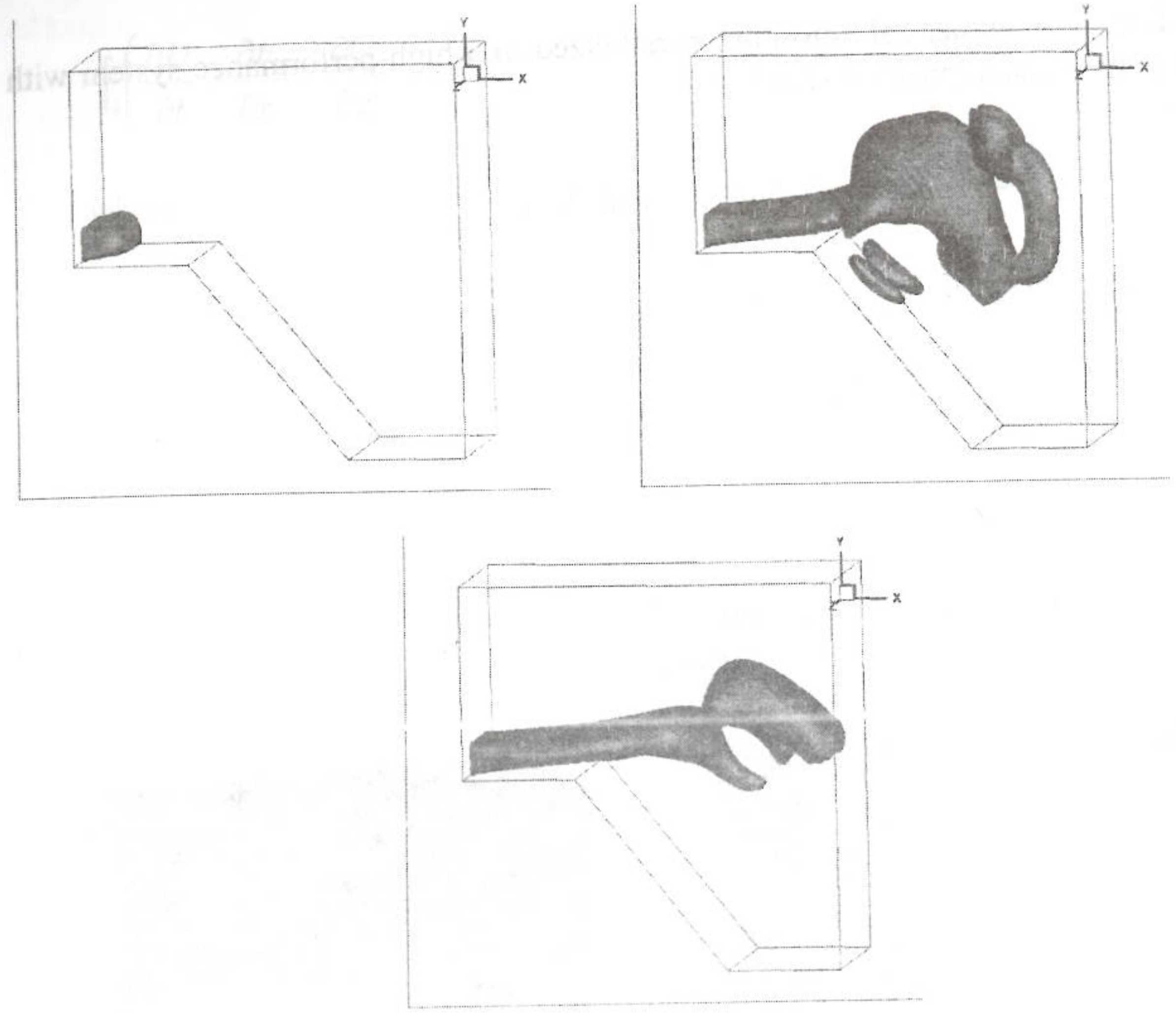

Figure 3 Distribution of isosurface of the kinetic energy at different times

References

1. Anderson, J.D., Jr. Computational Fluid Dynamics. New York: McGraw-Hill. 1995
2. Anderson, D.A., Tannehil, J.C., and Pletcher, R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. New York: McGraw-Hill. 1984
3. Chung, T.J. Computational Fluid Dynamics. Cambridge university press. 2002
4. Fletcher, C.A. Computational Techniques for Fluid Dynaimics. Vol 1: Fundamental and General Techniques, Berlin: Springer-Verlag. 1988
5. Fletcher, C.A. Computational Techniques for Fluid Dynaimics. Vol 2: Special Techniques for Differential Flow Categories, Berlin: Springer-Verlag. 1988
6. Hinze, J.O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory. New York: McGraw-Hill. 1959
7. Karniadakis, G. E. Parallel Scientific Computing in C++ and MPI. 2000
8. Pacheco, P.Parallel Programming with MPI. Morgan Kaufmann. 1996
9. Peyret, R., Taylor, D. Th. Computational Methods for Fluid Flow. New York: Berlin: Springer-Verlag. 1983

10. Pope, S. B.Turbulent Flows. Cambridge University Press. 2000
11. Roache, P.J. Computational Fluid Dynamics, Albuquerque, NM: Hermosa Publications. 1972
12. Tannehill, J.C., Anderson, D.A., and Pletcher, R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd ed., New York: McGraw-Hill. 1997
13. Tennekes, H., Lumley, J.L. A first course in turbulence. The MIT Press. 1972
14. Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method Issue 4 (2011) *J. Phys.: Conf. Ser.* 318 042051
15. Issakhov A., Zhumagulov B. Parallel implementation of numerical methods for solving turbulent flows Вестник НИА РК. – 2012, – № 1(43) – С.12-24

УДК 517.946

Гулнар Дилдабек

ЗАДАЧА С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Уравнения магнитной газовой динамики с учетом пористости среды в массовых лагранжевых координатах имеют вид /1/:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad v=\frac{1}{\rho},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-\mu_l H\frac{\partial H}{\partial x}-\beta(x)|u|^{6}u, \quad p=k\frac{\theta}{v}, \tag{1}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)-p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu_l\mu_H}{v}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(vH)=\mu_H\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Здесь v, u, θ, H, ρ, p – соответственно удельный объем, скорость, абсолютная температура, напряженность магнитного поля, плотность и давление – искомые функции пространственной переменной x, $x\in R=(-\infty;\infty)$ и времени t, $t\in[0,T]$, $0<T<\infty$; μ, k, λ, μ_l, μ_H – положительные постоянные, которые в дальнейшем, для простоты, будем предполагать равными единице; $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int_{-\infty}^{\infty}\beta(x)dx\le C$; $0\le\alpha\le 1$.

В начальный момент $t=0$ все характеристики среды известны:

$$u|_{t=0}=u_0(x), \ \theta|_{t=0}=\theta_0(x), \ H|_{t=0}=H_0(x), \ v|_{t=0}=v_0(x), \quad x\in[0,1], \tag{2}$$

причем $(\rho^0, u^0, \theta^0, H^0)$ – непрерывные, (ρ^0, θ^0) – ограниченные функции

$$0 < m_0 \le (\theta_0(x), v_0(x)) \le M_0 < \infty.$$

Искомые функции удовлетворяют граничным условиям:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x} - p\Big|_{x=0} = \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x} - p\Big|_{x=1} = H\big|_{x=0} = H\big|_{x=1} = 0 \qquad (3)$$

$$\theta\big|_{x=0} = \chi_0(t), \quad \theta\big|_{x=1} = \chi_1(t),$$

$$\chi_i(t) \in W_2^1(0,T), \quad \chi_i(t) \ge m_0 > 0, \quad \chi_i(0) = \theta_0(i), \quad i = 0,1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется совокупность функций* (v, u, θ, H),

$$v(t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(R)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L_\infty(0,T; L_2(R))$$

$$(u(t), \theta(t), H(t)) \in L_\infty(0,T; W_2^1(R)) \cap L_2(0,T; W_2^2(R)),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}\right) \in L_2(Q), \quad \Omega = (0,1), \quad Q = \Omega \times (0,T),$$

удовлетворяющих уравнениям (1) почти всюду в Q *и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.*

ТЕОРЕМА. *Пусть начальные данные (2) обладают следующими свойствами гладкости:*

$$(u_0, H_0, \theta_0, v_0) \in W_2^2(R).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) «в целом» по времени, причем $v(x,t)$, $\theta(x,t)$ *- строго положительные, ограниченные функции.*

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C, C_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение /2, 3/ продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$.

Приступим к выводу глобальных априорных оценок.

Из уравнений (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(x,t)$ и $\theta(x,t)$ неотрицательны.

Введем вспомогательную функцию $\theta_1(x,t)$ как решение краевой задачи /2/:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right), \quad (x,t) \in Q = (0,1)\times(0,T), \qquad (4)$$

$$\theta_1\big|_{x=0} = \chi_0(t), \quad \theta_1\big|_{x=1} = \chi_1(t), \quad \theta_1\big|_{t=0} = \theta_0(x).$$

По принципу максимума для параболических уравнений:

$$0 < m_1 \le \theta_1(x,t) \le M_1 < \infty.$$

Обозначим через $\varphi(x,t)$ новую искомую функцию:

$$\varphi(x,t) = \frac{\theta(x,t)}{\theta_1(x,t)}.$$

Система уравнений (1) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_1}{v}\varphi\right) - H\frac{\partial H}{\partial x} - \beta(x)|u|^{\alpha} u, \qquad (5)$$

$$\theta_1\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_1}{v}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{1}{v}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\theta_1}{v}\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vH) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Граничные условия примут вид:

$$\varphi\big|_{x=0} = \varphi\big|_{x=1} = 1, \quad H\big|_{x=0} = H\big|_{x=1} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \chi_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \chi_1(t),$$

$$v\big|_{x=0} = \int_0^t \chi_0(\tau)d\tau + v_0(0) = \alpha_1(t), \quad v\big|_{x=1} = \int_0^t \chi_1(\tau)d\tau + v_0(1) = \alpha_2(t),$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – строго положительные, ограниченные функции. Здесь использовалось первое уравнение системы (5).

Справедлива оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau)d\tau \le C_1, \quad \forall t \in [0,T], \qquad (7)$$

где $U(t) = \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}u^2 + \theta_1(\varphi - \ln\varphi - 1) + \frac{1}{2}vH^2\right\}dx,$

$$W(t) = \int\left\{\frac{\theta_1\varphi_x^2}{v\varphi^2} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} + \beta(x)|u|^\alpha u^2\right\}dx.$$

Докажем (7). Второе уравнение системы (1) умножим на u, третье – на $\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)$, четвертое – на H. Сложим получившиеся соотношения и проинтегрируем по x и t. При этом воспользуемся равенствами /2/:

$$\theta_1\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\theta_1(\varphi - \ln\varphi - 1)) - (\varphi - \ln\varphi - 1)\frac{\partial \theta_1}{\partial t},$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}(\varphi - \ln\varphi - 1)\right) - (\varphi - \ln\varphi - 1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right).$$

После некоторых преобразований получим соотношение

$$U(t) + \int_0^t W(\tau)d\tau \le C\left(1 + \int_0^t\int_0^1 \frac{\theta_1\varphi}{v}dxd\tau\right). \qquad (8)$$

Из уравнения теплопроводности системы (1) выводится неравенство /2, 4/:

$$\int_0^t\int_0^1 \frac{\theta_1\varphi}{v}dxd\tau \le C\left(1 + \int_0^t \max_{0\le t\le\tau} U(\tau)d\tau\right).$$

Подставляя его в (8) и применяя лемму Гронуолла, находим (7).

Аналогично /2, 4/ выводится вспомогательное соотношение между искомыми функциями:

$$v(x,t)=B^{-1}(x,t)K(x,t)\left[v_0(x)+\int_0^t\left(\theta+\frac{1}{2}vH^2\right)(x,\tau)B(x,\tau)K^{-1}(x,\tau)d\tau\right], \tag{9}$$

где

$$B(x,t)=exp\left\{\int_0^x(u_0(\xi)-u(\xi,t))d\xi\right\},\quad K(x,t)=exp\left\{\int_0^t\int_0^x\beta(\xi)|u|^\alpha u(\xi,\tau)d\xi\,d\tau\right\}.$$

Из (7) вытекают оценки:

$$C_2^{-1}\le B(x,t)\le C_2,\quad C_3^{-1}\le K(x,t)\le C_3. \tag{10}$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t)=\max_{x\in\Omega}h(x,t),\quad m_h(t)=\min_{x\in\Omega}h(x,t).$$

Из представления (9), с учетом (7), имеем

$$m_v(t)\ge C_4,\quad \int_0^1 v(x,t)dx\le C_5,\quad \forall t\in[0,T] \tag{11}$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x,t)$ и $f(x,t)$, используя граничные условия /4/: $\psi(x,t)=\chi_0(t)(1-x)+\chi_1(t)x,\quad f(x,t)=\alpha_1(t)(1-x)+\alpha_2(t)x$,

причем $0<C_6^{-1}<\psi(x)<C_6,\ \psi'_x\in W_2^1(Q)$,

$0<C_7^{-1}<\psi(x)<C_7,\quad |f'_x|<C_8,\quad f'_t\in W_2^1(0,T;L_2(\Omega))$.

Умножим уравнение (4) на $(\theta_1-\psi)$ и проинтегрируем по Q. После некоторых преобразований имеем оценку:

$$\|\theta_1(t)\|^2+\int_0^t\int_0^1\frac{\theta_{1x}^2}{v}dxd\tau\le C_9,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{12}$$

Из (7) и (12) вытекает оценка:

$$\int_0^1\theta\,dx+\int_0^t\int_0^1\frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dxd\tau\le C_{10},\quad \forall t\in[0,T].$$

Обратимся к уравнениям импульса и магнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial t}(ln v)_x=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta}{v}\right)+H\frac{\partial H}{\partial x}+\beta(x)|u|^6u,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vH)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Умножим их на $\frac{\partial\, ln v}{\partial x}$ и (vH) соответственно, проинтегрируем по Ω и сложим.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial\, ln v}{\partial x}\right)^2+(vH)^2\right]dx+\int_0^1\left[H_x^2+\frac{\theta}{v}\left(\frac{\partial\, ln v}{\partial x}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_0^1 u\frac{\partial\, ln v}{\partial x}dx+\int_0^1\frac{1}{v}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\, ln v}{\partial x}dx+\int_0^1\frac{1}{v}u_x^2dx+\int_0^1\beta(x)|u|^6u\frac{\partial\, ln v}{\partial x}dx. \tag{13}$$

Умножим второе уравнение системы (1) на u и проинтегрируем по Ω. После некоторых преобразований получим неравенство:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2dx+\int_0^1\frac{1}{v}u_x^2\,dx\le C_{11}\left(M_\theta(t)+\varepsilon\int_0^1\frac{1}{v}H_x^2dx+C_\varepsilon\right). \tag{14}$$

Умножая четвертое уравнение системы (1) на H и интегрируя по Ω, после некоторых преобразований имеем неравенство:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 vH^2dx+\int_0^1\frac{1}{v}H_x^2dx\le C_{12}\int_0^1\frac{1}{v}u_x^2dx. \tag{15}$$

Умножим (14) на $2C_{12}$ и сложим с (15). Выбирая $\varepsilon>0$ так, чтобы $2C_{11}C_{12}\varepsilon<1$, после интегрирования по t получим

$$\int_0^t\int_0^1\frac{1}{v}\left(u_x^2+H_x^2\right)dxd\tau\le C_{13}\left(1+\int_0^t M_\theta(\tau)\,d\tau\right). \tag{16}$$

Далее, рассуждая аналогично /2, 4/, выводятся оценки:

$M_v(t)\le C_{14},\ \forall t\in[0,T]$,

$$\max_{0\le t\le T}\|v_x(t)\|\le C_{15},\quad \int_0^T\left(\|u_x\|^2+\|H_x\|^2+M_\theta(t)+M_H^2(t)\right)dt\le C_{16}.$$

Умножением четвертого уравнения системы (1) на H_{xx} и интегрированием выводится оценка

$$\max_{0\le t\le T}\|H_x(t)\|^2+\int_0^T\|H_{xx}(t)\|^2dt\le C_{17}.$$

Аналогично можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Доказательство единственности производится на основе полученных априорных оценок составлением однородного уравнения относительно разности двух возможных решений.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
3. Искендерова Д.А. Локальная разрешимость краевой задачи для уравнений магнитной газовой динамики // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. – 2001. – № 3(26). – С.56–61.
4. Смагулов Ш.С., Искендерова Д.А. Математические вопросы модели магнитной газовой динамики. – Алматы: Гылым, 1997. – 166 с.