатами расчёта были получены в эксперименте по замеру скорости потока термоанемометром на участке соответствующей плоскости размером  $225 \times 225$  с шагом 25 мм. По данным измерений интерполяцией построено поле скорости.

В эксперименте обнаружена характерная неравномерность поля скорости в центре исследуемой области, возникновение которой обусловлено особенностями конструкции подвода рабочей среды к соплу. Аналогичная неравномерность получена при расчете методом LES. В методе RANS картина существенно отличается от эксперимента. Полученный результат означает, что пристенная турбулентная струя относится к тому типу течений, в котором учёт динамики крупных вихрей необходим не только для повышения точности моделирования, но и для правильного отображения качественной картины течения.

## Литература

- [1] К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
- [2] А.В. Савин, П.Г. Смирнов, А.В. Сергеев. Вычислительное моделирование инверсии трехмерных газовых струй. (готовится к публикации)

## Структура турбулентной свободной конвекции в обогреваемой быстровращающейся междисковой полости с приосевым стоком тепла

*Смирнов С.И., Колесник Е.В., Смирнов Е.М.*

*sergeysmirnov92@mail.ru, kolesnik\_ev@mail.ru, smirnov\_em@spbstu.ru*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

*Ключевые слова:* смешанная конвекция, вращающаяся полость, турбулентность, экмановские слои, вихреразрешающее численное моделирование.

Быстровращающиеся междисковые (кольцевые) полости типичны для конструкций роторов осевых компрессоров газотурбинных двигателей. В последних ступенях компрессора разогретый при сжатии воздух часть своего тепла отдает образующим полость стенкам. Это тепло снимается со стенок формирующейся в полости турбулентной конвекцией и уносится транзитным осевым потоком относительно холодного воздуха, который отбирается от промежуточной ступени компрессора и идёт на охлаждение дисков и лопаток турбины. Достоверные знания о локальной теплоотдаче в вентилируемых полостях критически необходимы для аккуратного предсказания температурного состояния дисков компрессора.

Задачам смешанной конвекции в быстровращающихся кольцевых полостях с транзитным осевым потоком присуща особая сложность [1]. Согласно опытными данным (см., например, [2]–[4]), формирующееся в полости течение характеризуется сосуществованием крупномасштабных вихревых структур релейбенаровского типа, очень тонких квази-ламинарных экмановских слоев на дисковых поверхностях и зоны транзитного потока с относительно мелкомасштабной турбулентностью.

Попытки приложения к данной проблеме методов CFD, базировавшихся на RANS подходе, в целом продемонстрировали несостоятельность последнего. Более глубокое понимание нестационарной динамики конвекции и теплообмена в полости может быть достигнуто посредством вихреразрешающих вычислений [4, 5].

В настоящей работе рассматривается модельная задача, в которой унос тепла транзитным потоком замещается действием объёмных стоков тепла в небольших приосевых зонах, прилегающих к дискам. Исследование данной задачи нацелено на анализ взаимодействия крупномасштабных турбулентных конвективных структур с квази-ламинарными экмановскими слоями при априорном исключении эффектов, которые обусловлены регистрируемыми в экспериментах «прорывами» на периферию холодного воздуха из транзитного потока. С другой стороны, в данной задаче отсутствуют сдвиговые слои смещения с

мелкомасштабной турбулентностью, требующей сильного измельчения расчётных сеток для качественного разрешения.

В качестве прототипа была выбрана полость из работы [3], с отношением  $s/b = 0.134$  ( $s$  – ширина полости,  $b$  – внешний радиус). Центральные отверстия (радиусом  $a = 0.093b$ ) в дисках, через которые проходит транзитный поток в случае прототипа, были заменены твёрдыми стенками. Радиус области, в которой задавался сток тепла был равен  $a$ . На нагретых дисках задавалось радиальное распределение температуры, измеренное в [3]; периферийная цилиндрическая стенка была теплоизолирована. Вращательное число Рейнольдса  $Re_\varphi$  [2, 3] полагалось равным  $2 \times 10^6$ . Объемная плотность стока тепла задавалась, исходя из предписанного значения интегрального теплосъема.

Расчеты проводились по методу Implicit LES с использованием конечно-объемного кода второго порядка точности. Расчетная сетка обеспечивала хорошее разрешение квазиламинарных слоев Экмана.

Получены детальные данные по временной эволюции образующихся в полости вихревых структур, динамических и температурных градиентных слоев на дисках. Установлено, что варьирование осевой протяженности областей стоков тепла слабо влияет на радиальные распределения локального теплового потока, осредненного по времени и углу.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-01090.

## Литература

- [1] Owen J. M., Tang H., Lock G. D. Buoyancy-induced heat transfer inside compressor rotors: overview of theoretical models // *Aerospace*. 2018. Vol. 5, N 1. P. 229–236.
- [2] Farthing P. R., Long C. A., Owen J. M., Pincombe J. R. Rotating cavity with axial through-flow of cooling air: Flow structure // *Journal of Turbomachinery*. 1992. Vol. 114, N 1. P. 237–246.
- [3] Long C.A. Disk heat transfer in a rotating cavity with an axial throughflow of cooling air // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1994. Vol. 15, N 4. P. 307–316.
- [4] Bohn D. E., Bouzidi F., Burkhardt C., Kitanina E. E., Ris V. V., Smirnov E. M., Wolff M. W. Numerical and experimental investigations of the air flow and heat transfer in rotating cavities // In.: *Proc. 9th Int. Symp. on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, February 10–14, 2002, Honolulu, Hawaii. Paper No: 2002.02.10–14. 8 p.
- [5] Atkins N. R., Kanjirakkad V. Flow in a rotating cavity with axial throughflow at engine representative conditions // In.: *Proc. ASME Turbo Expo 2014*, June 16–20, 2014, Dusseldorf, Germany. Paper No: GT2014-27174. 14 p.



## Тестирование трёх методов подавления ударно-волновой неустойчивости на задаче гиперзвукового обтекания цилиндра

*Шишкина И.А., Колесник Е.В.*

*irina-shishkina-1998@mail.ru, kolesnik\_ev@mail.ru*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

*Ключевые слова:* сверхзвуковые течения, численное моделирование, карбункул–неустойчивость.

Численное моделирование сверхзвуковых и особенно гиперзвуковых течений может осложняться возникновением численной ударно-волновой (карбункул) неустойчивости, которая заключается в появлении нефизических возмущений, приводящих к искажению или изгибу фронта ударной волны; часто это проявляется в виде «опухолоподобного» нароста на фронте ударной волны [1]. Важным свойством численного метода является устойчивость к возникновению подобных нефизических осцилляций. Одной из распространенных тестовых задач, для которой ярко проявляется такая неустойчивость, является задача гиперзвукового обтекания цилиндра невязким потоком. Данная задача широко используется для тестирования различных схем и методов подавления неустойчивости [2]. Целью данной работы является тестирование трёх методов подавления карбункул–неустойчивости на задаче обтекания цилиндра потоком с числом Маха 10.

Расчёты проводятся с помощью конечно-объемного «неструктурированного» программного кода SINF/Flag-S, разрабатываемого в ИПММ СПб ПУ. В ветви кода, предназначенной для моделирования течений существенно сжимаемого газа, для расчёта вектора невязких потоков используются схемы, основанные на решении задачи Римана (Годунова, Roe, HLL, HLLC) и схемы расщепления векторов потоков (AUSM, AUSM+, AUSM+–up, AUSMD, SLAU); повышенный порядок точности схем достигается за счёт использования MUSCL подхода [3], а монотонизация решения с помощью TVD схем [4], обобщенных на неструктурированные сетки [5]. Для подавления карбункул неустойчивости используются следующие методы: искусственная вязкость (AV) [2] и гибридные схемы (HS) [6]. При использовании гибридных схем вектор невязких потоков вычисляется с использованием схем с разными свойствами, при этом переключение между схемами происходит на основе анализа получающегося решения. В качестве одной из схем используется высокодиссипативная схема, для которой не наблюдается карбункул–неустойчивости. В методе AV искусственная вязкость добавляется в форме правых частей уравнений Навье–Стокса, для этого вводится понятие тензора вязких напряжений, определяемого через коэффи-

циент искусственной вязкости в центрах ячеек. В рамках данной работы код был дополнен новым способом подавления карбункул–неустойчивости — методом Чена и др. (SV), предложенным в недавней работе [7]. Главная идея этого метода заключается в добавлении к численному потоку некоторого стабилизирующего слагаемого, вид которого определяется из сопоставления выражений для вектора потоков на грани ячейки в случае схемы Роу и HLL [7].

Расчетная область для задачи гиперзвукового обтекания цилиндра, которая представляет собой сектор, заключенный между углами  $[-75^\circ, 75^\circ]$ , покрывается квазиструктурированной сеткой, содержащей 90 (окружное направление)  $\times$  160 (радиальное) ячеек [2]. Тестирование трёх методов подавления неустойчивости (HS, AV и SV) проводилось с использованием нескольких схем, для которых применительно к данной задаче в наибольшей степени проявлялась карбункул–неустойчивость: AUSM+–up, Годунова, HLLC и Роу.

Установлено, что в случае расчетов без методов подавления для всех рассматриваемых схем наблюдается карбункул–неустойчивость, причем наиболее сильные искажения фронта скачка наблюдаются в случае использования схемы Роу первого порядка, что хорошо согласуется с приведёнными в литературе данным [2]. При использовании метода подавления неустойчивости, основанного на добавлении искусственной вязкости, решение не содержит осцилляций для всех рассмотренных схем. В случае использования гибридных схем и метода Чена и др. для всех схем первого порядка получено гладкое решение, а для схем второго порядка в полученных полях течения присутствуют небольшие осцилляции. Однако, стоит отметить, что использование гибридных схем и искусственной вязкости приводит к значительному размытию фронта ударной волны, в отличие от метода Чена и др., в случае использования которого фронт скачка практически не размывается.

Можно заключить, что применительно к рассматриваемой задаче двумерного обтекания цилиндра наиболее эффективным способом подавления карбункул–неустойчивости, является метод Чена и др. Этот способ позволяет получить решение, практически не содержащее осцилляций, и не приводит к размытию фронта ударной волны, в отличие от двух других рассмотренных способов.

## Литература

- [1] Peery K.M Imlay S.T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper No. 88–2924. 1988.
- [2] Rodionov A.V. Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // Journal of Computational Physics. 2017. V. 345. pp. 308–329.
- [3] Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov’s method // Journal of Computational Physics. 1979. V. 32. No. 1. pp. 101–136.

- [4] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. 1983. V. 49. No. 3. pp. 357–393.
- [5] П.А. Бахвалов, Т.К. Козубская. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трехмерной неструктурированной сетки // *Математическое моделирование*. 2016. Т. 28, № 3. С. 79–95.
- [6] Tutty O.R., G.T. Roberts, P.H. Schuricht. High-speed laminar flow past a fin-body junction // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 737. pp. 19–55.
- [7] Chen S.-S., Yan C., Lin B.-X., Liu L.-Y., Yu J. Affordable shock-stable item for Godunov-type schemes against carbuncle phenomenon // *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 373. pp. 662–672.

## Секция 4

Физико-химическая  
аэромеханика

*Physico-chemical  
aeromechanics*

## Исследование структуры ударной волны на основе континуального подхода и методом прямого статистического моделирования

*Алексеев И.В., Тань Лэй, Кустова Е.В.*

*e.kustova@spbu.ru, st088860@student.spbu.ru, alekseev1989@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* ударная волна, уравнения Навье–Стокса, прямое статистическое моделирование.

Задача о структуре ударной волны — эталонная задача динамики разреженных газов, имеющая большое значение для многих прикладных проблем, поскольку позволяет оценить область применимости различных моделей. Для её решения применяется континуальный или кинетический подход. В первом случае используются уравнения Навье–Стокса [1, 2] или моментные методы [3], которые также приводят к обобщенным уравнениям гидромеханики. В случае кинетического подхода применяется модельное уравнение [4] или метод прямого статистического моделирования (ПСМ) [5].

В настоящей работе мы используем два подхода. Во-первых, это метод ПСМ Монте–Карло, который за последние 50 лет стал одним из основных инструментов исследования высокоскоростных разреженных течений. Моделирование проводится с помощью открытого кода Грэма Бёрда [5].

Второй подход основан на выводе уравнений течения вязкого теплопроводного газа из уравнения Больцмана. С помощью методов кинетической теории газов получены замыкающие соотношения для уравнений движения и энергии, а также точные выражения для коэффициентов переноса: вязкости, теплопроводности и объёмной вязкости. Таким образом, в данном континуальном подходе не делается стандартных предположений о постоянстве отношения удельных теплоемкостей и числа Прандтля, а также не используется уравнение состояния калорически совершенного газа.

Для решения системы уравнений Навье–Стокса, полученной для одномерного вязкого течения с учётом строгих методов кинетической теории [6], проводится дискретизация уравнений на структурированной сетке методом конечных объёмов. Для интегрирования по времени используется явная схема Эйлера. Потoki рассчитываются по схеме первого порядка. Задача о распаде произвольного разрыва решается методом точных итераций Годунова [7].

В работе были проведены расчёты структуры ударной волны для одноатомного газа Ar, двухатомного газа N<sub>2</sub> и многоатомного газа CO<sub>2</sub>. Рассматривались различные числа Маха невозмущённого потока. Для N<sub>2</sub> полученные решения сравнивались с экспериментом [8]; было получено хорошее соответствие. Оценено влияние внутренних степеней свободы частиц на структуру ударной

волны и на макропараметры в различных методах. Исследовано влияние объёмной вязкости на толщину фронта ударной волны. Обсуждаются особенности использования континуального и кинетического подходов, их преимущества и недостатки, а также пределы применимости.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-31-90036.

### Литература

- [1] Elizarova T., Khokhlov A., Montero S. Numerical simulation of shock wave structure in nitrogen // *Physics of Fluids*. 2007. Vol. 19, P. 068102. doi: 10.1063/1.2738606
- [2] Alekseev I.V., Kustova E.V. Shock wave structure in CO<sub>2</sub> taking into account bulk viscosity // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2017. Vol. 4, N 62, pp. 642–653.
- [3] Timokhin M.Yu., Struchtrup H., Kokhanchik A.A., Bondar Ye.A. Different variants of R13 moment equations applied to the shock-wave structure // *Physics of Fluids*. 2007. Vol. 29. P. 037105. doi: 10.1063/1.4977978
- [4] Kosuge S., Aoki K. Shock-wave structure for a polyatomic gas with large bulk viscosity // *Physical Review Fluids*. 2018. Vol. 3. P. 023401. doi: 10.1063/1.4977978
- [5] Bird G.A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford, UK: Clarendon press, 1994. Vol. 42.
- [6] Kustova E.V., Alekseev I.V. Numerical Simulations of Shock Waves in Viscous Carbon Dioxide Flows Using Finite Volume Method // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. 2020. Vol. 53, N3, pp. 344–350. doi: 10.1134/S1063454120030024
- [7] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
- [8] Alsmeyer H Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam // *Journal of Fluid Mechanics*, 1976. Vol. 74. pp. 479–513.

## Коэффициенты переноса в поуровневом приближении с учетом вращательного возбуждения

*Бечина А.И.,<sup>1</sup> Кустова Е.В.,<sup>1</sup> Облапенко Г.П.<sup>2</sup>*

*anya\_bechina@mail.ru, e.kustova@spbu.ru, georgii.oblapenko@austin.utexas.edu*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>University of Texas at Austin,

78712, United States, Texas, Austin

*Ключевые слова:* коэффициенты переноса, интегралы столкновений, поуровневое приближение, коэффициент сдвиговой вязкости, модель переменной твердой сферы.

При построении замкнутого описания неравновесных течений возникает необходимость расчета коэффициентов переноса: коэффициентов теплопроводности, диффузии, сдвиговой и объёмной вязкости, релаксационного давления. Для их расчёта кинетическая теория предлагает достаточно надежные, но сложные в реализации алгоритмы. С помощью обобщенного метода Энского–Чепмена коэффициенты переноса выражаются через интегральные скобки [1]. После преобразований интегральные скобки сводятся к  $\Omega$ -интегралам:

$$\begin{aligned} \Omega_{cids}^{(1,1)} &= \langle \gamma^2 - \gamma\gamma' \cos \chi \rangle_{cids}, & \Omega_{cids}^{(2,2)} &= \langle \gamma^4 - \gamma^2\gamma'^2 \cos^2 \chi - \frac{1}{6}(\Delta \mathcal{E}_{cids}^{rot})^2 \rangle_{cids}, \\ \Omega_{cids}^{(1,2)} &= \langle \gamma^4 - \gamma^3\gamma' \cos \chi \rangle_{cids}, & \Omega_{cids}^{(1,3)} &= \langle \gamma^6 - \gamma^3\gamma'^3 \cos \chi \rangle_{cids}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma = (m_{cd}/(2kT))^{1/2}g$  – безразмерная относительная скорость до столкновения,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура газа,  $g$  – относительная скорость;  $m_{cd} = m_c m_d / (m_c + m_d)$  – приведенная масса частиц сортов  $c$  и  $d$ ;  $\chi$  – угол рассеяния при столкновении, штрихом обозначена относительная скорость частиц после столкновения,  $\Delta \mathcal{E}_{cids}^{rot}$  – величина, связанная с эффектом резонанса вращательной энергии. В отличие от широко используемого одно-температурного приближения, в данном случае интегралы зависят от колебательных уровней  $i, k$  сталкивающихся частиц.

Интегралы столкновений вводятся на основе оператора осреднения:

$$\langle F \rangle_{cids} = \left( \frac{kT}{2\pi m_{cd}} \right)^{1/2} \sum_{j'l'l'} \frac{s_j^{ci} s_l^{dk}}{Z_{ci}^{rot} Z_{dk}^{rot}} \int F_{cij} \gamma^3 \exp(-\gamma^2 - \mathcal{E}_j^{ci} - \mathcal{E}_l^{dk}) \sigma_{cd,ijkl}^{j'l'} d^2\Omega d\gamma. \quad (2)$$

Здесь  $j, l$  – вращательные уровни молекул сортов  $c$  и  $d$  до столкновения,  $j', l'$  – после столкновения,  $s_j^{ci} = 2j + 1$  – статистический вес, который характеризует вырождение состояния молекулы с вращательной энергией  $\varepsilon_j^{ci}$ ;  $\mathcal{E}_j^{ci} = \varepsilon_j^{ci} / (kT)$

— безразмерная вращательная энергия,  $Z_{ci}^{\text{rot}}$  — статистическая сумма вращательных степеней свободы молекул сорта  $c$  на колебательном уровне  $i$ ;  $F_{cij}$  — некоторая функция, зависящая от скорости, химического сорта  $c$  и уровней внутренней энергии  $i, k$ ;  $d^2\Omega$  — телесный угол, в который попадает вектор относительной скорости после столкновения;  $\sigma_{cd,ijkl}^{j'l'}$  — сечение наиболее вероятных упругих столкновений и столкновений с переходами вращательной энергии.

В операторе осреднения (2) учитываются упругие столкновения и столкновения с переходами вращательной энергии. Обозначим соответствующие сечения  $\sigma_{cd,el}$  и  $\sigma_{cd,ijkl,inel}^{j'l'}$ . Тогда интеграл в операторе осреднения распадется на сумму двух:

$$\langle F \rangle_{cidk} = \left( \frac{kT}{2\pi m_{cd}} \right)^{1/2} \sum_{jj' ll'} \frac{s_j^{ci} s_l^{dk}}{Z_{ci}^{\text{rot}} Z_{dk}^{\text{rot}}} \left[ \int F_{cij} \gamma^3 \exp(-\gamma^2 - \mathcal{E}_j^{ci} - \mathcal{E}_l^{dk}) \sigma_{cd,el} d^2\Omega d\gamma \right. \\ \left. + \int F_{cij} \gamma^3 \exp(-\gamma^2 - \mathcal{E}_j^{ci} - \mathcal{E}_l^{dk}) \sigma_{cd,ijkl,inel}^{j'l'} d^2\Omega d\gamma \right].$$

Принято предполагать, что столкновения с переходами вращательной энергии вносят небольшой вклад в  $\Omega$ -интегралы, поэтому ими обычно пренебрегают. Однако в поуровневом приближении данный факт до сих пор не проверялся. Для оценки вклада вращательных переходов в коэффициенты переноса в настоящей работе используется статистическая модель неупругого сечения столкновения — модель переменной твердой сферы (VHS).

Упругие столкновения описываются полными упругими сечениями:

$$\sigma_{el} = C(\varepsilon/k)^{-\omega}, \quad (3)$$

$\varepsilon$  — относительная энергия до столкновения,  $C$  и  $\omega$  — параметры сечения, которые определялись в работе [2].

Для описания молекулярных столкновений с учетом вращательных переходов вводятся полные сечения вращения  $\sigma_R(jl, \varepsilon)$  [3]:

$$\sigma_R = [\zeta(E/kT) - \zeta_{j,l}(E/kT)] \sigma_{el}(\varepsilon). \quad (4)$$

Здесь  $E$  — полная энергия столкновения,  $\zeta_{j,l}(E)$  и  $\zeta(E/kT)$  — функции полной энергии, которые определены в [3].

В работе рассчитаны коэффициенты переноса с учётом и без учёта переходов вращательной энергии. Определено влияние вращательного возбуждения на коэффициенты переноса в поуровневом приближении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 19-11-00041.



## Литература

- [1] Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд. С.-Петерб. ун-та, 2003. 272 с.
- [2] Бечина А. И., Кустова, Е. В. Параметры сечений столкновений для модели переменной мягкой сферы с учетом вязкости, диффузии и теплопроводности // Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. М.: Московский авиационный институт, С. 396–397
- [3] Koura K. Statistical inelastic cross-section model for the Monte Carlo simulation of molecules with discrete internal energy // Phys. Fluids A. 1992. Vol. 4. pp. 1782–1788.

## О влиянии коэффициента теплопередачи на моделирование энерговыделения разрушенного метеороида

*Брагин М.Д.,<sup>1,2</sup> Брыкина И.Г.<sup>3</sup>*

*michael@bragin.cc, shantii@mail.ru*

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4,

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт,  
141701, Российская Федерация, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9,

<sup>3</sup>Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* метеороид, абляция, энерговыделение, модели фрагментации

Основными процессами, влияющими на взаимодействие движущихся с большими скоростями космических объектов с атмосферой Земли, являются разрушение и абляция. Разрушение космических тел вызывается действием аэродинамических сил, возрастающих по мере их проникновения в более плотные слои атмосферы. Под действием интенсивных тепловых потоков, главным образом радиационных в случае крупных тел, они плавятся, испаряются и теряют значительную часть своей массы. Одна из задач моделирования взаимодействия метеороида с атмосферой состоит в том, чтобы, разработав подходящий сценарий разрушения и модель абляции, воспроизвести известное из наблюдений энерговыделение (световую кривую) и оценить неизвестную начальную массу.

В данной работе рассматривается движение, абляция и энерговыделение метеороида, разрушающегося на большое количество осколков, движущихся сначала с общей ударной волной. Исследуются модели облака фрагментов, моделирующие разрушение метеороида на этом этапе: разработанная авторами

двухпараметрическая модель [1], учитывающая изменения формы и плотности облака, и простые модели, используемые в литературе, например [2, 3], не учитывающие эти эффекты и отличающиеся коэффициентом в уравнении для скорости бокового расширения облака. Проводится сопоставление моделей относительно возможности воспроизвести с их помощью наблюдательную кривую энерговыделения Челябинского болида [4]. С этой целью для разных моделей фрагментации получены численные решения уравнений метеорной физики применительно к моделированию взаимодействия с атмосферой Челябинского метеороида на высотах выше 25 км. При моделировании абляции метеороида используется модифицированная аппроксимационная формула [5, 6] для коэффициента радиационной теплопередачи как функции скорости, размера, плотности атмосферы и параметра формы облака фрагментов, деформирующегося под действием сил давления. В аппроксимационную формулу введен специальный параметр, чтобы учесть существующую неопределенность в значении радиационного потока к телу, которая связана со многими факторами: с учетом влияния излучения воздуха перед ударной волной и экранирования парами метеороида; с неопределенностью в оптических свойствах горячего воздуха и паров, в моделях переноса излучения и поля течения.

Решения для изменения вдоль траектории радиуса миделя, массы и энерговыделения разрушенного метеороида, а также оценка его начальной массы, полученные с применением разных моделей фрагментации, сравниваются друг с другом и с данными наблюдений [4, 7]. Показано, что для простых моделей коэффициент теплопередачи сильно влияет на высоту пика яркости болида; в зависимости от значения коэффициента теплопередачи предложен оптимальный коэффициент в уравнении для радиуса миделя, при котором достигается совпадение расчётной высоты пика яркости болида с наблюдательной. Определено значение параметра неопределенности в выражении для коэффициента теплопередачи, при котором для двухпараметрической и оптимальной простой модели фрагментации получается наилучшее согласование с наблюдательной кривой энерговыделения Челябинского болида [4] и оценкой его начальной массы [7].

Работа выполнена в рамках плана исследований, проводимых НИИ механики МГУ, при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00740.

## Литература

- [1] Брыкина И.Г. О модели фрагментации крупного метеороида: моделирование взаимодействия Челябинского метеороида с атмосферой // *Астрон. вестн.* 2018. Т. 52. № 5. С. 437–446.
- [2] Григорян С.С. О движении и разрушении метеоритов в атмосферах планет // *Космич. исслед.* 1979. Т. 17. № 6. С. 875–893.

- [3] Hills J.G., Goda M.P. The fragmentation of small asteroids in the atmosphere // *Astron. J.* 1993. V. 105. № 3. pp. 1114–1144.
- [4] Brown P.G., Assink J.D., Astiz L., et al. A 500-kiloton airburst over Chelyabinsk and an enhanced hazard from small impactors // *Nature*, 2013. V. 503. pp. 238–241.
- [5] Брыкина И.Г., Егорова Л.А. Аппроксимационные формулы для радиационного теплового потока при больших скоростях // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 4. С. 123–134.
- [6] Brykina I.G., Bragin M.D. On models of meteoroid disruption into the cloud of fragments // *Planetary & Space Sci.*, 2020. V. 187. No 104942.
- [7] Borovicka J., Spurny P., Brown P., et al. The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor // *Nature*, 2013. V. 503. pp. 235–237.

## **О факторе неопределенности в аппроксимации коэффициента теплопередачи в задаче моделирования взаимодействия метеорного тела с атмосферой**

*Брыкина И.Г., Егорова Л.А.*

*shantii@mail.ru, egorova@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* метеороид, коэффициент теплопередачи, физическая теория метеоров.

Высокие скорости входа в атмосферу метеорных тел определяют особенности их взаимодействия с ней. Метеорные тела нагреваются, плавятся, испаряются, светятся и теряют массу. Основным методом наблюдения за полётом метеорного тела является регистрация его свечения вдоль траектории. Интенсивность свечения пропорциональна изменению кинетической энергии, изменение массы происходит под действием интенсивного нагрева, в основном радиационного в случае крупных тел. Поэтому корректное задание коэффициента теплопередачи имеет определяющее значение при моделировании движения и абляции метеорных тел. Большинство работ по радиационной теплопередаче относится к задачам входа в атмосферу космических аппаратов. Однако параметры входа в атмосферу естественных космических тел отличаются от параметров входа аппаратов. При этом в метеорном диапазоне параметров немногие результаты расчета радиационного потока разными авторами сильно отличаются друг от друга [1]. Поэтому, из-за сложности определения коэффициента теплопередачи, почти во всех работах по метеорной тематике этот коэффициент полагается постоянным.

В настоящей работе рассматривается взаимодействие с атмосферой метеороида или его фрагментов, движущихся как единое тело. Искомые параметры — масса, скорость метеороида, угол наклона его траектории к горизонту, а также выделение энергии вдоль траектории находятся путём численного решения системы уравнений физической теории метеоров — уравнения движения тела переменной массы, уравнения абляции и уравнения изменения кривизны траектории. Уравнение абляции содержит коэффициент радиационной теплопередачи как определяющий параметр. Для него используется модификация аппроксимационной формулы, полученной в работе [2] для коэффициента теплопередачи в точке торможения сферы на неразрушающейся поверхности, в зависимости от скорости тела, его радиуса и плотности атмосферы. Сделаны дополнительные поправки для расширения диапазона допустимых параметров обтекания на меньшие скорости и более низкие высоты, и введён параметр, характеризующий изменение теплового потока вдоль поверхности тела. Также введён фактор неопределённости, связанный с неучтённым влиянием на радиационный поток опережающего излучения, турбулентности, экранирования парами метеороида, с неопределённостью оптических свойств горячего воздуха и паров, неизвестной формой тела, и т.д. Отмечалось [3], что при входе в атмосферу Земли со скоростью 15 км/с такая неопределённость в точке торможения составляет примерно от +81 до -52%. Путём варьирования параметра неопределённости исследуется влияние неточности задания коэффициента теплопередачи на скорость, унос массы, выделение энергии вдоль траектории и на саму траекторию метеороида. Проводится сравнение результатов расчётов, полученных с использованием постоянного и переменного вдоль траектории коэффициента теплопередачи.

Работа выполнена в рамках плана исследований, проводимых НИИ механики МГУ, при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00740.

## Литература

- [1] Johnston C.O., Stern E.C., Wheeler L.F. Radiative heating of large meteoroids during atmospheric entry // *Icarus*. 2018. V. 309. P. 25–44. doi: 10.1016/j.icarus.2018.02.026
- [2] Брыкина И.Г., Егорова Л.А. Аппроксимационные формулы для радиационного теплового потока при больших скоростях // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 4. С. 123–134. doi: 10.1134/S0568528119040030
- [3] Johnston C.O., Mazaheri A., Gnoffo P., Kleb B., Sutton K., Prabhu D., Brandis A.M., Bose D. Radiative heating uncertainty for hyperbolic Earth entry, part 1: flight simulation modeling and uncertainty // *J. Spacecraft & Rockets*. 2013. V. 50. No 1. P. 19–38. doi: 10.2514/1.A32254

## Истечение в вакуум газовой смеси с большим отношением масс компонентов

*Быков Н.Ю.,<sup>1</sup> Захаров В.В.,<sup>2</sup> Андреева Т.А.<sup>1</sup>*  
*nbykov2006@yandex.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>2</sup>Istituto nazionale di astrofisica (INAF),  
00136, Italy, Rome, Viale del Parco Mellini, 84

*Ключевые слова:* истечение в вакуум, разреженный газ, метод прямого статистического моделирования, смесь газов

Исследование течений разреженных газовых смесей с большим отношением масс компонентов представляет интерес с точки зрения оптимизации имеющихся и разработки новых вакуумных технологий синтеза кластеров и кластерных покрытий [1, 2]. В качестве примера, можно привести технологии вакуумного газоструйного осаждения (ВГСО) наноструктурных плёнок благородных металлов [3, 4]. Технология ВГСО предполагает испарение металла (серебра, золота) в тигле, смешение паров металла с инертным газом (гелием), истечение газовой смеси в вакуум и осаждение паров металла на подложке. Морфология, структура и физические свойства плёнок определяются параметрами течения смеси в окрестности подложки. Как правило, истечение газовой смеси происходит в переходном по числу Кнудсена режиме и оценка параметров потока требует применения численных методов, основанных на решении уравнения Больцмана.

Настоящая работа посвящена численному исследованию истечения бинарной газовой смеси в вакуум из источника через отверстие в бесконечно тонкой стенке. Рассмотрены оклоконтинуальный, переходный и околосвободномолекулярный режимы течения. Моделирование выполнено для нескольких вариантов состава смеси с отношением масс компонентов превышающим 10 и различных значений мольной доли легкого компонента в источнике. Расчеты проведены методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [5, 6] с использованием собственного программного пакета на вычислительном кластере «Торнадо» суперкомпьютерного центра «Политехнический».

В работе изучается влияние на динамику течения отношения масс компонентов, параметров торможения смеси и мольной доли лёгкого газа в источнике. Представлены данные о пространственных распределениях плотностей, скоростей и температур компонентов. Для различных условий истечения анализируется влияние мольной доли лёгкого компонента на ускорение тяжелого компонента в струе. Обсуждаются особенности релаксации поступательной температуры компонентов в поле течения. Анализируется влияние определяю-

щих параметров на мольный и массовый расход смеси через отверстие. Обсуждается немонотонный характер зависимости расхода от степени разреженности течения.

### Литература

- [1] Smirnov B. M. Metal nanostructures: from clusters to nanocatalysis and sensors // *Physics-Uspekhi*. 2017. V. 60, N 12. pp. 1236–1267.
- [2] Jamkhande P. G., Ghule N. W., Bamer A. H. and Kalaskar M. G. Metal nanoparticles synthesis: An overview on methods of preparation, advantages and disadvantages, and applications // *J. Drug Delivery Sci. Technol.* 2019. V. 53, N 6. 101174.
- [3] Bykov N. Y., Safonov A. I., Leshchev D. V., Starinskiy S. V. and Bulgakov A. V. Gas-jet method of metal film deposition: direct simulation Monte Carlo of He-Ag mixture flow // *Mater. Phys. Mech.* 2019 V. 38. pp. 119–130.
- [4] Bykov N. Y., Safonov A. I., Leshchev D. V., Starinskiy S. V. and Bulgakov A. V. The Gas-Jet Method of Deposition of Nanostructured Silver Films // *Tech. Phys.* 2019. V. 64. pp. 776–789.
- [5] Bird G. A. The DSMC Method. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013.
- [6] Bykov N. Y. and Zakharov V. V. Binary gas mixture outflow into vacuum through an orifice // *Phys. Fluids*. 2020. V. 32. 067109.

## Non-equilibrium Dissociation and Relaxation behind the Shock Wave within Two-temperature Approach

*Gorbachev Yu.*,<sup>1</sup> *Kunova O.*,<sup>2</sup> *Shoev G.*,<sup>3</sup> *Bondar Ye.*<sup>3</sup>  
yuriy.gorbachev@gmail.com, o.kunova@spbu.ru, shoev@itam.nsc.ru,  
bond@itam.nsc.ru

<sup>1</sup>Coddan Technologies,

197342, Russia, St.Petersburg, Beloostrovskaya str., 22, off.430,

<sup>2</sup>Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9,

<sup>3</sup>Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
630090, Russia, Novosibirsk, Institutskaya str., 4/1

*Keywords:* non-equilibrium effects, dissociation, vibrational relaxation, two-temperature model, shock waves, real gas effects, numerical simulation.

Simulation of the high-speed entry of the spacecrafts into a planetary atmosphere, low temperature plasma installations for material processing and manufacturing needs the non-equilibrium flow models. The most detailed description of such flows available for the modern computers consists in state-to-state models. Still, the possibilities of the continuum models are in demand

and far from exhausting. Recent results based on the asymptotic solution of the Boltzmann equation for the mixture of the reacting gases yield the transport equations describing the non-equilibrium effects in the zeroth-order approximation, i.e. corresponding Euler equations contain non-equilibrium reaction and relaxation rates [1]–[5]. This is due to discarding the approximation, which is the foundation for all modern models of chemically reacting gas flows, derived from kinetic equations. The assumption that the perturbation of the collision integral by chemical reactions is small, i.e. of the order of Knudsen number [6] is avoided. This is important, for instance, for considering the dissociation reactions since the deviation of the vibrational distribution from the equilibrium one for the high vibrational levels (close to the dissociation threshold) is of the order of the distribution function itself, but not of the order of the Knudsen number [7]. The proposed method is based on the following positions [1]–[5]:

- (1) fast and slow variables are separated according to the rule based on the small value of the Knudsen number (approximate summational invariants concept),
- (2) the collisional integral of the corresponding Boltzmann equation is not expanded into the series using small parameter,
- (3) the distribution function is represented as a sum of ‘slow’ and ‘fast’ parts and equations for them are represented as a singularly perturbed set of equations and solved using the procedure similar to Chapman–Enskog.

Employment of the aforementioned method to studying the dissociation process in the diatomic gas yields the following equations for the reaction,  $R_m$ , and relaxation,  $R_v$  rates:

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{(1 - A_{vv})(R_m^{qe} + R_m^{0h}) + A_{mv}(R_v^{qe} + R_v^{0h})}{1 - A_{mm} - A_{vv}}, \\ R_v &= \frac{(1 - A_{mm})(R_v^{qe} + R_v^{0h}) + A_{vm}(R_m^{qe} + R_m^{0h})}{1 - A_{mm} - A_{vv}}, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $R_m^{qe}$  and  $R_v^{qe}$  are the equilibrium reaction and relaxation rates, respectively;  $R_m^{0h}$  and  $R_v^{0h}$  are the corresponding corrections caused by the vibrational non-equilibrium;  $A_{xy}$  are the elements of the renormalisation matrix [4, 8]. Equations (1) show the mutual effect of the reactions and relaxation. A new equation for the quasi-equilibrium constant is derived.

The developed approach was used to simulate flows behind the planar and curved shock waves (1D flow and flow around the cylinder) for various free stream conditions. An analysis of the reaction and relaxation rates impact on gas-dynamic parameters was made.

## References

- [1] Kolesnichenko E. G., Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. I. General theory // Appl. Math. Mod. 2010. Vol. 34. pp. 3778–3790.
- [2] Kolesnichenko E. G., Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. II. General representation for one-temperature reaction rates // Appl. Math. Mod. 2012. Vol. 37. pp. 5304–5314.
- [3] Kolesnichenko E. G., Gorbachev Yu. E. Two-temperature Reaction and Relaxation Rates // Shock Waves, 2016. Vol. 27. pp. 333–374.
- [4] Gorbachev Yu. E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. III. Renormalized reaction rates // Appl. Math. Mod. 2016. Vol. 40. pp. 10131–10152. doi: 10.1016/j.apm.2016.06.050
- [5] Gorbachev Yu. Non-equilibrium reaction rates and non-equilibrium effects in chemical kinetics. // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1105. P. 012121.
- [6] Prigogine I., Xhrouet E. On the perturbation of maxwell distribution function by chemical reactions in gases // Physica, 1949. Vol. 15. pp. 913–932.
- [7] B.F. Gordietz, A.I. Osipov, L.P. Shelepin. Kinetic processes in gases and molecular lasers. Vol. 688. Gordon and Breach Science Publishers, Paris, 1988.
- [8] Gorbachev Yu. E. Renormalized reaction and relaxation rates for harmonic oscillator model. In: ICNAAM 2016, AIP Conf. Proc. ed. by Th. Simos. 2017. Vol. 1863. P. 090002.

## Моделирование кинетики углекислого газа за фронтом ударной волны в полном поуровневом приближении

*Гориховский В.И., Нагнибеда Е.А.*

*v.gorikhovskii@spbu.ru, e\_nagnibeda@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

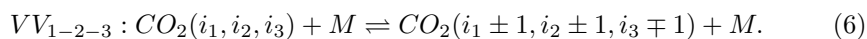
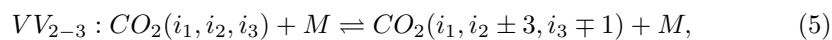
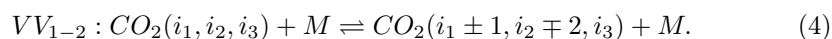
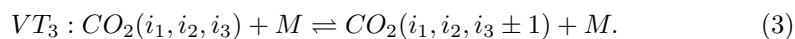
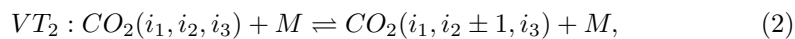
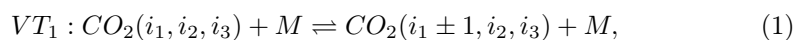
*Ключевые слова:* физико-химическая кинетика, углекислый газ, колебательная релаксация, расширенный метод Гира.

Изучение неравновесной колебательной кинетики в потоках углекислого газа является одной из наиболее сложных с точки зрения вычислительных затрат задач современной физической аэродинамики и применяется в решении многих важных практических проблем. К таким проблемам относится моделирование входа космических аппаратов в атмосферы Венеры и Марса, исследование характеристик течений в соплах и струях [1, 2], задачи физики атмосферы, экологии. В течении последних десятилетий неравновесная физико-химическая



кинетика в потоках газовых смесей, содержащих молекулы углекислого газа, исследовалась разными авторами как с помощью многотемпературных и однотемпературной моделей [3], так и на основе наиболее строгого поуровневого описания колебательной и химической релаксации [4, 5]. Поуровневое описание основано на совместном решении уравнений для заселённостей колебательных уровней и уравнений для газодинамических параметров течения. Использование такого подхода, несмотря на высокую точность, затрудняется вычислительной сложностью, поскольку требует решения жёсткой системы уравнений, размер которой определяется числом рассматриваемых колебательных уровней. Полный набор возбужденных уровней в каждой моде задаёт более 6000. Дополнительные вычислительные затраты происходят из необходимости определения коэффициентов скорости переходов энергии, число которых превышает 400000. В представленной работе рассматривается адаптация EBDF схемы для задачи моделирования колебательной кинетики углекислого газа за фронтом ударной волны.

В первую очередь рассмотрим уравнения, описывающие колебательную релаксацию в  $\text{CO}_2$ .  $VT$ -обмены поступательной и колебательной энергией трёх колебательных мод и  $VV$ -обмены колебательной энергией между модами молекулы углекислого газа, сталкивающейся с инертным партнером  $M$ , описываются отношениями:



Здесь  $i_1, i_2, i_3$  - колебательные квантовые числа, соответствующие симметричной, изгибной и антисимметричной  $\text{CO}_2$  модам. В расчётах рассматривается полный набор уровней с энергией ниже энергии диссоциации. В настоящем исследовании химические реакции не учитываются. Колебательные спектры мод рассчитывались на основе модели ангармонического осциллятора.

Система уравнений, описывающая течение рассматриваемой смеси включает в себя уравнения неразрывности компонент, баланса энергии и импульса:

$$\frac{dn_{i_1, i_2, i_3}}{dt} + n_{i_1, i_2, i_3} \nabla \cdot \mathbf{v} = R_{i_1, i_2, i_3}^{vibr}, \quad i_m = 0, \dots, l_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0, \quad (9)$$

где  $R_{i_1, i_2, i_3}^{vibr}$  — релаксационные члены,  $n_{i_1, i_2, i_3}$  — заселённости колебательных уровней,  $p$  — давление газа,  $\rho$  — плотность газа,  $\mathbf{v}$  — макроскопическая скорость, а  $E$  полная энергия единицы массы:

$$\rho E = \rho E_{tr} + \rho E_{rot} + \rho E_{vibr} = \frac{3}{2} nkT + nkT + \sum_{i_1, i_2, i_3} \varepsilon_{i_1, i_2, i_3} n_{i_1, i_2, i_3}, \quad (10)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $n$  — числовая плотность, а  $\varepsilon_{i_1, i_2, i_3}$  это колебательная энергия молекулы  $\text{CO}_2$  на соответствующем уровне.

Релаксационные члены характеризуют изменение заселенности колебательных уровней в результате  $VT$  и  $VV$ -обменов в молекулах  $\text{CO}_2$ :

$$R_{i_1, i_2, i_3}^{vibr} = R_{i_1, i_2, i_3}^{VT_1} + R_{i_1, i_2, i_3}^{VT_2} + R_{i_1, i_2, i_3}^{VT_3} + R_{i_1, i_2, i_3}^{VV_{1-2}} + R_{i_1, i_2, i_3}^{VV_{2-3}} + R_{i_1, i_2, i_3}^{VV_{1-2-3}}. \quad (11)$$

Для расчета коэффициентов скорости мы используем формулы SSH-теории, обобщенные для  $\text{CO}_2$ .

Численный метод решения жёсткой системы уравнений (7)–(9) должен быть точным в обширной области устойчивости поэтому применены неявные методы, основанные на расширенном методе Гира ( $EBDF$ ), использовавшиеся для моделирования кинетики пространственно-однородного углекислого газа [6]. Этот метод заключается в использовании предсказания значений с целью получения явной схемы вычислений без потери точности, а также использование адаптивной стратегии выбора шага по времени, использующую аппроксимацию локальной ошибки. Благодаря этому процесс решения жёсткой системы уравнений кинетики не требует использования кластерных вычислений и распределенного хранения данных.

Основной целью работы был анализ применимости метода к моделированию кинетики, а также исследование точности и эффективности полученного решения. Кроме того проводилось сравнение с решением, полученным с помощью многотемпературного описания колебательной кинетики углекислого газа за фронтом ударной волны. Также оценивался вклад  $VT$ - и  $VV$ -обменов для различных колебательных состояний  $\text{CO}_2$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-11-00041.

### Литература

- [1] Armenise I., Kustova E. V. State-to-State Models for CO<sub>2</sub> Molecules: from the Theory to an Application to Hypersonic Boundary Layers // Chem. Phys. 2013. Vol. 415. pp. 269–281.
- [2] Silva T., Grofulovic M., Klarenaar B.L.M., Morillo-Candas A.S., Guitella O., Engeln R., Pintassilgo C.D. and Guerra V. Kinetic study of low-temperature CO<sub>2</sub> plasmas under non-equilibrium conditions. I. Relaxation of vibrational energy // Plasma Sources Sci. Technol. 2018. Vol.27, N.1.
- [3] Kustova E., Nagnibeda E. State-to-state theory of vibrational kinetics and dissociation in three-atomic gases // AIP Conf. Proc. 2001. V. 585. pp. 620–627.
- [4] Sahai A., Lopez B., Johnston C., Panesi M. Novel approach for CO<sub>2</sub> state-to-state modeling and application to multi-dimensional entry flows // AIAA SciTech Forum — 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA, 2017.
- [5] Kosareva A., Nagnibeda E. On the influence of kinetic models on parameters of CO<sub>2</sub>/CO/O<sub>2</sub>/O/C mixture flows behind shock waves // Proceedings of the 31st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. American Institute of Physics. 2019. P. 146.
- [6] Gorikhovskii, V. I., Nagnibeda, E. A. Optimization of CO<sub>2</sub> Vibrational Kinetics Modeling in the Full State-to-State Approach // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics Volume 53, Issue 3, 1 July 2020, pp. 358–365.

## Асимптотически точное значение функции распределения пар молекул в ударно сжатой сильно диспергированной смеси газов

*Демидов И.В.<sup>1</sup> Кузнецов М.М.<sup>1</sup> Кулешова Ю.Д.<sup>1</sup>  
Тихоновец А.В.<sup>2</sup>*

*iv.demidov1812@yandex.ru, kuznets-omn@yandex.ru, juliaybogdanova@mail.ru,  
tikhhalena@gmail.com*

<sup>1</sup>Московский Государственный Областной Университет,  
105082, Российская Федерация, Москва, Переведеновский пер., 5–7,

<sup>2</sup>Московский авиационный институт,  
(национальный исследовательский университет),  
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4

*Ключевые слова:* смесь газов, ударная волна

В предыдущих работах авторов [1]–[3] по аналитическому исследованию эффекта перехлёста в ударных волнах был получен ряд существенных результатов, основанных на обычно используемых аналитических представлениях од-

ночастичных функций по скоростям молекул в ударной волне. Как известно, суть эффектов перехлёста, заключается в превышении значений какого-либо макроскопического параметра или значений функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны над соответствующими значениями за ним. В последнем случае этот вид перехлёста для функции распределения пар молекул называется также высокоскоростной поступательной неравновесностью.

Для того, чтобы эффект перехлёста в величинах скоростей физико-химических процессов мог заметно повлиять и на течение за фронтом, необходимо, как показали численные экспериментальные исследования, чтобы его величина составляла не менее  $10^4$ . Такой многопорядковый отрыв в величинах скоростей кинетических поступательно-неравновесных процессов ориентирует прежде всего на точный учёт порядков величин, а не коэффициентов порядка единицы. Это обосновывает применение ранее использованных в работах авторов соответствующих априорных аналитических аппроксимаций.

Вместе с тем, при таких аналитических аппроксимациях упускается влияние сечения столкновения молекул на вид их функции распределения. В полном виде учёт этого пятого фактора, определяющего эффект перехлёста, требует точного решения кинетического уравнения Больцмана. В настоящее время такое решение для структуры ударной волны удалось получить только численными методами. Получить аналогичное аналитическое решение внутри всего фронта ударной волны представляется намного более сложным. Однако, как показано в данной работе, его можно получить локально, в отдельных сечениях потока.

Известно, что в сильно диспергированных газовых смесях газов, когда концентрация лёгкого компонента значительно превосходит концентрацию тяжёлого компонента, эффект высокоскоростного перехлёста значительно усиливается. Если же рассмотреть рэлеевский газ, когда неравенство сопровождается другим неравенством, в задаче возникает сильное разделение по величине характерных времен релаксации (времен прихода к равновесию) лёгкого и тяжёлого компонентов. Ударная волна как бы раздваивается. Сначала приходит к равновесию лёгкий компонент, пройдя через ударную волну в своем газе. Потом же на временах значительно больших к равновесию приходит тяжёлый компонент.

Таким образом, появляется возможность аналитически составить функцию распределения пар из лёгких и тяжёлых молекул на основе асимптотически точных одночастичных функций распределений для лёгкого («горячий максвеллиан») и тяжёлого («холодный максвеллиан») компонентов рэлеевской смеси.

Подчеркнем радикальное отличие использования «холодных» и «горячих» максвеллианов при составлении функции распределения пар молекул на основе метода Тамма–Мотт Смита и рассматриваемом асимптотическом случае рэлеевской смеси газов. В первом случае «холодный» и «горячий» максвелли-

аны берутся в совершенно различных, бесконечно удаленных друг от друга, в сечениях потока перед и за ударной волной. В случае же рэлеевской смеси эти максвеллианы берутся в одном и том же сечении, характеризующем асимптотически конечный этап прихода лёгкого компонента смеси к термодинамическому равновесию за фронтом ударной волны в лёгком газе. При этом можно показать, что так называемая перекрестная мода в Тамм–Мотт–Смитовской функции распределения пар молекул будет математически точно совпадать с функцией распределения пар молекул рэлеевской смеси газа в сечении прихода лёгкого компонента к равновесию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 20-07-00740 А, гранта Президента Российской Федерации МК-1330.2020.9 и в рамках государственного задания Минобрнауки России, номер темы FSFF-2020-0013.

### Литература

- [1] Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне. // Вестник МГОУ. Физика-математика №2. 2012. С. 108–115.
- [2] Kuznetsov M.M., Kuleshova Yu.D. Increase in rates of Kinetic Processes inside the Bimodal Hypersonic Shock Wave. // HeatTransRes. 2012. Vol. 43. i3. pp. 228–236.
- [3] Кузнецов М.М., Смотрова Л.В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности. // Вестник МГОУ. Физика-математика. 2013. С. 66–73.

## Использование нейронных сетей при изучении процессов переноса в атомарных газах с электронным возбуждением

*Истомин В.А., Кустова Е.В.*

*v.istomin@spbu.ru, e.kustova@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* кинетическая теория, процессы переноса, электронное возбуждение, нейронные сети.

В настоящей работе проводится исследование возможности применения нейронных сетей при изучении процессов переноса в атомарных газах с учётом электронного возбуждения. В рамках исследования предлагается использовать нейронные сети для создания вычислительно-эффективного алгоритма учёта влияния электронных степеней свободы на расчёт физических свойств и коэф-

фициентов переноса в однотемпературном приближении. В качестве модельных газов в работе используются атомарный азот  $N$  и кислород  $O$ .

В связи с большими вычислительными сложностями ранее при расчётах тепловых потоков за ударными волнами, возникающими в гиперзвуковых течениях, влияние электронного возбуждения не учитывалось, а при расчёте коэффициентов переноса атомы обычно рассматривались как бесструктурные частицы. Таким образом, в выражениях для теплового потока и тензора напряжений не появлялись члены, связанные с внутренними степенями свободы, что могло приводить к значительным вычислительным погрешностям при расчёте потоковых членов [1]–[4]. В связи с этим, по результатам предыдущих исследований авторов проекта, был разработан программный комплекс “Planet Atmosphere Investigator of Non-equilibrium Thermodynamics” (PAINeT) [5], позволяющий проводить исследование физико-химических свойств различных смесей газов с учётом сильных отклонений от термодинамического равновесия, а также неравновесных эффектов, связанных с электронным возбуждением, химическими реакциями и ионизацией. Тем не менее, точный расчёт при учёте всех эффектов, обозначенных выше, занимает значительное вычислительное время и требует некоторых допущений, позволяющих сократить использование машинных ресурсов. С этой целью в настоящей работе предлагается использование нейронных сетей при расчёте в различных диапазонах температур и давлений статистических сумм, теплоемкостей, а также коэффициентов переноса, таких как теплопроводность и вязкость.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 19-11-00041).

## Литература

- [1] Bruno D., Laricchiuta A., Capitelli M., Catalfamo C. // Phys. Plasmas 14, 022303, 2007.
- [2] Bruno D., Capitelli M., Catalfamo C., Celiberto R., Colonna G., Diomede P., Giordano D., Gorse C., Laricchiuta A., Longo S., Pagano D., Pirani F. // Transport Properties of High-Temperature Mars-Atmosphere Components. ESA STR-256. Noordwijk: ESA Publications Division, 2008, 986 p.
- [3] Istomin V.A., Kustova E.V. // Phys. Plasmas 24, 2, 2017.
- [4] Nagnibeda E.A., Kustova E.V. // Non-equilibrium reacting gas flows - Kinetic theory of transport and relaxation processes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.
- [5] Istomin V.A., Oblapenko G.P. // Phys. Plasmas 25, 013514, 2018.

## Machine Learning for State-to-State

*Campoli L.*

*l.kampoli@spbu.ru*

Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Ключевые слова:* Machine learning, neural networks, state-to-state

Various approaches to model strongly non-equilibrium flows exist, such as the one-temperature, multi-temperature, and state-to-state approximations. Of these, the state-to-state approximation, which assumes that characteristic times of vibrational energy transitions and chemical reactions are of the same order of magnitude as the gas-dynamic timescale, is the most detailed, since it can describe arbitrary vibrational energy distributions. For strongly non-equilibrium flows, the state-to-state description, provides the most accurate results and the best agreement with experimental data [1]. Nevertheless, it is well known that numerical simulations of high-speed reacting viscous flows, in the framework of state-to-state (STS) formulations, are often prohibitively computationally expensive.

In recent years, the availability of large data sets combined with the improvement in algorithms and the exponential growth in computing power led to an unparalleled surge of interest in the topic of machine learning. Nowadays, machine learning (ML) algorithms are successfully employed for classification, regression, clustering, or dimensionality reduction tasks of large sets of especially high-dimensional input data. Machine learning is now rapidly making inroads also in fluid mechanics, providing a modular and agile modeling framework that can be tailored to address many challenges, such as experimental data processing, shape optimization, turbulence closure modeling, and control [2].

Given the growing interest in performing STS simulations and the availability of new investigation tools, in this work, we investigate the possibility of using ML for STS approaches in order to alleviate the aforementioned computational issue.

Three main tasks have been identified. First, we assess the potential of data-driven regression models based on ML to predict the chemical relaxation source terms for a one-dimensional reacting shock flow for a N<sub>2</sub>/N binary and air 5 mixture. Several state-of-the-art ML algorithms, were evaluated, specifically, Kernel Ridge (KR), Support Vector Machines (SVM), k-Nearest Neighbor (k-NN), Gaussian Processes (GP), several ensemble methods (Random Forest (RF), Extremely Randomized Trees (ET), Gradient Boosting (GB), Histogram-Based Gradient Boosting (HGB), Multi-layer Perceptron (MLP) from the scikit-learn [3] framework, were compared.

Results showed that by appropriately choosing the ML regressor and opportunely tuning hyperparameters it is possible to achieve accurate predictions

compared to the full-scale STS simulation in significantly shorter time. The gain which can be obtained increases with the mixture's complexity. In particular, it was found that best performances in terms of prediction time are achieved by Decision Tree algorithm, while in terms of minimal error levels Kernel Ridge is the best candidate. The k-Nearest Neighbour algorithm appears to provide a good trade off between prediction time and accuracy. It is also worth noting that even if the performance of the proposed ML framework and the results are found to be satisfactory, the accuracy of the ML-based simulations presented here could be further improved with training of bigger dataset and refined hyperparameter tuning/optimization.

Secondly, we report a first attempt to couple an in-house MATLAB STS ODE solver and the pre-trained best-performing ML in order to speed-up the simulation by relieving the solver from the heavy computation of the relaxation source terms which are inferred by the ML. Several strategies have been discussed and it was shown that significant (two/three orders of magnitude) speed-up can be achieved respect to the baseline traditional method but care should be paid in the choice of the most effective way to use ML.

Finally, we present the inference of the full Euler system of equations for a one-dimensional reacting shock flow in the STS approach with a DNN [4]. Satisfactory agreement was obtained for all variables of interest. Neural networks proved to be a viable technology also for CFD STS simulations.

The work is supported by the Russian Science Foundation, grant 19-11-00041.

## References

- [1] Armenise I., Reynier P., Kustova E. Advanced models for vibrational and chemical kinetics applied to Mars entry aerothermodynamics. // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2016. V. 30, N. 4, pp. 705–720.
- [2] Bruno D. et al. Transport properties of high-temperature Mars-atmosphere components. // *ESA Scientific Technical Review*. 2008. V. 256.
- [3] Pedregosa F. et al. Scikit-learn: Machine learning in Python. // *The Journal of machine Learning research*. 2011. V. 12, pp. 2825–2830.
- [4] Mao Z., Jagtap A. D., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks for high-speed flows. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. V. 360, pp. 112789.



## Поуровневые и многотемпературные модели колебательно-химической кинетики в смесях, содержащих CO<sub>2</sub>

*Косарева А.А., Кунова О.В., Кустова Е.В., Нагнибеда Е.А.*

*kos-hellen@yandex.ru, o.kunova@spbu.ru, elena\_kustova@mail.ru,*

*e\_nagnibeda@mail.ru*

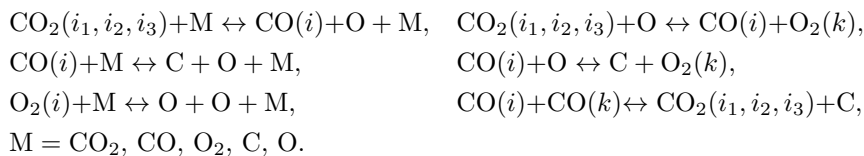
Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* углекислый газ, колебательная релаксация, химические реакции, поуровневое приближение, многотемпературное приближение.

Исследования химически реагирующих смесей, содержащих молекулы углекислого газа, необходимы при решении задач высокотемпературной газодинамики, лазерной физики, экологии. В настоящий момент в кинетической теории разработано большое количество моделей для описания течений с многоатомными молекулами [1]–[5]. Однако применение наиболее детального поуровневого описания в двумерных и трёхмерных задачах всё ещё затруднено из-за высоких численных затрат подобного метода. Поэтому использование упрощенных многотемпературных подходов и оценка их применимости является актуальной задачей.

Рассмотрена пространственно-однородная релаксация смеси CO<sub>2</sub>(*i*<sub>1</sub>, *i*<sub>2</sub>, *i*<sub>3</sub>)/CO(*i*)/O<sub>2</sub>(*k*)/O/C ( *i*<sub>1</sub>, *i*<sub>2</sub>, *i*<sub>3</sub> — колебательные уровни соответствующей моды молекул CO<sub>2</sub>, *i*, *k* — двухатомных молекул) с учетом колебательной неравновесности молекулярных компонент и химических реакций в рамках наиболее строгого поуровневого подхода и многотемпературных моделей, разработанных ранее для течений чистого углекислого газа [6]. Используемая кинетическая схема включает: VT<sub>*m*</sub> (*m* = 1, 2, 3) и VT обмены поступательной и колебательной энергиями молекул углекислого газа и двухатомных молекул смеси, межмодовые VV<sub>1–2</sub>, VV<sub>2–3</sub>, VV<sub>1–2–3</sub> обмены колебательными энергиями трёх типов колебаний внутри молекул CO<sub>2</sub>, а также химические реакции диссоциации, рекомбинации и обмена атомами:



Поуровневое приближение применяется в условиях быстрой поступательной и вращательной релаксации при замедленной колебательной и химической

релаксации. При этом параметрами течения являются температура газа  $T$ , относительные числовые плотности компонентов смеси и заселённости колебательных уровней молекул. В рамках рассматриваемого в работе четырёхтемпературного подхода учитывается, что внутримодовые  $VV_m$  обмены происходят быстрее остальных энергетических переходов в молекулах  $\text{CO}_2$ , что приводит к установлению четырёхтемпературного распределения по колебательным уровням трёх типов колебаний молекул  $\text{CO}_2$  с колебательными температурами  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ :

$$n_{i_1, i_2, i_3} = \frac{n(i_2 + 1)}{Z^{\text{vibr}}(T, T_1, T_2, T_3)} \exp \left( - \frac{\varepsilon_{i_1, i_2, i_3} - (i_1 \varepsilon_{1,0,0} + i_2 \varepsilon_{0,1,0} + i_3 \varepsilon_{0,0,1})}{k_B T} - \frac{i_1 \varepsilon_{1,0,0}}{k_B T_1} - \frac{i_2 \varepsilon_{0,1,0}}{k_B T_2} - \frac{i_3 \varepsilon_{0,0,1}}{k_B T_3} \right). \quad (1)$$

Здесь  $n$  – числовая плотность  $\text{CO}_2$ ,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\varepsilon_{i_1, i_2, i_3}$  – колебательная энергия соответствующего состояния,  $Z^{\text{vibr}}$  – колебательная статистическая сумма.

В работе представлено сравнение результатов, полученных при моделировании пространственно-однородной колебательной и химической релаксации смесей, содержащих углекислый газ, на основе поуровневого, четырёхтемпературного, а также упрощенных трёхтемпературного и двухтемпературного подходов. Также показано влияние колебательной неравновесности на скорость химических реакций и характер релаксации.

Научное исследование проведено при поддержке РФФИ (грант № 19-11-00041).

## Литература

- [1] E.V. Kustova, E.A. Nagnibeda. State-to-State Theory of Vibrational Kinetics and Dissociation in Three-Atomic Gases // AIP Conf. Proc. 2001. Vol. 585. P. 620–627.
- [2] A. Fridman. Plasma Chemistry. Cambridge University Press, 2008.
- [3] I. Armenise, E. Kustova. State-to-State Models for  $\text{CO}_2$  Molecules: from the Theory to an Application to Hypersonic Boundary Layers // Chem. Phys. 2013. Vol. 415. P. 269–281.
- [4] T. Kozak, A. Bogaerts. Splitting of  $\text{CO}_2$  by vibrational excitation in non-equilibrium plasmas: a reaction kinetics model // Plasma Sources Sci. Technol. 2014. Vol. 23. P. 045004.
- [5] L.D. Pietanza et al. Influence of Electron Molecule Resonant Vibrational Collisions over the Symmetric Mode and Direct Excitation-Dissociation Cross Sections of  $\text{CO}_2$  on the Electron Energy Distribution Function and Dissociation Mechanisms in Cold Pure  $\text{CO}_2$  Plasmas // J. Phys. Chem. A. 2016. Vol. 17. P. 2614–2628.

- [6] А. Kosareva, О. Kunova, Е. Kustova, Е. Nagnibeda. Four-temperature kinetic model for CO<sub>2</sub> vibrational relaxation // Подано в Physics of Fluids

## Исследование многотемпературной колебательной кинетики углекислого газа на основе новых моделей времен релаксации

*Косарева А.А., Кустова Е.В., Мехоношина М.А.*

*kos-hellen@yandex.ru, e.kustova@spbu.ru, mekhonoshinama@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* углекислый газ, колебательная релаксация, времена релаксации

Исследование кинетики углекислого газа важно для многих современных приложений: задач плазмохимии, экологии, планирования полетов космических аппаратов на Марс. Изучение процессов в углекислом газе осложняется наличием трёх колебательных мод и, как следствие, нескольких каналов колебательной релаксации.

В работе исследуется пространственно-однородная релаксация однокомпонентного газа CO<sub>2</sub> в рамках трёхтемпературного приближения кинетической теории. Вследствие быстрых колебательных  $VV_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) переходов внутри каждой моды молекул углекислого газа и близкого к резонансному  $VV_{1-2}$  обмена колебательными энергиями между симметричной и деформационной модами, внутри молекул CO<sub>2</sub> устанавливается двухтемпературное распределение по колебательным уровням, что позволяет ввести колебательные температуры объединенной (симметрично-деформационной) моды  $T_{12}$  и антисимметричной моды  $T_3$  [1].

Система уравнений, описывающая колебательную релаксацию молекул углекислого газа, содержит уравнение сохранения полной энергии, дополненное уравнениями колебательной кинетики объединенной и антисимметричной мод:

$$\rho \frac{dE_{12}}{dx} = R_{12} = R_{12}^{VT_2} + R_{12}^{VV_{2-3}} + R_{12}^{VV_{1-2-3}}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dE_3}{dx} = R_3 = R_3^{VT_2} + R_3^{VV_{2-3}} + R_3^{VV_{1-2-3}}, \quad (2)$$

$$E = const. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $E$  — полная энергия единицы массы,  $E_{12}$ ,  $E_3$  — удельные колебательные энергии объединенной и антисимметричной мод,  $R_{12}$ ,  $R_3$  — релаксационные члены, описывающие изменение колебательной энергии вследствие переходов энергии, идущих в гидродинамическом масштабе времени. В

данной задаче к медленным процессам относятся  $VT_2$  переходы поступательной энергии в колебательную энергию деформационной моды, а также межмодовые  $VV_{2-3}$  и  $VV_{1-2-3}$  обмены энергией между разными модами.

Релаксационные члены в уравнениях кинетики обычно рассчитываются по формуле Ландау-Теллера с различными временами релаксации. Точность такого подхода достаточно низкая, поскольку в нем используются однотемпературные времена релаксации, определяемые из аппроксимаций экспериментальных данных, полученных в ограниченном диапазоне температур.

Возможным способом повышения точности уравнений Ландау-Теллера для  $CO_2$  является введение многотемпературных времён колебательной релаксации и использование поправочных коэффициентов, зависящих от соотношений температур [2]. Так, для  $VT_2$  переходов в объединённой симметрично-деформационной моде поправочный коэффициент имеет вид  $T/T_{12}$ , и выражение для соответствующего релаксационного члена принимает вид:

$$R_{12}^{VT_2} = \rho \frac{E_{12}(T) - E_{12}(T_{12})}{\tau_{12}^{VT_2}(T, T_{12})} \frac{T}{T_{12}}, \quad (4)$$

где  $\tau_{12}^{VT_2}(T, T_{12})$  — время релаксации  $VT_2$  обмена,  $T$  — температура газа,  $E_{12}(T)$  — равновесное значение удельной колебательной энергии объединённой моды. Для межмодовых обменов поправки принимают более сложный вид, см. [2].

В данной работе многотемпературные времена релаксации вычисляются методами кинетической теории на основании вероятностей колебательных переходов (внутримодовых  $VT$  и межмодовых  $VV$ ). Используется модель нагруженного гармонического осциллятора (ФНО) [3], обобщённая для углекислого газа [4]. Расчёты, проведённые в широком интервале температур 500–10000 К, показывают сильное влияние вероятностей переходов на времена релаксации. При низких и средних температурах модель ФНО обеспечивает хорошее согласие с экспериментами и может быть рекомендована для моделирования неравновесных потоков.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-1243.2020.1.

## Литература

- [1] Kustova E. and Nagnibeda E. On a correct description of a multi-temperature dissociating  $CO_2$  flow // Chem. Phys. 2006. Vol. 321. pp. 293–310 (2006)
- [2] Kustova E. and Mekhonoshina M. Multi-temperature vibrational energy relaxation rates in  $CO_2$  // Phys. Fluids. 2020. Vol. 32. P. 096101.
- [3] Adamovich I.V. and Macheret S.O. and Rich J.W. and Treanor C.E. Vibrational energy transfer rates using a forced harmonic oscillator model // J. Thermophys. Heat Transfer. 1998. Vol. 12. pp. 57–65.

- [4] Lino da Silva M. and Vargas J. and Loureiro J. STELLAR CO2 v2: A database for vibrationally specific excitation and dissociation rates for carbon dioxide // Tech. Rep. IST-IPFN TR 06-2018, IST, Lisbon. ESA Contract No. 4000118059/16/NL/KML/fg “Standard Kinetic Models for CO2 Dissociating Flows”. 2018.

## Поток электромагнитной энергии при движении проводящей жидкости в кольцевом зазоре двух соосных цилиндров

*Маламанов С.Ю.*

*stevmal@mail.ru*

Балтийский государственный технический университет им. Д. Ф. Устинова,  
190005, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1

*Ключевые слова:* численное моделирование, проводящая жидкость, скорость потока, магнитное поле, электромагнитная энергия.

В работе рассматривается моделирование воздействия магнитного поля на электрический ток, приводящее к электромагнитной силе, силе Ампера —  $[JB]$ , наибольшее значение которой, достигается, в частности, при прямолинейном движении проводящей жидкости в тороидальном магнитном поле. Эти условия реализуются в пространстве кольцевого зазора двух соосных цилиндров, между поверхностями которых поддерживается постоянная разность потенциалов, обуславливающая электрический ток, а в зазоре прикладывается магнитное поле  $\mathbf{B}$ . В результате, при погружении устройства в проводящую среду, сила Ампера выталкивает жидкость из кольцевого зазора, получающееся в результате этого течение представляет собой коаксиальную струю.

Очевидно, что струя, как поток массы, несёт с собой импульс и энергию. В данном контексте интерес представляет не сама энергия, а её поток. Общее представление о течении энергии было введено Н.А. Умовым, а применительно к электромагнитной энергии — Пойнтингом. Им был введён «вектор Пойнтинга» —  $[EH]$ . Напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H}$  в простейшем случае линейно связана с индукцией магнитного поля  $\mathbf{B}$ . В рассматриваемой постановке электромагнитное поле статическое, то есть не меняется во времени. Следовательно, поток электромагнитной энергии существует во всех точках, где векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не коллинеарны. Это реализуется в кольцевом зазоре. Именно электромагнитная энергия переходит в механическую энергию струи.

Расчёт течения осуществлялся с помощью гидродинамического модуля ANSYS.CFX. Соответствующая система уравнений и некоторые особенности постановки подобного рода задач рассмотрены в работе [1].

Следует отметить, что течение электромагнитной энергии не проявляется ни в каких физических явлениях. Однако оно приводит к следствиям, допус-

кающим проверку — экспериментальную или теоретическую. Одно из таких проявлений и рассмотрено в настоящей работе.

## Литература

- [1] Маламанов С.Ю. Численное моделирование задач о силовом взаимодействии гидродинамического и электромагнитного полей . // Известия РАН. Математическое моделирование. 2015. Том 27. №11. С. 56–62.

## Моделирование релаксации двухатомных молекул в поуровневом приближении с учётом электронной кинетики

*Мельник М.Ю., Кустова Е.В.*

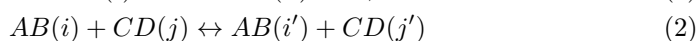
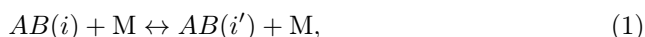
*melnik.mxm@gmail.com, elena\_kustova@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* неравновесная кинетика, электрический разряд, плазма, кислород

Одним из актуальных направлений современной аэротермодинамики являются исследование движения тел в атмосферах планет на больших скоростях. Область приложений охватывает авиа-, ракетостроение, программы исследования космоса. Возрастает интерес к более точным моделям описания процессов в течениях. Их важной составляющей являются процессы переноса колебательной энергии молекул и её перехода в другие виды энергии. Существует несколько подходов к описанию этих процессов, но наиболее точным является поуровневый подход [1], рассматривающий каждое колебательное состояние компонент газа как отдельный сорт частиц. Особенно преимущества данного подхода проявляются в условиях сильной неравновесности, когда активное перераспределение энергии в ходе процессов VT и VV обменов

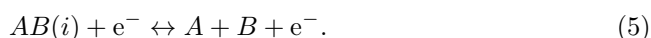
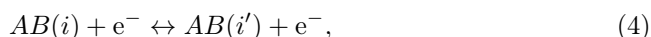


происходит в газодинамическом масштабе времени, а также когда диссоциация и рекомбинация в ходе столкновений



имеют характерные времена, сравнимые со временем колебательной релаксации.

В то же время вычислительная сложность всё ещё не позволяет учитывать большое количество процессов и взаимодействий в реагирующих течениях. Это накладывает ограничения на условия применимости поуровневого подхода. Например, при высоких температурах происходит ионизация газа, что приводит к появлению существенного числа свободных электронов, которые, в свою очередь, значительно влияют на эволюцию макропараметров течения за счёт аналогичных (1) и (2) процессов



Ранее уже предпринимались попытки учёта взаимодействий с электронами в высокотемпературных течениях в рамках поуровневого подхода, но лишь с использованием приближённых моделей, предполагающих максвелловское распределение электронов по энергии [2].

С другой стороны, при моделировании разрядов в газах невысокая сложность решения задач в нульмерной постановке позволяет производить учёт электронной кинетики, играющей одну из основных ролей, с гораздо большей точностью. Например, в работе [3] для реагирующего кислорода было произведено моделирование в поуровневом подходе с учётом 80-ти типов взаимодействий, что приводит к необходимости учёта нескольких сотен реакций для разных колебательных состояний. Особого внимания заслуживает описание распределения электронов по энергиям с помощью решения уравнения Больцмана для свободных электронов. Такой подход является вычислительно сложным и затруднительным в реализации. Для решения этой проблемы в задачах моделирования низкотемпературных разрядов получает распространение программный комплекс LoKI-B [4]. Он разработан научной группой университета Лиссабона и позволяет вычислять распределения свободных электронов по энергиям для заданных течений.

Целью данной работы является анализ применимости предложенных подходов для высокотемпературной релаксации двухатомных реагирующих газов и исследование влияния процессов колебательного возбуждения, диссоциации и рекомбинации тяжёлых частиц при столкновениях со свободными электронами на распределение макропараметров. Исследована задача о пространственно однородной релаксации, проведено сравнение схем без учёта и с учётом свободных электронов. Даны рекомендации по применению моделей электронных взаимодействий.

Научное исследование проведено при поддержке Российского научного фонда, грант № 19-11-00041.

## Литература

- [1] Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 270 с
- [2] Prutko K.A. Radiating Gas behind Strong Shock Waves with Non-Equilibrium Ionization Processes // Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics 2016 V17 (3)
- [3] Annusova A., Marinov D., Booth J.-P., Sirse N, Lino da Silva M., Lopez B., Guerra V. Kinetics of highly vibrationally excited O<sub>2</sub>(X) molecules in inductively-coupled oxygen plasmas 2018 Plasma Sources Sci. Technol. 27 045006
- [4] Tejero-del-Caz A., Guerra V., Goncalves D., Lino da Silva M., Marques L., Pinhao N, Pintassilgo C. D., Alves L. L. The LisbOn KInetics Boltzmann solver

## Моментные напряжения в механике сплошной среды

*Прозорова Э.В.*

*e.prozorova@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* законы сохранения, тензор напряжений, теорема Остроградского-Гаусса.

В работе предложена модель, построенная с использованием внеинтегрального слагаемого при выводе законов сохранения с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, в механике сплошной среды. Актуальность темы диктуется отсутствием адекватных практике моделей, описывающих такие явления как турбулентность, наноструктуры, флуктуации и т.д. Проведённый анализ показал рассогласование принятых классических законов сохранения с классической теоретической механикой и математикой. Скорости различных процессов во времена написания уравнений были сравнительно небольшими по сравнению с современными. В результате были расширены области действия теории, разработанной для потенциальных течений на течения со значительными градиентами физических параметров.

В основу были положены законы равновесия сил, закон сохранения момента рассматривался как следствие выполнения закона равновесия сил. Нами предложена модель, учитывающая совместное выполнение законов и соответствующее уравнение состояния, включающая вклад вращательной компоненты скорости. Законы сохранения получены экспериментальным путём и поэтому первоначально записаны в интегральной форме. Дифференциальные законы получают двумя способами: используя метод конечных объемов [1] и используя теорему Остроградского-Гаусса при замене интеграла по поверхности интегра-



лом по объему, т. е. взятие интеграла по частям с дальнейшим использованием теорем об условиях обращения интеграла в ноль.

Внеинтегральное слагаемое при переходе от интегральной формулировки к дифференциальной в механике не учитывается. Из определения давления как из классического уравнения Больцмана, так и модифицированного, не следует, что гидростатическое давление есть одна треть от суммы давлений на координатных площадках. Уравнения движения, полученные из уравнения Больцмана, соответствуют нулевому порядку для уравнений Эйлера и первому порядку для уравнений Навье-Стокса. Деление скорости на дивергентную и роторную части приводит к скорости, отличной от исходной. Спасает положение то, что данное обстоятельство влияет на вязкую составляющую напряжений, что является величиной первого порядка.

Гидростатическое давление есть величина нулевого порядка. Используя закон Паскаля для равновесия выбирают давление равным одной трети давлений на координатных площадках. Однако теория остается прежней при определении разного давления на каждой на площадок, т.е.  $p_x, p_y, p_z$ . Использование одного давления возможно при равновесных условиях (закон Паскаля), но для неравновесных условий факт не очевиден. На это обращено внимание в учебнике [2]. В теории упругости при рассмотрении связи между компонентами тензора деформаций и тензора напряжений используется экспериментальный факт изменения нормальных к элементарной площадке компонент  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  (напряжений) и они все различаются. Сложившаяся теория связана с тем, что закон равновесия сил и моментов сил рассматриваются отдельно.

При решении конкретных задач вклад распределенного момента часто исследуется, но оставляется условие симметрии тензора напряжений. Иногда при решении задач теории упругости применяют первые инварианты, однако это можно делать, если тензор симметричный. Симметричным он становится после отбрасывания вращательной компоненты. При рассмотрении вихревого движения тензор несимметричный (метод Лява). Условие равновесия выполняются, если нет внутренних и внешних сил, однако любые поверхностные силы могут быть переведены путем замены переменных во внутренние силы и возникнут деформации. Роль несимметричности напряжений в теории упругости наглядно показана в работах [3, 4], а для жидкости и газа — в [5]–[8]. Тензор напряжений будет симметричным только в условиях равновесия, но переносить результаты на неравновесные процессы нельзя. Изменение момента связано с появлением дополнительной силы, которая может играть роль малого возмущения, влияющего на устойчивость структуры.

Полученные эффекты могут сказаться при критических и около критических режимах работы самолётов, ракет, различных устройств, строительных конструкций, а также при некоторых естественных процессах. Величина дополнительной силы определяется значением градиента физических величин

(плотности, скорости, количества движения) и структурой изучаемого объекта. В случае динамического формирования структуры изменяется положение центра инерции, что влечет за собой изменение момента количества движения. Выписывая отдельно закон равновесия для сил и отдельно для моментов сил без учета взаимного влияния, хотя момент создает дополнительную силу, мы приходим к выводу о симметрии тензора напряжений. Если мы рассматриваем случай разных давлений по разным направлениям, а момент не учитываем, мы теряем момент силы, а градиент давления есть сила. Анализируя результаты решения уравнений Эйлера и расчеты потенциальных течений, мы получаем вихревую пелену, что указывает на существования момента. Математический анализ показывает, что уравнения потенциального течения не являются подмножеством уравнений Эйлера. Приводится пример влияния векторного характера давления, влияние тензора напряжений было представлено ранее.

### Литература

- [1] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т.2. М.: Наука, 1974. 655 с.
- [2] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
- [3] Буланов Э. А. Моментные напряжения в в механике твердого, сыпучего и жидкого тела. М.: Вузовская книга, 2012. 140 с.
- [4] Колбасников Н. Г. Теория обработки металлов давлением. Сопротивление деформации и пластичность. М.: Изд-во СПбГУ, 2000. 314 с.
- [5] Prozorova Evelina. Ostrogradsky-Gauss Theorem for Problems of Gas and Fluid. // International Conference on Mathematical Models & Computational Techniques in Science & Engineerings. 23–25 February 2019, London, UK. Mechanics. Journal of Physics: Conference Series Vol. 1334. 2019. 012009
- [6] Prozorova Evelina V. Influence of discrete model on derivatives in kinetic theory. // JP Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 17, Number 1, 2019, pp. 1–19. ISSN: 0973–5763
- [7] Prozorova E. V. Features of the rarefied gas description in terms of a distribution function. // APhM2018. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1250, 2019, 012023. IOP Publishing. doi:10.1088/1742-6596/1250/1/012023
- [8] Evelina Prozorova The influence of the no symmetric stress tensor on the flow separation. // Wseas Transaction on Applied and Theoretical Mechanics. ISSN / E-ISSN: 1991-8747 / 2224-3429, Vol. 15, 2020, Art. #9, pp. 60–68. DOI: 10.37394/232011.2020.15

## Численный анализ динамики нагрева воздуха межэлектродным разрядом

*Ренев М.Е., Добров Ю.В., Лашков В.А., Машек И.Ч.*  
*m.renev@2014.spbu.ru, youdobrov@gmail.com, , valerial180150@gmail.com,*  
*Igor.Mashek@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* микросекундный межэлектродный разряд, плазма, моделирование, воздух, теплофизика.

Высокоскоростные летательные аппараты на больших скоростях движения испытывают серьезные механические и тепловые нагрузки, сопротивление движению. При этом, становится сложным решать проблему снижения подобных нагрузок классическими механическими элементами конструкции. Управление течением газа плазменными преобразователями, с помощью местного вложения электромагнитной энергии является важным и альтернативным направлением развития [1]–[4]. Рассматриваемые устройства действуют мгновенно, позволяют управлять потоком на расстоянии и улучшать параметры обтекания, маневренность тела. Много расчётных работ показывают, что это достигается за счёт локального нагрева газа.

Настоящее исследование посвящено импульсному межэлектродному разряду. Его динамика не изучена в достаточной степени. Отсутствует возможность выбрать оптимальные параметры для эффективного энерговложения и управления аэродинамикой сверхзвукового летательного аппарата. Комплексных расчётных работ по нагреву среды с помощью плазменного преобразователя, предоставляющие сведения об оптимальных параметрах разрядной системы, крайне мало, и они крайне ресурсозатратны. Как правило, задают уровень вкладываемой энергии в газ и анализируют изменение структуры течения около тела [5, 6]. Подробные сведения о достижении необходимого энерговложения с помощью электрического разряда для получения того же аэродинамического эффекта отсутствуют.

Цель данного исследования — создать одномерную модель электродного разряда и выяснить степень нагрева среды при подаче высокого напряжения. Система уравнений учитывает высокотемпературные плазмохимические реакции, нагрев среды. В дальнейшем результаты исследования будут использованы при моделировании сверхзвукового обтекания тела в условиях локального подвода энергии с помощью межэлектродного разряда.

Используется особый подход к расчёту мощности нагрева среды: Джоулев нагрев ионным током задается для среды, электронным током — для электронного газа. Электронный газ расходует энергию на упругие столкновения с тяжё-

лыми частицами, а также на неупругие реакции: электронных ионизации, возбуждения. В модели также учитывается фотоионизация, рекомбинация, прилипание, релаксация возбужденных частиц, диссоциация, поверхностные реакции снятия возбуждения, вторичная ион-электронная эмиссия, а также термоавтоэмиссия. Производится учёт высокотемпературных реакций диссоциации и ионизации. При расчётах использовались компьютерные ресурсы, пакет моделирования Comsol Multiphysics, предоставленные РЦ «Вычислительный центр СПбГУ».

В результате расчёта получены данные по динамике нагрева среды, а также исследована структура разряда в случае подачи на систему прямоугольных импульсов напряжения с длительностью порядка микросекунд и длительностью фронтов порядка сотен наносекунд. Расчёт показывает, что скорость нагрева на начальном этапе развития разряда 1 К/нс. За микросекунду среда нагреется до 1000 К при постоянной скорости нагрева. Рассматриваемая система уравнений не учитывает тепловое излучение, потоки энергии поперёк оси распространения разряда, движение среды. Это приводит к завышению температуры нагрева. После завершения активной фазы разряда ожидается быстрое остывание области до температур порядка 700 К за десятки микросекунд. Это коррелирует с экспериментальными исследованиями с микроволновым разрядом [7].

## Литература

- [1] Fomin V., Tretyakov P., Taran J.P. Flow control using various plasma and aerodynamic approaches (Short Review) // *Aerospace science and technology*, 2004. Vol. 8, N 463. pp. 411–421. doi: 10.1016/j.ast.2004.01.005
- [2] Knight D. Survey of aerodynamic drag reduction at high speed by energy deposition // *J. of Propulsion and Power*, 2008. Vol. 24. N 6. pp. 1153–1167. doi: 10.2514/1.24595
- [3] Lashkov V., Mashek I., Anisimov Y., Ivanov V., Kolesnichenko Y., Ryvkin M., Gorynya A. Gas dynamic effect of microwave discharge on supersonic cone-shaped bodies // *AIAA Paper 2004–0671*, 2004. doi: 10.2514/6.2004–671
- [4] Kourtzanidis K., Raja L. Numerical Simulation of DC Glow Discharges for Shock Wave Modification // *AIAA Paper 2016–2157*, 2016. doi: 10.2514/6.2016–2157
- [5] Koroteeva E. et al Shock wave interaction with a thermal layer produced by a plasma sheet actuator // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2017. Vol. 50. N 8. P. 085204. doi: 10.1088/1361-6463/aa5874
- [6] Lashkov V.A., Karpenko A.G., Khoronzhuk R.S., Mashek. I.Ch. Effect of Mach number on the efficiency of microwave energy deposition in supersonic flow // *Phys. Plasmas*, 2016. Vol. 23. N 5. P. 052305. doi: 10.1063/1.4949524
- [7] Mashek I.Ch., Anisimov Y.I., Lashkov V.A., Kolesnichenko Y.F. Multibeam Interferometry Of Self-Sustaining And Laser Induced Mw Discharges In Air // *AIAA Paper 2005-0790*, 2005. doi 10.2514/6.2005–790

## Стохастическое моделирование теплопроводности разреженных газов

*Рудяк В.Я.*<sup>1,2,3</sup> *Лежнев Е.В.*<sup>2</sup> *Любимов Д.Н.*<sup>2</sup>  
*valery.rudyak@mail.ru, lionlev@yandex.ru, danillch@mail.ru*

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет,  
630090, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Пирогова, 2,

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113,

<sup>3</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1

*Ключевые слова:* разреженный газ, процессы переноса, молекулярное моделирование, теплопроводность.

Молекулярное моделирование процессов переноса, в частности, расчёт коэффициентов переноса является важной альтернативой соответствующим экспериментам. Для разреженных газов кинетическая теория принципиально решает эту задачу. Но реальное вычисление коэффициентов переноса в процессе решения уравнения Больцмана совсем нетривиальная задача (необходимо решать ряд линейных интегральных уравнений, рассчитывать так называемые  $\Omega$ -интегралы для разных потенциалов взаимодействия и т.д.). В ряде случаев, в частности, для многоатомных газов решить её с необходимой точностью технически чрезвычайно сложно. Это же относится и к расчёту коэффициента теплопроводности. По этой причине разработка метода прямого молекулярного моделирования весьма актуальна.

Методом прямого молекулярного моделирования процессов переноса является хорошо известный метод молекулярной динамики (см., например, [1]). Этот метод, как и всякий другой численный метод не свободен от ошибок, они возникают из-за неточности задания начальных данных для динамических переменных молекул моделируемой системы, ошибок округления и т.п. В молекулярных системах это приводит к развитию локальной неустойчивости фазовых траекторий и появлению динамического хаоса [2]. Тем не менее, метод молекулярной динамики даёт прекрасные результаты при изучении самых разных физических, химических и биологических систем. Это обусловлено тем, что актуальные результаты при использовании метода молекулярной динамики получаются усреднением по большому числу независимых фазовых траекторий. Однако, для разреженного газа метод молекулярной динамики фактически не применим из-за необходимости использования при моделировании огромного числа частиц, характерный размер ячейки должен быть много больше длины свободного пробега молекул.

В связи с этим естественной представляется идея разработки метода моделирования процессов переноса, в котором фазовые траектории определенным

образом имитируются, а затем используются для расчёта любых наблюдаемых. В наших работах [3]– [6] развит метод стохастического молекулярного моделирования (СММ) процессов переноса разреженного газа. Было установлено, что, используя сравнительно небольшое число молекул, можно моделировать коэффициенты диффузии и вязкости различных газов с точностью получения экспериментальных данных. Целью данной работы является моделирование одного из самых сложных коэффициентов переноса – коэффициента теплопроводности. Рассматриваются как одноатомные благородные газы, так и многоатомные ( $O_2$ ,  $CH_4$ ,  $CO_2$ ).

Основная идея алгоритма заключается в том, что последовательно для каждой молекулы реализуются процессы соударения пар молекул. Сталкивающиеся пары выбираются случайно. Частота столкновения молекул вычисляется на основе кинетической теории [7]. Результатом расчёта является полный набор координат и скоростей всех молекул моделируемой системы в последовательные моменты времени. Используя эту информацию, можно рассчитать практически все наблюдаемые характеристики газа, включая коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплопроводности рассчитывается на основе флуктуационно-диссипационной теоремы, которая представляет его как интеграл по времени от коррелятора соответствующих динамических переменных.

Была смоделирована теплопроводность благородных газов, а также кислорода и метана при 300 К и атмосферном давлении. При этом, относительная разность по сравнению с экспериментальными данными была около 2 %. Также было показано, относительная разность обратно пропорциональна корню из числа траекторий и числа молекул.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-19-00043).

## Литература

- [1] Rapaport DC. The Art of Molecular Dynamics Simulation. Cambridge: Cambridge University Press; 1995.
- [2] Норман Г.Э., Стегайлов В.В. Стохастическая теория метода классической молекулярной динамики // Математическое моделирование. 2012, т.24, №6, С. 3–44.
- [3] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Стохастический метод моделирования коэффициентов переноса разреженного газа // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 3. С. 113–122.
- [4] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Statistical simulation of the transport coefficients of the rarefied gases. J. Phys.: Conf. Series. 2018. P. 012122. doi: 10.1088/1742-6596/1105/1/012122
- [5] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Stochastic algorithm for simulating gas transport coefficients. J. Comp. Physics. 2018. Vol. 355. P. 95–103. doi: 10.1016/j.jcp.2017.11.001

- [6] Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н. Имитационное моделирование коэффициентов переноса разреженных газов и наногазовзвесей // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 59. С. 105–117.
- [7] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Чепмен С., Каулинг Е. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

## Сокращенное описание локально равновесных течений диссоциированного многократно ионизованного кислорода

*Рыдалевская М.А., Шаламов И.Ю.*

*rydalevska@rambler.ru, i.y.shalamov@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* локально равновесные течения, равновесный состав, статистические суммы, скорость звука, адиабатический коэффициент.

Исследование высокоскоростных течений в верхних слоях земной атмосферы приводит к необходимости учета возбуждения электронных степеней свободы и ионизации атомов азота и кислорода. В докладе рассматриваются локально равновесные течения одноатомного кислорода в условиях многократной ионизации.

Гипотетически при достаточно высокой температуре в газе из химических элементов *O* наряду с нейтральными атомами могут присутствовать ионы с зарядом «*c*» от +1 до +8, т. к. 8 соответствует номеру кислорода в периодической системе Менделеева, а также свободные электроны.

Обычно для газодинамического описания течений таких смесей используются системы уравнений, содержащие вместе с уравнениями движения и энергии уравнения для плотностей нейтральных атомов  $n_0$  и ионов  $n_c$  ( $c = \overline{1, 8}$ ), а также для плотностей свободных электронов  $n_e$ . Иногда число уравнений удается сократить, если известен максимальный заряд ионов  $c_* < 8$ .

В настоящем докладе для описания равновесного состояния исследуемого газа используются статистические распределения, максимизирующие энтропию системы в условиях сохранения энергии, ядер и общего числа электронов (свободных и связанных) [1]. Такой подход позволяет получить следующие формулы для равновесных плотностей микрочастиц:

$$n_c = Z_c(T) \exp(\gamma + \gamma_e(8 - c)), \quad c = \overline{0, 8} \quad (1)$$

для атомов и ионов кислорода;

$$n_e = Z_e(T) \exp(\gamma_e) \quad (2)$$

для свободных электронов.

Здесь  $Z_c(T)$  и  $Z_e(T)$  соответствуют статистическим суммам микрочастиц, а коэффициенты  $\gamma$  и  $\gamma_e$  при столкновительных инвариантах определяются из условий:

$$\sum_{c=0}^8 n_c = \tilde{n}, \quad \sum_{c=0}^8 n_c(8-c) + n_e = \tilde{n}_e, \quad (3)$$

где  $\tilde{n}$  соответствует плотности общего числа ядер кислорода, а  $\tilde{n}_e$  — плотности общего числа электронов, входящих в разные микрочастицы.

В этих условиях для газодинамического описания ионизованного кислорода достаточно иметь систему уравнений, которая содержит только уравнения для плотностей  $\tilde{n}$  и  $\tilde{n}_e$  (вместе с уравнениями движения и энергии). Такое сокращение системы дифференциальных уравнений позволяет значительно упростить исследование равновесных течений ионизованного кислорода. В докладе приводятся интегралы движения, соответствующие этой системе уравнений, и их следствия.

Подобно тому, как это было сделано в работе [2] для смеси нейтральных газов, получено выражение для адиабатического коэффициента  $\varkappa$  в формуле:

$$a^2 = \varkappa \frac{p}{\rho}, \quad (4)$$

где  $a$  — скорость распространения малых возмущений, которая в гидроаэромеханике ассоциируется со скоростью звука,  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность ионизованного кислорода.

Для численной иллюстрации полученных результатов в докладе приводятся значения ряда газодинамических параметров в широком диапазоне температур.

## Литература

- [1] Rydalevskaya M. A. Simplified method for calculation of equilibrium plasma composition // *Physica A*. 2017. Vol. 476. pp. 49–57.
- [2] Рыдалевская М. А. Модифицированный метод Чепмена–Энскога в терминах интенсивных параметров // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 7. С. 1238–1248.



## Обобщенные поуровневые и многотемпературные модели скорости химических реакций в воздухе и $\text{CO}_2$

*Савельев А.С., Кустова Е.В.*

*aleksey.schumacher@gmail.com, e.kustova@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* коэффициенты скорости химических реакций, химическая кинетика, колебательное возбуждение, поуровневое приближение.

При решении задач высокоскоростной аэродинамики, моделировании входа в атмосферы планет и тепловой защиты летательных аппаратов важную роль играет корректное описание неравновесных химических реакций и процессов релаксации внутренней энергии. Точность получаемых решений зависит как от надежности используемых вычислительных алгоритмов, так и от детальности описания процессов, происходящих в окружающей газовой среде.

Современный уровень развития вычислительных технологий позволяет реализовывать не только достаточно простые однотемпературные и многотемпературные модели химического взаимодействия (формула Аррениуса, модель Парка [1], альфа-модель Русанова–Фридмана [2], CVCV-модель Кнаба [3]), но и более точные, учитывающие колебательное и электронное возбуждение молекул. Однако большинство существующих моделей не позволяет учитывать колебательное и электронное возбуждение продуктов реакции и партнеров по столкновению, а также приоритетный порядок протекания реакций из высоких возбужденных состояний.

В нашей недавней работе [4] было предложено обобщение широко известной модели Гринора–Маррона [6], позволяющее за счёт оптимального выбора параметра модели  $U$  получить удовлетворительное совпадение результатов расчёта поуровневых коэффициентов скорости диссоциации с данными траекторных расчётов для реакций в воздухе. Для обменных реакций в работе [5] нами было проведено обобщение модели Алиата [7], что дало возможность учитывать колебательное возбуждение продукта реакции; предложен набор параметров для моделирования реакций Зельдовича с учётом колебательного возбуждения продуктов реакций.

Цель данной работы — провести обобщение формулы Кнаба [3] для поуровневых химических реакций с целью учёта колебательного и электронного возбуждения как двухатомных, так и многоатомных молекул, а также приоритетного протекания химических реакций из более высоких возбужденных состояний. На основе обобщенной формулы построен алгоритм оптимального выбора параметра, отвечающего за неравновесность протекания процессов.

Получен набор параметров для реакций в воздухе, обеспечивающий хорошее совпадение с доступными данными квазиклассических траекторных расчётов.

Предложенная нами модель сравнивается с моделями Старика [8], Тринора-Маррона [6] и Алиата [7]. Показано, что модели Тринора-Маррона и Алиата являются частными случаями представленной модели. Проводится анализ двухтемпературных коэффициентов скорости реакций, полученных из соответствующих поуровневых коэффициентов путем осреднения с распределением Больцмана с колебательной температурой, отличной от температуры газа.

Для реакций с участием молекул углекислого газа проведена серия расчётов поуровневых коэффициентов скорости реакций с учётом колебательного возбуждения разного количества молекул, участвующих в реакции: только основного реагента, основного реагента и одного продукта, обоих реагентов, обоих реагентов и одного продукта, всех молекул, участвующих в реакции. Полученные коэффициенты осредняются с неравновесным распределением Больцмана для оценки влияния учёта колебательного возбуждения разных участников реакции на многотемпературные коэффициенты скорости реакций. На основе полученных данных даны рекомендации по выбору достаточной степени детализации при проведении поуровневых расчётов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-11-00041.

## Литература

- [1] C. Park, J.T. Howe, R.L. Howe, R.L. Jaffe, and G.V. Candler. Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions, II: Mars entries. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 8 (1): 9–23, 1994.
- [2] V.D. Rusanov and A.A. Fridman. *Physics of chemically active plasma*. Nauka, Moscow, 1984.
- [3] O. Knab, H.H. Fruhauf, and E.W. Messerschmid. Theory and validation of the physically consistent coupled vibration-chemistry-vibration model. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 9(2): 219–226, 1995.
- [4] E. Kustova, E. Nagnibeda, G. Oblapenko, A. Savelev, I. Sharafutdinov. Advanced models for vibrational-chemical coupling in multi-temperature flows, *Chem. Phys.* 464 (2016) 1–13.
- [5] E. Kustova, A. Savelev, O. Kunova. Rate coefficients of exchange reactions accounting for vibrational excitation of reagents and products, *AIP Conf. Proc.* 1959 (2018) 060010. <https://doi.org/10.1063/1.5034671>
- [6] P. Marrone, C. Treanor. Chemical relaxation with preferential dissociation from excited vibrational levels, *Phys. Fluids* 6 (9) (1963) 1215.
- [7] A. Aliat. State-to-state dissociation-recombination and chemical exchange rate coefficients in excited diatomic gas flows, *Physica A* 387 (2008) 4163–4182.

- [8] I. V. Arsentiev, B. I. Loukhovitski, A. M. Starik. Application of State-to-State Approach in Estimation of Thermally Nonequilibrium Reaction Rate Constants in Mode Approximation. Chem. Phys. 2012, 398, 73–80.

## Восстановление локальной неравновесной функции распределения с помощью метода Грэда и метода Чепмена–Энскога

*Тимохин М.Ю., Рузмаков Д.И.*

*timokhin@physics.msu.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* неравновесные газовые течения, динамика разреженного газа, методы расширенной газодинамики, моментный метод Грэда, метод Чепмена–Энскога.

Физическая неравновесность течения газа связана с наличием сильного отличия функции распределения молекул от равновесной функции распределения Максвелла. Существенные отличия появляются в случае малого количества столкновений молекул между собой. То есть когда средняя длина свободного пробега молекул оказывается сравнима с характерными линейными размерами решаемой задачи. Такой режим течения называют переходным от континуального к свободно-молекулярному. В таком режиме перестают быть применимы классические уравнения Навье–Стокса [1]. Естественной альтернативой континуальному подходу здесь является кинетический подход. К ним относятся метод прямого статистического моделирования Монте–Карло (ПСМ) или детерминистическое решение уравнения Больцмана или кинетических модельных уравнений [1, 2]. Сложность применения кинетического подхода для умеренно разреженного газа заключается в высокой требовательности перечисленных моделей и методов к вычислительным ресурсам. Другой возможный путь учёта неравновесности — уравнения расширенной газовой динамики. К ним относят уравнения Барнетта и их модификации, полученные из кинетического уравнения Больцмана с помощью метода Чепмена–Энскога [3], а также моментные уравнения Грэда [4]. Преимущество расширенной газовой динамики заключается в том, что для описания течения, по-прежнему, используется континуальный подход уравнений в частных производных. Учёт большей неравновесности функции распределения с помощью разложения по малому параметру (уравнения Барнетта) и разложения по полиномам Эрмита (моментный метод) позволяет заметно расширить область применимости континуального подхода описания в сторону разреженности (большого отличия функции распределения молекул от равновесного) по сравнению с уравнениями Навье–Стокса.

Основной задачей методов расширенной газодинамики является корректное описание умеренно неравновесных течений на макроскопическом уровне при значительно меньшей требовательности к вычислительным ресурсам и вычислительному времени по сравнению с кинетическими подходами. В то же время вопрос степени адекватности применения континуальных методов для качественного и количественного описания микроскопического уровня до сих пор остаётся открытым [6].

В данной работе продолжено исследование возможности восстановления неравновесной функции распределения по известным локальным макропараметрам газа [7].

На примере рассмотрения аналитического решения Мотт–Смита [8] для одномерной ударной волны произведено восстановление локальной функции распределения при различной степени неравновесности с помощью приближения разложения Грэда [4, 5] и Чепмена–Энскога.

Научное исследование проведено при поддержке Российского научного фонда, грант №20-71-00114.

## Литература

- [1] Kogan M. N. Rarefied gas dynamics, New York: Plenum, 1969.
- [2] Shoev G. V., Timokhin M. Yu., Bondar Ye. A. On the total enthalpy behavior inside a shock wave. *Physics of Fluids*, Vol. 32, 2020. P. 041703 doi: 10.1063/5.0005741
- [3] Чепмен С., Каулинг Т. Д.; Математическая теория неоднородных газов. / пер. с англ. М: Издательство иностранной литературы, 1960.
- [4] Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 2, 1949, pp. 331–407. doi: 10.1002/cpa.3160020403
- [5] Struchtrup H., Torrilhon M. Regularization of Grad's 13 moment equations: Derivation and linear analysis. *Physics of Fluids*, Vol. 15, 2003. pp. 2668–2680. doi: 10.1063/1.1597472
- [6] Cai Z., Torrilhon M. On the Holway-Weiss debate: Convergence of the Grad-moment-expansion in kinetic gas theory. *Physics of Fluids*, Vol. 31, 2019. P. 126105 doi: 10.1063/1.5127114
- [7] Bondar Ye., Shoev G., Kokhanchik A., Timokhin M. Nonequilibrium velocity distribution in steady regular shock-wave reflection. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2132, 2019. P. 120005 doi: 10.1063/1.5119618
- [8] Mott-Smith H. M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave. *Physical Review*, 1951, Vol. 82. pp. 885–892.

## Секция 5

Механика деформируемого  
твёрдого тела

*Mechanics of Solids*

## On the effective elastic properties of materials with mutually perpendicular systems of parallel cracks

*Abakarov A.M., Pronina Y.G.*

*st046811@student.spbu.ru, y.pronina@spbu.ru*

Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Keywords:* crack density, crack interaction, effective elastic properties

*Ключевые слова:* плотность трещин, взаимодействие трещин, эффективные упругие свойства

The analysis of effective elastic properties of cracked solids is of obvious interest for material science, geophysics and mechanical engineering. The effective elastic or conductive properties are often expressed in terms of crack density parameter [1]. For randomly oriented cracks, Bristow (1960) introduced a scalar crack density parameter, which – in 2-D – is defined as

$$\rho = \left[ \sum_i (l^{(i)})^2 \right] / A,$$

where  $2l^{(i)}$  is the length of  $i$ th crack,  $A$  is the representative area. Vakulenko and Kachanov (1971) generalized this concept to arbitrary crack orientation distribution by introducing the concept of crack density tensor

$$\alpha = \frac{1}{A} \sum_i (l^2 \mathbf{nn})^{(i)} = \rho_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \rho_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2,$$

where  $\mathbf{n}$  is normal to the crack,  $\rho_1, \rho_2$  and  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  are principal values and principal unit vectors of  $\alpha$ . Approximation of noninteracting cracks, commonly used for determination of effective properties, works good up to relatively high crack densities, provided the location of crack centers are random [2]. Recently, the authors of [3] confirmed the hypothesis that the effect of crack interactions on the overall anisotropy is negligible for crack density up to 0.8 (even though the effect on the overall elastic constants may be strong), provided crack centers are located randomly. If locations of crack centers are nonrandom, then the crack interaction can be strong causing the noticeable anisotropy of effective properties of the material even for equal eigenvalues,  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , of the crack density tensor. In this paper we examine the effect of interaction of two mutually perpendicular systems of parallel cracks on the effective elastic moduli of the material with various distributions of crack centers in a representative area while their densities,  $\rho_1, \rho_2$ , remain constant.

The considered cracks form a doubly periodic lattice, the unit cell of which is a rectangle with sides of length  $a_x$  and  $a_y$ . The periods  $a_x$  and  $a_y$  are varied so that

dense and sparse configurations of different shape could be compared (ratio  $a_x/a_y$  is set to be equal to 1, 2, and 4). For each lattice, several types of cracks distributions are considered. The vertical cracks have the fixed length  $2l_y$  and are located in the centers of the vertical sides (of length  $a_y$ ) of each cell — one crack per each vertical side. For the family of horizontal cracks, several distributions are realized: with  $M$  cracks of the length  $2l_x = 2l_y/\sqrt{M}$  per each horizontal side, where  $M$  is varied from 1 to 4. Such choice of  $l_x$  does not change the density tensor, so that  $\rho_x = \rho_y$  for all the configurations. Moreover, we consider horizontal cracks with collinear and stacked arrangements. The effective elastic moduli for two mutually perpendicular systems of parallel cracks are also compared with those for only one system.

The problem is solved by using the Kachanov method [2], which allows avoiding numerical solution of integral equations in the problems of finite multi-crack arrays. The idea of formulation of algebraic equations instead of integral ones was also used for solids with holes and cavities, e.g. in [4, 5]. The size of crack arrays for numerical analysis was chosen to arrive at a compromise between competing processes caused by an increase in the number of cells: reduction in edge effect and increase in computational costs [6].

The analysis confirms strong influence of different parameters of crack distribution on the orthotropy of effective elastic properties of cracked solids when the crack densities remain constant and reveals the role of interaction of differently oriented and located cracks.

## References

- [1] Kachanov M., Mishakin V. V. On Crack Density, Crack Porosity, and the Possibility to Interrelate Them. *International Journal of Engineering Science*, vol 142, 2019. pp. 185–189. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.06.010
- [2] Kachanov M. Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems. *Advances in Applied Mechanics*, vol 30(C), 1993. pp. 259–445. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70176-5
- [3] Lapin R. L., Kuzkin V. A., Kachanov M. L On the anisotropy of cracked solids. *International Journal of Engineering Science*, vol 124, 2018. pp. 16–23 doi: 10.1016/j.ijengsci.2017.11.023
- [4] Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 104–114.
- [5] Пронина Ю. Г. Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 3. С. 118–128.
- [6] Abakarov A., Pronina Y. On Edge Effect for a Finite Doubly Periodic System of Perpendicular Cracks. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer. in press.

## Изменение механических свойств полимерных композитов, содержащих фотоактивные неорганические компоненты, под воздействием света солнечного диапазона

*Артемов Ю.М., Орехов А.В., Павилайнен Г.В.*

*yurim54@yandex.ru, a\_v\_orehov@mail.ru, g\_v\_pavilaynen@mail.ru*

*Санкт-Петербургский государственный университет,*

*199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9*

*Ключевые слова:* полимерные композиты, оксиды металлов, солнечный свет.

Всестороннее и глубокое изучение свойств полимеров в последние годы привело к созданию новых материалов — композитов на основе органических полимеров, которые теперь быстро вытесняют из многих сфер применения традиционные материалы: стали, металлы, керамику и пр. Более того, им нет равных в таких областях как космонавтика, автомобилестроение, медицина [1].

Введение в объём или нанесение на поверхность полимера оксидов металлов, как правило в виде наноразмерных частиц, позволяет модулировать его оптические и электрофизические свойства, и в результате найти новые применения. В частности для отсекаания УФ-части или отражения ИК-части солнечного излучения применяются диоксид титана ( $\text{TiO}_2$ ) или титанаты (например,  $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{SrTiO}_3$  и др.) [2]. При этом не всегда учитываются последствия поглощения света частицами оксида. Есть представление, что энергия поглощённого солнечного света ближнего УФ-диапазона (длины волн короче 400 нм, примерно 4-5% по энергии от всего светового излучения, падающего на поверхность Земли) рассеивается в объёме и поверхности материала, и этот процесс заметно не влияет на свойства полимеров [3]. Однако, такой подход не учитывает полупроводниковую природу оксидов и, следовательно, возможность перехода их при поглощении квантов света в электрон-возбуждённое состояние, выход из которого вероятен в том числе и через окислительно-восстановительные реакции с молекулами-соседями [4]. Последнее ведёт к изменениям в полимере: разрыв или образование новых связей в пространственных цепочках, возможное разрыхление материала с последующим его охрупчиванием и др., которые сказываются на физических и механических свойствах материала. Исследования этого процесса и его влияния на прочностные свойства полимерных композитов известны, но немногочисленны. Так Kamrannejad et al. [5], изучали изменения величины модуля Юнга при облучении ближним УФ-светом композита полипропилен-диоксид титана. Авторы пришли к выводу о его частичной деградации и дали рекомендации как её избежать.

Вопрос же математического моделирования изменения механических свойств полимерных композитов (содержащих фотоактивные неорганические компо-



ненты) под воздействием света солнечного диапазона, можно считать открытым. Известны только простые математические модели, которые описывают процессы фотодеградации и влияния свойств катализатора на разложение низкомолекулярных органических веществ, при очистке от загрязнений воды или атмосферного воздуха, например, [6, 7].

Однако, очевидна необходимость построения математических моделей для изучения изменения именно механических свойств полимерных композитов, содержащих фотоактивные неорганические компоненты, в зависимости от интенсивности и времени их облучения солнечным светом. Такие модели, кроме параметров и времени облучения, должны учитывать особенности химического состава полимера, геометрические характеристики образца и тип силового воздействия.

Исследование проведено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-23035\_мк) в Лаборатории СПбГУ «Фотоактивные нанокompозитные материалы».

## Литература

- [1] Isiaka Oluwole Oladele, Taiwo Fisayo Omotosho, Adeolu Adesoji Adediran “Polymer-Based Composites: An Indispensable Material for Present and Future Applications” // *International Journal of Polymer Science*, vol. 2020, Article ID 8834518, 12 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/8834518>
- [2] Zepeng Mao, Zhangbin Yanga, Jun Zhang SrTiO<sub>3</sub> as a new solar reflective pigment on the cooling property of PMMA-ceramic composites // *Ceramics International* Volume 45, Issue 13, September 2019, Pages 16078-16087 <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.05.124>
- [3] Shuang Shi, Dongya Shen, Tao Xu, Yuqing Zhang Thermal, optical, interfacial and mechanical properties of titanium dioxide/shape memory polyurethane nanocomposites // *Composites Science and Technology* Volume 164, 18 August 2018, Pages 17–23 <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2018.05.022>
- [4] Гуревич Ю.Я., Плесков Ю.В. Фотоэлектрохимия полупроводников. М.: Наука, 1983. 312 с.
- [5] Mohammad Mehdi Kamrannejad, Amin Hasanzadeha, Nasim Nosoudi, Lee Mai, Ali Akbar Babaluo Photocatalytic Degradation of Polypropylene/TiO<sub>2</sub> Nano-composites Materials // *Research-Ibero-American Journal of Materials* 2014 Volume: 17 Issue: 4 Pages: 1039–1046 <http://dx.doi.org/10.1590/1516-1439.267214>
- [6] H. Ted Chang, Nan Min Wu, Faqing Zhu A Kinetic Model for Photocatalytic Degradation of Organic Contaminants in a Thin Film TiO<sub>2</sub> Catalyst // *Water Research* 34(2), February 2000, pp. 407–416. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(99\)00247-X](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(99)00247-X)
- [7] Wipada Sanongraj, Yongsheng Chen, John C. Crittenden, Hugo Destailats, David W. Hand, David L. Perram, Roy Taylor Mathematical Model for Photocatalytic

Destruction of Organic Contaminants in Air // Journal of the Air & Waste Management Association Volume 57, Issue 9, 2007, pp. 1112-1122, Published online: 24 Feb 2012, <https://doi.org/10.3155/1047-3289.57.9.1112>

## Исследование длительного старения ударопрочных полистиролов

*Арутюнян А.Р.*

*a.arutyunyan@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* ударопрочный полистирол, длительное естественное старение, ползучесть, уравнение Максвелла, эффективное время.

Были исследованы различные марки ударопрочных полистиролов (УПС) на ползучесть при комнатной температуре и постоянной растягивающей силе в течение 30 суток и не были разрушены. После естественного старения в течение 40 лет в лабораторных условиях образцы также были испытаны на ползучесть. При этом они разрушались в диапазоне времен от 8 до 78 минут в зависимости от марки УПС. Для описания экспериментальных кривых ползучести образцов УПС используется модифицированный вариант уравнения Максвелла, записанного в шкале эффективного времени. Наблюдается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных кривых ползучести.

### **Введение.**

Полимерные и композиционные материалы на их основе находят широкое применение в различных областях машиностроения, авиастроения, ракетостроения, а также в медицине и строительстве благодаря своей лёгкости, высокой коррозионной стойкости, а также водо- и теплостойкости, дешевизне и др. В то же время физико-механические характеристики данных материалов изменяются после их длительной эксплуатации, что в значительной степени определяется процессом старения [1]–[4]. В связи с этим необходимы исследования процессов старения этих материалов. Ударопрочные полистиролы (УПС), исследуемые в данной работе, имеют широкий спектр применения, например, они используются при изготовлении дверей, упаковочных контейнеров, внутренней облицовки вагонов и самолётов. Поэтому исследования длительного процесса старения таких композиционных материалов является актуальным. УПС представляют собой полимер-полимерные матричные композиты с полистирольной матрицей, в которой присутствуют каучукообразные включения размером 0,5–5 мкм и объемной концентрацией в пределах 20–40%.

В работе [5] было исследовано влияние длительного естественного старения на механические свойства при растяжении шести различных марок УПС.

### **Экспериментальные результаты и их описание.**

Образцы различных марок УПС были испытаны в условиях ползучести при растягивающем усилии, равном 0,9 от предельной прочности на растяжение без старения и после длительного естественного старения в лабораторных условиях при комнатной температуре в течение 40 лет. Для всех марок УПС без старения (кроме марки УПМ 03Л) образцы испытывались более 30 суток и не были разрушены. После естественного старения в течение 40 лет образцы разрушались в интервале времен до разрушения от 8 до 78 минут, в зависимости от марки УПС. Образцы марки УПМ 03Л без старения разрушались при временах порядка 541 мин., тогда как образцы после старения разрушались через 8 мин. Таким образом, для образцов после длительного старения время до разрушения при ползучести уменьшается более чем в 67,5 раз.

Для описания полученных экспериментальных кривых ползучести в качестве реологического уравнения используется модифицированное уравнение Максвелла, записанное в шкале эффективного времени [4]. Параметр эффективного времени в общем случае способен описать взаимосвязанные деформационные и физико-химические процессы и их развитие в шкале деформационного и химического времени. В этом отличие данного параметра от известных температурно-временных и полимеризационных параметров, используемых в механике полимеров [6, 7]. Наблюдается хорошее соответствие полученных теоретических и экспериментальных кривых ползучести.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00146).

### **Литература**

- [1] Struik L. C. E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Sci. Publ. Comp., 1978. 229 p.
- [2] Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. McGraw-Hill. New York, 1963. Vol. 2. 321 p.
- [3] Филатов И. С. Климатическая устойчивость полимерных материалов. М.: Наука., 1983. 215 с.
- [4] Арутюнян Р. А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та., 2004. 252 с.
- [5] Arutyunyan A.R. Experimental and theoretical studies of the effect of long-term natural aging on the mechanical properties of high impact polystyrene // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1474. 012004.
- [6] Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов. М.: Наука., 1972. 327 с.

- [7] Valanis K. C. On the foundation of the endochronic theory of viscoplasticity // *Archiwum mechaniki stosowanej*. 1975. Vol. 27. N 5-6. pp. 857–868.

## О потере устойчивости симметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин

*Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.*

*s.bauer@spbu.ru, e.voronkova@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* круглая пластина, потеря устойчивости, неоднородность.

### Введение

Впервые появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин и пологих сферических оболочек было рассмотрено Пановым и Феодосьевым [1], и позже обсуждалось многими авторами [2]–[5].

В настоящей работе обсуждается влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у неоднородной круглой пластины.

### Постановка задачи

Рассмотрим круглую изотропную пластину радиуса  $R$ , нагруженную равномерно распределённым внешним нормальным давлением. Полагая, что модуль упругости оболочки  $E = E(r)$  меняется при удалении от центра панели к ее краю, выпишем разрешающую систему уравнений в виде [5]

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w + D'L_1^+(w) + D''L_2^+(w) &= P + L(w, F) - \Delta F/R, \\ \Delta\Delta F/E + (1/E)'L_1^-(F) + (1/E)''L_2^-(F) &= -hL(w, w)/2 + \Delta w/R, \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial r, \quad (\cdot) = \partial(\cdot)/\partial \theta,$$

где  $r, \theta$  — введенные полярные координаты,  $w(r, \theta), F(r, \theta)$  — искомые функция нормального прогиба и функция усилий,  $P$  — нормальное внешнее давление,  $D(r) = E(r)h^3/12(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жесткость оболочки.  $\Delta$  — оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах, дифференциальные операторы  $L, L_i^\pm$  ( $i = 1, 2$ ) — линейные дифференциальные операторы [5].

Граничные условия на краю  $r = R$  имеют вид

$$w = w' = k_u u + T_r = S = 0, \quad (2)$$

где  $T_r, S$  — тангенциальные усилия,  $k_u$  — коэффициент упругости заделки.

Схема поиска несимметричного решения аналогична, изложенным в работах [3, 5]. Полагая, что несимметричная составляющая решения носит периодический характер, численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой происходит бифуркация в несимметричное состояние.

## Результаты и выводы

Расчеты значений критической нагрузки для неоднородных пластин представлены в таблице 1. За  $p_{cr}^0 = 64453$  обозначена критическая нагрузка для однородной круглой пластины со свободно перемещающимся в радиальном направлении краем ( $k_u = 0$ ). Увеличение модуля упругости пластины к краю приводит к повышению значений нагрузки, при которой происходит переход в несимметричное состояние, по сравнению с однородной пластиной. При этом число волн в форме потери устойчивости не меняется при росте параметра неоднородности. Уменьшение модуля упругости пластины к краю снижает нагрузку, при которой происходит бифуркация в неосесимметричное состояние, только если сопротивление перемещению точек края в радиальном направлении отсутствует ( $k_u = 0$ ) или достаточно слабое ( $k_u = 0.05$ ).

Таблица 1. Критическая нагрузка  $p_{cr}/p_{cr}^0$  и волновое число  $n$  для неоднородной пластины  $E(r) = E_0(1 + qr^3)$ .

	$q = -0.9$	$q = -0.5$	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$
$k_u = 0$					
$p^{cr}/p_{cr}^0$	0.51	0.76	1	1.32	1.55
Число волн, $n$	16	14	14	14	14
$k_u = 0.05$					
$p^{cr}/p_{cr}^0$	1.27	1.39	1.63	2.01	2.28
Число волн, $n$	17	16	15	15	15
$k_u = 0.15$					
$p^{cr}/p_{cr}^0$	5.04	3.99	3.98	4.35	4.72
Число волн, $n$	21	19	19	18	18

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00208 и с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Обсерватория экологической безопасности».

## Литература

- [1] Панов Д.Ю., Феодосьев В.И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // Прикладная математика и механика. 1948. № 12. С. 389–406.
- [2] Морозов Н.Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой // Известия высших учебных заведений. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
- [3] Cheo L.S., Reiss E.L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Q. J. Mech. Appl. Math. 1973. Vol. 31. N. 1. pp. 75–91.

- [4] Coman C.D., Bassom A.P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap // *Int. J. Nonlin. Mech.* 2016. Vol. 81. pp. 8–18.
- [5] Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления // *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020. № 1. С. 38–46.

## Об отслоении неоднородного полимеркомпозитного покрытия

*Богачев И.В., Ватульян А.О.*

*bogachev89@yandex.ru*

Южный федеральный университет

344006, Российская Федерация, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42

*Ключевые слова:* полимеркомпозиты, покрытия, отслоения, неоднородность.

В настоящее время широкое распространение получают покрытия, выполненные из полимеркомпозитных материалов. Эти материалы имеют существенно неоднородные функционально-градиентные [1] свойства, и для них характерны реологические эффекты и процессы последействия и релаксации. Подобные покрытия чаще всего применяются в качестве защитных и изоляционных, в частности, в объектах критической инфраструктуры, и обнаружение возникающих в них дефектов и отслоений, а также определение факторов, которые привели к их возникновению, является важной прикладной задачей. Использование полимеркомпозитных покрытий требует совершенствования математических моделей [2], описывающих их деформирование, а также создания эффективных и доступных неразрушающих методик диагностики их состояния.

В данной работе рассмотрен наиболее часто встречающийся на практике случай, когда упругий объект (например, слой из металла) покрыт неоднородным полимеркомпозитным покрытием, обладающим выраженными вязкоупругими свойствами. При этом характеристики самого основного объекта (подложки) в рамках модели также могут быть переменными. В работе механические характеристики подложки и покрытия считаются функциями поперечной координаты. Считалось, что в процессе эксплуатации между подложкой и покрытием образовалась некоторая область отслоения. В рамках постановки задачи в качестве граничных условий выбраны жёсткое защемление нижней грани слоя и зондирующая периодическая нагрузка в заданной области на поверхности покрытия. Для описания вязкоупругих свойств покрытия использована трёхпараметрическая модель стандартного вязкоупругого тела [3]. Ввиду того, что рассматривается установившийся режим колебаний, уравнения колебаний вязкоупругого покрытия записаны с помощью принципа соответствия, в рамках

которого упругие модули заменяются на функции комплексных модулей, зависящих не только от пространственных координат, но и от частоты колебаний. Для решения основной задачи рассмотрены две вспомогательные задачи — для подложки и покрытия, с модифицированными граничными условиями. Для решения двумерных вспомогательных задач использовано преобразование Фурье, отделены вещественные и мнимые части, и решение строилось в виде линейной комбинации задач Коши, решаемых методом пристрелки. Далее введены функции раскрытия, характеризующие разность между оригиналами функций смещения на границе слоев в области отслоения, и из условия равенства функций напряжений (стыковки) покрытия и подложки получены выражения для трансформант напряжений на границе, записанные относительно трансформант функций раскрытия. Для определения оригиналов функций раскрытия использованы условия равенства нулю напряжений в области отслоения, из которых, путем обращения преобразования Фурье, переводящего произведение функций в свертку, сформулированы соответствующие операторные соотношения в виде интегральных уравнений 1-го рода с сингулярными ядрами. Ядра соотношений являются интегралами по бесконечному промежутку, для их вычисления используются специальные подходы [4], основанные на вычислении их в главном значении по Коши и Адамару. Далее, с использованием найденных оригиналов функций раскрытия построена схожая схема определения оригиналов функций смещения на верхней границе покрытия. Информация о смещении на поверхности (акустическом отклике) является существенно важной, так как она может быть использована для решения обратных задач идентификации характеристик покрытия и отслоения. Проведен ряд вычислительных экспериментов по исследованию влияния различных наборов исходных параметров задачи, в частности, мгновенных и длительных модулей, а также времени релаксации на функции раскрытия и смещения на верхней границе слоя для разных видов нагрузки. Подобный анализ проведен и для амплитудно-частотных характеристик.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18-11-00069).

### Литература

- [1] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // *Materials Science and Engineering: A*. 2003. Vol. 362. pp. 81–106.
- [2] Bogachev I.V., Vatulyan A.O. On modeling bodies with delaminating coatings taking into account the fields of prestresses // *PNRPU Mechanics Bulletin* 2020. N 1. pp. 5–16.
- [3] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир., 1974. 338 с.
- [4] Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир., 1978. 520 с.

## Учёт нелинейности поверхностного натяжения при закритических деформациях нанопластины

*Бочкарёв А.О.*

*a.bochkarev@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* поверхностное натяжение, нелинейные деформации фон Кармана, закон Юнга–Лапласа.

Двумерные модели пластин и оболочек с учетом поверхностных напряжений получили широкое распространение в наномеханике. Континуальный подход к описанию поверхностных эффектов находит своё подтверждение и в результатах атомистического моделирования, как, например, поверхностная упругость Гуртина–Мёрдоха [1], исследованная в работе [2]. Неотъемлемым атрибутом поверхностных напряжений является условие их сопряжения с объёмными напряжениями твёрдого тела, выражаемое законом Юнга–Лапласа. При переходе к двумерным моделям в тонкостенных наноструктурах этот закон определяет формат вхождения поверхностных напряжений в осредненные по толщине уравнения равновесия.

Работа [3] относится к одной из первых по нелинейному изгибу нанопластин, учитывающей поверхностную упругость. Несмотря на допущенную ошибку, приведшую к опущению условия сопряжения Юнга–Лапласа в поперечном направлении, в ней были обозначены основные элементы (эффективные мембранные силы и изгибающие моменты, определяющие соотношения для них), которые использовались в последующих моделях, учитывающих дополнительные физические и механические эффекты. Однако, если упругая часть поверхностных напряжений как в самой работе [3], так и в последующих рассматривалась с квадратичными членами деформаций фон Кармана, то поверхностное натяжение — только с линейными. И первая ошибка, и вторая неточность были исправлены в работах [4, 5], где было показано, что корректный учет закона Юнга–Лапласа в поперечном направлении приводит к дополнительному линейному слагаемому в уравнении изгиба, а учет нелинейности поверхностного натяжения — к дополнительной квадратичной неоднородности в уравнениях равновесия внутренних сил и в определяющих соотношениях для них. Там же [4] было показано влияние нового линейного члена уравнения при нелинейном цилиндрическом изгибе: на максимальный прогиб, на частоту свободных колебаний и на критическую нагрузку при выпучивании. Данная работа посвящена изучению влияния дополнительной квадратичной неоднородности на закритическую деформацию выпученной нанопластины.



## 1. Постановка задачи.

Как было показано в [4], двумерная модель сложного изгиба нанопластины с учётом поверхностных напряжений Гуртина–Мёрдоха [1] с квадратичными членами поверхностного натяжения при гипотезе Кирхгоффа приводится к обновленной системе уравнений фон Кармана

$$\begin{cases} 0 = T_{\beta\alpha}^* - \tau_0(w_{,\alpha}^2)_{,\beta} + P_{\beta}^*, \\ D^* \Delta \Delta w = 2\tau_0 \Delta w + T_{\beta\alpha}^* w_{,\beta\alpha} + m_{\alpha,\alpha}^* + P_3^* \end{cases} \quad (1)$$

относительно прогиба  $w$  и эффективных (с учётом поверхностных напряжений) мембранных сил  $T_{\beta\alpha}^*$ , где  $D^*$  — эффективная изгибная жесткость;  $\tau_0$  — остаточное поверхностное натяжение (параметр материала);  $P_i^*$ ,  $m_{\alpha}^*$  — эффективные внешние распределенные нагрузка и момент.

Известные определяющие соотношения для  $T_{\beta\alpha}^*$  [3], выраженные через эффективные тангенциальные жесткость  $C^*$  и коэффициент Пуассона  $\nu_t^*$ ,

$$T_{\beta\alpha}^* = 2\tau_0 \delta_{\beta\alpha} + 2\tau_0 (\nabla_s u^0)_{\beta\alpha} + C^* ((1 - \nu_t^*) \varepsilon_{\beta\alpha}^0 + \nu_t^* \delta_{\beta\alpha} \varepsilon_{\gamma\gamma}^0) \quad (2)$$

связывают их с деформациями  $\varepsilon^0$  и градиентом перемещения  $\mathbf{u}^0$  в срединной плоскости с учетом квадратичной нелинейности прогиба  $w$  [4]

$$\begin{cases} \varepsilon_{\beta\alpha}^0 = 0.5(u_{\beta,\alpha}^0 + u_{\alpha,\beta}^0 + w_{,\alpha} w_{,\beta}), \\ (\nabla_s u^0)_{\beta\alpha} = u_{\beta,\alpha}^0 - w w_{,\beta\alpha}, \\ (\nabla_s w)_{\alpha} = w_{,\alpha} + u_{\beta}^0 w_{,\beta\alpha}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассматривается закритическая деформация бесконечно длинной нанополосы, равномерно сжатой по краям, при двух вариантах опирания: свободном и заделке. Вдоль образующей полосы предполагается плоская деформация, и в такой постановке задача становится одномерной.

## 2. Результаты.

Показано, что в отличие от макропластины (без учета поверхностного эффекта), ненулевое решение для прогиба существует не только при критической Эйлеровой сжимающей нагрузке, но и за ней. Численно построенная ветвь решения за точкой бифуркации показала, что при свободном опирании величина сжимающей мембранной силы уменьшается по сравнению с критической, а при заделке — наоборот увеличивается. Такой эффект не моделируется для макропластины, поскольку система фон Кармана для данной задачи вырождается в линейное уравнение изгиба, которое имеет ненулевое решение только в точке бифуркации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ: проект № 18-01-00468.

## Литература

- [1] Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids // Int. J. Solids Struct., 1978. N14. P.431–440.
- [2] Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnol., 2000. N11. P.139–147.
- [3] Lim C.W., He L.H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness // Int. J. Mech. Sci., 2004. N46. P1715–1726.
- [4] Bochkarev A.O. On taking into account surface tension in models of nano-plate bending // Mech. Res. Comm., 2020. N106: 103521.
- [5] Bochkarev A.O. Comment on "On taking into account surface tension in models of nano-plate bending" // Mech. Res. Comm., 2020. N108: 103578.

## Stress concentration and distribution in an elastic body with a nearly circular hole

*Vakaeva A.B., Grekov M.A.*

*a.vakaeva@spbu.ru, m.grekov@spbu.ru*

Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Keywords:* nearly circular hole, perturbation method, stress concentration, stress distribution, plane elasticity

Stress concentration caused by different defects (such as holes and inclusions) existing in materials and structures is one of the reasons of devices failure. Apparently, it is not possible to obtain an exact analytical solution of an elastic boundary value problem for an arbitrary hole in an infinite plane. A hole the outside of which can be conformally mapped on a circle by a power function is an exception from the rule [1, 2]. The real hole or inhomogeneity has a shape which cannot be usually described by a conformal image. For example, so-called circular holes have practically relief surfaces slightly deviated from a circle and a circular shape of them is nothing but idealization [3]. In this connection, the study of stress concentration due to the presence of nearly circular holes is of primary importance for developing theoretical models of stress relaxation, plastic deformation and fracture in materials under external loading, for example, in the case of mechanochemical corrosion [4]. In the work [5], the perturbation method was used to solve the problem of a triple-junction pore of three-fold symmetry in a polycrystalline ceramic material. This method can be extended to a more complex problem of stress distribution in vicinity of the hole with an arbitrary shape. So, the aim of our work presented is to apply the boundary perturbation technique [5, 6] to the 2-D problem of elasticity on a nearly circular hole in an infinite plane and to study the stress concentration and distribution for some shapes of the hole.

Within the classical elasticity theory [1], we consider an infinite elastic body  $\Omega$  with a hole which is bounded by the free surface  $\Gamma$ . We treat the stress state around the hole as plain strain and introduce a dimensionless complex variable  $z = x_1 + ix_2$ , where  $i = \sqrt{-1}$  is the imaginary unit. In complex notation, the hole boundary is given by

$$\zeta = z|_{r=\rho} = \rho e^{i\theta} = (1 + \varepsilon f(\theta)) s, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (1)$$

where  $s = e^{i\theta}$ ,  $\rho$  is the position vector describing the hole boundary,  $\theta$  is the polar angle,  $\varepsilon$  is the small parameter which defines the maximum deviation of the surface from the circular one,  $|f| \leq 1$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . At  $\varepsilon \rightarrow 0$ , Eq. (1) gives the unit circle.

The boundary conditions on the hole free surface ( $\zeta \in \Gamma$ ) could be represented as

$$\sigma_n(\zeta) = [\sigma_{nn} + i\sigma_{nt}]_{r=\rho} = 0,$$

where  $\sigma_n$  is the traction at the area with the normal  $\mathbf{n}$ ,  $\sigma_{nn}$  and  $\sigma_{nt}$  are the normal and shear components, respectively, of the stress tensor with respect to the hole boundary.

Stresses  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) and the rotation angle  $\omega$  of a material particle are specified at infinity as

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\infty} = s_{ij}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \omega = 0. \quad (2)$$

The stress concentration and distribution around a defect in an elastic body is considered. The boundary perturbation method in the theory of plane elasticity is used to solve the problem of a nearly circular hole under remote loading in the first-order approximation. The complex potentials of the first-order approximation are obtained for an elliptic hole and a nearly circular hole the boundary of which deviates from the unit circle in the radial direction according to the cosine law. The solution was specified to the uniaxial tension of convex and concave rounded holes. The stress concentration on the hole surface and the stress distribution in vicinity of the hole along its symmetry axes are studied and discussed in detail. The numerical results, issued from the first-order approximation analytical solution, are presented for different types of the boundaries.

The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-00062).

## References

- [1] Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Leyden: Noordhoff, 1977.
- [2] Savin G. N. Stress Distribution Around Holes. NASA TT F-607. Washington: NASA, 1970. 997 p.

- [3] Vakaeva A. B., Shuvalov G. M., Kostyrko S. A., Grekov M. A. The finite element modeling of an elastic body with a nanometer surface relief // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2116. P. 290008.
- [4] Sedova O., Pronina Y. A new model for the mechanochemical corrosion of a thin spherical shell // EPJ Web of Conferences, 2016. Vol. 108. P. 02040.
- [5] Vakaeva A. B., Krasnitckii S. A., Smirnov A. M., Grekov M. A., Gutkin M. Y. Stress concentration and distribution at triple junction pores of three-fold symmetry in ceramics // Reviews on Advanced Materials Science, 2018. Vol. 57. N 1. pp. 63–71.
- [6] Vakaeva A. B., Grekov M.A. Effect of surface stresses in an elastic body with a curvilinear nanohole // Proceedings of The 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015. pp. 440–443.

## **О квазифронте планарной краевой волны в тонкой пластине при действии внезапно приложенной нагрузки на торце**

*Вильде М.В., Сурова М.Ю.*

*mv\_wilde@mail.ru, mzhilko@yandex.ru*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410012, Российская Федерация, Саратов, Астраханская ул., 83

*Ключевые слова:* нестационарные волны, краевые волны, асимптотические методы, квазифронт, пластина.

Гармонические волны, распространяющиеся вдоль свободного края пластины (краевые волны), к настоящему времени достаточно хорошо изучены (см., например, обзор [1]). Нестационарные волны, возникающие при действии внезапно приложенных или ударных нагрузок, характеризуются специфическими эффектами, требующими отдельного рассмотрения — такими, как распространение фронтов волн, переносящих разрывы того или иного рода. Для случая краевых волн эти эффекты до сих пор не рассматривались.

Целью данной работы является изучение распространения планарной краевой волны при действии нестационарной нагрузки, приложенной на торце пластины. Нагрузка считается равномерно распределенной по толщине и изменяющейся во времени по закону, описываемому функцией Хевисайда. Решение трёхмерной задачи теории упругости получено численно-аналитическим методом [2], основанным на применении интегральных преобразований и разложения по модам. Вклад планарной краевой волны выделен путём вычисления вычета в соответствующем полюсе. Отклик пластины на приложенную нагрузку изучается на примере проекций скоростей перемещения частиц на торце пластины на нормальное и касательное направления. Представлены результа-

ты численных расчётов, показывающие, что решение имеет вид сглаженного разрыва. Решение аналогичной задачи по теории обобщенного плоского напряженного состояния может быть получено в явном виде на основе асимптотической модели, построенной по аналогии с моделями для волны Рэлея из [3]. Оно имеет вид волны, переносящей разрыв на фронте, вид которого зависит от распределения приложенной нагрузки по координате, направленной вдоль края, и от выбора изучаемой проекции скорости. Таким образом, наблюдается явление, характерное для распространения нестационарной продольной волны в стержнях и пластинах [4, 5]: разрыв решения по элементарной теории соответствует быстро изменяющемуся, однако непрерывному решению в точной теории (размытие фронта волны сильного разрыва). Фронт волны по элементарной теории в таком случае называют квазифронтом [6].

Сглаживания решения в окрестности квазифронта краевой волны может быть описано аналитически с использованием уточненной асимптотической модели [7, 8], основанной на теории растяжения пластин с приведенной инерцией [6]. В этой теории учитывается следующий член асимптотического приближения трёхмерных уравнений теории упругости для тонкой пластины. Так же, как и в случае продольной волны, сглаженное решение может быть представлено в явном виде через функции Эйри. Однако если в случае стержня превышение первого максимума над амплитудой приложенного напряжения составляет примерно 25% [5], в случае краевой волны аналогичный максимум гораздо меньше (превышение составляет не более 5%).

В работе приводятся результаты расчётов для случаев равномерно распределённой и сосредоточенной нагрузок как по уточненной асимптотической модели, так и по трёхмерной теории упругости. Сравнение результатов показывает, что уточнённая модель верно описывает сглаживание решения в окрестности квазифронта на больших временах.

Исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-01-00673.

## Литература

- [1] Lawrie J., Kaplunov J. Edge waves and resonance on elastic structures: An overview // *Math. and Mech. of Solids*. 2012. V. 17, №. 1. pp. 4–16.
- [2] Wilde M.V., Golub M.V., Eremin A.A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // *Journal of Sound and Vibration*. 2019. V. 441. pp. 26–49.
- [3] Kaplunov J., Prikazchikov D. Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // *Adv. Appl. Mech.*. 2017. V. 50. pp. 1–106.
- [4] Graff K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1975. 649 с.
- [5] Работнов Ю. И. *Механика деформируемого твёрдого тела*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 712 с.

- [6] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 с.
- [7] Сурова М. Ю., Вильде М. В. Уточненная асимптотическая модель для описания планарной краевой волны в тонкой пластине // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 199–201.
- [8] Вильде М. В., Сурова М. Ю. Формулировка граничных условий и применение уточненной теории растяжения пластин для описания дисперсии планарной краевой волны // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.). В 2-х томах. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2018. Т. 2. С. 68–72.

## Теоретическое и экспериментальное исследование влияния внутреннего трения на распространение фундаментальной симметричной краевой волны

*Вильде М.В., Плешков В.Н., Сергеева Н.В.*

*mv\_wilde@mail.ru, vnp98@yandex.ru, knickknack@bk.ru*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012, Российская Федерация, Саратов, Астраханская ул., 83

*Ключевые слова:* упругие волны, краевые волны, пластина, метод матричных пучков, внутреннее трение.

Упругие волны, распространяющиеся вдоль края пластины или оболочки (краевые волны), представляют собой аналог волн Лэмба и, как и последние, могут быть использованы как средство неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкции [1]. К настоящему времени эти волны достаточно хорошо исследованы теоретически [2] на основе модели идеально упругого тела. В рамках этой теории распространение фундаментальных краевых волн происходит без затухания. Однако в недавних экспериментальных работах [3, 4] было обнаружено значительное затухание фундаментальной симметричной краевой волны при её распространении вдоль края пластины. Это явление можно объяснить только диссипативными процессами, которые феноменологически характеризуются с помощью понятия внутреннего трения [5]. Целью данной работы является исследование распространения симметричной фундаментальной краевой волны с учётом внутреннего трения. На низких частотах данная волна представляет собой аналог волны Рэлея [6] в теории обобщенного плоского напряженного состояния пластин. Расчёты по трёхмерной теории упругости [3]

показывают, что рассматриваемая волна обладает дисперсией, в отличие от решения по теории пластин. При изменении частоты от нуля до бесконечности скорость этой волны изменяется от скорости, определяемой по теории пластин, до скорости угловой волны в четвертьпространстве. С количественной точки зрения изменение скорости невелико, другими словами — эффекты геометрической дисперсии для данной волны малы. Это свойство может представлять интерес для экспериментального определения параметров внутреннего трения, используемых в методе механической спектроскопии [5].

Работа состоит из двух частей — теоретической и экспериментальной. В первой части влияние внутреннего трения изучается путем вычислительных экспериментов на основе модели наследственно-упругой среды Работнова. Для описания распространения волн применяется как уточненная теория растяжения-сжатия пластин, так и трёхмерная теория упругости. Показано, в области применимости теории пластин эти две теории дают близкие результаты, в том числе и для затухания. Приводятся результаты расчётов по трёхмерной теории в широком диапазоне частот, показывающие, что дисперсия симметричной краевой волны оказывает малое влияние на зависимость затухания от частоты.

В экспериментальной части затухание изучаемой волны определяется на основе данных, полученных с помощью лазерного виброметра в экспериментах по возбуждению волн пьезоэлектрическим актуатором, приклеенным на краю пластины [3, 4]. Для определения затухания используются два метода: метод матричных пучков [7], позволяющий определить комплексные волновые числа в зависимости от частоты, и метод определения затухания на основании ширины резонансного пика в частотно-волночисловом спектре (FWA, [8]). Оба метода, не требующие предварительного задания какой-либо теоретической модели внутреннего трения, дают близкие результаты, при этом в экспериментах на алюминиевой пластине толщиной 5 мм наблюдается явление, напоминающее пик внутреннего трения на частоте приблизительно 500 кГц. Сравнение с результатами теоретических расчётов показало, что модель наследственно-упругой среды Работнова даёт наиболее похожую картину поведения внутреннего трения при выборе параметров, соответствующих пику на упомянутой частоте, с параметром сингулярности  $\alpha = 0$  (стандартное вязкоупругое тело).

Исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-01-00673.

## Литература

- [1] Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided wave based structural health monitoring: A review. // *Smart Materials and Structures*. 2016. V. 25, №. 5. P. 053001.
- [2] Lawrie J., Kaplunov J. Edge waves and resonance on elastic structures: An overview. // *Math. and Mech. of Solids*. 2012. V. 17, №. 1. pp. 4–16.

- [3] Wilde M.V., Golub M.V., Eremin A.A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate. // Journal of Sound and Vibration. 2019. V. 441. pp. 26–49.
- [4] Wilde M.V., Golub M.V., Eremin A.A. Experimental observation of theoretically predicted spectrum of edge waves in a thick elastic plate with facets // Ultrasonics. 2019. V. 98. pp. 88–93.
- [5] Головин И.С. Внутреннее трение и механическая спектроскопия металлических материалов: учеб. М.: Дом МИСиС, 2012. 247 с.
- [6] Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885/1886. V. 17. pp. 4–11.
- [7] Schopfer F., Binder F., Wostehoff A., Schuster T., et al. Accurate determination of dispersion curves of guided waves in plates by applying the matrix pencil method to laser vibrometer measurement data. // CEAS Aeronautical Journal. 2013. V. 4, №. 1. pp. 61–68.
- [8] Tian Z., Yu L. Lamb wave frequency-wavenumber analysis and decomposition. // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2014. V. 25, №. 9. pp. 1107–1123.

## Собственные колебания неоднородных тонких пластин

*Васильев Г.П., Смирнов А.Л.*

*a.l.smirnov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* колебания пластин, круглые и квадратные пластины, метод возмущений

Целью исследования является анализ влияния неоднородности на собственные поперечные колебания тонких пластин при помощи асимптотических методов, когда толщину или/и жёсткость пластины можно считать почти постоянными. Частным случаем неоднородности представляется пластина с относительно малым отверстием, когда в качестве малого параметра используется размер отверстия. Результаты расчётов по асимптотическим формулам, полученным с помощью метода возмущений, сравниваются с численными результатами конечно-элементного анализа в пакете COMSOL.

Анализ начинается с рассмотрения влияния геометрических и физических неоднородностей на поперечные колебания круглой тонкой пластины. Колебания пластины описываются линейными уравнениями Кирхгофа–Лява, записанными в безразмерной форме. После разделения переменных полученные од-



нородные обыкновенные дифференциальные уравнения вместе с однородными граничными условиями образуют граничную задачу на собственные значения.

Для собственных частот колебаний пластины, толщина которой  $h(r)$  и/или модуль Юнга  $E(r)$  зависят только от радиальной координаты, асимптотические формулы получены с помощью метода возмущений (см. [1]).

В качестве примеров рассмотрены пластины, параметры которых линейно, квадратично или экспоненциально зависят от радиальной координаты [2]. Влияние неоднородности на поведение частот также исследовано при дополнительном условии: i) для пластины, масса которой фиксирована, а толщина меняется и ii) для пластины с фиксированной средней жёсткостью, с переменным модулем Юнга. В завершении, исследовано влияние на частоты граничных условий и волновых чисел.

Колебания круглых пластин с круглым центральным отверстием — особый случай неоднородности. Здесь размер отверстия был взят в качестве малого параметра. Для таких пластин были получены асимптотические формулы для собственных частот с использованием асимптотических разложений для функций Бесселя [3].

В рассмотренных выше задачах система сохраняет симметрию при рассмотренных возмущениях, которые не расщепляют кратные собственные частоты, а только сдвигают их.

Далее эффект влияния неоднородности на собственные частоты исследуется для четырёхугольных тонких пластин. Особый интерес представляют кратные частоты квадратных пластин с одинаковыми условиями закрепления на всех краях. Здесь любое изменение толщины или жёсткости вызывает определенную потерю симметрии, и мы можем ожидать расщепления кратных частот.

Метод возмущений используется для нахождения частот собственных колебаний пластин, жёсткость или/и толщина которых постоянны в одном направлении и близки к постоянным в другом.

Обнаружено, что если изменения жёсткости/толщины линейны по  $\varepsilon$  и координате, то частоты расщепляются только во втором приближении по  $\varepsilon$ . Но, если параметр изменяется нелинейно по координате, например, квадратично, то расщепление кратных собственных частот происходит уже в первом приближении.

Асимптотические формулы также позволяют определить, какая из двух кратных частот, соответствующих волновым числам  $n$  и  $m$ , растёт быстрее с при увеличении малого параметра.

Интересные результаты получены для квадратной пластины с маленьким квадратным центральным отверстием [4]. В этом случае система сохраняет свою симметрию, но, тем не менее, некоторые кратные частоты разделяются, и зависимость безразмерных собственных частот от длины стороны отверстия

$\varepsilon$  имеет вид

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon^2 + \lambda_2 \varepsilon^4 + \dots,$$

где  $\lambda_1 = \pm \Lambda \neq 0$ , только тогда, когда волновые числа  $n, m$  оба чётны или нечётны и при этом  $n \neq m$ .

Для широкого интервала значений малого параметра для низших частот колебаний результаты асимптотического и конечно-элементного анализов хорошо согласуются между собой и с численными результатами других авторов.

Работа была поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проекты № 18-01-00832а и № 19-01-00208а.

### Литература

- [1] Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E. and Vaillancourt R. Asymptotic methods in mechanics of solids. Basel, Birkhäuser, 2015, 325 p.
- [2] Vasiliev, G. P., Smirnov A. L. Free Vibration Frequencies of a Circular Thin Plate with Variable Parameters. Vestnik of St. Petersburg University: Mathematics, 2020, vol. 53, no. 3, pp. 351–357.
- [3] Smirnov A. L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates, COMPDYN 2019.
- [4] Smirnov, A.L., Lebedev A. Free vibrations of perforated thin plates, AIP Conference Proceedings, 1648, 300009, 2015.

## О некоторых прямых и обратных задачах для предварительно напряжённых цилиндров и волноводов

*Ватульян А.О.*<sup>1,2</sup> *Недин Р.Д.*<sup>1,2</sup> *Юров В.О.*<sup>1</sup>

*vatulyan@math.rsu.ru, rdn90@bk.ru, vyurov@sfedu.ru*

<sup>1</sup>Южный федеральный университет

344006, Российская Федерация, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42,

<sup>2</sup>Южный математический институт ВНИИ РАН и РСО-А

362027, Российская Федерация, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

*Ключевые слова:* цилиндр, неоднородность, предварительные напряжения.

Процесс производства и эксплуатации труб различного назначения связан с температурными, силовыми и прочими воздействиями. Выделим особенно процессы сварки, холодного и горячего проката. В трубах возникают поля предварительных напряжений (ПН), недоступные для непосредственного визуального анализа; вместе с тем, эти поля важно учитывать при расчётах на прочность и

устойчивость. В настоящей работе предложены методики теоретического моделирования и акустического мониторинга предварительно напряженных конечных и бесконечных цилиндров, разработаны методы реконструкции их свойств.

В рамках линеаризованной модели предварительно напряжённого упругого тела [1] рассмотрены две задачи для конечного [2] и бесконечного [3, 4] неоднородных в радиальном направлении цилиндров. Считаем, что их внутренняя граница свободна от напряжений, а к внешней границе прикладывается периодическая во времени нормальная нагрузка. Обе задачи формулируются для дифференциального уравнения в частных производных и допускают переход к каноническим системам дифференциальных уравнений первого порядка со спектральными параметрами и переменными коэффициентами. Таким образом, решения поставленных задач основываются на решениях вспомогательных одномерных задач относительно радиальной координаты цилиндра, строящихся в силу переменности коэффициентов численно с помощью метода пристрелки. При этом первая задача допускает разделение переменных и переход к задачам меньшей размерности за счёт выбора специальных граничных условий, стесняющих продольные движения торцов конечного цилиндра и не оказывающих трения при их радиальных колебаниях. Отметим, что при произвольных условиях на торцах задача существенно усложняется и решается с помощью МКЭ. Решение задачи в бесконечном цилиндре строится на основе интегрального преобразования Фурье вдоль продольной координаты. Обращение интегрального преобразование осуществляется на основе теоремы о вычетах. Полоса и вычеты находятся численно на основе вспомогательных (расширенных) задач Коши для канонической системы содержащей дополнительно производные по спектральным параметрам.

Выполнен анализ решений задач в зависимости от различных типов неоднородного предварительно напряжённого состояния. Для конечного цилиндра изучено влияние на амплитудно частотные характеристики и получена формула, описывающая влияния ПН на резонансные частоты.

С помощью итерационной процедуры решена обратная задача по восстановлению модуля сдвига и плотности [5] в радиально неоднородном волноводе при задании коэффициента Пуассона, законов изменения компонент тензора ПН и дополнительной информации о поле перемещений на внешней границе волновода при двух различных типах нагружения. Алгоритм основан на процедуре линеаризации задачи в окрестности некоторого приближения к восстанавливаемым функциям. На каждой итерации с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова [6] осуществляется решение некорректной задачи - системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами.

Настоящее исследование было поддержано Российским Научным Фондом (проект № 18-71-10045).

## Литература

- [1] Trefftz E. Zur theorie der stabilität des elastischen gleichgewichts // ZAMM. 1933. Vol. 12. №2. pp. 160–165.
- [2] Vatulyan A., Yurov V., Nedin R. Oscillations of a non-uniform finite hollow cylinder under conditions of complex prestressed state // Engineering Structures, V. 221. (2020) 111019.
- [3] Ватульян А.О., Юров В.О. Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // ПМТФ. 2016. Т. 57, №4. С. 182–191.
- [4] Ватульян А.О., Юров В.О. Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64, №6. С. 649–656.
- [5] Ватульян А.О., Юров В.О. Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2020. Т. 66, №2. С. 119–127.
- [6] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

## Механизм остаточных напряжений ЭПФ и деформационные явления в никелиде титана

*Вьюненко Ю.Н.,<sup>1</sup> Носковец А.А.,<sup>2</sup> Хлопков Е.А.,<sup>3</sup> Киселев А.Ю.,<sup>4</sup>  
Волков Г.А.<sup>5</sup>*

*6840817@mail.ru, Noskovets@mail.ru, hlopkovelisey@mail.ru, a.kiselev@ase-ec.ru  
volkovgrig@mail.ru*

<sup>1</sup>ООО «Оптимикст Лтд»,

195426, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Передовиков, 9, 226,

<sup>2</sup>АО «Лонас технология»,

192029, Российская Федерация, Санкт-Петербург, пр. Елизарова, 17А,

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29,

<sup>4</sup>АО «Атомэнергопроект»,

191036, Российская Федерация, Санкт-Петербург, 2-я Советская ул., 9,

<sup>5</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* эффект памяти формы, механизм остаточных напряжений.

Эффект памяти формы (ЭПФ), пластичность превращения, сверхупругость и другие деформационные явления, наблюдаемые в никелиде титана, связаны с мартенситными превращениями в этом сплаве. Ведётся разработка методов теоретического описания этих явлений в лабораториях под руководством Волкова А.Е., Мовчана А.А., Николаева В.И. и другими научными коллективами [1]–[3]. Одним из направлений построения инженерных методов расчёта

конструкций из материалов данного класса рассматривается теория механизма остаточных напряжений ЭПФ. Математическая модель этого подхода включает в себя уравнение теплопроводности:

$$\rho c(U) \frac{\partial U}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность материала,  $U$  — температура,  $t$  — время,  $x, y, z$  — пространственные координаты,  $k$  — коэффициент теплопроводности и  $c(U)$  — теплоёмкость материала. В интервале температур превращения эта зависимость может быть представлена в виде формулы:

$$c(U) = c_1 \frac{(U - A_s)(A_f - U)}{(A_f - A_s)^2} + c_0, \quad (2)$$

где  $A_s$  и  $A_f$  — температуры начала и конца обратного мартенситного превращения, в процессе которого развивается ЭПФ. Параметр  $c_0$  — теплоёмкость никелида титана в однофазном состоянии. В условиях значительной разницы этой величины мартенситного состояния от характеристики аустенита  $c_0$  в интервале  $[A_s, A_f]$  будет зависеть от  $U$ . Величина  $c_1$  определяется из соотношения:

$$Q_{tr} = \int_{A_s}^{A_f} c_1 \frac{(U - A_s)(A_f - U)}{(A_f - A_s)^2} dU, \quad (3)$$

где  $Q_{tr}$  — скрытая теплота превращения.

Форма изгиба пластины определяется из уравнения равновесия моментов остаточных напряжений:

$$\int_S \sigma(U, r) r ds = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma(U, r)$  — распределение внутренних напряжений по сечению,  $S$  — площадь поперечного сечения пластины,  $r$  — расстояние от нейтральной плоскости.

Закон деформирования материала определяет распределение упругой и необратимой деформации в объёме конструкции. Во многих ситуациях законом деформирования мартенсита можно принимать закон пластического течения. Вблизи температур перестройки кристаллической решетки наблюдается сильная температурная зависимость модулей упругости от температуры. Учёт этой зависимости необходим для контроля эволюции поля напряжений в деформированной конструкции. Для изогнутой пластины в условиях действия закона пластического течения уравнение (4) преобразуется к следующему виду:

$$\int_0^{r_u} r E(U) \varepsilon_1(r) dr + \int_{r_u}^{r_m} r E(U) \varepsilon_2(r) dr = 0, \quad (5)$$

где  $r_m$  — полутолщина пластины,  $r_u = R_0 \varepsilon_u$  — полуширина упругой зоны у нейтрального слоя,  $\varepsilon_u$  — деформационный предел упругости,  $R_0$  — радиус кривизны изогнутой на цилиндрической оправке пластины,  $\varepsilon_1(r)$  — деформация в зоне упругости,  $\varepsilon_2(r)$  — упругая деформация в объеме развития пластического течения после снятия внешней нагрузки.

Уравнение (5) позволило провести численный эксперимент, в котором отслеживалась эволюция формы пластины при нагреве её поверхности с постоянной скоростью. При этом предполагали, что механические и тепловые свойства материала в зонах растяжения и сжатия одинаковы. Температурная зависимость модуля Юнга была аппроксимирована линейными функциями:

$$E = \begin{cases} E_M, & \text{при } U < A_s, \\ E_M \frac{A_f + A_s - 2U}{A_f - A_s}, & \text{при } A_s \leq U \leq \frac{A_f + A_s}{2}, \\ E_A \frac{2U - A_f - A_s}{A_f - A_s}, & \text{при } \frac{A_f + A_s}{2} \leq U \leq A_f, \\ E_A, & \text{при } U > A_f. \end{cases},$$

где  $E_M$  и  $E_A$  — соответственно, модули упругости мартенситного и аустенитного состояний материала. Наблюдали процесс восстановления первоначальной формы пластины до изгиба.

В рамках данной математической модели предположено объяснение зависимости деформационных процессов пластичности превращения от скорости охлаждения кольцевых конструкций из никелида титана.

## Литература

- [1] Беляев С. П., Волков А. Е., Ермолаев В. А. и др. Материалы с эффектом памяти формы: Справочное издание / Под ред. В.А. Лихачева. Т. 4. СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. 268 с.
- [2] Волков А. Е., Сахаров В. Ю. Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2003. Т. 67. № 6. С. 845–851.
- [3] Пульнев С. А., Прядко А. И., Ястребов С. Г., Николаев В. И. Эффект памяти формы в монокристаллах Cu-Al-Ni, линейные и вращательные двигатели на их основе // ЖТФ. 2018. Т. 88. вып. 605. С. 843-849. doi: 10.21883/JTF.2018.06.46013.2411

## Применение поправочных коэффициентов в методе Рэлея при расчете основной частоты колебаний цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением

*Дзедзисавили Г.Т.*

*d-g-t@bk.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* колебания, цилиндрические оболочки, метод Рэлея.

### Введение

Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением при различных вариантах закрепления.

При наличии квадратного сечения можно получить приближённое аналитическое решение путем численного решения уравнения, получаемого после разделения переменных в уравнении Лагранжа–Жермен [1], [2]. В случае прямоугольного сечения помимо метода конечных элементов целесообразно использование метода Рэлея, позволяющего получить приближённую формулу для низшей частоты. В работе [3] формы колебаний представлены в виде разложения в двойной ряд Фурье, при этом результаты расчетов хорошо согласуются с результатами вычислений частот методом конечных элементов. В работе [4] для решения данной задачи был предложен подход, основанный на использовании метода Рэлея с поправочными коэффициентами, которые выбираются эмпирически. Также были рассмотрены некоторые частные примеры применения данного подхода, и было выявлено, что координатные функции, удовлетворяющие ослабленным геометрическим условиям, могут иметь меньшую погрешность, чем функции с поправочными коэффициентами, которые этим условиям удовлетворяют. Цель настоящей работы – дальнейшее изучение и обобщение закономерностей поведения поправочных коэффициентов.

### Материалы и методы

Рассматриваемую оболочку можно представить в виде четырёх сопряжённых под прямым углом пластин. Вычисления проводились в предположении, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, изгибающие моменты в местах пересечения равны, а углы между сопряженными пластинами остаются прямыми при изгибах.

Для расчета основной частоты использовался метод Рэлея. Ввиду симметрии рассматривались две смежные стенки оболочки. Для каждой из них соответственно размерам была выбрана своя координатная функция, домноженная на

поправочный коэффициент. Затем рассчитывались потенциальная энергия и максимальная кинетическая энергия, которые затем подставлялись в выражение для определения основной частоты. Результаты вычислений сравнивались с результатами по методу конечных элементов.

Рассмотренные координатные функции были разделены на два вида: функции, удовлетворяющие на линии пересечения стенок всем геометрическим граничным условиям (отсутствие прогиба и равенство углов на линии пересечения стенок), и функции, удовлетворяющие на линии пересечения стенок «ослабленным» геометрическим граничным условиям (отсутствие прогиба). Для каждого варианта поправочных коэффициентов проводились вычисления по описанному выше алгоритму.

### Выводы

Систематизированы закономерности поведения поправочных коэффициентов. Проанализирована связь между видом поправочных коэффициентов и свойствами получаемой приближённой формулы.

### Литература

- [1] Sergei B. Filippov, Eliza M. Haseganu, Andrei L. Smirnov. Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mechanics Research Communications*, Volume 27, Issue 4, 2000, P. 457–464.
- [2] Дзевбисашвили Г. Т. Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017-2018 г. Издательство СПбГУ, 2019. С. 13–29.
- [3] Chen Yue-hua, Jin Guo-yong, Liu Zhi-gang. Free Vibration of a Thin Shell Structure of Rectangular Cross-section // *Key Engineering Materials*. Trans Tech Publications, Switzerland, Vol. 486, 2011. P. 107–110.
- [4] Dzebisashvili G. T., Filippov S. B. Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section. // *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 1479, 2020.

## Задача циклического нагружения материалов

*Забавникова Т.А.*

*zabavnikova.tatyana.al@yandex.ru*

Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Будённого,  
194064, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Тихорецкий пр., 3

*Ключевые слова:* пластичность, циклические нагружения, эндохронная теория, геометрически нелинейные определяющие соотношения, верификация теории.

Рассматривается геометрически нелинейная эндохронная теория неупругости тензорно-параметрического типа [1], уравнения которой можно представить



в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{2G} \dot{r} + \frac{\alpha\tau}{2G} \overset{\circ}{\sigma}_{ij} &= \tau \overset{\circ}{r}_{ij} + \frac{r_{ij}}{g+\alpha} \dot{r}, & 3K\varepsilon_{ii} &= \sigma_{ii}, \\ r_{ij} &= \varepsilon_{ij} - (1-\alpha) \frac{\sigma_{ij}}{2G}, & dr &= \sqrt{dr_{ij} : dr_{ij}}, & \dot{r} &= \sqrt{\frac{dr_{ij}}{dt} : \frac{dr_{ij}}{dt}}, \\ r &= \int dr, & \tau &= \tau(r, \dot{r}), & g &= g(r, \dot{r}), \\ \overset{\circ}{r}_{ij} &= D_{ij} - (1-\alpha) \frac{\overset{\circ}{\sigma}_{ij}}{2G}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= D_{ij}, & \Omega_{ij} &= \dot{R}_{ij} \cdot R_{ij}^T, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \Omega_{ij} - \Omega_{ij} \sigma_{ij}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij} \Omega_{ij} - \Omega_{ij} \varepsilon_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь символы  $\sigma_{ii}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ii}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  обозначают объёмные и девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

Далее,  $r_{ij}$  — девиатор параметрического тензора,  $\tau$  — аналог деформационного предела текучести,  $g$  — аналог коэффициента упрочнения материала,  $\alpha$  — параметр эндохронности (внутреннее время), изменяющийся в интервале  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $K$  — объёмный модуль,  $t$  — физическое время, знак «:» — двойная свёртка тензорного произведения.

Кроме того,  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  и  $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$  — объективные производные девиаторов тензора напряжений и деформаций, соответственно,  $\Omega_{ij}$  — тензор вихря(спина), собственная ортогональная матрица  $R_{ij}$  — тензор поворота,  $D_{ij}$  — тензор деформации скорости (симметрическая часть скорости градиента деформации  $L_{ij}$ ),

$$R_{ij} = F_{ij} U_{ij}^{-1}, \quad L_{ij} = \dot{F}_{ij} F_{ij}^{-1}, \quad D_{ij} = (L_{ij} + L_{ij}^T)/2,$$

$F_{ij}$  — градиент деформации, симметричный положительно-определённый тензор  $U_{ij}$  — правый тензор удлинения в полярном разложении градиента деформаций  $F_{ij} = R_{ij} U_{ij}$ , верхний индекс «Т» — оператор транспонирования матриц.

На основе этих геометрически нелинейных определяющих соотношений моделируется процесс циклического нагружения материалов растяжением-сжатием [2, 3].

Задаются три типа циклического нагружения: кинематическое ( $D_{11} = \pm \frac{2}{3}$ ;  $D_{22} = \mp \frac{1}{3}$ ;  $D_{33} = \mp \frac{1}{3}$ ), жёсткое ( $\varepsilon_{11} = \pm \frac{2}{3}$ ;  $\varepsilon_{22} = \mp \frac{1}{3}$ ;  $\varepsilon_{33} = \mp \frac{1}{3}$ ) и мягкое ( $\sigma_{11} = \pm \frac{2}{3}$ ;  $\sigma_{22} = \mp \frac{1}{3}$ ;  $\sigma_{33} = \mp \frac{1}{3}$ ).

Для выявления некоторых качественных закономерностей рассматриваются вышеуказанные пути циклических нагружений для гипотетического материала. Замкнутые нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений теории решаются численно методом конечных разностей в среде MATLAB. Указываются некоторые вычислительные особенности при решении задачи мягкого нагружения.

В докладе представлены графики развития деформаций и напряжений при трех типах циклического нагружения растяжением-сжатием и их сравнение с результатами других авторов [3].

### Литература

- [1] Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. 1998. Вып. 59. С. 72–76.
- [2] Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Современное состояние эндохронной теории пластичности // Проблемы прочности. 1991. № 6. С. 3–12.
- [3] Бондарь В. С., Даншин В. В. Пластичность. М: Физматлит, 2008. 176 с.

## Моделирование деформационных и прочностных свойств металломатричного композита, армированного карбидными структурами

*Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Смирнов В.М.*  
*b.semenov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* моделирование, деформирование, разрушение, алюмоматричный композит, карбидные наноструктуры

В настоящее время металломатричные композиты, армированные керамическими частицами, находят широкое применение в качестве конструкционных материалов в аэрокосмической и автомобильной промышленности. Существуют различные методы производства металломатричных композитов, которые можно разделить на твёрдотельные (например, порошковая металлургия, механическое измельчение и т. д.) и методы в жидком состоянии (метод литья с перемешиванием, метод литья под давлением и т. д.).

Авторами была разработана методика равномерного введения в объём металлического композита методами порошковой металлургии нанонитей карбида титана и углеродных нановолокон (см. [1]). Разработанный подход позволил получить структуру композиционного материала, где в объёме металлической (алюминиевой, железной) матрицы наноструктуры TiC или SiC образовывали сетку (каркас) из нанонитей карбида. Показано, что прочностные свойства созданных по этой методике композиционных материалов на основе алюминия с дисперсной фазой Al-SiC/Fe значительно выше, чем не только чистого алюминия, но и алюмоматричных композитов, армированных с такой же концентрацией частицами карбида кремния. Предложенный метод обеспечивает

отсутствие межфазных границ между частицами алюминия и наноструктурами карбидов, что позволяет минимизировать внутреннюю пористость образца.

Модели деформирования композитных материалов, в том числе и металлломатричных, можно разделить на две группы.

Первая — это микромеханические модели (Voigt, Reuss, Hashin-Shtrikman, Halpin-Tsai, Wang-Pyrz и др.), основанные на эмпирическом подходе к моделированию эффективных свойств композитов, в частности, нанокомпозитов, достаточно хорошее соответствие с экспериментальными результатами даёт модифицированная модель Halpin-Tsai [2], в которой учитывается зависимость упругих модулей нанокомпозитов, армированных нанонитями, от объёмной доли и аспектного отношения (отношение длины к диаметру) нанонитей и свойств составляющих материалов.

Вторая группа — методы компьютерного моделирования, широко применяемые в настоящее время для моделирования процессов деформирования и разрушения композиционных материалов. Это, прежде всего, конечно-элементные методы (FEM) с выбором подходящего представительного объёма, методы молекулярной динамики, метод частиц, развиваемые в последние годы методы перидинамики. Моделирование нанокомпозитов представляет особый интерес для исследования влияния таких параметров, как массовая доля частиц, номинальный и истинный диаметр армирующих частиц и распределение частиц. Микромеханическое моделирование может использоваться для лучшего понимания эволюции напряжений и повреждений в пределах представительного элемента объёма нанокомпозита.

Методом конечных элементов моделируются деформационные и прочностные свойства металлломатричного композита, армированного карбидными структурами, образующими «каркас» в металлической матрице. Для описания деформирования и разрушения металллокомпозита с таким армированием разработана конечно-элементная модель представительного элемента и проведены расчеты по оценке эффективных свойств композита в зависимости от концентрации и размеров армирующих элементов. При оценке прочностных свойств оценивалось влияние расположения армирующей карбидных волокон относительно трещины на концентрацию напряжений в окрестности вершины трещины. Показано, что наличие армирующих нити приводит к искривлению траектории трещины и снижению концентрации напряжений в окрестности вершины трещины. Анализ результатов компьютерного моделирования, полученных по предложенной модели, свидетельствуют, с одной стороны, о незначительном влиянии армирующих волокон на упругие модули, а с другой стороны, о существенном повышении трещиностойкости металллокомпозита с каркасным армированием. Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования с экспериментальными данными.

Построение моделей деформации и разрушения металломатричных композитов позволяет прогнозировать механические свойства создаваемых композитных материалов.

Работа была поддержана Российским Научным Фондом проект № 20-11-20083.

### Литература

- [1] Земцова Е.Г., Юрчук Д.В., Семенов Б.Н., Морозов Н.Ф., Смирнов В.М. Получение композиционного металлического материала с двумя упрочняющими модификаторами и разработка моделей деформирования и разрушения синтезированных материалов. Материалы 14-й Международной научно-технической конференции «Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка», Минск, 2020.
- [2] Hassanzadeh-Aghdam M.K., Jamali, J. A new form of a Halpin-Tsai micromechanical model for characterizing the mechanical properties of carbon nanotube-reinforced polymer nanocomposites. // J. Bull. Mater. Sci., 2019, vol. 42, pp. 117–357.

## Elastic-plastic analysis of reinforced concrete frame buildings: Developing a new software package

*Ibraheem A.A.*

*anasibraheem80@yahoo.com*

St. Petersburg University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Keywords:* finite element method, lateral loads, structural analysis, structure capacity, interaction failure surfaces.

The issue of evaluating existing buildings subjected to lateral loads is at present an urgent issue from a social and scientific point of view, as the primary goal of designing buildings on lateral loads is to maintain the safety of people during the high loads that may occur, and thus not to cause significant collapses and loss of life. With the development of engineering sciences and the availability of global codes as well as the availability of computer technology that enable the simulation of the structural behavior, we can carry out the evaluation process according to clear steps.

In order to achieve this goal, we have designed a program capable of analyzing and designing buildings and checking their resistance to lateral loads. The program provides a suitable drawing environment (3D view, plan view, elevation view) with tools to build the model and to define the structural elements, materials, and reinforcements amounts.

### The solution scheme.

First, we have to specify the transition value at a reference joint in the building at which the building is considered collapsed.

Then the program perform this procedure in order to calculate the lateral loads causing the frame buildings to collapse.

- Initially the program applies lateral loads on the structure.
- Starts the building static analysis.
- The program checks the transition at the reference join if it is less than the maximum allowed value.
- The program checks if the structure elements are able to bear these loads.
- In case that the elements are able to bear, the program increases the loads and repeats the same previous procedures.
- In case of failure, the program adds a release for forces (hinge) in the failed section, then increases the loads and repeats the same previous procedures.

### Implementation of the analysis.

In order to calculate the internal forces (moments, shear forces, axial forces) in the structural elements. Using finite elements method, the program calculates the 3D elastic stiffness matrix for frame elements including shear and bending effects, and assemble the general stiffness matrix of the structure according to Klaus Bathe finite element procedure [1]. Using direct solver(sparse Cholesky skyline decomposition [2]), or iterative solver (conjugate gradient method (CG) [1]).

### Checking the elements capacity.

Checking process is implemented according to ACI (American Concrete Institute), using the load and resistance factor design (LRFD) [3, 4].

The formulation is based on the general principles of ultimate strength design (ACI).

**Beam capacity:** The program calculates the section bearing capacity for bending moment and for shear force. The reinforced section is considered capable of resisting loads (moment  $m_3$ , shear force  $v_2$ ) if the section bearing capacity is greater than the applied  $m_3$  and  $v_2$ .

**Column capacity:** The program generates three-dimensional biaxial interaction surfaces for the column section depending on (-the dimensions of the section; -the amount and the distribution of the reinforcement; -the material specifications).

The reinforced section is considered capable of resisting loads (axial force  $p$ , moment  $m_2$ , moment  $m_3$ ) if the calculated biaxial interaction surfaces include the point, (the point inside the column capacity interaction volume).

As a result of the evaluation process, we can determine if the structure is capable of resisting the loads or will collapse, and we can identify the weaknesses in the structure (places where the collapse hinges are formed) and thus determine whether the structure needs rehabilitation and suggest appropriate strengthening solutions.

## References

- [1] Klaus Bathe Finite element procedure. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [2] Dereniowski, Dariusz; Kubale, Marek Cholesky Factorization of Matrices in Parallel and Ranking of Graphs // 5th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics. 2004.
- [3] ACI Concrete Frame Design Manual. 318-14 . ACI, 2017.
- [4] ACI Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) and Commentary (ACI 318R-14). ACI, 2014.

## О влиянии неоднородности внешнего покрытия трубы на контактные напряжения, возникающие под жесткими втулками

*Казаков К.Е.*

*kazakov-ke@yandex.ru*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101, к.1

*Ключевые слова:* контактная задача, неоднородное покрытие, система жёстких втулок, система смешанных интегральных уравнений.

Работа посвящена постановке и построению аналитического решения задачи контактного взаимодействия системы жёстких цилиндрических втулок и трубы с наружным неоднородным покрытием. В промышленности наличие таких покрытий требуется, например, для защиты основного слоя трубы от агрессивных внешних сред, для его электрической изоляции и т.п. В силу процессов производства оно может обладать неоднородностью. Учёт подобных особенностей важен при анализе напряженно-деформированного состояния трубы, на которую надеты втулки, так как величины напряжений изменяются и, следовательно, меняется срок службы такого соединения.

Математической моделью вышеописанной задачи является система смешанных интегральных уравнений, содержащих как интегральные операторы с постоянными пределами интегрирования (операторы Фредгольма), так и операторы с переменными пределами интегрирования (операторы Вольтерра). В эти уравнения входят функции, описывающие упругие свойства покрытия по каждой из втулок и, следовательно, они могут быть быстро изменяющимися или даже разрывными.

Построение решений с помощью классических подходов, которые не учитывают особенности входящих в систему уравнений функций (например, методом разложения в ряд по тригонометрическим или полиномиальным вектор-функциям), приводит к существенным трудностям при расчётах, в которых ис-

следователи вынуждены ограничиваться конечным, сравнительно небольшим, числом членов ряда. Использование небольшого количества слагаемых (порядка 30–50) объясняется тем, что при большем их числе начинает накапливаться вычислительная погрешность. Исследования, связанные с построением решений задач о взаимодействии систем втулок с достаточно простой внутренней формой и труб с однородными покрытиями, были описаны в работах [1, 2]. Однако такого количества слагаемых зачастую недостаточно для корректного описания, например, свойств покрытия или профиля штампа. В работе описан подход, основанный на использовании специального представления и специальных базисных вектор-функций, построенных на основании имеющихся в системе уравнении особенностей. Этот подход аналогичен тем, которые использовались в работе [3] при построении решения для одиночной втулки и в статье [4] при построении решения плоской задачи для системы штампов. Он позволяет в выражениях для контактных давлений под каждой из втулок выделить в виде отдельных сомножителей описывающие свойства покрытия функции. Поэтому в реальных расчётах для достижения высокой точности достаточно ограничиться сравнительно небольшим количеством слагаемых в ряде.

Построенное решение показывает, как наличие неоднородности, близость втулок и реологические свойства трубы влияют на распределение контактных давлений. Это позволяет проводить более точный анализ такого сопряжения при оценке долговечности и надёжности такой конструкции в целом.

Научное исследование проведено частично при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 19-51-60001 и № 20-51-05007.

## Литература

- [1] Манжиров А. В., Черныш В. А. Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1018–1025.
- [2] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
- [3] Kazakov K. E. On the interaction of rigid bush and pipe with nonuniform coating // AIP Conf. Proc. 2020. Vol. 2293. 210012. doi: 10.1063/5.0026560
- [4] Kazakov K. E., Kurdina S. P. Multiple contact problem for bodies with nonuniform coatings of variable thickness and regular systems of punches with complex base shape // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1203. 012019. doi: 10.1088/1742-6596/1203/1/012019

## Колебания стержня с переменным сечением

*Карачева Н.В., Филиппов С.Б.*

*nadya\_karacheva@mail.ru, s\_b\_filippov@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* свободные колебания, асимптотические методы, стержень с переменным сечением.

В современном мире балочные конструкции играют важную роль в строительной индустрии. Стержни пользуются популярностью благодаря своей простоте и прочности. Именно поэтому исследование колебаний балки актуально. Большое количество работ посвящено исследованиям свободных колебаний стержней, для нахождения частот применяют широкий спектр численных методов, асимптотические методы, метод конечных элементов. Например, в работе [1] вычисляется частота стержня переменного поперечного сечения с помощью метода Рэлея–Ритца. В [2] применяется асимптотический метод для исследования свободных колебаний балки с переменным поперечным прямоугольным сечением, геометрические и физические параметры которой зависят от продольной координаты.

В данной работе исследуются свободные колебания балок с переменным и ступенчатым поперечными сечениями, для которых выполняется условие сохранения объема. Рассматривается уравнение для частот и форм колебаний балки

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJ(x)\frac{d^2w}{dx^2}) = \rho S(x)\omega^2 w, \quad (1)$$

где  $J(x)$  — момент инерции поперечного сечения,  $S(x)$  — площадь поперечного сечения,  $E$  — модуль Юнга,  $\omega$  — частота,  $\rho$  — плотность,  $E$  и  $\rho$  — постоянные. Предполагаем, что радиус изменяется по закону  $r(x) = r_0(1 + \varepsilon f(x))$ , где  $\varepsilon \ll 1$ , соответственно получаем  $J(x)$  и  $S(x)$ . Рассматривается два вида граничных условий: шарнирное опирание и жёсткая заделка.

Для балки с круглым переменным поперечным сечением сравниваются первые частоты, полученные с помощью асимптотического метода и метода Рунге–Кутты. Для балки со ступенчатым сечением в явном виде получено уравнение для определения частот. Для исследования были взяты функции возмущений в виде тригонометрической функции и полиномов разных степеней. Определен закон изменения поперечного сечения, для которого первая частота имеет наибольшее значение.



## Литература

- [1] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. С. 420–426.
- [2] Помыткина Е.С., Смирнов А.Л. Свободные поперечные колебания балки с переменными параметрами // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 103–114.

## Точное решение для частично защемленного прямоугольника с трещиной

*Коваленко М.Д., Кержаев А.П., Меньшова И.В.*

*kov08@inbox.ru, alex\_kerg@mail.ru, menshovairina@yandex.ru*

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,  
113556, Российская Федерация, Москва, Варшавское ш., д. 79, кор. 2,  
Институт прикладной механики РАН,  
125040, Российская Федерация, Москва, Ленинградский пр-т., 7,  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
105005, Российская Федерация, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр.1

*Ключевые слова:* прямоугольник, трещина, функции Папковича–Фадля, точное решение.

Краевая задача теории упругости для бесконечной полосы с поперечной трещиной была предметом многих исследований (например, [1]), но точных решений для неё получено не было. Обзор публикаций по этой теме можно найти в статье [2].

В предлагаемой работе рассмотрена задача для прямоугольника

$$\{P : |x| \leq d, |y| \leq 1\},$$

у которого две противоположные (горизонтальные) стороны жёстко защемлены, т.е., соответственно, продольное (вдоль оси  $x$ ) и поперечное (вдоль оси  $y$ ) перемещения  $U(x, \pm 1) = V(x, \pm 1) = 0$ , а две другие (торцы прямоугольника) свободны, т.е. нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_x(\pm d, y) = \tau_{xy}(\pm d, y) = 0.$$

Через  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  обозначены соответственно умноженные на модуль сдвига  $G$  продольное и поперечное перемещения. В центре прямоугольника проведен разрез  $\{\gamma : x = 0, |y| \leq \alpha, 0 < \alpha < 1\}$ , на котором задан разрыв перемещений  $U(0, y)$ . Решение задачи построено для трёх видов разрывов различной степени гладкости в окрестности вершины трещины:

$$1) U(\pm 0, y) = \pm(\alpha^2 - y^2)^2,$$

$$2) U(\pm 0, y) = \pm(\alpha^2 - y^2),$$

$$3) U(\pm 0, y) = \pm\sqrt{(\alpha^2 - y^2)}.$$

Формулы для напряжений и перемещений в прямоугольнике представляются в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых (коэффициенты Лагранжа) имеют вид простых интегралов Фурье от известной формы профиля разрыва. В основе решения лежит теория разложения по собственным функциям Папковича–Фадля [3]–[6]. При этом для решения краевых задач с трещинами вводятся две аналитические функции, которые в определенной степени можно рассматривать как аналоги потенциалов Колосова–Мусхелишвили:

$$\Phi(x, y) = -\tau_{xy}(x, y) + i \left\{ (1 + \nu) \frac{dV(x, y)}{dy} + \frac{1 - \nu}{2} \sigma_x(x, y) \right\},$$

$$F(x, y) = \left\{ -(1 + \nu) \frac{dU(x, y)}{dy} - \frac{1 - \nu}{2} \tau_{xy}(x, y) \right\} - i\sigma_x(x, y).$$

Сначала решается соответствующая задача для бесконечной полосы с разрывом перемещений, затем из этого решения «вырезается» прямоугольник  $P$ . На это решение накладывается решение, снимающее напряжения на его торцах [7].

Схема решения задачи сохраняется и для других типов граничных условий на сторонах прямоугольника. Немного более громоздко выглядит решение для того случая, когда на разрезе известны напряжения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53021.

## Литература

- [1] Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л. Центральная поперечная трещина в упругой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 97–104.
- [2] Reut V., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Investigation of the stress state of the elastic semi-strip with a transverse crack // Theor. Appl. Fract. Mech. 2019. Vol. 100. P. 105–109.
- [3] Kerzhaev A. P., Kovalenko M. D., Menshova I. V. Borel transform in the class  $W$  of quasi-entire functions // Complex Anal. Oper. Theory. 2018. Vol. 12. N 3. P. 571–587.
- [4] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
- [5] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 121–144.

- [6] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. Vol. 69. P. 121.
- [7] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P., Yu G. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions // *Z. Angew. Math. Phys.* doi: 10.1007/s00033-020-01425-2

## Nonlinear boundary perturbation analysis of wrinkled ultra-thin film coating

*Kostyrko S.A.*,<sup>1</sup> *Grekov M.A.*,<sup>1</sup> *Altenbach H.*<sup>2</sup>

*s.kostyrko@spbu.ru, m.grekov@spbu.ru, holm.altenbach@ovgu.edu*

<sup>1</sup>Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9,

<sup>2</sup>Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg,

39106, Germany, Magdeburg, Universitätsplatz, 2

*Keywords:* wrinkled film, boundary perturbation method, finite element method, surface elasticity, stress concentration.

It is well known, that a stiff thin film deposited on a soft substrate tends to a periodic buckling deformation under compressive stress. As a result, the wrinkles characterized by a spontaneously occurred smooth sinusoidal shape. Yet, the ordered wrinkle patterns can be controlled by modification of substrate morphological structure. This process finds applications in manufacturing optical, magnetic and electronic devices, cell growth, creating topographic templates for fabrication of nanowires, and designing of smart adhesives [1]. However, for some systems and post-processing conditions, wrinkling and buckling may lead to undesirable debonding and microcracks nucleation [2]. These defects make the wrinkled thin films useless for further applications. Therefore, understanding the thin film failure during buckling and subsequent postbuckling evolution is of crucial importance to maintain the stable and defect-free wrinkle structures.

Since damage occurs in the regions of high stress concentration [3], the objective of this study is to analyse the stress distribution along the curved surface and interface of wrinkled thin film coating. In last years, a large number of finite element computations were performed to investigate this problem [4]. But a key feature of this contribution is to take into account the elastic properties of subsurface and interphase layers in addition to the geometric and elastic properties of the film. It should be noted as well that the accuracy of the traditional finite element method decreases with the increasing of amplitude-to-wavelength ratio of surface/interface perturbation [5]. The current approach is based on the boundary

perturbation method and leads to more accurate solution employing the non-linear approximations.

Thus, here we consider a two-dimensional boundary value problem for wrinkled film bonded to a semi-infinite substrate under plane strain conditions. The film morphology is described by a sinusoidal function. To incorporate the effect of surface and interface elasticity, the constitutive equations of the Gurtin–Murdoch model are used considering infinitesimal strains. The mixed boundary conditions are formulated in terms of generalized Young–Laplace equations and relations describing the continuous of displacements across the undulated surface and interphase regions. The solution of the corresponding boundary value problem is derived in terms of the boundary perturbation method whereby the unknown functions are sought in the form of a power series in the small parameter represented by amplitude-to-wavelength ratio of the wrinkled film. The similar approach was employed in our previous papers investigating the effect of surface and interface undulations on the stress concentration in homogeneous and nonhomogeneous materials, however, numerical results were calculated only for the first-order approximations [6]–[8]. In this study, we analyze the effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on the stress distribution along the undulated surface and interface profiles of the wrinkled film and compare the results with the finite element solution.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant 18-01-00468.

## References

- [1] Li B. et al. Mechanics of morphological instabilities and surface wrinkling in soft materials: a review // *Soft Matter*. 2012. Vol. 8. pp. 5728–5745.
- [2] Ponson L. et al. Competing failure mechanics in thin films: application to layer transfer // *Journal of Applied Physics*. 2009. Vol. 105. P. 073514
- [3] Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A statistical interphase damage model of random particulate composites // *International Journal of Plasticity*. 2019. Vol. 116. pp. 118–142.
- [4] Zheng X.-P. et al. Surface wrinkling of nanostructured thin films on a compliant substrate // *Computational Materials Science*. 2010. Vol. 49. pp. 767–772.
- [5] Shuvalov G.M. et al. The effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on stress concentration near the nanopatterned bimaterial interface // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*. 2020. Vol. 16. pp. 165–176.
- [6] Kostyrko S., Grekov M., Altenbach H. Stress concentration analysis of nanosized thin-film with rough interface // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2019. Vol. 31. pp. 1863–1871.

- [7] Kostyrko S. A., Grekov M. A. Elastic field at a rugous interface of a bimaterial with surface effects // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 216. P.106507.
- [8] Grekov M. A., Kostyrko S. A. Surface effects in an elastic solid with nanosized surface asperities // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 96. pp. 153–161.

## Макромеханическое моделирование залечивания поврежденности под действием импульсов тока высокой плотности

*Кужуджанов К.В.<sup>1</sup>, Левитин А.Л.<sup>1</sup>, Угурчиев У.Х.<sup>2</sup>*

*kconstantin@mail.ru, alex\_lev@ipmnet.ru, umar77@bk.ru*

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101, к.1,

<sup>2</sup>Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
119334, Российская Федерация, Москва, ул. Бардина, 4

*Ключевые слова:* залечивание; микротрещины; микропоры, электропластичность; высокоэнергетическое электромагнитное поле.

Предлагается модель деформирования и пластического (вязкого) разрушения токопроводящего материала при воздействии высокоэнергетического электромагнитного поля и механической нагрузки, предназначенная для макроскопического описания его электропластического деформирования.

Импульсное электромагнитное поле называется высокоэнергетическим электромагнитным полем (ВЭМП), если при электромагнитном воздействии на токопроводящий материал в течение  $10^{-4} - 10^{-3}$  с величина рассеянной удельной электромагнитной энергии в материале находится в диапазоне  $10^8 \leq e \leq 10^{10}$  Дж/м<sup>3</sup>. Воздействие импульсным ВЭМП на проводящий материал представляет интерес, поскольку может существенно улучшить его пластические свойства, увеличив пластические деформации до разрушения от десятков до сотен процентов для разных металлов, сплавов или композитов.

Несмотря на то, что электропластичность широко используется в промышленности, до сих пор отсутствует единое мнение о фундаментальных основах и физическом механизме этого явления. В том числе по этой причине до сих пор отсутствовала возможность макроскопического описания данного явления, что, в свою очередь, не позволяло использовать математическое моделирование при разработке электропластических технологических процессов.

В основе предлагаемой модели лежит эффект залечивания (под воздействием ВЭМП) поврежденности (пористости), образующейся в процессе интенсивного пластического деформирования. Однако из-за неясности физических механизмов лежащих в основе залечивания поврежденности материала при воз-

действию ВЭМП и сложностей матмоделирования этого воздействия вопросы об залечивании повреждённости и закономерностях этих изменений в процессе такого воздействия оставались неизученными. В то же время эксперименты свидетельствовали, что в материале происходит восстановление сплошности структуры, сопровождаемое изменением объемного содержания микродефектов (вплоть до полного исчезновения некоторых микродефектов). Механизм залечивания удалось понять только с использованием микромеханических моделей, предложенных в [1, 2].

Рассматриваются определяющие соотношения модели, учитывающие влияние эволюции структуры микродефектов (микропор) на макроскопические пластические свойства металла. С помощью микромоделей [3, 4] показано, что изменение (уменьшение) пористости в процессе воздействия ВЭМП зависит только от рассеянной в металле удельной энергии электромагнитного поля  $q$ . Электрические константы, входящие в определяющие соотношения, определяются с помощью микромоделного анализа.

На основе предложенной макроскопической модели в трёхмерной постановке решена задача о электротермоупругопластическом растяжении образца, ослабленного шейкой, и его разрушения. Данная задача воспроизводит проведенный натурный эксперимент по последовательному приложению к образцу механической нагрузки и импульсного ВЭМП.

Сравнение результатов, полученных по предлагаемой макромоделю, с проведенным экспериментом, показало, что она правильно воспроизводит экспериментально наблюдаемое увеличение предельной пластической деформации до разрушения после воздействия ВЭМП, несколько завышая её значение.

Определены пути повышения точности воспроизводства моделью экспериментальных данных, сформулированы рекомендации по её дальнейшему совершенствованию и возможным модификациям.

Исследование К.В. Кукуджанова выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00616).

## Литература

- [1] Кукуджанов К.В. Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 4. С. 138–158. doi: 10.15593/perm.mech/2015.4.09.
- [2] Кукуджанов К.В., Левитин А.Л. Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 2. С. 89–110. doi: 10.15593/perm.mech/2016.2.07.

- [3] Кукуджанов К.В. Моделирование залечивания поврежденности металла высокоэнергетическим импульсным электромагнитным полем // Письма о материалах. 2018. Т. 8. № 1. С. 27–32. doi: 10.22226/2410-3535-2018-1-27-32.
- [4] Kukudzhanov K.V., Levitin A.L. Modelling of some mechanism of metal electroplasticity under pulsed high-energy electromagnetic field action // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1205. Paper number 012032. doi: 10.1088/1742-6596/1205/1/012032.

## Гидроупругие колебания композитных лопастей судовых движителей

*Любомиров Я.М., Ярцев Б.А.*

*yaroslav58@yandex.ru, boris\_yar@mail.ru*

«Крыловский государственный научный центр»,

196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

*Ключевые слова:* гидроупругость, композиты, вибрация, лопасть, диссипация.

Возрастающие требования к улучшению условий обитаемости судов, связаны, в том числе, с проблемой снижения уровней вибрации гребных винтов. Одним из перспективных подходов к решению указанной проблемы является применение судовых движителей с лопастями из существенно анизотропных полимерных композитов. Целесообразность использования моноклинных композитных лопастей обусловлена их упругой адаптацией к переменным условиям нагружения набегающим неоднородным потоком воды, сопровождающейся снижением уровней вибрации. Кроме того, возможность введения в состав конструкции лопастей слоев вибропоглощающего полимера позволяет значительно снижать уровни амплитуд резонансных колебаний [1].

Сложность геометрии лопасти предопределяет использование метода конечных элементов для численных исследований параметров её динамического отклика. Поэтому методология гидроупругого моделирования адаптивной композитной лопасти основана на использовании библиотеки программ программного комплекса Ansys. Использование этого комплекса позволяет численно получать совместное решение двух связанных систем уравнений, описывающих гидродинамику и упругое (вязкоупругое) деформирование композитной лопасти в каждый момент времени. Гидродинамика турбулентного течения вращающейся лопастной системы описывается нестационарными осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье-Стокса (URANS), замыкаемыми с помощью SST-модели Ментера [2]. Влияние тензора турбулентных напряжений на изменение поля давления учитывается на каждом временном шаге решения гидродинамической задачи путем использования модели Фокса-Вильямса-Хокинса (FWM). Распределения давлений по поверхностям лопастей движителя, полу-

чаемые на текущем временном шаге решения гидродинамической задачи, импортируются в задачу определения напряженно-деформированного состояния конструкции для нахождения деформированных форм лопастей. Предельные состояния композитных лопастей определяются для максимальной гидродинамической нагрузки, соответствующей экстремальным режимам эксплуатации судового движителя путем сравнения всех элементов тензора напряжений в каждой точке конструкции с феноменологическим критерием прочности Цая-Ву. Деформированные формы лопастей представляют собой новые граничные условия для решения гидродинамической задачи на следующем временном шаге. Это предполагает использование в расчётной области гидродинамической задачи подвижной сетки, отслеживающей изменения граничных условий.

Демпфирующие характеристики композитных лопастей вычисляются по экспериментально определенным диссипативным свойствам материалов, образующих силовые и вибропоглощающие слои конструкции.

Разработан алгоритм определения присоединенных масс воды для каждой формы собственных колебаний лопасти.

Оценка сходимости численного решения осуществляется на основе решения задач на собственные значения «сухой» и «мокрой» одиночной металлической лопасти для нескольких вариантов масштабов сетки конечно-элементной модели. Оценки достоверности получаемых результатов, выполненные путем сопоставления расчётных и экспериментальных значений собственных частот «мокрых» масштабных макетов судовых движителей с металлическими и композитными лопастями, а также путем сопоставления расчётных и экспериментальных значений кривых действия рассматриваемых лопастных систем, продемонстрировали их хорошее согласование.

Выполненные численные исследования «сухих» и «мокрых» судовых движителей с металлическими и композитными лопастями позволили количественно оценить влияние присоединенных масс воды на значения собственных частот и последовательность форм собственных колебаний лопастей. Исследовано влияние структуры армирования композитных лопастей на изменение их собственных частот и собственных форм колебаний. Показано, что переход от модели недеформируемой лопасти к модели лопасти конечной жесткости позволяет учесть вклад вибрации движителя на параметры его динамического отклика.

Выявлена возможность значительного снижения уровней амплитуд резонансных колебаний для композитных лопастей, в состав конструкции которых введены слои вибропоглощающего полимера. Снижение уровней амплитуд резонансных колебаний подтверждено экспериментально в ходе сравнительных испытаний в турбулентном потоке воды масштабных макетов судовых движителей с металлическими и композитными лопастями.



## Литература

- [1] Ryabov V., Yartsev B. Controlling coupled bending-twisting vibrations of anisotropic composite wing // The Eighth Polyakhov's Reading. AIP Conference Proceedings 1959, 070030 (2018). 8 p.
- [2] Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32(8). P. 1598–1605.

## Колебания пластины с периодически изменяющимися параметрами

*Наумова Н.В., Иванов Д.Н., Дорофеев Н.П.*

*n.v.naumova@spbu.ru, denisiv3@rambler.ru, st067927@student.spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* пластина, армированная пластина, колебания пластин.

В современной промышленности всё чаще применяют сложные композитные материалы. Так, например, при армировании строительных материалов используют полипропиленовую фибру, которая представляет собой тонкие синтетические волокна разного размера и диаметра. В электротехнике получили распространение пластмассовые пластины, армированные углеродным волокном, с непрерывными токопроводящими каналами. Большинство кровельных материалов также являются ярким примером пластин переменной толщины. В данной работе рассмотрена прямоугольная пластина, армированная параллельно расположенными волокнистыми полосками. Получено осредненное дифференциальное уравнение колебаний пластины. Вычислены значения частот. Разработанные алгоритмы и программы аналитических формул позволяют рассчитывать различные виды армированных пластин. Анализ всех экспериментов по исследованию колебаний пластин с переменными параметрами показывает достоверность полученных формул. Исследование было основано на сравнении аналитических и численных результатов при использовании программного комплекса ANSYS методом конечных элементов и пакета Wolfram Mathematica. Относительная погрешность расчетов не превышает 3%.

### Основные уравнения и предположения

Рассмотрим квадратную пластину длины  $L$  и переменной толщины  $h$ . Толщина пластины мала по сравнению с ее размерами в плане ( $\frac{h}{L} < 0.1$ ). Принимая за исходную срединную поверхность пластины введем декартову систему координат  $Oxyz$ . Выпишем уравнения теории оболочек и найдем асимптотическое

решение краевой задачи. Условие равновесия сил и моментов

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\lambda w, \quad \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y = 0, \quad M_{xx} = aw_{xx} + bw_{yy}, \quad (2)$$

$$M_{yy} = bw_{xx} + aw_{yy}, \quad M_{xy} = (a - b)w_{xy}, \quad a = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (3)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $b = \mu \cdot a$ . Применим метод многих масштабов. Наряду с переменной  $x$  вводится, так называемая, *быстро меняющаяся* переменная  $\xi = x/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — ширина шага (полосы), и каждая из неизвестных функций, зависящая от переменных  $x, y$ , формально станет зависящей и от переменной  $\xi$ .

Асимптотическое разложение для функции, описывающей поперечный прогиб  $w$ , представим в виде ряда

$$w = w_0(x, y) + \sum_{k=1}^n (w_k, N_k) \cdot \varepsilon^k, \quad (4)$$

где скобки означают скалярное произведение векторов, а вектора  $w_k$  имеют вид:

$$w_1 = (w_{0x}, w_{0y}, 0, 0, 0), \quad w_2 = (w_{0xx}, w_{0xy}, w_{0yy}, 0, 0), \quad (5)$$

$w_3$  — вектор, составленный из третьих производных функции  $w_0$ , не выписан в явном виде, т.к. далее не используется.

Вектора  $N_k$  также имеют размерность 5. Осредненное дифференциальное уравнение колебаний:

$$Kw_{0xxxx} + Lw_{0xxyy} + Mw_{0yyyy} = -\lambda_0 w. \quad (6)$$

$$K = \int_0^1 C_1 d\xi, \quad L = \int_0^1 \left( \frac{b}{a} \cdot C_1 + C_3 + 2 \cdot (a - b) \right) d\xi, \quad (7)$$

$$M = \int_0^1 \left( \frac{b}{a} \cdot C_3 - \frac{b^2}{a} + a \right) d\xi, \quad \lambda_0 = \int_0^1 \lambda d\xi. \quad (8)$$

Анализ всех исследований частот колебаний пластин с переменными параметрами показывает достоверность полученных формул. Исследование было основано на сравнении аналитических и численных результатов. Численные расчеты проводились при использовании программного комплекса ANSYS и пакета Wolfram Mathematica.

## Литература

- [1] Madenci E., Guven I. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS, C.8, Springer, New York. 2006. pp. 403–412
- [2] Argatov I., Mishuris G. Contact Mechanics of Articular Cartilage Layers. Asymptotic Models. Springer. 2015. 335 p. ISBN:978-3-319-20082-8
- [3] Bakhvalov N.S., Panasenko G. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. Springer, 2013, 366 p. ISBN-13: 978-9401075060
- [4] Naumova N.V., Ivanov D., Voloshinova T. Deformation of a Plate with Periodically Changing Parameters, AIP Conference Proceedings 1959, 070026 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5034701>

## Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами разной жёсткости

*Нестерчук Г.А.*

*grigory\_ne@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* подкреплённая цилиндрическая оболочка, устойчивость, асимптотический метод.

Цилиндрические оболочки широко используются во многих отраслях. Например, в судостроении и ракетостроении при разработке корпусов конструкций, при проектировании трубопроводов, резервуаров и ядерных реакторов. Наряду с использованием гладких оболочек с целью увеличения запаса прочности широко применяется подкрепление оболочек рёбрами жёсткости (шпангоутами). В зависимости от постановки задачи это позволяет либо выбрать оптимальное распределение веса конструкции между оболочкой и ребрами с целью максимизации критического давления [1], либо облегчить конструкцию при сохранении её прочностных характеристик [2].

В работе рассматривается задача о потере устойчивости тонкой упругой цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления. С целью увеличения критического давления оболочка подкрепляется круговыми шпангоутами с различной жёсткостью. Большинство работ, посвященных теории устойчивости, рассматривают случай одинаковых шпангоутов [3], но при варьировании параметров каждого шпангоута в отдельности можно увеличить прочность конструкции, что позволяет получить решение задачи как об увеличении критического давления при сохранении массы конструкции, так и о минимизации массы конструкции при сохранении величины критического давления.

В работе рассматривается случай шарнирного опирания краев оболочки, подкрепленной рёбрами жёсткости одинаковой ширины и разной высоты. Высоты шпангоутов, характеризующие их жёсткость, распределяются вдоль образующей оболочки по линейному закону. Предполагается, что подкрепленная и гладкая оболочки теряют устойчивость при одинаковом критическом давлении. Решение задачи о потере устойчивости сводится к решению краевой задачи на собственные значения системы уравнений, описывающих устойчивость цилиндрической оболочки, граничных условий на краях оболочки и условий сопряжения с рёбрами жёсткости по параллелям. В уравнениях содержатся безразмерные толщины оболочки и шпангоутов, которые являются малыми параметрами, следовательно, при решении задачи о потере устойчивости можно воспользоваться асимптотическими методами.

Полученные оптимальные параметры для функции распределения высот шпангоутов используются для конструирования оболочки и обчётом её методом конечных элементов. Сравнение результатов показывает, что метод, описанный в работе, может быть использован на стадии проектирования тонкостенных конструкций.

### Литература

- [1] Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. 196 с.
- [2] Адамович, И.А., Филиппов, С.Б. 2015. Оптимизация параметров подкрепленной цилиндрической оболочки. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 60, 2 (2015), 1.
- [3] Teng, J. G., Rotter J. M. Buckling of Thin Metal Shells, CRC Press, 2004. 520 p.

## Напряженное состояние сосуда под давлением с множественными случайно распределенными дефектами

*Окулова Д.Д., Седова О.С.*

*st062247@student.spbu.ru, o.s.sedova@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* поверхностные дефекты, сосуды давления, метод конечных элементов, сферическая оболочка

Сосуды давления обладают широким спектром применения в различных отраслях промышленности. Их долговечность существенно сокращается при появлении локальных повреждений на поверхности. Дефекты в виде питтингов,

каверн, изъязвлений, трещин и пр. могут возникать из-за условий эксплуатации, неблагоприятных факторов окружающей среды [1], также неровная форма поверхности может быть обусловлена формированием рельефа вследствие диффузии атомов вдоль поверхности, вызванной изменением химического потенциала вдоль поверхности [2].

Для предотвращения преждевременного разрушения и обеспечения долгосрочной надежности необходимо анализировать локально сконцентрированные нагрузки в окрестности дефектов. Большая часть работ, в которых исследуется напряженно-деформированное состояние оболочек под давлением посвящена случаям, когда дефекты отсутствуют, или оболочкам с отдельным, единичным дефектом [3, 4]. Лишь в нескольких публикациях исследованы сосуды с несколькими дефектами, например, [5]–[7]. В этих работах показано, что если повреждений на поверхности сосуда давления несколько, но они расположены достаточно далеко друг от друга, то локальные напряжения в окрестности каждого из них мало отличаются от напряжений, возникающих в окрестности единичного дефекта. Однако недостаточно исследованными остаются вопросы напряженно-деформированного состояния сосудов давления с множественными случайным образом расположенными на поверхности дефектами и влияния расстояния между дефектами на напряжения в окрестности дефектов.

В представленном исследовании проведено численное моделирование напряженного состояния тонкостенного сферического сосуда под давлением, имеющего множественные дефекты. Дефекты имеют форму полусферических выемок и распределены случайным образом на экваторе внешней поверхности. Кроме этого, исследовано влияние расстояния между соседними дефектами на рост напряжений в сосуде для различного количества дефектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 21-71-20020.

## Литература

- [1] Groysman A. Corrosion problems and solutions in oil refining and petrochemical industry // Gewerbestrasse, Switzerland: Springer International Publishing, 2017.
- [2] Shuvalov G. M., Kostyrko S. A. Stability analysis of nanoscale surface patterns in stressed solids // AIP Proceedings. 2018. № 1959, P. 070016.
- [3] Седова, О. С., Пронина, Ю. Г., Кабриц, С. А. Коррозия сферических элементов под действием давления и неравномерного нагрева // Деформация и разрушение материалов. 2018. № 1. С. 2–7.
- [4] Пронина Ю. Г. Равномерная механохимическая коррозия полой сферы из идеального упругоэластического материала под действием постоянного давления // Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 1. С. 113–122.

- [5] Седова О. С. Расчет напряжений в полой сфере с внутренними поверхностными дефектами // Вектор науки Тольяттинского государственного университета, 2020. № 2(52), С. 68–73.
- [6] Окулова Д. Д., Вакаева А. Б., Седова О. С. Расчет напряжений в полой сфере с поверхностными дефектами // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 112–116.
- [7] Zhu, Y., Li, R., Fang, W., Zhao, X., Tang, W., Yin, B., Zhang, J. Interaction of surface cracks on an egg-shaped pressure shell // Archive of Applied Mechanics, 2020. pp. 1–8.

## Интегрально-оценочные критерии для границ применения закона Гука

*Орехов А.В.*

*a\_v\_orehov@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* упругая деформация, пластическая деформация, закон Гука.

Основной целью изучения свойств материалов при воздействии на них внешних сил является установление связи между напряжениями и деформациями. На первом этапе такого воздействия происходит упругая деформация. В этом случае, согласно закону Гука, существует линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Если изучается зависимость величины нагрузки как функция от деформации, то переход от упругого состояния к пластическому характеризуется изменением вида возрастания нагрузки от линейного к логарифмическому, например, [1, 2]. Если же нагрузка является аргументом, а деформация рассматривается как функция от неё, то переход от упругого состояния к пластическому характеризуется изменением вида возрастания деформации от линейного к параболическому или экспоненциальному, например, [3, 4]. Результаты теоретического исследования или численного моделирования упругих свойств различных материалов могут быть представлены либо в виде таблиц, либо в виде непрерывных функций. В этой связи практический интерес представляет получение аналитических критериев, позволяющих определить момент, когда характер монотонного возрастания некоторой величины переходит от линейного к нелинейному типу. Для аналитического исследования табличных данных можно использовать аппроксимационно-оценочные критерии [5]–[7]. Рассмотрим возможное решение этой задачи для непрерывного случая.

Не умаляя общности, будем рассматривать непрерывные и неубывающие функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[0, b]$ . Класс таких функций будем обозначать прописной латинской буквой  $M$ , т. е.  $f(x) \in M[0, b]$ .

Изучим проблему классификации  $f(x) \in M[0, b]$  по характеру их возрастания на отрезке  $[0, b]$ . Выберем четыре эталонные функции для такой классификации: линейную —  $\varphi_1(x) = ax$ , степенную —  $\varphi_2(x) = cx^2$ , логарифмическую —  $\varphi_3(x) = g \ln(1 + x)$ , показательную —  $\varphi_4(x) = k(e^x - 1)$ .

Все эти функции в точке 0 равны нулю. Любую функцию  $\tilde{f}(x) \in M[0, b]$  при помощи преобразования  $f(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)$  можно изменить так, чтобы и она удовлетворяла условию  $f(0) = 0$ . Целью заявленной выше классификации будет определение характера возрастания  $f(x) \in M[0, b]$ .

Прежде чем определить критерий такой классификации, заметим, что интегральной характеристикой скорости является пройденный путь. Поэтому естественно заметить, что если на некотором множестве сравниваются две различные скорости, то в качестве меры их различия может быть выбрана разница пройденного пути.

Исходя из этого, определим критерий сравнения скорости изменения двух функций  $f(x), g(x) \in M[0, b]$  как интеграл

$$S(b) = \int_0^b (f(t) - g(t))^2 dt.$$

Геометрический смысл этого критерия состоит в том, что  $S(b)$  оценивает площадь плоской области, ограниченной непрерывными неубывающими кривыми  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Введем обозначение  $S_i = \int_0^b (f(t) - \varphi_i(t))^2 dt$ , и по определению, будем считать,

что непрерывная неубывающая функция  $f(x)$  «почти линейно» возрастает на отрезке  $[0, b]$ , если справедливо неравенство:  $S_1 < S_i$ , где  $i \in \{2, 3, 4\}$ , в противном случае, изменение  $f(x)$  будем считать нелинейным.

Неопределенные коэффициенты  $a, c, g, k$ , должны удовлетворять условию:  $f(b) = \varphi_i(b)$ . Тогда:

$$a = \frac{f(b)}{b}, \quad c = \frac{f(b)}{b^2}, \quad g = \frac{f(b)}{\ln(1+b)}, \quad k = \frac{f(b)}{e^b - 1}.$$

Если  $f(x)$  описывает связь между напряжениями и деформациями, то для определения границ применения закона Гука можно сравнить эту монотонно возрастающую функцию с эталонными  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_i(x)$ , где натуральный индекс

$i \in \{2, 3, 4\}$ . Вычислим два интеграла с переменными верхними пределами:

$$I_1(x) = \int_0^x (f(t) - \varphi_1(t))^2 dt, \quad I_2(x) = \int_0^x (f(t) - \varphi_i(t))^2 dt.$$

Решением уравнения:

$$I_1(x) - I_2(x) = 0$$

относительно неизвестной  $x$  будет «критическая точка»  $b$ , в которой «почти линейное» возрастание  $f(x)$  изменяется на нелинейное. То есть, левее точки  $b$  для расчёта прочности, жёсткости и устойчивости можно использовать модели, основанные на парадигме закона Гука, а справа от  $b$  закон Гука становится неприменимым.

## Литература

- [1] Schneider S., Schneider S.G., Silva H.M., Moura Neto C. and et al. Study of the non-linear stress-strain behavior in Ti-Nb-Zr alloys. *Mat. Res.* [online]. 2005, vol.8, n.4, pp.435–438. ISSN 1516-1439. <http://dx.doi.org/10.1590/S1516-14392005000400013>.
- [2] Schneider S. G., Nunes C. A., Rogero S. O., Higa O. Z., Bressianil J. C. Mechanical properties and cytotoxic evaluation of the Ti-3Nb-13Zr alloy. *Biomechanica*. 2000. vol. 8(1), pp. 84–87
- [3] Павилайнен Г. В., Юшин Р. Ю. Анализ учёта упругой трансверсальной изотропии и пластической анизотропии при изгибе круглых пластин. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2011. Вып. 1. С. 122–131.
- [4] Pavilaynen G. V., Yushin R. U. An approximate solution of elastic-plastic problem of circular strength different (SD) plates. // *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics: Abstracts of the International Conference. Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov*. St.Petersburg, VVM Publ. 2017. pp. 207–209.
- [5] Orekhov A.V. Criterion for estimation of stress-deformed state of SD-materials. // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. P. 070028. doi:10.1063/1.5034703
- [6] Орехов А.В. Аппроксимационно-оценочные критерии напряженно-деформируемого состояния твердого тела. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 230–242. doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.304
- [7] Orekhov A.V. Statistical criteria for the limits of application of Hooke's law // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 391–401. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.404>



## Влияние скорости и температуры предварительного деформирования на эффекты памяти формы в сплаве TiNi

*Остропико Е. С.*

*es-ostropiko@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* эффект памяти формы, обратимая память формы, высокоскоростное деформирование.

Известно, что свойства материалов, и сплавов с памятью формы в частности, зависят от режима и скорости деформирования. Однако, существенная доля исследований, посвященных влиянию скорости деформирования на свойства материалов с памятью формы, направлены на изучение механических свойств, псевдоупругости, характеристических температур; проводится большое количество структурных исследований. Среди работ, направленных на функциональные свойства, в первую очередь надо отметить классические работы В.А. Лихачева 1988-го [1] и 1990-го года [2], где было показано влияние скорости деформирования при комнатной температуре на эффекты однократной (ЭПФ) и обратимой (ОПФ) памяти формы в никелиде титана. В статьях [3, 4] также представлены исследования влияния скорости сжатия на ЭПФ и ОПФ. В работах было показано, что высокоскоростное сжатие может приводить к улучшению функциональных свойств, однако, при анализе использовались не сами эффекты однократной и обратимой памяти формы, а коэффициенты восстановления – отношения величин ЭПФ и ОПФ к остаточной и необратимой деформации соответственно. Современные же работы преимущественно направлены на структурные исследования [5, 6].

Цель настоящей работы - исследовать функциональные свойства сплава TiNi эквиатомного состава после сжатия с различными скоростями в широком диапазоне температур.

Образцы изготавливались на токарном станке из горячекатанных прутков, после чего отжигались при температуре  $500^{\circ}\text{C}$  в течение 1 часа и охлаждались с печью. Характеристические температуры:  $M_s = 78^{\circ}\text{C}$ ,  $M_f = 55^{\circ}\text{C}$ ,  $A_s = 89^{\circ}\text{C}$ ,  $A_f = 110^{\circ}\text{C}$ . Высокоскоростное сжатие образцов проводилось методом Кольского для разрезных стержней Гопкинсона со скоростями 500, 1200, 1800  $\text{сек}^{-1}$ , при поддержке Константинова А.Ю. (ННГУ). Температуры деформирования: 20, 103, 130, 87,  $63^{\circ}\text{C}$  – позволили сравнить отклик сплава в различном фазовом состоянии. Остаточная деформация варьировалась в зависимости от скорости и составила 5, 10, 17% для 500, 1200, 1800  $\text{сек}^{-1}$  соответственно. Для сравнения функциональных свойств были использованы аналогичные образцы,

деформированные квазистатически до соответствующих остаточных деформаций (с точностью до десятых) при соответствующих температурах. После задания предварительной деформации образцы термоциклировали в термомеханическом анализаторе и измеряли величины полученных эффектов однократной и обратимой памяти формы.

Исследование показало, что скорость деформирования существенно влияет на функциональные свойства сплава TiNi. Кривые деформация-температура после квазистатического и динамического сжатия совершенно разные и косвенно показывают чувствительность процессов переориентации и наведения мартенсита к скорости деформирования. Величины ЭПФ и ОПФ мартенситного типа после высокоскоростного сжатия меньше, чем после квазистатического: с ростом скорости они уменьшаются почти на 25%. ОПФ аустенитного типа возникает при более низких температурах высокоскоростного сжатия, и её значения выше, чем после квазистатического сжатия. Так ОПФ аустенитного типа после деформирования при 130°C со скоростью 1800 сек<sup>-1</sup> почти в три раза выше, чем в квазистатическом случае.

Исследования проведены с использованием оборудования ресурсных центров «Прикладная аэродинамика», «Исследование экстремальных состояний материалов и конструкций», «Термогравиметрические и калориметрические методы исследования» Научного парка СПбГУ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-00131).

## Литература

- [1] Лихачев В.А., Шиманский С.Р. Влияние скорости деформирования на обратимую память формы никелида титана // Проблемы прочности, 1988. № 2. С. 65–68.
- [2] Лихачев В.А., Патрикеев Ю.И. Эффект памяти формы в никелиде титана после статического и ударного деформирования // Механика прочности материалов с новыми функциональными свойствами. Рубежное, 1990. С. 128–129.
- [3] Belyaev S.P., Morozov N.F., Razov A.I., Volkov A.E., Wang L., Shi S., Gan S., Chen J., Dong X. Shape Memory Effect in Titanium-Nickel after Preliminary Dynamic Deformation // Materials Science Forum, 2002. Vol. 394-395. P. 337–340
- [4] Острошико Е.С., Разов А.И. Функциональные свойства эквиатомного сплава TiNi после высокоскоростного деформирования сжатием при различных температурах // Приложение к журналу. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2018. Т. 23. № 123. С. 488–491.
- [5] Qiu Y., Young M.L., Nie X. High strain rate compression of martensitic NiTi shape memory alloy at different temperatures // Metallurgical and Materials Transactions A, 2017. Vol. 48. P. 601–608.

- [6] Jiang S.-Y., Zhang Y.-Q. Microstructure evolution and deformation behavior of as-cast NiTi shape memory alloy under compression // Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2012. Vol. 22. P. 90–96.

## Учёт пластической анизотропии стальных вертикальных опор буровых платформ

*Павилайнен Г.В.*

*g.pavilaynen@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* пластическая анизотропия, упругопластический изгиб, эффект SD.

Многие современные конструкции разрабатываются с учётом эксплуатации при допустимом развитии пластических деформаций и предотвращении хрупкого разрушения.

Многие металлические конструкционные сплавы анизотропны изначально. При этом они имеют небольшую упругую анизотропию и значительную пластическую. Например, отечественный сплав Д16Т имеет различие в модулях Юнга разных направлений 10%, а различие в пределах текучести — более 22%. Конструкционные стали получают анизотропию в процессе технологической обработки и для них наблюдается отчётливое влияние разнопрочности или эффекта SD. Использование стальных балочных конструкций в современном промышленном строительстве определяет важность исследования их НДС, прочности и надёжности.

В работах [1, 2] были исследованы задачи упругопластического изгиба вертикальных балок без учёта собственного веса, в работе [3] проведен учёт собственного веса балки в упругой стадии деформирования.

В предлагаемой работе с общих позиций рассматриваются задачи упругопластического изгиба пластически анизотропных балок, абстрагируясь от причин, вызвавших анизотропию. Для построения математической модели изгиба вводится параметр пластической анизотропии  $d$  как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца к пределу текучести при растяжении и модифицированные параметры, учитывающие собственный вес конструкции и влияние гидростатического бокового обжатия при нахождении конструкции в воде. Задача сводится к решению нескольких дифференциальных уравнений равновесия для различных случаев распределения пластических областей в балке. Основная сложность заключается в невозможности аналитического интегрирования разрешающего уравнения для функции отклонения балки от вертикального положения по всей длине с учётом требования гладкости функции отклонения. В частных случаях решение удается получить в виде анали-

тических формул и сравнить с известными результатами [4]–[6] и с решениями МКЭ при применении ППП ANSYS [7, 8]. В упругом случае решение сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, известного как уравнение Эйри.

Можно констатировать, что учёт веса конструкции не приводит к существенному изменению вертикального отклонения при изгибе для балок, длина которых не превышает 20 м. Кроме этого, наличие гидростатического обжатия снижает величину продольного напряжения при изгибе в сжатой части балки и повышает значение боковой изгибающей нагрузки или изгибающего момента, при котором балка переходит от упругой к нелинейной стадии деформирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №19-01-00208).

## Литература

- [1] Pavilaynen G.V. Elastic-Plastic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes. Amer.Math.Soc.Providence, R.I.,1993, pp.227–233
- [2] Лачугин Д.В. Упруго-пластический изгиб разнопрочной вертикальной консоли под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце. //Российско-китайский научный журнал «Содружество». Раздел: физико-математические науки. 2016. № 2(2). С. 32–35
- [3] Bunin G.V. The Problem of elastic-plastic bending of heavy SD-Beams. In Proceedings CNSA, Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov). 2017. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973943
- [4] Pavilaynen G.V. Elastic-plastic deformations of a beam with the SD-effect. AIP Conf. Proc. 2014 ICNAAM, Rhodes, Greece.
- [5] Lachugin D.V., Pavilaynen G.V. On the bending of structural materials with plastic anisotropic effect. In AIP Conference Proceedings . Editors: Elena Kustova, Gennady Leonov, Nikita Morosov, Mikhail Yushkov and Mariia Mekhonoshina. 2018. St. Petersburg, p. 070019
- [6] Павилайнен Г. В., Бембеева А. И., Канин М. С. Упруго-пластический изгиб разнопрочных балок. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 284–291
- [7] Pavilaynen G.V., Naumova N.V. Elastic-plastic deformations of SD-beams. In Proceedings VII Polyachov’s Reading, Saint-Petersburg, 2015. Book of Abstract I, p. 239.
- [8] Волошинова Т.В., Лачугин Д.В., Намазов М.Е. Упруго-пластический изгиб SD балок буровых и геологоразведочных вышек. // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2019. № 2. С.67–73

## Базовые эксперименты и решение основных задач холодной ползучести в рамках эндохронной теории неупругости

*Помыткин С.П.*

*sppom@yandex.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения,

190000, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67

*Ключевые слова:* низкотемпературная ползучесть, эндохронная теория, определяющие соотношения, калибровка параметров, базовые эксперименты, верификация теории.

Хорошо известно [1, 2], что в процессе эксплуатации ряд авиационных конструкций, узлов и агрегатов подвергается длительному воздействию постоянных, ступенчато и циклически меняющихся во времени нагрузок. Это может привести, а иногда и приводит, к развитию необратимых деформаций ползучести, имеющих при невысоких температурах, как правило, вязкий механизм зарождения и эволюции. Для описания явления ползучести в арсенале инженеров и исследователей имеется весьма разнообразный набор теорий, моделирующих процессы накопления неупругих деформаций во времени [1, 2]. Одним из подходов к решению задач ползучести является эндохронная теория неупругости [3, 4].

При использовании различных вариантов теорий ползучести необходимо уметь из базовых экспериментов находить константы и функции материала, входящие в определяющие соотношения. Как правило, итоговыми результатами базовых экспериментов являются статистически обработанные графики «деформация ползучести — время», полученные в одноосном случае при различных постоянных напряжениях на достаточно длительных временных интервалах. Проведение подобных опытов обычно требует значительное количество энергоемких экспериментальных установок, весьма существенных материальных, временных и интеллектуальных затрат.

Используя микроструктурные исследования титановых сплавов [5] и гипотезу о вязком механизме развития неупругих деформаций во времени при комнатных температурах, в [6] был предложен расчётно-экспериментальный метод определения материальных констант, входящих в один из вариантов теории упрочнения [1], основанный на данных, полученных из экспериментальных зависимостей «напряжение — деформация» при одноосном деформировании с постоянной скоростью деформации на существенно меньшей временной базе, нежели это происходит традиционно. Впоследствии этот метод был использо-

ван для прогнозирования влияния холодной ползучести на деформирование конструкций из титановых сплавов [7].

В представляемом докладе рассматривается вариант эндохронной теории неупругости [4], адаптированный для описания различных проявлений ползучести. Для калибровки параметров, входящих в определяющие соотношения эндохронной теории, применялся метод [8], основанный на изучении кривых «напряжение — деформация», полученных в опытах на растяжение (или кручение) при разных скоростях деформирования. Эти опытные данные для титанового сплава ПТ-3В были взяты из работы [7]. После их обработки был получен полный набор констант и функций сплава ПТ-3В, необходимый для использования эндохронной теории [4, 8].

В докладе представлены результаты моделирования основных проявлений ползучести при одноосных и ступенчато изменяющихся нагружениях, полученные в рамках эндохронной теории неупругости [4, 8]. Приведённые примеры демонстрируют хорошую согласованность теоретических результатов и экспериментальных наблюдений. В частности, установлено:

- существенное влияние зависимости предела текучести материала от скорости деформирования на развитие деформаций ползучести;
- зависимость параметра эндохронности от времени значительно улучшает результаты моделирования деформаций ползучести по сравнению с гипотезой о постоянном значении этого параметра;
- предельные (по параметру эндохронности) варианты теории [4] уже достаточно хорошо описывают экспериментальные данные по ползучести рассматриваемого сплава;
- при постоянных напряжениях дифференциальные уравнения эндохронной теории [4, 8] интегрируются в квадратурах и пригодны для решения прямых и обратных задач ползучести.

## Литература

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [2] Betten J. Creep mechanics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2005. 353 p.
- [3] Kletschkowski T., Schomburg U., Bertram A. Endochronic viscoplastic material models for filled PTFE // *Mechanics of Materials*. 2002. Vol. 34. N 12. P. 795-808. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00197-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00197-7)
- [4] Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2004. No 26. С. 83-85. doi: <https://doi.org/110.14498/vsgtu182>
- [5] Neeraj T., Hou D.-H., Daeh G. S., Mills M. J. Phenomenological and microstructural analysis of room temperature creep in titanium alloys // *Acta materialia*. 2000. Vol. 48, N 6. P. 1225-1238. doi: [10.1007/978-3-030-34770-3\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34770-3_18)

- [6] Михайлов Э. Ю., Нигматуллин В. И., Палий О. М., Рыбакина О. Г. Ускоренные расчётно-экспериментальные методы оценки холодной ползучести титановых сплавов // Конференция по строительной механике корабля, посвящённая памяти профессора П.Ф.Папковича. Санкт-Петербург, 23-24 декабря 2015. СПб. 2015. С. 69–70.
- [7] Палий О. М., Рыбакина О. Г. Учёт влияния холодной ползучести на деформирование конструкций // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2018. No 3. С. 52-60. doi: 10.7868/S0572329918030078
- [8] Помыткин С. П. Эндохонная теория неупругости для больших деформаций и поворотов. Автореф. дисс. ... д.ф.-м.н.. СПб: СПбГУ, 2013. 32 с.

## **Физико-математическое исследование функциональных термо-оптико-механических свойств и взаимосвязей полиметилметакрилата**

*Федоровский Г.Д.*

*g.fedorovsky@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* полиметилметакрилат, тепловая деформация, линейная и нелинейная упруговязкопластичность, долговечность, поляризационно-оптические свойства.

Полиметилметакрилат (ПММА) — органическое стекло, его различные модификации имеют широкое применение в областях стратегического, бытового и других назначений, в частности, как модельный материал для решения задач механики деформируемых сред, в частности, поляризационно-оптическим методом. Этому важному, перспективному материалу, его созданию, свойствам, изготовлению изделий из него, изучению и применению во всём мире посвящается всё более нарастающее количество фундаментальных и прикладных научных работ.

Основные испытания различных физико-механических характеристик, рассмотренного в настоящей работе материала, были проведены автором и его коллегами при одноосном деформировании растягиваемых образцов — двойных плоских лопаток технического ПММА марки ТОСП.

В этой работе, на базе эффективного, современного эндохронного подхода, в широком интервале квазистатического и динамического изменения характеристик анализируются проблемы и новые результаты физико-механического, экспериментального, теоретического изучения, моделирования и прогнозирования определяющих функциональных свойств полиметилметакрилата: тепловой деформации, линейной и нелинейной вязкоупругопластичности, долговечности и поляризационно-оптически свойств. Рассматриваются и обсуждаются зако-

номерности взаимосвязей свойств, их зависимости от параметров структуры и технологий изготовления.

Показано, что базирующиеся на концепциях горизонтального и вертикального масштабирования (2D скейлинга) в различных фазовых координатах, специальные аналитические преобразования, позволяют инвариантным образом преобразовывать параметры свойств к различным формам, в частности, s-образной, с малым числом постоянных, полноценно отражающим структурные переходы при воздействиях, в том числе при сильных структурных переходах. Установлены закономерности переходов линейного и нелинейного, энергетического импульсного и эндохронного вида. Рассмотрены соответствующие новые критерии и их инварианты для ПММА.

Для численных расчётов и математического моделирования были использованы стандартные программные комплексы «Excel» и «Mathcad».

Перекрытое (параллельное), широкое изучение характеристик ПММА и их взаимосвязей позволило существенно повысить надёжность исследований и верификаций рассмотренных моделей, установить наиболее оптимальные по трудозатратам, стоимости и широте прогнозирования методики испытаний и расчётов по сравнению с иными, традиционно применяемыми исследователями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СПбГУ (Мероприятие 3, id 26130576)

## Неклассические колебания моноклинной композитной полосы

*Рябов В.М.*<sup>1</sup>, *Ярцев Б.А.*<sup>2</sup>

*v.ryabov@spbu.ru, boris\_yar@mail.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>«Крыловский государственный научный центр»,  
196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

*Ключевые слова:* композит, моноклинная полоса, связанные колебания, собственная частота, коэффициент механических потерь.

Рассматривается квазиоднородная композитная полоса постоянного по длине прямоугольного поперечного сечения, армирующее волокна которой произвольно ориентированы относительно срединной оси. Математическая модель затухающих изгибно-крутильных колебаний моноклинной полосы строится на основе уточненной теории изгиба балки Тимошенко, теории обобщенного кручения Фойгта–Лехницкого и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в форме комплексных модулей. В предположении квазигармонического харак-



тера колебаний связанная система дифференциальных уравнений движения записывается в виде

$$\begin{aligned} w_{,xxxx} + a_{11}w_{,xx} + a_{12}w + a_{13}\Phi_{,x} &= 0, \\ \Phi_{,xx} + a_{21}\Phi + a_{22}w_{,xx} + a_{23}w_{,x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Связанность системы дифференциальных уравнений (1) обусловлена отличием от нуля коэффициентов взаимного влияния первого и второго рода при ориентации армирующих волокон относительно оси моноклинной полосы в направлениях  $\theta \neq 0^0, 90^0$ . При ориентации армирующих волокон в направлениях  $\theta = 0^0, 90^0$  материал полосы классифицируется как ортотропный (трансверсально-изотропный) и коэффициенты взаимного влияния становятся равными нулю. Тогда система дифференциальных уравнений (1) распадается на два независимых уравнения, первое из которых описывает поперечные колебания балки Тимошенко, а второе – крутильные колебания ортотропного стержня прямоугольного поперечного сечения.

Решение связанной системы дифференциальных уравнений (1) выполнялось в два этапа. Сначала, используя преобразование Лапласа по переменной  $x$ , находилось упругое (вещественное) решение. Затем, используя в качестве начальных значений найденные вещественные собственные частоты, методом итераций третьего порядка вычислялись комплексные собственные частоты.

Оценка достоверности математической модели изгибно-крутильных колебаний и предложенного метода решения дифференциальных уравнений (1), проведенная путём сопоставления расчётных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов собственных колебаний безопорных полос показала их хорошее согласование.

Численные исследования выполнялись для безопорной и консольной полос из однонаправленного углепластика. При проведении численных исследований варьировались: а) углы ориентации армирующих волокон относительно оси полосы  $\theta$  при фиксированной длине  $l$ , б) длина полосы  $l$  при фиксированном угле ориентации  $\theta$ . Анализ полученных результатов проводился путём сопоставления собственных форм, собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных изгибно-крутильных колебаний моноклинной полосы с парциальными собственными формами, парциальными собственными частотами и парциальными коэффициентами механических потерь несвязанных изгибных и крутильных колебаний ортотропной (трансверсально-изотропной) полосы той же геометрии. Зависимости парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь изгибных колебаний определялись из решения уравнения поперечных колебаний балки Тимошенко по вещественным и мнимым частям «свободного» комплексного модуля упругости и «свободного» комплексного модуля межслойного сдвига. Значения парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь крутильных колебаний находились из

решения уравнения крутильных колебаний ортотропного стержня прямоугольного поперечного сечения по вещественным и мнимым частям «свободного» комплексного модуля межслойного сдвига и вещественным и мнимым частями «чистого» комплексного модуля сдвига в плоскости армирования.

В результате выполненного анализа установлено существование двух типов отрезков изменения аргументов  $\theta$  и  $l$ , соответствующих различному характеру изменения собственных форм, собственных частот  $f_i = f_i(\theta, l)$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_i = \eta_i(\theta, l)$  связанных изгибно-крутильных колебаний моноклинной полосы. На отрезках первого типа функции  $f_i = f_i(\theta, l)$  и  $\eta_i = \eta_i(\theta, l)$  связанных колебаний хорошо приближаются аналогичными функциями несвязанных парциальных изгибных или крутильных колебаний ортотропной полосы той же геометрии. В тоже время существуют отрезки изменения аргументов  $\theta$  и  $l$  второго типа, на которых изменения собственных форм, собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных изгибно-крутильных колебаний моноклинной полосы даже качественно не приближаются соответствующими собственными формами, собственными частотами и коэффициентами механических потерь несвязанных парциальных изгибных или крутильных колебаний ортотропной полосы той же геометрии. Это обусловлено появлением областей взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний. Области взаимной трансформации возникают на отрезках с нечёткими границами  $[\theta_1, \theta_2]$  (при  $l = const$ ) или  $[l_1, l_2]$  (при  $\theta = const$ ) с условными центрами в точках пересечения зависимостей парциальных собственных частот изгибных и крутильных колебаний. Для безопорной моноклинной полосы области взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний возникают на отрезках  $[\theta_1, \theta_2]$  или  $[l_1, l_2]$  с условными центрами в точках пересечения зависимостей парциальных собственных частот либо чётных, либо нечётных тонов несвязанных изгибных и крутильных колебаний. Для консольной моноклинной полосы такие области возникают на отрезках  $[\theta_1, \theta_2]$  или  $[l_1, l_2]$  с условными центрами в точках пересечения зависимостей парциальных собственных частот всех тонов несвязанных изгибных и крутильных колебаний. Отмеченное различие порождается изменением граничных условий, симметричных для безопорной полосы, и несимметричных для консольной полосы.

### Литература

- [1] Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1959. 439 с.
- [2] Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig-Berlin: Teubner. 1928. 978 s.
- [3] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [4] Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.

## Рассеяние энергии при колебаниях трехслойных композитных пластин

*Рябов В.М.,<sup>1</sup> Ярцев Б.А.,<sup>2</sup> Паршина Л.В.<sup>2</sup>*  
*v.ryabov@spbu.ru, boris\_yar@mail.ru, ludaparshina@mail.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>«Крыловский государственный научный центр»,  
196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

*Ключевые слова:* пластина, композит, анизотропия, вязкоупругий полимер, температурно-частотная зависимость, связанные колебания, собственная частота, коэффициент механических потерь.

Предложена математическая модель затухающих колебаний трёхслойных пластин, образованных двумя жёсткими анизотропными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. Каждый жёсткий слой представляет собой анизотропную структуру, формируемую конечным числом произвольно ориентированных ортотропных вязкоупругих слоев композитов. Модель строится на основе использования вариационного принципа Гамильтона [1], уточненной теории многослойных пластин Болотина [2], модели комплексных модулей и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости [3]. При описании физических соотношений материалов жёстких слоев влияние частоты колебаний и температуры окружающей среды считается пренебрежимо малым, в то время как для мягкого слоя вязкоупругого полимера учёт температурно-частотной зависимости упруго-диссипативных характеристик выполняется на основе экспериментально определенных обобщенных кривых. В качестве частного случая общей задачи путем пренебрежения деформированием срединных поверхностей жёстких слоев в одном из направлений осей жёстких слоев трехслойной пластины получены уравнения продольных и поперечных затухающих колебаний глобально ортотропного трёхслойного стержня. Минимизация функционала Гамильтона позволяет свести задачу о затухающих колебаниях анизотропных конструкций к алгебраической проблеме комплексных собственных значений.

Приводится описание метода численного решения уравнений затухающих колебаний трёхслойных безопорных прямоугольных пластин, образованных двумя жёсткими моноклинными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. Для формирования системы алгебраических уравнений применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. Сначала находятся вещественные решения. Для нахождения комплексных собственных частот системы в качестве их начальных значений используются найденные вещественные собственные

частоты, а затем вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка. Обсуждаются результаты исследования сходимости численного решения дифференциальных уравнений движения на примере безопорной прямоугольной трёхслойной пластины с трансверсально-изотропными жёсткими слоями. Оценка достоверности математической модели и метода численного решения, выполненная путем сопоставления расчётных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь для двух вариантов состава безопорной трёхслойной пластины, продемонстрировала их хорошее согласование.

Приводится получаемая из численного решения задачи о связанных затухающих колебаниях трёхслойных пластин номенклатура параметров динамического отклика. В качестве основных объектов исследования рассматриваются две специальные структуры армирования жёстких слоев: симметричная и асимметричная. Симметричная структура армирования жёстких слоев образована совокупностью однонаправленных слоев углепластика, одинаково ориентированных относительно глобальных осей этих слоев. В асимметричной структуре армирования однонаправленные слои углепластика ориентированы в противоположных направлениях относительно глобальных осей жёстких слоев. Приводятся результаты численного исследования параметров динамического отклика квазиоднородной моноклинной пластины. Показано, что связанные колебания симметричной трёхслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений, аналогичных системам уравнений, описывающих колебания квазиоднородной моноклинной пластины, а связанные колебания асимметричной трёхслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений, совпадающих с системами дифференциальных уравнений, описывающих колебания глобально ортотропной трёхслойной пластины.

Обсуждаются результаты численных исследований влияния ориентации армирования жёстких слоев, относительной толщины мягкого слоя изотропного вязкоупругого полимера и температуры окружающей среды на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных колебаний симметричной и асимметричной безопорных трёхслойных прямоугольных композитных пластин. Показано, что в симметричной трёхслойной пластине возникает изгибно-крутильное взаимодействие, порождающее взаимные трансформации собственных форм связанных мод колебаний, если хотя бы в одном из направлений пластины одна из собственных форм характеризуется чётным числом четвертей волны, а другая собственная форма — нечётным числом четвертей волны. В безопорной асимметричной трёхслойной пластине возникает изгибно-изгибное взаимодействие, порождающее взаимные трансформации собственных форм связанных мод колебаний в двух взаимно ортогональных плоскостях, если в главных направлениях пластины обе собственные формы

характеризуется либо чётным, либо нечётным числом четвертей волны. Установлено, что каждой моде собственных колебаний трёхслойных пластин соответствует эффективная относительная толщина мягкого слоя изотропного вязкоупругого полимера. Продемонстрировано влияние температуры окружающей среды на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь всех мод колебаний рассматриваемых пластин.

### Литература

- [1] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
- [2] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- [3] Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.

### Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами

*Филппов С.Б.*

*s\_b\_filppov@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* подкрепленная цилиндрическая оболочка, устойчивость, кольцевая пластина, асимптотический метод.

С помощью асимптотических методов исследована устойчивость под действием равномерного внешнего давления тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. Расчёты на устойчивость подкреплённых оболочек широко используются при проектировании подводных лодок, космических ракет, самолётов, котлов высоко давления и других современных инженерных конструкций.

В большинстве работ, посвященных теории устойчивости подкреплённых оболочек шпангоуты рассматриваются как круговые стержни [1, 2]. Такой подход оправдан, если ширина шпангоута не сильно отличается от его толщины. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной такими шпангоутами аналогична потере устойчивости гладкой оболочки, при которой на оболочке образуется множество вмятин, вытянутых вдоль образующей цилиндра.

С увеличением ширины шпангоутов эта форма потери устойчивости сменяется формой потери устойчивости локализованной на шпангоутах. В этом

случае чтобы найти критическое давление и форму потери устойчивости необходимо рассматривать шпангоут как кольцевую пластину.

Предполагается, что шарнирно-опёртая тонкая цилиндрическая оболочка подкреплена по параллелям одинаковыми кольцевыми пластинами. Для определения критического давления необходимо решить краевую задачу на собственные значения для систем уравнений, описывающих устойчивость цилиндрической оболочки и кольцевых пластин с учётом условий сопряжения на подкреплённых параллелях и граничных условий на краях оболочки и пластин. Предварительно следует найти входящие в эти уравнения начальные напряжения, возникающие при действии на подкреплённую оболочку внешнего давления.

В уравнения оболочки и пластины содержатся их безразмерные толщины, которые являются малыми параметрами. Это позволяет решить задачу об определении начальных напряжений и задачу устойчивости с помощью асимптотических методов [3]. И в том, и в другом случае решение представляется в виде суммы основного состояния и функций краевого эффекта. Для начальных напряжений основное состояние является безмоментным, а для формы потери устойчивости — полубезмоментным. Начальные напряжения, входящие в уравнение устойчивости пластины, получены в явном виде.

После подстановки приближённых решений в условия сопряжения и граничные условия краевая задача устойчивости в первом приближении распадается на несколько независимых задач, которые могут быть последовательно решены. Основной является задача об устойчивости кольцевой пластины под действием найденных начальных напряжений. Решения остальных задач вносят незначительный вклад в форму колебаний.

Уравнение устойчивости кольцевой пластины не имеет аналитического решения. Для случая, когда её безразмерная ширина является малым параметром, получено приближённое аналитическое решение. Форма потери устойчивости имеет много волн в окружном направлении. Критическое давление убывает при увеличении ширины пластины.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00208.

### Литература

- [1] Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкреплённых оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1999. 196 с.
- [2] Teng, J. G., Rotter J. M. Buckling of Thin Metal Shells, CRC Press, 2004. 520 p.
- [3] Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Изд-во Наука, 1995. 320 с.

## SD-effect for circular elastic-plastic plates from biological materials

*Franus D. V., Pavilaynen G. V.*

*franusdv@gmail.com, g.pavilaynen@spbu.ru*

Saint Petersburg State University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Key words:* plates, SD-effect, plasticity

### Introduction

Modern problems of industrial engineering and biomechanics constructions, in particular, the problems of modeling vision correction in ophthalmology are associated with the study of the stress-strain state of shells and plates made of complex materials [1]. These problems are essentially nonlinear in geometry and in physical properties. It is necessary to model large and inelastic deformations on the one hand, and to set complex loading systems on the other [2]. Solving such problems analytically is very hard, so modeling using FE methods is the best way to study them.

This paper considers the deformation of a significantly plastic anisotropic plate under hydrostatic loading.

The classical theory of elastic-plastic bending was developed in the scientific works of R. von Mises, R. Hill. Bending problems of orthotropic SD-plates are solved in works L. H. Donnell and [2, 3].

### Mathematical model

This paper considers the problem of elastic-plastic bending of a circular freely supported or rigidly clamped SD-plate possessing the properties of transverse anisotropy and uniformly loaded with pressure  $p$  on the upper surface.

In the article [3], the mathematical model for the SD-plate is made more complicated and a new criterion of fluidity is proposed:

$$k = \sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} + \sigma\beta \quad (1)$$

Here  $\sigma_r, \sigma_\theta$  are the stresses in the plane of the plate,  $k$  is a function of the yield stresses,  $\sigma$  is hydrostatic stress. In (1) the transversal isotropy parameter  $A$  is used, which varies from 1 to 2, and anisotropic plastic parameter  $\beta$ .

$$A = 2 - \frac{(\sigma_{pz} + \sigma_{cz})^2}{(\sigma_p + \sigma_c)^2} \frac{\sigma_p^2 \sigma_c^2}{\sigma_{pz}^2 \sigma_{cz}^2}, \quad \beta = \frac{3(\sigma_c - \sigma_p)}{\sigma_c + \sigma_p}, \quad (2)$$

where  $\sigma_p$  is the yield point for uniaxial tension in the plane of the plate,  $\sigma_{pz}$  the yield point for uniaxial tension in a direction perpendicular to the plane of the

plate,  $\sigma_c$  is the yield point by uniaxial compression in the plane of the plate,  $\sigma_{cz}$  is the yield point for uniaxial compression in a direction perpendicular to the plane of the plate. The parameter  $\beta$  characterizes the plastic anisotropy property named SD effect.

The bending theory is based on the plane stress state model. The deformation of the transverse shear is ignored. The stress in the direction perpendicular to the plane of the plate is assumed to be zero. If  $\sigma_p \leq \sigma_c$  then  $\beta$  greater or equal 0. When bending metal plates,  $\beta \leq 1$  should be adopted, for biological tissues, for example, elastin the coefficient changes from 0.5 to 3. In the center of the plate  $\sigma_\theta = \sigma_r$  and may be used the asymptotic formulas

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_p} = \frac{\beta + 3}{3\sqrt{(2-A)}} \left( 1 - \frac{2\beta}{3\sqrt{(2-A)}} \right),$$

$$\frac{\sigma_-}{\sigma_p} = -\frac{\beta + 3}{3\sqrt{(2-A)}} \left( 1 + \frac{2\beta}{3\sqrt{(2-A)}} \right), \quad (3)$$

where  $\sigma_-$  is a stress in the center of the top of the plate,  $\sigma_+$  is analogy stress of the bottom, can be used as a criterion for the reliability of a numerical calculation [4].

### Simulation Results.

To calculate the bending, the COMSOL 5.4 software package is used. Depending on the pressure, sizes of plasticity zones are calculated. assumed that the yield strength during compression is greater than that under tension.

According to the results of the calculation, the magnitude of the plasticity “spot” and the depth of plasticity areas significantly depends on the condition of compression or tension.

FE model of cross-section of optic nerve is build as rigidly clamped circular plate with SD-effect. We use the equations (1), (2), (3). It is assumed that the tensile yield strength of elastin is five times lower than the compressive yield strength and the plasticity starts from the outer contour of the plate.

### Conclusions.

Numerical modeling and graphical representation of the elastoplastic properties of circular transversely isotropic and plastic anisotropic plates showed that for surface stress functions a solution to the problem of optimizing the selection of the parameters of transversal isotropy and plastic anisotropy under the condition of minimum stresses is possible.

As a result, we can conclude that the capabilities of the COMSOL software package allow us to investigate many problems of nonlinear deformation of SD-materials and that difficult geometrical FE problems in the ophthalmology field can be solved.



This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-01-00823-a.

## References

- [1] Iomdina E.N., Bauer S.M., Kotliar K.E. Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications. Real Time, 2015. 208 p.
- [2] Pavilaynen G. V. Elastic-plastic bending of a circular transversally isotropic plate. Vestn. Leningr. un-ta, vol 13. 1983. pp. 70–75.
- [3] Pavilaynen G.V., Yushin R.YU. Analysis of the account of elastic transversal isotropy and plastic anisotropy in the bending of circular plates. Vestn. S.-Peterb. un-ta, ser 1. vol 4. 2010. pp. 128–137.
- [4] Pavilaynen G.V., Kropacheva N.YU. Numerical modeling of the elastic-plastic bending of SD-plates, In the Book of Abstracts “Scientific Research of the SCO Countries: Synergy and Integration”, vol 1. 2019 pp. 230–239.

## Diffusion driven surface morphological instability in ultra-thin film coating

*Shuvalov G.M., Kostyrko S.A.*

*g.shuvalov@spbu.ru, s.kostyrko@spbu.ru*

St. Petersburg University,

199034, Russia, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9

*Keywords:* ultra-thin film, surface nanopatterns, diffusion instability, evolution equation.

Ultra-thin film coatings are extensively used in engineering systems to accomplish a wide range of specific functions. The layered structure has been found to be useful for improving mechanical, optical, electrical and magnetic properties of microelectronic devices [1]. However, the number of defects in such structures must be minimized in order to improve the functional characteristic of the manufactured microelectronic devices. One of the main processes leading to the formation of defects in thin film systems is associated with morphological instability. It can lead to the relief formation on the film surface due to the diffusion processes during the fabrication process [2], as well as due to other phase transformations [3] during further operation of the devices.

The first theoretical investigation of the morphological instability in solids controlled by surface diffusion dates back to the work of Mullins [4]. He described the development of surface grooves at the heated polycrystal grain boundaries. Asaro and Tiller [5] found that the surface of a solid subjected to uniaxial stress is unstable against diffusional perturbations with wavelengths larger than a critical value determined by the ratio of the surface energy to the bulk strain energy

evaluated on the surface. Recently, their approach has been applied to analyze the stability of mono- and multilayer film surfaces [2, 6].

It should be noted, that there are some positive aspects of surface roughening. For instance, controlled annealing of the ultra-thin film causes to break up it to nanosized islands, which are the fundamental for quantum dots formation. So, to accurately control the morphological surface modifications at the nanoscale and improve manufacturing techniques, we need to model this process and gain a better theoretical understanding.

The primary interest of this study includes the developing of a theoretical model for morphological stability analysis of nanopatterned ultra-thin film surface. It should be noted, that at the nanoscale the effect of surface and interfacial stresses become significant [7]. To take into account their effect, we use the Gurtin–Murdoch theory of surface/interface elasticity [8]. According to the Gurtin–Murdoch model, the surface phase and coating-to-substrate interface domain are assumed to be negligibly thin layers with elastic properties which differ from those of the bulk materials. We consider the mass transport mechanism driven by the variation of surface and bulk energy along the undulated surface. The linearized surface evolution equation is derived in the case of plane strain conditions and describes the amplitude change of surface perturbations with time. A parametric analysis of this equation leads to the definition of critical conditions which depend on undulation wavelength, film thickness, residual surface stress, applied loading, surface and bulk elastic constants, and predict the surface morphological instability. As an application of the presented solution, we analyze the surface instability of ultra-thin layered structure with a planar interface and a sinusoidal surface profile.

The reported study was funded by RFBR, project number 19-31-90024.

## References

- [1] Kossoy A., Merk V., Simakov D., Leosson K., KГ©na-Cohen S., Maier S. Optical and Structural Properties of Ultra-thin Gold Films // *Advanced Optical Materials*. 2015. Vol. 1. pp. 71–77.
- [2] Kostyrko S. A., Shuvalov G. M. Morphological stability of multilayer film surface during diffusion processes // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015. pp. 392–395.
- [3] Sedova O. S., Pronina Y. G. Initial boundary value problems for mechanochemical corrosion of a thick spherical member in terms of principal stress // *AIP Conference Proceedings*. 2015. P. 260002.
- [4] Mullins W. M. Theory of thermal grooving // *Journal of Applied Physics*. 1957. Vol. 28. pp. 333–339.
- [5] Asaro R. J., Tiller W. A. Interface morphology development during stress-corrosion cracking: Part I. Via surface diffusion // *Metallurgical and Materials Transactions*. 1972. Vol. 3. pp. 1789–1796.

- 
- [6] Kim J. H., Vlassak J. J. Perturbation analysis of an undulating free Surface in a multilayered structure // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. pp. 7924–7937.
  - [7] Kostyrko S. A., Shuvalov G. M. Stability analysis of nanoscale surface patterns in stressed solids // *AIP Conference Proceedings*. 8th Polyakhov's Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. 2018. P. 070016.
  - [8] Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1975. Vol. 57. pp. 291–323.

## Секция 6

Устойчивость и стабилизация  
механических  
и электромеханических  
систем

*Stability and Stabilization of  
Mechanical and  
Electromechanical Systems*

## On the Steady Motions Control of Robot Manipulators with Viscoelastic Joints

*Andreev A.S., Peregudova O.A.*

*asa5208@mail.ru, peregudovaoa@gmail.com*

Ulyanovsk State University,

432017, Russian Federation, Ulyanovsk, Leo Tostoy str., 42

*Keywords:* robot manipulator, viscoelastic joint, motion stabilization, output position feedback, stationary motion.

We consider the control problem of robotic manipulators with  $(k + m)$  links, wherein  $k$  links have electric drives, and  $m$  links have a strictly vertical position or operate in the horizontal plane and are connected with the remaining links by viscoelastic joints. Such manipulators have the motions in which the part of the generalized coordinates do not change in time and others change according to a linear law. For manipulators of this type, the structure of robust control with incomplete feedback and incomplete measurement of coordinates is obtained at which the steady motion is locally, semi-globally, and globally asymptotically stable.

### Main Result.

A large class of robotic manipulators with viscoelastic joints is modeled as mechanical systems with cyclic coordinates [1, 2, 3]. The kinetic energy of such mechanical systems can be written as follows

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2, \quad T_1(\dot{s}, \dot{r}, s) = \frac{1}{2}(\dot{s}'A_{11}(s)\dot{s} + \dot{s}'A_{12}(s)\dot{r} + \dot{r}'A_{21}(s)\dot{s} + \dot{r}'A_{22}(s)\dot{r}), \\ T_2(\dot{s}) &= \frac{1}{2}\dot{S}'JS\dot{S}, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $s \in R^k$  and  $r \in R^m$  are the generalized coordinates of the manipulator links. Moreover, the first  $s$  coordinates are the rotation angles of the part of the links controlled by electric drives with the rotation angles  $S \in R^k$  of their output shafts relative to the corresponding links,  $A_{11} \in R^{k \times k}$ ,  $A_{12} = A_{21}' \in R^{k \times m}$ ,  $A_{22} \in R^{m \times m}$  are the components of the positive-definite inertia matrix of the links  $A$ ,  $J = \text{diag}(j_1, j_2, \dots, j_k)$  is the output shaft inertia matrix, ( $j_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ).

The potential energy of the mechanical systems in a uniform gravity field is given by

$$\begin{aligned} \Pi(s, S) &= \Pi^{(0)}(s) + \frac{1}{2}(s - S)'C(s - S), \\ C &= \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (c_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \tag{2}$$

where  $C$  is the shaft stiffness matrix.

We assume that the mechanical system is acted upon the viscous friction with generalized forces having the following form

$$\begin{aligned} Q_s &= -F_1(s, \dot{s}) - F_2(\dot{s} - \dot{S}), & Q_r &= -F_3\dot{r}, & Q_S &= -F_2(\dot{S} - \dot{s}), \\ F_1 &\in C(R^k \times R^k \rightarrow R^k), & F_1(s, 0) &= 0, & \dot{s}'F_1(s, \dot{s}) &\leq 0, \\ & & F_2 &= \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_k), \\ F_3 &= \text{diag}(f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_{k+m}), & (f_j &\geq 0, j = \overline{1, k+m}) \end{aligned} \quad (3)$$

Lagrange equations for such mechanical systems in the coordinates  $r$  and  $S$  are as follows

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial s} &= -\frac{\partial \Pi^{(0)}(s)}{\partial s} - C(s - S) - F_1 - F_2(\dot{s} - \dot{S}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} \right) &= -F_3\dot{r} + U_r \\ J\ddot{S} &= -C(S - s) - F_2(\dot{S} - \dot{s}) + U_S \end{aligned} \quad (4)$$

If the following holds

$$\begin{aligned} U_S = U_S^{(0)} = C(S_0 - s_0) = \Pi_s^{(00)} - T_{1s}^{(0)} &= \left. \frac{\partial \Pi^{(0)}(s)}{\partial s} \right|_{s=s_0} - \left. \frac{\partial T_1(0, \dot{r}, s)}{\partial s} \right|_{s=s_0, \dot{r}=\dot{r}_0} \\ U_r = U_r^{(0)} &= F_3\dot{r}_0, \end{aligned} \quad (5)$$

then the manipulator has a steady motion such as

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 0, & s &= s_0 = \text{const}, & \dot{S} &= 0, & S &= S_0 = \text{const}, \\ \dot{r} &= \dot{r}_0 = \text{const}, & r &= r_0(t) = \dot{r}_0 t. \end{aligned} \quad (6)$$

We show that the steady motion stabilization problem is solved by the controller

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= -\frac{\partial \Pi^{(1)}}{\partial y} - \left( \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} \right) \int_0^t P^{(1)}(\tau - t) (f^{(1)}(y(t)) - f^{(1)}(y(\tau))) d\tau, \\ U^{(2)} &= -\frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial z} - \left( \frac{\partial f^{(2)}}{\partial z} \right) \int_0^t P^{(2)}(\tau - t) (f^{(2)}(z(t)) - f^{(2)}(z(\tau))) d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $x = s - s_0$ ,  $y = S - S_0$ ,  $z = r - r_0(t)$ ,  $P^{(i)}$  and  $f^{(i)}$  are some functions,  $i = 1, 2$ .

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research [18-41-730022, 19-01-00791].

## References

- [1] E. J. Routh, The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a Rigid Body, London:MacMillian, 1905.
- [2] N. Rouche, P. Habets and M. Laloy, Stability Theory by Liapunov's Direct Method, New York:Springer, 1977

- [3] C. Risito, Metodi per lo Studio Della Stabilita di Sistemi con Integrali Primi Noti, Ann. Math. Pura Appl., 1976, vol. 107, pp. 49–94.

## О полиустойчивости движений сложных систем

*Александров А.Ю.*

*a.u.aleksandrov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* сложная система, функция Ляпунова, полиустойчивость.

Динамическая система называется полиустойчивой, если различные группы её переменных обладают различными видами устойчивости [1, 2]. В данном докладе на основе метода сравнения [3] и подходов, разработанных в статьях [4, 5], устанавливаются достаточные условия полиустойчивости для некоторого класса сложных систем.

Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Phi(t, x, y, z), \\ \dot{y} = F(y) + \Psi(t, x, y, z), \\ \dot{z} = Q(t, z) + \Xi(t, x, y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^l$ ,  $A$  — постоянная матрица,  $F(y)$  — непрерывная при  $y \in \mathbb{R}^m$  однородная порядка  $\mu > 1$  векторная функция, вектор-функции  $Q(t, z)$ ,  $\Phi(t, x, y, z)$ ,  $\Psi(t, x, y, z)$ ,  $\Xi(t, x, y, z)$  определены и непрерывны при  $t \geq 0$ ,  $\|x\| + \|y\| + \|z\| < \Delta$ , где  $\Delta = \text{const} > 0$ ,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма вектора. Таким образом, рассматриваем сложную систему, описывающую взаимодействие трёх подсистем

$$\dot{x} = Ax, \quad (2)$$

$$\dot{y} = F(y), \quad (3)$$

$$\dot{z} = Q(t, z). \quad (4)$$

Будем считать, что выполнены следующие предположения:

**Предположение 1.** Нулевые решения подсистем (2) и (3) асимптотически устойчивы.

**Предположение 2.** Нулевое решение подсистемы (4) устойчиво, причём для неё существует непрерывно дифференцируемая в области  $t \geq 0$ ,  $\|z\| < \Delta$  функция Ляпунова  $V(t, z)$  такая, что

$$\frac{\partial V(t, z)}{\partial t} + \left( \frac{\partial V(t, z)}{\partial z} \right)^\top Q(t, z) \leq 0, \quad \left\| \frac{\partial V(t, z)}{\partial z} \right\| \leq \tilde{c} \quad (\tilde{c} = \text{const} > 0)$$

при  $t \geq 0$ ,  $\|z\| < \Delta$ .

**Предположение 3.** Справедливы оценки

$$\|\Phi(t, x, y, z)\| \leq c_1 \|y\|^\sigma, \quad \|\Psi(t, x, y, z)\| \leq c_2 \|x\|^\nu, \quad \|\Xi(t, x, y, z)\| \leq c_3 \|x\|^\alpha \|y\|^\beta,$$

где  $c_1, c_2, c_3, \sigma, \nu, \alpha, \beta$  — положительные постоянные.

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда если  $\alpha\sigma + \beta > \mu - 1$ , то нулевое решение системы (1) устойчиво по всем переменным и асимптотически устойчиво относительно  $x$  и  $y$ .

**Замечание 1.** Предложенный способ доказательства теоремы 1 позволяет получить оценки решений сложной системы.

Разработанный подход применяется для исследования сложной системы, моделирующей взаимодействие двух механических систем, которые находятся под воздействием диссипативных и гироскопических сил. Для положения равновесия рассматриваемой системы найдены условия полустойчивости относительно части переменных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00146-а).

## Литература

- [1] Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К. Метод функций Ляпунова в задачах о полустойчивости движения // ПММ. 1987. Т. 51. № 5. С. 709-716.
- [2] Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
- [3] Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Lyapunov's Direct Method, Springer, New York, 1977. 396 p.
- [4] Александров А. Ю. Об устойчивости одного класса нелинейных систем // ПММ. 2000. Т. 64. № 4. С. 545-550.
- [5] Александров А. Ю. Об устойчивости сложных систем в критических случаях // АиТ. 2001. № 9. С. 3-13.



## О трёхосной стабилизации твёрдого тела в условиях управления с распределённым запаздыванием

*Александров А.Ю., Тихонов А.А.*

*a.u.aleksandrov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* твёрдое тело, вращательное движение, стабилизация, распределенное запаздывание, асимптотическая устойчивость.

Рассматривается задача трёхосной стабилизации углового положения тела. Ставится вопрос о возможности реализации такой системы управления по типу PID-регулятора, в которой интегральная составляющая управляющего момента содержит распределенное запаздывание. Доказана теорема об асимптотической устойчивости стабилизируемого положения тела, обосновывающая возможность построения указанной системы управления. Эффективность построенного управления с распределенным запаздыванием подтверждается численным моделированием.

### Постановка задачи

Рассматривается твёрдое тело, вращающееся вокруг своего центра масс  $O$  под действием управляющего момента  $\mathbf{L}$  с угловой скоростью  $\omega$ . С телом связана система его главных осей инерции  $Ox_1x_2x_3$ . Выберем два ортонормированных базиса  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  и  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , где орты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  постоянны в абсолютной системе координат, а орты  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  — постоянны в системе координат, связанной с телом. Тогда орты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  поворачиваются относительно системы координат  $Ox_1x_2x_3$  с угловой скоростью  $-\omega$ .

Вращательное движение тела описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$\mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{J}\omega = \mathbf{L} \quad (1)$$

и кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{\xi}_i = -\omega \times \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\mathbf{J} = \text{diag}\{A_1, A_2, A_3\}$  — тензор инерции тела в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Решение задачи трёхосной стабилизации твёрдого тела предполагает построение управляющего момента  $\mathbf{L}$ , под действием которого система (1), (2) допускает асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\omega = \mathbf{0}, \quad \xi_i = \eta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Известно [1], что управляющий момент  $\mathbf{L}$  может быть построен в виде суммы диссипативной составляющей  $\mathbf{L}_d$  и восстанавливающей составляющей  $\mathbf{L}_r$ :  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_d + \mathbf{L}_r$ , где

$$\mathbf{L}_d = \mathbf{B}\omega, \quad \mathbf{L}_r = -(a_1\xi_1 \times \eta_1 + a_2\xi_2 \times \eta_2).$$

Здесь  $\mathbf{B}$  — постоянная симметричная отрицательно определенная матрица,  $a_1, a_2$  — положительные постоянные.

### Результаты

В данной работе мы рассматриваем случай, в котором наряду с диссипативной и восстанавливающей составляющими управляющего момента имеется также интегральная составляющая

$$\mathbf{L}_r = c \int_{t-\tau}^t (a_1\xi_1(s) \times \eta_1 + a_2\xi_2(s) \times \eta_2) ds,$$

в которой  $c$  — постоянный коэффициент, а  $\tau$  — положительное запаздывание. Предположим также, что имеется положительный параметр  $h$  при векторе диссипативного момента. Тогда уравнения Эйлера могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{J}\omega &= h\mathbf{B}\omega - a_1\xi_1 \times \eta_1 - a_2\xi_2 \times \eta_2 \\ &+ c \int_{t-\tau}^t (a_1\xi_1(s) \times \eta_1 + a_2\xi_2(s) \times \eta_2) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

С помощью метода декомпозиции [2]–[4] доказана следующая

**Теорема.** При выполнении условия  $\tau|c| < 1$  существует  $h_0 > 0$ , такое что для любого  $h > h_0$  положение равновесия (3) системы (2), (4) асимптотически устойчиво.

Численное моделирование подтверждает вывод, доказанный в теореме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

### Литература

- [1] Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.
- [2] Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.
- [3] Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. New York: Springer, 1977. 396 p.
- [4] Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Chen Y. Stability and stabilization of mechanical systems with switching // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, N 6. P. 1143–1154.

## Корректировка движения мобильного робота при использовании модифицированного алгоритма $D^*$

*Алферов Г.В., Федоров В.М., Хохрякова А.А.*

*alferovgv@gmail.com, victor-fyodorov@ya.ru, st056061@student.spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* движение, робот, путь, автономность, алгоритм  $D^*$ , траектория, управление.

В настоящее время широко распространена автоматизация процессов, в которых робот способен заменить человека. Особенно актуально использование роботов в труднодоступных или опасных местах.

Для решения этой задачи необходимо, чтобы роботы могли самостоятельно передвигаться из одной позиции в другую, избегая препятствий. Это очень важно, поскольку препятствия могут повредить робота, после чего он не сможет продолжить выполнять положенные действия. В представленной работе приведен алгоритм, позволяющий решить эту задачу.

Алгоритм  $D^*$ , разработанный С. Кёнигом и М. Лихачевым [1, 2], имеет ряд недостатков, из-за которых применение его на реальных подвижных устройствах может быть затруднительно.

В работе представлен метод, основанный на алгоритме  $D^*$  [3]–[5], с помощью которого робот может переместиться из одной точки в другую, избегая столкновений с препятствиями. Его основными преимуществами являются:

- Оптимизация полученной траектории, способная сократить проходное расстояние и время в пути.
- Усовершенствованное уравнение движения, рассчитываемое индивидуально для каждого робота с помощью нейронной сети. Такой подход позволяет свести к минимуму погрешности, связанные с техническими особенностями робота и состоянием окружающей среды.

Кроме того, алгоритм позволяет снизить затраты на оборудование робота, поскольку менее требователен к вычислительным системам, что тоже немаловажно. Робот сможет осуществлять движение как на открытой местности, так и в закрытом помещении. Это является преимуществом перед методами, основанными на использовании GPS навигаторов.

### Заключение

Предложенный метод позволяет решать проблемы, возникающие при практической реализации метода построения навигационной сети. Это более эффективный метод для определенных категорий задач.

## Литература

- [1] Koenig, S.; Likhachev, M. “Fast Replanning for Navigation in Unknown Terrain”, *Transactions on Robotics*, 2005, 21(3), pp. 354–363, CiteSeerX 10.1.1.65.5979, doi:10.1109/tro.2004.838026.
- [2] Koenig, S.; Likhachev, M.; Furcy, D. “Lifelong Planning A\*”, *Artificial Intelligence*, 2004, 155(1–2), pp. 93–146, doi:10.1016/j.artint.2003.12.001
- [3] Федоров В. М., «Модификация алгоритма D\*», *Процессы управления и устойчивость*, 2019, Т. 6, № 16, С. 138–142.
- [4] Kadry, S., Alferov, G., Fedorov, V. “D-Star Algorithm Modification”, *International journal of online and biomedical engineering*, 2020, 16(8), pp. 108–113.
- [5] Kadry, S., Alferov, G., Fedorov, V., Khokhrjakova, A. Path optimization for D\* algorithm modification. ICNAAM-2020, 2021, AIP Conference Proceedings (in print)

## О размерах области достижимости линейной системы второго порядка

*Александров В.В.*<sup>1</sup>, *Бугров Д.И.*<sup>1</sup>, *Бугрова М.И.*<sup>2</sup>, *Пилюгина С.К.*<sup>1</sup>  
*vladimiralexandrov366@hotmail.com, dmitry.bugrov@math.msu.ru,*  
*marybugrova@yandex.ru, pilsoki@yandex.ru*

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
 119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1,

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
 105005, Российская Федерация, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр.1

*Ключевые слова:* область достижимости, линейная стационарная система, кусочно-непрерывное управление.

Рассматривается множество линейных стационарных вполне управляемых систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = u, \quad (1)$$

где управление  $u(\cdot)$  принадлежит множеству кусочно-непрерывных ограниченных функций  $U = \{u(\cdot) \in PC, |u(t)| \leq \delta\}$ ,  $\delta > 0$ , а коэффициенты  $a$  и  $b$  являются постоянными, принадлежащими заданным интервалам

$$0 < a^- \leq a \leq a^+, \quad 0 < b^- \leq b \leq b^+, \quad 0 < b^- < (a^+)^2. \quad (2)$$

В этом случае для всех значений параметров  $a, b$  из множества (2) собственные числа характеристического уравнения для (1) являются комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью. У рассматриваемой системы существует предельная область достижимости, соответствующая бесконечному времени, причём границы этой области являются аналитическими функциями от параметров системы [1, 2].

Ставится задача о нахождении «наибольшей» и «наименьшей» областей достижимости для системы (1), (2), при этом под нормой вектора на фазовой плоскости  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  понимается  $\max(|x_1|, |x_2|)$  [3]. Удаётся показать, что

$$\begin{aligned}
 x_{1max} &= \frac{\delta}{b^-} \frac{e^{\frac{a^- \pi}{\sqrt{b^- - (a^-)^2}} + 1}}{e^{\frac{a^- \pi}{\sqrt{b^- - (a^-)^2}} - 1}}, \\
 x_{1min} &= \frac{\delta}{b^+} \frac{e^{\frac{a^+ \pi}{\sqrt{b^+ - (a^+)^2}} + 1}}{e^{\frac{a^+ \pi}{\sqrt{b^+ - (a^+)^2}} - 1}}, \\
 x_{2max} &= \frac{2\delta}{\sqrt{b^-} \left(1 - e^{\frac{-a^- \pi}{\sqrt{b^- - (a^-)^2}}}\right)} e^{\frac{-a^-}{\sqrt{b^- - (a^-)^2}} \arctan \frac{\sqrt{b^- - (a^-)^2}}{a^-}}, \\
 x_{2min} &= \frac{2\delta}{\sqrt{b^+} \left(1 - e^{\frac{-a^+ \pi}{\sqrt{b^+ - (a^+)^2}}}\right)} e^{\frac{-a^+}{\sqrt{b^+ - (a^+)^2}} \arctan \frac{\sqrt{b^+ - (a^+)^2}}{a^+}},
 \end{aligned} \tag{3}$$

то есть область получается «наименьшей» (в выбранной норме) при значениях параметров  $a = a^+$ ,  $b = b^+$  и «наибольшей» при  $a = a^-$ ,  $b = b^-$ .

Полученные результаты позволяют оценивать качество робастной устойчивости для всего класса рассматриваемых систем (1), (2) [4].

## Литература

- [1] Зубов В.И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: СУДПРОМ-ГИЗ, 1962. 632 с.
- [2] Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
- [3] Александров В.В., Бугров Д.И., Пилюгина С.К. Область достижимости линейной системы второго порядка с неопределенностью // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 162–163.
- [4] Александров В.В., Бугров Д.И., Жермоленко В.Н., Коноваленко И.С. Множество достижимости и робастная устойчивость возмущаемых колебательных систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020 (принято в печать).

## Об управлении движением трёхколесного робота с вязко-упругими колёсами по горизонтальной плоскости

*Андреев А.С., Перегудова О.А., Колегова Л.В.*

*asa5208@mail.ru, peregudovaoa@gmail.com, lyubov\_fedorova\_1994@mail.ru*

Ульяновский государственный университет,

432017, Российская Федерация, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42

*Ключевые слова:* трёхколёсный робот, колесо с вязко-упругими шинами, управление, стабилизация прямолинейного движения.

Рассмотрена модель трёхколёсного робота, выполненного по схеме трицикла, с колёсами, каждое из которых представляет собой твёрдый диск с вязко-упругой шиной. Новизна модели состоит в учёте вертикальных вязко-упругих колебаний системы при движении по горизонтальной плоскости. Построено управление, обеспечивающее стабилизацию прямолинейного движения робота.

### Введение.

Проблема моделирования движения колёсных транспортных средств с учётом деформации поверхности и пневматики колёс является классической [1, 2]. Интерес к этой проблеме и её применению в настоящее время значительно возрастает с целью оптимизации моделей этих средств и определения их безопасной эксплуатации, с необходимостью эффективного моделирования управляемого движения беспилотных колёсных средств. Из многочисленных работ по направлению данного исследования можно выделить следующие близкие работы: по влиянию деформируемой поверхности и деформации твёрдого тела на его движение [3, 4], по влиянию деформируемости шины на движение колеса [5, 6], по влиянию на безопасность транспортного средства его вертикальных колебаний [7].

В данной работе предлагается достаточно простая модель учёта вязко-упругих свойств шин колёс на движение трёхколёсного робота, выполненного по схеме трицикла [8]. На основе работ [9] построено управление, решающее задачи устойчивости прямолинейного движения робота.

### Описание результата.

Полагается, что базой робота является шасси с некоторой симметричной платформой, задним мостом с тяжёлыми одинаковыми колёсами, представляющими собой жёсткие диски с насаженными на них вязко-упругими шинами, рояльной вилкой с передним колесом. Центр масс платформы с задним мостом лежит на её оси симметрии, проходящей через середину моста с перпендикулярной платформе осью вращения вилки.

Положение робота определяется шестью координатами: полярными координатами  $r$  и  $\varphi$  положения  $C_0$  относительно неподвижной системы координат в горизонтальной плоскости, углом поворота рояльного колеса, координатами  $z_1, z_2, z_3$  вертикального положения центров колёс. Покажем, что угловые скорости колёс  $\dot{\psi}_1$  и  $\dot{\psi}_2$  связаны со скоростями  $\dot{r}$  и  $\dot{\varphi}$  соотношениями  $\dot{\psi}_1 = k_1\dot{r} + l_1\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}_2 = k_2\dot{r} + l_2\dot{\varphi}$ , где  $k_1 + k_2 = k_0 = const$ ,  $l_1 + l_2 = l_0 = const$ . На робот действуют силы тяжести колёс и силы вязкого и сухого трения шин. Так как шины являются вязко-упругими, то соответствующие обобщенные силы равны

$$Q_z^{(j)} = -\mu_j z_j + \int_0^t g(\tau - t) z_j(\tau) d\tau \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $\mu_j$  – параметры упругости,  $g = g(s)$  – ядро релаксации.

Управление осуществляется: моментом вращения рояльного колеса, тягой двигателей, тормозными моментами, приложенными к задним колёсам. Уравнения движения выбраны в виде уравнений Лагранжа. Построено управление, обеспечивающее устойчивое прямолинейное (установившееся и неуставившееся) движение робота. Проведено численное моделирование.

Научное исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 18-01-00702-а, 20-31-90120-аспиранты.

## Литература

- [1] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1, 2. Наука, 1986.
- [2] Левин М. А., Фуфаев Н. А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989.
- [3] Карапетян А. В. Двухпараметрическая модель трения и её свойства // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, N 4. С. 515–519.
- [4] Горячева И. Г., Зобова А. А. Динамика упругого цилиндра на упругом основании // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 39–46.
- [5] Belkin A. E., Semenov V. K. Theoretical and experimental analysis of the contact between a solid-rubber tire and a chassis dynamometer // Mechanics of Solids. 2016. 51 (3). pp. 298–307.
- [6] Glazkov T. V., Reshmin S. A. A nonlinear tire model to describe an unwanted flat vibrations of the wheels // IFAC PapersOnLine. 2019. 52–16. pp. 268–273.
- [7] Wang Q., Zhao Y., Xu H., Deng Y. Adaptive backstepping control with grey signal predictor for nonlinear active suspension system matching mechanical elastic wheel // Mechanical Systems and Signal Processing. 2019. 131. pp. 97–111.
- [8] Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундамент. и прикл. матем. 2005. 11:8. С. 29–80.

- [9] Andreev A. S., Peregodova O. A. Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots // IFAC Papers-OnLine. 2018. Vol. 51. N 4. pp. 7–12.

## Цикл в связанной механической системе

*Барабанов И.Н., Тхай В.Н.*

*ivbar@ipu.ru, tkhaivn@ya.ru*

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,  
117997, Российская Федерация, Москва, ул. Профсоюзная, 65

*Ключевые слова:* связанная система, цикл, естественная стабилизация.

При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предложено выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебаний связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации решается естественным образом, т.е. без привлечения других управлений. В частности, такая связь может замыкать систему на себя: конструируется управляемая система с обратной связью.

Пример указанной связи находится в уравнении Ван дер Поля, в котором действие управления с малым коэффициентом  $\varepsilon$  регулятора на линейный осциллятор приводит к существованию орбитально асимптотически устойчивого цикла. Само управление даётся нелинейной диссипацией, линейной по скорости и приложенной в текущей точке траектории осциллятора Ван дер Поля.

Интерес к циклу возмущенной механической системы, т.е. изолированному периодическому движению автономной системы, вызван в первую очередь тем, что такой режим движения невозможно реализовать в рамках исходной модели. Так, Л.С. Понтрягин [2] вместо исходной гамильтоновой системы на плоскости использует возмущённую задачу для построения предельного цикла. Ван дер Полю при исследовании релаксационных колебаний пришел к возмущённому осциллятору — уравнению, названному его именем и описывающему **асимптотически орбитальный** цикл.

В [3] получены условия существования цикла слабо связанной механической системы в виде существования простого корня «амплитудного уравнения». Однако структура и вид связи, приводящей к циклу, не установлены. Также не решался вопрос устойчивости цикла связанной системы: решение вопроса позволяет стабилизировать цикл связью естественным образом.

В данной работе идея, предложенная в [1], развивается для МССП, содержащей консервативные системы с одной степенью свободы. Рассматривается связанная механическая система, содержащая в качестве подсистем механические системы с одной степенью свободы. Предполагается, что каждая из подсистем в отсутствие связей допускает семейство невырожденных симметричных





периодических движений (СПД). Решается задача нахождения связей между системами, обеспечивающих существование, орбитальную асимптотическую устойчивость и естественную стабилизацию цикла. Выводится синхронизация колебаний подсистем по частоте и фазе.

Связанная механическая система с найденными связями записывается в виде

$$\ddot{x}_s + f_s(x_s) = \varepsilon \Psi \dot{x}_s, \quad \Psi = 1 - K \sum_{j=1}^n x_s^2, \quad s = 1, \dots, n.$$

При  $\varepsilon = 0$  система допускает семейство СПД

$$x = \varphi(h, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

на котором период  $T(h)$  монотонно зависит от постоянной  $h$  интеграла энергии. Вводится характеристика  $K(h)$  семейства

$$K(h) = \frac{R(h)}{S(h)}, \quad \chi(h) = \frac{dK(h)}{dh},$$

$$R(h) = \int_0^{T(h)} \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j^2(h, t) dt,$$

$$S(h) = \int_0^{T(h)} \sum_{j=1}^n \varphi_j^2(h, t) \sum_{s=1}^n \dot{\varphi}_s^2(h, t) dt.$$

**Определение 1.** Семейство СПД по параметру  $h$  называется невырожденным, если на нём производная от периода  $T(h)$  по постоянной энергии  $h$  отлична от нуля. СПД невырожденного семейства называется невырожденным.

**Определение 2.** Точка, в которой  $\chi = 0$ , называется критической точкой семейства СПД по характеристике  $K(h)$ .

**Основной результат.** Пусть каждая консервативная система с одной степенью свободы допускает семейство невырожденных СПД, которые образуют семейство  $\Sigma$  по параметру  $h$  несвязанной системы. Тогда при выборе связующих управлений  $\varepsilon \Psi x_s$  связанная система в каждой точке, не являющейся критической по характеристике  $K(h)$ , допускает единственный цикл. При выполнении в этой точке неравенства  $\chi < 0$  цикл орбитально асимптотически устойчив.

Результат распространяется на системы с произвольным числом степеней свободы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00146).

## Литература

- [1] Тхай В. Н. Стабилизация колебаний автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2016. № 6. С. 38–46.
- [2] Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
- [3] Тхай В. Н. Периодические движения возмущенной обратимой механической системы // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 181–195.

## On the motion control of heavy solid body without velocities measurement

*Bezglasnyi S.P.,<sup>1</sup> Dorogovtseva E.V.<sup>2</sup>*

*bezglasnsp@rambler.ru, dorogovtsevaev@mail.ru*

<sup>1</sup>Samara State Technical University,

443100, Russian Federation, Samara, Molodogvardeyskaya str., 224,

<sup>2</sup>Ulyanovsk State University,

432017, Russian Federation, Ulyanovsk, Leo Tostoy str., 42

*Keywords:* heavy solid body, motion stabilization, control synthesis.

### Introduction.

Tasks about rotational movement control of rigid body with fixed point have important applied value and are widely considered by researchers in many papers. Studies in problem of mathematical methods construction for control of these systems remain relevant, see for example papers [1]–[3]. Tasks about motion control of solid body with fixed point without velocities measurement are among the most relevant and popular [1, 3] and has an important applied value in engineering.

The goal of this note is the task solving about movement control of heavy rigid body with fixed point. A new control method for body motion without velocities measurement is presented. We will solve this problem in a non-linear non-stationary formulation. We will design motion control laws by the feedback principle using only the coordinates of its position without velocities measurements of body points.

### Control problem formulation.

A motion of solid body around a fixed point in the uniform field of gravity is considered. Let  $O$  is the fixed point of rigid body.  $OXYZ$  is fixed coordinate system. Axe  $OZ$  is pointing up.  $Oxyz$  is related to the body coordinate system.  $A, B, C$  are main inertia moments of solid body about the main inertia axes  $Ox, Oy, Oz$ . The body mass is  $m$ . Let the body mass centre has coordinates  $(x_0, y_0, z_0)$  in relation to  $Oxyz$  coordinate system. We denote body position as Euler variables  $\psi, \theta, \varphi$ . We write kinetic and potential energies of the body in these variables. Coordinate  $\psi$  is

cyclic. We design Rous function and constructed the body motion equations as the Rous equations form with cyclic momenta according variable  $\psi$

$$p = A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \sin \theta \sin \varphi + \\ + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \sin \theta \cos \varphi + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta$$

In this paper we present two tasks about motion stabilization of heavy rigid body around fixed point without velocities measurements.

Task 1. It is the task about stabilization of certain position of body. Namely, we have to find the attached to the body control torques making the position

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0; \quad \psi = \psi_0; \quad \theta = \theta_0 \neq 0, \pi; \quad \varphi = \varphi_0 \quad (1)$$

asymptotically stable.

Task 2 (about stabilization of stationary rotation). We have to find the attached to the body control torques making asymptotically stable the stationary rotation

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0; \quad \theta = \theta_0 = \text{const}; \quad \theta_0 \neq 0, \pi; \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}; \\ \dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_0; \quad p_\psi = p_\psi^0 = \dot{\psi}_0(A \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + B \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + C \cos^2 \theta_0) \quad (2)$$

### Basic results.

For the task 1 we constructed active stability controls (torques) by the feedback principle without measurement of velocities. According the theorem from [3] and theorem from [4] we defined the conditions for control parameters. These torques with these conditions solves the task 1 about nonlocal stabilization of body position (1). For the task 2 we constructed active stability torques without measurement of velocities and the conditions for control parameters which according the theorem from [5] solve the task 2 about stabilization of stationary body rotation (2).

### Conclusion and acknowledgments.

A new control method for motion of heavy solid body with fixed point without velocities measurement is presented. Two problems about stabilization of arbitrary position and stationary motion of body are solved. Main results can be used for gyroscopic control systems projecting of aircraft.

This work is supported by Russian Science Foundation grant No. 19-01-00791.

### References

- [1] Burkov I. V. Asymptotic stabilization of a specified position and of a permanent rotation of a rigid body with and without measuring its velocities // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1995. Vol. 33. N 2. pp. 69–76.

- [2] Schlanbusch R., Loria A. and Nicklasson P. J. On the stability and stabilization of quaternion equilibria of rigid bodies // *Automatica*. 2012. Vol. 48. N 12. pp. 3135–3141.
- [3] Andreev A. S. and Peregodova O. A. Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. Vol. 81. N 2. pp. 95–105.
- [4] Andreev A. S. and Peregodova O. A. Nonlinear regulators in the position stabilization problem of the holonomic mechanical system // *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. N 2. pp. 22–38
- [5] Andreev A and Peregodova O Volterra equations in the control problem of mechanical systems // 2019 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2019. pp. 298–303. IEEE Xplore.

## **Stabilization in large of gyrostat program motion with cavity filled with viscous fluid**

*Bezglasnyi S.P.*

*bezglasnsp@rambler.ru*

Samara State Technical University,

443100, Russian Federation, Samara, Molodogvardeyskaya str., 224

*Keywords:* program motion, stabilization in large, gyrostat, viscous fluid, Lyapunov function

Volumetric orientation of aircraft and satellites problems about an orbit have important applied significance. They are investigated by authors in many papers, for example [1]–[3]. Spatial motions of aircraft regarding the mass center are modeled by spherical movement of solid bodies or systems, for example gyrostats. Volumetric satellites can contain one or some spinning rotors to provide gyroscopic stability of a spatial orientation. Gyrostat satellite motions are considered in a large number of papers. Various problems of dynamic movements of solids with cavities filled with fluid were widely investigated from the middle of the previous century. A movement model of rigid body with a cavity entirely filled with highly viscous fluid is among the most relevant and popular and is considered by researchers in many papers, for example [4]–[6].

A model of single-rotor dynamically symmetrical gyrostat with a spherical cavity filled with highly viscous fluid is investigated in this paper. The goal of this research is to present new results in investigating into stabilization in large the problem of gyrostat with cavity filled with viscous fluid motions.

First of all, this paper uses mathematical model [4] of academician Chernous'ko of gyrostat with fluid. In this case the fluid influence on the body movement is described by the body kinematic characteristics. This method is widely used in notes

of modern researchers [5, 6] and others. Secondly, this note presents the gyrostat motion equations in the Lagrange equations form. The vector of general coordinates is constructed from Euler variables. We define the general forces as a sum of the force torque acting on the carrier from the cavity with fluid and the forces program control and the stabilizing control. Thirdly, in this paper the task formulation about the program motions stabilization in large of gyrostat with fluid is given. We should to find the attached to the carrier control forces making the gyrostat program motion asymptotically stable in large. To solve this problem about program motion stabilization in large, we use Lyapunov method of stability theory. In addition, we use a method of the limit equations and limit systems [7]. We design active control using feedback principle. And finally, this paper presents the active program control and development of stability in large control attached to the gyrostat.

This work is supported by Russian Science Foundation grant No.19-01-00791.

## References

- [1] Chernous'ko F. L. On satellite motion relative on the center of mass under the action of gravitational moments // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1963. Vol 27. N 3. pp. 708–722.
- [2] Letov A. M. *Flight Dynamic and Control*. M.: Nauka, 1969. 369 p.
- [3] Rumiantsev V. V. On the stability of gyrostats motion // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1961. Vol 25. N 1. pp. 9–19.
- [4] Chernous'ko F. L. *Motion of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid*. M.: Nauka, 1968. 309 p.
- [5] Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium // *Journal of Computer and System Sciences International*. 2010. Vol. 49. N 2. pp. 222–226.
- [6] Bezglasnyi S. P. Stabilization of stationary motions of a gyrostat with a cavity filled with viscous fluid // *Russian Aeronautics*. 2014. Vol. 57. N 4. pp. 333–338.
- [7] Andreev A. S. The asymptotic stability and instability of the zeroth solution of a non-autonomous system // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 48. N 2. pp. 225–232.

## Синхронные прецессии и автоколебания динамически неуравновешенного ротора при ограниченном возбуждении

**Быков В.Г.**

v.bykov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* динамически неуравновешенный ротор, ротационное демпфирование, асинхронные автоколебания, устойчивость.

Рассматриваются вынужденные и самовозбуждающиеся колебания упруго подвешенного, динамически неуравновешенного, жёсткого ротора под действием заданного внешнего вращающегося момента. Для исследований используется нелинейная математическая модель с пятью степенями свободы, в которой учтены асимметрия ротора и упругих опор ( $\mathbf{K}$ ), гироскопические силы ( $\mathbf{G}$ ), а также силы внешнего ( $\mathbf{D}^{(n)}$ ) и ротационного ( $\mathbf{D}^{(r)}$ ) вязкого демпфирования

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D}^{(n)} + \mathbf{D}^{(r)} - i\dot{\theta}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - i\dot{\theta}\mathbf{D}^{(r)})\mathbf{q} = \mathbf{F}(\dot{\theta}^2 - i\ddot{\theta})e^{i\theta}, \\ J_c\ddot{\theta} + \delta_\theta\dot{\theta} = M_z + ms(\ddot{x}\sin(\theta + \gamma) - \ddot{y}\cos(\theta + \gamma)) + \\ + \chi(J_t - J_p)(\ddot{\alpha}\cos\theta + \ddot{\beta}\sin\theta) - \delta_{11}^{(r)}(\dot{x}y - x\dot{y} + (x^2 + y^2)\dot{\theta}). \end{cases}$$

где  $x$ ,  $y$  и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  — трансляционные и угловые координаты ротора,  $\dot{\theta}$  — угловая скорость,  $\dot{\theta}$  — угловая скорость собственного вращения,  $m$  — масса ротора,  $J_p$  и  $J_t$  — полярный и трансверсальный моменты инерции,  $s$  — статический эксцентриситет,  $\chi$ ,  $\gamma$  — параметры, характеризующие динамический эксцентриситет,  $M_z = M_z(t)$  — внешний вращающий момент,

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} z \\ \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + iy \\ \beta - i\alpha \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & J_t \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{vmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} \end{vmatrix}, \\ \mathbf{D}^{(n)} = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(n)} & \delta_{12}^{(n)} \\ \delta_{12}^{(n)} & \delta_{22y}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(r)} = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(r)} & \delta_{12}^{(r)} \\ \delta_{12}^{(r)} & \delta_{22y}^{(r)} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} mse^{i\gamma} \\ \chi(J_t - J_p) \end{vmatrix}.$$

Для различных вариантов конструкции ротора с помощью аналитических и численных методов построены графики амплитуд, фаз и угловых скоростей синхронных прецессионных движений в зависимости от величины вращающегося момента. Определены пороговые значения вращающегося момента, при которых синхронные прецессии теряют устойчивость. Показано, что при превышении порогового вращающегося момента возникают асинхронные самовозбуждающиеся колебания ротора с переменной амплитудой и угловой скоростью.

Изучено взаимодействие вынужденных и самовозбуждающихся колебаний ротора.

### Литература

- [1] Kimball A.L. Internal friction theory of shaft whirling // Gen. Electric Rev. 1924. Vol. 27. N 4. pp. 244–251.
- [2] Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 348 с.
- [3] Gunter E.J. The Influence of Internal Friction on the Stability of High Speed Rotors // J. Eng. Ind., 1967. Vol. 8. pp. 683–688.
- [4] Ding Q., Chen Y.S. Bifurcation of a shaft with hysteretic-type internal friction force of material // Appl. Math. & Mech., vol 24. 2003. Vol. 24, N 6. pp. 638–645.
- [5] Genta G. Vibration Dynamics and Control. Springer, 2009. 856 p.
- [6] Sorge F. Nonlinear analysis of cylindrical and conical hysteretic whirl motions in rotor-dynamics // J. Sound & Vibration, 2014. Vol. 333. N 20. pp. 5042–5056.
- [7] Быков В.Г., Товстик П.Е. Синхронные прецессии и автоколебания статически неуравновешенного ротора при ограниченном возбуждении // Прикладная математика и механика, 2018. Том 82. Вып. 5. С. 572–582. DOI: 10.31857/S003282350002263-9
- [8] Bykov V.G. Synchronous and asynchronous whirling of the balanced rotor with an orthotropic elastic shaft//AIP Conference Proceedings 1959. 080010. 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5034727>

## Аналитическое и численное исследование процесса автобалансировки динамически неуравновешенного жёсткого ротора, закрепленного в ортотропных вязко-упругих опорах

*Быков В.Г., Ковачев А.С.*

*v.bykov@spbu.ru, a.kovachev@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* жесткий ротор, динамический дисбаланс, вязко-упругие ортотропные опоры, шаровое автобалансирующее устройство, устойчивость.

Проблемы автобалансировки различных типов динамически неуравновешенных, упруго-подвешенных роторов рассматривались ранее в работах [1]–[7]. Известно, что полную балансировку такого ротора в области частот, превышающих вторую критическую скорость, может обеспечить двухплоскостное

автобалансирующее устройство (АБУ), состоящее из двух обойм, закрепленных по разные стороны от центра тяжести ротора перпендикулярно его оси и содержащих одинаковое количество балансирующих шаров.

Настоящая работа посвящена детальному аналитическому и численному исследованию процесса автобалансировки динамически неуравновешенного, ортотропного ротора, оснащённого двухплоскостным шаровым АБУ, с учётом асимметрии и ортотропии вязко-упругих характеристик опор, гироскопических сил, сил внешнего демпфирования и сил сопротивления, действующих в АБУ. В случае, когда АБУ содержит  $2n$  балансирующих шаров, рассматриваемая система имеет  $2n + 5$  степеней свободы, и её динамика описывается следующей системой нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} - \dot{\theta}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{F}_0(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) + \mathbf{F}_1(\varphi_{kl}, \dot{\varphi}_{kl}, \ddot{\varphi}_{kl}), \\ J\ddot{\theta} + d_\theta\dot{\theta} - d_\psi \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n (\dot{\varphi}_{kl} - \dot{\theta}) = M_z + ms(\ddot{x} \sin(\theta + \gamma) - \ddot{y} \cos(\theta + \gamma)), \\ m_b r^2 \ddot{\varphi}_{kl} + d_\psi (\dot{\varphi}_{kl} - \dot{\theta}) = m_b r (\ddot{x} + z_k \ddot{\beta}) \sin(\varphi_{kl}) - (\ddot{y} - z_k \ddot{\alpha}) \cos(\varphi_{kl}), \\ k = 1, 2, l = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = \{x, y, \alpha, \beta\}^T$  — вектор-столбец трансляционных и угловых координат ротора,  $\theta$  — угол собственного вращения,  $\varphi_{i,k}$  — угловые координаты балансирующих шаров,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{D}$  —  $(4 \times 4)$  — матрицы инерционных, упругих, гироскопических и диссипативных параметров ротора,  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$  —  $(1 \times 4)$ -вектор-функции, характеризующие влияние неуравновешенности и движения балансирующих шаров,  $J$  — момент инерции ротора, относительно оси вращения,  $d_\theta$  и  $d_\psi$  — коэффициенты вязкого демпфирования,  $s$  — статический эксцентриситет,  $\chi$  и  $\gamma$  — угловые параметры динамического эксцентриситета,  $M_z$  — внешний вращающий момент,  $m$  и  $m_b$  — массы ротора и балансирующего шара,  $r$  — радиус беговой дорожки АБУ,  $z_k$  — относительные координаты центров АБУ. Система уравнений (1) получена в предположении о малости углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\chi$  и пренебрежении размерами балансирующих шаров.

Для возможности использования асимптотического анализа система уравнений (1) приводится к безразмерной форме с введением двух дополнительных малых параметров  $\varepsilon = s/r$ , и  $\mu = m_b/m$ . Подставляя в исходную систему уравнений  $\dot{\theta} = \text{const}$  и  $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = 0$ , получим систему безразмерных комплексных уравнений, описывающую полностью сбалансированный стационарный режим

$$\varepsilon e^{i\gamma} = -\mu \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n e^{i\psi_{kl}}, \quad \chi(j_t - j_p) = -\mu \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \tilde{z}_k e^{i\psi_{kl}}, \quad (2)$$

где  $j_p$  и  $j_t$  — безразмерные параметры, характеризующие полярный и трансверсальный моменты инерции ротора, а  $\tilde{z}_k = z_k/r$ .



В случае, когда каждая из двух обойм АБУ содержит только по два балансирующих шара, система (2) имеет точное решение, однозначно определяющее их положения в обоймах. Условия существования сбалансированного стационарного решения вытекают из полученного решения и имеют следующий вид:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{z}_k^2 + 2\varepsilon \tilde{z}_k \chi (j_t - j_p) \cos \gamma + \chi^2 (j_t - j_p)^2}}{2(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)}, \quad k = 1, 2$$

Проведён анализ критических скоростей и вынужденных синхронных прецессий динамически неуравновешенного ротора без АБУ, закрепленного в изотропных и ортотропных опорах. Численно исследованы прецессионные движения ротора при его вращении с постоянной угловой скоростью и нестационарном прохождении критических областей с постоянным угловым ускорением. Изучено влияние ортотропии вязко-упругих характеристик опор на характер прецессионных движений ротора и процесс автобалансировки.

## Литература

- [1] Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor. // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002. 58, pp. 351–365.
- [2] Majewski T. Dynamic compensation of dynamic forces in two planes for the rigid rotor. // *Jornal of theoretical and applied mechanics*. 2007. Vol. 45, pp. 349–403.
- [3] Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2008. Vol. 43. pp. 527–541.
- [4] Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. pp. 1139–1154.
- [5] Быков В.Г. Балансировка статически и динамически неуравновешенного ротора одноплоскостным автобалансирующим механизмом. // *Вест. С.-Петербург. ун-та. Сер.1*. 2009. Вып 4. С. 90–101.
- [6] Быков В.Г. Автобалансировка жесткого ротора в вязко-упругих ортотропных опорах. // *Вест. С.-Петербург. ун-та. Сер.1*. 2013. Вып 2. С. 82–91.
- [7] Ковачев А.С. Балансировка динамически неуравновешенного ротора с учетом неидеальности автобалансирующих устройств. // *Вест. С.-Петербург. ун-та. Сер.1*. 2015. Вып 4. С. 606–616.

## О стабилизации вращательного движения твёрдого тела со спарками гиродинов

*Гладун А.В.*

*aleksygladun@gmail.com*

Ульяновский институт гражданской авиации  
им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева,  
432071, Российская Федерация, Ульяновск, ул. Можайского, 8–8

*Ключевые слова:* твёрдое тело, спарка гиродинов, равномерное вращение, положение равновесия, стабилизация по части переменных, линейное приближение.

Проблему стабилизации вращательного движения твёрдого тела требуется решать при проектировании современных технических систем, в частности, искусственных спутников. Применение гиродинов и спарок гиродинов существенно расширяет семейство возможных стационарных движений системы и область их устойчивости, а также позволяет в некоторой степени компенсировать дестабилизирующее влияние упругих элементов.

Исследуется задача нахождения стационарных движений твёрдого тела (несущего спарки гиродинов), в окрестности которых разрешима проблема стабилизации вращательного движения твёрдого тела относительно его центра масс. Разрешимость проблемы предполагает, что с помощью спарок гиродинов могут быть решены задачи стабилизации угловой скорости и стабилизации заданной ориентации. Рассматривается один из вариантов построения механической системы, состоящей из твёрдого тела и спарок гиродинов, который с одной стороны описывается достаточно простой системой дифференциальных уравнений, а с другой, может обеспечить решение всех указанных задач для твёрдого тела (носителя). В силу неуправляемости механических систем с гиродинами в классическом смысле, для решения поставленных задач используется понятие управляемости по части переменных, характеризующих угловую скорость и положение в пространстве. Для значений переменных, которые характеризуют движение спарок гиродинов, требуется лишь ограниченность [1].

Гиродин — двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Объединенные в спарку гиродины идентичны, оси вращения гирокамер параллельны. Роторы спарки вращаются с постоянными, одинаковыми по величине и противоположными по направлению (в начальный момент времени) скоростями.

Используются уравнения движения твёрдого тела с  $s$  спарками гиродинов, полученные в работе [2]. В случае, когда у каждого гиродина ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси

вращения, они принимают вид

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega + 2(K_0H \cos q \dot{q} + \omega \times K_0 \sin q h) = 0, \quad (1)$$

$$2J\ddot{q} - 2(K_0H \cos q)^* \omega = M_j^{C_j} + M_{s+j}^{C_{s+j}}. \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  — матрица тензора инерции системы твёрдое тело — спарки гироскопов;  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$  — вектор угловой скорости твёрдого тела (носителя);  $q = (q_1, \dots, q_s)$  — вектор углов поворота гироскопов относительно носителя;  $K_0, L_0, N_0$  — матрицы ортов, задающих положение  $i$ -й спарки гироскопов в теле носителя;  $M_j^{C_j}, M_{s+j}^{C_{s+j}}$  — главные моменты управляющих сил относительно центра инерции  $j$ -го и  $s+j$ -го гироскопов, входящих в  $j$ -ю спарку, соответственно; \* — символ транспонирования.

В качестве вектора управления выбирается вектор угловых скоростей поворота гироскопов относительно носителя  $u = \dot{q}$ , тогда главный момент управляющих сил из (2) определяется равенством

$$M_j^{C_j} + M_{s+j}^{C_{s+j}} = 2J\dot{u} - 2(K_0H \cos q)^* \omega$$

и мы можем ограничиться в рассматриваемом случае только уравнением (1), описывающим движение твёрдого тела, для которого получаем

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega + 2\omega \times (K_0 \sin q h) + 2K_0H \cos q u = 0. \quad (3)$$

Для уравнения (3), записанного в системе координат  $Oxyz$ , жёстко связанной с носителем, найдены стационарные решения полученной системы, являющиеся положениями относительного равновесия и равномерными вращениями твёрдого тела. Выделены случаи стабилизируемости системы по части переменных по линейному приближению в окрестности стационарных положений [3]. Получены стабилизирующие управления по части переменных. При построении исходная система приводится к системе специального вида [4], для которой техника построения стабилизирующего управления известна.

Построены управления, которые решают задачи стабилизации угловой скорости и равномерного вращения твёрдого тела, несущего спарки гироскопов. Построение выполнено в математическом пакете для системы с заданными числовыми параметрами. Приведены результаты численного моделирования.

## Литература

- [1] Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659—665.
- [2] Смирнов Е. Я., Павлинов В. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. Управление движением механических систем. Л.: Издательство ЛГУ, 1985. 313 с.

- [3] Гладун А. В. Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению. // Труды ИПММ НАН Украины. 1998. Т. 2. С. 21–31.
- [4] Гладун А. В. Стабилизация ориентации спутника с помощью двух спарок гироскопов. // Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1637>

## О возможных походках четырёхногого робота

*Злобин Д.Ю., Шиманчук Д.В., Желонкина О.С., Князев Н.П.,  
Курочкин В.Ю., Ившин А.М.*

*daniel.zet.ds@gmail.com, d.shimanchuk@spbu.ru, st047886@student.spbu.ru,  
st079493@student.spbu.ru, st040267@student.spbu.ru, st079231@student.spbu.ru*

*Санкт-Петербургский государственный университет,*

*199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9*

*Ключевые слова:* робототехника, походка, локомоции, параметризация походки.

В работе рассмотрены особенности построения походки четырёхногого шагающего робота. Задача построения управления для различного типа ходячих платформ находит повсеместное применение на практике, при этом в процессе её решения приходится принимать упрощения и допущения. Так, для несложных устройств распространён кинематический подход к управлению приводами, когда для каждого момента времени задается желаемый угол в сочленении кинематических пар пятого класса [1]. Получившаяся программная траектория реализуется на конечных устройствах посредством сервоприводов с обратной связью по положению или скорости.

Данный метод имеет недостатки, выраженные в низкой эффективности передвижения объекта, так как любое управление, не учитывающее динамику, должно соответствовать принципу статической устойчивости, из которого следует, что робот должен иметь не менее трёх точек контакта с поверхностью.

Рассмотрение динамики объекта [2] и сил контактного взаимодействия приводит [3, 4] к различным адаптивным методам управления, в число которых входит, например, управление по импедансу [5]. В данной работе предложен метод параметризации возможных походок четырёхногого ходячего робота посредством конечного количества параметров. Для достижения данной цели были проанализированы на основе [2, 3, 6]: динамика робота (построена динамическая модель), силы контактного взаимодействия и их влияние на движение базовой платформы, влияние удара при касании поверхности конечностью робота.

Походка строится при помощи сплайнов с точками излома в моменты касания [7]. На сплайны накладываются ограничения, которые гарантируют допу-

стимость походки для заданного движения и ориентации центра масс базовой платформы.

Разработанный в результате работы метод параметризации походки четырёхногого шагающего робота может быть использован как в задачах оптимизации движения данного объекта, так и в конструировании регулятора для управления шагающим роботом, будь то стабилизирующий относительно заданной походки регулятор или регулятор, генерирующий собственную походку.

Научная публикация выполнена при поддержке Ассоциации выпускников СПбГУ.

### Литература

- [1] Желонкина О. С., Злобин Д. Ю. Кинематическое управление шестиногим шагающим роботом // Молодой ученый. 2019. № 26. С. 1–7.
- [2] John J. Craig. Introduction to Robotics: Mechanics and Control (3rd Edition). / Pearson, 2004. 400 p.
- [3] Stronge W. Impact Mechanics / Cambridge University Press, 2000. doi:10.1017/CBO9780511626432
- [4] Remy C. D. Optimal exploitation of natural dynamics in legged locomotion / PhD Thesis, ETH, Zurich, 2011.
- [5] Hyun D. J., Seok S., Lee J., Kim S. High speed trot-running: Implementation of a hierarchical controller using proprioceptive impedance control on the MIT Cheetah. // The International Journal of Robotics Research, vol 33. 2014. pp. 1417–1445. doi:10.1177/0278364914532150
- [6] Жилин П. А. Динамика твердого тела: учеб. пособие / Изд-во Политехн. ун-та, 2014. 560 с.
- [7] Утешев А. Ю., Тамасян Г. Ш. К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 3. С. 76–85.

## Стабилизация движения линейных систем при наличии ограниченных возмущений

*Зубов С.В.*

*s.zybov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* линейные системы дифференциальных уравнений, внешние ограниченные возмущения, стабильные колебания, стабилизация движения.

В докладе рассматривается проблема стабилизации движения в линейных управляемых системах, динамика функционирования которых задаётся

$n$ -мерными линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t) + Bu, \quad (1)$$

где  $x, u, g(t)$  — вещественные  $n$ -мерные вектора-столбцы соответственно с компонентами  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ , компоненты вектора  $g(t)$  определены, непрерывны и ограничены для всех  $t \geq 0$ ,  $\|g(t)\| \leq m$  при любых  $t \geq 0$ ,  $m = \text{const} > 0$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные вещественные матрицы. В докладе под стабилизацией движения в системе (1) понимается удержание решений этой системы в окрестности некоторого желаемого движения, не являющегося в общем случае решением системы (1). Такого рода движения принято называть расчётными движениями рассматриваемой системы. Не ограничивая общности, в качестве такого желаемого движения в докладе рассматривается движение  $x = 0$ . В общем случае движение  $x = 0$  не реализуется в системе (1). В докладе предлагается вышеуказанное удержание решений системы (1) в окрестности  $x = 0$  осуществлять при создании в этой окрестности некоторого замкнутого, ограниченного, инвариантного для решений системы (1) множества  $n$ -мерного пространства, асимптотически устойчивого по Ляпунову. Такого рода множества в целях стабилизации движения были введены впервые В.И.Зубовым [1] и названы стабильными колебаниями. В той же работе [1] была поставлена проблема исследования этих стабильных колебаний, выяснения, какими же в точности множествами они являются, а также оценивания размеров этих множеств. В докладе для некоторых систем типа (1) осуществляется построение определенного вида управлений  $u_j, j = 1, \dots, n$ , при которых в (1) возникает стабильное колебание, представляющее собой  $n$ -мерный косоугольный параллелепипед с центром в начале координат. Все рёбра такого параллелепипеда по величине могут быть сделаны сколь угодно малыми выбором параметров соответствующих управлений  $u_j, j = 1, \dots, n$ . При этом любое решение системы (1) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к указанному стабильному колебанию и входит в него в конечное время.

**Теорема.** Пусть в системе (1) матрица  $A$  известна, все её собственные числа вещественны и отрицательны,  $\lambda_j(A) < 0, j = 1, \dots, n$ , причем кратным собственным числам соответствуют простые элементарные делители. Будем считать, что компоненты  $u_j, j = 1, \dots, n$  вектора  $u$  принимают всего лишь два значения (+1 и -1), являясь искомыми функциями фазовых координат  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда существует такая постоянная вещественная матрица  $B$ , что можно построить такие функции  $u_j(x_1, \dots, x_n), j = 1, \dots, n$ , при которых в полученной системе (1) возникает стабильное колебание. Посредством выбора параметров указанных функций  $u_j$  это стабильное колебание может быть организовано в сколь угодно малой наперед заданной окрестности точки  $x = 0$ . Все

решения такой полученной системы (1) стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к указанному стабильному колебанию и входят в него в конечное время.

**Доказательство.** Теорема обосновывается путём сведения получающейся системы (1) к набору  $n$  несвязанных между собой уравнений первого порядка вида

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + \bar{g}_j(t) + \beta_j f_j(\sigma_j), \quad \sigma_j = \Gamma_j^* C^* y, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где новый фазовый вектор  $y$  — вещественный  $n$ -мерный вектор-столбец с компонентами  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , получаемый из фазового вектора  $x$  путем неособого линейного ортогонального преобразования  $y = Cx$ , такого, что матрица  $J = CAC^*$  — жорданова нормальная форма матрицы  $A$ . В уравнениях (2)  $\bar{g}(t)$  — вещественный  $n$ -мерный вектор-столбец с компонентами  $(\bar{g}_1(t), \dots, \bar{g}_n(t))$ ,  $\bar{g}(t) = Cg(t)$ , каждый из  $n$  вещественных  $n$ -мерных вектор-столбцов  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  — это  $j$ -й столбец матрицы  $C^*$ , умноженный на некоторый положительный скалярный параметр  $\gamma_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , фиксированные числа  $\beta_j < 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Все функции  $f_j(\sigma_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  задаются типовым соотношением

$$f_j(\sigma_j) = \begin{cases} +1, & \sigma_j > -l_j \\ -1, & \sigma_j < +l_j, \end{cases} \quad (3)$$

где параметры  $l_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Функции (3) носят название релейных гистерезисных функций [1]. Значения параметров  $l_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  определяют размеры стабильного колебания уравнений (2). При указанных условиях уравнения (2) становятся полностью несвязанными между собой уравнениями первого порядка вида

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + \bar{g}_j(t) + \beta_j f_j(\gamma_j y_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

что позволяет исследовать каждое из них путем непосредственного интегрирования.

## Литература

- [1] Зубов В.И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение., 1966. 352 с.

## Динамика статически неуравновешенного ротора при наличии активного магнитного подшипника

*Ильина А.Ю., Ковачев А.С.*

*iljina-alena@mail.ru, a.kovachev@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* активный магнитный подшипник, статически неуравновешенный ротор, автоматическое балансировочное устройство.

В данной работе рассматривается статически неуравновешенный жёсткий ротор, закрепленный с помощью одной вязко-упругой изотропной опоры и оснащенный активным магнитным подшипником (АМП), управление напряжением в котором осуществляется с помощью пропорционально-интегрального регулятора с двойным дифференцированием и обратной связью по току (ПИДДТ-регулятор). Построена математическая модель ротора с активным магнитным подшипником, уравнения которой имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_r \ddot{x} + c\dot{x} + kx = \varkappa x + h i_x + m_r s (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta), \\ m_r \ddot{y} + c\dot{y} + ky = \varkappa y + h i_y + m_r s (\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta), \\ L \dot{i}_x + \frac{h}{2} \dot{x} + R i_x = -(g_1 x + g_2 \dot{x} + g_3 i_x + g_4 \sigma_x + g_5 \ddot{x}), \\ L \dot{i}_y + \frac{h}{2} \dot{y} + R i_y = -(g_1 y + g_2 \dot{y} + g_3 i_y + g_4 \sigma_y + g_5 \ddot{y}). \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1)  $m_r$  — масса ротора,  $x$  и  $y$  — координаты центра масс,  $i_x$  и  $i_y$  — ток электромагнитов,  $\varkappa$  и  $h$  — «отрицательная» позиционная и токовая жесткости подвеса соответственно,  $s$  — статический эксцентриситет ротора,  $\theta$  — угол поворота ротора,  $k$  и  $c$  — коэффициенты жесткости и демпфирования соответственно,  $L$  и  $R$  — индуктивность и сопротивление электромагнита.

Правые части последних двух уравнений относятся к ПИДДТ-регулятору, в котором  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  — коэффициенты усиления обратных связей по перемещению, скорости, току, интегралу от перемещения и ускорению соответственно, а  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — интегральные переменные, определяемые следующим образом:

$$\sigma_x(t) = \sigma_x(0) + \int_0^t x(t) dt, \quad \sigma_y(t) = \sigma_y(0) + \int_0^t y(t) dt.$$

Произведено численное моделирование в программе MATLAB при вращении с постоянной скоростью. Показано, что только с помощью управления АМП невозможно осуществить балансировку ротора, и в закритической области наблюдается режим, при котором величина остаточной амплитуды коле-



баний равна статическому эксцентриситету ротора, что согласуется с результатами, полученными в [1]. Изучено влияние параметров АМП на прохождение ротора через резонанс в случае вращения с постоянным угловым ускорением. Построены амплитудные кривые для трёх моделей статически неуравновешенного жёсткого ротора: закреплённого с помощью жёстко-упругой опоры и оснащённого АМП, закреплённого только с помощью АМП и ротора, закреплённого в вязко-упругих изотропных опорах без наличия АМП.

Также исследован вопрос балансировки статически неуравновешенного ротора, закреплённого с помощью АМП, с помощью автоматического балансировочного устройства (АБУ), представляющего собой круговую полость радиуса  $r$ , в которой могут свободно передвигаться 2 балансировочных шарика массой  $m_b$ . Динамика модели описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} (m_r + 2m_b)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \varkappa x + hi_x - \frac{d^2}{dt^2}[m_r s \cos \theta + m_b r \sum \cos(\theta + \psi_j)], \\ (m_r + 2m_b)\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \varkappa y + hi_y - \frac{d^2}{dt^2}[m_r s \sin \theta + m_b r \sum \sin(\theta + \psi_j)], \\ Li_x + \frac{h}{2}\dot{x} + Ri_x = -(g_1 x + g_2 \dot{x} + g_3 i_x + g_4 \sigma_x + g_5 \ddot{x}), \\ Li_y + \frac{h}{2}\dot{y} + Ri_y = -(g_1 y + g_2 \dot{y} + g_3 i_y + g_4 \sigma_y + g_5 \ddot{y}), \\ m_b r^2(\ddot{\psi}_j + \ddot{\theta}) + c_\psi \dot{\psi}_j = m_b r (\ddot{x} \sin(\theta + \psi_j) - \ddot{y} \cos(\theta + \psi_j)), \\ j = 1, 2, \end{cases}$$

где  $\psi_j$  — углы отклонения балансировочных шариков, а  $c_\psi$  — коэффициент вязкого сопротивления движению шариков в обойме АБУ. Посредством численного моделирования продемонстрировано снижение остаточных колебаний при использовании АБУ, но в то же время показана невозможность полной балансировки ротора, происходящей в случае использования АБУ для ротора в вязко-упругих ортотропных опорах.

## Литература

- [1] Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. СПб. : Политехника, 2003.
- [2] Beltran-Carbajal F., Silva-Navarro G., Arias-Montiel M. Estimation and Active Damping of Unbalance Forces in Jeffcott-Like Rotor-Bearing Systems *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. // *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. 2012. С. 29–49.
- [3] Шеклеина И.Л., Угольников А.В., Стожков Д.С. Об активных магнитных подшипниках. // *Известия УГГУ*. 2016. Вып. 4(44). С. 76–79.

## О стабилизации заданного положения схвата дельта-робота

**Красинский А.Я.,<sup>1,2,3</sup> Ни А.В.,<sup>3</sup> Юлдашев А.А.<sup>2</sup>**  
*krasinsk@mail.ru, ni-av@rudn.ru, izzvms@gmail.com*

<sup>1</sup>Московский государственный университет пищевых производств,  
125080, Российская Федерация, Москва, Волоколамское ш., 11,

<sup>2</sup>Московский авиационный институт,  
(национальный исследовательский университет),  
125993, Российская Федерация, Москва, Волоколамское шоссе, 4,

<sup>3</sup>Российский университет дружбы народов,  
117198, Российская Федерация, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

*Ключевые слова:* параллельный манипулятор, геометрические связи, избыточные координаты, дельта-робот.

Конструкция дельта-робота — параллельного манипулятора, изобретенного Reymond Clavel [1], освободила электропривод от его основного недостатка (недостаточно хороших массо-габаритных характеристик), поскольку в этом манипуляторе исполнительные приводы неподвижны. Параллельные манипуляторы имеют высокую жёсткость исполнительного звена [2], вследствие того, что исполнительное звено является пересечением нескольких кинематических цепей. Но из-за этого возникают сложные условные соотношения между расстояниями для узлов манипулятора и координатами этих узлов, не позволяющие описать конфигурацию системы независимыми параметрами. Приходится вводить координаты в количестве, превышающем число степеней свободы системы, это делает неприменимыми уравнения Лагранжа второго рода и чрезвычайно усложняет аналитическое решение обратной задачи кинематики. Предлагаемое в работе использование продифференцированных уравнений связей и строгих методов аналитической механики систем с избыточными координатами сокращает размерность задачи обратной кинематики. Применение предлагаемого подхода к дельта-роботу как манипулятору с тремя геометрическими связями и тремя параллельными кинематическими цепями позволило получить математическую модель его динамики вообще без аналитического решения задачи обратной кинематики.

Рассмотрим манипулятор с координатами  $q' = (q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$ , как систему с кинетической  $\tilde{T}(q, \dot{q})$  и потенциальной  $\Pi(q)$  энергиями и функцией Лагранжа  $L = \tilde{T}(q, \dot{q}) - \Pi(q)$ , находящуюся под действием, еще и непотенциальных сил  $\tilde{Q}_r(q, \dot{q}), \tilde{Q}_s(q, \dot{q})$ , (среди которых могут быть и управляющие). Пусть на эту систему наложены независимые между собой геометрические связи

$$F(q) = 0; F'(q) = (F_1(q), \dots, F_m(q)) = 0; \quad \det \left| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right| \neq 0. \quad (1)$$

Для составления векторно-матричных уравнений динамики системы введём векторы, продифференцируем (1) по времени и разрешим относительно скоростей избыточных координат

$$r = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ \dots \\ q_{n+m} \end{pmatrix}, \tilde{Q}_r(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1(q, \dot{q}) \\ \dots \\ \tilde{Q}_n(q, \dot{q}) \end{pmatrix}, \tilde{Q}_s(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{n+1}(q, \dot{q}) \\ \dots \\ \tilde{Q}_{n+m}(q, \dot{q}) \end{pmatrix}.$$

$$\dot{s} = B(q)\dot{r}, \quad B(q) = - \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Будем описывать движение системы уравнениями М.Ф. Шульгина [3]–[5]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_r + B'(q) \left( \frac{\partial L}{\partial s} + Q_s \right). \quad (3)$$

Здесь  $L(q, \dot{r}) = T(q, \dot{r}) - \Pi(q)$ ,  $Q_r, Q_s$  — соответственно функция Лагранжа и непотенциальные силы после исключения зависимых скоростей. Кроме уравнений (2), (3) могут быть добавлены математические модели приводов.

Предложенный метод применен к решению задачи позиционирования схвата дельта-робота. Робот состоит из двух платформ: неподвижного верхнего основания с установленными приводными двигателями и подвижного исполнительного звена. На выходных валах редукторов приводных двигателей жёстко закреплены плечи одинаковой длины, на концах которых установлены рычаги, их нижние концы соединены с серединами сторон исполнительного звена. Геометрические связи получены из трёх теорем Пифагора — квадраты расстояний между концами рычагов, выраженные через координаты, должны быть равны квадратам их длин. Из полученных дифференцированием связей линейных соотношений зависимые скорости (скорости центра нижнего основания) выражены через независимые (угловые скорости закрепленных на валах исполнительных приводов плеч), составлены уравнения (3) с математическими моделями приводов, определены управляющие воздействия, обеспечивающие удержание исполнительного звена в заданном положении, введены возмущения, составлены векторно-матричные уравнения возмущённого движения с выделенным по известной методике [4, 5] первым приближением, к управлению, обеспечивающему реализацию заданного положения, добавлено стабилизирующее управление. Для определения этого управления из полученной системы выделена линейная управляемая подсистема [4, 5], для которой методом Н.Н. Красовского [6] определено управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость по её переменным. Устойчивость в полной нелинейной системе, установлена [5] с использованием теории критических случаев [7, 8]: в системах с геометрическими связями характеристическое уравнение системы первого приближения

уравнений возмущённого движения обязательно имеет столько нулевых корней [5], сколько связей наложено на систему.

### Литература

- [1] Clavel R. Conception d'un robot parallele rapide 'a 4degres de liberte. Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, 1991. n 925.
- [2] Юревич Е.И. Основы робототехники. СПб: Изд.: БХВ–Петербург, 2018. 304 с.
- [3] Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент. Научные труды САГУ. 1958. Вып. 144. 183 с.
- [4] Krasinskiy A.Ya., P'ina A.N., Krasinskaya E.M. Stabilization of Steady Motions for Systems with Redundant Coordinates. Moscow University Mechanics Bulletin. 2019. Vol. 74, No. 1. pp. 14–20.
- [5] Krasinskii, A.Y., Krasinskaya, E.M. A stabilization method for steady motions with zero roots in the closed system. Autom Remote Control. 2016. 77, pp. 1386–1398 <https://doi.org/10.1134/S0005117916080051>.
- [6] Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. / Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1967. С. 475–514.
- [7] Ляпунов А. М. Собрание сочинений, Т.2. АН СССР. 1956. 472 с.
- [8] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1967. 532 с.

## Управляемое движение гуманоидного робота в задаче приседания

*Курочкин В.Ю., Злобин Д.Ю., Шиманчук Д.В.*

*st040267@student.spbu.ru, daniel.zet.ds@gmail.com, d.shimanchuk@spbu.ru*

*Санкт-Петербургский государственный университет,*

*199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9*

*Ключевые слова:* робототехника, гуманоидный робот, управляемое движение

Объектом исследования является плоская модель робота гуманоидного типа [1]–[5]. Рассматривается движение человека при приседаниях и вставаниях, копирование этих движений роботом. Таким образом, можно смоделировать движение протезов или экзоскелетов, которые будут служить хорошей заменой биологическим конечностям человека [4, 5].

Для построения системы дифференциальных уравнений управляемого движения гуманоидного робота используется лагранжев формализм [1, 2, 3, 6, 7]. Представлено несколько случаев управляемого движения. В качестве управления для первого эксперимента взято импульсное воздействие, с помощью которого находится наиболее подходящая траектория, используемая в дальнейших

экспериментах. Основная сложность задачи состоит в том, что она является краевой и имеет множество решений, из которых необходимо выбрать наиболее подходящее для естественного движения человека. В качестве управления для последующих экспериментов использовано позиционное управление в форме обратных связей, которое обеспечивает устойчивость по Ляпунову для нулевого решения системы в отклонениях [6]–[8].

В результате проделанной работы построена система дифференциальных уравнений управляемого движения плоской модели гуманоидного робота как многосвязного механизма; представлен закон импульсного управления для перевода робота из заданной точки фазового пространства в определенную конечную точку; представлены законы позиционного управления в форме обратных связей для случая перевода робота в заданную точку фазового пространства и для случая стабилизации его движения относительно программной траектории; по разработанной математической модели движения робота было реализовано компьютерное моделирование в пакете Wolfram Mathematica; численные эксперименты проведены для случая приседания робота с использованием всех вышеперечисленных законов управления и для случая вставания с использованием позиционного управления в форме обратных связей для стабилизации движения механической системы на программной траектории, они подтверждают все теоретические выкладки, приведенные в работе.

## Литература

- [1] Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 368 с.
- [2] Алексеев Р.А., Котельников Ю.П. Формирование задающих воздействий, обеспечивающих движение двуногого шагающего робота в сагиттальной плоскости // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 56–61.
- [3] Чигарев А.В., Борисов А.В. Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма. // ISSN 1812-5123. Российский журнал биомеханики. 2010. Т. 15, № 1 (51) С. 74–88.
- [4] Knudson D. Fundamentals of Biomechanics 2nd Edition, 2007. 319 p.
- [5] Lu T.-W., Chang C.-F. Biomechanics of human movement and its clinical applications // Kaohsiung Journal of Medical Sciences, 2012. 28 (2 Suppl): pp. 13–25.
- [6] Kurochkin V., Shymanchuk D. Positional control of space robot manipulator. In: Mechanics – Eighth Polyakhov’s Reading // 2018 International Conference (Saint Petersburg), 2018. pp. 1–7. doi: 10.1063/978-0-7354-1660-4\_30
- [7] Kadry S., Alferov G., Kondratyuk A., Kurochkin V., Zhao S. Modeling the motion of a space manipulation robot using position control. In: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2018) AIP Conf. Proc. 2116, P. 080005-1-080005-4. doi: 10.1063/978-0-7354-1854-7\_30
- [8] Ногин В.Д. Теория устойчивости движения. СПбГУ: ф-т ПМ–ПУ, 2008. 159 с.

## Минимаксная стабилизация линии визирования инерционного объекта на подвижном основании при наличии трения

*Латонов В.В.*

*WLatonov@gmail.com*

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,  
НЦМУ «Сверхзвук»,

140181, Российская Федерация, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

*Ключевые слова:* линия визирования, оптимизация, стабилизация, минимаксное управление, возмущение, генетический алгоритм.

Задачи стабилизации подвижного объекта в окрестности желаемого режима управления часто встречаются в механических системах. Если объект, который требуется стабилизировать, связан с другим подвижным объектом, то задача усложняется, поскольку для стабилизации требуется информация о движении основания.

В настоящей работе используется два разных подхода для стабилизации при помощи линейной обратной связи. Первый подход — это методика минимаксного управления, позволяющая вычислить управляющие силы и моменты, которые доставляют минимум функционалу качества стабилизации при наихудших возмущениях, действующих в системе. В работе [1] этот метод был впервые использован вместе с методом шатров. Второй подход — параллельный генетический алгоритм, используемый для аппроксимации функции. В работе решена задача стабилизации системы линейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка. В задаче рассматриваются возмущения по начальным условиям, а также постоянные возмущения.

### Постановка задачи.

Рассматривается система, описанная в работе [2]. На гладкой поверхности расположено подвижное основание, для описания движения которого используется расширенная модель машины Дубинса. С подвижным основанием связана приборная система координат. Основание совершает вращательные движения. В пространстве присутствует неподвижный объект, называемый целью. На основании закреплён инерционный объект — цилиндр. Его центр масс вынесен вперед относительно основания.

Цилиндр закреплён на основании при помощи карданова подвеса. Цилиндр приводится в движение при помощи управляющих моментов, действующих в системе приводов. Между основанием и внешним кольцом, а также между внешним и внутренним кольцами действует сила трения. Также в системе действует сила тяжести. Цели и цилиндру соответствуют линии визирования. Для

цели это отрезок, соединяющий начало приборной системы координат и цель. Для цилиндра это луч, направленный от начала приборной системы координат в сторону центра масс цилиндра.

### Решение задачи.

Движение цилиндра описывается системой уравнений Лагранжа второго рода. Эти уравнения линеаризуются, после чего решается обратная задача динамики. Каждая из линий визирования задается двумя параметрами — углом курса  $\varphi$  и углом возвышения  $\theta$ . В задаче вводится вектор фазовых координат  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  — рассогласования угловых координат линий визирования цели и цилиндра и рассогласования скоростей изменения этих координат. Функционал качества стабилизации имеет вид:

$$\Phi(x(t_0)) = \int_{t_0}^{\infty} x^T S x dt. \quad (1)$$

Он сводится к терминальному функционалу [3]:

$$\Phi(x(t_0)) = x^T(t_0) H x(t_0). \quad (2)$$

Максимальное значение этого функционала совпадает с максимальным собственным значением матрицы  $H$  при  $\|x(t_0)\| \leq 1$ , а наихудшее начальное возмущение — это собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению матрицы.

В первой задаче постоянные возмущения неизвестны [4]. Максимум по постоянно действующим возмущениям вычисляется с помощью метода шатров. Минимум, отвечающий оптимальным коэффициентам линейной обратной связи, вычисляется также с помощью метода шатров.

Во второй задаче постоянные возмущения известны. В пространстве параметров, определяющих постоянные возмущения, строится сетка. В каждой её точке вычисляются коэффициенты обратной связи. Далее по вычисленным значениям коэффициентов в точках строится аппроксимация при помощи генетического алгоритма [5]. Таким образом, коэффициенты обратной связи определяются как функции параметров, определяющих постоянно действующие возмущения.

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (распоряжение Правительства РФ от 24 октября 2020г. №2744-р).

## Литература

- [1] Alexandrov V. V., Bugrov D. I., Corona M. G., Tikhonova K. V. Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing // IMA J. of Math. Control and Inform. 2017. Vol. 34(1), pp. 15–25.
- [2] Латонов В. В., Тихомиров В. В. Управление линией визирования цели по видео-изображению // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 1. С. 53–59.
- [3] Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
- [4] Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. 14. № 4. 2086–2088.
- [5] Lara-Ramirez J. E., Garcia-Capulin C. H., Estudillo-Ayala M. J., Avina-Cervantes J. G., Sanchez-Yanez R. E., Rostro-Gonzalez H. Parallel hierarchical genetic algorithm for scattered data fitting through B-splines // Applied Sciences 2019, 9(11), 2336. <https://doi.org/10.3390/app9112336>

## Устойчивость вертикального спуска тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде

*Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А.*

*privalova@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* оперенное тело, вертикальный спуск, устойчивость.

Исследуется свободное падение оперённого тела в сопротивляющейся среде. Оперение тела состоит из четырёх одинаковых лопастей. Лопастей на теле размещаются таким образом, чтобы центры лопастей оказались в плоскости, ортогональной оси тела, на одинаковом расстоянии от нее. Углы между державками, на которых установлены лопасти, одинаковы. Лопастей устанавливаются на углы  $\beta_i$  — установочные углы лопастей, углы между нормалью к плоскости лопасти и плоскостью, проходящей через центры давления лопастей.

В работах [1]–[3] изучался спуск тяжёлого тела, лопасти которого устанавливались под одним и тем же углом, что обеспечивало его вращение. Исследовалась устойчивость возникающих режимов авторотации. Изучалось поведение тела, как в «малом» так и в «большом». Были определены общие свойства и тенденции движения объекта, находящегося в разных условиях.

В настоящей работе исследуется спуск тела, лопасти которого установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака. Показывается, что при таком расположении лопастей возможен режим установившегося поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью.



Изучается влияние изменения значений установочного угла лопастей и смещения центра масс тела на характер поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью тел с разной формой лопасти, как в «малом» так и в «большом».

Система уравнений в вариациях относительно режима поступательного спуска разбивается на две независимые между собой подсистемы, одна из которых описывает малые колебания оси тела относительно её положения в рассматриваемом режиме.

Исследуется асимптотическая устойчивость положения оси тела в режиме поступательного спуска с постоянной скоростью. Малые колебания оси симметрии относительно её положения в рассматриваемом режиме описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами шестого порядка.

Строятся области устойчивости на плоскости значений установочного угла и смещения центра масс для тел, лопасти которых представляют собой тонкие пластины в форме круга или прямоугольника аэродинамические характеристики которых известны [4].

Показывается влияние формы лопасти на скорость спуска в режиме установившегося поступательного вертикального спуска с постоянной скоростью.

Строятся траектории центра масс оперённого тела с лопастями в форме шайбы и прямоугольника в неподвижном пространстве на спуске. Показывается, что при тех значениях параметров задачи, при которых вертикальный спуск неустойчив, возникает хаотическое движение центра масс тела.

Научное исследование проведено при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00538.

## Литература

- [1] Okunev Y. M., Privalova O. G., Samsonov V. A. The geometry of stability domains of systems with different dimensions // 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading. IEEE, 2015. P. 1–4. doi: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106763
- [2] Okunev Y., Privalova O., Samsonov V. Influence of blade shape upon the auto-rotation stability // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016. P. 1–3. doi: 10.1109/STAB.2016.7541212
- [3] Окунев Ю. М., Привалова О. Г., Самсонов В. А. Устойчивость движения оперенного тела, авторотирующего в среде // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 81. № 6. С. 51–56
- [4] Табачников В. Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.

## Анализ устойчивости решений одного класса механических систем с кусочно-постоянными коэффициентами

*Платонов А.В.*

*a.platonov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* нестационарные механические системы, устойчивость, функции Ляпунова.

В работе рассматривается векторное уравнение типа Льенара. Такие уравнения широко используются для моделирования динамики механических объектов, находящихся под воздействием существенно нелинейных диссипативных и потенциальных сил. Проводится анализ устойчивости решений уравнения указанного типа. Этот анализ усложняется в связи с тем, что уравнение предполагается нестационарным. Известно, что наличие в механических системах параметров, зависящих от времени, может приводить к принципиально новым особенностям динамического поведения (см., например, [1, 2]). Особенно сложна и интересна ситуация, при которой параметры могут неограниченно возрастать, или напротив, сколь угодно близко приближаться к нулю, с течением времени. В этом случае многие классические типы функций Ляпунова, используемые для рассматриваемых механических систем, могут не удовлетворять условиям соответствующих теорем об устойчивости. Кроме того, анализ значительно усложняется, если присутствующие в системе параметры разрывны. Такие разрывы могут возникать в результате каких-то резких внешних воздействий, а также они могут быть частью используемой стратегии управления. Нестационарную систему с разрывными параметрами можно рассматривать, как систему с переключениями [3]. В настоящей работе предполагается, что нестационарные параметры в уравнении описываются функциями, являющимися кусочно-постоянными на любом конечном промежутке времени. При этом на всем временном интервале  $[0, +\infty)$  число разрывов у этих функций может быть бесконечно. Заметим, что такие ступенчатые функции часто используются для аппроксимации непрерывной динамики.

Пусть задано уравнение

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}(t, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$ ; функция  $\Pi(t, \mathbf{x})$  кусочно-постоянная относительно  $t$  и непрерывно-дифференцируема относительно  $\mathbf{x}$ ; элементы матрицы  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$  кусочно-постоянны относительно  $t$  и непрерывны относительно  $\mathbf{x}$ .

Сделаем следующие предположения: 1) при любом фиксированном значении  $t \geq 0$  функция  $\Pi(t, \mathbf{x})$  однородна порядка  $\mu + 1$  и положительно определена относительно переменной  $\mathbf{x}$ ,  $\mu \geq 1$ ; 2) при любом фиксированном значении  $t \geq 0$  элементы матрицы  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$  однородны порядка  $\nu$  относительно переменной  $\mathbf{x}$ ,  $\nu > 0$ , и при любых  $t \geq 0$  и  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  матрица  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{D}^T(t, \mathbf{x})$  положительно определена.

Тогда можно построить положительные кусочно-постоянные функции  $\hat{a}(t)$ ,  $\bar{a}(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $d(t)$ , такие что оценки

$$\hat{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1} \leq \Pi(t, \mathbf{x}) \leq \bar{a}(t)\|\mathbf{x}\|^{\mu+1}, \quad \mathbf{z}^T \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) \mathbf{z} \geq b(t) \|\mathbf{x}\|^\nu \|\mathbf{z}\|^2,$$

$$\left\| \frac{\partial \Pi(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq c(t)\|\mathbf{x}\|^\mu, \quad \|\mathbf{D}(t, \mathbf{x})\| \leq d(t)\|\mathbf{x}\|^\nu$$

будут иметь место при всех  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{z} \in R^n$ .

Целью работы является нахождение достаточных условий асимптотической устойчивости положения равновесия  $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  системы (1). Подобная задача рассматривалась в [4]. Однако, там предполагалось, что функции  $\hat{a}(t)$ ,  $\bar{a}(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $d(t)$  могут принимать значения лишь из конечного набора постоянных величин. Ситуация с бесконечным набором постоянных значений допускает возможность неограниченности указанных функций на интервале  $[0, +\infty)$ , а также их сколь угодно близкое приближение к нулю.

Будем строить функцию Ляпунова вида

$$V(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \Pi(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} - \delta \gamma_1(t) \|\dot{\mathbf{x}}\|^{\beta-1} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} + \delta \gamma_2(t) \|\mathbf{x}\|^{k-1} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}}, \quad (2)$$

где  $\beta \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ,  $\delta$  — некоторый малый параметр, функции  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  положительны и кусочно-постоянны при  $t \geq 0$ . Заметим, что мы используем разрывную (относительно переменной  $t$ ) функцию Ляпунова.

Далее в работе разрабатываются методы оценки как самой функции (2), так и её производной в силу системы (1) (на интервалах времени между разрывами). Предлагается способ выбора значений параметров функции (2), обеспечивающий в области  $t \geq 0$ ,  $\|(\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T)^T\| < H$  выполнение неравенств:

$$V(\tau_i + 0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq \varkappa_i V(\tau_i - 0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\dot{V}|_{(1)} \leq -Mh(t)V^{1+\rho}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad \text{если } t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots$$

Здесь  $H$  и  $M$  — некоторые положительные постоянные,  $\rho = (k-1)/(\mu+1)$ ,  $\{\tau_i\}_{i=1,2,\dots}$  — последовательность точек разрыва (относительно переменной  $t$ ) функции (2),  $\tau_0 = 0$ , постоянные  $\varkappa_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и положительная кусочно-постоянная функция  $h(t)$  определяются на основе заданных параметров системы и построенных параметров функции Ляпунова.

Анализируя полученные оценки, нетрудно установить ограничения на значения  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $h(t)$ , гарантирующие асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  системы (1).

## Литература

- [1] Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.
- [2] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / пер. с англ. М.: Мир, 1980. 300 с.
- [3] Liberzon D. Switching in Systems and Control. Birkhauser, Boston, MA, 2003. 233 p.
- [4] Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Chen Y., Lakrisenko P. A., Platonov A. V. Asymptotic stability conditions for some classes of mechanical systems with switched nonlinear force fields // Nonlin. Dyn. Syst. Theory. 2015. Vol. 15. P. 127–140.

## О динамике одной аэроупругой системы с двумя степенями свободы

*Селюцкий Ю.Д.*

*seliutski@imec.msu.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* колебания, устойчивость, предельные циклы, аэроупругие системы.

В последние годы активно исследуются возможности использования автоколебаний различных аэроупругих систем для генерации электроэнергии. Такие системы, в частности, использующие явление флаттера, могут оказаться эффективными в качестве малых и миниатюрных ветроэнергетических установок [1]–[5].

Рассмотрим аэродинамический маятник, представляющий собой крыло с симметричным профилем, которое жёстко закреплено на державке, причём ось вращения маятника может перемещаться вдоль неподвижной оси  $OY$ . Вся конструкция помещена в стационарный поток среды, скорость  $V$  которого перпендикулярна оси  $OY$ . Система движется в горизонтальной плоскости. Центр масс  $G$  системы совпадает с осью вращения. В оси вращения установлена спиральная пружина, стремящаяся выставить маятник вдоль потока. Другая пружина стремится его удерживать.

Для описания аэродинамического воздействия на крыло воспользуемся квазистатическим подходом. Будем считать, что аэродинамическая нагрузка сводится к подъёмной силе  $\mathbf{L}$  и силе лобового сопротивления  $\mathbf{D}$ , приложенным в

середине хорды крыла  $C$ , а также к аэродинамическому моменту  $M_z$  относительно этой точки:

$$L = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_l(\alpha), \quad D = \frac{\rho S}{2} V_C^2 C_d(\alpha), \quad M_z = \frac{\rho S}{2} V_C^2 b C_m(\alpha). \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $S$  — характерная площадь крыла;  $V_C$  — воздушная скорость точки  $C$ , т.е. её скорость относительно набегающего потока,  $\alpha$  — мгновенный угол атаки, под которым понимается угол между вектором  $\mathbf{V}_C$  и хордой крыла;  $C_l$ ,  $C_d$ ,  $C_m$  — безразмерные коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и аэродинамического момента, соответственно. Предполагается, что эти величины зависят только от мгновенного угла атаки, причем эта зависимость такая же, что и при стационарном обтекании.

В отличие от традиционно рассматриваемых задач о флаттере предполагается, что длина державки  $r = GC$  достаточно велика, и точка  $C$  крыла в «номинальном положении» находится ниже по потоку, чем центр масс  $G$  системы.

Уравнения движения системы и кинематические соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + ky + h\dot{y} = -\frac{\rho S}{2} V_C^2 (C_l(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + C_d(\alpha) \sin(\alpha - \theta)) \\ J\ddot{\theta} + \varkappa\theta + \eta\dot{\theta} = \frac{\rho S}{2} b V_C^2 (C_m(\alpha) - C_l(\alpha) r \cos\alpha - C_d(\alpha) r \sin\alpha) \\ V_C \cos\alpha = V \cos\theta - \dot{y} \sin\theta, \\ V_C \sin\alpha = V \sin\theta + \dot{y} \cos\theta + r\dot{\theta}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $m$  — масса движущихся частей системы,  $J$  — момент инерции системы относительно центра масс  $G$ ,  $k$ ,  $h$  — коэффициенты жёсткости и демпфирования линейной пружины,  $\varkappa$ ,  $\eta$  — коэффициенты жёсткости и демпфирования спиральной пружины.

Из соображений симметрии ясно, что система имеет тривиальное положение равновесия. Возможность существования «косых» равновесий и их устойчивость рассмотрены в [6].

В настоящей работе показано, что можно выбрать параметры системы таким образом, что тривиальное равновесие асимптотически устойчиво при малых скоростях потока, неустойчиво в диапазоне промежуточных значений  $V$  и вновь становится асимптотически устойчивым, когда  $V$  достаточно велико. Исследованы периодические режимы, возникающие в этой системе.

Этот эффект может быть полезен с точки зрения обеспечения остановки устройства при слишком сильном ветре.

## Литература

- [1] Bryant M., Garcia E. Modeling and Testing of a Novel Aeroelastic Flutter Energy Harvester // ASME J. Vib. Acoust., 2011. Vol. 133, N. 1, P. 011010. Doi: 10.1115/1.4002788.

- [2] Abdelkefi A., Ghommem M., Nuhait A., Hajj M.R. Nonlinear analysis and enhancement of wing-based piezoaeroelastic energy harvesters // J. Sound & Vibr., 2014. Vol. 333, N. 166–177. Doi: 10.1016/j.jsv.2013.08.032.
- [3] Wu Y., Li D., Xiang J., Da Ronch A. A modified airfoil-based piezoaeroelastic energy harvester with double plunge degrees of freedom // Theor. Appl. Mech. Lett., 2016. Vol 6, N. (5), pp. 244–247. Doi: 10.1016/j.taml.2016.08.009.
- [4] Selyutskiy Y., Holub A., Dosaev M. Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // Int. J. Struct. Stab. Dyn., 2019. Vol. 19, N. (5), P. 1941007. Doi: 10.1142/S0219455419410074.
- [5] Eugeni M., Elahi H., Fune F., Lampani L., Mastroddi F., Romano G.P., Gaudenzi P. Numerical and experimental investigation of piezoelectric energy harvester based on flag-flutter // Aerosp. Sci. Technol., 2020. Vol. 97, P. 105634. Doi: 10.1016/j.ast.2019.105634.
- [6] Selyutskiy Y.D. On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom // Appl. Math. Mod., 2019. Vol. 67, pp. 449–455. Doi: 10.1016/j.apm.2018.11.010.

## **Физическое и математическое моделирование колебаний сегмента моста**

**Шмигирилов Р.В., Рябинин А.Н.**

*robin\_fin@mail.ru, a.ryabinin@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* аэродинамическая труба, галопирование, тензопреобразователь, обыкновенное дифференциальное уравнение, метод Крылова–Боголюбова.

Длиннопролётные гибкие мосты подвергаются различным типам ветровых колебаний, например галопированию [1]. Традиционно галопирующие неустойчивости рассматривались в терминах критической скорости ветра в соответствии с линейной динамической теорией [2]. Предполагалось, что за пределами критического состояния происходят дивергентные колебания и катастрофический отказ конструкции. Однако, было показано, что мосты могут совершать колебания, и амплитуды этих колебаний в определенном диапазоне скоростей ветра могут быть допустимы [3].

Эксперименты проводились в аэродинамической трубе малых скоростей с открытой рабочей частью АТ-12, расположенной на территории Санкт-Петербургского университета. Диаметр выходной части сопла составляет 1,5 м. Длина рабочей части равна 2,25 м. Модель крепится в рабочей части с помощью восьми стальных пружин. Модель может колебаться с шестью степенями свободы. Однако, мы наблюдали только два режима. Первый режим — вращательные колебания вокруг горизонтальной оси  $OZ$ , перпендикулярной

вектору скорости воздушного потока. Второй режим — поступательные колебания вдоль вертикальной оси  $OY$ .

Длина  $L$  модели составляет 700 мм. Ширина  $w$  модели равна 100 мм. Сегмент моста состоит из трёх жестких балок круглого сечения, соединенных перемычками и перекрытых настилом. Эксперименты проводятся с концевыми шайбами. Концевые шайбы обычно устанавливаются для устранения перетекания воздуха через торцы. Таким образом, обтекание коротких тел с концевыми шайбами аналогично обтеканию удлиненных тел. Было показано, что в случае моделирования вращательных колебаний толстой пластины соотношение сторон пластины  $L/w$  должно быть больше пяти [4]. Диаметр круглой концевой шайбы составляет 200 мм.

Два полупроводниковых тензопреобразователя С-50 регистрируют натяжение двух нижних пружин. РС-осциллограф Velleman-PCS500 преобразует аналоговые выходные сигналы тензопреобразователей в цифровые и передаёт их на управляющий компьютер. Частота считывания показаний составляет 1250 Гц. Длительность записи показаний равна 3,3 с.

Процедура калибровки и последующая обработка результатов позволяют связать амплитуды колебаний выходного напряжения тензопреобразователей с амплитудами вращательных и поступательных колебаний сегмента моста.

Установившиеся колебания сегмента моста имели место при небольших положительных значениях угла атаки  $\alpha$ . По мере увеличения скорости потока модель проходит через два различных режима колебаний. При малых скоростях возникают поступательные колебания в вертикальном направлении. Затем эти колебания сменяются вращательными колебаниями вокруг оси, проходящей через плоскость симметрии модели. Частота поступательных колебаний намного меньше частоты вращательных. Диапазоны существования двух режимов колебаний могут перекрываться.

Математическая модель, описывающая поступательное галомирование плохо обтекаемого тела, была разработана в 60-х годах прошлого века [5]. В основе её лежит гипотеза квазистационарности, предполагающая, что аэродинамические силы, действующие на тело, зависят только от мгновенных значений углов, определяющих ориентацию тела в пространстве.

Гипотеза квазистационарности не работает для описания вращательных колебаний, поскольку в этом случае аэродинамические силы зависят не только от угла атаки, но и от производной этого угла по времени. Мы взяли за основу модель, предложенную для описания колебаний цилиндра [6]. Опыты с чисто вращательными колебаниями моста показали применимость этой модели к изучаемому в настоящей работе явлению.

Дифференциальные уравнения, описывающие поступательное и вращательное движение, решались методом Крылова–Боголюбова. Получена система уравнений для медленно меняющихся амплитуд и сдвигов фаз поступательных

и вращательных колебаний. Оказалось, что модель правильно описывает смену режимов колебаний при увеличении и уменьшении скорости потока. Модель предсказывает гистерезис при увеличении и последующем снижении скорости.

Финансовая поддержка настоящего проекта обеспечена Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант № 19-38-90045.

### Литература

- [1] Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения. М.: Стройиздат. 1984. 360 с.
- [2] Den Hartog J. P. Transmission line vibration due to sleet // Trans. Am. Inst. Electr. Eng. 1932. Vol 51. P 1074–1076.
- [3] Zhang M., Xu F., Han Y. Assessment of wind-induced nonlinear post-critical performance of bridge decks // J. Wind Eng. Ind. Aerod. 2020. Vol. 203, No. 104251. 11 p.
- [4] Shmigirilov R., Ryabinin A. Influence of end plates on rotational oscillations of a rectangular cylinder // Conference Topical Problems of Fluid Mechanics. Proceedings, edited by D. Šimurda D. and T. Bodnár (Institute of Thermomechanics, Prague, 2020). 2020. P. 200–205.
- [5] Parkinson G. V., Smith J. D. The square prism as an aeroelastic nonlinear oscillator // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1964. Vol 17. P. 225–239.
- [6] Рябинин А. Н., Киселев Н. А., Влияние положения оси вращения цилиндра на его вращательные колебания в воздушном потоке // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Серия I: Математика, механика, астрономия. 2016. Т. 3(61), вып. 2. С. 315–323.



Секція 7

Биомеханика

*Biomechanics*

## Изменение напряженно-деформированного состояния корнеосклеральной оболочки глаза после операций по коррекции зрения

*Бауэр С.М.,<sup>1</sup> Венатовская Л.А.,<sup>1</sup> Качанов А.Б.<sup>2,3</sup>*

*s.bauer@spbu.ru, l.venatovskaya@spbu.ru, andrey\_kachanov@yahoo.com*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский филиал МНТК Микрохирургия глаза

им. акад. С.Н. Фёдорова

192283, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Ярослава Гашека, 21,

<sup>3</sup>Северо-Западный государственный медицинский университет им. И.И. Мечникова

195067, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Пискаревский пр., д. 47

*Ключевые слова:* сопряженные оболочки, ЛАЗИК, SMILE, ФРК

В работе рассматривается задача о деформации тонкой оболочки, состоящей из двух сферических сегментов под действием нормального давления, при изменении толщины меньшего сегмента за счет удаления части материала в его центральной части. Представленная модель используется для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при коррекции зрения тремя технологиями: ЛАЗИК, SMILE и ФРК.

В настоящее время лазерные операции по коррекции зрения являются одним из самых востребованных видов хирургических вмешательств в офтальмологии. Начиная с 2010-х гг. появилась новая технология SMILE. В работах офтальмологов отмечается, что в сравнении с уже широко применяемыми операциями ЛАЗИК и ФРК технология SMILE обладает рядом преимуществ — более высокой биомеханической устойчивостью глаза к травме и в то же время быстрым восстановлением остроты зрения вблизи и вдаль без коррекции [1]. В исследованиях [2]–[4] обсуждаются биомеханические преимущества SMILE, в том числе за счет отсутствия роговичного лоскута (flap).

Выполняется трёхмерное моделирование в программном пакете ANSYS. Внешняя оболочка глаза представляется двумя сферическими сегментами переменной толщины с разными радиусами кривизны и разными упругими свойствами. Сегмент меньшего радиуса полагается роговицей, сегмент большего радиуса — склерой. Роговица рассматривается многослойной оболочкой, слои различны по толщине и упругим свойствам. Полагается что составная оболочка заполнена несжимаемой жидкостью. Материал роговицы и склеры принимается близким к трансверсально-изотропному материалу [5, 6]. Далее, в зависимости от технологии коррекции, из роговицы удаляется часть материала в центральной её части и анализируется изменение деформированного состояния глаза под действием нормального давления.

Технология ЛАЗИК заключается в выкраивании лоскута роговицы с помощью лазера и коррекции внутреннего слоя роговицы — стромы, лазером. Данный этап называется «абляцией роговицы». Затем лоскут возвращается на место. SMILE — технология при которой лазером формируется роговичный карман внутри роговицы и выкраивается лентикула (фрагмент ткани в виде небольшой линзы), которая удаляется через малый надрез в роговице. ФРК — технология, при которой роговица сразу снаружи обрабатывается излучением эксимерного лазера.

Проводится сравнение трёх методик при одинаковых параметрах операций. В наших моделях сравнимыми параметрами являются диаметр / толщина лентикулы при операции SMILE и диаметр / максимальная толщина (глубина) абляции при операциях ЛАЗИК и ФРК. Показано влияние многослойной структуры роговицы и упругих характеристик склеры на биомеханику глаза в результате коррекции зрения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00832-а.

## Литература

- [1] Kachanov, A.B., Nikulin, S.A. Technology of ReLEx SMILE at persons of military age. // *Clinical pathophysiology*, 2019, Vol. 25, No. 1, pp. 30–33.
- [2] Reinstein, D.Z., Archer, T.J., Gobbe M. The Key Characteristics of Corneal Refractive Surgery: Biomechanics, Spherical Aberration, and Corneal Sensitivity After SMILE. In: *Small Incision Lenticule Extraction (SMILE)* ed. by W. Sekundo. // Springer, Cham-Heidelberg-New York-Dordrecht-London, 2015, pp. 123–142. doi: 10.1007/978-3-319-18530-9\_13
- [3] Sekundo W., Kunert K.S., Blum M. Small incision corneal refractive surgery using the small incision lenticule extraction (SMILE) procedure for the correction of myopia and myopic astigmatism: results of a 6 month prospective study. // *British Journal of Ophthalmology*, 2011, Vol. 95, No. 3, pp. 335–339. doi:10.1136/bjo.2009.174284
- [4] Seven I., Vahdati A., Pedersen I.B., Vestergaard A., Hjortdal J., Roberts C.J., Dupps W.J.Jr. Contralateral Eye Comparison of SMILE and Flap-Based Corneal Refractive Surgery: Computational Analysis of Biomechanical Impact. // *Journal of Refractive Surgery*, 2017, Vol. 33, No. 7, pp. 444–453. doi: 10.3928/1081597X-20170504-01
- [5] Bauer S.M., Venatovskaya L.A., Voronkova E.B., Smirnov A.L. The Three-Dimensional Problem of the Axisymmetric Deformation of an Orthotropic Spherical Layer. // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2016, Vol. 49, No. 3, pp. 277–283.
- [6] Иомдина Е.Н., Бауэр С.М., Котляр К.Е. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. Москва: Реал Тайм, 2015, 208 с.

## **Биомеханические исследования состояния структур опорно-двигательного аппарата при реконструкции у детей раннего возраста**

*Бегун П.И., Ваганова Д.А., Лебедева В.А., Лебедева Е.А.,  
Сафронова А.А., Семенова Ю.Д., Тихоненкова О.В.*  
petrbegun1114@mail.ru, aquatedion@gmail.com, verolebe@yandex.ru,  
lenlea28@gmail.com, annasaf39945844@gmail.com, agito095@yandex.ru,  
krivohizhinaov@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения,  
190000, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67

*Ключевые слова:* дети раннего возраста, позвоночник, тазобедренный сустав, реконструкция, имплантаты, эксперимент, напряжения, деформации.

### **Актуальность исследования**

В отечественных и зарубежных публикациях отсутствуют биомеханические исследования коррекции структур опорно-двигательного аппарата у пациентов раннего детского возраста, отсутствуют и экспериментальные исследования механических свойств биологических объектов, входящих в эти структуры.

Помимо частоты врождённых деформаций отделов позвоночника, актуальность работы обусловлена прогрессирующим характером течения заболевания, выраженностью и ригидностью деформаций, а также формированием компенсаторных дуг искривления. Неустранение патологии при дисплазии тазобедренного сустава в возрасте до года приводит к появлению остаточных дефектов развития сустава и его нестабильности [1]. Наиболее частыми осложнениями, связанными с металлоконструкциями, является их дестабилизация, в связи с усталостными переломами эндофиксатора, резорбцией костной ткани вокруг винтов, разрушением кортикальной ткани корней дуг [2]. Хирурги проводят операции руководствуясь только опытом и интуицией. Предоперационное прогнозирование результатов операции может оказать существенную пользу.

### **Материалы и методы исследования**

Эксперименты при сжатии образцов полупозвонков возраста 1–3 года, иссеченных при хирургических операциях из грудного и поясничного отделов позвоночника и выдерживаемых в растворе Кребса, проводятся на прессе ИП-50 и испытательной установке Instron5543 с разработанным нами приспособлением. По КТ образцов, выполненных до и после эксперимента, в программе SolidWorks определяются: 1) геометрические параметры образцов: 2) величины и характер распределения напряжений и деформаций на разных этапах нагру-

жения по срезам при определенных перемещениях при сжатии, и известной нагрузке.

Построение компьютерных трёхмерных моделей основывается на данных компьютерной томографии: 1) пациентов с врожденной деформацией грудного и поясничного отделов позвоночника 2) тазобедренного сустава с диспластическими изменениями тазового и бедренного компонентов. Компьютерные геометрические модели включают в себя: 1) для грудного отдела — тела двух смежных позвонков и ребер, 2) для позвоночного отдела — тела двух смежных позвонков, 3) для тазобедренного сустава, тазовую и бедренную кости. Модели строятся в компьютерных программах Mimics Medical и 3-matic Medical, затем экспортируются в пакет прикладных программ SolidWorks. В нем осуществляется сборка всех отдельных элементов, и добавление: 1) для отделов позвоночника — связочного аппарата, межпозвонкового диска, и металлоконструкции, 2) для тазобедренного сустава — хряща головки бедренной кости, и суставных связок. Костные структуры схематизированы двумя однородными изотропными слоями: кортикальным и спонгиозным.

### Результаты исследования

Разработаны алгоритмы экспериментального исследования механических свойств позвонков и вычисления НДС при статических и динамических нагрузках в реконструируемых с разными имплантатами сегментах позвоночника. По экспериментальным исследованиям для материала позвонков грудного и поясничного отделов возраста от одного года до трёх лет получены значения временной предельной прочности при допустимой деформации и зависимости модуля нормальной упругости от величины сжатия позвонков.

Для грудного отдела позвоночника возраста три года исследовано НДС позвоночно-двигательного сегмента пациента с установленной на нем металлоконструкцией при воздействиях верхней части тела пациента при статических и динамических нагрузках и движения грудной клетки в процессе дыхания.

Для поясничного отдела позвоночника, возраста три года, установлена зависимость НДС двигательного сегмента позвоночника пациента после операции от прилагаемых нагрузок, и механических особенностей костной ткани ребёнка, и определены критические напряжения, возникающие в установленном эндофиксаторе, позволяющие подобрать оптимальное месторасположение и размер металлоконструкции.

Для тазобедренного сустава с различной степенью тяжести дисплазии проведен анализ НДС для различных видов двигательной активности детей.

Внедрение результатов исследований может позволить снизить риски развития осложнений после операции Работа выполнена в рамках договора о научно-техническом сотрудничестве с ФГБУ «Национальным медицинским исследовательским центром детской травматологии и ортопедии имени Г.И. Турнера».

## Литература

- [1] Камоско М. М., Познович М. С. Консервативное лечение дисплазии тазобедренных суставов. М.: Ортопедия, травматология и восстановительная хирургия детского возраста., 2014. 51 с.
- [2] Махкамов К. Э., Исрайилов Д. У., Кузибаев Ж. М. Послеоперационные осложнения при стабилизации позвоночника системой транспедикулярной фиксации. М.: Вестник экстренной медицины., 2015. 15 с.

## О моделировании внедрения канюли в мягкую ткань

*Досаев М.З.,<sup>1</sup> Селюцкий Ю.Д.,<sup>1</sup> Zu M.S.,<sup>2</sup> Lai Y.X.<sup>2</sup>*

*dosayev@imec.msu.ru, seliutski@imec.msu.ru, msju@mail.ncku.edu.tw*

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1,

<sup>2</sup>National Cheng Kung University

701, Taiwan, Tainan City, University Road, 1

*Ключевые слова:* управление, пьезоэлектрический привод, мягкие ткани.

В настоящее время активно развивается такое направление малоинвазивной медицины, как стереотаксические операции. При таких вмешательствах во внутренние органы пациента вводится длинная игла, с помощью которой проводятся необходимые процедуры. Одним из видов таких процедур является введение игл в головной мозг с целью взятия биопсии или проведения локального лечения (например, глубокой стимуляции головного мозга при лечении болезни Паркинсона, эпилепсии и др.). В разных странах мира разрабатываются и совершенствуются роботизированные комплексы, предназначенные для проведения таких операций. Подобный комплекс должен, прежде всего, обеспечить достаточно высокую точность позиционирования кончика иглы в целевой точке. Кроме того, в процессе движения иглы к цели необходимо в максимальной степени избежать повреждения тканей. Для этого очень важна возможность визуализировать положение иглы и целевой точки в органе. Наиболее эффективным средством такой визуализации является магнитно-резонансная томография (МРТ) [1, 2], дающая погрешность в пределах до 1 мм. Поэтому было бы предпочтительно поместить робототехническую систему, обеспечивающую движение иглы, внутри аппарата МРТ. Однако в таких системах необходимо использовать специальные приводы, поскольку обычные приводы нарушают работу аппарата МРТ. Одним из типов приводов, совместимых с МРТ, являются пьезоэлектрические приводы (ПЭП).

В данной работе рассмотрена робототехническая система, внедряющая иглу (канюлю) в мягкую ткань. В качестве двигателя используется ПЭП. Предполагается, что игла совершает прямолинейное движение.

Для описания контакта иглы с мягкой тканью предложена феноменологическая математическая модель их взаимодействия, учитывающая релаксационные процессы в ткани, использующая [3]. Для описания динамики ПЭП использована эмпирическая «осцилляторная» модель [4, 5].

Из раствора агар-агара был изготовлен фантом мягкой ткани, имитирующий головной мозг свиньи. Была проведена серия экспериментов по индентированию стандартной канюли в этот фантом. Внедрение осуществлялось с различной скоростью и на различную глубину. После внедрения игла в течение некоторого времени удерживалась на заданной глубине с целью изучения процесса релаксации. На основе полученных экспериментальных данных проведена идентификация параметров модели контактного взаимодействия.

Предложен алгоритм управления ПЭП, предназначенный для внедрения иглы в ткань на заданную глубину и учитывающий взаимодействие иглы с тканью. Проведено численное моделирование процесса внедрения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-58-52004).

## Литература

- [1] Stoianovici D., Jun C., Lim S., Li P., Petrisor D., Fricke S., Sharma K., Cleary K. Multi-Imager Compatible, MR Safe, Remote Center of Motion Needle-Guide Robot // IEEE Trans. Biomed. Eng., 2018. Vol. 65, N. 1, pp. 165–177. Doi: 10.1109/TBME.2017.2697766
- [2] Park Y.L., Elayaperumal S., Daniel B., Ryu S.C., Shin M., Savall J., Black R.J., Moslehi B., Cutkosky M.R. Real-Time Estimation of 3-D Needle Shape and Deflection for MRI-Guided Interventions // IEEE ASME Trans. Mechatron. 2010. Vol. 15, N. 6, pp. 906–915. Doi: 10.1109/TMECH.2010.2080360
- [3] Lyubicheva A. Closed-Form Solution of Axisymmetric Contact Problem for a Viscoelastic Base within Cycle of Increasing and Decreasing of Load on the Indenter // J. Frict. Wear. 2017. Vol. 38, N. 2, pp. 138–143. Doi: 10.3103/S1068366617020131
- [4] Wurpts W., Twiefel J. An ultrasonic motor with intermittent contact modeled as a two degree of freedom oscillator in time domain // PAMM. 2009. Vol. 9, pp. 287–288. Doi: 10.1002/pamm.200910117.
- [5] Mashimo T., Terashima K. Dynamic analysis of an ultrasonic motor using point contact model // Sensors and Actuators A: Physical. 2015. Vol. 233, pp. 15–21. Doi: 10.1016/j.sna.2015.05.009.

## Подбор коэффициентов для двухмерной модели, описывающей отклонение кончика иглы от прямолинейного движения в тканях человека

*Дружинин В.Г., Морозов В.А.*

*vasily.dr.mob@gmail.com, v.morozov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* брахитерапия, отклонение иглы.

В настоящее время в медицине для выполнения операций применяются робототехнические комплексы. Процедура брахитерапии проводится посредством внедрения микроисточников радиоизлучения в предстательную железу.

Из-за своих геометрических особенностей и прилагаемых нагрузок в процессе выполнения операции игла деформируется, что приводит к отклонению иглы от прямолинейного движения.

Таким образом необходимо разработать модель, которая позволяет прогнозировать и корректировать движение иглы в тканях человека. Предметом исследования является процесс отклонения медицинской инъекционной иглы при движении в тканях человека. Предложен новый способ моделирования воздействия окружающей среды на медицинскую инъекционную иглу в процессе её движения в мягких тканях. С помощью данного подхода разработана модель и реализована в виде программы в Matlab. Рассматривается уравнение равновесия сил при движении иглы [1]:

$$\mathbf{F}_{needle} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_f + \mathbf{w}(x), \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}_t$  — сила, действующая на кончик иглы,  $\mathbf{F}_f$  — сила трения,  $\mathbf{w}(x)$  — распределенная нагрузка,  $\mathbf{F}_{needle}$  — сила с которой внедряется игла. В данной работе будет рассмотрена задача в следующей постановке:

$$\mathbf{F}_{needle} = \mathbf{F}_t. \quad (2)$$

Для решения поставленной задачи отклонение кончика и угол отклонения будем рассчитывать по формулам [1]:

$$y_n = Fl(t)^3 / 2EJ_x, \quad (3)$$

$$\theta = Fl(t)^2 / 2EJ_x, \quad (4)$$

где  $n$  — текущая итерация моделирования,  $y_n$  — отклонение кончика иглы, на текущем шаге времени,  $F$  — сила действующая на кончик иглы,  $J_x$  — осевой



момент инерции,  $l(t)$  — длина иглы, находящаяся в тканях человека,  $t$  — время,  $E$  — модуль Юнга,  $\theta$  — угол отклонения.

Для моделирования внешней силы  $F$  при перемещении иглы в тканях человека будет использована сила лобового сопротивления

$$F = C\rho v^2 S/2, \quad (5)$$

где  $C$  — коэффициент сопротивления,  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость перемещения иглы,  $S$  — характерная площадь тела,  $S = V^{(2/3)}$ , где  $V$  — объём тела.

Для расчета смещения иглы по выражениям (3) и (4) необходимо учитывать проекцию силы  $F$  на ось иглы. В данной постановке задачи по предложенным выражениям (3), (4), (5), будем рассчитывать отклонение итерационно, суммируя его с предыдущими шагами. Тем самым будет сохраняться отклонение на каждом шаге моделирования:

$$y_{all} = \sum_1^{n-1} y_n, \quad (6)$$

где  $n$  — текущая итерация моделирования,  $y_{all}$  — суммарное отклонение иглы при её движении в тканях человека,  $y_n$  — отклонение кончика иглы, на текущем шаге времени.

Результаты моделирования по двухмерной модели с постоянным коэффициентом  $C$ , взятым из справочника, показали достаточно большие погрешности. Исходя из этого, данный коэффициент будем представлять в виде некоторой функциональной зависимости от скорости перемещения иглы, построенной на основе экспериментальных данных, что позволило бы обеспечить минимальные ошибки при моделировании:

$$C = 2.2293 \cdot 10^{11} v^6 - 2.5517 \cdot 10^{10} v^5 + 1.788 \cdot 10^9 v^4 - \\ - 2.8053 \cdot 10^7 v^3 + 3.6420 \cdot 10^5 v^2 - 2.4583 \cdot 10^3 v + 7.4299. \quad (7)$$

Далее с помощью этого коэффициента будет проведено моделирование и сравнены результаты с экспериментальными данными. Использование коэффициента, который зависит от скорости внедрения иглы, намного эффективнее, чем постоянного коэффициента из справочного материала. При моделировании с применением выражения (7) погрешности определения отклонения иглы не превышают значения 0.0176 мм относительно экспериментальных данных.

## Литература

- [1] В.Г. Дружинин, В.А. Морозов, С.А. Никитин, В.В. Харламов. Модель Отклонения медицинской иглы при движении в тканях человека //Российский журнал биомеханики выпуск 4, 2018, С. 459–472

## Modeling biological — neurons using memristive devices

*Kipelkin I.M.*,<sup>1,2</sup> *Gerasimova S.A.*,<sup>1</sup> *Kazantsev V.B.*<sup>1</sup>

*ivan.kipelkin@yandex.ru, gerasimova@neuro.nnov.ru, kazantsev@neuro.nnov.ru*

<sup>1</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,  
603950, Russia, Nizhny Novgorod, pr. Gagarina, 23,

<sup>2</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University,  
236016, Russia, Kaliningrad, A. Nevskogo ul., 14

*Keyword:* The memristor, Neuron, Neuromorphic system, Prototype, Energy efficiency.

Studies of neuromorphic systems [1] focus on the use of non-volatile memory arrays as a component of in-memory computing for artificial neural networks (ANN). In fundamental science and technology ANN design represents quite complicated interdisciplinary task. Needless to say that ANNs differ significantly from their biological analogs. Generally, improving the performance of a single step in a single type of algorithm can not significantly influence on the development of machine learning or neuromorphic systems. Using Ohm's law to apply stored weights to incoming signals and Kirchhoff's laws to sum the results, memristor devices [2] can speed up many multiplications — accumulation steps in the ANN algorithms.

Memristive devices and systems based on them attract growing attention of mathematical community as multistable systems with great potential for expanding the fundamental foundations of nonlinear dynamics. However, such models, only qualitatively reflect the properties of resistive switching of memristors. In this context experimental verifications of theoretical concepts are quite useful.

In our work, we designed, implemented, and tested electronic circuit model of the Fitzhugh-Nagumo neural generator with non-linearity on memristive devices, and evaluated the possibility of using memristive structures in working memory elements. The parameters of the circuit model correspond to the parameters of the Zn<sub>0.29</sub>O<sub>0.60</sub>Y<sub>0.11</sub> structure made using lithography and simultaneous reactive magnetron sputtering of gold and zirconium cathodes in an oxygen medium. The current-voltage (CV) characteristics were compared with the characteristics of thin film samples. The experiment was performed using Agilent B1500a equipment. Thus, when studying the CV characteristic of the memristive structure we found that when applying the voltage lower than switching voltage the device state is preserved similarly to biological neurons [3]. Such pulses permit to read the state of the memristor and store a desired state for a long time. In the range of operating voltages, the CV of memristor is non-linear allowing us to control the output current of the memristor with a small deviation of the input signal level. This transformation makes it more flexible to create links from several connected memristors, along which an upward impulse propagates in the neuromorphic structure. In addition,

the structure's CV coincides with the neuron summation function used in modeling neuromorphic systems.

This permits to use memristors not only as synapses, but also as summing element of artificial neurons mimicking dendritic integration in biological neurons. This structure is quite stable and reliable due to the uniform distribution of elements over the film thickness. The developed memristive circuit model of the Fitzhugh-Nagumo generator demonstrates qualitative coincidence of main characteristics of neurons including the presence of excitation threshold, excitable and self-oscillating modes with the ability to control switching between them. We have found that when short (about the duration of the excitation pulse) rectangular pulses are applied, the generator operates in the mode of periodic spike generation. The occurrence of periodic spike activity in response to short-term exposure corresponds to the dynamic storage of information about the received pulse [4]. Information storage refers to the occurrence of periodic neural activity in response to a single rectangular pulse. Our memristive generator has the following characteristics: an amplitude of 20 V, a frequency of 3.5 Hz, and a duration of 298 MS. Note, that such models can be useful in the design of large neural networks due to the adaptive properties of memristive systems [5] will increase the energy efficiency and performance of the latter.

In conclusion, one of the prospects for neural computing is to change models in computing systems that go beyond the classical and still dominant von Neumann architecture, which divides storage and computation into separate blocks. Data processing in the system is carried out sequentially, which requires the exchange of large amounts of information between the processor and the memory module. Processors in modern computers are able to operate with data much faster than the speed of memory access, which is a significant limitation and overcoming it is necessary to further improve the speed of data processing. Another direction is the creation of neurohybrid devices that connect living cells (biological neurons) with electronic systems, allowing the use of living neural networks in information processing processes.

The work is supported by the Government of the Russian Federation (agreement No. 074-02-2018-330 (2)).

## References

- [1] Gerasimova S.A., Mikhailov A.N., Belov A.I., Korolev D.S., Gorshkov O.N., Kazantsev V.B. Journal of technical physics. / 2017, V. 87, № 8, P. 1248
- [2] Mikhaylov A.N., Belov A.I., Korolev D.S., et al. Physica Status Solidi C. / 2016. V.13, № 10-12, P. 870.
- [3] Hong, Qinghui, Liang Z., Xiaoping W. Neurocomputing. / 2019. V.330, P.11.
- [4] Zakharov D. G. Applied problems of the nonlinear theory of vibrations and waves. / 2005. V. 13, № 1-2, P. 100.

- [5] Jo S.-H., Chang T., Ebong I. Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems. / 2010. Vol. 10, в. 4, P. 1297.

## Статистический анализ совокупности биомеханических и гемодинамических параметров глаза с первичной открытоугольной глаукомой

*Иомдина Е.Н.<sup>1</sup>, Корников В.В.<sup>2</sup>*

*iomdina@mail.ru, v.kornikov@spbu.ru*

<sup>1</sup>«Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца»,  
105064, Российская Федерация, Москва, Садовая-Черногрозская ул., 14/19,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* ПОУГ.

В данном исследовании использованы медицинские данные, предоставленные практикующими врачами из ФГБУ «Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца» Минздрава России. В материалах исследования содержались данные о 110 глазах, среди которых 41 глаз — без патологии, 21 глаз — с I стадией глаукомы, 31 глаз — со II стадией, 17 глаз с III стадией заболевания. Данные были получены с помощью различных аппаратов для определения состояния глаза пациента. Всего было исследовано 22 параметра, которые были включены в проведенный статистический анализ [1].

Это следующие параметры: возраст пациента; стадия ПОУГ (как группирующая переменная, 0 — здоровые, 1 — первая стадия ПОУГ, 2 — вторая стадия ПОУГ, 3 — третья стадия ПОУГ); уровень истинного внутриглазного давления (ВГД) P0; коэффициент ригидности склеральной капсулы глаза (КРСКГ); роговично-компенсированное ВГД (ВГДрк); фактор резистентности роговицы (ФРР); корнеальный гистерезис (КГ); центральная толщина роговицы (ЦТР); толщина решетчатой пластинки склеры (ТРП); глубина расположения решетчатой пластины (ГлРП); коэффициент упругости, характеризующий жесткость склеры (Gammash); плотность поверхностного сосудистого сплетения в перипапиллярной зоне площадью 3x3 мм (SVL); плотность глубокого сосудистого сплетения в перипапиллярной зоне площадью 3x3 мм (DVL); реографический индекс (РИ), характеризующий гемодинамику в сосудистой оболочке глаза; ударный объем крови (УОК), характеризующий кровенаполнение сосудистой оболочки глаза; периметрический индекс MD (среднее значение отклонения светочувствительности сетчатки); периметрический индекс PSD (паттерн стандартного отклонения, характеризующий степень выраженности локальных дефектов светочувствительности сетчатки).

Статистическая обработка количественных результатов проводилась в программе IBM SPSS Statistics.

Была проведена проверка соответствия исследуемых параметров нормальному распределению с использованием критерия Колмогорова-Смирнова. Было показано, что далеко не все параметры имеют нормальное распределение. Поэтому были использованы непараметрические методы статистики. Для анализа корреляционных связей между параметрами использовался коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Его выбор был обусловлен тем, что мера корреляции Кендалла является более надёжной и более эффективной, чем ранговая корреляция Спирмена. Были найдены значимые корреляции в объединённой группе пациентов при уровне значимости = 0,05. Затем были установлены значимые коэффициенты корреляции для каждой стадии ПОУГ. В частности, результаты расчётов показывают, что по мере развития ПОУГ достоверно повышается коэффициент ригидности Е ( $p = 0,000$ ,  $r = 0,598$ ), а также снижается КГ ( $p = 0,000$ ,  $r = -0,402$ ). Это соответствует уже полученным результатам в данной области [2].

Для изучения различий между стадиями ПОУГ был использован непараметрический критерий Краскела-Уоллиса. Из результатов статистических критериев показательной является асимптотическая значимость. Если её значение меньше 0,05, то это означает, что существуют различия между группами только в средних. Данная информация использована при проведении дискриминантного анализа. Показано, что только 11 показателей удовлетворяют указанному условию: P0, E, ВГДрк, КГ, ТРП, ГлРП, SVL,DVL, РИ, MD и PSD.

## Литература

- [1] Иомдина Е.Н., Киселева О.А., Бессмертный А.М., Хозиев Д.Д., Лужнов П.В., Шамаев Д.М., Моисеева И.Н., Штейн А.А. Биомеханика корнеосклеральной оболочки и гемодинамика глаукомного глаза: есть ли связь? // Российский офтальмологический журнал, 2019, 12(1), С. 10–17. doi:10.21516/2072-0076-2019-12-1-10-17.
- [2] Борискина Л.Н., Балалин С.В., Маковкин Е.М. Корнеосклеральная ригидность как интегральный офтальмологический биометрический показатель. // Вестник Оренбургского государственного университета, 2013. Vol. 4 (153)

## Простейшая модель хрусталика глаза

*Кравченко Д. С., Филиппов С.Б.*

*denvika0169@gmail.com, s\_b\_filippov@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* хрусталик глаза, аккомодация, цилиндрическая оболочка, давление жидкости, асимптотический метод.

Хрусталик глаза играет роль линзы, которая меняет свою форму в зависимости от расстояния до рассматриваемого объекта. Этот процесс называется аккомодацией. Изменение формы хрусталика происходит благодаря растяжению или сжатию прикрепленных к нему мышц.

С механической точки зрения хрусталик глаза представляет собой мягкую оболочку, наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. В данной работе в качестве простейшей модели хрусталика глаза выбрана бесконечная замкнутая цилиндрическая оболочка [1]. Действие мышц моделируется двумя равными по величине и противоположными по направлению усилиями, приложенными к верхней и нижней точкам параллели оболочки.

В конспекте [1] приведены формулы для радиуса кривизны параллели оболочки  $R$ , давления внутри хрусталика  $p$  и растягивающего усилия  $F$ , которые в безразмерном виде имеют вид

$$R^2 = \frac{\pi}{\pi - 2\beta - \sin 2\beta}, \quad p = \frac{\varepsilon}{R}, \quad F = 2\varepsilon \sin \beta, \quad \varepsilon = \frac{(\pi - 2\beta)(1 + \varepsilon_0)R}{\pi} - 1, \quad (1)$$

где угол  $\beta$  характеризует отклонение параллели оболочки от окружности,  $\varepsilon_0$  — начальная деформация хрусталика.

Представляет интерес определение зависимостей радиуса кривизны  $R$  и давления внутри хрусталика  $p$  от усилия  $F$ , однако получить такие зависимости из формул (1) явном виде не удаётся. В данной работе эти зависимости были найдены путём составления для различных значениях начальной деформации  $\varepsilon_0$  таблиц, содержащих значения  $R$ ,  $p$  и  $F$  при разных значениях угла  $\beta$ . С помощью этих таблиц были построены графики функций  $R(F)$  и  $p(F)$ .

После этого выяснилось, что найденное в конспекте [1] при  $\beta \ll 1$  первое приближение для  $R(F)$  и  $p(F)$  даёт малую погрешность относительно точного решения только при очень малых  $\beta$ , что соответствует малым значениям  $F$ . В связи с этим было найдено второе приближение в асимптотических разложениях  $R$  и  $p$  по степеням  $\beta$ . С помощью этих разложений в явном виде получены приближённые формулы для определения  $R(F)$  и  $p(F)$ . Погрешность этих формул оказалась значительно меньше чем формул первого приближения, особенно для величины давления.

Результаты, полученные в данной работе, согласуются с общепринятой теорией Гельмгольца, которая предсказывает увеличение радиуса кривизны хрусталика при увеличении действующих на него растягивающих усилий. Поведение давления в зависимости от начальной деформации оболочки для данной простейшей модели качественно согласуется с результатами других работ, в которых рассматривались более точные модели хрусталика, в частности, сферическая оболочка [2].

### Литература

- [1] Филиппов С.Б. Курс лекций «Гидроупругость», <https://tm.spbu.ru/kursy-lectsij/2-uncategorised/34-gidrouprugost.html>.
- [2] Тиясев А.С. О деформации сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, при воздействии кругового растяжения по экватору // Российский Журнал Биомеханики, том 12, 2008, С. 60–65.

## О возможности замыкания математической модели нейронного управления глазодвигательным аппаратом

*Кручинина А.П.*

*a.kruch@moids.ru*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* математическое моделирование, движения глаз, вестибулярный аппарат.

Исследования движений глаз — очень популярная тема уже на протяжении нескольких десятилетий. Технологии отслеживания взгляда становятся всё более совершенными и доступными. Одно из применений анализа движений глаз — диагностика состояния вестибулярной системы человека [1]. Данная работа посвящена возможности наблюдения связи между вестибулярным и глазодвигательным аппаратом с использованием информации о движении глаз и математического моделирования.

Движения глазного яблока человека обеспечивают шесть глазодвигательных мышц [2]. Каждая из мышц обеспечивает вращение вокруг оси, зависящей от текущего положения глаза в пространстве. В рамках нашего исследования будем моделировать глазное яблоко твёрдым шаром с моментом инерции  $I$ . Его вращения происходят вокруг неподвижной точки, совпадающей с геометрическим центром шара. Движения обеспечиваются шестью глазодвигательными мышцами (ГДМ). Математическую модель, для описания поворота на угол  $\varphi$

глазного яблока вокруг некоторой оси с направляющим вектором  $\mathbf{e}_\varphi$ , запишем следующим образом:

$$I\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}$  обозначены моменты сил мышц. Подобная модель используется для моделирования быстрого целенаправленного поворота глаза вокруг оси [3]. При рассмотрении формирования глазодвигательного ответа на наклоны можно определить главные компоненты моментов сил ГДМ как величины зависящие от вестибулярного входа.

Информацию о линейных и угловых ускорениях нервная система человека получает от комплекса механорецепторов — вестибулярного аппарата [2]. Данный орган называют органом равновесия, он располагается во внутреннем ухе и является парным. Каждый вестибулярный аппарат состоит из трёх полукружных каналов (чувствительны к угловым ускорениям) и отолитовых органов (чувствительны к линейным ускорениям). Чувствительные оси полукружных каналов имеют специфическую ориентацию относительно черепа. Для отолита технической аналогией может быть набор из нескольких сотен пар одноосных акселерометров, расположенных в точках, лежащих на дуге таким образом, чтобы угол между двумя соседними устройствами составлял десятые доли градуса. Таким образом на вход для шести моментов ГДМ имеется шесть угловых ускорений («измеренных» полукружными каналами, обозначим  $\gamma_i$ ) и набор «измерений» от четырех отолитовых органов, их обозначим  $a_j$  (размерность  $j$  формально говоря превосходит 4).

Информация от вестибулярного аппарата, в том числе, поступает по трёхнейронной цепочке на глазодвигательные мышцы. Исследование связи для отолитов имеется в работе [4]. Известно, что существуют пары: полукружный канал и одна активируемая ГДМ. И существуют гипотезы о связи отолитовой информации с ГДМ. То есть, момент

$$\mathbf{M}_i = \alpha_1 \gamma_i + \sum_{j=1} \alpha_{2j} a_j \quad (2)$$

как суть, линейная комбинация с постоянными коэффициентами информации от вестибулярных органов. Математическое моделирование позволило показать применимость данной модели для наклонов головы (типа кивков) на углы до  $\pm 45^\circ$  от оси позвоночника человека.

Глазодвигательный отклик на наклоны представляет собой компенсаторное следящее движение глаз прерываемое быстрыми фазами (саккадами). Последние решают множество задач, в частности возврат глазного яблока в нейтральное положение, когда все ГДМ развивают минимальную силу (имеют минимальные удлинения). В силу характерных времен следящих движений предла-



гаемая линейная модель позволяет восстановить главные компоненты моментов каждой из ГДМ.

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (распоряжение Правительства РФ от 24 октября 2020 г. № 2744-р).

### Литература

- [1] Кунельская Н.Л., Мельников О.А., Гусева А.Л., Байбакова Е.В. Этиология, патофизиология и дифференциальная диагностика доброкачественного пароксизмального позиционного головокружения // Журнал неврологии и психиатрии им. С.С. Корсакова. 2016. Т. 116. № 4. С. 79–84
- [2] Физиология человека. В 3-х томах. / Под ред. Р. Шмидт, Г. Тевс. 3 изд. М.: Мир, 2005. Т. 3. 323 с.
- [3] Кручинина А.П., Якушев А.Г. Математическая модель оптимального саккадического движения глаза, реализуемого парой мышц // Биофизика. 2018. Т. 63. № 2. С. 334–341.
- [4] Szentagothai J. Das Rolle Der Einzelnen Labyrinthrezeptoren Bei Der Orientation Von Augen Un Copf Im Raume. / Academiai Kiado, Budapest, 1952.

## Деформация решетчатой пластинки диска зрительного нерва в рамках неклассических теорий оболочек

**Крылова А.С.**

*krylovalice@gmail.com*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* биомеханика глаза, решетчатая пластинка, ортотропная оболочка, трансверсально-изотропная оболочка, теория Амбарцумяна.

В работе изучается деформация неоднородных круглых пластин и пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления. Исследуется влияние степени анизотропии, неоднородности и пологости на величину прогиба.

Решетчатую пластинку диска зрительного нерва принято моделировать неоднородной пластиной или полой оболочкой. Большие деформации решетчатой пластинки могут приводить к атрофии зрительного нерва, а также вызывать отеки в окрестности края пластинки [1]. Это явление может быть вызвано потерей устойчивости симметричной формы равновесия такой пластины или оболочки. Известно также, что докритическое состояние пластины или

оболочки иногда может оказывать сильное влияние на величину критической нагрузки, если форма нагруженной конструкции в докритическом состоянии отличается от формы ненагруженной конструкции [2].

Рассмотрению задач, связанных с деформированием решетчатой пластинки, посвящен ряд работ, выполненных в Южном федеральном университете. В работе [3] объект моделируется круглой неоднородной пластиной, а для описания его докритического состояния используется модель Тимошенко.

Материал решетчатой пластинки принято считать трансверсально изотропным или ортотропным. Модуль упругости материала в направлении толщины такой пластины или оболочки на порядок меньше тангенциальных модулей упругости. Известно, что в этом случае более точно докритическое состояние такой оболочки или пластины описывает теория анизотропных пластин и оболочек Амбарцумяна [4, 5].

В связи с этим, в работе описывается докритическое состояние пологого неоднородного ортотропного сферического сегмента в рамках теории Амбарцумяна. Ниже представлена полученная система уравнений, в которой  $w(r)$  и  $F(r)$  — неизвестные функции нормального прогиба и внутренних усилий соответственно, а  $\varphi(r)$  — неизвестная функция, характеризующая деформацию поперечного сдвига,

$$\frac{d}{dr}(\varphi r) + \frac{12}{h^3} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \frac{dF}{dr} \right) = -\frac{12}{h^3} Pr,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{E_\theta}{E_r} \frac{dF}{dr} + \frac{E_\theta h}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{E_\theta}{R} \frac{dw}{dr} = \\ = \frac{1}{E_\theta} \frac{dE_\theta}{dr} \left( \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{\nu_\theta}{r} \frac{dF}{dr} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \frac{dE_r}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_\theta}{r} \frac{dw}{dr} \right) - E_\theta \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{12}{Rh^3} \frac{dF}{dr} (1 - \nu_r \nu_\theta) - \\ - \frac{h^2}{10 G'} \left[ \frac{dE_r}{dr} \left( \frac{\nu_\theta \varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr} \right) + E_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) - E_\theta \frac{\varphi}{r^2} \right] + (1 - \nu_r \nu_\theta) \varphi = 0. \end{aligned}$$

В данной системе модули упругости  $E_r$  и  $E_\theta$  являются функциями радиальной координаты  $r$ ,  $G'$  — модуль сдвига в направлении толщины оболочки,  $P$  соответствует величине внутреннего давления,  $h$  — толщина, а  $R$  — радиус кривизны оболочки.

Проводится сравнение результатов исследования с результатами, полученными по теории Тимошенко и классической теории.

## Литература

- [1] Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е. Биомеханика глаза: Теоретические аспекты и клинические приложения // М.: Реал Тайм. 2015.
- [2] Бушнелл Д. Потеря устойчивости и выпучивание оболочек — ловушка для проектировщиков // Ракетная техника и космонавтика. 1981. Т. 19, № 10. С. 93–154.
- [3] Ватульян А. О., Богачев И. В., Потетюнко О. А. О Деформировании решетчатой пластинки глаза в рамках теории Тимошенко // XIV Всероссийская конференция “Биомеханика-2020”, Пермь. 2020.
- [4] Ambartsumyan S. A. Theory of Anisotropic Plates // Stamford: Technomic PublishingCo. 1970.
- [5] Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек // М.: Наука. 1974.

## Математическая модель пороупругой оболочки для решения задач биомеханики

*Кучеренко Д.В.*

*denismbl@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* пороупругость, корнеосклеральная оболочка, глаз, внутриглазное давление

В настоящее время существует множество моделей для описания механического поведения биологических структур: от классической теории упругости до нелинейных соотношений с учётом вязкости. Такие модели позволяют приближённо описать напряжённо-деформированное состояние (НДС) образцов на макроуровне и оценить уровень диссипации в тканях.

Многие биологические структуры являются твёрдыми деформируемыми телами, насыщенными физиологической жидкостью. Учёт двухфазности (пороупругости) в задачах биомеханики представляет особый интерес, так как может открыть новые явления, протекающие внутри образца.

В работе [1] приводится модель пороупругого трёхмерного тела для исследования колебаний тканей опорно-двигательного аппарата в конечно-элементной постановке. Влияние двухфазности на НДС при циклических нагрузках в твёрдых и мягких тканях представлено в работах [2] и [3] соответственно.

После рассмотрения трёхмерных задач пороупругости встаёт необходимость построения общей теории двухфазных оболочек. Оболочками в теле человека являются, сосуды, глаза и полые органы.

Воспользуемся классической теорией оболочек с гипотезами Кирхгофа. Для вывода уравнений состояния примем линейный закон пороупругого ма-

териала [1]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} - A_{ij}\delta_{ij}p. \quad (1)$$

$\sigma_{ij}$  — компоненты тензора эффективных напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций твёрдой фазы,  $\theta = \varepsilon_{ii} = \nabla u^s$  — первый инвариант тензора деформаций твёрдой фазы в дренированном состоянии, объёмная деформация,  $A_{ij}$  — компоненты тензора коэффициентов эффективных напряжений Био,  $p$  — гидростатическое давление в жидкости,  $\lambda, \mu$  — упругие константы Ламе для твёрдой фазы в дренированном состоянии,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

С помощью второй гипотезы Кирхгофа и соотношения (1) можно найти усилия и моменты с дополнительными слагаемыми, которые отвечают наличию жидкости в порах, а затем составить уравнения равновесия.

Для замыкания системы необходимо получить выражение для давления жидкости в порах. Для этого необходимо рассмотреть приращение содержания поровой жидкости и, учитывая гипотезы Кирхгофа, подставить его в [1]

$$K\Delta p - \varphi^2 R_f^{-1} \dot{p} - A \otimes \dot{\varepsilon} + K\rho_f \nabla \ddot{u} = 0. \quad (2)$$

где  $K$  — физический тензор проницаемости среды,  $\varphi$  — пористость,  $R_f$  — гидростатическая константа,  $p_f$  — плотность жидкости.

Для решения задачи изгиба пороупругой пластины полагаем, что давление жидкости в порах  $p$  линейно зависит от статического момента давления  $M_p$  и координаты  $z$ , перпендикулярной срединной поверхности. В таком случае слагаемые, отвечающие за наличие жидкости в представительном элементе гетерогенной среды, входят лишь в выражения для изгибающих моментов. Далее с помощью уравнений равновесия можно выразить поперечные силы и получить итоговое бигармоническое уравнение относительно прогиба:

$$\Delta^2 w + Ab\Delta M_p = f(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

$$d = 4\mu(\lambda + \mu)I(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad b = 2\mu I(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad I = h^3/12.$$

Для решения задачи раздувания (сферической или цилиндрической) оболочки полагаем, что давление  $p$  пропорционально среднему давлению жидкости по толщине. Подставляя в уравнения равновесия выражения продольных усилий, получим систему из двух (трёх) уравнений для сферической (цилиндрической) оболочки.

Влияние пороупругости на ДНС при рассмотрении статических задач невелико. Учёт гетерогенности количественно сказывается на распространении волны давления в цилиндрических оболочках. При рассмотрении высокочастотных эффектов вклад жидкости растёт с ростом частоты деформирования.

Научная публикация выполнена при поддержке Ассоциации выпускников СПбГУ.

## Литература

- [1] Маслов Л.Б. Конечно-элементные пороупругие модели в биомеханике / Л.Б. Маслов / СПб.: Лань, 2013. 236 с
- [2] Judex S. Low-magnitude mechanical signals that stimulate bone formation in the ovariectomized rat are dependent on the applied frequency but not on strain magnitude / S. Judex [and all.] // J. Biomech. 2007. Vol. 40. № 6. pp. 1333–1339.
- [3] Кучеренко Д. В. Пороупругая модель в задаче деформирования элемента миокарда / Д. В. Кучеренко, М. В. Вильде / Материалы научной конференции с международным участием ; отв. ред. В.Э. Гасумянц, СПб., ПОЛИТЕХПРЕСС, 2019. С. 166–171.

## Форма замыкающих клеток влияет на устьичные движения

*Паутов А.А., Бауэр С.М., Иванова О.В., Сапач Ю.О.,  
Крылова Е.Г.*

*a.pautov@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* устье, замыкающая клетка, деформация, моделирование

Газообмен растений осуществляется через мелкие отверстия в эпидерме — устьичные поры. Каждая пора располагается между парой замыкающих клеток, которые составляют устье. Устьичная пора может открываться и закрываться. Её состояние зависит от обратимой деформации замыкающих клеток, которые относятся к числу наиболее динамичных типов клеток у растений. От функционирования устьиц зависит продуктивность растений и транспорт в них водных растворов, способность растений произрастать в тех или иных условиях. Структурные особенности замыкающих клеток, ответственные за их деформацию, находятся в стадии обсуждения. Одной из таких особенностей предположительно является форма этих клеток [1].

Деформирующиеся замыкающие клетки открывающегося устья вдавливаются в граничащие с ними клетки эпидермы (побочные клетки), преодолевая их механическое противодействие. Это происходит даже в том случае, когда замыкающие клетки лежат на побочных и приподняты над поверхностью листа. Наибольшие перемещения у них совершают не свободные от давления других клеток наружные тангентальные стенки, а внутренние тангентальные стенки, лежащие на побочных клетках, которые такое давление оказывают. В задачи работы входило выявление особенностей формы поверхностно расположенных замыкающих клеток и оценка влияния этих особенностей на устьичные движения.

Использование световой, сканирующей и трансмиссионной электронной микроскопии показало, что поверхностно расположенные замыкающие клетки имеют обычную для данного типа клеток почковидную форму. При этом они обладают находящимися на наружных тангентальных стенках крупными выступами и складками. В отличие от углеводных клеточных стенок, эти выступы и складки образованы главным образом кутином — полимером, состоящим из гидроксигирных кислот, связанных между собой в прочную трёхмерную решётку.

Для изучения деформации поверхностно расположенных замыкающих клеток был использован метод конечных элементов. Моделирование проводилось с использованием программного комплекса ANSYS. При моделировании воспроизведена геометрия реальных замыкающих клеток. Построены три группы моделей.

1. Изолированные устьица как с выступами и складками, так и без них. Взаимодействия между замыкающими и побочными клетками отсутствуют.

2. Модельные устьица закреплены вдоль экваторов. Это условие имитирует наличие связи между стенками замыкающих клеток и наружными тангентальными стенками окружающих устьице клеток.

3. Устьица закреплены вдоль экваторов. К внешней поверхности внутренних тангентальных стенок замыкающих клеток приложено давление (0.5 МПа) [2]. В этих моделях учтено влияние побочных клеток на деформацию замыкающих. В ходе моделирования были использованы следующие значения модуля Юнга: для клеточных стенок — 108 и 200 МПа [2], для выступов и колец — 108 и 520 МПа [3]. Коэффициент Пуассона — 0.48. Тургорное давление в замыкающих клетках имитировалось созданием распределённой по внутренней поверхности модельных клеток нагрузкой. Оно колебалось от 0.5 до 5.0 МПа [4]

Моделирование показало, что при увеличении тургорного давления в поверхностно расположенных замыкающих клетках, имеющих гладкую поверхность, основные перемещения претерпевают их наружные тангентальные стенки. Напротив, у клеток, обладающих выступами и складками, основные перемещения демонстрируют внутренние стенки, лежащие на побочных клетках. Таким образом, форма замыкающих клеток относится к числу факторов, ответственных за их деформацию. Сопоставление разных моделей показало, что величина этой деформации зависит от жёсткости стенок замыкающих клеток, их выступов и складок, а также от величины тургорного давления в замыкающих и побочных клетках. Показано, что специфических особенностей формы замыкающих клеток недостаточно для широкого раскрытия устьичной поры. Сделан вывод, согласно которому, усиление перемещений внутренних тангентальных стенок, приводящее к более широкому открыванию устьичной поры, достигается благодаря ультраструктурной организации углеводных стенок замыкающих клеток.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-04-01213 А).

### Литература

- [1] Yi H., Chen Y., Wang J.Z., Puri V.M., Anderson C.T. The stomatal flexoskeleton: how the biomechanics of guard cell walls animate an elastic pressure vessel // *Journal of Experimental Botany*, 2019, vol. 70, no. 14, pp. 3561–3572.
- [2] Woolfenden H.C., Bourdais G., Kopischke M., Miedes E., Molina A., Robatzek S., Morris R.J. A computational approach for inferring the cell wall properties that govern guard cell dynamics // *The Plant Journal*, 2017, vol. 92, no. 1, pp. 5–18.
- [3] Wiedemann P., Neinhuis C. Biomechanics of Isolated Plant Cuticles // *Botanica Acta*, 1998, vol. 111, no. 1, pp. 28–34.
- [4] Franks P.J., Cowan I.R., Farquhar G.D. A study of stomatal mechanics using the cell pressure probe // *Plant, Cell & Environment*, 1998, vol. 21, no. 1, pp. 94–100.

### Пациент-ориентированный расчет кровотока в месте соединения кровеносного сосуда с протезом

*Тихомолова Л.Г.*<sup>1</sup>, *Иванова Я.Ф.*<sup>1,2</sup>, *Юхнев А.Д.*<sup>1,2</sup>  
*Гатаулин Я.А.*<sup>1,2</sup>, *Смирнов Е.М.*<sup>1,2</sup>, *Калмыкова Р.В.*<sup>1</sup>  
*Морозов А.Н.*<sup>1</sup>, *Супрунович А.А.*<sup>1</sup>, *Врабий А.А.*<sup>1</sup>, *Хубулава Г.Г.*<sup>1</sup>  
*ludmila060495@mail.ru, radfn94@mail.ru, a.yukhnev@mail.ru,*  
*yakov\_gataulin@mail.ru, authemsmirnov2003@mail.ru,*  
*ruzana.kalmykova@mail.ru, alexx-vma@mail.ru, doctoras@mail.ru,*  
*dock1@yandex.ru, ggkh07@rambler.ru*

<sup>1</sup>Первый Санкт-Петербургский государственный медицинский университет им. И.П. Павлова,

197022, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Льва Толстого, 6–8,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Послеоперационная субинтимальная гиперплазия анастомозов (мест соединения протеза и кровеносного сосуда) при бедренно-подколенном шунтировании является актуальной и нерешённой проблемой сосудистой хирургии. Время зарастания очень различно — от нескольких месяцев до нескольких лет. Скорость зарастания во многом определяется локальными особенностями кровотока в конкретной конфигурации места соединения после операции.

Одним из современных подходов, который может быть положен в основу прогнозирования окклюзии (непроходимости) протезов в персонализированной сосудистой хирургии, является высокоточное численное моделирование

трёхмерного нестационарного кровотока с непосредственным использованием данных, полученных при клинических измерениях индивидуальной геометрии сосудистого русла и параметров гемодинамики пациента [1]. Проводившиеся ранее численные исследования кровотока в упрощенных среднестатистических моделях области анастомоза имели целью описание общих закономерностей, свойственных таким течениям [2].

Цель настоящей работы заключается в разработке и начальном применении методики пациент-ориентированных расчётов кровотока в персонализированной модели проксимального анастомоза (верхнего соединения шунта с сосудом) бедренно-подколенного шунтирования.

По данным ангиографии, проведённой посредством мультиспиральной компьютерной томографии для одного из пациентов, построена персонализированная трёхмерная геометрическая модель проксимального анастомоза с применением программ 3D Slicer, VMTK, Rhino 6, Siemens NX 10. Неструктурированная расчётная сетка, построенная в программе Ansys Meshing среды WorkBench программного пакета Ansys 19.2, содержала 3,1 млн элементов. При постановке задачи используется набор граничных условий, составленный по данным клинических ультразвуковых доплеровских измерений скорости кровотока, и включающий данные об изменении среднерасходной скорости по циклу на входе и выходах различных участков рассматриваемой модели анастомоза. Расчёты выполнялись с применением программы Ansys CFX, в которой реализован метод численного решения нестационарных трёхмерных уравнений Навье-Стокса по методу конечных объемов второго порядка точности. Рассчитывалось пульсирующее течение несжимаемой вязкой кровеимитирующей жидкости с плотностью  $1000 \text{ кг/м}^3$  и вязкостью  $0.004 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , без учета влияния упругости стенок сосудов; в рассматриваемом частном случае максимальное входное число Рейнольдса составляло 1000, число Уомерсли — 3,5.

По результатам расчётов проведен анализ динамики трёхмерного течения в модели анастомоза. Посредством осреднения по циклу получены поверхностные распределения среднего модуля сдвигового напряжения на стенке, TAWSS, и индекса колебаний сдвиговых напряжений, OSI. Поля данных величин полезны для выявления зон, в которых нарастание фиброзного слоя (неоинтимы), образующегося после операции на внутренних поверхностях сосуда и протеза, наиболее вероятно. Визуализация течения совокупностью линий тока показала, что в фазу максимального расхода сразу за областью шва в протезе формируется застойная зона значительной протяженности. Рассчитанные значения TAWSS сопоставлены с данными ультразвуковых измерений толщины неоинтимы в анастомозе пациента, наросшей за известный период после операции. Измеренное распределение толщины неоинтимы в целом коррелирует с расчётными данными по распределению сдвигового напряжения на стенке: при



малых сдвиговых напряжениях наблюдается большая толщина неоинтимы и, наоборот, при больших сдвиговых напряжениях толщина неоинтимы меньше.

Исследование проведено при поддержке РФФ (грант № 20-65-47018).

### Литература

- [1] Donadoni F., Pichardo-Almarza C., Homer-Vanniasinkam S., et al. Multiscale, patient-specific computational fluid dynamics models predict formation of neointimal hyperplasia in saphenous vein grafts // *Journal of Vascular Surgery Cases and Innovative Techniques*. 2020. 6, pp. 292-306.
- [2] Ivanova Y. F., Yukhnev A. D., Gataulin Y. A., et al. Numerical and experimental study of the 3D flow in a graft-artery junction model // *Journal of Physics: Conference Series*, 2020. 1675, 012003, 6 p.

## Эффективный учет нелинейных упругих свойств корнеосклеральной оболочки при математическом моделировании тонометрии и внутриглазных инъекций

*Штейн А.А., Мусеева И.Н.*

*stein.msu@bk.ru*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
119192, Российская Федерация, Москва, Мичуринский пр., 1

*Ключевые слова:* глаз, внутриглазное давление, корнеосклеральная оболочка, роговица, склера, упругие свойства, нелинейность, тонометрия

В задачах, рассматривающих нагружение глазного яблока внешними устройствами (статическая тонометрия) и введение во внутриглазное пространство дополнительных объёмов жидкости (инъекции), оказывается эффективным развитаемый нами подход, основанный на представлении роговицы мягкой (безмоментной) упругой поверхностью, а склеральной области нульмерным элементом, откликающимся изменением давления на изменение объёма [1]. Во многих случаях оказывается достаточным представление роговицы пространственно однородной, изотропной, линейно упругой поверхностью, а склеральной области линейно упругим элементом.

Между тем, эксперименты по раздуванию глаза (как живого, так и энуклеированного) инъекциями жидкости и по растяжению изолированной роговицы давлением демонстрируют нелинейное поведение уже в физиологическом диапазоне давлений. При этом нелинейность упругого поведения глазного яблока в целом оказывается заметно менее выраженной, чем нелинейность поведения роговицы. В 30-ые годы прошлого века, когда разрабатывалась методика оценки

внутриглазного давления при тонометрии по Шиотцу [2], уже имелись данные экспериментов по раздуванию энуклеированного глаза, и была сделана попытка эти данные учесть. Рассуждения, позволившие перейти от объёмного раздувания к нагружению тонометром, не были вполне корректны, но, как бы то ни было, понятие о нелинейности упругих свойств глаза вошло в медицинскую практику.

Чтобы оценить практическую важность нелинейных эффектов, нами было разработано нелинейное обобщение исходной модели роговицы, описывающее экспоненциальную зависимость двумерных напряжений (усилий) от деформаций [3] в предположении геометрической малости последних. Это, значительно упрощающее расчёты, допущение обосновано оценками для физиологического диапазона давлений. Модель содержит три существенных параметра: жёсткость роговицы в не нагруженном извне глазу при некотором отсчётном давлении, единственный параметр, характеризующий её нелинейность, и склеральную жесткость. С помощью разработанной модели (при сохранении допущения о линейности упругого поведения склерального сегмента, для которого деформации более, чем на порядок, меньше) были обработаны экспериментальные данные о раздувании энуклеированного глаза. На основании соответствующих нелинейных кривых оказалось возможным оценить параметры модели для каждого конкретного глаза. Установлено, что в диапазоне давлений, которые может испытывать живой глаз человека, нелинейность экспериментальной зависимости объём-давление практически определяется нелинейностью упругого поведения роговицы. Несмотря на существенную нелинейность упругого поведения роговицы, линейность упругого отклика склеральной области сильно сглаживает нелинейность кривой объём — давление для глазного яблока в целом, и при физиологически больших давлениях (например, таких, которые развиваются при интравитреальных инъекциях) устанавливается близкая к линейной зависимость приращений объёма от приращений давления.

В оценённом диапазоне параметров модели с экспоненциально упругой роговицей и линейно упругой склерой исследовалось влияние нелинейности упругих свойств роговицы на результаты тонометрии. В случае апланационной тонометрии по Маклакову показано, что нелинейность упругого поведения роговицы в оценённом диапазоне параметров приводит к некоторому увеличению разницы между тонометрическим и истинным давлениями (тонометрической разности). Это увеличение, однако, не превосходит 2 мм рт. ст. Поправка возрастает с увеличением давления и веса тонометра. Но, с учётом увеличения тонометрической разности при росте этих величин относительная поправка к оцениваемому значению внутриглазного давления остается незначительной, не превышая 10%. Расчёты, проведенные для импрессионного тонометра Шиотца демонстрируют более значительные поправки за счёт нелинейности, которые в случае этого тонометра необходимо учитывать.

Выполненное исследование представляет собой очередной шаг на пути к разработке полностью корректной методики определения механических свойств и механического состояния индивидуального глаза при клиническом обследовании, включая индивидуальные упругие характеристики: роговичную и склеральную жёсткости и параметр нелинейности.

### Литература

- [1] Моисеева И.Н., Штейн А.А. Анализ зависимости давление - объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели. // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2011, №5, С. 3–15.
- [2] Friedenwald J.S. Contribution to the theory and practice of tonometry. // Am. J. Ophthalmol., 1937, vol. 20, no. 10, p. 985–1024.
- [3] Штейн А.А., Моисеева И.Н., Любимов Г.А. Математическая модель роговицы глаза с учетом экспоненциальной нелинейности ее упругих свойств при условии геометрической малости деформаций. // Росс. журн. биомех., 2019, т. 23, № 3, С. 375–390.

Секция 8

Физическая механика

*Physical Mechanics*

## Влияние граничных условий на поверхности эмитирующих тел на потоки частиц в их окрестности

*Гунько Ю.Ф.*<sup>1</sup> *Гунько Н.А.*<sup>2</sup>

*y.gunko@spbu.ru, nataliagunko@gmail.com*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН,  
194021, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

*Ключевые слова:* самосогласованное электрическое поле, плотность потоков электронов, фотоэмиссия.

Для определения электрофизических свойств материалов и прежде всего их эмиссионных свойств является важным знание потенциалов самосогласованных электрических полей, значения которых, в значительной мере, определяются особенностями окружающей среды и граничными условиями, задаваемыми на поверхности эмитирующих тел, находящихся в разреженной плазме.

Решения задач такого рода широко используются как в теоретических работах, так и в прикладных исследованиях в области радиотехники, радиоэлектроники, в исследованиях космического пространства, изучении эволюции микрочастиц естественного и техногенного происхождения в условиях ближнего и дальнего космоса, применяются при разработке новых нанотехнологий и т.д.

В данной работе рассмотрено влияние граничных условий для электрических и газодинамических величин на плотности потоков электронов как вблизи, так и на больших расстояниях от поверхности тел. Исследование проведено на основе решений, получаемых для потенциала электрического поля в плоском диоде при различных предположениях. Проанализировано четыре вида граничных условий.

Для полностью экранированного электрического поля (первый вид) искомая зависимость задаётся известной формулой Чайлда-Ленгмюра (закон «степени 3/2») [1, 2]:

$$j = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2}, \quad (1)$$

где  $\varphi_a$  — потенциал электрического поля на поверхности анода,  $d$  — расстояние между катодом и анодом.

Граничные условия для потенциала, напряжённости электрического поля и скорости частиц на поверхности эмитирующего тела имеют вид:  $\varphi_0 = 0$ ,  $E_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ . Зависимость  $j(\varphi_a)$  достаточно хорошо описывается при малых  $\varphi_a$  формулой (1), но при больших  $\varphi_a$  эта формула неприменима.

Во втором из исследованных случаев:  $\varphi_0 = 0$ ,  $E_0 \neq 0$  и  $v_0 \neq 0$  разработана методика построения зависимости плотности электрического тока от напряжённости электрического поля на поверхности тела —  $j(E_0)$ .

Заметим, что величина  $E_0$  и связанный с ней безразмерный параметр  $R_E = \sqrt{E_0^2/8\pi n_0 m_e v_0^2}$  определяют режимы течения. При  $R_E \geq 0$  и  $E_0 > 0$  самосогласованное электрическое поле будет носить ускоряющий характер. При  $0 \leq R_E \leq 1$  и  $E_0 < 0$  поле будет тормозящим, но возвратные частицы в нем будут отсутствовать. При  $R_E \geq \sqrt{2}$  и  $E_0 < 0$  имеет место возвратное течение. При  $1 < R_E < \sqrt{2}$  и  $E_0 < 0$  «классических» решений задачи об определении потенциала самосогласованного электрического поля не существует.

Зависимость  $j(E_0)$  для  $E_0$  взятых из промежутка  $1 < R_E < \sqrt{2}$  и для  $E_0 < 0$  получена с использованием «квазирешений», впервые введённых в работе [3]. Квазирешения — это такие зависимости  $\varphi(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $v(x)$ , которые, во-первых, удовлетворяют граничным условиям на эмитирующей поверхности, а, во-вторых, являются решениями исходных уравнений поставленной задачи почти всюду. Почти всюду означает: всюду, кроме одной точки. Построение квазирешений можно осуществить путём введения в модель исследуемой системы нового параметра  $p$ , определяющего вероятность прохождения эмитируемой частицы через поверхность, которая в радиоэлектронике носит название поверхности виртуального катода.

В итоге построена зависимость  $j(E_0)$  для любых  $E_0$  и любых точек в окрестности эмитирующей поверхности.

Третий случай, основан на предположении, что эмиссия электронов с поверхности тела носит моноэнергетический изотропный характер. В этом случае результат получен, на основе решения кинетического уравнения Власова [4].

Зависимость  $j(\varphi)$  получена в неявной форме:

$$j = j_0 = nV_0/2, \quad \text{при } E_0 > 0; \quad (2)$$

и

$$j = \frac{2e}{m_e} \varphi_{min}(\varphi), \quad \text{при } E_0 < 0, \quad (3)$$

где  $V_0$  — скорость вылета эмитирующих частиц.

В четвёртом случае предполагалось, что вылетающие электроны распределены по максвелловскому закону со средней скоростью отличной от нуля. Численные результаты полученные в этом случае, качественно согласуются с данными экспериментов по фотоэлектронной эмиссии.

## Литература

- [1] Child C. D. Phys. Rev. Ser. 1. 1911. Vol. 32. N 5. P. 492–511.
- [2] Langmuir I. Phys. Rev., 2, 1913, 456.

- [3] Гунько Ю.Ф., Колесникова Э.Н. Сб. «Модели неоднородных сред». Физическая механика. Вып. 8. СПб. С.-Петербург. гос. ун-т, 2004. С. 63–95.
- [4] Yuri F. Gunko and Natalia A. Structure of Screening Layer Near a Plain Isolated Body in the Deep Vacuum/Part.2: Monoenergetic Isotropic Flow / AIP Conference Proceedings,1959,100001 (2018).

## Волновой метаморфизм льда

*Епифанов В.П.,<sup>1</sup> Сазонов К.Е.<sup>2</sup>*

*evp@ipmnet.ru, kirsaz@rambler.ru*

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
119526, Российская Федерация, Москва, пр. Вернадского, 101, к.1,

<sup>2</sup>«Крыловский государственный научный центр»,  
196158, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

*Ключевые слова:* акустическая сжимаемость, локальная твёрдость, метаморфизм, текстура и структура, физическая акустика.

Связь строения льда с его прочностными свойствами была и остаётся актуальной научной проблемой. К тому же лёд является объектом исследований, связанных с Арктикой и Антарктикой. Лёд как модельный низкомолекулярный материал проявляет свойства упругости, пластичности и ползучести в ограниченном интервале температур, напряжений и скоростей деформаций. Поэтому удобен для моделирования природных процессов в лабораторных условиях.

Известны методы неразрушающего контроля, в которых акустические волны «малой амплитуды» применяются для исследования твёрдых тел. Известно также воздействие на лёд импульсов большой амплитуды, приводящее к его разрушению [1]. Однако влияние нелинейных волновых структур на локальную прочность ледяного поля исследовано недостаточно. Новизна такого исследования состоит в определении картины локальной прочности ледяного поля при воздействии упругих волн, амплитуда которых меньше разрушающих, но достаточна для того, чтобы во льду накопились значительные остаточные деформации при их периодическом воздействии. Такая ситуация возникает, например, в стоячих волнах, энергия которых «перетекает» из пучностей в узлы и обратно. Локализация упругой энергии в определённых объёмах льда должна вызвать необратимые изменения структуры, которые отразятся в его прочностных и акустических характеристиках.

Волновой метаморфизм льда исследовали в лабораторных условиях, например, при наложении фронтов волн в сопле Лавалья [2]. Волны могут генерироваться внешними и внутренними источниками, включая когерентное излучение в самом льде при его формировании в условиях стеснения. Общность меха-

низмов деформирования при квазистатических и динамических нагружениях подтверждена при медленном ударе (менее 10 м/с) [3, 4].

В данной работе исследовалось влияние стоячих волн на локальную твёрдость ледяного поля Крыловского научного центра. Объект исследования — солёный лёд, как материал, имеющий практическую значимость и заведомо обеспечивающий большой эффект по причине низкого модуля. В качестве критерия прочности выбрана локальная твёрдость, которая многократно определялась в продольных и поперечных профилях ледяного поля с помощью акустико-механического метода [5]. Связь между микроскопическими и макроскопическими свойствами льда устанавливалась с помощью линейной модели, состоящей из  $n$  (двух или более) идентичных материальных точек, обладающих одинаковой массой  $m$  и соединённых упругими связями, имеющими одинаковую жёсткость  $k$ .

Экспериментальные зависимости локальной твёрдости от координат точек измерений вдоль и поперёк бассейна аппроксимированы периодическими кривыми, у которых максимумы и минимумы локальной твёрдости коррелируют соответственно с узлами и пучностями стоячих волн. Значения твёрдости варьируют от 40% до 60% при ошибке измерений осевой силы 5%. Выделены длины волн, соответствующие изгибно-гравитационным и продольным волнам, при интерференции которых формируются стационарные периодические волновые структуры. Аналогичная закономерность изменений локальной твёрдости получена для речного льда.

Свойство льда сохранять в «замороженном» виде вторичную текстуру льда проявилось в периодической зависимости локальной твёрдости льда от координаты точек измерений. В пучностях стоячих волн накапливаются дефекты и уменьшается твёрдость льда. Напротив, в узловых точках стоячей волны наблюдается максимальное значение твёрдости. Соответственно осциллирующая локальная твёрдость является зеркальным отражением фазовой поверхности амплитуды (проекции скорости) стоячей волны.

Таким образом, по экспериментальным данным построена фазовая поверхность волновых структур, определены длины бегущих волн, фазовая скорость распространения  $V = 0.35$  м/с и частота колебаний  $f = V/\lambda = 0.35$  Гц, а также оценены размеры подвижных элементов структуры льда. Полученные данные сопоставлены с теоретически рассчитанными их значениями.

Полученные результаты позволяют рассматривать нелинейные волновые явления как один из факторов, влияющих на пространственно-временную изменчивость прочностных характеристик ледяного поля. Данные могут быть использованы для оценки влияния волновых процессов на формирование структуры промежуточных слоев при контактном разрушении, при определении ледовых нагрузок на плавучие и стационарные морские платформы, а также при



разработке эффективных технологий проектирования корпусов ледоколов и судов ледового плавания.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант 20–01–00649).

### Литература

- [1] Козин В.М. и др. Экспериментально–теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно–гравитационных волн от условий возбуждения // Монография. Новосибирск. Изд–во СО РАН. 2016. 222 с.
- [2] Елифанов В.П. Влияние импульсов напряжений на структуру льда в промежуточном слое // Доклады Академии Наук. 2018. Т. 479. № 6. С. 629–633.
- [3] Елифанов В.П. Особенности контактного разрушения льда. Лёд и Снег. 2020. 60(2). С. 274–284.
- [4] Eriphanov V.P. Method and device for ice strength measurement // 13th International Conference on Pori and Ocean. Engineering under Arctic Condition. POAC'95. August 15–18, 1995 Murmansk, Russia. VOLUME 3. St. Peterburg. 1995. P. 110–121.
- [5] Елифанов В.П., Сазонов К.Е. Влияние стоячих волн на локальную прочность ледяного поля // Доклады Академии Наук. 2019. Т. 489. № 6. С. 30–35.

## Расчет напряжений, инициированных электрическим взрывом проводников в составном толстостенном цилиндре

*Кац В.М., Морозов В.А., Севастьянов Я.А.*

*v.kats@spbu.ru, v.morozov@spbu.ru, st016959@student.spbu.ru,*

*Санкт-Петербургский государственный университет,*

*199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9*

*Ключевые слова:* динамическое нагружение, радиальные напряжения, толстостенный цилиндр, электрический взрыв проводников

В настоящее время интенсивно ведутся исследования методов высокоскоростного нагружения, деформирования и разрушения материалов. Особый интерес представляют электрофизические методы, основанные на электрическом взрыве проводников (ЭВП) [1, 2].

В данной работе метод ЭВП используется для исследования высокоскоростного нагружения составных образцов цилиндрической формы из полиметилметакрилата (ПММА) с наружной оболочкой из алюминия. Целью работы является разработка математической модели построения полей напряжений с учётом граничных и начальных условий.

Исследуемый образец представляет собой толстостенный цилиндр из ПММА, запрессованный в алюминиевую оболочку. Внутренний радиус цилиндра равен 0.5 мм, внешний — 3 мм, толщина оболочки составляет 0.5 мм. В осевое отверстие образца помещен проводник в виде медной проволоки радиусом 60 мкм и длиной 18.5 мм.

Нагружение образца осуществляется посредством подачи электрического напряжения на проводник, в результате чего происходит электрический взрыв. Давление от взрывающегося проводника в воздушном канале передается ударной волной в материал из ПММА и далее в алюминиевую оболочку. Цилиндр из ПММА при этом разрушается.

Рассматривается задача о динамическом деформировании толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления. Обозначим через  $a$  внутренний радиус цилиндра, через  $b$  — внешний. В обозначениях, используемых в теории квазистатического упругого поля в осесимметричной геометрии и в условиях плоской деформации, а также с учётом предположения о бесконечно длинной конфигурации при условии отсутствия внешней силы, определяющее уравнение движения толстостенного цилиндра имеет форму [3]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

где  $U = u_r$  — смещение,  $\sigma_r$  — радиальное напряжение,  $\sigma_\theta$  — тангенциальное напряжение,  $r$  — радиус цилиндра,  $\rho$  — плотность. Уравнение движения в безразмерных переменных запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)}{\bar{r}} = \rho a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

где безразмерный радиус  $\bar{r} = r/a$ .

Поскольку мы имеем дело с несжимаемым материалом, условие несжимаемости имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = 0.$$

Решение данного уравнения дает выражение для виртуального перемещения:

$$U = a \frac{C(t)}{\bar{r}}.$$

Из закона Гука в случае несжимаемости среды следует, что

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = -4\mu \frac{C(t)}{\bar{r}^2}.$$

Перейдем к безразмерному времени  $\bar{t} = t/t_*$ , где  $t_* = a/C_0$ ,  $C_0 = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $C_0$  — скорость сдвиговой волны.

Тогда

$$\rho a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho a^2 \left[ \frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}} \right] \left[ \frac{C_0^2}{a^2} \right] = \mu \frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}}.$$

После выполнения преобразований уравнение движения в безразмерных величинах запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \bar{r}} = \mu \left( \frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}} + 4 \frac{C(\bar{t})}{\bar{r}^3} \right).$$

Запишем граничные и начальные условия:  $\bar{r} = b/a = r_*$ ,  $\sigma_r = -P_2$ ;  $\bar{r} = 1$ ,  $\sigma_r = -P_1$ , где  $P_1$  — давление на границе канал-ПММА,  $P_2$  — давление в ПММА при фиксированном радиусе;  $U(r, 0) = 0 \Rightarrow C(0) = 0$ ,  $U'(r, 0) = 0 \Rightarrow C'(0) = 0$ .

Интегрируя уравнение движения при использовании граничных условий  $r = b$ ,  $\bar{r} = r_*$ , получим выражение для  $\sigma_r$ :

$$\sigma_r + P_2 = \mu \left( \ln \left( \frac{\bar{r}}{\bar{r}_*} \right) C''(\bar{t}) - 2 \left( \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{1}{\bar{r}_*^2} \right) C(\bar{t}) \right).$$

С использованием полученной модели произведён расчёт радиальных напряжений в цилиндре из ПММА. Результаты расчёта сравнены с экспериментальными данными. Проведён расчёт напряжений в составном толстостенном цилиндре, состоящем из отрезка алюминиевой трубки, в которую запрессован цилиндр из ПММА. Проведена оценка напряжения разрыва алюминиевой оболочки. Результаты находятся в согласии с литературными данными [4].

## Литература

- [1] Imber J., Rahmaan T., Worswick M. 1th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading // DYMAT 2015 (Lugano, Switzerland, September 7-11, 2015). – EPJ Web of Conferences. Vol. 94, 2015. - P. 01048.
- [2] Morozov V. A., Lukin A. A., et al. 21st European Conference on Fracture, ECF21, (Catania, Italy, June 20-24, 2016) // Procedia Structural Integrity. Vol. 2, 2016. - P. 1002-1006.
- [3] П.В. Тишин Исследование распространения упругопластической границы в трубе из идеального упругопластического материала под действием динамических нагрузок различного вида // Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, №3, с. 201-216.
- [4] Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е. Экспериментальные профили ударных волн в конденсированных веществах. // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008-248с.-ISBN 978-5-9221-0882-9.

## Области высыпания на Землю электронов высокой энергии, инжектированных точечным источником, движущимся по эллиптической околоземной орбите

*Колесников Е.К.,<sup>1</sup> Ключников Г.Н.<sup>2</sup>*

*evgkolesn@yandex.ru, g.klyushnikov@spbu.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,

<sup>2</sup>Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова,  
188300, Российская Федерация, Ленинградская обл., Гатчина, Орлова Роцца, 1

*Ключевые слова:* геомагнитное поле, заряженные частицы, области высыпания.

Изучение областей высыпания заряженных частиц высокой энергии техногенного происхождения важно в связи с необходимостью решения задач экологии ближнего космоса и определения степени воздействия указанных частиц на поверхности космических летательных аппаратов. Ранее авторами в работе [1] области высыпания были построены для случая неподвижного источника электронов, находящегося на околоземной или геостационарной орбите в дипольном магнитном поле. В статье [2] было исследовано влияние 3-й и 4-й гармоник магнитного поля и глобального планетарного индекса геомагнитной активности на конфигурацию областей высыпания от неподвижного точечного источника.

Задача об областях высыпания была решена и для источника, движущегося по низкой круговой околоземной орбите с постоянной по модулю скоростью. В настоящей работе будут представлены результаты расчётов областей высыпания для источника, движущегося по эллиптической орбите в околоземном космическом пространстве. Для решения поставленной задачи задаются параметры источника: высоты перигея и апогея, долгота восходящего узла, аргумент перигея, угол наклона орбиты; начальный момент времени, соответствующий моменту отделения материнского тела от ракеты-носителя, и истинная аномалия точки отделения материнского тела. Кроме того, считается известной скорость инъекции частиц в околоземное космическое пространство, а также полное время моделирования. Динамика источника определяется на основе решения уравнения Кеплера, описывающего его орбитальное движение. Для каждой частицы разыгрывается величина её скорости в системе отсчета, связанной с материнским телом, а также углы, задающие направление её инъекции. Определяются компоненты скорости частицы в геоцентрической экваториальной системе отсчета. Скорости заряженных частиц и углы их инъекции рассматриваются как случайные величины с заданными законами распределения. Геомагнитное поле моделируется полем первых сферических гармоник ряда Гаусса.

## Литература

- [1] Колесников Е. К. Структура областей высыпания электронов высокой энергии, инжектируемых в дипольное магнитное поле Земли точечным источником // Геомагнетизм и аэронавигация. 2002. №5. С. 624–630.
- [2] Колесников Е. К., Ключников Г. Н. Структура областей высыпания электронов высокой энергии, инжектируемых точечным источником в геомагнитное поле, представленное первыми гармониками ряда Гаусса // Геомагнетизм и аэронавигация. 2020. №3. С. 275–280.

## Экспериментальное изучение и молекулярно-динамическое моделирование диффузии углеродных нанотрубок

*Рудяк В.Я.<sup>1,2,3</sup> Белкин А.А.<sup>2</sup> Краснолуцкий С.Л.<sup>2</sup>*  
*valery.rudyak@mail.ru, a.belkin@sibstrin.ru, sergius\_1@mail.ru*

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Пирогова, 2,

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113,

<sup>3</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,

630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1

*Ключевые слова:* одностенные нанотрубки, наножидкость, коэффициент диффузии, динамическое рассеяние света, метод молекулярной динамики.

Углеродные нанотрубки (УНТ), представляющие собой свёрнутый фрагмент листа графена, обладают уникальными свойствами и по праву считаются материалом будущего [1]. Они могут быть многостенными и одностенными [2], для них характерно большое различие размеров. Как правило, использование УНТ требует создания наножидкостей на их основе, причём их свойства существенно отличаются от свойств обычных наножидкостей. Понятен интерес и к процессам переноса в УНТ-наножидкостях. Несмотря на многочисленные исследования этих процессов, в которых как правило изучались теплопроводность и вязкость (см. например [3]), полученные результаты противоречивы. Строго говоря, они получены фактически для разных наножидкостей. В то же время моделирование процессов переноса УНТ-наножидкостей пока делает только первые шаги [4]. Поэтому изучение свойств переноса, и в первую очередь диффузии УНТ, является задачей важной и актуальной.

Целью данной работы являлось экспериментальное изучение и моделирование методом молекулярной динамики (МД) диффузии одностенных УНТ (ОУНТ) в жидкостях.

Экспериментально в данной работе изучалась диффузия ОУНТ, произведенных компанией OCSiAl. Для этого использовался метод динамического рассеяния света. Диаметр этих УНТ равен 1.6 нм, максимальная длина превышала 4 микрона. В качестве базовой жидкости применялась деионизованная вода (В) с двумя типами поверхностно-активных веществ [5] (ПАВов): додецилбензолсульфат натрия (СДБС) и поливинилпирролидон (ПВП).

Измеренное распределение коэффициента диффузии  $D$  неоднородно, что свидетельствует о неоднородности распределения ОУНТ по размерам. Оно имеет два максимума, первый максимум соответствует кластерам (пучкам) УНТ, второй – индивидуальным трубкам. Коэффициент диффузии этих трубок в разы больше. Так, при массовой концентрации УНТ  $10^{-5}$  %, максимальное значение  $D$ , соответствующее первому максимуму, равно  $2.2 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/с, а второму –  $1.02 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/с. Естественно, с увеличением концентрации УНТ их коэффициент диффузии уменьшается. Определенные по формуле Стокса–Эйнштейна средние размеры пучков УНТ при использовании различных ПАВов существенно разнятся. Если для базовой жидкости В+СДБС средняя длина пучков составляет 2.6 микрона, то для В+ПВП – превышает 3 микрона.

Изучение диффузии одиночных ОУНТ в воде методом МД выполнялось для двух моделей: наноразмерных углеродных твердых стержней различной длины  $L$  и твердой 3D модели хиральности «кресло». Для стержней длиной от 4 до 16 нм измерены средние коэффициенты диффузии  $D$  и коэффициенты диффузии  $D_{||}$  в продольном к стержню направлении. Данные для  $D_{||}$  уникальны, поскольку экспериментальное измерение этой величины практически невозможно. Показано, что  $D_{||}$  уменьшается с ростом  $L$  медленнее, чем  $D$ , измерены эффективные радиусы  $R$  стержней (см. табл. 1).

Таблица 1. Коэффициенты диффузии и эффективные радиусы углеродных стержней различной длины в воде.

$L$ , нм	4.05	6.75	9.45	16.2
$D$ , $10^{-10}$ м <sup>2</sup> /с	4.8	3.03	2.2	1.5
$D_{  }$ , $10^{-10}$ м <sup>2</sup> /с	6.6	5.0	3.8	2.9
$R$ , нм	0.51	0.82	1.12	1.64

Для 3D нанотрубок диаметром 0.818 нм и длиной 5 и 10 нм, значения  $D$  равны соответственно  $1.7 \cdot 10^{-10}$  и  $1.2 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с. Это меньше, чем для стержней такой же длины, что обусловлено большим эффективным размером 3D трубки.

В заключении обсуждаются результаты моделирования диффузии достаточно длинных ОУНТ (до 50 нм). Использовались обе модели (1D и 3D). Полученные данные сопоставлены с экспериментальными и известными теоретическими соотношениями.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-19-00043).

## Литература

- [1] Saeed E., Ibrahim E. Carbon nanotubes—properties and applications: a review // Carbon Letters. 2013. Vol. 14. № 3. P. 131–144.
- [2] Bethune D. S., Klang C. H., de Vries M. S., et al. Cobalt-catalysed growth of carbon nanotubes with single-atomic-layer walls // Nature. 1993. Vol. 363. P. 605–612.
- [3] Estelle P, Halefad S, Mare T. Thermophysical properties and heat transfer performance of carbon nanotubes water-based nanofluids // J. Therm. Anal. Calorim. 2017. Vol. 127. № 3. P. 2075–2081.
- [4] Feng J., Chen P., Zheng D., Zhong W. Transport diffusion in deformed carbon nanotubes // Physica A: Statistical Mech. and its Applications 2018. Vol. 493. №. 1. P. 155–161.
- [5] Рудяк В. Я., Минаков А. В. Современные проблемы микро- и нанофлюидики. Новосибирск: Наука., 2016. 292 с.

## Об анизотропии процессов переноса в нано- и микроканалах

*Рудяк В.Я.<sup>1,2,3</sup> Лежнев Е.В.<sup>2</sup> Любимов Д.Н.<sup>2</sup>*  
*valery.rudyak@mail.ru, lionlev@yandex.ru, danillch@mail.ru*

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет,  
630090, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Пирогова, 2,

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008, Российская Федерация, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113,

<sup>3</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
630090, Российская Федерация, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1

*Ключевые слова:* вязкость, молекулярное моделирование, наноканал, процессы переноса, разреженный газ.

Широкое развитие микросистемной техники, где нередко встречаются течения в каналах размером от десятков нанометров до сотен микрометров, требует понимания происходящих в них процессов переноса. Однако, экспериментальное исследование процессов переноса в каналах таких размеров сильно затруднено. Эксперименты довольно сложны, к тому же возникают проблемы с грамотной интерпретацией данных, полученных на основе таких экспериментов. В связи с этим чрезвычайно остро стоит задача моделирования и изучения этих процессов. Такие же задачи имеют место при течении флюидов в различных пористых средах, в частности, в нефтегазовых коллекторах.

Одним из методов моделирования является хорошо известный метод молекулярной динамики. В случае разреженного газа он практически не применим из-за необходимости огромного числа частиц при моделировании. Ведь в этом случае расчётная ячейка должна иметь характерный размер, превышающий

длину свободного пробега молекул. Кроме того, метод молекулярной динамики из-за наличия в рассматриваемых системах динамического хаоса не дают истинных фазовых траекторий. Локальная неустойчивость фазовых траекторий возникает из-за неточности задания начальных данных для динамических переменных молекул системы, ошибок округления и т.п. И всё же метод молекулярной динамики прекрасно себя показал при изучении самых разных физических, химических и биологических систем. Это обусловлено тем, что актуальные результаты при использовании метода молекулярной динамики получаются усреднением по большому числу независимых фазовых траекторий. В связи с этим естественной представляется идея разработки имитационного метода моделирования процессов переноса, в котором фазовые траектории определяются не точно, но последующее усреднение по большому их числу позволяет получать разумные результаты.

В наших работах [1]–[4] был развит стохастический алгоритм моделирования коэффициентов переноса разреженного газа. Было установлено, что, используя сравнительно небольшое число молекул, можно моделировать коэффициенты переноса с точностью получения экспериментальных данных. Целью данной работы является обобщение этого алгоритма для моделирования процессов переноса разреженных газов в наноканалах и его использование при расчете вязкости. Исследована вязкость нескольких благородных газов.

Динамика молекул в канале с квадратным сечением разбивается на две фазы: смещения и взаимодействия молекул. При смещении проверяется, сталкивается молекула со стенкой или нет. В случае столкновения со стенкой реализуется такое взаимодействие согласно зеркальному, диффузному или зеркально-диффузному закону. Если столкновения со стенкой не было, то определяется пара сталкивающихся молекул. Частота столкновения молекул вычисляется на основе кинетической теории. В результате столкновения скорости молекул меняются в соответствие с законами сохранения. Результатом расчёта является полный набор координат и скоростей всех молекул моделируемой системы в последовательные моменты времени. Используя эту информацию, можно рассчитать все наблюдаемые характеристики газа, включая коэффициент теплопроводности. Коэффициенты переноса в общем случае определяются флуктуационно-диссипационными теоремами, которые связывают их значения с корреляторами соответствующих динамических переменных. В литературе эти формулы принято называть формулами Грина–Кубо.

В данной работе установлена анизотропия (вдоль и поперек канала) вязкости в наноканалах. Показано, что изменением материала стенок можно управлять как анизотропией вязкости, так и значением полного коэффициента вязкости: он может быть как меньше, чем в объеме, так и в разы больше. Изучена зависимость анизотропии вязкости от характерного размера каналов и пока-



зано, что она имеет место не только в нано-, но и в микроканалах, хотя с увеличением размера канала степень наблюдаемой анизотропии падает.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 19-01-00399 и № 20-01-00041).

### Литература

- [1] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Стохастический метод моделирования коэффициентов переноса разреженного газа // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 3. С. 113–122.
- [2] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Stochastic algorithm for simulating gas transport coefficients. J. Comp. Physics. 2018. Vol. 355. P. 95–103. doi: 10.1016/j.jcp.2017.11.001
- [3] Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н. Имитационное моделирование коэффициентов переноса разреженных газов и наногазовзвесей // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 59. С. 105–117.
- [4] Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. Stochastic molecular modeling the transport coefficients of rarefied gas and gas nanosuspensions. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2020. V.11. № 3. P. 285–293. doi:10.17586/2220-8054-2020-11-3-285-293

## Модель зарядки тонкой алюминиевой пленки в космической плазме

*Яковлев А.Б.*

*a.b.yakovlev@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* солнечный парус, наведенный электрический заряд, модель, частично проницаемая пластина.

Проведено обобщение модели зарядки плоской поверхности в космической плазме на случай частично проницаемой тонкой пластины. Приведены результаты расчётов плотности заряда в плазме солнечного ветра и в радиационном поясе для разных коэффициентов отражения солнечного излучения.

### Актуальность задачи.

В рамках активно обсуждаемого в научной литературе применения для межпланетных космических перелетов предложенного Ф. А. Цандером солнечного паруса [1] решено большое количество траекторных задач, задач управления и оптимизации движения с учётом различных факторов космического пространства, в частности эффекта тени Земли. Однако, реализация данной

двигательной системы требует изучения и других факторов космического пространства, которые могут повлиять на её работоспособность. Если процесс деградации изучался [2], то до настоящего времени недостаточное внимание было привлечено к проблеме влияния возможной зарядки солнечного паруса на его динамику и прочностные характеристики.

### **Основные предположения, заложенные в модель.**

Известно, что тела, находящиеся в космической плазме, приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы, величины потока солнечного излучения и электрофизических характеристик тела, а, таким образом, от положения и ориентации тела в процессе движения. Однако зарядка тонких плёнок в отличие от ранее рассмотренных процессов зарядки тел в космической плазме [3]–[5] обладает рядом особенностей. Наиболее важной из них является частичная проницаемость плёнки для заряженных частиц космической плазмы. В связи с этим возникает необходимость обобщить модель зарядки поверхностей с учётом их частичной проницаемости.

В модели используются следующие предположения:

1. размеры поверхности много больше величин ларморовского и дебаевского радиусов;
2. скорость тела много меньше скорости солнечного ветра;
3. выполняется условие высокой фотоэмиссии;
4. влияние границ поверхности плёнки не учитывается;
5. при определении заряжающих потоков учитываются только те частицы, которые поглощаются телом;
6. для определения доли поглощённых частиц используются точные и приближенные формулы для средних длин свободного пробега в материале плёнки [6].

### **Результаты.**

В работе получена система уравнений для определения плотности наведённого на поверхности плёнки заряда и приведены результаты расчётов плотности заряда в плазме солнечного ветра и в радиационном поясе для разных коэффициентов отражения солнечного излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

### **Литература**

- [1] Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М. : Либроком., 2011. 320 с.
- [2] Поляхова Е. Н. Влияние износа зеркальной плёнки под действием космических факторов на динамику движения солнечного паруса в цандеровской ориентации по гелиоцентрической орбите. В : Гагаринские научные Чтения по космонавтике и авиации 1983–1984 гг. М. 1985. С. 62.

- [3] Fu J. H. M. Surface potential of a photoemitting plate // J. Geophys. Res. 1971. Vol. 76, N 10. P. 2506–2509.
- [4] Yakovlev A.B. The corrected method for calculation of electrostatic potential near to surface of nonatmospheric space body and the analysis of possible modes of dust particles motion // International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov’s Reading (Saint-Petersburg, Febr. 2-6, 2015). IEEE. 2015. doi:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106785.
- [5] Москаленко А. М. Электростатический потенциал у поверхности Луны // Кинематика и физика небесных тел. 1992. Т. 8, N 5. С. 31–40.
- [6] Черняев А. П. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом. М. : Физматлит. 2004. 152 с.

## Секция 9

История механики

*History of Mechanics*

## Особенности проектирования и реализации онлайн уроков по математике и информатике в соответствии с ФГОС

*Корытников Д.Г.*

*dgkorytnikov@gmail.com*

ГБОУ школа №204,

191186, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Миллионная ул., 14

*Ключевые слова:* средняя школа, дистанционные учебные занятия, дистанционные коммуникации, математика, информатика, Единый Государственный Экзамен.

В последнее время дистанционные учебные занятия (ДУЗ) стали неотъемлемой частью образовательного процесса в школах и в высших учебных заведениях России. Бурному развитию онлайн обучения в последние годы способствует эпидемиологическая обстановка, сложившаяся в нашей стране в результате распространения новой коронавирусной инфекции. При этом стоит отметить, что онлайн образование набирает популярность во всем мире на протяжении последних пятнадцати лет. Подобный тренд вызван в первую очередь скоростью развития технологий дистанционной коммуникации, интерактивной презентации и сети Интернета.

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с разработкой и реализацией образовательных программ по математике и информатике с использованием современных дистанционных технологий. В своей работе автор придерживается общепринятой классификации этапов подготовки ДУЗ: методического и технического. Технический этап подготовки к проведению ДУЗ включает в себя следующие пункты: подготовка персональных компьютеров (ПК) участников к проведению урока, настройка устройств ввода и вывода информации со стороны преподавателя, установка и настройка программного обеспечения, учитывающего особенности ПК всех (или большей части) участников урока, загрузка электронных методических материалов.

Методический этап подготовки к проведению ДУЗ, как правило, практически не отличается от аналогичного этапа при планировании консервативного очного занятия в соответствии с ФГОС. Автор доклада приводит примеры корректировки традиционных форм работы на уроке с учётом уровней технического оснащения «рабочих мест» преподавателя и ученика.

В работе уделено особое внимание вопросам, связанным с выбором технических средств и софта для проведения ДУЗ. Выполнен обзор и сравнительный анализ приложений, предоставляющих услуги видеоконференции, трансляции экрана ПК и электронных графических досок. Также в работе приводятся примеры использования графического планшета во время проведения ДУЗ.

Важно, что в докладе сообщается о разработанных уникальных тематических рабочих тетрадях, существующих в оффлайн и онлайн форматах, которые позволяют повысить эффективность онлайн урока по подготовке к Единому Государственному Экзамену по математике и информатике. Кроме традиционных функций, данные рабочие тетради способны повысить объективность оценивания знаний учащихся, систематически получающихся посредством ДУЗ.

Отметим, что при отборе задач для проведения ДУЗ обращалось большое внимание на примеры, взятые из механики. Например, при изучении построения графиков находились траектории, соответствующие уравнениям движения точки, которые рассматривались как параметрическое задание кривой.

При подготовке доклада была использована литература [1]–[5].

### Литература

- [1] Зайченко Т. П. Основы дистанционного обучения: теоретико-практический базис: учебное пособие. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена. 2004. 167 с.
- [2] Малитиков Е. М., Карпенко М. П., Колмогоров В. П. Актуальные проблемы развития дистанционного образования в Российской Федерации и странах СНГ // Право и образование. 2000. № 1(2). С. 42–54.
- [3] Хусяинов Т. М. Основные характеристики массовых открытых онлайн-курсов (МООС) как образовательной технологии // Наука. Мысль. 2015. № 2. С. 21–29.
- [4] Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
- [5] Хуторской А. В. Дистанционное обучение и его технологии // Компьютерра. 2002. № 36. С. 26–30.

### Несколько работ о механизмах Чебышёва

*Кутеева Г.А.*

*g.kuteeva@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* П.Л. Чебышёв, механизмы Чебышёва, профессор Казанского университета А. Васильев, механик Н. Делоне.

В 1945 году был издан сборник статей, посвященных научному наследию П.Л. Чебышёва. Этот сборник состоит из двух выпусков. Первый выпуск посвящен математическим работам (ответственный редактор – академик С.Н. Бернштейн), второй выпуск – изобретениям и исследованиям П.Л. Чебышёва по теории механизмов и машин (ответственные редакторы – академик Н.Г. Бруевич и член-корреспондент АН СССР И.И. Артоболевский). Во втором выпуске

есть довольно известная обширная статья И.И. Артоболевского и Н.И. Левитского, посвященная механизмам академика П.Л. Чебышёва [1].

Во введении к этой статье [1] в 1945 году отмечается следующее: «В области теории механизмов Чебышёв не оставил талантливых последователей, которые могли продолжать и развивать его теории. К сожалению, после Чебышёва не осталось и талантливых популяризаторов его идей, которые могли бы довести его научное наследие до практического внедрения в практику. Работ, доступно излагающих метод Чебышёва, мы почти не имеем, а некоторые статьи, посвященные его методу, написанные даже русскими учёными, опубликованы или на немецком, или на французском языках, а потому были мало доступны широкому кругу русских инженеров.» Оказалось, что авторы ссылаются всего на две работы, которые мы ниже и опишем.

Работа на французском языке [2] создана профессором Казанского университета Александром Васильевичем Васильевым (1853 — 1929) в память и как приношение знаменитому академику Пафнутию Львовичу Чебышёву. Она напечатана в 1898 году, через четыре года после кончины Пафнутия Львовича. Статья, оформлена в виде небольшой брошюры, издана в Турине в 1898 г. на французском языке, 56 страниц, о жизни и научной деятельности П.Л. Чебышёва. На первых страницах есть надписи: «A.M. Charles Hermite en souvenir de son ami P. Tchebyshef. Hommage tres respectueux de A.Vassilief». Приведём перевод: Карл Эрмит в память о своем друге П. Чебышёве. Очень почтительное выражение признательности (дань) от А. Васильева.

Автором второй работы [3] на немецком языке является Николай Борисович Делоне (1856—1931) — русский и советский механик и математик, основатель Киевского общества воздухоплавания. Иногда его называют Николай Борисович Делоне–старший. (Отец известного математика Бориса Делоне и дед физика Н.Б. Делоне–младшего.) Н.Б. Делоне–старший всю свою статью посвятил механизмам. В этой работе, напечатанной в 1899 году, Н. Делоне разделил «шарнирные сочленения Чебышёва» на два класса: 1. Прямолинейные направляющие и 2. Механизмы передачи вращений.

В этих тезисах и в самом докладе предлагается вспомнить статьи, посвященные механизмам Чебышёва, которые были «мало доступны широкому кругу русских инженеров», рассказать немного об их содержании и биографии авторов.

Укажем некоторые факты из биографий профессоров А.В. Васильева и Н.Б. Делоне. Как пишет малый энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона (СПб., 1907–1909), А.В. Васильев принимал деятельное участие в земской жизни Казанской губернии. Был одним из основателей физико-математической секции Общества естествоиспытателей при Императорском Казанском университете. При его председательстве в 1890 году секция была преобразована в Казанское физико-математическое общество.

С 1883 года Васильев писал рефераты о русских математических работах для “Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik”.

В 1906 году А.В. Васильев был избран в Государственный Совет и переехал в Петербург. Преподавал в Императорском университете, на Бестужевских курсах и в Педагогическом институте. В 1921 году по его инициативе было воссоздано Петроградское математическое общество, председателем которого он был до своего переезда в Москву в 1923 году [4].

Укажем некоторые факты биографии Н.Б. Делоне. Он окончил физико-математический факультет Московского университета (1878), защитил магистерскую (в 1892 году) и докторскую (в 1894 году) диссертации по механике. Название докторской диссертации звучит так: «Передача вращения и механическое черчение кривых шарнирнорычажными механизмами». Работал в Новоалександрии, в Варшаве, и, наконец, в Киеве, где преподавал с перерывами до 1928 года.

Отметим, что Н.Делоне опубликовал в Санкт-Петербурге в 1900 году «Начальное руководство к самостоятельному изучению высшей математики и механики» и «Лекции по практической механике» в 1901 году.

### Литература

- [1] Аргоболевский И.И., Левитский Н. И. Механизмы П. Л. Чебышёва / В кн.: Научное наследие П. Л. Чебышёва. Вып. II. Теория механизмов. М.-Л.: Изд-во АН СССР. С. 7–109
- [2] Vassilieff A. P.L. Tchebychef et son oeuvre scientifique. Turin. 1898. P. 56.
- [3] Delaunay N. Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen // Zeitschr. f. Math. und Phys. Bd. 44, N. 4. 1899. (Работы Чебышёва по теории суставчатых механизмов)
- [4] Ермолаева Н.С. Из истории Санкт-Петербургского и Петроградского математических обществ // Труды СПбМО, т. 2 (1993). Изд-во СПбГУ. С. 309–322.

## Коллекция механизмов П.Л. Чебышёва на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета

*Кутеева Г.А., Синильщикова Г.А., Трифоненко Б.В., Юшков М.П.*  
*g.kuteeva@spbu.ru, g.sinilshikova@spbu.ru, b.trifonenko@spbu.ru,*  
*yushkovmp@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* коллекция механизмов 19 века, музей, экспонат, прибор, четырехзвенник, Чебышёв.



В связи с празднованием в 2021-ом году 200-летия со дня рождения П.Л.Чебышёва уместно напомнить о коллекции механизмов этого великого учёного, хранящихся на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Согласно Общему уставу Императорских Российских университетов 1863-го года было введено новое название кафедры механики аналитической и практической, причем при кафедре был учрежден Кабинет практической механики. Решающую роль при организации кабинета сыграл приват-доцент, а позднее профессор А.Ф.Окатов. В этом кабинете оказались приборы и механизмы, принадлежавшие ранее Технологическому кабинету, прекратившему свое существование после принятия Устава 1863 года. При этом коллекция Кабинета практической механики в дальнейшем непрерывно пополнялась.

Приборы и механизмы Кабинета практической механики можно разбить условно на две части [1]–[6]. Первая часть — это деревянные и металлические приборы конца 19 века, выполненные блестящими мастерами лучших мастерских Европы и России: мастерские Густава Фойгта (Фохта), Парижская мануфактура Chateau et fils, Женевское общество приборостроения, модели мануфактуры Мартина Шиллинга и другие. Вторая часть — механизмы, изготовленные под руководством П.Л.Чебышёва или им лично, причем на ряде деревянных моделей сохранились собственноручные пометки Пафнутия Львовича.

Механизмы П.Л.Чебышёва, сохранившихся на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ, можно разделить на три группы. 1. Деревянные модели, выполненные собственноручно П.Л.Чебышёвым с его пометками. 2. Модели, выполненные под его руководством (например, плоские рычажные механизмы, выполненные университетским механиком Франценом). 3. Металлические модели, выполненные фабричным образом.

В настоящее время раритетная коллекция Кабинета практической механики кафедры теоретической и прикладной механики находится на временном хранении в Музее истории математико-механического факультета СПбГУ. Предполагается организация экскурсии в этот музей для всех желающих.

Перечислим некоторые модели коллекции, которые можно будет осмотреть. 1. Две деревянные черновые модели стопоходящей машины с пометками П.Л.Чебышёва. 2. Центробежный регулятор, один из двух регуляторов, упомянутых, например, в статье [7]. 3. Многозвенный механизм с остановками в крайних положениях [7]. 4. Семь плоских механизмов на деревянных подставках, изготовленных университетским механиком Франценом: парадоксальный механизм; механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа; механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом; механизм с длительной остановкой ведомого зве-

на в конце его хода; механизм с остановками в крайних положениях; механизм с остановкой ведомого звена на полпути; шестизвенная противовращательная рукоятка.

Эти механизмы аналогичны хранящимся в Политехническом музее Москвы и в Консерватории искусств и ремёсел в Париже. Такие плоские шарнирные механизмы выставлялись на Всемирной Колумбовой выставке в Чикаго в 1893 году.

### Литература

- [1] Kuteeva G., Yushkov M., Rimushkina E. Pafnutii Lvovich Chebyshev as a mechanician (2015) 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, art. no. 7106746
- [2] Kuteeva G., Ershov B., Voloshinova T. Models of mechanisms by P.L.Chebyshev in St.Petersburg University (2015) 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading. 2015. С. 7106745.
- [3] Кутеева Г.А., Синильщикова Г.А., Трифоненко Б.В. Экспонаты исторической коллекции математико-механического факультета СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 3. С. 493–504.
- [4] Ершов Б.А., Кутеева Г.А., Тарабарин В.Б. О роли моделей механизмов П.Л.Чебышёва в истории науки и техники // Гуманитарный вестник. Издательство: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Москва), 2016. № 1 (39). С. 1.
- [5] Коллекция знаний. Музеи и коллекции Санкт-Петербургского государственного университета / Санкт-Петербургский государственный университет; [авт.-сост.: Г. Ф. Анастасенко и др.; редкол.: Е. Г.Чернова и др.; пер. на англ. яз.: В. Ю. Голубев, Уолкер У. Тримбл]. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2018. 287 с.
- [6] Научное наследие П.Л. Чебышёва. Вып. 2. Теория механизмов. М. Л. Изд-во АН СССР. 1945. 192 с.
- [7] Артоболевский И.И., Левитский Н. И. Модели механизмов П. Л. Чебышёва / В кн.: Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва. Том IV. Теория механизмов. М.–Л.: Изд-во АН СССР. 1948. С. 227–228

## К 100-летию со дня рождения академика Дмитрия Евгеньевича Охоцимского

*Голубев Ю.Ф.*<sup>1</sup>, *Мелжумова Е.В.*<sup>2</sup>

*golubev@keldysh.ru, elena\_v\_m@mail.ru*

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
125047, Российская Федерация, Москва, Миусская пл., 4,

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119991, Российская Федерация, Москва, ул. Колмогорова, 1

*Ключевые слова:* Охоцимский Д.Е., небесная механика, мехатроника.

Дмитрий Евгеньевич Охоцимский (26 февраля 1921, Москва – 18 декабря 2005, Москва) — создатель научной школы в области динамики космического полета, автор фундаментальных трудов в области прикладной небесной механики, робототехники и мехатроники, академик РАН.

Ещё будучи студентом МГУ, в 1946 году Д.Е. Охоцимский подготовил и опубликовал статью в журнале «Прикладная математика и механика» с оригинальным методом оптимизации траекторий движения ракет. Дипломную работу Д.Е. Охоцимский подготовил под научным руководством академика С.А. Христиановича. Д.Е. Охоцимский предложил метод вычисления полной вариации как вырожденных, так и невырожденных функционалов в задачах управления.

После окончания университета Д.Е. Охоцимский поступил на работу в Математический институт имени В.А. Стеклова АН СССР (МИАН) — в отдел, которым руководил Мстислав Всеволодович Келдыш, будущий президент Академии Наук СССР. М.В. Келдыш был научным руководителем Д.Е. Охоцимского, успешно закончившего аспирантуру МИАН и в 1949 году защитившего кандидатскую диссертацию по ракетодинамике. Д.Е. Охоцимский организовал по поручению М.В.Келдыша в составе отдела небольшую группу учёных (С.С. Камынин, Т.М. Энеев, В.А. Егоров; позже к группе присоединились: В.А. Сарычев, В.В. Белецкий, А.К. Платонов, М.В. Лидов, Р.К. Казакова и Э.Л. Аким), занимавшихся динамикой космического полёта и ракетами — как баллистическими, так и крылатыми. В 1953 году отдел М.В. Келдыша был преобразован в «Отделение прикладной математики», куда влилась и группа Д.Е. Охоцимского. В 1958 году Д.Е. Охоцимскому без защиты была присвоена степень доктора физико-математических наук.

М.В. Келдыш был главным научным консультантом советской космической программы, и под его руководством группа Д.Е. Охоцимского начала принимать активное участие в космических проектах. В 1966 году отдел Келдыша был преобразован в «Институт прикладной математики» АН СССР (ИПМ). Д.Е. Охоцимский возглавил отдел в этом институте, и руководил им до самой

смерти. В отделе проводилась разработка баллистической части практически всех советских космических проектов. В частности, Д.Е. Охоцимский совместно с М.Л. Лидовым руководил выбором и расчётом траекторий, по которым летали советские «Луны» (начиная со знаменитой «Луны-3», сфотографировавшей обратную сторону Луны) [1].

В 1959 году Д.Е. Охоцимский по инициативе Н.Г. Четаева пришёл на кафедру теоретической механики механико-математического факультета МГУ и стал профессором этой кафедры. С приходом Д.Е. Охоцимского на кафедре получило всестороннее развитие направление, связанное с механикой космического полёта. В 1962 году он возглавил кафедру и оставался во главе её до своей кончины.

Работая на кафедре, Д.Е. Охоцимский создал новый специальный курс «Динамика космических полётов», ставший обязательным для студентов кафедры теоретической механики. Кроме студентов и аспирантов кафедры теоретической механики, этот курс с большим интересом слушали и сотрудники других организаций. Д.Е. Охоцимский пригласил на кафедру в качестве профессоров ведущих сотрудников ИПМ, занимавшихся космической тематикой: В. В. Белецкого, В. А. Егорова, М.Л. Лидова, Т.М. Энеева и др. Под его руководством кафедра и отдел института функционировали как единый научный коллектив.

С 1970 года под руководством Д.Е. Охоцимского на кафедре теоретической механики мехмата МГУ были (совместно с ИПМ АН СССР, Институтом механики МГУ и Институтом проблем передачи информации АН СССР) начаты работы по принципиально новой тематике — созданию робототехнических систем, способных к адаптивному поведению. В ходе данных работ велась разработка методов управления шестиногими и двуногими шагающими аппаратами, созданы сопряжённые с ЭВМ лабораторные макеты шестиногих шагающих аппаратов, снабжённые электромеханическими приводами и системой технического зрения, разработаны методы математического моделирования робототехнических систем, созданы алгоритмы построения движения аппарата, обеспечивающие его статическую устойчивость при преодолении препятствий и организацию прыжков, алгоритмы стабилизации движения аппарата и прокладки трассы на местности со сложным рельефом.

Материалы этих исследований легли в основу нового спецкурса Д.Е. Охоцимского и Ю.Ф. Голубева «Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата», ставшего ключевым при подготовке специалистов по робототехнике [2]. Дальнейшее расширение тематики данных исследований позволило создать на мехмате МГУ новую специализацию «мехатроника» (разработка механических систем с элементами искусственного интеллекта). В связи с этим в 1999 году кафедра теоретической механики по инициативе Д.Е. Охоцимского получила новое название: «кафедра теоретической механики и мехатроники» [3].

## Литература

- [1] Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975. 399 с.
- [2] Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука, 1984. 312 с.
- [3] Прикладная небесная механика и управление движением. Сборник статей, посвященный 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского / Составители: Т.М. Энеев, М.Ю. Овчинников, А.Р.Голиков. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. 368 с.

## О современных проблемах преподавания математики, физики, механики и информатики в Российской Федерации

*Орехов А.В.*

*a\_v\_orehov@mail.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* математика, физика, механика, информатика.

Прежде всего необходимо отметить, что автор выражает свою субъективную точку зрения, основанную, однако, на 30-летнем педагогическом стаже.

Как бы ни было неприятно, но приходится согласиться, что последние реформы образования в нашей стране (начатые в конце прошлого века) нанесли огромный вред как высшей, так и общеобразовательной средней школе. Особенно это можно отнести к таким предметам, как математика и физика.

Во многом эти реформы имели идеологическую подоплеку, иначе зачем учебники, написанные в советское время, были заменены на «произведения» местами весьма сомнительного содержания и качества.

Яркий пример на эту тему — судьба школьных учебников по арифметике, алгебре и геометрии Андрея Петровича Киселёва, выдающегося ученика Пафнутия Львовича Чебышёва [1, 2]. Эти книги в советское время многократно переиздавались; в предисловии к изданию «Элементарной геометрии» 1980 года академик А.Н. Тихонов пишет: «Учебники А.П. Киселёва выдержали в общей сложности около трехсот изданий общим тиражом в несколько миллионов экземпляров» [3, стр. 3]. Тем не менее сейчас они стали библиографической редкостью. Примечательно, что эти учебники были написаны А.П. Киселёвым ещё до Октябрьской Революции 1917 года. По этим книгам учились все покорители космоса: С.П. Королёв, М.В. Келдыш, В.П. Глушко, Д.Е. Охоцимский и другие выдающиеся советские ученые. Наверное, не случайно стало крылатым выражение академика В.И. Арнольда: «Я бы вернулся к Киселёву» [4].

Нельзя не сказать и о преподавании элементов дифференциального и интегрального исчисления в средней школе. Изучение производных и интегралов без корректного определения множества вещественных чисел и предельного перехода является категорически неправильным, бессмысленным и вредным. Особенно анекдотично то, что большинство школьников плохо владеет устным счётом; получается, что производные и интегралы вычисляют учащиеся, не способные в уме считать до ста. Именно поэтому в школьный курс необходимо вместо примитивного изложения основ дифференциального и интегрального исчисления ввести преподавание арифметики комплексных чисел и элементарной комбинаторики. Эти два раздела математики как нельзя лучше способствуют развитию вычислительных навыков учащихся.

«Болонский процесс», навязанный эпигонами западно-европейской модели образования, пагубным образом деформировал высшую школу в нашей стране. Нельзя сказать, что вузовское образование сведено на нет, но сейчас его структура и качество не являются оптимальными; особенно это касается естественных наук, прежде всего математики, физики, механики и информатики.

Адаптируя выверенные десятилетиями учебные программы советской высшей школы к «болонскому процессу», учебно-методические комиссии ВУЗов, образно выражаясь, «утапывали пятилетние программы» в «прокрустово ложе» четырехлетнего болонского бакалавриата. Очевидно, что подобное уплотнение учебных программ не способствует качеству высшего образования. И здесь очень важно отметить, что это «сжатие» учебного процесса практически совпало с появлением целого набора новых предметов, связанных с развитием информатики, вычислительной техники и наук об искусственном интеллекте.

Бакалавриаты математических и физических факультетов университетов «задыхаются» от нехватки учебных часов, но одновременно в магистратуре подобного напряжения не ощущается, например, магистры-математики и магистры-физики ещё раз проходят курс иностранного языка.

В этой связи можно предложить следующее.

Пусть бакалавриат и магистратура останутся в структуре высшего образования, но в полном объёме подготовка математиков, физиков, механиков и специалистов информационных технологий становится шестилетней. Возвращается структура и учебные планы советского периода, те учебные планы, которые были до реформ, начатых в 90-е годы прошлого века. Но, и это самое главное! Общие курсы, включая новые предметы, связанные с информационными технологиями, читаются студентам не два, а три года. Соответственно, распределение по кафедрам и выбор научных руководителей происходит не после второго курса, а после третьего. На четвертом курсе начинается чтение специальных курсов, так, как это было до реформы на третьем курсе в советское время. Выпускную бакалаврскую работу можно рассматривать как первую главу магистерского диплома. После окончания бакалавриата (четверто-

го курса) со студентами, которые не хотят или не могут учиться дальше, можно расстаться, вручив им свидетельства об успешном завершении обучения в бакалавриате. В магистратуре, пятый и шестой курс, в основном преподаются специальные курсы и проводятся специальные семинары, так, как это было в СССР на четвертом и пятом курсах.

Обучение завершается защитой дипломной работы. Желательно также вернуть хотя бы элементы такого института, как распределение на работу для молодых специалистов.

### Литература

- [1] Киселёв Андрей Петрович // Большая советская энциклопедия: [в 30 т.] / под ред. А. М. Прохорова, 3-е изд., М.: Советская энциклопедия, 1969.
- [2] Понтрягин Л.С. О математике и качестве ее преподавания // Коммунист. 1980, № 14.
- [3] Киселёв А.П. Элементарная геометрия. Книга для учителя. М.: Просвещение, 1980. 287 с.
- [4] Костенко И.П. Почему надо вернуться к Киселёву?, Матем. обр., 2006, выпуск 3(38), С. 12–17

## История науки как важная составляющая системного подхода к образованию

*Павилайнен Г.В., Рудакова Т.В., Сабанеев В.С.*

*g.pavilaynen@spbu.ru, t.rudakova@spbu.ru*

Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* высшее образование, история науки, системный подход.

Важнейшей проблемой современного процесса образования является вопрос о его эффективности, как для личности, так и для общества в целом. Поэтому образование сегодня — это наиболее динамичный фактор воздействия на все сферы жизни общества: экономику, социальные процессы, культуру, систему ценностей, образ жизни.

Отсюда особое значение интегративного, целостного восприятия мира, которое позволит избавиться от характерного для нашего времени сочетания глубокого понимания явлений в узкопрофессиональной области, с вопиющим невежеством за её пределами. Решение этой задачи создаст лучшие условия для взаимопонимания и сотрудничества представителей разных специальностей, разных стран и культур [1].

Целостное систематическое мировоззрение личности возможно на основе системного, синергетического подхода в сфере образования.

В современном понимании системный подход, развитый А.Н. Колмогоровым (1903–1987) применительно к сферам народного образования и просвещения, представляет собой путь решения сложной проблемы или задачи, исходя из рассмотрения её как системы в целом, во взаимосвязи с другими сопутствующими проблемами с большим числом внутренних и внешних связей, в результате чего обеспечивается не только нахождение большинства возможных альтернативных решений, но и скорейший выбор оптимального из них.

Попытки разработать общие принципы системного подхода были предприняты ещё русским врачом и философом А.А. Богдановым (1873–1928) в работе «Всеобщая организационная наука (тектология)». Многие идеи и научные гипотезы этой работы были впоследствии исследованы и подтверждены многими учеными, например, Н. Винером, У. Росс Эшби, К.Л. фон Бергаланфи и другими. Карл Людвиг фон Бергаланфи (1901–1972) считается создателем общей теории систем на основе принципа изоморфизма (одинаковости) законов в различных областях знаний [2].

Именно изоморфизм является основой формирования в наше время концепций сложных исследовательских коллективов, объединяющих генетиков и физиков, лингвистов и медиков, биологов и наномехаников. Это означает, что специалисты высшей квалификации должны иметь компетенции совместной работы при существенном различии научного мировоззрения, понятийного аппарата, традиций и форм научного мышления и процесса освоения нового знания. Отсюда следует, что такие научные направления как «История науки», «История философской мысли», «История естествознания» приобретают особое значение, поскольку несут в себе объективный изоморфизм гуманитарного и естественно-научного знаний. Эти дисциплины должны быть включены в учебные планы подготовки специалистов в классических университетах для того, чтобы профильное математическое или физическое образование сопровождалось высоким научным гуманитарным уровнем, владением научным языком, умением ведения дискуссии, обсуждения, критики [3].

Исторические портреты великих учёных должны способствовать формированию у молодых учёных безупречной научной этики, уважительного отношения к преемственности в развитии научных школ, научному приоритету коллег. Одновременно на примерах жизни и деятельности учёных-энциклопедистов: Леонардо да Винчи, М.В. Ломоносова, Г.-В. Лейбница, Ж.Л. Д’Аламбера и других можно продемонстрировать учащимся системный подход в целостном развитии человечества, во взаимозависимости развития общества и науки, в вопросах рационального и эмоционального, разума и веры, экспериментальной фактологии и умозрительных абстрактных теорий. Таким образом можно «пе-



рекинуть мостик» между научными исследованиями прошлого и синергетикой развития современной науки.

В новом учебнике для классического университета «Очерки по истории механики и физики», разработанном и используемом в учебном процессе в Санкт-Петербургском государственном университете, коллектив авторов предпринял попытку изложить историю точных наук, используя системный подход в образовании [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №19-01-00208).

### Литература

- [1] Павилайнен Г.В., Рудакова Т.В., Орехов А.В. Формирование личности XXI века, преподавание истории и философии математики, механики, физики и системного анализа // В сборнике трудов Второй межрегиональной научно-практической конференции преподавателей математики и физики. 20–22 декабря 2019 г. СПб.: ВВМ., 2019. С.20–27
- [2] Павилайнен Г.В., Колесников Е.К., Рудакова Т.В., Цибаров В.А. Безопасность учебно-научного труда и жизнедеятельности / Учеб.пособие. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та., 2013. 204 с.
- [3] Рудакова Т.В., Павилайнен Г.В. Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века // В материалах Межрегиональной конференции "Математика — это просто! 24–26 февраля 2017 г. СПб.: Изд-во ВВМ., С.92–106
- [4] Лопатухина И.Е., Кутеева Г.А., Павилайнен Г.В., Поляхова Е.Н., Рудакова Т.В., Сабанеев В.С., Тихонов А.А. Очерки по истории механики и физики. Учебное пособие. СПб.:ВВМ, 2016. 120 с.

## История резонанса — от простого резонанса до авторезонанса

*Смольников Б.А.<sup>1,2</sup> Смирнов А.С.<sup>1,2</sup>*

*smolnikovba@yandex.ru, smirnov.alexey.1994@gmail.com*

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН,  
199178, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
Большой пр. Васильевского острова, 61,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

*Ключевые слова:* колебания, амплитуда, резонанс, авторезонанс.

Термин «резонанс» имеет довольно длинную историю, представляя огромное теоретическое и практическое значение и выступая как в качестве полезного, так и в качестве вредного явления. Тем не менее, вплоть до настоящего

времени для него нет достаточно строгого и всеобъемлющего определения [1]. В этой связи значительный интерес представляет исторический анализ различных подходов к понятию резонанса — от основополагающих к современным, что и является основной целью настоящей работы.

Наименование «резонанс» происходит от латинского слова «resono», означающего «отклик», «эхо», т. е. подчеркивается реакция системы на какое-либо внешнее возбуждение. Предыстория резонанса корнями уходит еще в Древнюю Грецию, когда пифагорейцы неоднократно замечали, что струны их лир реагируют дрожанием на отдельные музыкальные тона какой-либо звучащей мелодии. Однако первый заметный вклад в теорию резонанса внес в первой половине XVII века выдающийся ученый Г. Галилей (1564–1642), который серьезно исследовал динамику маятников и музыкальных струн [2]. В частности, Галилей писал: «... маятник, находящийся в покое, хотя бы и очень тяжелый, мы можем привести в движение, и притом очень заметное простым дуновением, если мы будем приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент» [3]. Большое внимание к явлению резонанса проявляли и многие его последователи, в частности, Х. Гюйгенс (1629–1695), а построением соответствующей математической модели занимались Л. Эйлер (1707–1783) и Ж. Лагранж (1736–1813) в своих трудах по теории малых колебаний. Их исследования и легли в основу классического понятия резонанса, которое рассматривается в подавляющем большинстве книг. Оно касается резонанса в линейных системах с одной или несколькими степенями свободы, когда резонансное возбуждение предполагается гармоническим с заданной частотой и амплитудой. Под резонансом здесь понимается явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты воздействия к собственной частоте. В этих условиях основной оценкой подобного резонанса служит его амплитудно-частотная характеристика.

На протяжении XVIII–XIX вв. эта теория главным образом применялась в небесномеханических проблемах и совершенно игнорировалась в задачах технических, несмотря на бурное развитие механики машин и механизмов. И только на подходе к XX веку благодаря развитию радиосвязи и электромашиностроения проблема резонанса как метода управления свободными колебаниями в различных системах приобрела достойное внимание со стороны механиков, радиоинженеров, математиков. Особенно важную роль сыграло то, что с ростом мощностей и скоростей колебания различных машин и механизмов приобретали существенно нелинейные свойства, и в соответствии с этим усложнились и множилось различные типы резонансов.

Всё это привело к необходимости использования иного режима возбуждения резонансных колебаний, при котором частота возбуждения не предписывается извне, а поступает на привод возбуждения как сигнал контура обратной связи. В результате частота и фаза этого сигнала точно соответствуют текущей

частоте и фазе системы, ввиду чего ей передается вся поступающая энергия. Возникающий при этом режим нарастающих колебаний осциллятора получил в литературе название «авторезонанса», и впервые он был введен в научный лексикон А. А. Андроновым (1901–1952). В книге [4] такой резонанс определяется как «резонанс под действием силы, порождаемой движением самой системы», и был рассмотрен пример линейной системы второго порядка при наличии реле в обратной связи. Более детальное определение авторезонанса для систем со многими степенями свободы следовало бы дать так: авторезонанс – это такой режим вынужденного движения динамической системы, когда локальные движения по всем ее степеням свободы происходят с одной частотой, которая может дрейфовать при изменении амплитуд колебаний, при этом вынуждающие силы, действующие по всем степеням свободы благодаря контуру обратной связи, постепенно увеличивают уровень механической энергии системы [5].

В силу сказанного, авторезонанс адекватно характеризует режим колебаний не только при малых, но и при больших амплитудах, осуществляя плавный переход от линейной стадии в нелинейную. Поэтому данный термин описывает истинный резонанс при любых амплитудах, что обуславливает его важное практическое значение. Тем не менее, интерес к понятию авторезонанса стал возрастать лишь в последние 2–3 десятилетия, и именно он выявляет важнейшие свойства многочисленных резонансных эффектов в технике. Главной трудностью при практической реализации авторезонанса является необходимость использования контура обратной связи для формирования требуемого закона управления приводом.

В заключение стоит отметить, что приведённое выше описание резонанса Галилеем вовсе не противоречит наличию обратной связи — напротив, из приведённой цитаты становится понятным, как её использовать для возбуждения резонансного режима [2].

## Литература

- [1] Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2016–2017 гг. 2018. С. 23–39.
- [2] Фрадков А. Л. Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
- [3] Галилей Г. Избранные труды. Т. 2. М.: Физматгиз, 1964. 572 с.
- [4] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2-е, перераб. и испр. М.: Наука, 1981. 918 с.
- [5] Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4 (53). С. 11–19.

## Четвёртое издание учебника Н.Н. Поляхова, С.А. Зегжды, П.Е. Товстика, М.П. Юшкова «Теоретическая и прикладная механика»

*Солтаханов Ш.Х.*<sup>1,2</sup> *Товстик П.Е.*<sup>3</sup> *Юшков М.П.*<sup>3</sup>

*soltakhanov@ya.ru, peter.tovstik@mail.ru, yushkovmp@mail.ru*

<sup>1</sup>Грозненский государственный нефтяной технический университет  
им. акад. М.Д. Миллионщикова,

364902, Российская Федерация, г. Грозный, пр. им. Х.А. Исаева, 100,

<sup>2</sup>Академия наук Чеченской Республики,

364024, Российская Федерация, Грозный, пр-т, им. М. Эсамбаева, 13

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

*Ключевые слова:* теоретическая механика, прикладная механика, учебник.

Написание учебника «Теоретическая механика» для студентов-математиков и механиков классических университетов, четвёртое двухтомное издание которого обсуждается в докладе, было инициировано известным ученым-механиком Николаем Николаевичем Поляховым (1906–1987).

В 1953 г. по предложению академика В.И. Смирнова Николай Николаевич, который в то время был признанным в Советском Союзе ученым-гидромехаником, стал заведовать кафедрой аналитической механики (позже теоретической и прикладной механики) математико-механического факультета Ленинградского университета. В связи с этим ему пришлось читать новый для него весьма обширный курс «Теоретическая механика». В течение длительного времени он создавал и непрерывно совершенствовал курс этой дисциплины, не только улучшая его методически, но и наполняя новыми научными результатами. Через 22 года чтения этого общего курса, т. е. в 1975 г., Н.Н. Поляхов пригласил своих учеников С.А. Зегжду и М.П. Юшкова, читавших общие курсы того же названия на других отделениях факультета, написать вместе с ним университетский учебник по теоретической механике. После десяти лет работы этот учебник был выпущен в свет Издательством Ленинградского университета [1] и в 1987 г. был удостоен Первой премии Университета. В дальнейшем учебник выдержал второе и третье издания [2, 3].

После кончины Николая Николаевича С.А. Зегжда и М.П. Юшков со своими учениками продолжали работу в области аналитической механики. Эти результаты были отражены в трёх монографиях на русском языке (в соавторстве с Ш.Х. Солтахановым), причем книга [4] была переведена на китайский язык, а монография [5] была опубликована издательством «Springer» на английском языке. Этот цикл работ по неголономной механике в 2011 г. получил Премию Санкт-Петербургского университета «За научные труды».

Следуя примеру Николая Николаевича, С.А. Зегжда и М.П. Юшков приступили к написанию более полного по содержанию учебника, отражающего новые научные результаты, опубликованные в перечисленных выше монографиях. Очень важно, что к работе над новой редакцией учебника были привлечены и другие сотрудники кафедры, написавшие главы, отражающие их научные интересы и построенные ими специальные курсы. Эти главы вошли во второй том учебника, в то время как первый том содержит основной расширенный курс теоретической механики для студентов математико-механических факультетов университетов. В связи с этим авторами решено было дать новое название учебнику — «Теоретическая и прикладная механика», которое совпадает с названием их кафедры.

Первый том учебника содержит разделы «Кинематика» и «Динамика». В первом разделе подробно излагается теория криволинейных координат, которая активно используется во втором разделе. Для описания движения механических систем используются понятия изображающей точки по Герцу и касательного пространства. В заключительных главах теория Гамильтона-Якоби применяется для интегрирования уравнений движения, а также представлены элементы специальной теории относительности.

Во втором томе излагаются устойчивость движения, нелинейные колебания, динамика и статика платформы Стюарта, механика случайных сил, элементы теории управления, соотношения между неголономной механикой и теорией управления, вибрация и автобалансировка роторных систем, физическая теория удара, статика и динамика тонкого стержня, динамика полета.

Важно, что наряду с публикацией двухтомного учебника на русском языке Издательством Санкт-Петербургского университета одновременно издательство «Springer» готовит к выпуску в свет его перевод на английский язык.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00280.

## Литература

- [1] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 536 с. (6371 экз.)
- [2] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. М.: «Высшая школа», 2000. 592 с. (10000 экз.)
- [3] Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. М.: «Юрайт», 2012. 593 с. (1000 экз.) (Дополнит. тираж в 2015 г. 1000 экз.)
- [4] Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: «Наука. Физматлит», 2005. 272 с. (1000 экз.)
- [5] Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: «Наука. Физматлит», 2009. 344 с. (400 экз.)

**Значение научного диалога академика  
А.Н. Крылова и инженера-кораблестроителя  
И.Г. Бубнова по вопросам остойчивости,  
плавучести и строительной механики для  
развития кораблестроительной школы  
Санкт-Петербурга (1890–1910 годы)**

*Шарков Н.А.,<sup>1</sup> Шаркова О.А.<sup>2</sup>*

*nicolaysharkov@yandex.ru*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургское морское бюро машиностроения «Малахит»  
им. акад. Н. Н. Исанина,

196135, Российская Федерация, Санкт-Петербург, ул. Фрунзе, 18,

<sup>2</sup>ГБОУ лицей № 533 Красногвардейского района Санкт-Петербурга,

195112, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Перевозный пер., 19-а, корп. 1

*Ключевые слова:* корабль, строительная механика корабля, теория корабля, остойчивость, непотопляемость.

Теория корабля — наука, изучающая мореходные качества, такие как плавучесть, остойчивость, непотопляемость, ходкость, управляемость и поведение на волнении [1]. Основы теории корабля были заложены в XVIII веке Леонардом Эйлером. В 1893 году А.Н. Крылов разработал рациональные, ставшие классическими, приёмы и схемы для вычисления основных характеристик — остойчивости и плавучести корабля. В законченную область знаний теория корабля была оформлена к 1920-ым годам; большой и значительный вклад в развитие этой теории, как научного направления, внесли С.О. Макаров, Д. Бернулли, У. Фруд, А.Н. Крылов.

Строительная механика корабля — научная дисциплина, рассматривающая методы расчёта прочности и жесткости корпусных конструкций [2]. Предыстория науки о прочности корабля связана с серединой XVIII века, когда Л.Эйлер и Д. Бернулли, работавшие в Петербургской Академии Наук, заложили основы учения об изгибе балок. Отдельные вопросы прочности корабля прорабатывали М.М. Окунев, Э. Рид, А.Н. Крылов и другие ученые. Но только благодаря трудам И.Г. Бубнова строительная механика корабля стала самостоятельной научной дисциплиной, тесно связанной с нуждами и практикой проектирования [3, 4].

Цель данной статьи — выявить, в чем заключалось значение научных открытий А.Н. Крылова в области остойчивости, плавучести и строительной механики корабля для становления инженерного метода и преподавательской методики И.Г. Бубнова? В чем значение научного и творческого диалога талантливых ученых — А.Н. Крылова (1863–1945 г.г.) и И.Г. Бубнова (1872–1919 г.г.) для современного кораблестроения?

На рубеже веков А.Н. Крылова и И.Г. Бубнова связывала плодотворная совместная работа в Николаевской Морской Академии и в Опытном бассейне; чуть позднее — в 1910-е годы — сотрудничество на Балтийском судостроительном заводе Санкт-Петербурга.

А.Н. Крылову принадлежит одна из ключевых фраз современного кораблестроения: «Всякое рациональное творчество должно быть основано на числе и мере» [5] — такой же точки зрения придерживался в своей научной и конструкторской работе И.Г. Бубнов. В период научного становления инженера-кораблестроителя И.Г. Бубнова А.Н. Крылов заметил его яркое дарование и рекомендовал И.Г. Бубнова на лекторскую преподавательскую работу в Николаевскую Морскую Академию, — и это далеко не случайно: творческий почерк И.Г. Бубнова сочетал тонкую научную интуицию и математическую четкую логику. По отзыву А.Н. Крылова, «Не занимаясь всеми отделами математики, он обладал удивительной способностью выбирать из них то, что требовалось ему для решения технических вопросов с изяществом и легкостью изумительной» [5].

И.Г. Бубнов придерживался принципов проектирования корабля на основе исследования и оценки условий, предъявляемых как ко всему кораблю, так и к каждой отдельной его части, путем математического анализа находя размеры корпуса корабля и всех его частей, опираясь лишь на точные законы физики и механики, а также и на указания опыта постройки [3].

В своих работах, имеющих отношение к строительной механике и теории корабля, И.Г. Бубнов выявлял связь решаемых частных задач с общей главенствующей задачей проектирования, — такой подход сближал инженерные методы И.Г. Бубнова с методами работы А.Н. Крылова. Данный факт имел принципиальное значение: его нельзя не учитывать при изучении научного наследия обоих ученых.

Важно отметить, что в ходе проектной и исследовательской работы И.Г. Бубнов привнес аналитические методы в учение о прочности корабля, где до него господствовала эмпирика. В понимании И.Г. Бубнова, проектирование корабля включало в себя элементы всех дисциплин, которые должны были обеспечить результат чтобы, «Готовое судно и каждая отдельная часть удовлетворяли наперед заданным условиям» [3]. Разумеется, подобная профессиональная позиция И.Г. Бубнова вновь обнаруживает сближение с научно-инженерными методами А.Н. Крылова.

Даже решая в своей проектной деятельности узкие профессиональные задачи, инженер-кораблестроитель И.Г. Бубнов не решал их, как узкий специалист: если пригодного метода не оказывалось, И.Г. Бубнов создавал его вновь, проявляя редкостную изобретательность и научную интуицию [3].

Поэтому далеко не случайно, что многие научные подходы и инженерные открытия И.Г. Бубновым были применены при создании тридцати-шести под-

водных лодок, построенных по 6 основным проектам, а также при создании нескольких проектов линейных кораблей, заложивших основу современного кораблестроения России [3].

Важной составляющей творческого научного диалога И.Г. Бубнова и А.Н.Крылова стала их работа над методикой расчёта прочности и расчёта условий непотопляемости корабля.

Сопоставительный анализ статей И.Г. Бубнова, опубликованных в «Морских сборниках»<sup>1</sup> в 1900-е годы, — может позволить ответить на вопрос: в чём заключалась тематика и проблемность диалога И.Г. Бубнова и А.Н. Крылова; а также может позволить определить значение влияние научных и инженерных открытий А.Н. Крылова на профессиональное становление И.Г. Бубнова, на формирование научных интересов ученого.

Таким образом, большая ценность научных трудов А.Н. Крылова и И.Г.Бубнова в области кораблестроения заключается в том, что они заложили начало периода строго научного развития учения о теории корабля и строительной механики корабля. Кроме того, они внесли значительный вклад в развитие средств математического анализа и механики, а также утвердили важную роль этих дисциплин в развитии кораблестроения. Кроме того, важно отметить ценность проектов кораблей И.Г. Бубнова, в которых он реализовал свои научные методы, которые до сих пор актуальны для современного кораблестроения.

## Литература

- [1] Морской энциклопедический справочник. Л.: Судостроение, 1986.
- [2] Большая Советская энциклопедия. М.: Издательство «Советская энциклопедия», 1970-1977.
- [3] Рассол И.Р. Иван Григорьевич Бубнов. Жизнь и творчество. СПб.: Элмор, 1999. 256 с.
- [4] Бубнов И. Г. Избранные труды. Л.: Государственное союзное издательство судостроительной промышленности, 1956. 439 с.
- [5] Крылов А.Н. Мои воспоминания. СПб.: Политехника, 2014. 511 с.

---

<sup>1</sup>«Морской сборник» — старейшее периодическое издание по истории морского дела; с 1847 года «Морские сборники» издавались в Петербурге, печатались в типографии Морского Министерства. «Морской сборник» — журнал, который являлся официальным изданием Военно-Морского Ведомства России.



АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ (*AUTHOR INDEX*)

- A**  
 Abakarov A.M. .... 285  
 Altenbach H. .... 322  
 Andreev A.S. .... 356
- B**  
 Bezglasnyi S.P. .... 369, 371  
 Bondar Ye. .... 253
- C**  
 Campoli L. .... 206, 262
- D**  
 Dorogovtseva E.V. .... 369
- F**  
 Franus D.V. .... 350
- G**  
 Gerasimova S.A. .... 409  
 Gorbachev Yu. .... 253  
 Grekov M.A. .... 297, 322
- I**  
 Ibraheem A.A. .... 315
- K**  
 Kazantsev V.B. .... 409  
 Kipelkin I.M. .... 409  
 Kostyrko S.A. .... 322, 352  
 Kunova O. .... 253
- L**  
 Lai Y.X. .... 405
- N**  
 Nedić S. .... 117
- P**  
 Pavilaynen G.V. .... 350
- Peregudova O.A. .... 356  
 Pronina Y.G. .... 285
- S**  
 Shoev G. .... 253  
 Shuvalov G.M. .... 352
- V**  
 Vakaeva A.B. .... 297
- Z**  
 Zu M.S. .... 405
- A**  
 Авдюшкин А.Н. .... 141  
 Аксенова О.А. .... 183  
 Александров А.Ю. .... 358, 360  
 Александров В.В. .... 363  
 Алексеев И.В. .... 244  
 Алексеева М.М. .... 185, 233  
 Алферов Г.В. .... 362  
 Амелюшкин И.А. .... 186  
 Андреев А.С. .... 139, 365  
 Андреева Т.А. .... 252  
 Артемьев Ю.М. .... 287  
 Арутюнян А.Р. .... 289
- Б**  
 Бабарыкин К.В. .... 215  
 Багаев Д.В. .... 218  
 Баляев И.А. .... 169  
 Барабанов И.Н. .... 367  
 Бардин Б.С. .... 71, 75, 141, 143  
 Бауэр С.М. .... 291, 401, 420  
 Бегун П.И. .... 403  
 Беличенко М.В. .... 77  
 Белкин А.А. .... 436  
 Беляев А.К. .... 60  
 Бечина А.И. .... 246

Бижанова С.Б. .... 152  
 Богатко В.И. .... 188  
 Богачев И.В. .... 293  
 Борейшо А.С. .... 190, 222  
 Боровин Г.Б. .... 50  
 Бочкарёв А.О. .... 295  
 Брагин М.Д. .... 248  
 Брыкина И.Г. .... 248, 250  
 Бугров Д.И. .... 363  
 Бугрова М.И. .... 363  
 Буров А.А. .... 79  
 Бурьян С.Н. .... 81  
 Бухановский А.В. .... 192  
 Быков В.Г. .... 373, 374  
 Быков Н.Ю. .... 192, 252

**В**

Вавилов Д.С. .... 46  
 Ваганова Д.А. .... 403  
 Васильев Г.П. .... 303  
 Ватульян А.О. .... 293, 305  
 Венатовская Л.А. .... 401  
 Вильде М.В. .... 299, 301  
 Виноградов О.Н. .... 194  
 Виноградова Е.М. .... 217  
 Влахова А.В. .... 83  
 Волков Г.А. .... 307  
 Волков Е.В. .... 143  
 Воронкова Е.Б. .... 291  
 Вrabий А.А. .... 422  
 Вьюненко Ю.Н. .... 307

**Г**

Гаджиев Д.А. .... 195  
 Гайфуллин А.М. .... 70, 195, 197  
 Галяев А.А. .... 91  
 Гарбуз М.А. .... 85  
 Гатаулин Я.А. .... 422  
 Гладун А.В. .... 377  
 Голуб А.П. .... 87  
 Голубев Ю.Ф. .... 50, 450  
 Гориховский В.И. .... 255

Горячева И.Г. .... 44  
 Грушевский А.В. .... 50  
 Губский В.В. .... 199  
 Гувернюк С.В. .... 215  
 Гунько Н.А. .... 428  
 Гунько Ю.Ф. .... 428  
 Гусак Г.В. .... 89

**Д**

Дегилевич Е.А. .... 92  
 Демидов И.В. .... 258  
 Дериглазов А.П. .... 145  
 Джгмадзе Г.Т. .... 190, 222, 236  
 Дзедзисашвили Г.Т. .... 310  
 Дмитриев Н.Н. .... 94  
 Добров Ю.В. .... 201, 274  
 Доброславский А.В. .... 147  
 Додонов В.В. .... 39, 97  
 Дорофеев Н.П. .... 328  
 Досаев М.З. .... 98, 405  
 Дружинин В.Г. .... 407

**Е**

Егорова Л.А. .... 250  
 Елисеев А.В. .... 101  
 Елисеев С.В. .... 101  
 Епифанов В.П. .... 430

**Ж**

Жвик В.В. .... 70, 197  
 Желонкина О.С. .... 379  
 Жумабек Т.М. .... 154

**З**

Забавникова Т.А. .... 311  
 Завьялов О.Г. .... 203  
 Засимова М.А. .... 204, 213  
 Захаров В.В. .... 252  
 Земцова Е.Г. .... 313  
 Злобин Д.Ю. .... 379, 387  
 Зобова А.А. .... 44  
 Зубов С.В. .... 380

**И**

Иванов Д.Н. .... 328  
Иванов Н.Г. .... 204, 213  
Иванова О.В. .... 420  
Иванова Я.Ф. .... 422  
Ившин А.М. .... 379  
Ильина А.Ю. .... 383  
Индейцев Д.А. .... 46  
Иомдина Е.Н. .... 411  
Истомин В.А. .... 260

**К**

Казаков К.Е. .... 317  
Каленова В.И. .... 148  
Калмыкова Р.В. .... 422  
Кальницкий В.С. .... 103  
Каложная А.В. .... 192  
Капралова А.С. .... 208  
Карапетян А.В. .... 44  
Карачева Н.В. .... 319  
Каун Ю.В. .... 185  
Кауфман Д.В. .... 210  
Кац В.М. .... 432  
Качанов А.Б. .... 401  
Кержаев А.П. .... 320  
Киселев А.Ю. .... 307  
Климина Л.А. .... 85, 106  
Клюшников Г.Н. .... 435  
Князев Н.П. .... 379  
Ковалёв М.Д. .... 109  
Коваленко М.Д. .... 320  
Ковачев А.С. .... 374, 383  
Козаченко Т. А. .... 113  
Козлова А.С. .... 97  
Колегова Л.В. .... 365  
Колесник Е.В. .... 238, 240  
Колесников Е.К. .... 435  
Корников В.В. .... 411  
Корнушенко А.В. .... 194  
Королев В.С. .... 158  
Корытников Д.Г. .... 444

Косарева А.А. .... 264, 266  
Косенко И.И. .... 108, 150  
Кравченко Д. С. .... 413  
Красинский А.Я. .... 385  
Краснолуцкий С.Л. .... 436  
Краснюк А.А. .... 212  
Кручинина А.П. .... 414  
Крылова А.С. .... 416  
Крылова Е.Г. .... 420  
Кудрявцева В.В. .... 213  
Кузнецов М.М. .... 258  
Кузнецов Н.В. .... 68  
Кузьмин А.Г. .... 215  
Кукуджанов К.В. .... 324  
Кулешов А.С. .... 112  
Кулешова Ю.Д. .... 258  
Кулижников Д.А. .... 60  
Кунова О.В. .... 264  
Курбатова Г.И. .... 217  
Курочкин В.Ю. .... 379, 387  
Кустова Е.В. .... 244, 246, 260, 264,  
266, 269, 280  
Кутеева Г.А. .... 169, 445, 448  
Кучеренко Д.В. .... 418

**Л**

Латонов В.В. .... 389  
Лашков В.А. .... 201, 274  
Лебедева В.А. .... 403  
Лебедева Е.А. .... 403  
Левитин А.Л. .... 324  
Лежнев Е.В. .... 276, 438  
Лещенко Д. Д. .... 113  
Лобачев М.П. .... 218  
Любимов Д.Н. .... 276, 438  
Любомиров Я.М. .... 326

**М**

Макиева Э.И. .... 133  
Маламанов С.Ю. .... 268  
Марков Д. .... 204  
Машек И.Ч. .... 201, 274

Мелкумова Е.В. .... 450  
 Мельник М.Ю. .... 269  
 Меньшова И.В. .... 320  
 Мехоношина М.А. .... 266  
 Минглибаев М.Дж. .... 152, 154  
 Миронов А.С. .... 101  
 Могилевский Е.И. .... 220  
 Моисеев А.А. .... 190, 222, 236  
 Моисеева И.Н. .... 424  
 Морозов А.Н. .... 422  
 Морозов В.А. .... 407, 432  
 Морозов В.М. .... 148  
 Морозов Н.Ф. .... 46, 60, 313  
 Муравьев А.С. .... 115  
 Муратиков К.Л. .... 46  
 Мырзаев Р.С. .... 176

**Н**

Нагнибеда Е.А. .... 255, 264  
 Накрохин С.А. .... 70  
 Наумова Н.В. .... 328  
 Недин Р.Д. .... 305  
 Нестерова О.П. .... 119  
 Нестерчук Г.А. .... 330  
 Ни А.В. .... 385  
 Никонова Е.А. .... 79  
 Новодерова А.П. .... 83  
 Носковец А.А. .... 307

**О**

Облапенко Г.П. .... 246  
 Окулова Д.Д. .... 331  
 Окунев Ю.М. .... 391  
 Орехов А.В. .... 287, 333, 452  
 Остропико Е.С. .... 336

**П**

Павилайнен Г.В. .... 287, 338, 454  
 Павленко О.В. .... 194, 199, 224  
 Павловский В.А. .... 226  
 Панфилов С.В. .... 63, 227  
 Паршина Л.В. .... 346

Патель И.К. .... 156  
 Паутов А.А. .... 420  
 Перегудова О.А. .... 139, 365  
 Петров А.В. .... 194, 199, 224  
 Петров Н.А. .... 169  
 Петрова В.И. .... 121  
 Петровичева Ю.В. .... 139  
 Пигусов Е.А. .... 194, 224  
 Пилюгина С.К. .... 363  
 Платонов А.В. .... 393  
 Плешков В.Н. .... 301  
 Поляхова Е.Н. .... 158  
 Помяткин С.П. .... 340  
 Потехина Е.А. .... 188  
 Потоцкая И.Ю. .... 158  
 Привалова О.Г. .... 391  
 Прозорова Э.В. .... 271  
 Прошкин В.А. .... 160

**Р**

Рак М.Г. .... 148  
 Рачков А.А. .... 75  
 Ренев М.Е. .... 201, 274  
 Родников А.В. .... 162  
 Рожков М.А. .... 164  
 Романюк Д.А. .... 63  
 Рудакова Т.В. .... 454  
 Рудниченко А.А. .... 218  
 Рудяк В.Я. .... 276, 436, 438  
 Рулева Л.Б. .... 229  
 Рухмаков Д.И. .... 282  
 Рыдалевская М.А. .... 278  
 Рябинин А.Н. .... 210, 231, 397  
 Рябов В.М. .... 343, 346

**С**

Сабанеев В.С. .... 454  
 Савелова К.Э. .... 233  
 Савельев А.С. .... 280  
 Савин А.В. .... 190, 222, 234, 236  
 Сазонов К.Е. .... 430  
 Сальникова Т.В. .... 150, 166, 171

Самохин А.С. .... 91, 166  
 Самохина М.А. .... 91  
 Самсонов В.А. .... 87, 391  
 Сапач Ю.О. .... 420  
 Сафронова А.А. .... 403  
 Севастьянов Я.А. .... 432  
 Седова О.С. .... 331  
 Селюцкий Ю.Д. .... 395, 405  
 Семёнов Б.Н. .... 46, 313  
 Семенова Ю.Д. .... 403  
 Сергеев А.В. .... 234  
 Сергеева Н.В. .... 301  
 Сидоренко В.В. .... 167  
 Симоненко М.М. .... 215  
 Синильщикова Г.А. .... 448  
 Смирнов А.Л. .... 303  
 Смирнов А.С. .... 92, 115, 123, 457  
 Смирнов В.М. .... 313  
 Смирнов Е.М. .... 238, 422  
 Смирнов П.Г. .... 190, 222, 234, 236  
 Смирнов С.И. .... 238  
 Смирнова Н.В. .... 125  
 Смоленцев С.С. .... 190, 222, 236  
 Смольников Б.А. .... 123, 457  
 Соколов Л.Л. .... 169  
 Солодовников С.И. .... 229  
 Солтаханов Ш.Х. .... 39, 459  
 Старинова О.Л. .... 164  
 Стасенко А.Л. .... 186  
 Степанов С.Я. .... 150, 171  
 Степенко Н.А. .... 158  
 Супрунович А.А. .... 422  
 Сурова М.Ю. .... 299  
 Сухов Е.А. .... 127

**Т**

Тань Лэй .... 244  
 Тимофеев В.А. .... 236  
 Тимохин М.Ю. .... 282  
 Титов В.Б. .... 174  
 Тихомолова Л.Г. .... 422

Тихоненкова О.В. .... 403  
 Тихонов А.А. 30, 145, 156, 172, 360  
 Тихоновец А.В. .... 258  
 Товстик П.Е. .... 60, 459  
 Товстик Т.М. .... 60  
 Товстик Т.П. .... 60  
 Трифоненко Б.В. .... 448  
 Турешбаев А.Т. .... 158, 176  
 Тучин А.Г. .... 50  
 Тхай В.Н. .... 129, 176, 367

**У**

Угурчиев У.Х. .... 324  
 Уздин А.М. .... 119

**Ф**

Федоров В.М. .... 362  
 Федорова М.Ю. .... 119  
 Федоровский Г.Д. .... 342  
 Филипов С.Б. ... 55, 319, 348, 413

**Х**

Халидов И.А. .... 183  
 Хватов А.А. .... 192  
 Хлопков Е.А. .... 307  
 Холостова О.В. .... 131  
 Хоронжук Р.С. .... 201  
 Хохрякова А.А. .... 362  
 Хубулава Г.Г. .... 422

**Ц**

Циркунов Ю.М. .... 63, 227

**Ч**

Чекина Е.А. .... 134  
 Черкасов О.Ю. .... 125, 133  
 Чернышов М.В. .... 185, 208, 233  
 Чинь Т.Н. .... 194  
 Чура А.С. .... 160

**Ш**

Шаламов И.Ю. .... 278  
 Шалимов В.П. .... 208

Шамолин М.В. ....	136
Шарков Н.А. ....	461
Шаркова О.А. ....	461
Шиманчук Д.В. ....	178, 379, 387
Шишкина И.А. ....	240
Шмигирилов Р.В. ....	397
Шмыров А.С. ....	178
Шмыров В.А. ....	178
Штейн А.А. ....	424

**Э**

Эскин Б.Б. ....	169
-----------------	-----

**Ю**

Юлдашев А.А. ....	385
Юров В.О. ....	305
Юхнев А.Д. ....	422
Юшков М.П. ....	39, 448, 459

**Я**

Яковлев А.Б. ....	172, 180, 440
Ярцев Б.А. ....	326, 343, 346
Яценко А.А. ....	185

Научное издание

## **IX Поляховские чтения**

**Материалы международной научной конференции по механике**

Компьютерная верстка: Орехов А.В.

