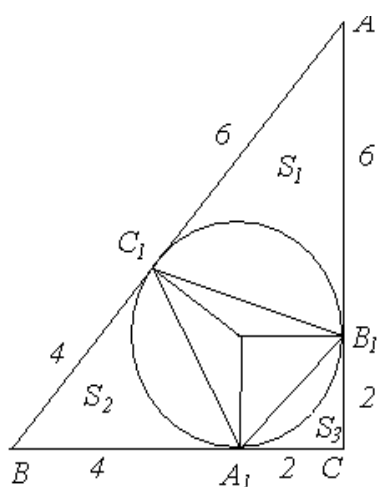


АРИФМЕТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯҒА БЕРІЛГЕН КЕЙБІР КҮРДЕЛІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШУ ЖОЛДАРЫ

Садықов Ж. С., Әбдібекова К. Ж., Дауытова Ж. Қ.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Қарастырғалы отырған есептеріміз күрделілігі жағынан үшінші топқа жатады. Оларды шешу барысында тыңдаушы оқытушының сілтеуімен (қажет болған жағдайда) прогрессияның анықтамасын, негізгі қасиеттерін, Герон формуласын, үшбұрыштың ауданын, оның периметрі мен іштей сызылған шеңбердің радиусы арқылы дөңгелектің ауданының формуласын еске түсіру, иррационал сандар орналасқан өрнекті тиімді түрлендіруге машықтану ізденімпаздық пен ұқыптылыққа үйретеді.



1-мысал. ABC үшбұрышының қабырғалары арифметикалық прогрессия құрайды, периметрі 24 см. Кіші қабырғасынан 2-ні шегеріп, үлкен қабырғасына 6-ны қосып, ортаңғы қабырғасын өзгеріссіз қалдырса, оның қабырғаларының ұзындығы геометриялық прогрессия құрар еді. $A_1B_1C_1$ үшбұрышының ауданы неге тең болады?

Жауабы: $2,8 \text{ см}^2$.

Шешуі: $\triangle ABC$ -ң қабырғаларын сәйкесінше a, b, c арқылы белгілейік.

$$2p = 24,$$

$$a - 2, b, c + 6.$$

$A_1B_1C_1$ - жанасу нүктелері. $S_{A_1B_1C_1}$ -?

$$3b = 24, b = 8 \text{ см.}$$

$$8 - d, 8, 8 + d;$$

$$8 - d - 2, 8, 8 + d + 6;$$

$$6 - d, 8, 14 + d;$$

$$(6 - d)(14 + d) = 64 \Rightarrow -d^2 - 8d + 84 = 0,$$

$$d^2 + 8d - 20 = 0; d = -4 \pm 6; d = 2.$$

$$a = 8 - 2 = 6; b = 8; c = 8 + 2 = 10.$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \angle C = 90^\circ.$$

$$\text{Енді } S_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24; b = 12; r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2; r = 2.$$

$$S_3 = r^2 = 4; BA_1 = BC_1 = a - r = 4; AC_1 = AB_1 = 10 - 4 = 6;$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0,6; \sin B = \frac{8}{10} = 0,8.$$

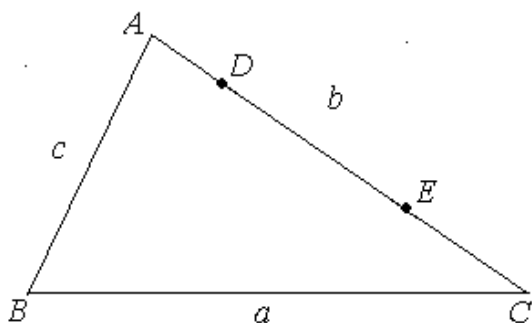
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{6}{10} = 10,8; S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{8}{10} = \frac{64}{10} = 6,4.$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 10,8 + 6,4 + 4 = 21,2 \text{ см}^2.$$

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - (S_1 + S_2 + S_3) = 24 - 21,2 = 2,8 \text{ см}^2.$$

2-мысал. ABC үшбұрышының a, b, c қабырғаларының мәндері арифметикалық прогрессия құрайды. Егер бірінші және екінші қабырғаларының ұзындықтарынан 8 бен 4-ті шегеріп, үшінші қабырғасының ұзындығына 5-ті қосса, онда үш қабырғасының мәндері геометриялық прогрессия құрайды. Ортаншы AC қабырғасын D және E нүктелері $AD:DE:EC = 1:4:2$ қатынасында бөлген. Егер $DE = 8$ см болса ABC үшбұрышының ауданы неге тең? Іштей сызылған шеңбердің радиусы қандай?

Жауабы: $S = 84 \text{ см}^2, r = 4 \text{ см}.$



Шешуі. $\div a, b, c; AD:DE:EC = 1:4:2; DE = 8;$
 $a - 8, \quad b - 4, \quad c + 5;$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{1}{6}; \frac{AE}{EC} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Сонда } AD = \frac{AC}{7}; \quad AE = \frac{5AC}{7};$$

$DE = AE - AD = \frac{5AC}{7} - \frac{AC}{7} = \frac{4AC}{7} = 8; AC = b = 14 \text{ см}.$ Арифметикалық прогрессияның айырымы d десек, $a = 14 - d; b = 14; c = 14 + d.$ Есептің шартында $14 - d - 8; 14 - 4; 14 + d + 5$ геометриялық прогрессия мүшелері. Оның негізгі қасиеті бойынша $\frac{10}{6-d} = \frac{19+d}{10}.$ Осы пропорциядан $d^2 + 13d - 14 = 0;$

$$d^2 - d + 14d - 14 = d(d - 1) + 14(d - 1) = (d - 1)(d + 14) = 0;$$

$$d_1 = 1, \quad d_2 = -14.$$

Есептің шартын $d = 1$ мәні ғана қанағаттандырады. Ендеше $a = 14 - d = 13; c = 14 + d = 15.$ Сонымен, берілген үшбұрыштың қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см. Герон формуласында $p = \frac{a+b+c}{2} = 21.$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{21 \cdot (7 \cdot 3)(8 \cdot 2)} = 21 \cdot 4 = 84. \quad S = 84 \text{ см}^2.$$

Екінші сұрақтың жауабы $S = p \cdot r$ формуласынан $84 = 21 \cdot r, r = 4 \text{ см}^2$.
Егер h_b биіктігін сұраса,

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b; \quad 84 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_b; \quad h_b = 12 \text{ см.}$$

Жоғарыдағы есепте AD мен EC –нің мәндерін сұраса,

$$AD = \frac{1}{7}AC = \frac{1}{7} \cdot 14 = 2 \text{ см}, \quad EC = \frac{2}{7}AC = 4 \text{ см.}$$

$$\sin A - ? \quad \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = S; \quad \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 \cdot \sin A = 84;$$

$$\sin A = \frac{2 \cdot 84}{15 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 6}{15} = \frac{4}{5}; \quad \sin A = \frac{4}{5}; \quad \cos A = \frac{3}{5};$$

$$\sin C - ? \quad \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB \cdot \sin C = S; \quad \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \sin C = 84;$$

$$\sin C = \frac{2 \cdot 84}{14 \cdot 15} = \frac{2 \cdot 6}{15} = \frac{4}{5}; \quad \sin C = \frac{4}{5}; \quad \cos C = \frac{3}{5};$$

$$\sin B - ? \quad \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = S; \quad \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 15 \cdot \sin B = 84;$$

$$\sin B = \frac{2 \cdot 84}{13 \cdot 15} = \frac{2 \cdot 28}{13 \cdot 5} = \frac{56}{65};$$

$$b = 2R \sin \beta; \quad 14 = 2R \cdot \frac{56}{65} \Leftrightarrow 65 = 2R \cdot 4; \quad R = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8} = 8,125.$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{13 \cdot 15}{4 \cdot 6} = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{65}{8} !!!$$

$$BC = a = 2R \cdot \sin A; \quad 13 = 2R \cdot \frac{4}{5}; \quad R = \frac{65}{8};$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 2}{65} = 14 \cdot 3 \cdot 2 = 84 \text{ см}^2.$$

3-мысал. ABC үшбұрышының қабырғаларының ұзындықтарының мәндері арифметикалық прогрессия құрайды. Қабырғаларының қосындысы $21\sqrt{2}$ см, ауданы 42 см^2 . Қабырғаларының ұзындықтарын, B төбесінен жүргізілген биіктігін, үшбұрышқа іштей сызылған дөңгелектің ауданын табу керек.

Шешуі. $\triangle ABC$, $\div a, b, c$; $a + b + c = 21\sqrt{2}$; $S_{ABC} = 42 \text{ см}^2$.

a —? b —? c —? $S_{\text{дөңгелек}}$ —? h_b —?

Арифметикалық прогрессияның негізгі қасиеті бойынша

$$2b = a + c; \quad 3b = 21\sqrt{2}; \quad b = 7\sqrt{2};$$

Прогрессияның айырымы d болса,

$$a = b - d = 7\sqrt{2} - d; \quad c = b + d = 7\sqrt{2} + d;$$

Герон формуласын пайдаланып d — ның мәнін анықтаймыз:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$p = \frac{21\sqrt{2}}{2} = \frac{21}{\sqrt{2}}; \quad p - a = p - 7\sqrt{2} + d = \frac{21}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} + d = \frac{7+\sqrt{2}d}{\sqrt{2}};$$

$$p - b = \frac{21}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} = \frac{7}{\sqrt{2}}; \quad p - c = \frac{21}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{2} - d = \frac{7-\sqrt{2}d}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{21}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7+\sqrt{2}d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7-\sqrt{2}d}{\sqrt{2}} = 42^2; \quad \frac{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot (49-2d^2)}{16} = 21 \cdot 21; \quad 49 - 2d^2 = 3 \cdot 16;$$

$$d = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0,5\sqrt{2};$$

$$a = 7\sqrt{2} - d = 7\sqrt{2} - 0,5\sqrt{2} = 6,5\sqrt{2}; \quad c = 7\sqrt{2} + d = 7,5\sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = S \text{ теңдігінен } \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot h_b = 42; \quad h_b = 12\sqrt{2}.$$

$S = pr$ формуласынан $42 = \frac{21}{\sqrt{2}} \cdot r$; $r = 2\sqrt{2}$ — іштей сызылған шеңбердің радиусы. Дөңгелектің ауданы $S = \pi r^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ см}^2$.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Садықов Ж. С., Садықова А. Ж., Дауытова Ж. Қ. Геометрия. 1-бөлім. Алматы. 2009 ж.