МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан,

посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования

Тезисы докладов

Алматы - 2020 год

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

академик НАН РК Кальменов Т.Ш. , председатель
к.ф.-м.н. Сахауева М.А., ученый секретарь
академик НАН РК Джумадильдаев А.С.
академик НАН РК Харин С.Н.
член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С.
член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.
профессор Джумабаев Д.С.
профессор Нурсултанов Е.Д.
профессор Тлеуберегенов М.И.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:

член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С., председатель
Адил Ж.
Байжанов С.С.
Дербисали Б.О.
доктор PhD Замбарная Т.С.
Каракенова С.Г.

Уважаемые коллеги,
в связи с введением в стране чрезвычайного положения (указ Президента Республики Казахстан от 15 марта 2020 года № 285) и объявлением карантина в городе Алматы (Постановление и.о. Главного государственного санитарного врача города Алматы от 18 марта 2020 года № 8 «О введении режима карантина на территории г. Алматы») апрельская конференция не проводится очно.
Тем не менее, Программный комитет подготовил тезисы представленных докладов, которые мы представляем в онлайн режиме на сайте конференции.

С уважением,
председатель организационного комитета Б.С. Байжанов.

Содержание

1 Алгебра, математическая логика и геометрия

Руководители: академик НАН РК Джумадильдаев А.С.
член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С.

Секретарь: PhD Замбарная Т.С.

THE EXPANSION OF A STRONGLY MINIMAL TORSION-FREE GROUP BY UNARY PREDICATE AND THE INDEPENDENCE PROPERTY

Zhanar ADIL[1,a], Bektur BAIZHANOV[2,b]

[1]Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan,
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling

[a]*zhanaradil122@gmail.com*, [b]*baizhanov@math.kz*

Theory T has the independence property (IP), if for some formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ in every model $\mathfrak{M}$ of T for each $n < \omega$, there exists a family of tuples $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$, such that for any subset I of n there exists a tuple $\bar{a_I}$ in $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a_I}, \bar{b_i}) \Leftrightarrow i \in I$. If there is no such formula, then T is said to have non-independence property (NIP). Any o-minimal theory has NIP [2]. It follows from [3] and [1] that any weakly o-minimal theory has NIP.

In the articles [1], [4] Macpherson- Marker - Steinhorn and Baizhanov proved weakly o-minimality of the expansion of an o-minimal structure by unary convex predicate. Any strongly minimal group is abelian and if it is torsion-free then it is divisible abelian group which has o-minimal ordering expansion. Thus divisible abelian group expanded by unary predicate has NIP, if this predicate is finite number of convex sets in o-minimal expansion of this group. In this case expanded divisible abelian group has locally ordering (B. Baizhanov-Ye. Vassiliev).

In our report we present examples of expansion of a divisible abelian group by a new unary predicate U^1 has Independence Property. In particular, we consider concrete expansions of $< Q; =, + >$ with IP by unary predicate with using the $\exists$-formulas in the form

$$\varphi^*(x, y_1, \ldots, y_m) := \exists z_1, \ldots, z_n(\sum_{i=1}^{n} l_i z_i + \sum_{j=1}^{m} s_j y_j = x \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} {}^{\epsilon_i}U(z_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} {}^{\varepsilon_j}U(y_j)),$$

where $\langle l_i \rangle_{i<n} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ and $\langle s_j \rangle_{j<m} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ are fixed, $\delta = \langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \in 2^n$, $\gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_m \rangle \in 2^m$, and $\epsilon_i = \neg$, if $\delta_i = 0$ and $\epsilon_i =$ empty place, if $\delta_i = 1$; $\varepsilon_j = \neg$, if $\gamma_j = 0$ and $\varepsilon_j =$ empty place, if $\gamma_j = 1$,

References

[1] A. Pillay, Ch. Steinhorn Definable sets in ordered structures I // Transactions of the American Mathematical Society, **295** *(1986), 565–592.*

[2] B. Poizat Theories instable// The Journal of Symbolic Logic, **46** *(1981), 513–522.*

[3] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society, **352** *(2000), 5435–5483.*

[4] B.S. Baizhanov, Expansions of o-minimal structures by convex unary predicates, In the book: "Research in the theory of algebraic systems" dedicated to memory of T.G. Mustafin (editor T.A. Nurmagambetov), Karaganda State University, 1995, 6–24. (in Russian)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The work is financially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant AP05134992).

TARSKI–VAUGHT TEST IN CONSTRUCTION OF COUNTABLE MODELS

Bektur BAIZHANOV, Tatyana ZAMBARNAYA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

baizhanov@math.kz, zambarnaya@math.kz

We consider small countable theories and present a method of construction of a countable model which contains a given countable set and is minimal with respect to dowries. The method is based on the Tarski—Vaught test and has useful applications in counting the number of countable non-isomorphic models [1, 2].

Let $\mathfrak{M}$ be a model of a theory T. A **dowry** (previously, **finite diagram**) of $\mathfrak{M}$ is the collection of all $\emptyset$-definable complete types that are realized in $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{D}(\mathfrak{M}) = \{p \in S(T) \mid \mathfrak{M} \models p\}.$$

Theorem. *Let $\mathfrak{M} \models T$ be a model of a small countable complete theory T. Let $B \subseteq M$ be countable. Then there exists a countable model $\mathfrak{A}^B = \mathfrak{A} \models T$ such that $B \subseteq A$ and*

1) all such $\mathfrak{A}$'s obtained by the given construction have the same dowry;

2) for every $\mathfrak{C} \models T$ with $B \subseteq C$, $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{C})$.

References

[1] A.A. Alibek, B.S. Baizhanov, T.S. Zambarnaya, *Discrete order on a definable set and the number of models* // Mathematical Journal, **14**:3 (2014), 5–13.

[2] B. Baizhanov, J.T. Baldwin, T. Zambarnaya, *Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 719–727.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

EXPANSION OF WEAKLY O-MINIMAL GROUP BY BINARY PREDICATE AND DEPENDENCE PROPERTY

Sayan BAIZHANOV

Al-Farabi Kazakh National University
Institute of mathematics and mathematical modelling

sayan-5225@mail.ru

In present thesis the question of expasnion of weakly o-minimal group in dependent theories by binary predicate is considered. Found a criteria for preserving of weak o-minimality group by binary expansion.

Thesis is related to notion of *weak o-minimality*, deeply studied in [1]. Subset A of linearly ordered structure M is called *convex*, if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ every time when $a < c < b$ we have $c \in A$. Linearly ordered structure $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ is called weakly o-minimal if every definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets in M.

The work is financially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant AP05134992).

Let $\mathfrak{M}$ be a model of an arbitrary complete theory T of the signature Σ. We say that $\mathfrak{M}_p^+$ is an expansion of $\mathfrak{M}$ by type $p \in S_1(M)$, if $\mathfrak{M}_p^+ := \langle M; \Sigma_p^+ \rangle$, where $\Sigma_p^+ := \{R_{(\psi.p)}(\bar{y}) | \psi \in \Sigma\}$.

We say that $\mathfrak{M}_p^+$ *admits uniformly representation of* Σ_p^+-formulas by Σ-formulas, if for any formula $\phi(\bar{y})$ of Σ_p^+ there exists Σ-formula $K_\phi(\bar{y}, \bar{z})$, there exists $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ such that for any $\bar{a} \in M$ the following holds:

$$\mathfrak{M}_p^+ \models \phi(\bar{a}) \iff \models K_\phi(\bar{a}, \bar{\alpha}).$$

Theorem. *Let M be a model of weakly o-minimal group theory of signature Σ. N is an elementary extension of M, $N \succ M$. $\alpha \in N \setminus M$ such that $p = tp(\alpha|M)$ is irrational. $M_\alpha^+ := \langle M; \Sigma^+ \rangle$ is an expansion of M by U^2, such that it admits uniformly representation of Σ^+-formulas by Σ-formulas. Then M^+ preserves weakly o-minimality*

Funding: The work is financially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (AP05134992).

References

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C. *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, // Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 5435–5483.

— ⁂ —

ASSOCIATIVE-ADMISSIBLE ALGEBRAS

Askar DZHUMADIL'DAEV

Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Kazakhstan, Almaty

dzhuma@hotmail.com

An algebra A is called *Lie-admissible* (LiA), if its minus algebra $A^{(-)} = (A, [\,,])$ is Lie, *associative-admissible* (AsA) if its plus-algebra $A^{(+)} = (A, \{\,,\})$ is associative, $< a, b, c >= 0$, for any $a, b, c \in A$, where $[a, b] = ab - ba, \{a, b\} = ab + ba$ and $< a, b, c >= \{a, \{b, c\}\} - \{\{a, b\}, c\}$. Non-commutative Lie algebra (NCL) is an algebra that satisfies Jacobi identity and all consequences of skew-symmetric identity in degree 3. Let us introduce some classes of algebras.

Name of algebras	identities
Reverse-associative	revas$=t_1(t_2t_3) - (t_3t_2)t_1$
Anti-reverse-associative	arevas$=t_1(t_2t_3) + (t_3t_2)t_1$
Left-weak-Leibniz	lwlei$=[t_1, t_2]t_3 - 2t_1(t_2t_3) + 2t_2(t_1t_3)$
Right-weak-Leibniz	rwlei$=t_1[t_2, t_3] - 2(t_1t_2)t_3 + 2(t_1t_3)t_2$
Weak-Leibniz	lwlei, rwlei
Non-commutative Lie *=Two-sided Leibniz*	$(t_1t_2)t_3 + (t_2t_3)t_1 + (t_3t_1)t_2$, $(t_1t_2 + t_2t_1)t_3$, revas

Theorem 1. *Associative-admissible operad is Koszul and its dual is non-commutative Lie operad, $AsA^! = NCL$. Dimensions of multilinear parts of AsA in degree n is equal to*

$$\left(\frac{1+x}{1-x-x^2}\,\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\frac{1+x}{1-x-x^2}\right)\Bigg|_{x->0}.$$

Let $AsLiA = AsA \cap LieA$ be associative- and Lie-admissible operad. Then $AsLiA$ is Koszul. Its Koszul dual is reverse-associative and (one-sided) weak-Leibniz operad, $AsLiA^! = RevAs \cap LwLei$. Dimensions of multi-linear parts of $AsLiA$ in degree n is equal to

$$\left(\frac{e^x(1+x)}{1+(1-e^x)x}\,\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\frac{e^x(1+x)}{1+(1-e^x)x}\right)\Bigg|_{x->0}.$$

Example. Let $U = K[x]$ and $a \star b = a\partial(b) - \partial(a)b + uab$, for some $u \in U$. Then $(U, \star)$ is weak-Leibniz. It is associative-admissible and Lie-admissible.

Well known that if Leibniz algebra is simple, then it is Lie. Any Leibniz algebra is weak-Leibniz. Our example shows that the class of weak Leibniz algebras contains simple algebras, that are not Leibniz and not Lie.

Theorem 2. *Weak Leibniz operad is self-dual,* $WLei^! = WLei$, *but it is not Koszul.*

Theorem 3. *Reverse-asociative operad is Koszul and* $RevAs^! = ARevAs$. *Let* X *be set of generators,* $F(X)$ *free reverse-associative algebra,* $Com(X)$ *free commutative algebra and* $ACom(X)$ *free anti-commutative algebra. Then* $F(X) \cong Com(X) + ACom(X)$ *and* $Com(X) \cap ACom(X) = X$. *In particular, dimensions of multi-linear parts of free reverse-associative algebra in degree* $n > 1$ *is* $2(2n-3)!!$.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON PSEUDOFINITENESS OF ACYCLIC GRAPHS

Nurlan MARKHABATOV

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

nur_24.08.93@mail.ru

We continue to study topological properties of various structures [3, 2, 3, 4]. In this paper, we consider acyclic graphs.

Definition [6]. An infinite structure $\mathcal{M}$ is *pseudofinite* if every sentence true in $\mathcal{M}$ has a finite model. If $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ for pseudo-finite $\mathcal{M}$ then T is called pseudofinite as well.

Definition. A graph that contains no cycles is called an *acyclic graph.* A connected acyclic graph is called a *tree.* Any graph without cycles is also called a *forest* so that the components of a forest are trees.

Paths are trees. A tree is a path if and only if its maximum degree is 2. A *ray* in an infinite graph is a semi-infinite simple path. If there is a path from the vertex a to the vertex b, then a is called the *ancestor (predecessor)* of the vertex b, and b is called the *descendant (successor)* of the vertex a. Moreover, if $(a, b) \in R$, then a is called the *true ancestor (father)* of the vertex b, and b is the *true descendant (son)* of the vertex a. A vertex without true descendants is called a *leaf* or *pendant.* It is known that every nontrivial tree has at least two pendant vertices.

Definition [5]. For a fixed vertex a, the value $e(a) \rightleftharpoons max\{\rho(a,b) | b \in M\}$ is called the *eccentricity* of the vertex a. The eccentricity of the vertex is equal to the distance from this vertex to the most distant from it. The maximum among all the eccentricities of the vertices is called the *diameter* of the graph G and is denoted by $d(G) : d(G) \rightleftharpoons max\{e(a) | a \in M\}$. The vertex a is called *peripheral* if $e(a) = d(G)$. The minimal eccentricity of the graph G is called its *radius* and is denoted by $r(G) : r(G) \rightleftharpoons min\{e(a) | a \in M\}$. The vertex a is called *central* if $e(a) = r(G)$. The set of all central vertices of a graph is called its *center.*

Let $\mathcal{G}$ be a tree. Its theory $T = Th(\mathcal{G})$ can be axiomatized in the language $\Sigma = \{R\}$ by sentences

i. $\forall a\big(\neg(a \sim a)\big)$ (not contain loops)

ii. $\forall a \forall b(a \sim b \Rightarrow b \sim a)$ (edges are undirected).

Theorem 1. *Let* T *be a pseudofinite theory of an acyclic graph with finitely many pendant verteces. Then the following conditions hold:*

(1) T *has an even number of rays;*

This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132349).

(2) each connected component of some model of T has a pendant vertex or a vertex of dergee ≥ 3.

Corollary. *There is a theory T of acyclic graph which is not pseudofinite.*

Theorem 2. *Any theory T of an infinite acyclic graph (tree) of finite diameter is pseudofinite with respect to acyclic graphs (trees).*

References

[1] S.V. Sudoplatov, *Approximations of theories* //arXiv:1901.08961v1 [math.LO], 2019, available at: https://arxiv.org/abs/1901.08961

[2] N. D. Markhabatov, *Pseudofiniteness of locally free algebras*// Algebra and Model Theory 12, Collection of papers // eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov, Novosibirsk: NSTU, 2019, 4146.

[3] N.D. Markhabatov, *Ranks for Families of Permutation Theories* //The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **28**, (2019), 85–94. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.85

[4] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Ranks and approximations for families of ordered theories* // Algebra and Model Theory 12. Collection of papers // eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov. Novosibirsk: NSTU, 2019, pp. 32–40.

[5] S.V. Sudoplatov, *Discrete mathematics :* Tutorial / S. V. Sudoplatov, E. V. Ovchinnikova, Moscow : Urait, 2020, 280 p. [in Russian]

[6] E. Rosen, *Some Aspects of Model Theory and Finite Structures* // The Bulletin of Symbolic Logic, vol. **8**, no. 3 (2002), pp. 380–403.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON TOPOLOGIES AND RANKS FOR FAMILIES OF THEORIES

Nurlan MARKHABATOV, Sergey SUDOPLATOV

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

We continue to study structural and topological properties for families of theories [1, 2, 3, 4, 5, 6], possibly incomplete, and generalize the notions of rank and degree that were defined before for families of complete theories [7, 8, 9, 10, 11].

Definition [12]. A *topological space* is a pair $(X, \mathcal{O})$ consisting of a set X and a family $\mathcal{O}$ of *open* subsets of X satisfying the following conditions:
(O1) $\varnothing \in \mathcal{O}$ and $X \in \mathcal{O}$;
(O2) If $U_1 \in \mathcal{O}$ and $U_2 \in \mathcal{O}$ then $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$;
(O3) If $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ then $\cup\mathcal{O}' \in \mathcal{O}$.

Definition [12]. A topological space $(X, \mathcal{O})$ is a T_0-*space* if for any pair of distinct elements $x_1, x_2 \in X$ there is an open set $U \in \mathcal{O}$ containing exactly one of these elements.

This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132349, AP05132546), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

Definition [12]. A topological space $(X,\mathcal{O})$ is a T_1-*space* if for any pair of distinct elements $x_1,x_2\in X$ there is an open set $U\in\mathcal{O}$ such that $x_1\in U$ and $x_2\notin U$.

Definition [12]. A topological space $(X,\mathcal{O})$ is a T_2-*space*, or *Hausdorff* if for any pair of distinct points $x_1,x_2\in X$ there are open sets $U_1,U_2\in\mathcal{O}$ such that $x_1\in U_1$, $x_2\in U_2$, and $U_1\cap U_2=\varnothing$.

Definition. Let $\mathcal{T}$ be a family of first-order theories, $(\mathcal{T},\mathcal{O})$ be a topological space with the system of open sets $\mathcal{T}_\varphi=\{T\in\mathcal{T}\mid\varphi\in T\}$. These open sets are called *s-definable* subfamilies of $\mathcal{T}$.

Theorem 1. 1. *Any topological space* $(\mathcal{T},\mathcal{O})$ *is a* T_0-*space.*

2. *A family* $\mathcal{T}$ *forms a* T_1-*space if and only if* $\mathcal{T}$ *does not contain theories* T *and* T' *with* $T\subsetneq T'$.

3. *A topological* T_1-*space* $(\mathcal{T},\mathcal{O})$ *is Hausdorff if and only if for any distinct theories* $T,T'\in\mathcal{T}$ *there are sentences* $\varphi\in T$, $\psi\in T'$ *such that the sentence* $\varphi\wedge\psi$ *is* $\mathcal{T}$-*inconsistent.*

Any boolean combination of s-definable subfamilies of $\mathcal{T}$ is reduced to unions of sets of form $\mathcal{T}_\varphi\cap\overline{\mathcal{T}_{\psi_1}}\cap\ldots\cap\overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$, which, in general case, can not be written shorter. These boolean combinations are called Bs-*definable* subfamilies of $\mathcal{T}$.

Below we define the rank $\overline{\rm RS}$ and degree $\overline{\rm ds}$ generalizing RS and ds and counting more adequate complexity measures for families $\mathcal{T}$ of incomplete theories.

Definition. An infinite family $\mathcal{T}$ of (possibly incomplete) theories is called $\overline{e}$-*minimal* if for any sentence $\varphi\in\Sigma(\mathcal{T})$, $\mathcal{T}_\varphi$ is finite or $\overline{\mathcal{T}_\varphi}=\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_\varphi$ is finite.

Definition. For the empty family $\mathcal{T}$ we put the rank $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=-1$, and for finite nonempty families $\mathcal{T}$ we put $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=0$.

For a family $\mathcal{T}$ and an ordinal $\alpha=\beta+1$ we put $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ if there are pairwise disjoint Bs-definable subfamilies $\mathcal{T}_n$ of $\mathcal{T}$, $n\in\omega$, such that $\overline{\rm RS}(\mathcal{T}_n)\geq\beta$, $n\in\omega$.

If α is a limit ordinal then $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ if $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})\geq\beta$ for any $\beta<\alpha$.

We set $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=\alpha$ if $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ and $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})\not\geq\alpha+1$.

If $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ for any α, we put $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=\infty$.

A family $\mathcal{T}$ is called $\overline{e}$-*totally transcendental* if $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})$ is an ordinal.

If $\mathcal{T}$ is $\overline{e}$-totally transcendental, with $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=\alpha\geq0$, we define the *degree* $\overline{\rm ds}(\mathcal{T})$ of $\mathcal{T}$ as the maximal number of pairwise disjoint Bs-definable subfamilies $\mathcal{T}_i$ such that $\overline{\rm RS}(\mathcal{T}_i)=\alpha$.

By the definition, if $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=\alpha$ then $\overline{\rm ds}(\mathcal{T})\in\omega\setminus\{0\}$.

Proposition 1. *A family* $\mathcal{T}$ *is* $\overline{e}$-*minimal if and only if* $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=1$ *and* $\overline{\rm ds}(\mathcal{T})=1$.

Definition (cf. [13, 14]). A theory T is called *positive* if T is axiomatized by positive sentences, i.e., sentences without symbols $\neg$, $\to$.

Theorem 2. *For any ordinal* α *and natural* $n\neq0$ *there is a family* $\mathcal{T}$ *of positive theories such that* $(\overline{\rm RS}(\mathcal{T}),\overline{\rm ds}(\mathcal{T}))=(\alpha,n)$.

Definition. Let α be an ordinal. A family $\mathcal{T}$ of $\overline{\rm RS}$-rank α is called $\overline{\alpha}$-*minimal* if for any sentence $\varphi\in\Sigma(T)$, $\overline{\rm RS}(\mathcal{T}_\varphi)<\alpha$ or $\overline{\rm RS}(\overline{\mathcal{T}_\varphi})<\alpha$.

Proposition 2. (1) *A family* $\mathcal{T}$ *is* $\overline{0}$-*minimal if and only if* $\mathcal{T}$ *is a singleton.*

(2) *A family* $\mathcal{T}$ *is* $\overline{1}$-*minimal if and only if* $\mathcal{T}$ *is* $\overline{e}$-*minimal.*

(3) *For any ordinal* α *a family* $\mathcal{T}$ *is* $\overline{\alpha}$-*minimal if and only if* $\overline{\rm RS}(\mathcal{T})=\alpha$ *and* $\overline{\rm ds}(\mathcal{T})=1$.

References

[1] S.V. Sudoplatov, *Combinations of structures* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **24** (2018), 65–84.

[2] S.V. Sudoplatov, *Closures and generating sets related to combinations of structures* // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **16** (2016), 131–144.

[3] S.V. Sudoplatov, *Approximations of theories* // arXiv:1901.08961v1 [math.LO], 2019, 16 pp.

[4] N.D. Markhabatov, S.V. Sudoplatov, *Definable families of theories, related calculi and ranks* // arXiv:1901.11011v1 [math.LO], 2019, 20 pp.

[5] N.D. Markhabatov, S.V. Sudoplatov, *Algebras for definable families of theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 600–608.

[6] In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *Approximations for Theories of Abelian Groups* // Mathematics and Statistics, **8**:2 (2020), 220–224.

[7] S.V. Sudoplatov, *Ranks for families of theories and their spectra* // arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019, 17 pp.

[8] N.D. Markhabatov, S.V. Sudoplatov, *Ranks for families of all theories of given languages* // arXiv:1901.09903v1 [math.LO], 2019, 9 pp.

[9] N.D. Markhabatov, *Ranks for families of permutation theories* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **28** (2019), 85–94.

[10] In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *Ranks for families of theories of abelian groups* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **28** (2019), 95–112.

[11] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Ranks and approximations for families of ordered theories* // Algebra and Model Theory 12. Collection of papers // eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov. Novosibirsk: NSTU, 2019, pp. 32–40.

[12] R. Engelking, *General topology* // Berlin : Heldermann Verlag, 1989, 529 p.

[13] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin, *Mathematical logic* // Moscow : FIZMATLIT, 2011, 356 pp. [in Russian]

[14] B. Poizat, A. Yeshkeyev, *Positive Jonsson Theories* // Logica Universalis, **12**:1–2 (2018), 101–127.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SPECIAL GELFAND–DORFMAN ALGEBRAS AND NON-KOSZULITY OF GELFAND–DORFMAN OPERAD

Bauyrzhan SARTAYEV

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

baurjai@gmail.com

A linear space V with two binary operations $\circ$ and $[\cdot,\cdot]$ is called *Gelfand–Dorfman algebra* if $\circ$ is a Novikov algebra and $[\cdot,\cdot]$ is a Lie algebra and additional identity holds:

$$b \circ [a,c] = [a, b \circ c] - [c, b \circ a] + [b,a] \circ c - [b,c] \circ a,$$

where *Novikov algebra* is a linear space with bilinear operation $\circ : A \times A \to A$, which satisfies the following identities:

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c),$$
$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b.$$

Denote by Pois the variety of all Poisson algebras, and let PoisDer stand for the variety of differential Poisson algebras with a derivation d. In [1], we determined a functor from PoisDer to GD corresponding to the following morphism of operads:

$$\begin{aligned} \delta : \mathrm{GD} &\to \mathrm{PoisDer}, \\ x_1 \circ x_2 &\mapsto x_1 d(x_2), \\ [x_1, x_2] &\mapsto \{x_1, x_2\}. \end{aligned}$$

Let us say that a GD-algebra A is *special* if there exists $V \in$ Pois such that A is a subalgebra of $V^{(\delta)}$.

Theorem 1. *Let A be a special GD-algebra. Then every homomorphic image of A is special. Therefore, the class of all special* GD-*algebras is a variety.*

Theorem 2. *Every 2-dimensional GD-algebra is special.*

The variety of GD-algebras is defined by identities of degree 2 or 3. Therefore, the corresponding operad is a quadratic one [2]. The Koszul dual operad $\mathrm{GD}^!$ is generated by two operations $\mu^\vee(x_1, x_2) = x_1 * x_2$ and $\nu^\vee(x_1, x_2) = x_1 \star x_2$, where

$$x * y = y * x, \quad x * (y * z) = (x * y) * z,$$

i.e., $*$ is associative and commutative,

$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (x \star z) \star y - x \star (z \star y),$$

$$x \star (y \star z) = y \star (x \star z),$$

i.e., $\star$ is a right Novikov product, and

$$x \star (y * z) = (x \star y) * z,$$

$$x \star (y * z) + y \star (x * z) = (x * y) \star z.$$

By using a method in [3] we proved the following theorem:

Theorem 3. *The operad GD (and $GD^!$) is not Koszul.*

References

[1] P. S. Kolesnikov, B. Sartayev, A. Orazgaliev, *Gelfand–Dorfman algebras, derived identities, and the Manin product of operads* // Journal of Algebra, **539** (2019), 260–284.

[2] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272.

[3] A. S. Dzhumadil'daev, P. Zusmanovich, *The Alternative Operad Is Not Koszul* // Experimental Mathematics, **20:2** (2011), 138–144.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ONE THEOREM ON OMITTING TYPES IN INCOMPLETE THEORIES

Olzhas UMBETBAYEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

umbetbayev@math.kz

Let $P := \langle p_n(x_n) : n \in \omega\rangle$ and $Q := \langle q_n(y_n) : n \in \omega\rangle$ be two sequences of non-isolated complete types over an empty set in a small theory T of a signature Σ such that for every natural number $n \in \omega$ there is a model $\mathfrak{M}_n$ of T such that for each $i \leq n$, $\mathfrak{M}_n$ realizes p_i and omits q_i. We can assume that the models $\mathfrak{M}_n$ are pairwise non-isomorphic. Otherwise there is no subject for the next question.

Does there exist a model $\mathfrak{M}$ of T, such that it realizes each type from P and omits each type from Q?

We give a criterion characterizing omission of a countable set of types in an incomplete theory.

Each type $q_i(y_i)$ can be represented as a strictly decreasing sequences of formulas $\{H_{i,m} : m \in \omega\}$ such that $T \vdash \forall y_i(H_{i,m+1}(y_i) \to H_{i,m}(y_i))$ and for each $\phi(y_i) \in q_i(y_i)$ there exists m such that $T \vdash \forall y_i(H_{i,m}(y_i) \to \phi(y_i))$.

Let T_0 be a logical closure of $T \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n(\bar{c}_n)$ in the signature $\Sigma(C) := \Sigma \cup \{\bar{c}_n : n \in \omega\}$. Denote by $T_{0,n}$ a logical closure of $T_0 \cup \bigcup\limits_{j\leq n} p(\bar{c}_j)$ in the signature $\Sigma(C_n) := \Sigma \cup \{\bar{c}_j : j \leq n\}$. Let T_1 be a logical closure of the following set:

$$T_0 \cup \{\neg\exists y_i \phi(y_i, \bar{c}_n) : \phi(y_i, \bar{c}_n) \text{ is a formula of } \Sigma(C) \text{ such that } \exists i \in \omega, T_0 \vdash \phi(y_i, \bar{c}_n) \to q_i(y_i)\}.$$

Denote by $T_{1,n}$

$$T_{0,n} \cup \{\neg\exists y_i \phi(y_i, \bar{c}_n) \text{ formula of } \Sigma(C_n) : \exists i \in \omega, T_0 \vdash \phi(y_i, \bar{c}_n) \to q_i(y_i)\}.$$

For every $n, i \in \omega$ we consider the following set of one-$\Sigma(C_n)$-formulas

$$\Gamma_{n,i} := \{\phi(y_i, \bar{c}_n) : \exists y_i(\phi(y_i, \bar{c}_n)) \in T_{1,n} \text{ and } T_1 \cup \{\forall y_i(\phi(y_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(y_i))\} \text{ is consistent for each } m \in \omega\}.$$

For each $n, i, l, m \in \omega$ we denote for l-th formula from $\Gamma_{n,i}$ the next $\Sigma(C_n)$-sentence:

$$S_{n,i,l,m}(\bar{c}_n) := \forall y_i(\phi_l(y_i, \bar{c}_n) \to H_{i,m}(y_i)).$$

Theorem. *Let theory T' of the signature $\Sigma(C)$ be a complete consistent extension of T_1. Then there is a model of T' omitting all types from Q if and only if for every $n, i \in \omega$, $\Gamma_{n,i} = \emptyset$ or for every $l \leq |\Gamma_{n,i}|$ there exists $m \leq \omega$ such that $\neg S_{n,i,l,m}(\bar{c}_n) \in T'$.*

References

[1] B.S. Baizhanov, S.S. Baizhanov, N.E. Sailaubay, O.A. Umbetbayev, T.S. Zambarnaya. *Essential and inessential expansions: model completeness and number of countable models* // Mathematical journal, **V.17:2(64)**, (2017), 43–52.

[2] B. Baizhanov, J.T. Baldwin, T. Zambarnaya. *Finding 2^ω countable models for ordered theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **V.15**, (2018), 719–727.

The authors were supported by the grant AP05134992 of SC of the MES of RK

[3] B.S. Baizhanov, O.A. Umbetbayev, T.S. Zambarnaya. *On a criterion for omissibility of a countable set of types in an incomplete theory* // Mathematical journal, **V.19:2**, (2019), 22–30.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON DEFINABLE CLOSURE IN HRUSHOVSKI'S STRONGLY MINIMAL SETS

Viktor VERBOVSKIY

Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

viktor.verbovskiy@gmail.com

By a Hrushovski sm-class we mean a class K_0 of finite $\mathcal{L}$-structures for a relational vocabulary $\mathcal{L}$ along with a notion of strong substructure which yields a generic structure that is a strongly minimal set D by a construction patterned by E. Hrushovski. In fact, there are a lot of variants of this construction. Here we consider the original Hrushovski's counterexample to Zilber's trichotomy conjecture and the example by G. Paolini, where he constructed examples of strongly minimal k-Steiner systems.

Recall that a pair of two disoint sets A and B is called a *good pair* if $B \leq A \cup B$, $\delta(B) = \delta(A \cup B)$, for any proper non-empty subset C of A it holds that $\delta(B) < \delta(C \cup B)$ and each element in B is in some relation with some element in A.

The following results are joint with John Baldwin.

Theorem *There is a Hrushovski's example in which the definable closure of two independent elements is not contained in the union of definable closures of each of these two elements:* $\mathrm{dcl}(a_1, a_2) \neq \mathrm{dcl}(a_1) \cup \mathrm{dcl}(a_2)$ *for any independent elements a_1 and a_2.*

Theorem *For any Hrushoski's strongly minimal example if $\mu(B, A) \geq 3$ for any good pair (B, A) with $\delta(B) = 2$, then* $\mathrm{dcl}(a_1, a_2) = \mathrm{dcl}(a_1) \cup \mathrm{dcl}(a_2)$ *for any independent elements a_1 and a_2.*

Theorem *There is a Paolini's example in which the definable closure of two independent elements is not contained in the union of definable closures of each of these two elements:* $\mathrm{dcl}(a_1, a_2) \neq \mathrm{dcl}(a_1) \cup \mathrm{dcl}(a_2)$ *for any independent elements a_1 and a_2.*

Funding: The author was supported by the grant AP05132688 of SC of the MES of RK.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ВОПРОСЫ СВОДИМОСТИ ЗАПРОСОВ БАЗ ДАННЫХ НАД ПОЧТИ ОМЕГА-КАТЕГОРИЧНОЙ ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Б. АБДЫРАИМОВА[1,a], Б.Ш. КУЛПЕШОВ[2,b]

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[a]*abdyraimova.b@gmail.com*, [b]*b.kulpeshov@kbtu.kz*

В настоящем докладе исследуется проблема сводимости расширенных запросов баз данных к ограниченным над почти ω-категоричной слабо о-минимальной областью определения, имеющей ранг выпуклости 1.

В реляционной модели баз данных [1]–[2] состояние базы данных понимается как конечная совокупность отношений между элементами. Имена отношений и их арности фиксируются и называются *схемой базы данных*. Отдельная информация, хранимая в отношениях данной схемы, называется *состоянием базы данных*. Хотя реляционные базы данных были придуманы для конечных совокупностей данных, часто удобно предполагать что существует бесконечная *область определения* — например, целые или рациональные числа — так что элементы данных выбираются из этой области. Функции и отношения, определенные на всей области определения (например, $<$ и $+$) могут быть также использованы при запрашивании. Например, если в качестве языка запросов используется язык логики предикатов первого порядка, то запросы могут использовать как отношения базы данных, так и отношения области определения, при этом переменные изменяются на всей области определения.

Пусть M — бесконечная структура сигнатуры L. Здесь мы рассматриваем упорядоченные структуры. Это означает, что L включает бинарный реляционный символ $<$, интерпретация которого в M удовлетворяет аксиомам линейного порядка.

Мы фиксируем схему базы данных SC и вводим следующие обозначения:

$$L_0 = \{<\}, L' = L_0 \cup SC, L'' = L \cup SC.$$

Мы рассматриваем два языка для запрашивания. Запросы первого языка есть формулы сигнатуры L' — мы называем их *ограниченными.* Запросы второго языка есть формулы сигнатуры L'' — мы называем их *расширенными.*

Запрос называется *генерическим*, если он сохраняется относительно перестановок универсума M, сохраняющего порядок.

k-арный запрос Θ называется *локально генерическим над конечными состояниями*, если $a \in \Theta$ тогда и только тогда когда $\phi(a) \in \Theta(\phi(s))$ для любого частичного $<$-изоморфизма $\phi : X \to M$, где $X \subseteq M$, для любого конечного состояния s над X и для любого k-кортежа a в X.

Будем говорить что полная теория T имеет *Свойство Изоляции,* если существует кардинал λ такой, что для любого псевдо-конечного множества A и для любого элемента a модели теории T существует $A_0 \subseteq A$ такое, что $|A_0| < \lambda$ и $\mathrm{tp}(a/A_0)$ изолирует $\mathrm{tp}(a/A)$.

В работе [3] была установлена следующая теорема:

Теорема 1.
Предположим что теория первого порядка структуры M имеет Свойство Изоляции. Пусть расширенный запрос Θ является локально генерическим над конечными состояниями. Тогда Θ эквивалентен над конечными состояниями ограниченному запросу.

Определение 2. [4], [5]

Второй автор был поддержан грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (AP05134992)

Пусть $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(T)$. *Тип* $q(x_1, \dots, x_n) \in S(T)$ *называется* $(p_1, \dots, p_n)$-типом, *если* $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. *Множество всех* $(p_1, \dots, p_n)$-*типов теории* T *обозначается через* $S_{p_1,\dots,p_n}(T)$. *Счетная теория* T *называется* почти ω-категоричной, *если для любых типов* $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S(T)$ *существует лишь конечное число типов* $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1,\dots,p_n}(T)$.

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [6]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [7]. В частности, слабо о-минимальная теория имеет *ранг выпуклости 1*, если не существует параметрически определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема 3.

Пусть T *— почти* ω*-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда* T *имеет Свойство Изоляции.*

Следствие 4.

Пусть T *— почти* ω*-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда каждый расширенный запрос, являющийся локально генерическим над конечными состояниями, эквивалентен над конечными состояниями ограниченному запросу.*

Список литературы

[1] E.F. Codd, *A relational model for large shared data banks* // Communications ACM, **13**:6, 377–387 (1970).

[2] E.F. Codd, *Relational completeness of database sublanguages* // Database systems, Prentice-Hall, 33–64 (1972).

[3] O.V. Belegradek, A.P. Stolboushkin and M.A. Taitslin, *Extended order-generic queries* // Annals of Pure and Applied Logic, **97**, 85–125 (1999).

[4] K. Ikeda, A. Pillay, A. Tsuboi, *On theories having three countable models* // Mathematical Logic Quarterly, **44**:2, 161–166 (1998).

[5] С.В. Судоплатов, *Классификация счетных моделей полных теорий* // Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, части 1 и 2, 2018.

[6] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields* // Transactions of The American Mathematical Society, **352**, 5435-5483 (2000).

[7] B.Sh. Kulpeshov, *Weakly o-minimal structures and some of their properties* // The Journal of Symbolic Logic, **63**, 1511–1528 (1998).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СВОЙСТВА E-КОМБИНАЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

А.Б. АЛТАЕВА[1,a], Б.Ш. КУЛПЕШОВ[2,b], С.В. СУДОПЛАТОВ[3,c]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
[1,2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[2]Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
[3]Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
[3]Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

[a]vip.altayeva@mail.ru, [b]b.kulpeshov@kbtu.kz, [c]sudoplat@math.nsc.ru

В серии работ [1]–[7] изучались топологические свойства семейств теорий. Были введены понятия P-оператора и E-оператора, позволяющие изучать связи между теориями относительно подходящих операторов замыкания. Эти операторы дают возможность порождать новые теории посредством рассматриваемых семейств теорий, а также находить в некоторых случаях минимальные или наименьшие порождающие множества.

Данное исследование было продолжено в совместных работах Кулпешова Б.Ш. и Судоплатова С.В. [8]–[10] для семейств упорядоченных теорий, в том числе и для семейств вполне о-минимальных теорий. Отметим, что в работе [11] также рассматривались комбинации структур в виде их произведений.

В настоящем докладе исследуются E-комбинации счетного числа счетно категоричных линейно упорядоченных структур чистого линейного порядка. Найден критерий счетной категоричности E-комбинации счетного числа копий произвольного счетно категоричного линейного порядка. В качестве следствия получено описание счетного спектра такой комбинации.

Всюду здесь мы будем рассматривать линейно упорядоченные структуры, т.е. структуры языка, содержащего бинарный символ $<$, который удовлетворяет аксиомам линейного порядка. Линейно упорядоченные структуры в сигнатуре $\{<\}$ (структуры чистого линейного порядка) будем называть кратко *линейными порядками.*

Пусть M_i — линейно упорядоченная структура сигнатуры $\{<,\Sigma_i\}$ для каждого $i<\omega$, где Σ_i не содержит выделенных констант. Будем обозначать через $dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ множество элементов структуры M_i, являющихся $\emptyset$-определимыми отношением порядка $<_{M_i}$.

Будем говорить что $M^+ := \langle \bigcup_{i\in\omega} M_i; <, \Sigma, E^2, c^i_k\rangle_{k<\lambda_i, i\in\omega}$ — *линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация* (или просто *E-комбинация*) структур M_i, если $\Sigma := \cup_{i\in\omega}\Sigma_i$, $\{c^i_k \mid k<\lambda_i\}\subseteq dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ для некоторого ординала λ_i; либо $M_l<M_m$, либо $M_m<M_l$ для любых $l,m\in\omega$, и E — отношение эквивалентности, разбивающее M^+ на выпуклые классы, так что для любого $a\in M^+$ $E(a,M^+)=M_i$ для некоторого $i<\omega$.

Таким образом, мы включаем в сигнатуру произвольной E-комбинации структур M_i, $i\in\omega$, все элементы, лежащие в $dcl^{<}_{M_i}(\emptyset)$ для каждого $i\in\omega$, т.е. если M_1 и M_2 — изоморфные копии одной и той же структуры M, которая имеет λ элементов, лежащих в $dcl^{<}_{M}(\emptyset)$ для некоторого ординала λ, то в сигнатуру E-комбинации от структур M_1 и M_2 будут включены 2λ элементов.

Здесь мы интересуемся вопросами сохранения тех или иных свойств первоначальных структур в их E-комбинации. Например, если все M_i являются $\aleph_0$-категоричными, то при каких условиях элементарная теория произвольной E-комбинации этих структур будет также $\aleph_0$-категоричной? Возможно ослабление условия: когда такая комбинация будет эренфойхтовой или когда она будет иметь максимальный счетный спектр?

Очевидно что если M — $\aleph_0$-категоричная линейно упорядоченная структура с непустым $dcl^{<}_{M}(\emptyset)$, и мы рассматриваем произвольную E-комбинацию ω-копий структуры M, то согласно определению E-комбинации $dcl_{M^+}(\emptyset)$ будет бесконечным, откуда получаем, что $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной. Также если мы рассматриваем счетное число попарно неизоморфных

Исследования поддержаны грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (AP05132546)

$\aleph_0$-категоричных линейных порядков M_i, $i \in \omega$, то любая E-комбинация этих структур будет заведомо не $\aleph_0$-категоричной.

Предложение.
Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация ω копий структуры M. Предположим что $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$. Тогда $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема.
Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация ω копий структуры M. Тогда имеет место следующее:
(1) $Th(M^+)$ — $\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$ и $\langle M^+/E, <_{ind}\rangle$ — $\aleph_0$-категорична, где $<_{ind}$ — индуцированный порядок на E-классах в M^+.
(2) Если $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной, то $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Следствие. *Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — линейно упорядоченные структуры, являющиеся эренфойхтовыми, $n < \omega$, M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок с $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся комбинация структур $M_1, \ldots, M_n$ и ω копий структуры M. Тогда теория $Th(M^+)$ эренфойхтова $\Leftrightarrow$ $\langle M^+/E, <_{ind}\rangle$ $\aleph_0$-категорична.*

Список литературы

[1] S.V. Sudoplatov, *Combinations of structures* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **24**, 82–101 (2018).

[2] S.V. Sudoplatov, *Closures and generating sets related to combinations of structures* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **16**, 131–144 (2016).

[3] S.V. Sudoplatov, *Families of language uniform theories and their generating sets* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **17**, 62–76 (2016).

[4] S.V. Sudoplatov, *On semilattices and lattices for families of theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**, 980–985 (2017).

[5] S.V. Sudoplatov, *Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**, 135–150 (2017).

[6] S.V. Sudoplatov, *Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**, 296–307 (2017).

[7] In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *Families of theories of Abelian groups and their closures* // Bulletin of Karaganda University. Mathematics, **92**:4, 72–78 (2018).

[8] Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, *О P-комбинациях упорядоченных теорий* // Традиционная международная апрельская математическая конференция (тезисы докладов), ИМММ, Алматы, 30–31 (2019).

[9] Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, *Об эренфойхтовости P-комбинации упорядоченных теорий* // Материалы международной конференции ”Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, Казанский федеральный университет, 131–133 (2019).

[10] Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, *P-комбинации упорядоченных структур* // Тезисы докладов международной конференции ”Мальцевские Чтения”, Новосибирск, Институт математики СО РАН (2019), 190 с.

[11] S. Feferman, R. Vaught, *The first order properties of products of algebraic systems* // Fundamenta Mathematicae, **47**, 57–103 (1959).

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЙ ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ

А.Б. ДАУЛЕТИЯРОВА

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, РОССИЯ

d-aigera95@mail.ru

В данной работе мы продолжаем изучение свойств распределения счётных моделей по предпорядкам Рудин-Кейслера и по числу предельных моделей над последовательностями типов [1]. В работах К. А. Байкаловой [2] и Р. А. Попкова [3] были установлены возможные значения троек распределения числа сччтных моделей для теорий одноместных предикатов соответственно со счётным числом и континуальным числом типов. Целью данной работы является описание предпорядков Рудин-Кейслера и распределения предельных моделей над последовательностями типов для теорий независимых предикатов.

Теорема. *Для любой счётной теории T одноместных предикатов возможны следующие случаи:*

1) *Если теория T не имеет неглавных 1-типов, то получается одноэлементный предпорядок Рудин-Кейслера и отсутствуют предельные модели;*

2) *Если имеется один неглавный 1-тип, то предпорядок Рудин-Кейслера является счётной вполне упорядоченной цепью и существует одна предельная модель, эта предельная модель представляется в виде объединения цепи по предпорядку Рудин-Кейслера;*

3) *Если имеется конечное число $n > 1$ неглавных 1-типов, то предпорядок Рудин-Кейслера является счётной атомной дистрибутивной решёткой L с n атомами, с относительными дополнениями и без максимальных элементов; при этом получается ω предельных моделей, каждая из которых представляется в виде объединения некоторой максимальной цепи в L, и обратно, объединение каждой максимальной цепи в L задаёт некоторую предельную модель;*

4) *Если имеется счётное число неглавных 1-типов, то предпорядок Рудин-Кейслера является счётной атомной дистрибутивной решёткой L с ω атомами, с относительными дополнениями и без максимальных элементов; при этом получается 2^ω предельных моделей, каждая из которых представляется в виде объединения некоторой максимальной цепи в L, и обратно, объединение каждой максимальной цепи в L задаёт некоторую предельную модель;*

5) *Если имеется континуальное число неглавных 1-типов, то либо теория T не имеет ни простых, ни предельных моделей, либо имеется континуум простых и континуум предельных моделей, при котором предпорядок Рудин-Кейслера является континуальной атомной дистрибутивной решёткой L с 2^ω атомами, с относительными дополнениями и без максимальных элементов; при этом получается 2^ω предельных моделей, каждая из которых представляется в виде объединения некоторой максимальной цепи в L, и обратно, объединение каждой максимальной цепи в L задаёт некоторую предельную модель;*

Список литературы

[1] С. В. Судоплатов, *Классификация счётных моделей полных теорий* // Изд-во НГТУ, Новосибирск, 2018.

[2] К. А. Байкалова, *О некоторых гиперграфах простых моделей и порождаемых ими предельных моделях* // Algebra and Model Theory 7. Collection of papers, НГТУ, Новосибирск, 2009, 6–17.

[3] Р. А. Попков, *Распределения счетных моделей теорий одноместных предикатов* // Algebra and Model Theory 10. Collection of papers, НГТУ, Новосибирск, 2015, 157–159.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

АЛГЕБРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ

Дмитрий ЕМЕЛЬЯНОВ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

dima-pavlyk@mail.ru

В статье [1] начаты исследования алгебр бинарных изолирующих формул для теорий декартовых произведений. В ней рассмотрены правила умножения для правильных фигур от отрезка до пятиугольника. Продолжая исследовать декартовы умножения алгебры для отрезка и правильных многоугольников, получили две общие формы для n-угольников с четным количеством углов и с нечетным.

Определение. *Декартово произведение*, или *прямое произведение* $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m = G$ графов $G_1, G_2, \ldots, G_m$ — это граф, у которого множество вершин графа — это прямое произведение $V(G_1) \times V(G_2) \times \ldots \times V(G_m)$, и любые вершины $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m)$ и $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m)$ связаны отношением G тогда и только тогда, когда для некоторого i, вершина u_i смежна с вершиной v_i в графе G_i, и $u_j = v_j$ при $j \neq i$. При $G_1 = G_2 = \ldots = G_m = G$ декартово произведение $G \times G \times \ldots \times G$ называется *m-й декартовой степенью* графа G и обозначается через G^m.

Определение. *Алгебра для графа ребра* $\mathfrak{R}$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$ это алгебра, которая задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$

Предложение 1. *Алгебра бинарных изолирующих формул $\mathfrak{Ep}_{k,n}$ для прямого произведения k-й декартовой степени графа ребра $\mathfrak{R}^k$ с графом n-угольника, где n четное, задается множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, \ldots, d + k\}$ и следующей таблицей Кэли:*

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$(d+k)$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{\ldots\}$	$\{(d+k)\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{\ldots\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{\ldots\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc_{(\alpha)}\}$	$\{\ldots\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc_{(\alpha)}\}$	$\{C_{(\alpha)}\}$	$\{\ldots\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$
$\ldots$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$
$(d+k)$	$\{(d+k)\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$	$\{CFm_{(\alpha)}\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$	$\{Fm_{(\alpha)}\}$	$\{\ldots\}$	$\{C_{(\alpha)}\}$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант No AP05132546).

где $\{Nc_{(x)}\}$ *— множество нечетных меток до* x*,* $\{C_{(x)}\}$ *— множество четных меток до* x*,* $Fm_{(\alpha)} = Nc_{(\alpha)}$ *при нечетном* α*, иначе* $Fm_{(\alpha)} = C_{(\alpha)}$*,* d *— диаметр графа,* $\alpha = m + l$*, если* $m + l \leq d + k$*, иначе* $\alpha = d + k$*, где* $m, n \in \rho_{\nu(p)}$*.*

Предложение 2. *Алгебра бинарных изолирующих формул* $\mathfrak{Nep}_{k,n}$ *для прямого произведения* k*-й декартовой степени графа ребра* $\mathfrak{R}^k$ *с графом* n*-угольника, где* n *нечетное, задается множеством меток* $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, \dots, d + k\}$ *и следующей таблицей Кэли:*

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\dots$	$(d+k)$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{\dots\}$	$\{(d+k)\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{\dots\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{\dots\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc_{(\alpha)}\}$	$\{\dots\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc_{(\alpha)}\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$	$\{\dots\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$
$\dots$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$
$(d+k)$	$\{(d+k)\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$	$\{CFn_{(\alpha)}\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$	$\{Fn_{(\alpha)}\}$	$\{\dots\}$	$\{0,1,\dots,\alpha\}$

где $\{Nc_{(x)}\}$ *— множество нечетных меток до* x*,* $\{C_{(x)}\}$ *— множество четных меток до* x*,* d *— диаметр графа,* $\alpha = m + l$*, если* $m + l \leq d + k$*, иначе* $\alpha = d + k$*, где* $m, n \in \rho_{\nu(p)}$ $Fn_{(\alpha)} = Nc_{(\alpha)}$ *при нечетном* α*,* $Fn_{(\alpha)} = C_{(\alpha)}$ *при четном* α*,* $Fn_{(\alpha)} = \{0, 1, \dots, \alpha\}$ *при* $\alpha \geq n$*.*

Теорема. *Алгебра бинарных изолирующих формул* $\mathfrak{Nep}_{k,n}$ *для прямого произведения* k*-й декартовой степени графа ребра* $\mathfrak{R}^k$ *с графом* n*-угольника, равна алгебре* $\mathfrak{Ep}_{k,n}$ *для четного* n*, либо* $\mathfrak{Nep}_{k,n}$ *для нечетного* n*.*

Список литературы

[1] Д.Ю. Емельянов, *Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий декартовых произведений графов* // Algebra and model theory 12 : coll. of papers. - Novosibirsk: NSTU, 2019. — P. 21–31.

— ⁂ —

СВОЙСТВА СОВЕРШЕННЫХ ГИБРИДОВ ФРАГМЕНТОВ ∇-cl- МНОЖЕСТВ

Назерке МУСИНА, Улпан СОЦИАЛОВА

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

nazerke170493@mail.ru

Определим сущность алгебраической конструкции, которая необходима для определения гибридов йонсоновских теорий.

Пусть $\boxdot \in \{\cup, \cap, \times, +, \oplus, \prod\limits_F, \prod\limits_U\}$, где $\cup$-объединение, $\cap$ -пересечение, $\times$-декартово произведение, $+$-сумма и $\oplus$-прямая сумма, $\prod\limits_F$-фильтрованное и $\prod\limits_U$-ультрапроизведение.

Следующее определение дает гибрид двух йонсоновских фрагментов одной сигнатуры.

Пусть X_1, X_2 - ∇-cl-подмножества некоторой достаточно большой экзистенциальной модели данной сигнатуры.

Определение. Гибридом $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ йонсоновских фрагментов $Fr(X_1), Fr(X_2)$ будет называться теория $Th_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2)$, если она йонсоновская, где C_i - семантические модели $Fr(X_i)$, $i = 1, 2$.

Заметим следующий факт:

Факт. Для того чтобы теория $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ была йонсоновской достаточно, чтобы $(C_1 \boxdot C_2) \prec_{\exists_1} C$.

Далее объектом нашего исследования будет класс экзистенциально простых выпуклых $\forall\exists$-полных фрагментов в рамках вышеуказанных условий.

В рамках изучения данного класса теорий мы получили следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $Fr(X)$ - совершенный выпуклый экзистенциально простой полный для $\forall\exists$-предложений йонсоновский фрагмент. X_1, X_2 - $\forall\exists$-dcl-множества в теории $Th_{\forall\exists}(C)$, где M_i=$dcl(X_i) \in E_{Fr(Th_{\forall\exists}(C))}$, $Fr(X_i) = Th_{\forall\exists}(M_i)$ также совершенные выпуклые экзистенциально простые полные для $\forall\exists$-предложений йонсоновские фрагменты. C_1, C_2 - их семантические модели соответственно. Тогда, если их гибрид $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ является модельно совместным с $Fr(X_i)$, то $H(Fr(X_1), Fr(X_2))$ является совершенной йонсоновской теорией для $i = 1, 2$.*

Теорема 2. *Пусть $Fr(X), Fr(X_1), Fr(X_2)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $Fr(X_1)$, $Fr(X_2)$ - ω-категоричны. Тогда их гибрид $H(Fr(X_1), Fr(X_2)$ также является совершенной йонсоновской теорией.*

Все неопределенные здесь понятия можно извлечь из [1,2].

Список литературы

[1] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова *Йонсоновские теории и их классы моделей* // Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

[2] A.R. Yeshkeyev, N.M. Mussina *Properties of hybrids of Jonsson theories* // *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:92 (2018), 99–105.

— ⁜ ⁜ ⁜ —

КАТЕГОРИЧНОСТЬ #-КОМПАНЬОНА ФРАГМЕНТА ЙОНСОНОВСКОГО МНОЖЕСТВА В МОДУЛЯРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рауана ОРАЗБЕКОВА, Индира ТУНГУШБАЕВА

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

o_rauana@mail.ru

Данный тезис имеет отношение к модулярным фрагментам, которые удовлетворяют свойству наследственности. Ярким примером таких фрагментов являются фрагменты йонсоновских подмножеств семантических моделей абелевых групп.

Рассмотрим следующие необходимые определения.

Определение 1 [1]. Если (X, cl) является йонсоновской предгеометрией, мы говорим, что A является йонсоновски независимым (J - независимым) подмножеством в X, если $a \notin cl(A \setminus \{a\})$ для всех $a \in A$ и B является J-базисом для Y, $Y \subseteq X$, если B-J-независимо и $Y \subseteq acl(B)$.

Определение 2 [1]. Мы говорим, что (X, cl) является модулярной предгеометрией, если для любых конечномерных замкнутых $A, B \subseteq X$

$$dim(A \cup B) = dimA + dimB - dim(A \cap B)$$

.

Определение 3 [1]. Если $X = C$ и (X, cl) является модулярной, тогда йонсоновская теория T называется модулярной, где C - семантическая модель теории T.

Определение 4 [1]. Пусть $X \subseteq C$. Мы можем говорить, что X - $\nabla - cl$-йонсоновское подмножество C, если X удовлетворяет следующим условиям:

1) X - ∇-определяемое множество (это означает, что существует формула из ∇, решение которых в C является множество X, где $\nabla \subseteq L$, то есть ∇ это вид формулы, например $\exists, \forall, \forall\exists$ и т.д.);

2) $cl(X) = M$, $M \in E_T$, где cl некоторый оператор замыкания, определяющий предгеометрию над C (например $cl = acl$ или $cl = dcl$).

Определение 5 [1]. Обогащение $\overline{T}$ йонсоновской теорий T называется допустимым, если любой ∇-тип (т.е. любая формула этого типа принадлежит ∇, где ∇ подмножество языка L_σ) в этом обогащении определим в рамках рассматриваемой $\overline{T}_\Gamma$-стабильности.

Определение 6 [1]. Йонсоновская теория называется наследственной, если в любом ее допустимом обогащении ее расширение в этом обогащении является йонсоновской теорией.

Пусть $Fr(X)$ - произвольный фрагмент йонсоновского множества X в счетном языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории $Fr(X)$. Пусть $X \subseteq C$ есть йонсоновское множество в теории $Fr(X)$. Пусть $\sigma_\Gamma(X) = \sigma \cup \{c_a | a \in X\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Пусть $Fr(X)^C_X = Fr(X) \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a \in X} \cup \{P(C_a) | a \in X\} \cup \{P(c)\} \cup \{'P \subseteq'\}$, где $\{'P \subseteq'\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P является экзистенциально-замкнутой подмоделью в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(X)$ и эта модель есть определимое замыкание множества X. Понятно, что рассмотренное множество предложений является йонсоновской теорией и эта теория вообще говоря не полна.

Пусть $Fr(X)^*$ является центром йонсоновской теории $Fr(X)^C_X$ и $Fr(X)^* = Th(C')$, где C' есть семантическая модель теории $Fr(X)^C_X$. При ограничении теории $Fr(X)^C_X$ до сигнатуры $\sigma_\Gamma(X) \setminus \{c\}$ теория $Fr(X)^C_X$ становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории $Fr(X)$ относительно йонсоновского множества X.

Пусть $Fr(X)^C_X$ теория в языке $\sigma_\Gamma(X)$, то $Fr(X)^*$ есть ее центр.

В рамках изучения свойств категоричности выше указанных теорий в обогащенном языке относительно #-компаньона, получены следующие результаты:

Далее все рассматриваемые фрагменты будут модулярными и наследственными.

Теорема 1.

Если $Fr(X)_X^C$ *теория* ω *-категорична, то* $Fr(X)$ *совершенна.*

Теорема 2.

Если $Fr(X)_X^C$ κ*-категорична, то* $\#$*-компаньон для* $Fr^*(X)$ κ *-категоричен,* $\kappa \geq \omega$*.*

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в [2].

Список литературы

[1] A.R. Yeshkeyev, M.T. Omarova *Central types of convex fragments of the perfect Jonsson theory* // *Bulletin of the Karaganda University*, **1**:93 (2019), 95–101.

[2] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова *Йонсоновские теории и их классы моделей* // Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СТРУКТУРЫ С КОНЕЧНЫМИ ОБЛАСТЯМИ В РАМКАХ ПОНЯТИЯ ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНОГО СВОЙСТВА

Михаил ПЕРЕТЯТЬКИН, Асылхан КАЛШАБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

peretyatkin@math.kz, kalshabekov@mail.ru

Рассматриваются теории в логике предикатов первого порядка с равенством и используются общие понятия теории моделей и теории алгоритмов. Объектом исследования является класс полных и неполных теорий *конечных* или *перечислимых* сигнатур. Для теории T сигнатуры σ и конечной последовательности формул этой сигнатуры

$$\varkappa = \langle \varphi_1(\bar{x}_1), \varphi_2(\bar{x}_2), ..., \varphi_s(\bar{x}_s) \rangle,\ \mathrm{Len}(\bar{x}_i) = m_i, \tag{1}$$

определена операция декартова расширения $T\langle\varkappa\rangle$, см. [1]. Мы следуем *алгебраическому подходу*, рассматривая только кортежи (1) для которых формулы $\varphi_i(\bar{x}_i)$, $i = 1, 2, ..., s$, являются $\exists \cap \forall$-представимыми в соответствующей теории. Определим отношение эквивалентности на классе $\mathbb{C}$ всех полных теорий различных конечных или перечислимых сигнатур следующим правилом

$$T_1 \simeq T_2 \ \Leftrightarrow_{dfn} \ \textit{существуют } \varkappa, \varkappa' \textit{ такие, что } T_1\langle\varkappa\rangle \approx_a T_2\langle\varkappa'\rangle, \tag{2}$$

где $\approx_a$ означает алгебраический изоморфизм теорий. Согласно определению [1], две полные теории T_1 и T_2 из $\mathbb{C}$ имеют одинаковые теоретико-модельные свойства тогда и только тогда, когда выполнено $T_1 \simeq T_2$. В работе [2] изучены группы автоморфизмов структур с конечными областями. На этой основе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}'$ *являются структурами с конечными областями. Теории* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *и* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}')$ *имеют одинаковые теоретико-модельные свойства тогда и только тогда когда группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ *и* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}')$ *изоморфны.*

Теорема 2. *Произвольный класс* $\mathfrak{p}$ *полных теорий с конечными моделями является атомарным теоретико-модельным свойством тогда и только тогда, когда для некоторой конечной группы* G *выполнено* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_G =_{dfn} \{\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) : |\mathfrak{M}| < \omega_0 \ \&\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}) \cong G\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05130852

Теорема 3. *Произвольный класс $\mathfrak{p}$ полных теорий с конечными моделями является теоретико-модельным свойством тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}$ является объединением некоторого семейства атомарных теоретико-модельных свойств.*

Полученные результаты характеризуют теоретико-модельные свойства на классе структур с конечными областями. В частности, класс конечных структур с тривиальной группой автоморфизмов составляет одно атомарное теоретико-модельное свойство. Это показывает что классический подход с теоретико-модельными свойствами в языке первого порядка слабо подходит к решению прикладных задач в которых конечные модели с тривиальной группой автоморфизмов рассматриваются в качестве носителей для базы данных.

Список литературы

[1] M.G.Peretyat'kin. *First-order combinatorics and a definition to the concept of a model-theoretic property with demonstration of possible applications* // Proceedings of 12-th International Summer School-Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory", Erlagol-2017, Algebra and Model Theory, **11**, 86-101 (2017).

[2] M.G.Peretyat'kin. *Finitely axiomatizable theories and similarity relations* // American Math. Soc. Transl. (2) **195**, 309-346 (1999).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СТАБИЛЬНОСТЬ СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТИПОВ ВЫПУКЛЫХ ФРАГМЕНТОВ

Надежда ПОПОВА, Венера МУСАТАЕВА

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

dandn@mail.ru

Пусть $Fr(X)$ - произвольный фрагмент[1] йонсоновского множества X в счетном языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории $Fr(X)$. Пусть $X \subseteq C$ есть йонсоновское множество в теории $Fr(X)$. Пусть $\sigma_\Gamma(X) = \sigma \cup \{c_a | a \in X\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Пусть $Fr(X)^C_X = Fr(X) \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a \in X} \cup \{P(C_a) | a \in X\} \cup \{P(c)\} \cup \{'P \subseteq'\}$, где $\{'P \subseteq'\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P является экзистенциально-замкнутой подмоделью в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(X)$ и эта модель есть определимое замыкание множества X. Рассмотренное множество предложений не всегда является йонсоновской теорией и эта теория вообще говоря не полна. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что в обогащенном языке йонсоновость сохраняется, и такие теории называются наследственными.

Пусть $Fr(X)^*$ является центром йонсоновской теории $Fr(X)^C_X$ и $Fr(X)^* = Th(C')$, где C' есть семантическая модель теории $Fr(X)^C_X$. При ограничении теории $Fr(X)^C_X$ до сигнатуры $\sigma_\Gamma(X) \backslash \{c\}$ теория $Fr(X)^C_X$ становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории $Fr(X)$ относительно йонсоновского множества X и обозначим его через P^C_X.

Понятно, что модель C' это модель полученная обогащением модели C языка σ до языка $\sigma_\Gamma(X)$. Назовем элемент a семантической модели C' центральным элементом относительно йонсоновского множества X, если a является реализацией центрального типа теории $Fr(X)$ относительно йонсоновского множества X.

Теорема. *Пусть X_1, X_2 - йонсоновские множества в теории $Fr(X)^*$, a_1 - реализация центрального типа $P^C_{X_1}$ и a_2 - реализация центрального типа $P^C_{X_2}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $Fr(X)^C_{X_1}$ синтаксически подобны $Fr(X)^C_{X_2}$, как йонсоновские теории;
2) $RM(tp(a_1/X_1)) = RM(tp(a_2/X_2))$, RM -ранг Морли;
3) $\exists \varphi \in Aut(C') : \varphi(a_1) = a_2$.

Список литературы

[1] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова *Йонсоновские теории и их классы моделей* // Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

— ⁂ —

НЕ КОНЕЧНО - АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЙ ЦЕНТР УНИВЕРСАЛЬНОГО ФРАГМЕНТА

Надежда ПОПОВА, Аслан ТИЛЕУБЕК

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

dandn@mail.ru

Изучение универсалов в рамках фрагментов йонсоновских подмножеств семантической модели некоторой фиксированной йонсоновской теории представляет интерес как со стороны синтаксических свойств таких фрагментов, так и семантических свойств определимых замыканий, которые определяют рассматриваемые фрагменты.

Мы будем рассматривать свойства центральных типов фрагментов в обогащении, в котором эти центральные типы совершенны, а сами фрагменты наследственны.

Пусть T - произвольная йонсоновская теория в счетном языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. Пусть $A \subseteq C$ есть йонсоновское множество в теории T. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Пусть $T_A^C = T \cup Th_{\forall\exists} \cup \{P(C_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{'P \subseteq'\}$, где $\{'P \subseteq'\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа является экзистенциально-замкнутой подмоделью в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$ и эта модель есть определимое замыкание множества A. Понятно, что рассмотренное множество предложений является йонсоновской теорией и эта теория вообще говоря не полна.

Пусть T^* является центром йонсоновской теории T_A^C и $T^* = Th(C')$, где C' есть семантическая модель теории T_A^C. При ограничении теории T_A^C до сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) \backslash \{c\}$ теория T_A^C становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории относительно йонсоновского множества A.

Пусть T_A^C - теория в языке $\sigma_\Gamma(A)$, то T^* есть ее центр.

Рассмотрим множество универсальных следствий теории $T_{\forall A}^C$. Пусть X - йонсоновское подмножество модели C и $Fr_\forall(X)$ - универсальный фрагмент множества X в теории $T_{\forall A}^C$.

Мы имеем следующий результат, связанный с отрицанием предположения на известный вопрос [1, 352] о существовании счетно-категоричного универсала, который не является несчетно-категоричным.

Теорема.

Если теория $Fr_\forall(X)$ тотально категорична, то $Fr_\forall(X)^*$ не конечно аксиоматизируема.

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в [1].

Список литературы

[1] Дж. Барвайс *Теория моделей: справочная книга по математической логике: в 4-х частях. Ч.1.под ред. Ю.Л. Ершова; пер. с англ.* - М.: Наука, (1982).

[2] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова *Йонсоновские теории и их классы моделей* // Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

— ⁂ —

2 Дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ

Руководители: член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.
профессор Нурсултанов Е.Д.

Секретарь: Дербисали Б.О.

GREEN'S IDENTITIES FOR (p, q)-SUB-LAPLACIANS ON THE HEISENBERG GROUP AND THEIR APPLICATIONS

Aidana ABDIKARIM[a], Durvudkhan SURAGAN[b]

Department of Mathematics, Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

[a]*aidana.abdikarim@nu.edu.kz*, [b]*durvudkhan.suragan@nu.edu.kz*

The Heisenberg group is $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$ whose composition law is given by

$$(z, t) \circ (z', t') = (z + z', t + t' + 2\,\mathrm{Im}\langle z, z'\rangle).$$

Here we identify $\mathbb{R}^{2n}$ with $\mathbb{C}^n$, and use the notation

$$\xi := (z, t) = (z_1, z_2, ..., z_n, t) = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n, t)$$

for the points of $\mathbb{H}^n$ (see, e.g. [2]). In simpler case when $n = 1$ composition law as well as dilation rule are respectively given by

$$(x_1, y_1, t_1) \circ (x_2, y_2, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + t_2 + 2(y_1 x_2 - x_1 y_2)),$$

and

$$\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t), \;\; (x, y, t) \in \mathbb{R}^3.$$

The sub-Laplacian operator $\mathcal{L}$ on $\mathbb{H}^n$ is defined as follows:

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{n} \left(X_j^2 + Y_j^2\right),$$

where X_j and Y_j are left invariant (with respect to the group law) vector fields:

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t.$$

The horizontal gradient on $\mathbb{H}^n$ is given by

$$\nabla_H := (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n).$$

Let $1 < p < \infty$. We denote the Sobolev space by

$$S^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \; \nabla_H u(x) \in L^p(\Omega)\} \tag{1}$$

with the norm

$$\|u\|_{S^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p + |\nabla_H u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Let $S_0^{1,p}(\Omega)$ be defined as the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ with the norm

$$\|u\|_{S_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla_H u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

For further discussions on the analysis on the Heisenberg group, we refer to [6] and [8].

In the classical (commutative) analysis, it is well-known that the p-Laplacian

This work was supported in parts by the Nazarbayev University program 091019CRP2120.

$$\Delta_p u := \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

is a quasilinear elliptic partial differential operator of 2nd order, where ∇ is the usual gradient. It is a nonlinear generalization of the Laplace operator, where p is allowed to range over $1 < p < \infty$ for any u in $\mathbb{R}^n$.

Here $|\nabla u|^{p-2}$ is defined as

$$|\nabla u|^{p-2} := \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right)^{\frac{p-2}{2}}$$

for $(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$. In turn, the p-Laplacian can be generalized to the so-called (p,q)-Laplacian. The (p,q)-Laplacian has recently attracted a lot attention because of its applications in different areas of physics (see, e.g. [1]).

An analogue of the (p,q)-Laplacian on $\mathbb{H}^n$, that is, for the Heisenberg group the (p,q)-sub-Laplacian is defined as follows

$$\mathcal{L}_{p,q} := -\nabla_H \cdot (|\nabla_H|^{p-2} \nabla_H) - \nabla_H \cdot (|\nabla_H|^{q-2} \nabla_H), \ 1 < q < p. \tag{4}$$

In the present paper, we discuss applications of Green's identities for the (p,q)-sub-Laplacian (4). Versions of Green's identities for sub-Laplacians for more general stratified groups were established in [5]. Then they were obtained for p-sub-Laplacians [7] (see also [4] and [3]). In this paper, Green's first and second identities are extended to (p,q)-sub-Laplacians on the Heisenberg group with some of their applications. Particularly, we apply Green's identities to a nonlinear boundary value problem that involves the (p,q)-sub-Laplacian in order to show uniqueness of a positive weak solution.

References

[1] V. Benci, P. D'Avenia, D. Fortunato, L. Pisani. *Solitons in several space dimensions: Derricks Problem and infinitely many solutions* // Arch. Ration. Mech. Anal., 41:297–324, 2000.

[2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, and F.Uguzzoni. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians* // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[3] A. Kassymov and D. Suragan. *Existence of solutions for p-sub-Laplacians with nonlinear sources on the Heisenberg group* // Complex Variables and Elliptic Equations, DOI: 10.1080/17476933.2020.1731737, 2020.

[4] M. Mustafa and D. Suragan. *Green-type identities for Rockland operators on graded Lie groups* // Complex Analysis and Operator Theory, 13 (3):959-966, 2019.

[5] M. Ruzhansky and D. Suragan. *Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups* // Adv. Math., 308:483–528, 2017.

[6] M. Ruzhansky, D. Suragan. *Hardy inequalities on homogeneous groups: 100 years of Hardy inequalities* Progress in Math. Vol. 327, Birkhäuser, 588 pp, (2019) (open access book).

[7] M. Ruzhansky and D. Suragan. *Green's identities, comparison principle, and uniqueness of positive solutions for nonlinear p-sub-Laplacian equations on stratified Lie groups* // Potential Analysis, 2019.

[8] S. Thangavelu. *Harmonic analysis on the Heisenberg group* // Progress in Math. Vol. 159, Birkhäuser, 192 pp, (1998).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

BLOW-UP SOLUTIONS TO SUB-LAPLACIAN HEAT EQUATIONS ON THE HEISENBERG GROUP

Almaz ABILKHASYM

Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

mr.agent-007@inbox.ru

In this note, we prove the blow-up of solutions to the Dirichlet initial value problem for the sup-Laplacian heat equation on the Heisenberg group by using the concavity method.

Theorem *Let Ω be a bounded domain of the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$. Let a function f satisfy the condition that there exist constants $c_1 > 2$ and c_2 such that for all $u > 0$ we have*

$$c_1 \int_0^u f(s)ds \leq uf(u) + c_3 u^2 + c_1 c_2,$$

where $0 < c_3 \leq \frac{(c_1-2)\lambda_1}{2}$, where λ_1 is the principal frequency of the sub-Laplacian $\mathcal{L}$. If $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ with $u_0 = 0$ on $\partial\Omega$ satisfies the inequality

$$-\frac{1}{2}\|\nabla_H u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \left(\int_0^{u_0(\xi)} f(s)ds - c_2 \right) d\xi > 0,$$

then the nonnegative solution to the equation blows up at a finite time T^* for

$$M := \frac{\left(1+\sqrt{\frac{c_1}{2}}\right)\|u_0\|^4_{L^2(\Omega)}}{2(c_1-2)\left[-\frac{1}{2}\|\nabla_H u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\int_0^{u_0(\xi)} f(s)ds - c_2)d\xi\right]},$$

such that

$$0 < T^* \leq \frac{M}{\left(\sqrt{c_1/2}-1\right)\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

that is,

$$\lim_{t\to T^*} \int_0^t \int_\Omega u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau = +\infty.$$

References

[1] Z. Junning, *Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$* // J. Math. Anal. Appl., **172** (1993), 130–146.

[2] S.Y., Chung, M.J., Choi, *A new condition for the concavity method of blow-up solutions to p-Laplacian parabolic equations* // J. Differential Equations, **265** (2018), 6384–6399.

[3] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Hardy inequalities on homogeneous groups* // Birkhäuser, 2019.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The author was supported by the AP08052000. No new data was collected or generated during the course of this research.

SYMBOLIC CALCULUS GENERATED WITH THE DUNKL OPERATOR

Bayan BEKBOLAT[1,a], Michael RUZHANSKY[2,b], Niyaz TOKMAGAMBETOV[3,c]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

[3]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

[2]Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Belgium

[a]*bekbolat@math.kz*, [b]*michael.ruzhansky@ugent.be*, [c]*niyaz.tokmagambetov@ugent.be*

Let $m \in \mathbb{R}$ and $0 \le \delta, \rho \le 1$. The Hörmander classes $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ are space of functions $a = a(x,\lambda)$ which are smooth on $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ and such that

$$|\partial_x^\beta \partial_\lambda^\gamma a(x,\lambda)| \le C_{\beta,\gamma}(1+|\lambda|)^{m-\rho\gamma+\delta\beta},$$

for all β,γ and for all $x,\lambda \in \mathbb{R}$. Constants $C_{\beta,\gamma}$ may depend on a, α, β but not on x, λ. The corresponding class $OpS^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ of pseudo-differential operators is defined on the space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ of Schwartz functions given by

$$a(X,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\lambda} a(x,\lambda)\widehat{f}(\lambda)d\lambda,$$

where $\widehat{f}$ is the Fourier transform of f. In the similar way to the classical settings we can define symbol classes $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mu_\alpha)$ by

$$|\Delta^\ell_{(x)}\Lambda^k_\alpha a(x,\lambda)| \le C_{\ell,k}(1+|\lambda|)^{m-\rho\ell+\delta k}$$

and the corresponding pseudo-differential operator to the symbol from $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mu_\alpha)$ by

$$Op_\alpha(a)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} E_\alpha(ix\lambda)a(x,\lambda)\mathcal{F}_\alpha(f)(\lambda)d\mu_\alpha(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}.$$

The symbolic calculus of pseudo-differential operators generated by a boundary value problem for a given differential operator was constructed by [1]. We follow that paper and we will use some methods form that paper. In our work, we are interested in the symbolic calculus of pseudo-differential operators generated by the Dunkl operator.

Theorem. *Let $m \in \mathbb{R}$ and $0 \le \delta < \rho \le 1$. Let $A \in Op_\alpha(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mu_\alpha))$. Then the adjoint of A from $Op_\alpha(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mu_\alpha))$ and its symbol $\sigma_{A^*} \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mu_\alpha)$ having the asymptotic expansion*

$$\sigma_{A^*}(x,\lambda) \sim \sum_{\ell=0}^\infty \frac{1}{\gamma_\alpha(\ell)}\Delta^\ell_{(x)}\Lambda^\ell_{\alpha,x}\overline{\sigma_A(x,\lambda)}.$$

which means that

$$|\sigma_{A^*}(x,\lambda) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\gamma_\alpha(\ell)}\Delta^\ell_{(x)}\Lambda^\ell_{\alpha,x}\overline{\sigma_A(x,\lambda)}| \le C_N(1+|\lambda|)^{m-(\rho-\delta)N},$$

for all $N > 0$.

The authors were supported by the FWO Odysseus 1 grant G.0H94.18N: Analysis and Partial Differential Equations. MR was supported in parts by the EPSRC Grant EP/R003025/1, by the Leverhulme Research Grant RPG-2017-151.

References

[1] M. Ruzhansky, N. Tokmagambetov, *Nonharmonic analysis of boundary value problems* // International Mathematics Research Notices, 12 (2016), 3548–3615.

— ⁂ —

INVESTIGATION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH INCOMPATIBLE INITIAL AND BOUNDARY DATA IN THE WEIGHTED HÖLDER SPACES

Galina BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

galina_math@mail.ru

When we solve boundary value problems for parabolic equations in the Hölder spaces we require the fulfilment of the compatibility conditions of the initial and boundary data. They are equalities on the boundary of the domain at the initial moment of time, connecting all given functions and coefficients of the problems. Such problems describe continuously going on physical processes. However, when the process is studied from the very beginning or from the moment of discontinuity of the coefficients or given functions, then the physical process will proceed, and the boundary-value problem describing this process will have a solution.

There are studied the first and second boundary value problems for parabolic equations with variable coefficients, when the compatibility conditions of all acceptable orders are not fulfilled. It is proved that the solution to each of the problems contains a regular solution belonging to the classical Hölder space, and a singular solution consisting of the sum of singular functions, the number of which equal to the number of incompatible conditions. Each of the singular functions belongs to a certain weighted Hölder space [1] with a parabolic weight $t + \rho(x)$, where $\rho(x)$ is the distance from the point x of the domain to its boundary, where the compatibility condition is not fulfilled.

References

[1] G. Lieberman, G.M. *Second order parabolic differential equations* // World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

— ⁂ —

This work is financially supported by the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of Reparblic of Kazakhstan, Grant AP 05133898.

ON THE GREEN FUNCTION OF THE FIRST INITIAL BOUNDARY PROBLEM OF A HYPERBOLIC EQUATION IN A QUARTER PLANE

Bauyrzhan DERBISSALY

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

derbissaly@math.kz

Consider the following problem in $\Omega = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi > |\eta|\}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi} + b(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} + c(\xi,\eta)\cdot u = f(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\Omega, \tag{1}$$

with the initial conditions

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi), \ \left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)(\xi,\xi) = \nu(\xi), \ \xi > 0, \tag{2}$$

and the boundary condition

$$u(-\eta,\eta) = \Phi(\eta), \ \eta \le 0, \tag{3}$$

where $a(\xi,\eta),\ b(\xi,\eta) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right);\ c(\xi,\eta), f(\xi,\eta), \in C\left(\overline{\Omega}\right);\ \ \nu(\xi),\ \Phi(\xi) \in C\left(R^+\right);\ \tau(\xi) \in C^1\left(R^+\right);$ $\Phi'(0) = \nu(0),\ \Phi(0) = \tau(0)$.

Let's call a function from the class $u(\xi,\eta) \in C^1\left(R^+\right),\ u_{\xi\eta} \in C\left(R^+\right)$ a regular solution to the problem , reversing the equation (1), initial conditions (2) and boundary condition (3) into an identity.

The task is to prove the correctness and building a solution of the problem (1)-(3).

Theorem. *Let* $a(\xi,\eta),\ b(\xi,\eta) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right);\ \ c(\xi,\eta),\ f(\xi,\eta) \in C\left(\overline{\Omega}\right);\ \nu(\xi),\ \Phi(\xi) \in C\left(R^+\right),\ \tau(\xi) \in C^1\left(R^+\right);\ \Phi'(0) = \nu(0),\ \Phi(0) = \tau(0)$. *Then the problem* (1)-(3) *has a unique regular solution.*

By calculating the following integral

$$\iint_\Omega G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\cdot f(\xi_1,\eta_1)d\xi_1 d\eta_1$$

and using the Riemann method [1], we will find the solution of the problem (1)-(3), where

$$G(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1) = \begin{cases} -R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\theta(\eta_1-\eta)\theta(\xi-\xi_1), & \eta > 0, \\ \big(R(\xi,\eta;-\eta_1,-\xi_1) - R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\big)\theta(-\eta-\xi_1) & \\ -R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\theta(\xi_1+\eta)\theta(\eta_1-\eta)\theta(\xi-\xi_1), & \eta < 0, \end{cases}$$

and $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ is a Riemann-Green function for the equation (1), specially extended to the area $\eta < |\xi|$.

The author was supported by the MES RK grant AP05133898.

References

[1] S. L. Sobolev, *Equations of Mathematical physics* // "Nauka", Moscow, 1966, 63–67, 2010.

— ⁂ —

GLOBAL EXISTENCE AND BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF NONLINEAR HEAT EQUATIONS ON STRATIFIED GROUPS

Khumoyun JABBARKHANOV, Durvudkhan SURAGAN

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

khumoyun.jabbarkhanov@nu.edu.kz, durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this presentation, global existence and boundedness theorem of solutions of nonlinear heat equations are considered on stratified groups. To do this, there is extended the theorem in [1](see p.338) on R^N with important tools: Poincare inequality and Green formula from [2] and [3].

References

[1] P. Souplet and F. B. Weissler, *Poincare's inequality and global solutions of a nonlinear parabolic equation.* // Annales de l'Institut Henri Poincare C, **16**:3 (1999), 335–371.

[2] M. Ruzhansky and D. Suragan, *On horizontal Hardy, Rellich, Caffarelli-Kohn-Nirenberg and p-sub-Laplacian inequalities on stratified groups.* // Journal of Differential Equations, **262**:3 (2017), 1799–1821.

[3] M. Ruzhansky and D. Suragan, *Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups* // Adv. Math., (2017),308, 483–528.

— ⁂ —

ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL SYSTEM OF NAVIER-STOKES EQUATIONS IN A CONE

Muvasharkhan JENALIYEV[1,a], Madi YERGALIYEV[2,b]

[1,2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[2]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

[a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ergaliev@math.kz*

Let $x = \{x_1, x_2\}$, $Q_{xt} = \{x, t : \ |x| < t, \ 0 < t < T < \infty\}$ be an inverted cone with a vertex at the origin, and Ω_{xt} is the section of the cone for a given $t \in (0, T)$. Note that at point $t = 0$ the domain Q_{xt} degenerates to a point.

Supported by the grant projects AP05130928 (2018–2020), AP05132262 (2018–2020) and by the target program BR05236693 (2018–2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

In the non-cylindrical domain Q_{xt} we consider a boundary value problem for a system of Navier-Stokes equations with respect to a two-dimensional vector-function of the fluid velocity $u(x,t) = \{u_1(x,t),\ u_2(x,t)\}$ and the fluid pressure function $p(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f - \nabla p, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \tag{2}$$

$$u = 0,\ \ \{x,\ t\} \in \Sigma_{xt} \text{ is the lateral surface of the cone.} \tag{3}$$

Remark. *In the formulation of the boundary value problem (1)–(4), there are no initial conditions, since at the initial moment of time the domain degenerates into a point in the spatial variable.*

The work is devoted to the problems of solvability in Sobolev classes of the boundary value problem for a two-dimensional system of Navier-Stokes equations in a non-cylindrical domain represented by a cone with a vertex at the origin. The existence and uniqueness of the solution, and its regularity with increasing the smoothness of the given functions are established.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ANALYSIS FOR p-q-SUB-LAPLACIANS ON STRATIFIED LIE GROUPS

Aidana KABDULOVA

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

aidana.kabdulova@nu.edu.kz

We discuss the uniqueness of the positive solution to the following nonlinear differential equation for the p-q-sub-Laplacian on the stratified Lie groups:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{p,q} u = F(x,u), \ \ u > 0 \ \ in\ \Omega, \\ u = 0, \ \ on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{G}$ be a bounded open set with smooth boundary $\partial\Omega$. Let $1 < q < p, F(x,u) = F_1(x)F_2(u)$ where F_1 is a non-negative bounded function, and $F_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfies the conditions:

a) $F_2(u)$ is a non-decreasing function,

b) $F_2(u)u^{1-\alpha}$ non-increasing for some α such that $1 \le \alpha < q$.

Let $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ be a Lie group on $\mathbb{R}^N$ by the composition law $\circ$. We say that $\mathbb{G}$ is a **stratified Lie group** if it satisfies the following conditions:

a) There exists an r-tuple of natural numbers $N_1 + N_2 + \cdots + N_r = N$, such that the dilation $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ given by
$$\delta_\lambda(x_1, \ldots, x_N) := (\lambda^{(1)}x_1, \ldots, \lambda^{(N)}x_N)$$
is an automorphism of the group $\mathbb{G}$ for every $\lambda > 0$. Here $x^i \in \mathbb{R}^{N_i}$ for $i = 1, \ldots, r$.

b) If N_1 is as (a), let $W_1, \ldots, W_{N_1}$ be the left invariant vector fields on $\mathbb{G}$ such that $W_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}|_0$ for $j = 1, \ldots, N_1$. Then
$$\operatorname{rank}(\operatorname{Lie}\{W_1, \ldots, W_{N_1}\}) = N$$

holds for every $x \in \mathbb{R}^N$.

If two conditions shown above are satisfied, then we say that the triple $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ is a stratified Lie group (or a homogeneous Carnot group).

Here r will be called step of $\mathbb{G}$ and the vector fields $W_1, \dots, W_{N_1}$ are called the (Jacobian) generators of $\mathbb{G}$. Any basis of span$\{W_1, \dots, W_{N_1}\}$ is called a system of generators of $\mathbb{G}$. The number Q is called the homogeneous dimension of stratified group $\mathbb{G}$. Here we have

$$Q = \sum_{k=1}^{r} kN_k.$$

For the horizontal gradient we use the following notation

$$\nabla_H := (W_1, \dots, W_{N_1}).$$

The Lebesgue measure dx on $\mathbb{R}^N$ will be the Haar measure for $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$. The notation $u \in C^1(\Omega)$ means $\nabla_H u \in C(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{G}$ an open set. We refer to a recent book [5] for further discussions in this direction.

We also use the functional spaces $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u, |\nabla_H u| \in L^p(\Omega)\}$. Let consider the functional

$$J_p(u) := \left(\int_\Omega |\nabla_H u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

then we define the functional class $\overset{\circ}{S}{}^{1,p}(\Omega)$ to be the completion $C_0^1(\Omega)$ in the norm generated by J_p. The operator

$$\mathcal{L}_{p,q} u := \nabla_H \cdot (|\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u) + \nabla_H \cdot (|\nabla_H u|^{q-2} \nabla_H u), \ \ 1 < p < \infty, \ 1 < q < \infty,$$

is called p-q-sub-Laplacian.

Theorem. *The Dirichlet boundary value problem for the p-q-sub-Laplacian (1) has at most one solution.*

References

[1] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Hardy inequalities on homogeneous groups: 100 years of Hardy inequalities* // Progress in Mathematics, Vol. 327, Birkhauser, 2019. xvi+588pp.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

VALUATION OF REAL OPTIONS UNDER COST UNCERTAINTY

Tynysbek KALMENOV, Yerkin KITAPBAYEV

Intitute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan and North Carolina State University, North Carolina, USA

kalmenov@math.kz

This paper studies the valuation of real options when the cost of investment jumps at a random time. Three valuation formulas are derived. The first expresses the value of the project in terms of a collection of knockout barrier claims. The second identifies the premium relative to a project with delayed investment right and prices its components. The last one identifies the premium/discount relative to a project with constant cost equal to the post-jump cost and prices its components. All formulas are in closed form. The behavior of optimal investment boundaries and valuation components are examined.

The authors were supported by the MESRK target program BR05236656.

References

[1] P. Bjerksund, S. Gunnar, *American exchange options and a put-call transformation* // Journal of Business Finance and Accounting, **20** (1993), 761-764.

[2] M. Broadie, J. Detemple, *The valuation of American options on multiple assets* // Mathematical Finance **7** (1997), 241–286.

[3] M. Broadie, J. Detemple, *American capped call options on dividend-paying assets* // Review of Financial Studies, **8** (1995), 161–191.

[4] C. Peter, R./, Jarrow, and R./, Myneni, *Alternative Characterizations of American put options* // Mathematical Finance **2** (1992), 87106.

[5] C. Peter, *Randomization and the American put* // Review of Financial Studies, **11** (1998), 597-26.

[6] C. Roy, Daniele Marazzina, and M. Ventura, *Optimal investment in research and development under uncertainty* // Journal of Optimization Theory and Applications, **168** (2016), 296-309.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

COMPLETENESS OF THE EXPONENTIAL SYSTEM

Baltabek KANGUZHYN[1,2,a], Aliya SEITOVA[1,2,b]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

[2] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

[a]*kanbalta@mail.ru*, [b]*function05@mail.ru*

Let $\Lambda = \{\lambda_n\}$ be the sequence of all zeros of an entire function of exponential type

$$\Delta(\lambda) = 1 - i\lambda \int_0^1 f(t)e^{i\lambda t}dt, \lambda = re^{i\varphi} = x + iy, \tag{1}$$

where $f \in L^2(0,1)$ (in the sequence Λ, each point counts as many times as its multiplicity m_n). We assume that it is impossible to reduce the interval of integration without changing the value of the integral itself. We consider the following exponential system

$$e(\Lambda) = \{t^{p-1}e^{i\lambda_n t}, 1 \le p \le m_n\}.$$

We set the following question: for which a, b ($a < b$) is the system $e(\Lambda)$ complete (incomplete) in the space $L^2(a,b)$ (or, what is the same, in C[a,b])?

It is enough to consider the case $L^2(-\rho,\rho)$ (or $C[-\rho,\rho]$), since the completeness (or incompleteness) of $e(\Lambda)$ is invariant under the shift of the argument. The question posed is reduced to clarifying the quantity $\rho(\Lambda)$, the radius of completeness of the system $e(\Lambda)$. By definition, $\rho(\Lambda)$ is the exact upper bound of the numbers ρ for which the system $e(\Lambda)$ is complete in $C[-\rho,\rho]$ (the radius of completeness of the system $e(\Lambda)$ is the same for the space $L^2(-\rho,\rho)$). In terms of entire functions, $\rho(\Lambda)$ can be interpreted as the exact lower bound on the types of entire functions F of exponential type, bounded on R and vanishing on Λ (see [1]). The latter means that at each point $\lambda_n \in \Lambda$ the function F vanishes with a multiplicity of at least m_n. We write this fact as follows: $F(\Lambda) = 0$.

The authors are supported by the grant No. AP05131292 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

We have

$$\Delta(\lambda) = 1 - i\lambda e^{i\frac{\lambda}{2}} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda t} g(t)dt, g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Since $g \in L^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ then we obtain that

$$G(t) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{t} g(\tau)d\tau$$

is absolutely continuous on $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ and the equation (1) may be rewritten in the form

$$\Delta(\lambda) = 1 - i\lambda e^{i\frac{\lambda}{2}} P(\lambda),$$

where

$$P(\lambda) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda t} dG(t)$$

is the Lebesgue-Stieltjes integral (see [2] [pp. 337-359]). Thus Λ is the null set of the entire function of exponential type

$$\Phi(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}} - i\lambda P(\lambda) \tag{2}$$

The type of this entire function is $\sigma(\Phi) \leq \frac{1}{2}$, however, it is possible that it is strictly less than $\frac{1}{2}$. Then, the indicatrix of the growth of the function $P(\lambda)$ is $h_p(\varphi) = \frac{1}{2}|\sin\varphi|$.

Theorem. *Let $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – be a null set of the entire function (1), and $h_\Phi(\varphi)$ – be an indicatrix of the growth of the entire function $\Phi(\lambda)$, given by formula (2). Assume $|J| = h_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Then the following are valid*

i) when $(b-a) > |J|$ the system $e(\Lambda)$ is incomplete in $C[a,b]$ (or $L^2(a,b)$),

ii) when $(b-a) < |J|$ the system $e(\Lambda)$ is incomplete in $C[a,b]$ (or $L^2(a,b)$),

iii) if we remove from Λ any two points, then the system $e(\Lambda_1)$ of remaining sequence of the points Λ_1 is incomplete in $C[a,b]$ $(orL^2(a,b))$ and when $(b-a) = |J|$.

For research, a technique is used that combines ideas from the work [3-5].

References

[1] I.F. Krasichkov-Ternovskii, *Interpretation of the Beurling - Malliavin theorem on the radius of completeness.* (in Russian)// Matematicheskii Sbornik, **180**:3 (1989), 397–423.

[2] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis.* (in Russian) // M .: Science, 1976.

[3] A.F. Leont'ev, *Exponential series.* (in Russian) // M .: Science, 1976.

[4] A. Beurling, P. Malliavin, *On Fourier transforms of measures with compact support.* // Acta Mathematica, **107**:3-4 (1962), 291–309.

[5] E. M. Nikishin, V.N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality.* (in Russian) // M .: Science, 1988.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

NON-BLOW-UP AND BLOW-UP RESULTS TO HEAT EQUATIONS WITH LOGARITHMIC NONLINEARITY ON STRATIFIED GROUPS

Aidyn KASSYMOV[1], Ardak KASHKYNBAYEV[2], Durvudkhan SURAGAN[3]

[1]Department of Mathematics: Analysis, Logic And Discrete Mathematics, Ghent University, Belgium,
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[2,3]Nazarbayev University, Department of mathematics, Nur-sultan, Kazakhstan

kassymov@math.kz, ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz, durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In [1] the authors study the following initial boundary value problem (in the Euclidean setting):

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = u \ln |u|, \ \ (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{1}$$

Theorem 1. ([1]). Assume that $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ and

$$J(u_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |u_0|^2 \ln |u_0| dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |u_0|^2 dx \le M, \tag{2}$$

and

$$I(u_0) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \int_\Omega |u_0|^2 \ln |u_0| dx < 0. \tag{3}$$

Then the weak solution of problem (1) blows up at $+\infty$.

Moreover, in [2] it is showed that the condition $J(u_0) \le M$ is unnecessary to blow-up at infinity to a solution of problem (1). In this talk, we obtain a finite time non-blow-up result for the sub-Laplacian heat equations with logarithmic nonlinearity on stratified groups. In our proof, the logarithmic Sobolev-Folland-Stein inequality plays a key role. We also establish a blow-up result at infinite time on stratified groups.

References

[1] H. Chen, P. Luo and G. Liu. *Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity* // J. Math. Anal. Appl., 422:84–98, 2015.

[2] Y. Han. *Blow-up at infinity of solutions to a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity* // J. Math. Anal. Appl., 474(1):513–517, 2019.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

The first and third authors were supported in parts by the MESRK grant AP05130981 and AP08052001. The first and second authors were supported in part by Nazarbayev University FDCRG N09118FD5353.

BLOW-UP RESULTS FOR VISCOELASTIC WAVE EQUATIONS WITH DAMPING TERMS ON STRATIFIED GROUPS

Aidyn KASSYMOV[1,2,3], Ardak KASHKYNBAYEV[4], Durvudkhan SURAGAN[4]

[1]Department of Mathematics: Analysis, Logic And Discrete Mathematics, Ghent University, Belgium,
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[3]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[4]Nazarbayev University, Department of mathematics, Nur-sultan, Kazakhstan

kassymov@math.kz, ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz, durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

The following viscoelastic wave equation with weak damping was considered by Messaoudi in [1].

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t k(t-\tau)\Delta u d\tau + a|u_t|^{q-2}u_t = |u|^{p-2}u, \ \ (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

where $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ and $k \in C^1[0,T]$ satisfying $1 - \int_0^\infty k(\tau)d\tau = r > 0$. The author proved that any solution with negative initial energy $p > q$ blows up in finite-time and extended the result by considering positive initial energy in [2]. We refer [3],[4], [5], [6] and [7] for the further discussions in this topic.

In this talk, by means of Poincáre and Folland-Stein inequalities and Green's identities for the sub-Laplacian on stratified Lie groups, we show blow-up results in finite time for the viscoelastic wave equations both with strong and weak damping terms on stratified Lie groups.

References

[1] S.A. Messaoudi. *Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation* // Math. Nachr., 260:58–66, 2003.

[2] S.A. Messaoudi *Blow up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation* // J. Math. Anal. Appl., 320:902-915, 2006.

[3] M. Aassila, M.M. Cavalcanti and J.A. Soriano. *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in star-shaped domains* // SIAM J. Control Optim., 38:1581-1602, 2000.

[4] S. Berrimi and S.A. Messaoudi *Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source* // Nonlinear Anal., 64:2314-2331, 2006.

[5] F. Gazzola and M. Squassina. *Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations* // Ann. Inst. Henri Poincare, 23:185–207, 2006.

[6] M. Kafini, S.A. Messaoudi *A blow-up result in a Cauchy viscoelastic problem* // Appl. Math. Lett., 21:549–553, 2008.

[7] H. Song. *Global nonexistence of positive initial energy solutions for a viscoelastic wave equation* // Nonlinear Anal., 125:260–269, 2015.

The first and third authors were supported in parts by the MESRK grant AP05130981 and AP08052001. The first and second authors were supported in part by Nazarbayev University FDCRG N09118FD5353.

INTEGRAL EQUATIONS FOR ROST'S REVERSED BARRIERS: EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS

Yerkin KITAPBAYEV

Intitute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan and North Carolina State University, North Carolina, USA

ykitapb@ncsu.edu

We establish that the boundaries of the so-called Rosts reversed barrier are the unique couple of left-continuous monotonic functions solving a suitable system of nonlinear integral equations of Volterra type. Our result holds for atom-less target distributions of the related Skorokhod embedding problem. The integral equations we obtain here generalise the ones often arising in optimal stopping literature and our proof of the uniqueness of the solution goes beyond the existing results in the field.

Theorem *Assume that μ is atom-less. Then for $T > 0$ the couple (s_+, s_-) is the unique couple of left-continuous, increasing, positive functions that solve the system*

$$\int_t^T \int_{-s_-(T-u)}^{s_+(T-u)} p(t, \pm s_\pm(T-t), u, y)(\nu - \mu)(dy)du = 0, \ t \in [0, T) \tag{1}$$

within initial conditions $s_\pm(0) = \hat{b}_\pm$. Equivalently we may express (1) in terms of ϕ as

$$\int_{\mathbb{R}} \nVdash_{\{y:\phi(x)>\phi(y)\}} E_x L^y_{\phi(x)-\phi(y)} (\nu - \mu)(dy) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

References

[1] A.M.G., Cox, D., Hobson, *Skorokhod embeddings, minimality and non-centred target distributions* // Probab. Theory Related Fields, **135**:3 (2006), 395414.

[2] D.H., Root, *The existence of certain stopping times on Brownian motion* // Ann. Math. Statist. **40** (1969) 715-718.

[3] H., Rost, *The stopping distributions of a Markov Process* // Invent. Math. **14** (1971), 116.

[4] P., van Moerbeke, *On optimal stopping and free boundary problems* // Arch. Ration. Mech. Anal. **60**:2 (1975/76), 101148.

[5] C., Zucca, L. Sacerdote, *On the inverse first-passage-time problem for a Wiener process* // Ann. Appl. Probab. **19**:4 (2009), 13191346.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The author was supported by the MESRK target program BR05236656.

ON FREDHOLM PROPERTY AND ON THE INDEX OF THE GENERALIZED NEUMANN PROBLEM

Bakytbek KOSHANOV[1,2,a], Arai KUNTUAROVA[2,b]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2] Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

[a] *koshanov@math.kz*, [b] *araika.14.89@mail.ru*

In simply connected region D in the plane bounded by the simple smooth contour Γ, we consider the elliptic equation

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \le r \le k \le 2l-1} a_{rk}(x,y) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r} \partial y^r} = f(x,y), (x,y) \in D \tag{1}$$

with real coefficients $a_r \in \mathbb{R}$ and $a_{rk} \in C^{\mu}(\overline{D})$, $\Gamma = \partial D \in C^{2l,\mu}$, $0 < \mu < 1$.

S Problem. The generalized Neumann problem consists in finding the solution $u(x,y)$ of equation (1) in the domain D by boundary conditions

$$\left. \frac{\partial^{k_j - 1} u}{\partial n^{k_j - 1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{2}$$

where $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l \le 2l$ and $n = n_1 + i n_2$ means the unit external normal.

For a polyharmonic equation, this problem was studied by A.V. Bitsadze [1]. Another version of the Neumann problem, based on the variational principle, was previously proposed by A.A. Desin [2]. In [3], problem (1), (2) was investigated for $a_{kr} \neq 0$ and $f \neq 0$ in the space of functions $C_a^{2l-1,\mu}(\overline{D})$.

The report established: a sufficient condition for the Fredholm property of problem (1), (2); equivalence of the Fredholm condition of the problem to the complementarity condition (or Shapiro–Lopatinsky) [4]. Also given is the formula for its user-friendly index ind S.

Funding: The work was supported by Grants AP 05135319 Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan.

References

[1] A. V. Bitsadze, *About some properties of polyharmonic functions* // Differential equations, **24**:5 (1988), 825–831.

[2] A. A. Desin, *The second boundary value problem for a polyharmonic equation in the space* W_2^m//Reports of the USSR Academy of Sciences, **96**:5 (1954), 901–903.

[3] B. D. Koshanov, A. P. Soldatov, *Boundary value problem with normal derivatives for an elliptic equation in the plane*// Differential equations, **52**:12 (2016), 1666–1681.

[4] M. Shehter, *Genral boundary value problems for elliptic partial differential equations*// **12** (1950), 467–480.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATOR ON NON-COMMUTATIVE SYMMETRIC SPACES

Y. NESSIPBAYEV[1,a], K. TULENOV[2,b]

[1,2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[1]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan;
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

[a]*yerlan.nessipbayev@gmail.com*, [b]*tulenov@math.kz*

In this work, we investigate the Hardy-Littlewood maximal operator on non-commutative symmetric spaces. We complete the results of T. Bekjan and J. Shao. Moreover, we refine the main results of the papers [1] and [2].

Funding: The work was partially supported by the grants (No. AP08052004 and No. AP08051978) of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

References

[1] T.N. Bekjan, *Hardy-Littlewood maximal function of τ-measurable operators* // J. Math. Anal. Appl. **322**:1 (2006), 87–96.

[2] J. Shao, *Hardy-Littlewood maximal function on noncommutative Lorentz spaces* // Journal of Inequalities and Applications **2013**:1, 384 (2013), 1–8.

— ⁕⁕⁕ —

WEAK COMPACTNESS CRITERIA IN ORLICZ SPACES

Yerlan NESSIPBAYEV, Kanat TULENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan;

yerlan.nessipbayev@gmail.com; tulenov@math.kz

In this paper, we directly prove the equivalence of K.M. Chong's and De la Vallée Poussin's criteria of weak compactness of a subset K of $L_1(0,1)$ in terms of some Orlicz function. We do so using extensively the theory of so called symmetric spaces. In particular, notions of decreasing rearrangement, Hardy-Littlewood-Pólya submajorization, Marcinkiewicz spaces, Orlicz spaces.

The classical Dunford-Pettis theorem identifies bounded, uniformly integrable subsets of $L_1(\nu)$ with relatively weakly compact sets (see [8, Theorem 23, p.20]). Another characterisation of weak compactness is obtained in the theorem of De la Vallée Poussin (see [8, Theorem 22, p.19-20], see also [9, Theorem 2, p.3]), which states that *a subset K of a space $L_1(\nu)$ is bounded and uniformly integrable if and only if there exists an $N-$function F such that*

$$\sup\left\{\int F(f)d\nu : \ f\in K\right\} < \infty.$$

The second author was supported by the grants No. AP08052004 and No. AP08051978 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

In addition, K.M. Chong obtained the following criterion of weak compactness (see [4, Lemma 4.1]): *a subset K of a space $L_1(\nu)$ is bounded and uniformly integrable if and only if it is contained in the orbit of some positive integrable function (in the sense of the Hardy-Littlewood-Pólya submajorization)*. In fact, It is well known that the orbit is weakly compact. However, the Chong's theorem quite unexpectedly describes weakly compact set as a subset of the orbit of a function.

In this paper we define the relation of weak compactness of a set in Orlicz spaces with boundedness, uniform integrability, orbits of functions, and fundamental functions of these spaces and corollaries arising from them. In particular, we define weak compactness criteria of a set in Orlicz spaces. Also, we study weak compactness criteria of a set in $L_1(0,1)$.

References

[1] J. Alexopoulos, *De La Vallée Poussin's theorem and weakly conpact sets in Orlicz spaces*, 1992.

[2] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators* // Pure and Applied Mathematics, **129**. Academic Press, 1988.

[3] K.M.Chong, *Doubly stichastic operators and rearrangement theorems* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **56** (1976), 309–316.

[4] K.M.Chong, *Spectral orders, uniform integrability and Lebesgue's dominated convergence theorem* // Transactions of the American Mathematical Society, **191** (1974), 395–404.

[5] M.A.Krasnoselskii, Ya.B.Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces* // translated from russian by Leo F.Boron, Noorhoff Ltd., Groningen, 1961.

[6] S. Krein, Y. Petunin, and E. Semenov, *Interpolation of linear operators* // Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[7] A. Marshall, I. Olkin, B. Arnold, *Inequalities: theory of majorization and its applications, second edition* // Springer series in statistics, Springer, New York, 2011.

[8] P. Meyer, *Probability and Potentials* // Blaisdell Publishing Co., 1966.

[9] M.M. Rao, Z. Ren, *The Theory of Orlicz spaces* // Marcel Dekker, New York, 1991.

H. Weyl, *Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **35** (1949), 408–411.

— ⁕⁕⁕ —

ON AN INVERSE PROBLEM FOR THE STOCHASTIC HEAT EQUATION

Gulaiym ORALSYN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

g.oralsyn@list.ru

Nowadays, the theory of stochastic partial differential equations (SPDE in short) is a broad topic and it has a number of applications, see e.g. [1] and [2]. In this talk, the goal is to discuss the inverse problem of recovering the diffusivity coefficient $a(t)$ in the stochastic heat equation

$$\begin{cases} dv(x,t) - a(t)\Delta_x u(x,t)dt = G(x,t)dB_t, \\ u(x,0) = \iota(x), \end{cases} \tag{1}$$

where ι is a given initial datum, which increases no faster than a function $\exp(cx^2)$ (see Theorem I.7.12 in [3]). On the right hand side, B is a usual Brownian motion, generating the filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, and the time-dependent diffusivity coefficient denoted by a is supposed to be a measurable function from $[0,\infty[\times\Omega$ into $\mathbb{R}$ and for each $t \in [0,\infty[$, $a(t)$ is $\mathcal{F}_t$-measurable.

Our result is motivated by a recent progress in this field in [4], where the authors prove that the stochastic heat equation in more general divergence form admits a weak solution (cf. [5]), given by anticipating stochastic integration. In their proof, the authors used some natural assumptions on the noise. In our discussions we keep those assuptions and, in addition, we suppose some additional data at a fixed point which is essential for these type of inverse problems.

Thus, we study an inverse problem of recovering the time-dependent diffusivity coefficient in stochastic heat equations. To the best of our knowledge, the obtained result is new, we did not succeed to find it in previous literature. Furthermore, our approach is different than known studies related to inverse problems for SPDE, that is, we apply representations of solutions in terms of anticipating stochastic integration by considering two direct Cauchy problems simultaneously to find the time-dependent diffusivity coefficient in an explicit form.

An important fact was proved in [4] that a weak solution of the initial problem (1) admits the following representation formula

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y,t,s)G(y,s)dydB_s + \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y,t,0)\iota(y)dy, \tag{2}$$

where ι is a given initial datum, which increases no faster than a function $\exp(cx^2)$ (see Theorem I.7.12 in [3]) and $a(t)$ has to be $\mathcal{F}_t$-measurable and differentaible random variable.

From the linearity of the equation and representaion formula (2) follow the uniqueness of the weak solution. This representaion formula is valid under certain assumtions on the given data (the noise):

A1. The function

$$G : \mathbb{R}^d \times [0,+\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

is a progressively measurable function that satisfies the estimate

$$(1+|x|)^N |G(x,t)| \leq \mathfrak{G}(t), \; N > d/2,$$

where $\mathfrak{G}$ is some adapted process such that

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T \mathfrak{G}(t)^{2q} dt\right) < +\infty$$

The author was supported in parts by the Nazarbayev University program 091019CRP2120.

with some $q > 1$, and

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mathfrak{G}(t) < +\infty\right) = 1.$$

A2. For each $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty)$ the random variable $G(x,t)$ belongs to a Hilbert space $\mathbb{D}^{1,2}$ (in the Malliavin sense) any $t \in [0,T]$ and any $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|D_r G(x,t)| \le \tilde{G}(x,t)\psi(r),$$

where D_r is the Malliavin derivative (see, e.g. [6]),

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T \psi(r)^{2p} dr\right) < +\infty$$

for some $p > q > 2d+4$, and

$$(1+|x|)^N |\widetilde{G}(x,t)| \le \mathfrak{G}(t).$$

We find the diffusity coefficient in an explicit form by using the additional data at a fixed point (with the above assumptions A1-A2), which can be applied to test various numerical algorithms for this type of problems, and it is also relevant to practical applications of stochastic heat equations.

References

[1] É. Pardoux, *Stochastic partial differential equations, a review* // Bull. Sci. Math., **117**:1 (1993), 29–47.

[2] J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, volume 1180 of Lecture Notes in Math., pages 265-439. // Springer, Berlin, 1986.

[3] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type* // Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[4] M. Kleptsyna, A. Piatnitski, and A. Popier, *On the fundamental solution of heat and stochastic heat equations* // arXiv:1906.07604v1 (2019).

[5] E. Alòs, J. A. León, and D. Nualart, *Stochastic heat equation with random coefficients* // Probab. Theory Related Fields, **115**:1 (1999), 41–94.

[6] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics* // Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

CHARACTERIZATIONS OF GENERALIZED HÖLDER SPACES

Joel E. RESTREPO

joel.restrepo@ne.edu.kz

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

We present generalized Hölder type spaces of functions over $\mathbb{R}^n$ [4]. We obtain several characterizations of these spaces by means of the Bari-Stechkin class [1]. A new characterization is given by Djrbashian's generalized fractional operator [2, 3].

Joint work with Humberto Rafeiro, Durvudkhan Suragan, Abdel Yousef.

References

[1] Bari, N.K., Stechkin, S. B., *Best approximations and differential properties of two conjugate functions* // (Russian) Trudy Mosk. Mat. Obshch. 5(1956), 483–522.

[2] Jerbashian, A.M., Jerbashian, V.A., *Functions of ω-bounded type in the half-plane* // Comput. Methods Funct. Theor. (CMFT) 7, 205–238 (2007).

[3] Jerbashian, A.M., Restrepo, J.E., *A boundary property of some subclasses of functions of bounded type in the half-plane* // Fract. Calc. Appl. Anal. 20, (2017).

[4] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* // Princeton University Press, (1970).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

LOGARITHMIC CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG TYPE INEQUALITIES

Bolys SABITBEK

Intitute of Mathematics and Mathematical Modeling
Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

b.sabitbek@math.kz

In this paper, we establish the weighted and logarithmic Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities on a stratified Lie group. As a consequence, we can apply it to prove the weighted ultracontractivity of positive strong solutions to

$$d^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_p (d^\alpha u)^m,$$

where $\mathcal{L}_p f = \nabla_H (|\nabla_H f|^{p-2} \nabla_H f)$ is a p-sub-Laplacian, d is a homogeneous norm associated with a fundamental solution for sub-Laplacian and $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < Q$.

Theorem. *Let $\mathbb{G}$ be a stratified group. Suppose*

$$1 < p < Q, \ \frac{1}{p-1} < m < a_0 < \infty, \ t > 0.$$

Let $u(t)$ be a positive strong solution to $d^\alpha \dot{u} = \mathcal{L}_p (d^\alpha u)^m$. Then for a function $d^\alpha u(0) \in L^{a_0}(\mathbb{G})$ and $d^\alpha u(t) \in L^\infty(\mathbb{G})$, we have

$$||d^\alpha u(t)||_{L^\infty(\mathbb{G})} \leq C(Q, p, m, a_0) ||d^\alpha u(0)||_{L^{a_0}(\mathbb{G})}^{\frac{a_0 p}{a_0 p + Q(m(p-1)-1)}} t^{-\frac{Q}{a_0 p + Q(m(p-1)-1)}},$$

for such $C(Q, p, m, a_0)$ is a positive constant.

The author was supported by the MESRK target program BR05236656 and AP08052000. No new data was collected or generated during the course of this research.

References

[1] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights* // Compositio Mathematica, **53**:3 (1984), 259–275.

[2] J. Merker, *Generalizations of logarithmic Sobolev inequalities* // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, **1**:2 (2008), 329–338.

[3] T. Feng, P. Niu, J. Qiao, *Several Logarithmic Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities and Applications* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **457**:1 (2018), 822–840.

[4] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Hardy inequalities on homogeneous groups* // Birkhäuser, 2019.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

NUMERICAL SOLUTION OF BOLTZMANN'S MOMENT SYSTEM OF EQUATIONS IN THIRD APPROXIMATION WITH NATURAL CONDITIONS OF MIRROW AND DIFFUSION REFLECTION OF PARTICLES FROM THE BOUNDARY

Auzhan SAKABEKOV, Yerkanat AUZHANI, Shynar AKIMZHANOVA

Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

auzhani@gmail.com

In case of one-atom gas any macroscopic system during process of its evolution to an equilibrium state passes 3 stages: initial transition period – described in terms of full function distribution of system, the kinetic period – by means of one-partial distribution function, the hydrodynamic period – by means of five first moments of distribution function. In kinetic regime the behavior of rarefied gas in the space of time and velocity is described by the Boltzmann's equation. It is known from gas dynamic that in most encountered problems there is no need in use of detailed microscopic gas description with help of distribution function. Therefore it is natural to look for less detailed description using macroscopic hydrodynamic variables (density, hydrodynamic velocity, temperature, etc.). As these variables are defined in terms of moments of the distribution function, we are faced with the problem of analyzing the various moments of Boltzmann's equation. Note that the Boltzmann's moment equations are intermediate between Boltzmann (kinetic theory) and hydrodynamic levels of description of state of the rarefied gas and form a class of nonlinear partial differential equations. Existence of such class of equations was noticed by Grad [1], [2] in 1949. He obtained the moment system by expanding the particle distribution function in Hermitte polynomials near the local Maxwell distribution. Grad used cartesian coordinates of velocities and Grad's moment system contained as coefficients such unknown hydrodynamic characteristics like density, temperature, average speed, and others. In work [3] we have obtained the moment system, which differ from Grad's system of equations. And we used spherical velocity coordinates and decomposed distribution function into a series of eigenfunctions of the linearized collision operator, which is the product of Sonin polynomials and spherical functions. The resulting system of equations, which correspond to the partial sum of series and which we called the Boltzmann's moment system of equations, is nonlinear hyperbolic system in relation to the moments of particles distribution function. In this article it is obtained numerical solution of the initial and boundary value problem for the nonstationary nonlinear one-dimensional Boltzmann's six-moment system equations with macroscopic boundary conditions. Numerical experiment was conducted with concrete values of the parameters that entry to the Boltzmann's six-moment system equations and macroscopic boundary conditions. As result we define approximate values of the moments of the particle distribution function such that gas density, gas average speed and the falling to the boundary and reflecting from boundary particle distribution function. We study the initial and boundary value problem for six-moment one-dimensional Boltzmann's system equations with Maxwell-Auzhan boundary conditions[4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = J_1(u,\ w)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A'\frac{\partial u}{\partial x} = J_2(u,\ w),\ t \in (0,T],\quad x \in (-a,a), \tag{1}$$

$$u|_{\ t=0} = u_0\,(x)\,,\quad w|_{\ t=0} = w_0\,(x)\,,\ x \in [-a,a], \tag{2}$$

$$(Aw^- + Bu^-)\big|_{\ x=-a} = \frac{1}{\beta}\,(Aw^+ - Bu^+)\Big|_{x=-a} - \frac{(1-\beta)}{\alpha\beta\sqrt{\pi}}F, t \in [0,\,T]\,, \tag{3}$$

$$(Aw^- - Bu^-)\big|_{\ x=a} = \frac{1}{\beta}(Aw^+ + Bu^+)\Big|_{x=a} + \frac{(1-\beta)}{\alpha\beta\sqrt{\pi}}F, t \in [0,\,T]\,, \tag{4}$$

where

$$A = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix},\quad B = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{2} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$J_1\,(u,\ w) = (\ 0, J_{02}, 0)',\ J_2\,(u,\ w) = (\ 0,\ J_{03},\ J_{11})',$$

$$u = (f_{00}, f_{02}, f_{10})',\ w = (f_{01}, f_{03}, f_{11})',\ F = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{8\sqrt{6}}, \frac{1}{8\sqrt{3}}\right)',$$

A' is the transpose matrix, B is the positive definition matrix; $u_0\,(x)$, $w_0\,(x)$ are the given initial vector-functions; $w^+,\ u^+$ are the vector moments of falling to boundary particle distribution function; $w^-,\ u^-$- are the vector moments of reflecting from boundary particle distribution function. To define approximate solution of the problem(1)-(4) we use finite-difference method. We solve a system of nonlinear algebraic equations with assistance iterative method. Numerical experiment was following data: $[-a,a] \cong [0,1]$,

$$u_0\,(x) = (x,\ 1-x, x\,(1-x))',\ w_0\,(x) = (1+x,\ (1-x)/2, x(1-x)/2)', x \in [0,1],$$

α=38.681, σ_0=4/3, σ_1=0 , σ_2=-4/15 , σ_3=0;h=0.1, τ=0.02. Segment [0,1] divided by to 10 equal parts , h is the step on x , τ is the time step. We give a plot of the vectors u and w for two values of β. β=1 corresponds to pure specular reflection and β=0.8 corresponds to specular reflection and diffusion reflection with the Maxwell distribution.

References

[1] Grad G. *Kinetic theory of rarefied gases* // Comm. Pure Appl. Math, 2, 331, 1949.

[2] Grad G. *Principle of the kinetic theory of gases* // Handuch der Physik, Volume 12, Springer, Berlin, p.p. 205-294.

[3] Sakabekov A. *Initial-boundary value problems for the Boltzmann's moment system equations in an arbitrary approximation* // Sb. Russ. Acad. Sci. Math, 77(1), 57-76 (1994)

[4] Sakabekov A.,Auzhani Y. *Boundary conditions for the onedimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations* // Journal of mathematical physics,55,123507,(2014).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A SOURCE INVERSE PROBLEM FOR THE PSEUDO–PARABOLIC EQUATION FOR A FRACTIONAL STURM–LIOUVILLE OPERATOR

Daurenbek SERIKBAEV, Niyaz TOKMAGAMBETOV

Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Belgium
Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

daurenbek.serikbaev@ugent.be, tokmagambetov@math.kz

A class of inverse problems for restoring the right-hand side of the pseudo-parabolic equation for one fractional Sturm–Liouville operator is considered. The inverse problem of determining the coefficient and the right hand side of a pseudo-parabolic equation from a local redefinition a state that has important applications in various fields of applied science and engineering. The study of inverse problems for pseudo-parabolic equations began in the 1980s (see [1]).

In this paper we consider pseudo–parabolic equation generated by fractional Sturm–Liouville operator with Caputo time-fractional derivative. We investigate the equation

$$\mathcal{D}_t^\alpha[u(t,x) + \partial_{+a,x}^\alpha D_{b-,x}^\alpha u(t,x)] + \partial_{+a,x}^\alpha D_{b-,x}^\alpha u(t,x) = f(x), \tag{1}$$

for $(t,x) \in \Omega = \{(t,x)|\ 0 < t \leq T < \infty,\ a \leq x \leq b\}$, where $\mathcal{D}_t^\alpha$ is the Caputo derivative and $\partial_{+a,x}^\alpha D_{b-,x}^\alpha$ is the fractional Sturm–Liouville operator. In many physical problems, it is required to determine the coefficients or the right-hand side (the original term, in the case of the diffusion equation) in the differential equation from some available information; These problems are known as inverse problems.

Funding:The authors were supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MESRK) Grant AP05130994. No new data was collected or generated during the course of research.

References

[1] W. Rundell. *Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data* // Appl. Anal. 10:231–242, 1980.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ON THE SOLUTIONS OF A FRACTIONAL q-DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE COMPOSITE FRACTIONAL q-DERIVATIVE

S. SHAIMARDAN, N.S. TOKMAGAMBETOV

L. N. Gumilyev Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

shaimardan.serik@gmail.com, nariman.tokmagambetov@gmail.com

Let $0 < q < 1$. Then the q-analogue differential operator $D_q f(x)$ is [1]:

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}.$$

This work was supported by Scientific Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan grant AP05130975.

and the q-derivatives $D_q^n(f(x))$ of higher order are defined inductively as follows:

$$D_q^0(f(x)) := f(x), \quad D_q^n(f(x)) := D_q\left(D_q^{n-1}f(x)\right), (n = 1, 2, 3, \dots)$$

The q-integral (or Jackson integral) $\int\limits_a^b f(x)d_qx$ is defined by

$$\int\limits_0^a f(x)d_qx := (1-q)a\sum_{m=0}^{\infty} q^m f(aq^m).$$

The Riemann-Liouville q-fractional integrals $I_{a+}^{\alpha} f$ of order $\alpha > 0$ are defined by

$$\left(I_{q,a+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int\limits_a^x (x-qt)_q^{\alpha-1} f(t)d_qt.$$

Let $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$ and $0 \leq \beta \leq 1$. We define the generalized fractional q-derivative $D_{q,a+}^{\alpha,\beta} f$ as follows:

$$\left(D_{q,a+}^{\alpha,\beta} f\right)(x) := \left(I_{q,a+}^{\beta(n-\alpha)} D_q^n \left(I_{q,a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f\right)\right)(x) = \left(I_{q,a+}^{\beta(n-\alpha)} D_{q,a+}^{\alpha+\beta n-\alpha\beta} f\right)(x).$$

In this work we give conditions for a unique global solution to the Cauchy type problem

$$\left(D_{q,a+}^{\alpha,\beta} y\right)(x) \quad = \quad f\left(x, y(x)\right), \quad n-1 < \alpha \leq n; n \in \mathbb{N}, 0 \leq \beta \leq 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a+}\left(D_q^k I_{q,a+}^{(n-\alpha)(1-\beta)} y\right)(x) = b_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots n-1, \tag{2}$$

in the space $L_q^p[a,b] := \left\{ f : \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p d_qx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$ which are the q-extensions of the main results given in [2, Proposition 2 and Theorem 1] (see also [3, Proposition 3.1, Proposition 3.2 and Theorem 3.1]).

Our main result reads:

Theorem. *Let $a > 0$, $G \subset \mathbb{R}$ be an open set and $f(.,.) : [a,b] \times G \to \mathbb{R}$ be a function such that $f(x, y(x)) \in L_q^1[a,b]$ for any $y \in G$ and satisfying the condition*

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq C\,|y_1(x) - y_2(x)|\,.$$

If $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma = (n-\alpha)(1-\beta)$, $I_{q,a+}^{\gamma} y \in AC_q^n[a,b]$, then there exists a unique solution $y(x) \in L_{\alpha,\beta,q}^1[a,b]$ to the Cauchy type problem (1)-(2).

References

[1] P. Cheung and V. Kac, Quantum calculus, Edwards Brothers // Inc., Ann Arbor, MI, USA, 2000.

[2] T. Sandev and Z. Tomovski, Fractional Equations and Models Theory and Applications // Cham, Switzerland, Singapore, 2019.

[3] Z. Tomovski, Generalized Cauchy type problems for nonlinear fractional differential equations with composite fractional derivative operator // Nonlinear Anal. 75 (2012), 3364-3384.

— ⁂ —

UNCERTAINTY TYPE PRINCIPLES

Dina SHILIBEKOVA

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

dina.shilibekova@nu.edu.kz

In this paper, we provide with the general functional version of Uncertainty type principles on one of the special cases of the homogeneous groups, namely the abelian group $(\mathbb{R}^n, +)$. We will obtain several inequalities of uncertainty type principles of the form

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \phi(|x|) \, dx \le p \left(\int_\Omega \frac{\left|\mathcal{R}_{|x|} f\right|^p \, |\tilde{\phi}(|x|)^p|}{|x|^{n-p}} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{|x|^n} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}, \qquad 1 < p < +\infty$$

acting on functions with radial derivative $\mathcal{R}_{|x|}$ and considering the known cases of $p = n$ and $p = 2$. Moreover, establishing the sharp remainder term for Steklov inequality in $\mathbb{R}$ we will show the existence of the optimal constant and that it is positive.

Theorem.
Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open bounded set. Then for any integrable radial function ϕ, and for any $f \in C_0^1(\Omega)$ we have the following generalized uncertainty principle

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \phi(|x|) \, dx \le p \left(\int_\Omega \frac{\left|\mathcal{R}_{|x|} f\right|^p \, |\tilde{\phi}(|x|)^p|}{|x|^{n-p}} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{|x|^n} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

for $1 < p < +\infty$ and where, $\tilde{\phi}(|x|) = \int_0^r \phi(|x|) \, |x|^{n-1} \, dx$ and $\mathcal{R}_{|x|} := \frac{d}{d|x|}$.

References

[1] Balinsky A., Evans W. and Lewis R., *The analysis and geometry of Hardy's inequality.* Universitext, Springer, 2015.

[2] Maz'ya V., *Seventy Five (Thousand) Unsolved Problems in Analysis and Partial Differential equations* // Integral Equations and Operator Theory, 90:25 2018.

[3] Ozawa T. and Suragan D., *Representation formulae for the higher order Steklov and L^{2^m}-Friedrichs inequalities* // Mathematics Subject Classification, 2010.

[4] Rudin W., *Real and complex analysis* // McGraw-Hill international editions, 1987.

[5] Ruzhansky M. and Suragan D., *Critical Hardy inequalities* // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, 44 (2019), 1159-1174.

[6] Witkowski A., *On Young's inequality* // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7 (2006), no. 5.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SHARP REMAINDER TERMS FOR HIGHER ORDER STEKLOV TYPE INEQUALITIES FOR VECTOR FIELDS

Durvudkhan SURAGAN

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, we discuss sharp remainder terms for the higher order Steklov inequality for vector fields which imply short and direct proofs of the sharp (classical) higher order Steklov inequalities. The obtained results directly imply sharp Steklov type inequalities for some vector fields satisfying Hörmander's condition, for example. We also give representation formulae for the L^{2^m}-Friedrichs inequalities for vector fields. This talk is based on our recent work with Tohru Ozawa, Waseda University.

Particularly, in the Euclidean case, our results directly imply the following theorems.

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a connected domain, for which the divergence theorem is true. We have the sharp remainder of the higher order Steklov inequality*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla^{2m} u\right|^2 dx - \lambda_1^{2m} \int_\Omega |u|^2 dx \\ = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_1^{2(m-1-j)} \left(\int_\Omega \left|\Delta^{j+1} u + \lambda_1 \Delta^j u\right|^2 dx + 2\lambda_1 \int_\Omega \left| \nabla \Delta^j u - \frac{\nabla u_1}{u_1} \Delta^j u \right|^2 dx \right) \geq 0, \quad (1)\end{aligned}$$

where $m = 1, 2, \ldots,$ and

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla^{2m+1} u\right|^2 dx - \lambda_1^{2m+1} \int_\Omega |u|^2 dx = \int_\Omega \left| \nabla \Delta^m u - \frac{\nabla u_1}{u_1} \Delta^m u \right|^2 dx \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_1^{2(m-j)-1} \left(\int_\Omega \left|\Delta^{j+1} u + \lambda_1 \Delta^j u\right|^2 dx + 2\lambda_1 \int_\Omega \left| \nabla \Delta^j u - \frac{\nabla u_1}{u_1} \Delta^j u \right|^2 dx \right) \geq 0, \quad (2)\end{aligned}$$

where $m = 0, 1, \ldots,$ for all $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Here u_1 is the ground state of the (minus) Dirichlet Laplacian in Ω and λ_1 is the corresponding eigenvalue. The equality cases hold if and only if u is proportional to u_1.

Theorem 2. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a connected domain, for which the divergence theorem is true. We have the remainder of the L^{2^m}-Friedrichs inequality*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p_m} dx - (\lambda_1 - \sigma_m) \int_\Omega |u|^{p_m} dx \\ = \sum_{j=1}^{m-1} \int_\Omega \left| |\nabla (u^{p_{m-j-1}})|^{p_j} - 2^{p_j - 1} u^{p_{m-1}} \right|^2 dx + \int_\Omega \left| \nabla (u^{p_{m-1}}) - \frac{\nabla u_1}{u_1} u^{p_{m-1}} \right|^2 dx \geq 0 \quad (3)\end{aligned}$$

for all $u \in C_0^1(\Omega)$. Here $\sigma_m = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m-1} 4^{p_j}$, $m \in \mathbb{N}$, $p_j = 2^j$, u_1 is the ground state of the minus Dirichlet Laplacian in Ω and λ_1 is the corresponding eigenvalue. We also have the asymtotics $\lim_{m\to\infty} \sigma_m^{\frac{1}{p_m}} = 2$.

The author was supported in parts by the Nazarbayev University program 091019CRP2120 and the Nazarbayev University grant 240919FD3901.

SOME APPLICATIONS OF POTENTIAL THEORY FOR DEGENERATE-TYPE DIFFUSION EQUATION

Kassymkhan TENGEL

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan

kassymkhan.tengel@nu.edu.kz

Consider the following one-dimensional degenerate-type parabolic equation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

in a cylindric domain $(x,t) \in \Omega = (x \in (0,1), t \in (0,T))$ with initial condition

$$u(x,0) = \phi(x). \tag{2}$$

Here the coefficient $a(t)$ satisfies:

(a) $a(t)$ is nonnegative and becomes zero only at isolated points;

(b) A function $a_1(t)$ defined by

$$a_1(t) := \int_0^t a(z)dz$$

is positive for all $t > 0$, allowing $a(t)$ to be negative in an interval.[3]

Lemma. *Under the condition (b) the fundamental solution of equation (1) can be represented as*

$$\epsilon_a(x,t) := \epsilon(x, a_1(t)) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{(4\pi * a_1(t))}} e^{-\frac{x^2}{4a_1(t)}} \tag{3}$$

where θ is the Heaviside function.

Theorem 1. *The degenerate parabolic potential defined by*

$$v(x,t) = \int_0^1 \epsilon_a(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi \tag{4}$$

is called the Poisson potential. Let a(t) satisfy the assumption (b). Then the Poisson integral (4) solves the equation (1). Also, it satisfies the initial condition (2).

We are interested in the question that what boundary conditions can be put on the the degenerate parabolic potential (Poisson integral) on the lateral boundary of the cylindrical domain so that the degenerate parabolic equation with these boundary conditions would have a unique solution in the cylindrical domain, which is still given by the same formula of the degenerate parabolic potential. These kind of problems first appeared in Kac's lectures. Hence, the analogical questions for the elliptic and hypoelliptic cases are called Kac's problems. To do so, the following theorem will help us. [1].

Theorem 2. *For any $a(t) \in C^{\frac{\alpha}{2}}(0,T)$ the generalised heat potential is a unique solution of the problem (1)-(2) with boundary conditions [4]*

$$I_u(x,t)_{x=1} = I_u(x,t)_{x=0} = 0,$$

where

$$I_u(x,t) := -\frac{u(x,t)a(t)}{2} + \int_0^t \left[\frac{\partial \epsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi} a(\tau)u(\xi,\tau) - \epsilon_a(x-\xi,t-\tau)a(\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right]\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1} d\tau = 0,$$

$$(x,t) \in \Omega.$$

References

[1] Kac, M. *On some connections between probability theory and differential and integral equations* // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, pp. 189215. University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1951)

[2] Kalmenov, S.T., Arepova, G. D.. *On a heat and mass transfer model for the locally inhomogeneous initial data* // AIP Conference

[3] Malyshev, I. (1991). *On the parabolic potentials in degenerate-type heat equation* // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 4(2), pp.147-160.

[4] Sadybekov, M. and Oralsyn, G. (2016). *On trace formulae of the generalised heat potential operator* // Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 9(1), pp.143-150. Proceedings (Vol. 1789, No. 1, p. 040028). AIP Publishing.

— ⁂ —

VERY WEAK SOLUTIONS

Niyaz TOKMAGAMBETOV

Institution of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

tokmagambetov@math.kz

Here, we study the Cauchy problem for the Landau Hamiltonian wave equation, with time dependent irregular (distributional) electromagnetic field and similarly irregular velocity. For such equations, we describe the notion of a 'very weak solution' adapted to the type of solutions that exist for regular coefficients. The construction is based on considering Friedrichs–type mollifier of the coefficients and corresponding classical solutions, and their quantitative behaviour in the regularising parameter. We show that even for distributional coefficients, the Cauchy problem does have a very weak solution, and that this notion leads to classical or distributional type solutions under conditions when such solutions also exist.

Joint work with Professor Michael Ruzhansky.

— ⁂ —

VAN DER CORPUT LEMMAS INVOLVING MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS

Berikbol T. TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

torebek@math.kz

In harmonic analysis, one of the most important estimates is the van der Corput lemma, which is an estimate of the oscillatory integrals. This estimate was first obtained by the Dutch mathematician Johannes Gaultherus van der Corput [1] and named in his honour. While the paper [1] was published

This research is financially supported by grant no. AP05131756 of the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

in Mathematische Annalen in 1921, he submitted it there on 17 December 1920. Therefore, it seems appropriate to us to dedicate this paper to the 100^{th} anniversary of this lemma.

In this work, we study analogues of the van der Corput lemmas involving Mittag-Leffler functions. The generalisation is that we replace the exponential function with the Mittag-Leffler-type function, to study oscillatory type integrals appearing in the analysis of time-fractional partial differential equations. Several generalisations of the first and second van der Corput lemmas are proved. Optimal estimates on decay orders for particular cases of the Mittag-Leffler functions are also obtained. As an application of the above results, the generalised Riemann-Lebesgue lemma and the Cauchy problem for the time-fractional Schrödinger equation are considered.

This is joint work with Dr., Professor Michael Ruzhansky from Ghent University, Belgium (see [2]).

References

[1] J. G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen* // Math. Ann., **84**: 1-2 (1921), 53–79.

[2] M. Ruzhansky, B. T. Torebek, *Van der Corput lemmas for Mittag-Leffler functions* // ArXiv, (2020), arXiv:2002.07492.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

REGULAR BOUNDARY CONDITIONS FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

Lyailya ZHAPSARBAYEVA[1], Murat MUKHAMBETKALIEV[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[1,2]al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

leylazhk67@gmail.com

In this work the regular boundary conditions are established for fourth order differential operator. An operator with nondegenerated boundary conditions may have incomplete system of root functions in $L_2(0,1)$. At the same time an operator with regular boundary conditions has complete system of root functions in $L_2(0,1)$ [1]. We study the following boundary value problem for fourth order differential equation

$$y^{(IV)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y,\ p_k(x) \in C^{(k)}[0,1],\ k = 0,\dots,2, \tag{1}$$

with the normalized boundary conditions [2]

$$U_\nu(y) = U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0,\ \ \nu = 1,\dots,4, \tag{2}$$

where

$$U_{\nu 0}(y) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(0),$$

$$U_{\nu 1}(y) = \sum_{j=0}^{3} \beta_{\nu j} y^{(j)}(1),\ \ \nu = 1,\dots,4,$$

The authors are supported by the grants No.AP05131292 and No.AP05131845 of Science Committee of the MES of the RK

in the interval $(0,1)$. Here $\alpha_{\nu j}$ and $\beta_{\nu j}$ are arbitrary constant numbers, moreover for each value ν at least one of the numbers $\alpha_{\nu j}$ and $\beta_{\nu j}$ are not equal to zero. The operator that corresponding to the boundary value problem (1), (2) with domain of definition $D(L) \subset W_2^4[0,1]$ we denote by L. In the domain of definition $D(L)$ for the operator L the regular boundary conditions are highlighted.

References

[1] A.A. Shkalikov, *On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator* // Uspekhi. Matem. nauk, **34**:5 (1979), 249–250.

[2] M. A. Naimark, *Linear differential operators.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2009.

[3] L.K. Zhapsarbayeva, B.E. Kanguzhin and A.A., Seitova,*Asymptotic of eigenvalues of double differentiation operator with Birkhoff regular boundary conditions* // Matematichesky zhurnal, **18**:2 (2018), 107–124. (in Russian)

— ⁕ ⁕ ⁕ —

GEOMETRIC HARDY INEQUALITY ON ENGEL GROUP

Akmerei ZHARKYNBEK

Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Akmerei97-26@mail.ru@mail.ru

A well-known stratified group with step three is the Engel group, which can be denoted by $\mathbb{E}$. Topologically $\mathbb{E}$ is $\mathbb{R}^4$ with the group law of $\mathbb{E}$, which is given by

$$x \circ y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + P_1, x_4 + y_4 + P_2),$$

where

$$\begin{aligned} P_1 =& \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1), \\ P_2 =& \frac{1}{2}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \frac{1}{12}(x_1^2 y_2 - x_1 y_1 (x_2 + y_2) + x_2 y_1^2). \end{aligned}$$

The left-invariant vector fields of $\mathbb{E}$ are generated by the basis

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \Big(\frac{x_3}{2} - \frac{x_1 x_2}{12}\Big)\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2}{12}\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Theorem *Let $\mathbb{E}^+ = \{x := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E} \,|\, \langle x, \nu\rangle > 0\}$ be a half-space of the Engel group $\mathbb{E}$. Then for all $\beta \in \mathbb{R}$ and $u \in C_0^\infty(\mathbb{E}^+)$ we have*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}^+} |\nabla_{\mathbb{E}} u|^2 dx \geq & C_1(\beta) \int_{\mathbb{E}^+} \frac{\langle X_1(x), \nu\rangle^2 + \langle X_2(x), \nu\rangle^2}{dist(x, \partial\mathbb{E}^+)^2} |u|^2 dx \\ & + \frac{\beta}{3} \int_{\mathbb{E}^+} \frac{x_2 \nu_4}{dist(x, \partial\mathbb{E}^+)} |u|^2 dx, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\nabla_{\mathbb{E}} = \{X_1, X_2\}$, $\nu := (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$, and $C_1(\beta) = -(\beta^2 + \beta)$.

The author was supported by the AP08052000. No new data was collected or generated during the course of this research.

References

[1] S., Larson, *Geometric Hardy inequalities for the sub-elliptic Laplacian on convex domain in the Heisenberg group*// Bull. Math. Sci., **6** (2016), 335–352.

[2] J.W., Luan, and Q.H., Yang, *A Hardy type inequality in the half-space on* $\mathbb{R}^n$ *and Heisenberg group* // J. Math. Anal. Appl. 347 (2008), 645-651.

[3] M. Ruzhansky, D. Suragan, *Hardy inequalities on homogeneous groups* // Birkhäuser, 2019.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

О ДРОБНОМ АНАЛОГЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Абдуразик АБДУВАИТОВ[a], Мухаббат ТАЖИМЕТОВА[b]

Университет им. Ахмеда Ясави , Туркестан, Казахстан

[a]*abduvaitovaa96@mail.ru*, [b]*tazimetovam95@mail.ru*

Пусть $\Omega = \left\{x \in R^2 : |x| < 1\right\}$ - единичный круг, $\partial\Omega$ -единичная окружность. Обозначим $r = |x|, \varphi = arctg\frac{x_2}{x_1}$ и пусть $\delta = r\frac{\partial}{\partial r}$ - оператор Дирака, $\delta^k = \delta\left(\delta^{k-1}\right), k = 1, 2, \ldots$.

Для любого $\alpha > 0$ следующее выражение

$$I^{\alpha}[u](r,\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(s,\varphi)}{s}ds$$

называется интегралом порядка α в смысле Адамара [1]. В дальнейшем будем считать $I^0(u)(r,\varphi) = u(r,\varphi)$.

Пусть $\mu \geq 0$. Введем операторы

$$I^{\alpha}_{\mu}[u](r,\varphi) = r^{-\mu}I^{\alpha}[r^{\mu}u](r,\varphi),$$

$$D^{\alpha}_{\mu}[u](r,\varphi) = r^{-\mu}I^{l-\alpha}\left[\delta^l[r^{\mu},u]\right](r,\varphi), \quad l-1 < \alpha \leq l, l \geq 1.$$

Если $\mu = 0$, то $I^{\alpha}_0 = I^{\alpha}$, а D^{α}_0 совпадает с оператором дифференцирование порядка α в смысле Адамара-Капуто [1].

Пусть $\mu \geq 0$, $l-1 < \alpha \leq l, \alpha > \alpha_m > \ldots > \alpha_m \geq 0$, $0 \leq p_j-$ действительные числа, $j = 1, 2, \ldots, m$. Введем оператор $P_{\alpha,\mu}(D) = D^{\alpha}_{\mu} + \sum\limits_{j=1}^{m} p_j D^{\alpha_j}_{\mu}$

Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \ (r,\varphi) \in \Omega, \tag{1}$$

$$P_{\alpha,\mu}(D)\,u(r,\varphi) = g(\varphi), \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{2}$$

В случае $\alpha = l$ методом математической индукции можно доказать справедливость равенства

$$D^l_{\mu}[u](r,\varphi) = \delta^l_{\mu}[u](r,\varphi) \equiv \left(r\frac{\partial}{\partial r} + \mu\right)^l u(r,\varphi).$$

Работа была поддержана грантом AP05131268 КН МОН РК

Далее, если $x \in \partial\Omega$, то

$$r\frac{\partial u(x)}{\partial r}\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega},$$

где $\nu-$ вектор нормали к $\partial\Omega$. Поэтому в случае $\alpha = 1, \mu = 0$ оператор D_0^1 на $\partial\Omega$ совпадает с производной по нормали к окружности $\partial\Omega$. Так как

$$D_\mu^1 u\,(r,\varphi)\,|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,(r,\varphi) + \mu u\,(r,\varphi)\,|_{\partial\Omega}\ ,$$

то в случае $p_j = 0, j = 1, 2, ..., m$ задача $(1)\,,(2)$ совпадает с задачей Робена $(\mu > 0)$ и задачей Неймана $(\mu = 0)$

Таким образом, в случае $\mu = 0$ мы получаем обобщение задачи Неймана, а в случае $\mu > 0$ обобщение задачи Робена для дробных значений граничных операторов.

Отметим, что задача (1)-(2) в случае $0 < \alpha \leq 1$ изучена в работе [2].

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. *Пусть $\mu \geq 0$, $p_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m$ и решение задачи (1),(2) существует. Тогда*

1) если $\mu > 0$ или $\mu = 0$ и $\alpha_m = 0, p_m \neq 0$, то решение единственно

2) если $\mu = 0$ и $\alpha_m > 0$ или $\alpha_m = 0$ и $p_m = 0$, то решение задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Теорема 2. *Пусть $\mu \geq 0, \alpha > \alpha_1 > ... > \alpha_m \geq 0, 0 \leq p_j, j = 1, 2, ..., m$, $0 < \lambda < 1, f(\varphi) \in C^{\lambda+1}\,[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда*

1) если $\mu > 0$ или $\mu = 0$ и $\alpha_m = 0, p_m \neq 0$, то решение задачи (1),(2) существует и единственно;

2) если $\mu = 0$ и $\alpha_m > 0$ или $\alpha_m = 0$ и $p_m = 0$, то для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} g\,(\varphi) d\varphi = 0.$$

Теорема 1 доказывается сведением основной задачи к задаче Дирихле. При доказательстве теоремы 2 используется метод разложение в ряд Фурье.

Список литературы

[1] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations* // Elsevier, North-Holland, 2006.

[2] B. Turmetov, K. Nazarova, *On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation* // Mathematische Nachrichten, **293**:1, 169–177 (2020).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Нурлан АБИЕВ

Таразский государственный университет им. М. Х. Дулати, Тараз, Казахстан

abievn@mail.ru

Авторы [1,2] доказывали, что на обобщенных пространствах Уоллаха нормализованный поток Риччи редуцируется к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i := -2x_i \left(\mathbf{r_i} - \left(\mathbf{r_1}a_1^{-1} + \mathbf{r_2}a_2^{-1} + \mathbf{r_3}a_3^{-1}\right)\left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}\right)^{-1}\right), \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

относительно неизвестных параметров $x_i = x_i(t) > 0$ инвариантной римановой метрики рассматриваемого пространства, где $\mathbf{r_i}$ означают главные значения кривизны Риччи этой метрики и вычисляются по формулам $\mathbf{r_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{a_i}{2}\left(\frac{x_i}{x_j x_k} - \frac{x_k}{x_i x_j} - \frac{x_j}{x_i x_k}\right)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$; числа $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1/2]$ характеризуют обобщенное пространство Уоллаха (историю вопроса можно найти в [3] и ссылках там). Согласно [1], (1) можно заменить системой

$$\dot{x}_1 = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

где $f_i(x_1,x_2) \equiv F_i(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$, $\varphi(x_1,x_2) = x_1^{-a_3/a_1} x_2^{-a_3/a_2}$. Пусть $\lambda_{1,2} = 0.5\,(\rho \pm \sqrt{\sigma})$ — собственные значения матрицы Якоби J системы (2), где $\sigma := \rho^2 - 4\delta$, $\rho := \operatorname{trace}(J)$ и $\delta := \det(J)$. Особая точка системы (2) называется *невырожденной*, если $\delta \neq 0$. *Вырожденная* ($\delta = 0$) особая точка может быть *полу-гиперболической* ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$), *нильпотентной* ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $J \neq 0$) или *линейно нулевой* ($J = 0$). В настоящей работе мы ослабляем ограничения $a_i \in (0, 1/2]$ и рассматриваем (2) как абстрактную динамическую систему, отвлеченную от геометрического смысла. Пусть $\mathcal{A} := a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$. Нами доказаны

Теорема 1. *При $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$ система (2) допускает вырожденные особые точки следующих типов: линейно нулевая особая точка (единственное седло $(1,1)$ с шестью гиперболическими секторами) при $(a_1,a_2,a_3) = (1/4, 1/4, 1/4)$; полу-гиперболическая особая точка (седло, неустойчивый узел или седло-узел) при всех остальных значениях параметров a_i.*

Теорема 2. *При $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$ система (2) допускает невырожденные особые точки следующих типов: узел (устойчивый или неустойчивый), седло, фокус или центр.*

Стоит отметить, что результаты теоремы 1 были получены в [1,2] при более строгих предположениях $(a_1,a_2,a_3) \in (0,1/2]^3$. Однако сказанное не относится к теореме 2: при $(a_1,a_2,a_3) \in (0,1/2]^3$ система (2) не имеет фокусов и центров. Это объясняется тем, что знак σ совпадает со знаком квадратичной формы, матрица которой имеет собственные значения 0, $2\mathcal{A}$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \mathcal{A}$ (см. [1]). Поэтому при $(a_1,a_2,a_3) \in (0,1/2]^3$ мы имеем неравенство $\sigma \geq 0$, означающее отсутствие фокусов и центров независимо от значений δ (понятно, что их появлению способствовали условия $\delta \neq 0$ и $\mathcal{A} < 0$).

Список литературы

[1] N. Abiev, A. Arvanitoyeorgos, Yu. Nikonorov, P. Siasos, *The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces* // Differ. Geom. Appl., **35**:Suppl., 26–43 (2014).

[2] Н. А. Абиев, А. Арванитойоргос, Ю. Г. Никоноров, П. Сиасос, *Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха* // Мат. форум, **8**:4, 25–42 (2014).

[3] Yu. Nikonorov, *Classification of generalized Wallach spaces* // Geom. Dedicata, **181**:1, 193–212 (2016).

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

А.М. АБЫЛАЕВА, Б.Н. СЕЙЛБЕКОВ

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

abylayeva_b@mail.ru, bolat_3084@mail.ru

Пусть $0 < p, q < \infty, 0 < \alpha < 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Весовые функции $v : I \to I$ – неотрицательные локально интегрируемые и u – невозрастающая функция на $I = (0; \infty)$.

Положим, что $\frac{dW(x)}{dx} \equiv w(x)$ почти всюду на $x \in I$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности из $L_{p,w} = L_{p,w}(I)$ в $L_{q,\nu} = L_{q,\nu}(I)$ интегрального оператора вида

$$K_{\alpha,\gamma} f(x) = \int_0^x ln \frac{W(x)}{W(x) - W(s)} \frac{u(s) W^{\gamma-1}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I, \tag{1}$$

где $L_{p,w}$ – пространство всех измеримых функций $f : I \to R$, для которых конечен следующий функционал

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(s) ds \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty.$$

В работе [1], при $ln(\cdot) = 1$ и $\gamma - 1 = \beta$ получены критерии ограниченности и компактности оператора (1) из $L_{p,w}$ в $L_{q,\nu}$. В работе [2] для оператора K вида

$$K f(x) = \int_0^x s^{\gamma-1} ln \frac{x}{x-s} f(s) ds$$

получены критерии ограниченности и компактности оператора K из L_p в L_q.

Теорема. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \le q < \infty$ и $\gamma \ge 1$. Пусть u не возрастающая функция на I. Тогда оператор $K_{\alpha,\gamma}$ ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,\nu}$ тогда и только тогда, когда $A_{\alpha,\gamma} < \infty$,

где $A_{\alpha,\gamma}(s) = \sup\limits_{s>0} \left(\int_0^s u^{p'}(t) W^{p'\gamma}(t) w(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^\infty W^{q(\alpha-2)}(x) \nu(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$.

При этим $\|K_{\alpha,\gamma}\| \approx A_{\alpha,\gamma}$.

Список литературы

[1] A.M.Abylayeva, R.Oinarov and L.-E.Persson, *Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators.* // Journal of Inequal. and Appl. (JIA), є 324, 2016.

[2] A.M.Abylayeva and L.-E.Person, *Hardy type inequalities and compactness of a class of integral operators with logarithmic singularities.* // Math. Inequal. Appl. (MIA), V.21, є 1, 2018, P.201-215.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант №AP05130975, 2018-2020 годы).

ОПИСАНИЕ ЗАМЫКАНИЯ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА СОБОЛЕВА

Адиева АЙНАГУЛЬ

Евразийский национальный университет имени Л.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

a.aina70@mail.ru

Пусть $T \geq 0$, $1 < p < \infty, I_T = (T, \infty)$ и $W^2_{p,v}(r) \equiv W^2_{p,v}(r, I_T)$ пространство функций $f : I_T \to R$ локально абсолютно непрерывных на I_T вместе с функцией $D^1_r f$ и для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^2_{p,v}(r)} = \|D^2_r f\|_{p,v} + |D^1_r f(T)| + |f(T)|, \tag{1}$$

где $\|g\|_{p,v} = \left(\int\limits_T^\infty v(t)|g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ - норма весового пространства $L_{p,v}(I) \equiv L_{p,v}$.

Пусть $\mathring{M}_p(I_T) = \{f \in W^2_{p,v}(r) \colon suppf \subset I_T, suppf \ is \ compact\}$.

Обозначим через $\mathring{W}^2_{p,v}(r) = \mathring{W}^2_{p,v}(r, I_T)$ замыкание множества $\mathring{M}_p$ по норме (1).

Пространство $\mathring{W}^2_{p,v}(r)$ описывается в терминах элементов пространства $W^2_{p,v}(r)$.

Лемма 1. *Пусть $T \geq 0$, $1 < p < \infty$. Тогда $f(T) = 0, D^1_r f(T) = 0$ для любого $f \in \mathring{W}^2_{p,v}(r)$.*

Лемма 2. *Пусть $T \geq 0$, $1 < p < \infty$ и выполнено*

$$\int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)dt < \infty, \ \int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_T^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt < \infty. \tag{2}$$

Тогда для любого $f \in W^2_{p,v}(r)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{t\to\infty} D^1_r f(t) \equiv D^1_r f(\infty)$ и

$$\lim_{t\to\infty}\left[f(t) - \int\limits_T^t r^{-1}(x)dx D^1_r f(\infty)\right] \equiv d(f). \tag{3}$$

Следствие 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (2). Тогда, $D^1_r f(\infty) = 0, f(\infty) = 0$ для любого $f \in \mathring{W}^2_{p,v}(r)$.*

Теперь, рассмотрим случай

$$\int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)dt < \infty, \int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)\left(\int\limits_T^t r^{-1}(x)dx\right)^{p'} dt = \infty \tag{4}$$

и

$$\int\limits_T^\infty v^{1-p'}(t)dt = \infty. \tag{5}$$

где $T \geq 0$.

Лемма 3. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (4). Тогда для любого $f \in W^2_{p,v}(r)$ существует конечный $D^1_r f(\infty)$ и $D^1_r f(\infty) = 0$ для любого $f \in \mathring{W}^2_{p,v}(r)$.*

Положим

$$LRW^2_{p,v}(r) = \left\{f \in W^2_{p,v}(r) : f(T) = f(\infty) = 0, D^1_r f(T) = D^1_r f(\infty) = 0\right\}.$$

$$LR'W^2_{p,v}(r) = \left\{f \in W^2_{p,v}(r) : f(T) = 0, D^1_r f(T) = D^1_r f(\infty) = 0\right\},$$

$$LW^2_{p,v}(r) = \{f \in W^2_{p,v}(r) : f(T) = 0, D^1_r f(T) = 0\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*
(i) если выполнено (2), то

$$\mathring{W}^2_{p,v}(r) \equiv LRW^2_{p,v}(r); \tag{6}$$

(ii) если выполнено (4), то

$$\mathring{W}^2_{p,v}(r) \equiv LR'W^2_{p,v}(r); \tag{7}$$

(iii) если выполнено (5), то

$$\mathring{W}^2_{p,v}(r) \equiv LW^2_{p,v}(r). \tag{8}$$

Список литературы

[1] В.Г.Мазья, *Пространства С.Л.Соболева,*//Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

— ⁂ —

ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА СОПРЯЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Гулам Хазрат АЙМАЛ РАСА, Г.С. АУЗЕРХАН

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

aimal.rasa14@gmail.com, auzerkhanova@gmail.com

В функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор B_{max}, порожденный линейным дифференциальным выражением третьего порядка с гладкими коэффициентами

$$L(y) = y^{(3)}(x) + P_1(x)y^{(1)}(x) + P_0(x)y(x), \tag{1}$$

здесь $P_0(x)$ - непрерывные функций в фиксированном конечном на интервале $[0,1]$.
Краевые условия. В данном пункте напомним известные свойства указанных операторов. Краевые условия

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, j = 1,2,3, \tag{2}$$

где

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 2$$

выбранные согласно теореме Михайлова-Кесельмана, часто называют усиленно-регулярными граничными условиями /4/. Поэтому собственные значения оператора S_0 асимптотические простые и отделены /3/, то есть найдется положительное число σ при котором любые два собственных значения оператора S_0 отстоят друг от друга на расстояние больше чем ?. Также из работ /1, 2/ следует, что система собственных и присоединенных функций оператора S_0 образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Выпишем сопряженные граничные условия к граничным условиям Михайлова-Кесельмана. Будем считать, что

$$3 > \gamma_3 \geq \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 0$$

Случай А. Если все $\gamma_j, j = 1, ..., n$ разные, то

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 2$$

Случай Б. Если $\gamma_j = \gamma_{j+1}$, то выбираем $U_j(y) = y^{(\gamma_j)}(0), U_{j+1}(y) = y^{(?\gamma_j)}(1)$. В дальнейшем детально изучается случай А. Аналогично можно исследовать случай Б. Итак, пусть $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 2$. В таком случае введем набор форм $U_{j+n}(y) = -\beta_j y^{(j-1)}(0) + \alpha_j y^{(j-1)}(1), j = 1, 2, 3$. Можно считать, что $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$. Тогда справедливы равенства

$$y^{(?\gamma_j)}(0) = \alpha_j U_j(y) - \beta_j U_{j+n}(y)$$

$$y^{(?\gamma_j)}(1) = \beta_j U_j(y) + \alpha_j U_{j+n}(y)$$

Для произвольной гладкой функции $v(x)$ введем обозначения дальще линейная форма

$$U_1, ..., U_6$$

$$U_1(y) = \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0$$

$$U_2(y) = \alpha_2 y^{(1)}(0) + \beta_2 y^{(1)}(1) = 0$$

$$U_3(y) = \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0$$

$$U_4(y) = -\beta_1 y(0) + \alpha_1 y(1) = 0$$

$$U_5(y) = -\beta_2 y^{(1)}(0) + \alpha_2 y^{(1)}(1) = 0$$

$$U_6(y) = -\beta_3 y^{(2)}(0) + \alpha_3 y^{(2)}(1) = 0$$

2.Сопряженные краевые условия. Пусть $U_1, ..., U_6$ - называются линейно независмые формы а также всякие краевые условия, им эквивалентные называются сопряженными к краевым условиями мы можем через краевые условий найдчм сопряженные краевые условия.теперь можно ввести сопряженные граничные формы по формулам

$$W_{4-s}(V) = \overline{\beta_{4-s} R_s(1, V) - \alpha_{4-s} R_s(0, V)} \tag{3}$$

$$W_{7-s}(V) = \overline{\alpha_{4-s} R_s(1, V) + \beta_{4-s} R_s(0, V)} \tag{4}$$

где

$$R_1(x, V) = V(x),$$

$$R_2(x, V) = -V^{(1)}(x),$$

$$R_3(x, V) = V^{(2)}(x) + P_1(x)\overline{V(x)}.$$

Таким образом, для любых двух гладких функций $V(x), y(x)$ справедлива формула Лагранжа

$$\int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx - \int_0^1 y(x)\overline{L^+(V)}dx = \sum_{s=1}^{3} U_{4-s}(y)\overline{W_{5-s}(V)} + \sum_{s=1}^{3} U_{7-s}(y)\overline{W_{7-s}(V)} \tag{5}$$

Здесь $L^*(V) = -V^3(x) - (\overline{P_1(x)}V(X))^{(1)} + \overline{P_0(x)V(X)}$ формально сопряженное дифференциальное выражение. Для любой $U_1(.), ..., U_6(.)$ линейно независимые формы найдится $W_1(.), ..., W_6(.)$.

Список литературы

[1] Б.Е. Кангужин, *Функций задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде* // Вестник КазНУ, **21**:2, 12–21 (2018).

[2] Н.А. Афанасьева, Л.П. Булот, *Электротехника и электроника* // СПб.: СПбгун и П.Т., 2010.

[3] M. Astudillo, M. Usman, *RT-symmetric Laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness* // Adv.math.phys., 2015.

— ⁂ —

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО ИНТЕГРО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. АЙМАХАНОВА[1], Г. БЕСБАЕВ[2]

[1,2]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан

Пусть$\Omega \subset R^n$ конечная область с гладкой границей $\partial\Omega, D = \Omega \times (0,T)$ - цилиндрическая область.

В области D рассмотрим интегро - дифференциальное уравнение с пароболическим уравнением в главной части

$$Lu = (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)u + \int_\Omega K(x,\xi)u(\xi,t)d\xi = f(x,t) \tag{1}$$

с начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

и однородным потенциальным условиям

$$N[u] = -\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t d\eta \int_{\partial\Omega\times(0,t)} \left(\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x-\xi,t-\eta)u(\xi,\eta) - \varepsilon_n(x-\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right)d\xi = 0,\ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

здесь $\varepsilon(x,t)$- фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\varepsilon_n(x,t) = \delta(x,t).$$

Пологая

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)u = \nu(x,t).$$

с учетом начального условия (2) и бокового условия (3) находим

$$u(x,t) = \int_0^t d\eta \int_\Omega \varepsilon_n(x-\xi,t-\eta)\nu(\xi,\eta)d\eta, \tag{4}$$

где $\varepsilon_n(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{t}}}{t^{\frac{n}{2}}}$, фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Подставив равенство (4) в (1) имеем

$$\nu(x,t) + \int_0^t \nu(\tilde{\xi},\eta)d\eta \int_\Omega \varepsilon_n(\xi-\tilde{\xi},t-\eta)\cdot\int_\Omega K(x,\tilde{\xi})d\tilde{\xi}d\xi = f(x,t).$$

Методом последовательных приближении не трудно показать, что интегральное уравнение при $f(x,t) \in L_2(D)$ имеет единственное решение $\nu(x,t) \in L_2(D)$удовлетворяющий неравенству

$$\parallel \nu \parallel_{L_2(D)} \le c \parallel f \parallel_{L_2(D)} .$$

В силу свойств теплового потенциала имеем

$$\parallel u \parallel_{W_2^{1,2}(D)} = \parallel L_Q^{-1} f \parallel \le c_1 \parallel \nu \parallel_{L_2(D)} \le c \parallel f \parallel_{L_2(D)} . \tag{5}$$

Тем самым оператор L_Q- порожденный интегро-дифференциальным уравнением (1), начальным и граничным условиям (2), (3) - является регулярным граничным оператором и $u = L^{-1}f$ удовлетворяет неравенству (5).

Работа поддержана грантом AP05133239 КН МОН РК

Список литературы

[1] Т.Ш. Кальменов, Н. Е. Токмагамбетов, *Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области* // Сибирский математический журнал, - Т. 54, №6. - С. 1287-1293,(2013).

[2] Т.Ш. Кальменов, М. Отелбаев, *Критерий граничности интегральных операторов* // Доклады академии наук России, - Т. 466, №4. - С. 395-398,(2016).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Серикбай АЙСАГАЛИЕВ, Гулдана КОРПЕБАЙ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz, korpebay.guldana1@gmail.com

Рассматривается следующая задача оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(x(\cdot),\ u(\cdot),x_0,x_1,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}1\cdot dt=t_1-t_0\to inf \tag{1}$$

на множестве решений уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t)+\mu(t),\quad t\in \mathrm{I}=[t_0,\ t_1] \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1)\in S_0\times S_1,\quad S_0\subset R^n,\ S_1\subset R^n, \tag{3}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t)\in G(t):\ G(t)=\{x\in R^n|\omega(t)\le L(t)x\le\varphi(t),\quad t\in I\} \tag{4}$$

интегральных ограничений

$$g_j(x(\cdot),u(\cdot),x_0,x_1,t_1)\le c_j,\quad j=\overline{1,m_1}, \tag{5}$$

$$g_j(x(\cdot),u(\cdot t),x_0,x_1,t_1)=c_j,\quad j=\overline{m_1+1,m_2} \tag{6}$$

$$g_j(x(\cdot),u(\cdot),x_0,x_1,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}[a_j^*(t)\ x(t)+b_j^*(t)\ u(t)]dt,\quad j=\overline{1,m_2}, \tag{7}$$

а также с учетом голономных связей

$$\Gamma_j(x(t),u(t),t)=e_j^*(t)x(t)+r_j(t)=0,\ t\in\mathrm{I},\quad j=\overline{1,p}, \tag{8}$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t)\in U(t)\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)\ |.\ u(t)\in V(t)\subset R^m \text{ п.в }\ t\in I,\} \tag{9}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133271

Задача 1. Найти необходимые и достаточные я существования решений краевой задачи (2) - (9) при фиксированном t_1.

Задача 2. Найти допустимое управление $(\overline{u}(t),\ \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

Задача 3. Найти оптимальные управление $(u_*(t),\ x_0^*,\ x_1^*) \in \sum_{t_1*}$, где $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1,\ x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*) \in G(t),\ t \in I_1,\ \ g_j(x_*(\cdot), u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = \overline{c_j},\ j = \overline{1, m_2},\ \ \Gamma_j(x_*(t),\ t) = 0,\ \ t \in I_1,\ \ j = \overline{1,p},\ \ I_1 = [t_0,\ \ t_{1*}]$.
В статье предлагается метод решения указанных задач путем построения общего решения интегрального уравнения следующего вида

$$\mathrm{K}\omega = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{K}(t_*, t) w(t) dt = \beta, \quad t_* \in I = [t_0, t_1], \tag{10}$$

где $\mathrm{K}(t_*, t) = K(t)$ – известная матрица порядка $n_1 \times \overline{m}$ с элементами из L_2, $t_* \in [t_0, t_1]$ – фиксированная точка, $w(t) \in L_2(I, R^{\overline{m}})$ – искомая функции $\beta \in R^{n_1}$.

Задача 4. Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (10) для любых $\beta \in R^n$.

Задача 5. Найти общее решение интегрального уравнение (10) для любых $\beta \in R^n$.

Основными результатами являются:
– необходимое и достаточное условия существования решения одного класса интегрального уравнения и построение его общего решения;
– выделение всех множеств управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в любое желаемое конечное состояние для линейных систем;
– предлагаемый принцип погружения позволяющий свести исходную краевую задачу оптимального быстродействие с ограничениями к специальной начальной задаче оптимального управления;
– необходимое и достаточное условия существования допустимого управления;
– разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия с ограничениями для линейных систем любого порядка.
Полученные результаты являются решениями актуальных проблем теории оптимального быстродействия с ограничениями имеющие многочисленные приложения.

Список литературы

[1] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров *Теория экстремальных задач* – М.: Наука, **4**80 (1985).

[2] В.М. Алексеев , В.М. Тихомиров , С.В. Фомин *Оптимальное управление* – М.: Наука, **4**30 (1979).

[3] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтанский, Т.В. Гамирелидзе, Е. Мищенко *Математическая теория оптимальных процессов* – М.: Наука, **3**84 (1965).

[4] С.А. Айсагалиев *Управляемость некоторый системы дифференциальных уравнений* // Дифференциальное уравнение. **27**: 9 1037-1047 (1991).

[5] С.А. Айсагалиев, С.С. Айсагалиева *Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнение. **29**: 4, 471-482 (1993).

— ⁂ —

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Серик АЛДАШЕВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Aldash51@mail.ru

Теория краевых для вырождающихся гиперболо-параболлических уравнений на плоскости изучены в [1]. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [2,3]. Корректность задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказаны [4,5].

В [6,7] показана в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболо - параболлических уравнений имеет единственное классическое решение.

В данной работе приводится новый класс вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений для которых показано однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$– цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек $(x_1,\ ,x_2,\ t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$– длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β– части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; σ_α– верхнее, а σ_β– нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S - общая часть границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_2.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} p_i(t)u_{x_ix_i} - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{2} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0,\ t > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} g_i(t)u_{x_ix_i} - u_t + \sum\limits_{i=1}^{2} d_i(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0$, $g_i(t) > 0$ при $t < 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$,
$p_i(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha))$, $g_i(t) \in C([\beta, 0])$, $i = 1, 2$.

В дальнейшем нам понадобиться связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными r, θ, t : $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C^1(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \quad u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05134615

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in C^1(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t) \in C^1(\bar{\Omega}_\beta) \cap$ $\cap C^2(\Omega_\beta)$, $e(r,\theta,t) \leq 0$, $\forall(r,\theta,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in C^1(\bar{S}) \cap C^3(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\alpha) \cap C^3(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in$ $\in C^1(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta)$, и имеет место

$$\cos \mu_{s,n}\alpha' \neq 0, \; s = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

то задача 1 однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z)$, $\alpha' = \int\limits_0^\alpha \sqrt{\frac{[p_1(\xi)+p_2(\xi)]}{2}} d\xi$, $n = 0, 1, \dots$.

Список литературы

[1] Нахушев, А.М.*Задачи со смещением для уравнения в частных производных* // М.: Наука., 287 с, (2006).

[2] Врагов, В.Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики* // Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 84 с, (1983).

[3] Каратопраклиев, Г.Д.*Краевые задачи для уравнения смешанного типа в многомерноых областях* // Partial Differential Banach Center Publications, vol.10.p.261-269.(1983).

[4] Алдашев, С.А. *Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина* // Научные ведомости БелГУ,Математика,физика, **є5**:(124), вып.6., 12-25 (2012).

[5] Алдашев, С.А.*Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений* // Журнал "Вычислительная и прикладная математика Киев,КНУ им. Т.Шевченко, **№2**:(125), 71-78 (2017).

[6] Алдашев, С.А. *Задача Дирихле для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо-параболлических уравнений*// Изв.Сарат. ун-та, Нов.Сер. мат-ка, мех., инф., **т**17. вып.3, 370-373 (2017).

[7] Алдашев, С.А. *Задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений*// Научные ведомости БелГУ, Математика, физика, **є27**:(248), 16-25 (2016).

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ЗАДАЧА ВЕРИГИНА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В УСЛОВИЯХ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

Ермек АЛИМЖАНОВ

Университет международного бизнеса, Алматы, Казахстан

aermek81@gmail.com

Пусть $\Omega = (0, l)$, $l > 0$, $\gamma(t)$ – кривая $x = \gamma(t)$, $\forall t \in [0, T]$ и $\gamma(0) = \gamma_0$, где $0 < \gamma(t) < l$, $l - \gamma_0 > d_0 = const > 0$. Обозначим $\Omega_1(t) = (0, \gamma(t))$, $\Omega_2(t) = (\gamma(t), l)$, $\sigma_T = (0, T)$, $\Omega_j = \Omega_j(0)$ и $\Omega_{jT} := \Omega_j \times \sigma_T$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим задачу с неизвестными функциями $u_j(x,t), j = 1, 2$ и $\gamma(t)$, удовлетворяющими параболическим уравнениям

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - a_j(x,t)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - b_j(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} - c_j(x,t)u_j = f_j(x,t) \qquad \text{в } \Omega_{jT}, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} u_j\big|_{t=0} &= u_{0j}(x), \quad x \in \Omega_j, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \\ u_1\big|_{x=0} &= p_1(t), \quad u_2\big|_{x=l} = p_2(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2}$$

и условиями сопряжения при $x = \gamma(t)$, $t \in \sigma_T$

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= g(x,t), \\ \lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial x} &= g_1(x,t), \\ \lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon\gamma' &= g_2(x,t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $a_j(x,t) > 0$ в Ω_{jT}, $a_1(x,t) \neq a_2(x,t)$, $\forall (x,t) \in \sigma_T \times B_\delta(\gamma_0)$, здесь $B_\delta(\gamma_0)$ – δ-окрестность γ_0; $b_j(x,t)$, $c_j(x,t)$, $f_j(x,t)$, $u_{0j}(x)$, $p_j(t)$, $g(x,t)$, $g_j(x,t)$, $\lambda_j(x,t)$, $j = 1, 2$ – известные функции и $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Данная задача является одномерной задачей Веригина (см., напр. [1], [2]), которая, в частности, описывает физический процесс нагнетания жидкости в пористую среду, при котором происходит вытеснение одной жидкости из пористой среды другой более вязкой жидкостью. Функции $u_j(x,t)$, $j = 1, 2$, могут описывать давление нагнетаемой и вытесняемой жидкостей, а $\gamma(t)$ — границу их раздела.

В работе доказаны существование и единственность решения $\{u_1(x,t), u_2(x,t), \gamma(t)\}$ задачи (1)-(3) в пространствах Гельдера, а также получены коэрцитивные оценки решений с постоянными, не зависящими от малого параметра ε.

Список литературы

[1] Веригин Н.Н., *Нагнетание вяжущих растворов в горные породы с целях повышения прочности и водонепроницаемости основания гидротехнических сооружений* // Изв. АН СССР, Отдел техн. наук., 1952, С – 674-687.

Работа выполнена при поддержке Фонда науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05133898).

[2] Бижанова Г.И., *О классической разрешимости одномерных задач со свободной границей Флорина, Маскета-Веригина и Стефана* // Зап. научн. сем. ПОМИ, 243, 2001, С. – 30-60.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА $m-$МЕРНОМ ТОРЕ

Дауренбек БАЗАРХАНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

dauren.mirza@gmail.com

В докладе будет сформулирована и обсуждаться задача оптимального восстановления значений псевдодифференциальных операторов на $m-$мерном торе с символами из некоторого класса (символов "типа произведения") на распределениях из (единичных шаров) пространств типа Никольского – Бесова и Лизоркина – Трибеля по конечной спектральной информации о символе оператора и о распределении (конечные наборы коэффициентов Фурье символа оператора и распределения).

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133257

— ⁕ ⁕ ⁕ —

L_p-ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Шолпан БАЛГИМБАЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

sholpan.balgyn@gmail.com

В докладе устанавливается L_p-ограниченность одного класса псевдодифференциальных операторов с символом, негладким по пространственной переменной, на $d-$мерном торе при $1 < p < \infty$ при наличии весов.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133257

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ СУММИРОВАНИЯ

А. БЕСЖАНОВА, А. ТЕМИРХАНОВА

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

beszhanova@mail.ru

Устанавливаются необходимые и достаточные условия ограниченности матричного оператора вида

$$(Af)_n = \sum_{k=1}^{\beta(n)} a_{n,k} f_k$$

из l_{pv} в l_{qu} при $1 < p \leq q < \infty$. Кроме того получен критерий компактности оператора A.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ I

Н.К. БЛИЕВ

Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан

bliev.nazarbay@mail.ru

В работе рассматриваются многомерные сингулярные операторы с характеристиками, не зависящими от полюса и соответствующие интегральные уравнения в пространствах Бесова. Получены условия ограниченности, дифференцируемости и обратимости рассматриваемых сингулярных операторов и разрешимости некоторых соответствующих интегральных уравнений.

Полученные результаты позволяют, при определенных условиях, описать локальные свойства сингулярных интегральных операторов с характеристиками зависящими от полюса и получить условия нетеровой разрешимости соответствующих сингулярных интегральных уравнений.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Эта работа была частично поддержана грантом №AP05133283 Комитета науки МОН РК

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА-МОРРИ

Нуржан БОКАЕВ, Алтынай ХАЙРКУЛОВ, Мендыбай ТУРГУМБАЕВ

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

bokayev2011@yandex.ru, aitbekovna3@mail.ru, mentur60@mai.ru

В данной работе приводятся достаточные условия ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах Орлича-Морри.

Пусть $0 < \alpha < n$. Потенциал Рисса определяется равенством

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Максимальный оператор Харди-Литтлвуда определяется равенством:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Функция $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ называется функцией Юнга, если Φ - выпуклая функция, непрерывная слева и $\lim_{r\to+0}\Phi(r) = \Phi(0) = 0$ и $\lim_{r\to+0}\Phi(r) = \infty$.

Если существует $s \in (0,\infty)$ такое, что $\Phi(s) = \infty$, тогда $\Phi(r) = \infty$ для $r \geq s$. Множество функций Юнга, таких что

$$0 < \Phi(r) < \infty, 0 < r < \infty$$

будем обозначать через Y. Если $\Phi \in Y$, тогда она абсолютно непрерывна на каждом замкнутом интервале в $[0,\infty)$.

Для функции Юнга Φ и $0 \leq s \leq \infty$ пусть

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}.$$

Если $\Phi \in Y$, тогда Φ^{-1} это обычная обратная функция для Φ.

Отметим,что

$$\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(r), 0 \leq r < \infty.$$

Функция Юнга удовлетворяет $\triangle_2$-условию $\Phi \in \triangle_2$, если

$$\Phi(2r) \leq k\Phi(r), r > 0$$

для некоторого $k > 1$.

Функция Юнга удовлетворяет ∇_2-условию $\Phi \in \nabla_2$, если

$$\Phi(r) \leq \frac{1}{2k}\Phi(kr), r \geq 0$$

для некоторого $k > 1$.

Для функции Юнга Φ множество функций

$$L^\Phi(R^n) = \{f \in L_{loc}(R^n) : \int_{R^n} \Phi(k|f(x)|)dx < \infty, k > 0\}$$

с конечной квазинормой

$$\parallel f \parallel_{L_{\Phi,(R^n)}} = \inf\{\mu > 0 : \int_{(R^n)} \Phi(\frac{f(t)}{\mu})dt\}, \tag{1}$$

в которых

$$J_\mu(f) = \int_{R^n} \Phi(\frac{f(t)}{\mu}) \leq 1. \qquad (2)$$

называется пространством Орлича [1].

Пусть Φ функция Юнга и $1 \leq \theta \leq \infty$. Через $GM_{\Phi,\varphi,\theta}(R^n)$ обозначим глобальное пространство Орлича-Морри как множество всех функций $f \in L_\Phi$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{GM_{\phi,\varphi,\theta}(R^n)} = \sup_{x\in(R^n)} ||\varphi^{-1}(x,r)\,\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-l})||f||_{L_{\phi(B(x,r))}}||_{L_{\theta(0,\infty)}} < \infty.$$

$$\| f \|_{M_{\Phi,\lambda,\upsilon}} = \sup_{x\in R^n, r>0} \Phi^{-1}(r^{-\lambda}) \| f \|_{L_{\Phi,\upsilon}(B(x,r))} < \infty, \qquad (3)$$

Теорема 1.

Пусть $\Phi \in Y$ и функция φ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty} \|\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1}) essinf_{t<s<\infty} \frac{\varphi(x,s)}{\Phi^{-1}}(|B(x,s)|^{-1})\|_{L_\theta} \leq C\varphi(x,r),$$

где C не зависит от x и r.

Тогда максимальный оператор M ограничен из $GM_{\Phi,\varphi,\theta}(R^n)$ в $GM_{\psi,\eta,\theta}(R^n)$.

Теорема 2.

Пусть $\Phi \in Y \cap \nabla_2$, $0 < \alpha < n$, $1 < \theta < \infty$

и пусть функция φ удовлетворяет условию Теоремы 1 и условию

$$t^\alpha \varphi(t) + \int_t^\infty r^\alpha \varphi(r) \frac{dr}{r} \leq C\varphi(t)^\beta$$

для некоторого $\beta \in (0,1)$.

Пусть $\eta(x,t) = \varphi(x,t)^\beta$ и $\psi(t) = \phi(t^{\frac{1}{\beta}})$.

Тогда потенциал Рисса I_α ограничен из $GM_{\Phi,\varphi,\theta}(R^n)$ в $GM_{\psi,\eta,\theta}(R^n)$.

Подобные утверждения для обобщенных пространств Орлича-Морри получены в [2].

Список литературы

[1] М.А. Красносельский, М.А. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича* (1978).

[2] F. Deringoz, V. Guliyev, S. Hasanov,*Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces* // Journal of Inequalities and Applications, 2016, 2016:248, P.1-22.

— ⁂ —

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО СОБОЛЕВА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Нурлан ДАИРБЕКОВ, Олег ПЕНКИН, Ляззат САРЫБЕКОВА

КазНИТУ им. К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан

nurlan.dairbekov@gmail.com, o.m.penkin@gmail.com, lsarybekova@yandex.ru

Стратифицированное множество определяется как связное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, являющееся объединением конечного семейства S непересекающихся связных подмногообразий σ (без края), называемых далее стратами:

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_k \in S} \sigma_k.$$

Предполагается, что каждая страта σ_k имеет компактное замыкание в $\mathbb{R}^d$ и страты примыкают друг к другу специальным образом (см., например, [1], [2], [3]). Множество Ω предполагается представленным в виде объединения двух непересекающихся частей — Ω_0 и $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$. В качестве Ω_0 допустимо взять любое открытое связное подмножество Ω, состоящее из некоторых страт, и такое, что замыкание Ω_0 совпадает с Ω. Здесь и далее все топологические понятия относятся к топологии на Ω, индуцированной стандартной топологией объемлющего пространства $\mathbb{R}^d$.

Назовем функцию $\mathbf{p}$ на Ω стратифицированной константой, если она постоянна на каждой страте. Символически мы можем написать $\mathbf{p} = \{p_k\}_{\sigma_k \in S}$, где p_k является сужением $\mathbf{p}$ на страту σ_k.

Пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{p}}_{\mu}(\Omega)$ определяется как пополнение пространства непрерывных функций $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, обращающихся в нуль вблизи границы $\partial\Omega_0$ и имеющих дифференцируемые сужения на каждую страту, причем градиенты этих сужений равномерно непрерывны. Пополнение берется по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{p}}_{\mu}(\Omega)} = \sum_{\sigma_k \in S} \left[\left(\int\limits_{\sigma_k} |u|^{p_k}\, d\mu \right)^{\frac{1}{p_k}} + \left(\int\limits_{\sigma_k} |\nabla u|^{p_k}\, d\mu \right)^{\frac{1}{p_k}} \right].$$

Наша цель Ч обобщение неравенства Соболева на стратифицированном множестве в случае, когда показатель суммируемости является стратифицированной константой. Мы устанавливаем достаточные условия на комбинаторную структуру Ω и на стратифицированные константы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ для справедливости следующего неравенства:

$$\sum_{\sigma_k \in S} \left(\int\limits_{\sigma_k} |u|^{q_k}\, d\mu \right)^{\frac{1}{q_k}} \le C \sum_{\sigma_k \in S} \left(\int\limits_{\sigma_k} |\nabla u|^{p_k}\, d\mu \right)^{\frac{1}{p_k}}$$

для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\mathbf{p}}_{\mu}(\Omega)$ с независящей от u константой C.

В случае, когда стратифицированные константы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ являются просто константами, т.е. $p_k \equiv p$, $q_k \equiv q$, аналог неравенства Соболева доказан в работе [1].

Данное неравенство применяется для доказательства разрешимости задачи Дирихле для стратифицированного $\mathbf{p}$ - лапласиана:

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{\mathbf{p}-2} \nabla u) = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega_0} = \phi,$$

аналогично тому как это сделано в работе [1] в случае $p_k \equiv p$.

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан AP05130222.

Список литературы

[1] Н. С. Даирбеков, О. М. Пенкин, Л. О. Сарыбекова, *Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве* // Алгебра и анализ, T.30 (2018), вып. 5, 149-158.

[2] Н. С. Даирбеков, О. М. Пенкин, Л. О. Сарыбекова, *Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества* // Сиб. матем. журн., T.59 (2018), вып. 6, 1291-1302.

[3] Ф. Фам, *Введение в топологическое исследования особенностей Ландау* // Москва: Мир, 1970. - 184 с.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Мади ЕРГАЛИЕВ[2,b], Канжарбек ИМАНБЕРДИЕВ[3,c], Арнай КАСЫМБЕКОВА[4,d]

[1,2,3,4]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ergaliev@math.kz*, [c]*kanzharbek75ikb@gmail.com*, [d]*kasar08@mail.ru*

Работа посвящена вопросам разрешимости в соболевских классах одной нелинейной задачи теплопроводности в вырождающейся треугольной области, одна из вершин которой находится в начале координат. С использованием методов априорных оценок и Фаэдо-Галеркина доказываются теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой граничной задачи, а также его регулярность при повышении гладкости заданных функций.

Постановка граничной задачи. Пусть $Q_{xt_1} = \{x, t_1 \mid 0 < x < t_1,\ 0 < t_1 < T_1 < \infty\}$ – треугольная область, одна из вершин которой находится в начале координат, и Ω_{t_1} – сечение области Q_{xt_1} при фиксированной временной переменной $t_1 \in (0, T_1)$. В области Q_{xt_1} рассматривается следующая граничная задача:

$$\partial_{t_1} u - \nu \partial_x^2 u - (\partial_x u)^2 = f,\ \ (\nu > 0), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=t_1} = 0, \tag{2}$$

где

$$f \in L_\infty(Q_{xt_1}),\ f \ge 0. \tag{3}$$

В данной работе изучается вопрос существования и единственности решения граничной задачи (1)–(3) в соболевском пространстве $u \in H^{2,1}(Q_{xt_1})$.

Преобразование (1)–(3) к линейной граничной задаче. Преобразуем (1)–(3) к линейной граничной задаче для неизвестной функции $w(x, t_1)$. Используя взаимно-однозначное преобразование: $w(x, t_1) = \exp\{u/\nu\} - 1,\ \ u = \nu \ln(w + 1)$, получаем

$$\partial_{t_1} w - \nu \partial_x^2 w - f_\nu w = f_\nu, \tag{4}$$

$$w(x,t)|_{x=0} = 0,\ w(x,t)|_{x=t_1} = 0, \tag{5}$$

$$f_\nu \equiv f/\nu \in L_\infty(Q_{xt_1}),\ f_\nu \ge 0. \tag{6}$$

О семействе вспомогательных граничных задач в четыреугольных областях (в виде трапеций). К задаче (4)–(6) мы сопоставим семейство граничных задач, каждая из которых рассматривается в области, представляющей собой соответствующую трапецию.

Итак, пусть $n \in \mathbb{N}^* \equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_1, 1/n_1 < T_1\}$, $Q^n_{xt_1} = \{x, t_1 :\ 0 < x < t_1,\ 1/n < t_1 < T_1 < \infty\}$ – трапеция, и Ω_{xt_1} – сечение трапеции при заданном $t_1 \in (1/n, T_1)$. Отметим, что в точке $t_1 = 1/n$ область $Q^n_{xt_1}$ уже не вырождается в точку, кроме того между исходной областью Q_{xt_1} и областями $Q^n_{xt_1}$ имеют место строгие включения $Q^{n_1}_{xt_1} \subset Q^{n_1+1}_{xt_1} \subset ... \subset Q_{xt_1}$ и, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n_{xt_1} = Q_{xt_1}$.

В невырождающейся области $Q^n_{xt_1}$ (для каждого конечного $n \in \mathbb{N}^*$) рассматривается граничная задача:

$$\partial_{t_1} w_n - \nu\partial^2_x w_n - f_{\nu,n} w_n = f_{\nu,n}, \tag{7}$$

$$w_n(x,t)|_{x=0} = 0,\ w_n(x,t)|_{x=t_1} = 0,\ w_n(x,t_1)|_{t_1=1/n} = 0, \tag{8}$$

$$f_{\nu,n} \equiv f_n/\nu \in L_\infty(Q^n_{xt_1}),\ f_{\nu,n} \geq 0. \tag{9}$$

С помощью некоторого преобразования независимых переменных $\{x, t_1\}$ к переменным $\{y, t\}$ мы можем преобразовать граничную задачу (7)–(9) так, чтобы она была бы поставлена в прямоугольной области.

Запишем граничную задачу (7)–(9) в прямоугольной области Q^n_{yt}:

$$\partial_t \tilde{w}_n - \nu\partial^2_y \tilde{u}_n - \frac{y}{n-t}\partial_y \tilde{w}_n - \frac{1}{(n-t)^2}\tilde{f}_{\nu,n}\tilde{w} = \frac{1}{(n-t)^2}\tilde{f}_{\nu,n}, \tag{10}$$

$$\tilde{w}_n(y,t) = 0,\ \{y,t\} \in \Sigma^n_{yt} = \{y,\ t : y \in \{0\} \cup \{1\},\ n/2 < t < T < n\}, \tag{11}$$

$$\tilde{w}_n(y, n/2) = 0,\ y \in \Omega = \{y :\ 0 < y < 1,\ t = n/2\}. \tag{12}$$

Вместо (10)–(12) в области Q^n_{yt}, мы будем рассматривать более общую граничную задачу:

$$\partial_t \tilde{w}_n - \nu\partial^2_y \tilde{w}_n - \gamma_n(y,t)\partial_y \tilde{w}_n - \alpha_n(t)\tilde{f}_{\nu,n}\tilde{w}_n = \beta_n(t)\tilde{f}_{\nu,n},\ (\nu > 0), \tag{13}$$

$$\tilde{w}_n(y,t)|_{y=0} = 0,\ \tilde{w}_n(y,t)|_{y=1} = 0,\ \tilde{w}_n(y,t)|_{t=0} = 0, \tag{14}$$

где заданные непрерывные функции $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\gamma_n(y,t)$ для каждого фиксированного числа $n \in \mathbb{N}^*$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} \leq \alpha_n(t) \leq \alpha_{2n},\ \beta_{1n} \leq \beta_n(t) \leq \beta_{2n}, \quad &\forall\, t \in [0, T], \\ |\gamma_n(y,t)| \leq \gamma_{1n},\ |\partial_y \gamma_n(y,t)| \leq \gamma_{1n}, \quad &\forall\, \{y,t\} \in Q^n_{yt}, \end{aligned} \tag{15}$$

с заданными положительными постоянными $\alpha_{1n},\ \alpha_{2n},\ \beta_{1n},\ \beta_{2n},\ \gamma_{1n}$.

Имеют место следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть мы имеем фиксированное число $n \in \mathbb{N}^*$. Тогда, если $\tilde{f}_{\nu,n} \in L_\infty(Q^n_{yt})$ и $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\gamma_n(y,t)$ удовлетворяют условиям (15), то граничная задача (13)–(14) имеет единственное решение $\tilde{w}_n \in H^{2,1}(Q^n_{yt})$, которое удовлетворяет оценке:*

$$\|\tilde{w}_n\|_{H^{2,1}(Q_{yt})} \leq K\, \|\tilde{f}_{\nu,n}\|_{L_\infty(Q_{yt})}.$$

Теорема 2. *Пусть мы имеем фиксированное число $n \in \mathbb{N}^*$. Тогда, если $\tilde{f}_{\nu,n} \in L_\infty(Q^n_{yt})$, то граничная задача (10)–(12) имеет единственное решение $\tilde{w}_n \in H^{2,1}(Q^n_{yt})$, которое удовлетворяет оценке:*

$$\|\tilde{w}_n\|_{H^{2,1}(Q_{yt})} \leq K\, \|\tilde{f}_{\nu,n}\|_{L_\infty(Q_{yt})}.$$

Теорема 3. *Пусть мы имеем фиксированное число $n \in \mathbb{N}^*$. Тогда, если $f_{\nu,n} \in L_\infty(Q^n_{xt_1})$, то граничная задача (7)–(9) имеет единственное решение $w_n \in H^{2,1}(Q^n_{xt_1})$, которое удовлетворяет оценке:*

$$\|w_n\|_{H^{2,1}(Q_{xt_1})} \leq K\, \|f_{\nu,n}\|_{L_\infty(Q_{xt_1})}.$$

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ МНОГОМЕРНЫМИ ОБОБЩЕНИЯМИ ЗАДАЧИ САМАРСКОГО-ИОНКИНА

Айшабиби ДУКЕНБАЕВА

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

dukenbayeva@math.kz

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ – произвольная точка области Ω. Пусть константы θ_k принимают значения только 1 или -1. Тогда $(\theta_k)^2 = 1$. Через x^* обозначим точку $x^* = (-x_1, \theta_2 x_2, \ldots, \theta_n x_n)$. Через $\partial\Omega_+$ $(\partial\Omega_-)$ обозначим часть границы $\partial\Omega$, для которой $x_1 > 0\,(x_1 < 0)$. Часть границы $\partial\Omega$, для которой $x_1 = 0$, обозначим через $\partial\Omega_0$.

Уравнение Пуассона в многомерном шаре запишется в виде

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega. \tag{1}$$

Задача $S_{\alpha 1}$. *Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \backslash \partial\Omega_0\right)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению Пуассона (1), а на его границе – краевым условиям:*

$$u(x) - \alpha u\left(x^*\right) = \tau(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) - (-1)^k \frac{\partial u}{\partial n}\left(x^*\right) = v(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{3}$$

где $f(x) \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$; $\tau \in C^{1+\varepsilon}[\partial\Omega_+]$; $v \in C^{\varepsilon}[\partial\Omega_+]$, α – фиксированное действительное число.

В случае, когда $\alpha = -(-1)^k$, получаем ранее исследованные в [1]-[2] периодические и антипериодические краевые задачи. Случай $\alpha = 0$ был рассмотрен в работах [3]-[4].

Как еще один из вариантов аналога задачи Самарского-Ионкина для оператора Лапласа в единичном шаре предложено рассмотреть следующую постановку.

Задача $S_{1\beta}$. *Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \backslash \partial\Omega_0\right)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению Пуассона (1), а на его границе – краевым условиям:*

$$u(x) + (-1)^k u\left(x^*\right) = \tau(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\left(x^*\right) = v(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{5}$$

где $f(x) \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$; $\tau \in C^{1+\varepsilon}[\partial\Omega_+]$; $v \in C^{\varepsilon}[\partial\Omega_+]$, β – фиксированное действительное число.

В настоящем докладе рассмотрим случаи значений α и β, при которых соответствующие сформулированные задачи $S_{\alpha 1}$ и $S_{1\beta}$ являются фредгольмовыми.

Основные результаты по данному докладу сфорулируем в виде теорем.

Теорема 1.

При $\alpha = (-1)^k$ задача $S_{\alpha 1}$ не является нетеровой. При этом однородная задача $S_{\alpha 1}$ имеет бесконечное число линейно независимых решений. Задача $S_{\alpha 1}$ является фредгольмовой если и только если $\alpha \neq (-1)^k$.

Теорема 2.

При $\beta = (-1)^k$ задача $S_{1\beta}$ не является нетеровой. При этом однородная задача $S_{1\beta}$ имеет бесконечное число линейно независимых решений. Задача $S_{1\beta}$ является фредгольмовой если и только если $\beta \neq (-1)^k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133271.

Список литературы

[1] М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов *Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге* // Дифф. уравнения, **50**:2, 264–268 (2014).

[2] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov *On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball* // Eurasian Mathematical Journal, **3**:1, 143–146 (2012).

[3] А.А. Дукенбаева *Об обной обобщенной задаче типа Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге* // Математический журнал, **18**:1, 78–87 (2018).

[4] A.A. Dukenbayeva, M.A. Sadybekov, N.A. Yessirkegenov *On a Generalised Samarskii-Ionkin Type Problem for the Poisson Equation* // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer, Cham, **264**, 207–216 (2018).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА САМАРСКОГО-ИОНКИНА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Марина ИВАНОВА

Южно-Казахстанская медицинская академия, Шымкент, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

ivanova@math.kz

В докладе дается постановка новых начально-краевых задач для многомерного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями по пространственным переменным, являющимися многомерными обобщениями задачи Самарского-Ионкина и исследована их корректность.

Мы рассматриваем один из вариантов новых постановок начально-краевых задач для многомерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности. Областью рассмотрения задачи является шаровой цилиндр Q с осью вдоль оси t. Ставятся классические начальные условия на основании цилиндра и новые нелокальные краевые условия на пространственных (боковых) границах цилиндра. Эти условия аналогичны условиям задачи $S_{\alpha 1}$, рассмотренным в работах [1 - 4] для уравнения Лапласа в единичном круге и единичном шаре.

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ – произвольная точка области Ω. Пусть константы θ_k принимают значения только 1 или -1. Тогда $(\theta_k)^2 = 1$. Через x^* обозначим точку $x^* = (-x_1, \theta_2 x_2, \ldots, \theta_n x_n)$. Через $\partial\Omega_+$ $(\partial\Omega_-)$ обозначим часть границы $\partial\Omega$, для которой $x_1 > 0\,(x_1 < 0)$. Часть границы $\partial\Omega$, для которой $x_1 = 0$, обозначим через $\partial\Omega_0$.

Через $Q = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$ обозначим прямой шаровой цилиндр, а через $Q_0 = \{(x,t) : x \in \Omega_0, 0 < t < T\}$ – часть его боковой поверхности. Рассмотрим новую нелокальную краевую задачу для многомерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in Q, \tag{1}$$

где Δ_x – есть оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133271

Используется классическое начальное условие

$$u(x,0)=\tau(x), x\in\Omega, \tag{2}$$

и нелокальные краевые условия на боковой границе шарового цилиндра

$$u(x,t)-\alpha u\left(x^{*},t\right)=0, x\in\partial\Omega_{+}, 0\leq t\leq T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)-\frac{\partial u}{\partial n}\left(x^{*},t\right)=0, x\in\partial\Omega_{+}, 0\leq t\leq T. \tag{4}$$

Здесь $\alpha\neq 1$ – фиксированное действительное число, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$.

Правую часть уравнения (1) и начальное условие выберем из следующего "стандартного" класса гладкости: $f(x,t)\in C^{\varepsilon}\left(\bar{Q}\right)$, $\tau\in C^{2+\varepsilon}\left(\bar{\Omega}\right)$. Дополнительно от $\tau(x)$ потребуем удовлетворение краевым условиям (3), (4).

Регулярным решением задачи (1) - (4) назовем функцию из класса $C_{x,t}^{2,1}(Q)\bigcap C_{x,t}^{1,0}\left(\bar{Q}\backslash Q_0\right)$, обращающую уравнение теплопроводности (1), начальное условие (2) и нелокальные краевые условия (3), (4) в тождество.

Развивая идею работы [5] на многомерный случай, мы показываем, что корректность сформулированной задачи (1) - (4) может быть обоснована путем сведения к последовательному решению двух классических начально-краевых задач для уравнения теплопроводности.

Основной результат доклада сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha\neq 1$, $f(x,t)\in C^{\varepsilon}\left(\bar{Q}\right)$, $\tau\in C^{2+\varepsilon}\left(\bar{\Omega}\right)$ *и* $\tau(x)$ *удовлетворяет краевым условиям (3), (4). Тогда нелокальная начально-краевая задача (1) - (4) имеет единственное регулярное решение.*

Список литературы

[1] М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов *Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге* // Дифф. уравнения, **50**:2, 264–268 (2014).

[2] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov *On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball* // Eurasian Mathematical Journal, **3**:1, 143–146 (2012).

[3] А.А. Дукенбаева *Об обной обобщенной задаче типа Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге* // Математический журнал, **18**:1, 78–87 (2018).

[4] A.A. Dukenbayeva, M.A. Sadybekov, N.A. Yessirkegenov *On a Generalised Samarskii-Ionkin Type Problem for the Poisson Equation* // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer, Cham, **264**, 207–216 (2018).

[5] И. Оразов, М.А. Садыбеков *Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам* // Сиб. матем. журн., **53**:1, 180-186 (2012).

— ※ ※ ※ —

О СВОЙСТВЕ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА САМАРСКОГО-ИОНКИНА

Нурлан ИМАНБАЕВ

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан

imanbaevnur@mail.ru

В докладе рассматривается оператор, заданный дифференциальным выражением двукратного дифференцирования и краевыми условиями типа Самарского-Ионкина. Хорошо известно, что эти условия являются регулярными, но не усиленно регулярным краевыми условиями. Нами исследуется вопрос устойчивости и неустойчивости свойства базисности системы собственных и присоединенных функций (СиПФ) возмущенного оператора, получаемого при интегральном возмущении одного из краевых условий:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) + u'(1) = 0, \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)dx,\ p(x) \in L_2(0,1), \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = 0. \tag{3}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1)-(3) называется задачей Самарского-Ионкина.

Из результатов работы А.А. Шкаликова [1] следует, что система СиПФ задачи (1)-(3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является демонстрация того, что свойство базисности в $L_2(0,1)$ системы СиПФ задачи (1)-(3) является неустойчивым при малых изменениях ядра $p(x)$ интегрального возмущения.

В нашей работе [2] предложена методика построения характеристического определителя спектральной задачи при интегральном возмущении краевого условия. Этот результат мы применяем к исследованию спектарльных свойств задачи (1)-(3). Вопросы условной базисности и исследование спектральных свойств нелокальных задач рассмотрены в работах многих математиков. В наших работах также рассмотрены задачи с различными нелокальными условиями.

Основным результатом доклада является следующая теорема, демонстрирующая неусточивость свойства безусловной базисности системы СиПФ при интегральном возмущении краевогоу словия.

Теорема. *Множество* $\boldsymbol{P}$ *функций* $p(x) \in L_2(0,1)$, *для которых система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3) образует безусловный базис в* $L_2(0,1)$, *всюду плотно в* $L_2(0,1)$. *Множество* $L_2(0,1)\backslash\boldsymbol{P}$, *то есть множество функций* $p(x) \in L_2(0,1)$, *для которых система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3) не образует безусловного базиса в* $L_2(0,1)$, *также всюду плотно в* $L_2(0,1)$.

Автор был поддержан грантом КН МОН РК AP05132587

Список литературы

[1] А.А. Шкаликов, *О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями* // Вестник МГУ. Математика и механика, 2, 12–21 (1982).

[2] М.А. Садыбеков, Н.С. Иманбаев, *Регулярный дифференциальный оператор с возмущенным краевым условием* // Матем. заметки, **101**:5, 768-778 (2017).

— ⁂ —

О РЕГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

У.А. ИСКАКОВА [1], Н.ИМАНБАЕВ[2]

[1,2]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан

Пусть D^- и D^+ конечные односвязные области с гладкими границами и $D = D^- \times D^+$. В области D рассмотрим следующий интегро-дифференциальный оператор

$$Lu(y,x) = -\Delta_y u(y,x) + \int_\Omega K(x,\xi)u(x,\xi)d\xi = f(y,x). \tag{1}$$

Пусть $K(x,\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} L^+(x,D)K(x,\xi) = \delta(x-\xi) \\ L_\xi(\xi,D)K(x,\xi) = \delta(x-\xi), \end{cases} \quad x \in D^+,\ \xi \in \partial D^+.$$

Положим

$$\nu(y,x) = \int_D K(x,\xi)u(y,\xi)d\xi, \tag{2}$$

где

$$L^+(x,D)\nu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\nu + a(x)\nu,$$

$$a(x) > 0, a_{ij} \in C^{2+\alpha}(\bar{D}^+), a(x) \in C^{1+\alpha}(\bar{D}^+), \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\zeta_i, \zeta_j \geq \delta|\zeta^2|.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$Lu(y,x) = -\Delta_y L^+(x,D)\nu(y,x) + \nu(y,x) = f(y,x). \tag{3}$$

Через L_0 - обозначим замыкание дифференциального оператора (3) в $L_2(D)$ на подмножестве функции $u \in C_0^\infty(D)$, а через L_0^* - его сопряженный оператор в $L_2(D)$.

Оператор L назовем регулярным граничным расширением оператора L_0 , если выполнены условия

$$L_0 \subset L \subset L_0^*,\ \parallel L^{-1} \parallel < \infty.$$

Отметим, что все регулярные краевые задачи для уравнения - это граничные условия соответствующих регулярных расширений. Уравнение (3) является обобщенным уравнением Соболева, которое представляет большой теоретический и практический интерес.

Методом регулярных расширений найдена корректные граничные условия для уравнения (1).

Работа поддержана грантом AP05133239 КН МОН РК

Список литературы

[1] Т.Ш. Кальменов, Д. Сураган, *К спектральным вопросам объемного потенциала* // Доклады академии наук России, - Т. 428, №4. - С. 16-19,(2009).

[2] Т.Ш. Кальменов, М. Отелбаев, *Критерий граничности интегральных операторов* // Доклады академии наук России, - Т. 466, №4. - С. 395-398,(2016).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

О НЕКОТОРЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.Х. КАЛИДОЛДАЙ, Е.Д. НУРСУЛТАНОВ

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

aitolkynnur@gmail.com, er-nurs@yandex.ru

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана n-мерная мера Лебега μ, M – множества всех кубов в $\mathbb{R}^2$. Для функции $f(x)$, оперделенной и интегрируемой на каждом e из M, опеределим функцию

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{\substack{e\in M \\ |e|\geq t}} \frac{1}{|e|}\left| \int_e f(x)dx \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем $e \in M$, мере которых $|e| \overset{\text{def}}{=} \mu e > t,\ t \in (0, \infty)$. В случае когда $\sup\{|e| : e \in M\} = \alpha < \infty$ и $t > \alpha$ положим $\bar{f}(t, M) = 0$.

Через $N_{p,q}(M)$, $0 < p, q \leq \infty$, обозначим множество функций f, для которых при $q < \infty$

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

Данные пространства более общем ввиде были введены в работе [1] и были названы *сетевыми пространствами.* Сетевые пространтства является важным инструментом исследования в теории рядов Фурье, теории оперетоаров и в других направлениях. В этих работах использовались следующее интерполяционное свойство [1, теорема 1]

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M) \hookrightarrow N_{p,q}(M), \qquad (1)$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < q \leq \infty$. Из (1) следует, что если линейный оператор T ограничено дейстсвует из A_i в $N_{p_i,\infty}(M)$, $i = 0, 1$, то оператор T ограничено дейстсвует из $A_{\theta,q}$ в $N_{p,q}(M)$, где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Возникает вопрос будет ли иметь место равенство

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(M). \qquad (2)$$

В одномерном случае, когда $M-$ множество всех отрезков ответ положителен [2]. В данной работе мы показываем, что в случае если $M-$ множество всех кубов в $\mathbb{R}^2$ соотношение (2) не

Работа поддержана Министерством образования и науки Республики Казахстан (Соглашение: AP051 32071 и AP051 32590).

выполняется. Здесь следует отметить работы O. Blasco, A. Ruiz и L. Vega [3], [4], которые показали отрицательный результат для шкал пространтсв Морри, т.е. $\left(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1}\right) \neq M_p^{\lambda}$.

Мы также приводим здесь в некотором смысле альтернативную интерполяционную теорему для шкал $N_{p,q}(M)$ на конусах неотрицательных функции.

Теорема 1 Пусть M– множество кубов в $\mathbb{R}^2$. Пусть $p_0 < 2 < p_1$ и $0 < \theta < 1$ такое что $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\left(N_{p_0,\infty}(M), N_{p_1,\infty}(M)\right)_{\theta,\infty} \neq N_{p,\infty}(M).$$

В теореме 1 условие $p_0 < 2 < p_1$ существен. В случае $2 \leq p_0 < p_1 < \infty$ имеет место следующее утверждение:

Теорема 2 Пусть $2 \leq p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, M – семейство всех кубов с параллельными гранями к осям координат в $\mathbb{R}^n$. Пусть $G = \{f : f(x) \geq 0\}$, тогда $\forall f \in G \bigcap N_{p,q}(M)$ верно

$$\|f\|_{(N_{p_0,q_0}(M),N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}} \asymp \|f\|_{N_{p,q}(M)},$$

где соответсвующие константы зависят только от $p_i, q_i, \theta, q, i = 0, 1$.

Теорема 3 Пусть $2 \leq p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \tau, \sigma < \infty$. Если для квазилинейного оператора имеет место

$$\|Tf\|_{N_{q_0,\infty}(M)} \leq F_0 \|f\|_{N_{p_0,\sigma}(M)}, \ f \in N_{p_0,\sigma}(M), \tag{3}$$

$$\|Tf\|_{N_{q_1,\infty}(M)} \leq F_1 \|f\|_{N_{p_1,\sigma}(M)}, \ f \in N_{p_1,\sigma}(M), \tag{4}$$

то для любого $f \in G \cap N_{p,\tau}$ имеем

$$\|Tf\|_{N_{q,\tau}(M)} \leq cF_0^{1-\theta} F_1^{\theta} \|f\|_{N_{p,\tau}(M)}, \tag{5}$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0, 1)$ и соответсвующая константа зависит только от $p_i, q_i, \sigma, i = 0, 1$.

Список литературы

[1] Нурсултанов Е.Д. *Сетевые пространтсва и неравенства типа Харди-Литтлвуда* // Матем. сборник. — 1998. — Т. 189, — С. 83-102.

[2] Nursultanov E.D., Tikhonov S. *Net spaces and boundedness of integral operators* // J. Geom. Anal. — 2011, Vol. 21, — P. 950-981.

[3] Blasco O., Ruiz A., Vega L. *Non interpolation in Morrey-Campanato and block spaces* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. — 1999, Sci. 4, — P. 31-40.

[4] Ruiz A., Vega L. *Corrigenda to "Unique continuation for Schrodinger operators"and a remark on interpolation of Morrey spaces* // Publicacions Matem'atiques. — 1995, Vol. 39, — P. 405-411.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ЗАДАЧА ЗОММЕРФЕЛЬДА И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ[1,a], С.И. КАБАНИХИН[2,b], А.К. ЛЕС[3,c]

[1,3] Институт Математики и Математического Моделирования,Алматы, Казахстан
[2]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, РФ

[a]*kalmenov.t@mail.ru* , [b]*kabanikhin@sscc.ru*, [c]*a.les@math.kz*

Изучение периодических по времени решения многомерного волнового уравнения $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{u} - \Delta_x \widetilde{u} = \widetilde{f}(x,t), \widetilde{u}(x,t) = e^{ikt}u(x)$ на всем пространстве R^3 приводит к условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. Это задача, которая описывает движение рассеивающихся стационарных волн из источника, который находится в ограниченной области. Обратная задача по нахождению этого источника эквивалентна сведению задачи Зоммерфельда к граничной задаче для уравнения Гельмгольца в конечной области. Поэтому, задача Зоммерфельда является специальной обратной задачей. Следует отметить, что в работе Безменова И.В. [1] найдены приближенные формы таких граничных условий.

В нашей работе [2] при некоторых ограниченных на комплексных параметрах λ найден явный вид этих граничных условий через граничное условие потенциала Гельмгольца, задаваемой в конечной области Ω интегралом

$$u(x,\lambda) = \int_\Omega \varepsilon(x-\xi,\lambda)\rho(\xi,\lambda)d\xi \tag{1}$$

где $\varepsilon(x-\xi,\lambda)$ - фундаментальные решения уравнения Гельмгольца.

$$-\Delta_x \varepsilon(x) - \lambda\varepsilon = \delta(x), \tag{2}$$

а $\rho(\xi,\lambda)$ - плотность потенциала и λ- комплексное число, δ - дельта-функция Дирака

Эти граничные условия обладают тем свойством, что стационарные волны, приходящие из области Ω на $\partial\Omega$ проходят $\partial\Omega$ без отражения т.е. являются прозрачными граничными условиями.

В настоящей работе в общем случае в R^n, $\quad n \geq 3$ нами решена проблема сведения задачи Зоммерфельда к граничной задаче в конечной области. При выполнении необходимых условий на потенциал Гельмгольца (1) также найдена его плотность $\rho(\xi,\lambda)$.

Список литературы

[1] И.В.Безменов, *Перенос условий излучения Зоммерфельда на искусственную границу области, основанный на вариационном принципе* // Сибирский математический журнал, - Т.185.є3.С.3-24,(1994).

[2] Т.Ш. Кальменов, Д. Сураган , *Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области* // Журнал вычислительной математики и математической физики, -Т.52, є6. -С.1063-1068,(2012).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Работа поддержана грантом AP05133239 КН МОН РК.

СИЛЬНАЯ ОСЦИЛЛЯЦИЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Айгерим КАЛЫБАЙ[1,a], Данагуль КАРАТАЕВА[2,b]

[1]Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан
[2]ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

[a]kalybay@kimep.kz, [b]danagul83@inbox.ru

Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка:

$$\Delta(\rho_i|\Delta y_i|^{p-2}\Delta y_i) + \lambda v_i|y_{i+1}|^{p-2}y_{i+1} = 0, \quad i = 0,1,2,..., \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Относительно коэффициентов уравнения (1) полагаем, что $v = \{v_i\}$ и $\rho = \{\rho_i\}$ являются последовательностями неотрицательных действительных чисел. Более того, пусть $\rho_i > 0$ для всех $i = 0,1,2,...$ и для каждого $m > 1$ существует $i > m$ такой, что $v_i \neq 0$.

Приведем необходимые для настоящей работы определения и утверждения. Пусть $m \geq 0$ и $n \geq 0$ – целые числа. Для краткости будем писать "интервал", подразумевая "дискретный интервал".

– Говорят, что интервал $(m, m+1]$ содержит обобщенный нуль нетривиального решения $y = \{y_i\}$ уравнения (1), если $y_m \neq 0$ и $y_m y_{m+1} < 0$.

– Нетривиальное решение y уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечное число обобщенных нулей, в противном случае оно называется неосцилляторным.

– Уравнение (1) называется осцилляторным, если все его нетривиальные решения являются осцилляторными, в противном случае оно называется неосцилляторным.

– Уравнение (1) называется сильно осцилляторным или неосцилляторным, если оно при всех $\lambda > 0$ соответственно является осцилляторными или неосцилляторным.

Изучению осцилляционных свойств уравнения (1) посвящено большое количество работ (см., например, [1-3] и приведенные там ссылки).

Исследование уравнения (1) опирается на следующее утверждение, приведенное в работе [1].

Теорема А *Пусть* $0 \leq m < \infty$. *Уравнение* (1) *является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует* $m > 1$ *и выполняется неравенство*

$$\sum_{i=m}^{\infty}(\rho_i|\Delta y_i|^p - \lambda v_i|y_{i+1}|^p) \geq 0$$

для всех нетривиальных $y = \{y_i\}_{i=m}^{n+1}$, $y_m = 0$ *и* $y_{n+1} = 0$.

Определим множество $\overset{\circ}{Y}(m,n)$ для $0 \leq m < n \leq \infty$. Нетривиальную числовую последовательность $y = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ назовем финитной, если конечное число ее членов отлично от нуля, а множество $supp\ y := \{i \geq 0 : y_i \neq 0\}$ назовем ее носителем. Обозначим через $\overset{\circ}{Y}(m,n)$ совокупность всех финитных последовательностей y, у которых $supp\ y \subset [m+1, n]$, $n < \infty$. При $n = \infty$ мы полагаем, что для любого y найдется целое число $k = k(y):\ m < k < \infty$ такое, что $supp\ y \subset [m+1, k]$.

Расмотрим весовое неравенство Харди в разностной форме

$$\sum_{i=m}^{\infty} v_{i-1}|y_i|^p \leq C_m \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i|\Delta y_i|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m,n). \tag{2}$$

На основании теоремы А нами доказана

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* C_m *–наилучшая константа в* (2). *Тогда уравнение* (1) *при* $\lambda = 1$
(i) неосцилляторно тогда и только тогда, когда существует $m > 1$ *и выполнено* $0 < C_m \leq 1$;
(ii) осцилляторно тогда и только тогда, когда для любого $m > 1$ *выполнено* $C_m > 1$.

В работе [4] найден критерий выполнения неравенства (2) вместе с оценкой его наилучшей константы C_m:

Теорема B. *Пусть* $0 \le m < n \le \infty$ *и* $1 < p < \infty$. *Неравенство* (2) *выполняется тогда и только тогда, когда* $B(m,n) < \infty$. *Более того, для наименьшей константы в* (2) *выполняется*

$$B(m,n) \le C_m \le 2\widetilde{\gamma}_p\, B(m,n),$$

где

$$B(m,n) \equiv B_{v,\rho}(m,n) = \sup_{m<t\le s<n} \left(\sum_{i=t}^{s-1} v_i\right) \left(\left(\sum_{i=m}^{t} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{n} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{-1}$$

и

$$\widetilde{\gamma}_p = \inf_{1<\mu} \frac{\mu^p(\mu^p - 1)}{(\mu - 1)^p}.$$

Умнажая обе части неравенства (2) на $\lambda > 0$ получим неравенство Харди соответствующее уравнению (1)

$$\sum_{i=m}^{\infty} \lambda v_{i-1}|y_i|^p \le \lambda C_m \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p, \quad y \in \overset{\circ}{Y}(m,n), \tag{3}$$

при этом в неравенстве (3) наилучшая константа будет λC_m, где C_m–наилучшая константа в неравенстве (2).

Теперь, на основании леммы 1 и теоремы B имеем

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда уравнение* (1)
(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} B(m,\infty) = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} B(m,\infty) = \infty.$$

Список литературы

[1] P. Rehak, *Oscillatory properties of second order half-linear difference equations* // Czech. Math. J., - V.**51**:126, 303–321 (2001).

[2] А. З. Алимагамбетова, Р. Ойнаров, *Критерии осцилляторности и неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка* // Математический журнал, **7**:1, 15–24 (2007).

[3] J. Jiang, X. Tang *Oscillation of second order half-linear difference equations (I)* // Applied Math. Sciences, **8**:40, 1957–1968 (2014).

[4] A. Kalybay, D. Karatayeva, R. Oinarov, A. Temirkhanova, *Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality* // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. no. 43. 1–16 (2017).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛЕДА ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ С МУЛЬТИВЕСОВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. А. КАЛЫБАЙ[1,a], Ж. А. КЕУЛИМЖАЕВА[2,b]

[2]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, [1]Казахстан, Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан

[b]*zh.keulimzhayeva@mail.ru*, [a]*kalybay@kimep.kz*

Пусть $I=(0,1)$, n-натуральное число, $\rho_i : I \to R$, $i=1,2,...,n$, неотрицательные n раз непрерывно дифференцируемые функции на I такие, что

$$\rho_i^{-1}(\cdot) \equiv \frac{1}{\rho_i(\cdot)} \in L_1(\alpha,1), \quad i=1,2,...,n-1, \tag{1}$$

$$\rho_n^{-1}(\cdot) \in L_{p'}(\alpha,1), \quad 1 \le p' \le \infty, \tag{2}$$

где $0<\alpha<1$.

Для функции $f: I \to R$ положим

$$D^0_{\bar\rho} f(x) \equiv f(x), \quad D^k_{\bar\rho} f(x) = \rho_k(x) \frac{d}{dx} D^{k-1}_{\bar\rho} f(x), \quad k=1,2,...,n, \quad x \in I$$

Далее предположим, что функции $D^k_{\bar\rho} f(x)$, $k=0,1,...,n-1$, локально абсолютно непрерывные на интервале I. Тогда для любого $k=0,1,...,n-1$ имеет смысл выражения $D^k_{\bar\rho} f(x)$ и его назовем $\bar\rho$-мультивесовой производной функции f в I порядка k.

Пусть $W^n_{p,\bar\rho} \equiv W^n_{p,\bar\rho}(I)$ совокупность функции имеющие $\bar\rho$-мультивесовые производные до порядка n, $n \ge 1$, включительно в интервале I. На множестве $W^n_{p,\bar\rho}$ функционал

$$\|f\|_{W^n_{p,\bar\rho}} = \|D^n_{\bar\rho} f\|_{p,I} + \sum_{i=0}^{n-1} |D^i_{\bar\rho} f(1)| \tag{3}$$

определен и является нормой, где $\|\cdot\|_{p,I}$-обычная норма пространства $L_p(I)$.

Для $0 \le s \le x < \infty$ и для $i,j=0,1,...,n-1$ определим функции $K_{j,i+1}$:

$$K_{j,i+1}(x,s) = (-1)^{j-i} \int_s^x \rho_j^{-1}(t_j) \int_s^{t_j} \rho_{j-1}^{-1}(t_{j-1}) ... \int_s^{t_{i+2}} \rho_{i+1}^{-1}(t_{i+1}) dt_{i+1} dt_{i+2} ... dt_j,$$

при $j \ge i$, $K_{j,j+1}(x,s) \equiv 1$ и $K_{j,i+1}(x,s) \equiv 0$ при $j<i$.

Пусть $C_0^\infty(I)$-множество бесконечно дифференцируемых и финитных в I функции. В силу условии (1) и (2) на функции ρ_i, $i=1,2,...,n$, множество $C_0^\infty(I)$ принадлежат пространству $W^n_{p,\bar\rho}$.

Замыкание множества $C_0^\infty(I)$ по норме (3) пространство $W^n_{p,\bar\rho}$ обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^n_{p,\bar\rho} = \overset{\circ}{W}{}^n_{p,\bar\rho}(I)$.

Рассмотрим вопрос о существования следа функции $f \in W^n_{p,\bar\rho}$, т.е. существования конечного предела

$$\lim_{t \to 0^+} D^k_{\bar\rho} f(t) \equiv D^k_{\bar\rho} f(0), \ \ 0 \le k \le n-1. \tag{4}$$

Существование следа функции из пространства дифференцируемых функции является классическая задача (см. [1,2]).

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан, грант є AP05130975.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 \le k \le n-1$ *и выполнены условие* (1), (2). *Тогда для любого* $f \in W^n_{p,\bar\rho}$ *существует конечный предел* (4), *тогда и только тогда, когда*

$$\rho_n^{-1}(\cdot)K_{n-1,k+1}(\cdot,\circ) \in L_{p'}, \tag{5}$$

при этом имеет место оценка

$$\|D^k_{\bar\rho} f\|_{C[0,1]} \le C\|f\|_{W^n_{p,\bar\rho}},$$

где константа $C > 0$ *не зависит от* $f \in W^n_{p,\bar\rho}(I)$.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Если выполнено* (5), *то для любого* $f \in \overset{\circ}{W}{}^n_{p,\bar\rho}$ *имеет место*

$$\lim_{t\to 0^+} D^k_{\bar\rho} f(t) = D^k_{\bar\rho} f(0) = 0.$$

Замечание 1. *Если существует конечный предел* (4) *при* $k : 0 \le k \le n-1$ *для всех* $f \in W^n_{p,\bar\rho}$, *то по теореме 1 выполнено* (5). *Откуда следует* $\rho_{k+1}^{-1} \in L_1(I)$. *Однако, из* $\rho_{k+1}^{-1} \in L_1(I)$ *еще не следует выполнение* (4) *и* (5).

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 \le k_1 < k_2 \le n-1$. *Если* $\rho_i^{-1} \in L_1$ *при всех* $i = k_1+1, k_1+2, ..., k_2+1$ *и существует конечный предел* (4) *при* $k = k_2$, *то существует конечный предел* (4) *при всех* $k : k_1 \le k \le k_2$.

Из следствие 1 и 2 следует

Следствие 3. *Пусть выполнено условий следствие 2. Тогда для любого* $f \in \overset{\circ}{W}{}^n_{p,\bar\rho}$ *существует* $D^k_{\bar\rho} f(0)$, $k_1 \le k \le k_2$ *и* $D^k_{\bar\rho} f(0) = 0$, $k_1 \le k \le k_2$.

Список литературы

[1] *С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука, 1977.*

[2] *В. Г. Мазья, Пространства С.Л.Соболева //Л.: Изд-во Ленингр. ун-та., 1985.*

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

Айкен КОШЕРБАЕВА

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

kosherbaevaayken@gmail.com

Современные астрономические наблюдения показывает, что центральная звезда и планетная система вокруг нее, во многих случаях, генетически взаимосвязаны [1-2]. В связи с этим, представляет интерес исследования эволюции планетных систем совместно с центральной звездой. Особый интерес вызывает эволюция планетных систем в этапе ее нестационарности, когда ведущим фактором динамической эволюции является переменность масс планет и центральной звезды [3-6].

В работе рассматривается задача многих сферических тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно, в различных темпах, как небесно-механическая модель нестационарных планетных систем. В статье получены дифференциальные уравнения движения сферических тел с переменными массами с целью исследование эволюции нестационарных планетных систем. При этом учитывается как убывания масс родительской звезды так и рост масс планет из-за аккреции вещества [6].

Рассмотрим планетную систему состоящийся из $n+1$ взаимогравитирующих сферических небесных тел с переменными массами. Обозначим через T_0 центральное тело – родительская звезда планетной системы. Планеты обозначим через T_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Расположения планет таковы, что T_i внутренняя планета относительно планет T_{i+1}, но внешняя, относительно T_{i-1}. Массы тел изменяются со временем неизотропно

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \ \ldots, \ m_n = m_n(t) \tag{1}$$

Пусть, темп изменения масс различные [7-8]

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_k}{m_k}, \quad i = 0, \ldots, n, \quad k = 0, \ldots, n, \quad i \neq k. \tag{2}$$

Масса родительской звезды намного больше, чем масса определенной планеты в рассматриваемой системе

$$m_0 \gg m_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

В абсолютной прямоугольной декартовой системе координат, исходя из уравнения Мещерского, получены уравнения движения многопланетной задачи с переменными массами. Предполагается, что массы тел изменяются неизотропно, в различных темпах и появляются реактивные силы. Далее, получены уравнения движения рассматриваемой проблемы в относительной системе координат. Начало относительной системы координат находится в центре наиболее массивного тела – центральной звезды. Уравнения движения может быть написаны в виде [6]

$$\ddot{\vec{r}}_i + f\frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3}\vec{r}_i - \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i}\vec{r}_i = grad_{\vec{r}_i} W_i \tag{4}$$

где

$$\gamma_i = \frac{m_0(t_0) + m_i(t_0)}{m_0(t) + m_i(t)} = \gamma_i(t) \tag{5}$$

$$W_i = W_{ri} + W_{ci} + W_{gi} \tag{6}$$

$$W_{ri} = \left(\frac{\dot{m}_i}{m_i}\vec{V}_i - \frac{\dot{m}_0}{m_0}\vec{V}_{0i}\right) \cdot \vec{r}_i \tag{7}$$

$$W_{gi} = f\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{1}{r_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3}\right) \tag{8}$$

$$W_{ci} = -\frac{\ddot{\gamma}_i}{2\gamma_i}\, r_i^2 \tag{9}$$

Полученные уравнения движения (4) удобные для использования теории возмущения разработанных для таких нестационарных систем [6]. На базе уравнения относительного движения n планет (4) с началом в центре родительской звезды, можно написать различные дифференциальные уравнения движения в различных системах оскулирующих элементов на базе апериодического движения по квазиконическому сечению.

В работе получены различные формы дифференциальных уравнении движения для нестационарных планетных систем, содержащие n планет. Получены уравнения возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа и в аналогах второй системы канонических элементов Пуанкаре. В дальнейшем планируется получение разложения возмущающей функции через оскулирующие элементы с использованием системы аналитических вычислении "Wolfram Mathematica". Полученные уравнения будут использованы для исследования эффектов переменности масс в ходе эволюции экзопланетных систем.

Список литературы

[1] http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu

[2] http://exoplanet.eu

[3] T.B. Omarov, *Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy* // New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002.

[4] A.A. Bekov, T.B. Omarov, *The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems* // Astron. and Astrophys. Transactions **22**:2, 145–153 (2003).

[5] P Eggleton, *Evolutionary processes in binary and multiple stars* // UK: Cambridge University Press, 2006.

[6] М.Дж. Минглибаев, *Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение* // LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2012.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СУЩЕСТВОВАНИЕ, КОМПАКТНОСТЬ И ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИНГУЛЯРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

М.Б.МУРАТБЕКОВ, А.О.СУЛЕЙМБЕКОВА

Таразский государственный педагогический университет, Тараз

musahan_m@mail.ru

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей многих явлений и процессов, таких например, как явлении переноса энергии гидролиза молекул аденозинтрифосфорной кислоты вдоль белковых молекул в виде уединенных волн, т.е солитонов процесс переноса почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности.

В частности, к этому классу относится и нелинейные уравнение Кортевега-де Фриза, который является основным уравнением современной математической физики.

Вопросам разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений нечетного порядка и в частности, для уравнения Кортевега-де Фриза посвящена значительная литература [1-4] и цитируемые там работы. В настоящей работе рассматриваются вопросы о существовании, компактности и об оценках аппроксимационных чилел резольвенты линейного оператора типа Кортевега-де Фриза с сильно растущими коэффициентами.

Список литературы

[1] R. Temam, *Sur un probleme non linearie.* // Math.Pures. Apple **48**:2, 159–172 (1969).

[2] Ж. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* // Мир, Москва, –586с, 1972.

Авторы были поддержаны грантом МОН РК на 2018-2020 гг. ИРН:AP0513108)

[3] С. Похажаев, *О некоторых весовых тождествах для решений обобщенных уравнений Кортевега-де Фриза.* // Математические заметки, **89**:3,393–409, (2011).

[4] М. Муратбеков, Р. Рахимова, А. Шыракбаев *О существовании и аппроксимативных свойствах решений полупериодической задачи Дирихле для одного класса нелинейных вырождающихся уравнений неклассического типа.* // Математические заметки, Т**32**:48,95–109, (2011).

— ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Кулзина НАЗАРОВА, Батирхан ТУРМЕТОВ, Кайрат УСМАНОВ

Университет им. Ахмеда Ясави , Туркестан, Казахстан

gjnazarova@mail.ru, turmetovbh@mail.ru, y_kairat@mail.ru

Настоящая работа посвящена к исследованию вопросов разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа. Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, $n \geq 3$, $\partial\Omega = \{x \in \partial\Omega : |x| = 1\}$ - единичная сфера и $\Gamma = \{x \in \partial\Omega : x_n = 0\}$. Пусть S-действительная ортогональная матрица $S \cdot S^T = E$, E-единичная матрица. Предположим также, что существует натуральное число l такое, что $S^l = E$. Заметим, что если $x \in \Omega$, или $x \in \partial\Omega$, то для любого натурального числа k имеет место включение $S^k x \in \Omega$, или $S^k x \in \partial\Omega$. Примеры таких отображений приведены в работе [1].

Пусть $a_1, a_2, ..., a_l$- некоторые действительные числа, $g(x)$ и $\phi(x)$ функции заданные на $\partial\Omega$ и Γ соответственно. Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(Sx) + ... + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(S^{l-1}x\right) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}), \tilde{x} \in \Gamma. \tag{3}$$

Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (1)-(3) в классическом смысле.

В условии (2) выражение $\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(S^k x\right)$ означает $\frac{\partial u(S^k x)}{\partial x_n} = I_{S^k}\left[\frac{\partial}{\partial x_n} u(x)\right], k = 1, 2, ..., l-1$.

Так как краевое условие (2) задано в виде связи значений производной функции $u(x)$ в различных точках, то рассматриваемая задача входит в класс нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского [2].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть числа $\{a_k : k = 1, \ldots, l\}$ такие, что $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + ... + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$ при $k = 1, \ldots, l$, где ε_k - корни степени l из единицы, $\lambda + \frac{1}{2} > 1$, причем число $\lambda + \frac{1}{2}$ - нецелое, $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. Тогда решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$.*

Можно показать, что показатель гладкости решения задачи (1)-(3) полученный в теореме 1 нельзя улучшить. Данное утверждение мы докажем на примере отображения $Sx = -x$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $Sx = -x, \lambda > 0$, причем число $\lambda + \frac{1}{2}$ - нецелое. Существует функция $g(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ такая, что решение задачи (1)-(3) при любом $\varepsilon > 0$ не принадлежит классу $C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega})$.*

Работа была поддержана грантом AP05131268 КН МОН РК

Список литературы

[1] V. Karachik, A. Sarsenbi, B. Turmetov, *On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation* // Turkish J. of mathematics, **43**:3, 1604–1625 (2019).

[2] А. Бицадзе, А. Самарский, *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // ДАН СССР, **185**:4, 739–740 (1969).

— ⁂ —

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

К.Ж.НАЗАРОВА, К.И.УСМАНОВ

Международный Казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан

gjnazarova@mail.ru, ykairat@mail.ru

Среди дифференциальных уравнений с отклоняющими аргументами особое место занимает уравнения, в которых отклонение аргументов подчиняется определенному закону. Одним из таких отклонений, является инволютивное отклонение. Пусть $\alpha(t)-$ изменяющий ориентацию гомеоморфизм $\alpha : [0, T] \to [0, T]$ такой, что $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$. Такой гомеоморфизм называют карлемановским сдвигом или инволютивным отклонением. Свойства этого гомеоморфизма исследовались в работах Г.С.Литвинчука [1], Н.К.Карапетянца и С.Г.Самко[2] и др.

В данной работе на отрезке $[0, T]$ рассматривается двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с инволюцией

$$\frac{dx(t)}{dt} + diag(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0, T]\,,$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, d \in R^n,$$

где матрица $K(t, s)$ непрерывна соответственно на $[0, T] \times [0, T]$, n- мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

На отрезке $[0, T]$ в качестве примера инволютивного отклонения, можно рассмотреть гомеоморфизм $\alpha(t) = T - t$.

Для исследования краевой задачи используется метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым [3]. В работе [4] метод параметризации был применен к исследованию однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегродифференциальных уравнений.

Применяя некоторые преобразования рассматриваемую задачу свели к краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи и предложен алгоритм ее нахождения методом параметризации [4] .

Список литературы

[1] Г. С. Литвинчук , *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* // Издательство "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1977.

[2] Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения* // Ростов-н/Д. Изд-во РГУ.,188 с. -1988.

[3] Д.С. Джумабаев *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений* //Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. є 1. С. 50-66.

[4] Д.С. Джумабаев *Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения* // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. є 7. С. 1209-1221.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ $1 < q < p < \infty$

Рыскул ОЙНАРОВ

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

o_ryskul@mail.ru

Рассмотрим интегральные операторы

$$(\mathcal{K}^+ f)(t) = \int_0^t K(t,s) f(s) ds, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(\mathcal{K}^- f)(t) = \int_t^\infty K(s,t) f(s) ds, \quad 0 < t < \infty,$$

с ядром $K(\cdot,\cdot) \geq 0$.

В работе [1] введены классы ядер $\mathcal{O}_n^+$, $\mathcal{O}_n^-$, $n \geq 0$ и получены необходимые и достаточные условия ограниченности операторов $\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-$ из $L_p(R_+)$ в $L_q(R_+)$ при $1 < p \leq q < \infty$, когда их ядро $K(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \bigcup \mathcal{O}_n^-$, $n \geq 0$. Здесь дается критерии ограниченности операторов $\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-$ из $L_p(R_+)$ в $L_q(R_+)$ при $1 < q < p < \infty$ в предположении $K(\cdot,\cdot) \in \mathcal{O}_n^+ \bigcup \mathcal{O}_n^-$, $n \geq 0$.

Список литературы

[1] Р. Ойнаров, *Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтерровского типа* // Сиб. матем. журн., **48**:5, 1100–1115 (2007).

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ДИСКРЕТНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ТРЕМЯ ВЕСАМИ

Б.К. ОМАРБАЕВА

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

gaziza.omarbaeva@mail.ru

Дискретные, непрерывные неравенства типа Харди имеют большое значение и многочисленные приложения в гармоническом анализе, в теориях интегральных, дифференциальных и разностных операторов, в теории вложений функциональных пространств и в других разделах математики. В последние годы интенсивно исследуются весовые оценки для многомерных операторов типа Харди, которые имеют важное приложение в исследовании свойств ограниченности операторов из весового пространства Лебега в локальное пространство типа Морри ([1], [2]). Неравенство, включающее итерацию дискретного оператора Харди, традиционно считается трудным для оценки, поскольку оно содержит три независимых весовых последовательностей и три параметра, при их различных соотношениях.

Пусть $0 < q, \theta < \infty$ и $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительные, а $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ неотрицательная последовательности действительных чисел. Рассмотрим весовую оценку

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{\theta}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\varphi_k\sum_{i=1}^{k}f_i\Big|^{q}\Big)^{\frac{\theta}{q}}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \le C\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_jf_j|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,u}, \tag{1}$$

где $l_{p,u}$ - пространство последовательности $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,u} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_jf_j|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty, \ \ 1 \le p < \infty.$$

Основной целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий для неравенство (1) при $0 < q < p = 1 \le \theta < \infty$.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0$ и $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ - неотрицательная, неубывающая последовательность, а $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ - неотрицательная последовательность. Положим $\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$, $n \ge 1$ и $u_0 \equiv 0$. Тогда

$$I := \sum_{n=1}^{\infty}v_n\Big(\sum_{k=n}^{\infty}v_k\Big)^{\alpha}u_n^{\alpha} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}v_k\Big)^{\alpha+1}\Delta u_n^{\alpha} =: J.$$

Теорема 1. Пусть $0 < q < p = 1 \le \theta < \infty$. Тогда весовая оценка (1) выполняется тогда и только тогда, когда $\max\{M_1, M_2\} < \infty$, где

$$M_1 := \sup_{k\ge1}\Big(\sum_{i=k}^{\infty}\omega_i^{\theta}\Big(\sum_{s=k}^{i}\varphi_s^{q}\Big)^{\frac{\theta}{q}}\Big)^{\frac{1}{\theta}}\max_{1\le i\le k}u_i,$$

$$M_2 := \sup_{k\ge1}\Big(\sum_{j=1}^{k}\Delta\overline{u}_j^{\frac{q}{1-q}}\Big(\sum_{r=j}^{k}\varphi_r^{q}\Big)^{\frac{1}{1-q}}\Big)^{\frac{1-q}{q}}\Big(\sum_{i=k}^{\infty}\omega_i^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Здесь $\Delta\overline{u}_j = \overline{u}_j - \overline{u}_{j-1}$, $j \ge 1$ и $\overline{u}_0 = 0$, а $\overline{u}_k = \max\limits_{1\le j\le k}u_j$, $k \ge 1$. При этом, $C \approx \max\{M_1, M_2\}$, где C -наилучшая константа в (1).

Работа выполнено совместно с профессором Р. Ойнаровым

Список литературы

[1] V.I. Burenkov, R. Oinarov, *Necessary and Sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesque space to a Morrey-type space* // Math. Inequal. Appl., **16**:1 (2013), 1-19.

[2] R. Oinarov, A. Kalybay *Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters*// J. Funct. Spaces. Appl., **2016** (2016), Article ID 1045459, 11 pages.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МАКСИМАЛЬНОГО И ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Жомарт ОНЕРБЕК, Айдос АДИЛХАНОВ

Евразийский национальный университет, Нур-Султан, Казахстан

onerbek.93@mail.ru, aaidosn@mail.ru

В данной работе приводится условие ограниченности максимального и дробно-максимального оператора в глобальных пространствах Морри с переменным показателем.

Пусть $f \in L_{loc}(\Omega)$. Максимальной функцией для $f(x)$ называется функция

$$Mf(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{\tilde{B}(x,r)|} f(y)|dy, \tag{1}$$

где $B(x,r)$ -шар в n -мерном пространстве с центром в точке $x \in R^n$ и радиусом r, а $|B(x,r)|$ - обьем этого шара, $\tilde{B}(x,r) = B(x,r) \cap \Omega, \quad \Omega \subset R^n$ - открытое ограниченное множество.

Дробно-максимальный оператор с переменным показателем $\alpha(x)$ определяется равенством

$$M^{\alpha(x)} f(x) = \sup_{x\in B} |B(x,r)|^{\frac{\alpha(x)}{n}-1} \int_{\tilde{B}(x,r)} |f(y)|dy \tag{2}$$

Пусть $p(x)$ - измеримая функция на открытом ограниченном множестве $\Omega \subset R^n$ со значениями $(1,\infty)$. Предположим

$$1 < p_- \le p(x) \le p_+ < \infty, \tag{3}$$

где $p_- = p_-(\Omega) = \inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ = p_+(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} p(x)$. где $0 < \alpha(x) < n$. При $\alpha(x) = const$ этот оператор совпадает классическим потенциалом Рисса I^α. Пусть $P^{\log}(\Omega)$ - это множество функций $p(x)$, для которых

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{-ln\,|x-y|}, |x-y| \le \frac{1}{2}, (x,y) \in \Omega, \tag{4}$$

где $C = C(p)$ не зависит от x и y.

Обозначим через $L_{p(.)}(\Omega)$ - пространство всех измеримых функций $f(x)$ на Ω, таких, что

$$J_{p(.)}(f) = \int_\Omega [f(x)]^{p(x)}\,dx < \infty, \tag{5}$$

где норма определяется следующим образом

$$||f||_{p(.)} = \inf\left\{\eta > 0, J_{p(.)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \le 1\,\right\}. \tag{6}$$

Пусть $w(x,r)$ - неотрицательная измеримая функция на $\Omega \times [0,l]$, где $\Omega \subset R^n, l = diam\Omega$, $1 \leq \theta < \infty$.В работе [1] было определено обобщенное пространство $M_{p(.),w(.)}(\Omega)$ с нормой.

$$||f||_{M_{p(.),w}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{r^{-\frac{n}{p(x)}}}{w(x,r)} ||f||_{L_{p(.)}(B(x,r))}.$$

Мы введем глобальные пространства Морри с переменным показателем $GM_{p(.),w(.),\theta}(\Omega)$ как множество функций с конечной квазинормой:

$$\|f\|_{GM_{p(.),w(.),\theta}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ||w^{-1}(x,r)\, r^{-\frac{n}{p(x)}} ||f||_{L_{p(.)(B(x,r))}}||_{L_{\theta(0,l)}} < \infty.$$

Теорема 1.

Пусть, что $p(x) \in P^{log}(\Omega), 1 < \theta < \infty$ *и положительные измеримые функции* $w_1(x,r), w_2(x,r)$ *удовлетворяют условию:*

$$A^{\theta} = \sup_{x\in\Omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{w_2^{\theta}(x,t)} \Big(\int_t^l \big(r^{-1} w_1(x,r)\big)^{\theta'} dr\Big)^{\frac{\theta}{\theta'}} dt < \infty \qquad (7)$$

Тогда максимальный оператор M *является ограниченным из* $GM_{p(.),w_1,(.)\theta}(\Omega)$ *в* $GM_{p(.),w_2(.),\theta}(\Omega)$.

Теорема 2.

Пусть $p(x) \in P^{log}(\Omega), 2 < \theta < \infty$ *и функция* $w(x,r)$ *удовлетворяет условию (7) и*

$$\Big(\int_t^l \big(r^{\alpha(x)-1} w(x,r)\big)^{\theta'} dr\Big)^{\frac{1}{\theta'}} \leq r^{-\frac{\alpha(x)p(x)}{q(x)-p(x)}}, \qquad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \Big(\frac{r^{\frac{n}{p(x)}-\frac{n}{q(x)}}}{(w(x,r))^{\frac{p(x)}{q(x)}-1}}\Big)^{\frac{\theta}{\theta-\theta'}} dr < C$$

Тогда оператор $M^{\alpha(.)}$ *является ограниченным оператором из* $GM_{p(.),w_1,(.)\theta}(\Omega)$ *в* $GM_{p(.),w_2(.),\theta}(\Omega)$.

Аналогичные результаты для обобщенных пространств Морри с переменным показателем доказаны в [1] и [2].

Список литературы

[1] V. Guliyev, J. Hasanov, S. Samko.*Boundedness of the maximal,potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces // MATH.SCAND,* **107**, *285-304 (2010).*

[2] V. Guliyev, S. Samko. *Maximal,potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets //* Journal of Mathematical Sciences,Vol.193,No.2,August, 2013.

— ❋ ❋ ❋ —

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА САМАРСКОГО-ИОНКИНА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Исабек ОРАЗОВ

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А. Ясави, Туркестан, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

orazov@math.kz

В докладе дается постановка новых начально-краевых задач для многомерного волнового уравнения с нелокальными условиями по пространственным переменным, являющимися многомерными обобщениями задачи Самарского-Ионкина и исследована их корректность.

Мы рассматриваем один из вариантов новых постановок начально-краевых задач для многомерного по пространственной переменной волнового уравнения. Областью рассмотрения задачи является шаровой цилиндр Q с осью вдоль оси t. Ставятся классические начальные условия на основании цилиндра и новые нелокальные краевые условия на пространственных (боковых) границах цилиндра. Эти условия аналогичны условиям задачи $S_{\alpha 1}$, рассмотренным в работах [1 - 4] для уравнения Лапласа в единичном круге и единичном шаре.

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ – произвольная точка области Ω. Пусть константы θ_k принимают значения только 1 или -1. Тогда $(\theta_k)^2 = 1$. Через x^* обозначим точку $x^* = (-x_1, \theta_2 x_2, \ldots, \theta_n x_n)$. Через $\partial\Omega_+$ $(\partial\Omega_-)$ обозначим часть границы $\partial\Omega$, для которой $x_1 > 0$ $(x_1 < 0)$. Часть границы $\partial\Omega$, для которой $x_1 = 0$, обозначим через $\partial\Omega_0$.

Через $Q = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$ обозначим прямой шаровой цилиндр, а через $Q_0 = \{(x,t) : x \in \Omega_0, 0 < t < T\}$ – часть его боковой поверхности. Рассмотрим новую нелокальную краевую задачу для многомерного волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in Q, \tag{1}$$

где Δ_x – есть оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Используются классические начальные условия

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

и нелокальные краевые условия на боковой границе шарового цилиндра

$$u(x,t) - \alpha u(x^*, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega_+, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial n}(x^*, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega_+, \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Здесь $\alpha \neq 1$ – фиксированное действительное число, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$.

Правую часть уравнения (1) и начальные условия выберем из следующего "стандартного" класса гладкости: $f(x,t) \in C^{1+\varepsilon}(\bar{Q})$, $\tau \in C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\nu \in C^{1+\varepsilon}(\bar{\Omega})$. Дополнительно от $\tau(x)$ и $\nu(x)$ потребуем удовлетворение краевым условиям (3), (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133271

Регулярным решением задачи (1) - (4) назовем функцию из класса $C^{2,1}_{x,t}(Q)\bigcap C^{1,0}_{x,t}\left(\bar{Q}\backslash Q_0\right)$, обращающую волновое уравнение (1), начальные условия (2) и нелокальные краевые условия (3), (4) в тождество.

Развивая идею работы [5] на многомерный случай, мы показываем, что корректность сформулированной задачи (1) - (4) может быть обоснована путем сведения к последовательному решению двух классических начально-краевых задач для волнового уравнения.

Основной результат доклада сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \neq 1$, $f(x,t)\in C^{1+\varepsilon}\left(\bar{Q}\right)$, $\tau \in C^{2+\varepsilon}\left(\bar{\Omega}\right)$, $\nu \in C^{1+\varepsilon}\left(\bar{\Omega}\right)$ и $\tau(x),\nu(x)$ удовлетворяют краевым условиям (3), (4). Тогда нелокальная начально-краевая задача (1) - (4) имеет единственное регулярное решение.*

Список литературы

[1] М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов *Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге* // Дифф. уравнения, **50**:2, 264–268 (2014).

[2] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov *On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball* // Eurasian Mathematical Journal, **3**:1, 143–146 (2012).

[3] А.А. Дукенбаева *Об обной обобщенной задаче типа Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге* // Математический журнал, **18**:1, 78–87 (2018).

[4] A.A. Dukenbayeva, M.A. Sadybekov, N.A. Yessirkegenov *On a Generalised Samarskii-Ionkin Type Problem for the Poisson Equation* // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer, Cham, **264**, 207–216 (2018).

[5] И. Оразов, М.А. Садыбеков *Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам* // Сиб. матем. журн., **53**:1, 180-186 (2012).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мухтарбай ОТЕЛБАЕВ

Институт математики и математического моделирования
Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

otelbaevm@mail.ru

В этой работе, перекликающейся к статьям [1]-[4] в конечномерном действительном гильбертовом пространстве H, рассматриваем преобразование

$$f(u) = u + B(u), \tag{1}$$

где $B(\cdot)-$ нелинейное непрерывно-дифференцируемое (т.е. имеющее производную по Гото) преобразование.

Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия У1-У3.

У1. Существуют обратимые линейные операторы A и T, такие, что

$$A^* = A > E, \langle u, Tu\rangle \geq \|Gu\|^2, \langle Bu, Tu\rangle > 0, \|G^*G\| \leq 1,$$

где $G = AT$.

У2. Если $u-$ собственный вектор оператора G^*G, то выполнена оценка $\langle Bu, u\rangle \geq 0$.

У3. Существует линейный обратимый оператор D такой, что для любого $u \in H$ выполнено

$$\langle Du, DB(u)\rangle \geq \delta \|Du\|^2,$$

где $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

Справедливы теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Если выполнены условия У1 и У2, то для любого $u \in H$ справедлива априорная оценка

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|f(u)\|^2,$$

где λ_1- наибольшее собственное число оператора G^*G.

Теорема 2. Если выполнено условие У3, то для любого $u \in H$ справедлива оценка

$$\|Du\|^2 \leq (1-2\delta)^{-1}\|D(u+B(u))\|^2.$$

Отметим, что существуют очень много различные теоремы, близкие по содержанию к теореме 2. Большинство из них есть следствие известных энергетических оценок, позволяющих получить "слабую априорную оценку"решающей математической физики. Содержание теоремы 1 является новым. Она позволяет для многих задач математической физики получить сильную априорную оценку решений. В этом смысл теоремы 1.

Данная работа поддержана грантом AP05135319 КН МОН РК.

Список литературы

[1] Отелбаев М. *Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса*// Математический журнал, Алматы. - 2013. - Т. 13. №4(50). - С. 5-104.

[2] Отелбаев М. *Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье-Стокса* // Мат. заметки. - 2011. - Т. 89. №5. - С. 771-779.

[3] Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. *Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. II* // Сибирский математический журнал. - 2008. - Т. 49. №4. - С. 855-864.

[4] Отелбаев М., Жапсарбаева Л.К. *Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и от начальных данных* // Дифференциальные уравнения. - 2009. - Т. 45. №6. - С. 818-848.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

О НОВОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ИСТОЧНИКА ВНЕШНЕГО ВЛИЯНИЯ НА СТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС ДИФФУЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧЕЙ КОШИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ НЕ УСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Махмуд САДЫБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

sadybekov@math.kz

Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения одновременно с его решением носят название *обратных задач математической физики*. Такие задачи достаточно часто возникают в самых различных областях человеческой деятельности, что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. В большинстве случаев такие обратные задачи оказываются некорректными. Но бывают и исключения.

В докладе рассматривается один класс задач, моделирующих стационарный процесс диффузии с общими условиями на потоки по противоположным боковым сторонам.

При их математической формулировке возникают обратные задачи для уравнения Пуассона, в которых вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестную правую часть, зависящую только от одной пространственной переменной.

В предлагаемой нами постановке, обратная задача оказывается корректной: ее решение существует, единственно и устойчиво.

В области $\Omega = \{(x,y),\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \ell\}$ рассмотрим задачу о нахождении источника внешнего влияния $f(x)$ на стационарный процесс диффузии

$$-u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = f(x), \tag{1}$$

и его решения – распределения плотности $u(x,y)$, с классическими краевыми условиями

$$u(x,0) = 0,\ u(x,\ell) = 0,\ 0 \le x \le \pi \tag{2}$$

и краевым условиям общего вида: $0 \le y \le \ell$

$$\begin{cases} a_1 u_x(0,y) + b_1 u_x(\pi,y) + a_0 u(0,y) + b_0 u(\pi,y) = 0, \\ c_1 u_x(0,y) + d_1 u_x(\pi,y) + c_0 u(0,y) + d_0 u(\pi,y) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

по дополнительно известному потоку на одной стороне:

$$u_y(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \pi. \tag{4}$$

Коэффициентами $a_k, b_k, c_k, d_k,\ (k = 0,1)$ краевого условия (3) являются действительные числа, а $\nu(x)$ — заданная функция.

Рассматриваемая обратная задача содержит внутри себя задачу Коши

$$u(x,0) = 0,\ u_y(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le \pi \tag{5}$$

для уравнения Пуассона (1) и с нелокальными краевыми условиями (3). При этом дополнительным условием (условием переопределения) является условие на "дальней" стороне пластины:

$$u(x,\ell) = 0,\ 0 \le x \le \pi. \tag{6}$$

В докладе рассматривается связь между решением эллиптической задачи Коши (1), (3)-(5) и обратной задачи (1)-(4). Рассматриваются краевые условия (3), которые являются регулярными по Биркгофу.

Для исследования применяется методика, объединяющая идеи из нашей работы [1] и работ [2-6] Т.Ш. Кальменова с учениками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133271

Список литературы

[1] И. Оразов, М.А. Садыбеков *Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам* // Сиб. матем. журн., **53**:1, 180-186 (2012).

[2] T.Sh. Kalmenov, M.A. Sadybekov, B.T. Torebek *A criterion of solvability of the elliptic Cauchy problem in a multi-dimensional cylindrical domain* // Complex Variables and Elliptic Equations, **64**:3, 398-408 (2019).

[3] T.Sh. Kalmenov, B.T. Torebek *On an ill-posed problem for the Laplace operator with nonlocal boundary condition* // Eurasian Mathematical Journal, **8**:1, 50-57 (2017).

[4] T.Sh. Kalmenov, U.A. Iskakova, *Criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation* // Differential Equations, **45**: 10, 1460-1466 (2009).

[5] T.Sh. Kalmenov, U.A. Iskakova, *A method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation* // Doklady Mathematics, **78**: 3, 874-876 (2008).

[6] T.Sh. Kalmenov, U.A. Iskakova, *A criterion for the strong solvability of the mixed cauchy problem for the Laplace equation* // Doklady Mathematics, **75**: 3, 370-373 (2007).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Сарсенби А.А.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

abdisalam@mail.kz, abdisalam@mail.ru

Рассмотрим вопрос разрешимости смешанной задачи для возмущенного уравнения теплопроводности с инволюцией

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2 u\,(-x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t),\quad -1<x<1, t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{2}$$

$$u(-1,t)=u(1,t),\quad u_x(-1,t)=u_x(1,t) \tag{3}$$

с суммируемым коэффициентом $q(x)$, методом Фурье. Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. При $\alpha>1$ дифференциальный оператор второго порядка с инволюцией в правой части уравнения (1) с краевыми условиями (3) может оказаться не полуограниченным, что может вызвать некорректность поставленной задачи (1) - (3). Обозначим через $\{y_k(x)\}$ систему собственных функций упомянутого дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, соответствующих собственным значениям λ_k. Базисность системы $\{y_k(x)\}$ собственных

Работа выполнена в рамках научного гранта AP05131225 КН МОН РК.

функций этого оператора установлена в работе [1]. Причем, этот базис является безусловным базисом в пространстве $L_2(-1,1)$. На основании этого факта о безусловной базисности собственных функций спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией установлено следующее утверждение.

Теорема.

Пусть выполнены следующие условия: 1) вещественная непрерывная функция $q(x)$ неотрицательна;

2) число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным при $-1<\alpha<1$.

Тогда для любой дважды дифференцируемой функции $\varphi(x)$ удовлетворяющей условиям $\varphi(-1)=\varphi(1)$, $\varphi'(-1)=\varphi'(1)$, решение смешанной задачи (1), (2), (3) существует, единственно и представимо в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\lambda_k t}y_k(x).$$

Отметим, что при выполнении условия 1) теоремы все собственные значения λ_k положительны.

Список литературы

[1] A.A. Sarsenbi, *Unconditional Basicity of eigenfunctions' system of Sturm-Liouville operator with an involution perturbation* // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series, **3**:91, 117-127 (2018).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

БАЗИСНОСТЬ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Сарсенби А.М.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

abzhahan@mail.ru

Рассмотрим периодическую задачу для полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией $(-1<\alpha<1)$

$$-y"(x)+\alpha y"(-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), -1<x<1, y(-1)=y(1), y'(-1)=y'(1). \tag{1}$$

В случае $q(x)\equiv 0$ для периодической задачи с $(-1<\alpha<1)$

$$-y"(x)+\alpha y"(-x)=\lambda y(x), -1<x<1, y(-1)=y(1), y'(-1)=y'(1), \tag{2}$$

построена функция Грина $G(x,t,\lambda)$ и получена ее равномерная оценка. Причем система собственных функций краевой задачи (2) образует полную ортонормированную систему в $L_2(-1,1)$ [1].

Работа выполнена в рамках научного гранта AP05131225 КН МОН РК.

Обозначим через

$$\sigma_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\widetilde{O}_{ml}} G(x,t,\lambda) 2\rho d\rho\right] f(t)\, dt$$

$$S_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\widetilde{O}_{ml}} G_q(x,t,\lambda) 2\rho d\rho\right] f(t)\, dt$$

частичные суммы разложений по собственным функциям спектральных задач соответственно (2) ($q(x) \equiv 0$) и (1), где $\forall\ f(x) \in L_1(-1,1)$. $G_q(x,t,\lambda)$ (функция Грина задачи (1)).

Пусть все собственные значения спектральной задачи (1) однократны. Тогда справедливы следующие теоремы о равносходимости и базисности.

Теорема 1.

Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ *не является четным, то для любой функции* $f(x) \in L_1(-1,1)$ *последовательность* $S_m(f)$ *равносходится с последовательностью* $\sigma_m(f)$.

Эта теорема влечет справедливость следующего факта.

Теорема 2.

Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ *не является четным, то система собственных функций спектральной задачи (1) образует базис пространства* $L_2(-1,1)$

В связи с утверждением теоремы 2 возникает вопрос безусловной базисности или базисности Рисса изучаемых систем функций? Ответом на этот вопрос служит следующая

Теорема 3.

Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ *не является четным, то всякий базис из собственных функций спектральной задачи (1) образует безусловный базис пространства* $L_2(-1,1)$.

Список литературы

[1] *A.A. Sarsenbi, Unconditional Basicity of eigenfunctions' system of Sturm-Liouville operator with an involution perturbation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series,* **3***:91, 117-127 (2018).*

— ❋ ❋ ❋ —

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

Батирхан ТУРМЕТОВ, Майра КОШАНОВА , Молдир МУРАТБЕКОВА

Университет им. Ахмеда Ясави , Туркестан, Казахстан

turmetovbh@mail.ru, koshanova-2018@mail.ru, moldir_1983@mail.ru

Пусть $x = (\tilde{x}, x_n)\,, \tilde{x} = (x_1, ..., x_{n-1})\,, n \geq 3$ и $m > 1$. Введем обозначения

$$\Omega_m = \left\{x \in R^n : |\tilde{x}|^2 + |x_n|^m < 1\right\}, \partial\Omega_m = \left\{x \in R^n : |\tilde{x}|^2 + |x_n|^m = 1\right\},$$

Работа была поддержана грантом AP05131268 КН МОН РК

$$\partial\Omega_m^+ = \{x \in \partial\Omega_m : x_n \geq 0\}, \partial\Omega_m^- = \{x \in \partial\Omega_m : x_n \leq 0\}, \partial B = \left\{\tilde{x} \in R^{n-1} : |\tilde{x}| = 1\right\}.$$

Далее, для любого $x \in R^n$ сопоставим точку $x^* = (\alpha_1 x_1, ..., \alpha_{n-1}x_{n-1}, \alpha_n x_n)$, где $\alpha_n = -1$, а остальные $\alpha_j, j = 1, 2, ..., n-1$ принимают один из значений ± 1.

Пусть $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*) = I_S \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)$.Рассмотрим в области Ω_m следующие задачи.

Задача 1. Найти гармоническую функцию $u(x) \in C^2(\Omega_m) \cap C^1(\bar{\Omega}_m)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x) - u(x^*) = g_0(x), x \in \partial\Omega_m^+, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*) = g_1(x), x \in \partial\Omega_m^+, \tag{2}$$

$$u(\tilde{x}, 0) = 0, \tilde{x} \in \partial B. \tag{3}$$

Задача 2. Найти гармоническую функцию $u(x) \in C^2(\Omega_m) \cap C^1(\bar{\Omega}_m)$, удовлетворяющую равенству (3) и условиям

$$u(x) + u(x^*) = g_0(x), x \in \partial\Omega_m^+, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x^*) = g_1(x), x \in \partial\Omega_m^+. \tag{5}$$

Отметим, что аналогичные задачи с периодическими условиями изучены в работах [1,2].

Относительно задачи 1 справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 - 1/m < \lambda < 1$, $g_0(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega_m^+), g_1(x) \in C^\lambda(\partial\Omega_m^+)$ *и выполняются условия согласования*

$$g_0(\tilde{x}, 0) = 0, \frac{\partial}{\partial x_j} g_0(\tilde{x}, 0) = -\frac{\partial}{\partial x_j} I_S g_0(\tilde{x}, 0), j = 1, 2, ..., n, g_1(\tilde{x}, 0) = -g_1(\tilde{x}^*, 0), \tilde{x} \in \partial B. \tag{6}$$

Тогда решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$

Теорема 2. *Пусть* $1 - 1/m < \lambda < 1$. *Существуют функции* $g_0(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega_m^+)$ *и* $g_1(x) \in C^\lambda(\partial\Omega_m^+)$ *для которых выполняются условия (6) и при этом решение задачи 1 для любого* $\varepsilon > 0$ *не принадлежит классу* $C^{\lambda+\frac{1}{m}+\varepsilon}(\bar{\Omega}_m)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для задачи 2.

Список литературы

[1] M. Sadybekov, B. Turmetov, *On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball* // Eurasian Math. J., **3**:1, 143–146 (2012).

[2] M. Sadybekov, B. Turmetov, *On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk* // Diff. Equat., **50**:2, 268–273 (2014).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

Руководители: академик НАН РК Харин С.Н.
профессор Джумабаев Д.С.,
профессор Тлеубергенов М.А.,

Секретарь: Каракенова С.Г.

MAXWELL EQUATIONS, THEIR HAMILTON AND BIQUATERNIONIC FORMS. PROPERTIES OF THEIR SOLUTIONS

Lyudmila ALEXEYEVA

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

alexeeva@math.kz

Processes of electromagnetic waves diffraction are described by Maxwell equations (ME) which make theoretical base of modern electrodynamic. It is the system of differential equations of mixed hyperbolic-elliptic type [1]:

$$\begin{array}{ll} rot\, E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, & rot\, H = \varepsilon\, \frac{\partial E}{\partial t} + j^E(x,t), \\ \varepsilon\, div\, E = \rho^E(x,t), & div\, H = 0, \end{array} \tag{1}$$

$x \in R^3,\ t \in R^1$. Here E, H are the intensities of an electric and magnetic field, j^E is the density of electric currents, ρ^E is the density of electric charges, ε, μ are electric and magnetic constants of EM-medium.

Investigation of this system and their solutions has big bibliography. The theory of boundary value problems for Maxwell equations in region with arbitrary boundaries were elaborated in [2-7].

In this paper the imperfection of system of Maxwell equations are discussed and their modification on the basis of a biquaternionic form of these equations has been offered, which liquidates these shortcomings.

The properties of (1) allows to write it in complex form which contains one vector equations and one scalar equation:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + rot\, A = J(\tau, x), \quad -div A = \rho(\tau, x), \quad \tau = ct, \tag{2}$$

where we use the complex intensity, charge and current:

$$A(\tau, x) = \sqrt{\varepsilon}\, E + i\, \sqrt{\mu}\, H,$$

$$\rho(\tau, x) = -\rho^E/\sqrt{\varepsilon} + i\, \rho^H/\sqrt{\mu}; \quad J(\tau, x) = -\sqrt{\mu}\, j^E + i\sqrt{\varepsilon}\, j^H,$$

Here we introduced the gravitational field (which is *potential*) and united it with magnetic field (which is *torsional*) in one *gravimagnetic* field H. Also we enter an gravimagnetic current j^H. The system (2) is Hamilton form of symmetrize ME:

$$\begin{array}{ll} rot\, E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} + j^H(x,t), & rot\, H = \varepsilon\, \frac{\partial E}{\partial t} + j^E(x,t), \\ \varepsilon\, div\, E = \rho^E(x,t), & \mu div\, H = -\rho^H(x,t). \end{array} \tag{3}$$

It is equivalent to (1) by $\rho^H = 0, \quad j^H = 0$. Generalized solutions of this Hamilton form of ME were constructed and studied in [8].

But in biquaternions algebra Eqs (3) can be written as one biquaternionic wave (*biwave*) equation [9]:

$$(\partial_\tau + i\nabla) \circ \mathbf{A} \triangleq \nabla^+ \mathbf{A} = \mathbf{\Theta}(\tau, x) \tag{4}$$

Here we enter the biquaternions of *intensity* and *charge-current* of electro-gravimagnetic (EGM) field:

$$\mathrm{A}(\tau, x) = i\alpha(\tau, x) + A(\tau, x), \qquad \mathbf{\Theta}(\tau, x) = i\rho(\tau, x) + J(\tau, x).$$

The scalar and vector part of Eq (4) is equivalent to Hamilton form of ME (2) by $\alpha = 0$.

Thanks to grant APO5132272 of MES RK

It describes the connected system of 8 differential equations of strong hyperbolic type. We name them *generalised Maxwell equations.*

The *energy-pulse* of EGM-field is equal to

$$\Xi(\tau, x) = 0,5\,\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = W(\tau, x) + iP(\tau, x).$$

By $\alpha = 0$ it contains well known energy density W and Pointing vector P of EM-field :

$$W = 0,5\left(\varepsilon\,\|E\|^2 + \mu\,\|H\|^2\right), \quad P = c^{-1}[E, H], \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu},$$

c is *light speed.*

The solutions of biquaternionic form of generalised Maxwell equations (4) are presented, including fundamental Green's biquaternion and shock EGM-waves and their properties are studied.

References

[1] Vladimirov V.S. *Mathematical physics equations.* Moscow:Nauka, 1978 (in Russian).

[2] Alexeyeva L.A., Sautbekov S.S. *Fundamental solutions of Maxwell equations* // Differential equatios, **35**:1(1999), 120–122.

[3] Alexeyeva L.A.,Sautbekov S.S. *Boundary integral equations of stationary boundary value problems for Maxwell's equations* // Computational mathematics and mathematical physics, **40**:4(2000), 619–630.

[4] Alexeyeva L.A. *Generalized solutions of nonstationary boundary value problems of electrodynamics* //Mathematical journal,**1**:1(2001), 10–17 (in Russian).

[5] Alexeyeva L.A. *In uniqueness of solutions of BVPs for Maxwell equations in the case of shock electromagnetic waves* // News of NAS of RK. Physical and mathematical issue, 5(2001), 15–24.

[6] Alexeyeva L.A. *Generalized solutions of nonstationary boundary value problems for Maxwell equations* // Computational mathematics and mathematical physics, **42**:1(2002), 75–87.

[7] Alexeyeva L.A. *Time-Dependent Boundary Value Problems for Maxwell Equations and their Generalized Solutions* // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications -I, Yokohama Publishers, 2006, 239-245.

[8] Alexeyeva L.A. *Hamilton form of Maxwell equations and its generalized solutions* // Differential equations, **39**:6(2003), 760–777.

[9] Alexeyeva L.A. *Biquaternions algebra and its application by solving of some theoretical physics equations* // Clifford analysis,Clifford algebras and ther applications, 1:**7**(2012), 19-39.

[10] Alexeyeva L.A. *Maxwell equations, their hamiltonian and biquaternionic forms and properties of their solutions* // Mathematical journal, **16**:2(2016), 25–39.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

STUDY OF THE INTERACTION TRANSVERSE JET INTO A SUPERSONIC CROSSFLOW DEPENDING ON THE FLOW MACH NUMBER

Gulzana ASHIROVA, Asel BEKETAEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

gulzana.ashyrova@yandex.ru, azimaras10@gmail.com

The transverse injection into a supersonic flow is a subject of interest for various technological applications, such as rocket motor thrust control system, supersonic combustion, high speed flight vehicle reaction control jet. The process of the fuel-air mixing and combustion in the scramjet combustor are implemented with supersonic speed. The complex system of shock–wave structures (a barrel shock, bow shock, and the system of λ–shock waves) are arisen during the jet injection in cross-flow. In such type of flow the formed shock waves interact with boundary layer at top and bottom walls of the combustion chamber. The transverse jet in supersonic flow has been extensively studied as experimentally [16] and theoretically [713]. However, there is practically no work where the flow of the transverse jet in the channel considered under the condition of interaction of the bow shock with the upper wall and the effect shock wave boundary layer interactions on mixing the injected jet and the flow. The analysis of the papers devoted to the numerical simulation of supersonic multispecies gas flows shows that a detailed study of the dependence of the structure of the flows on the parameters of the problem have not been made deeply.

In this study, the multispecies supersonic airflow in a planar channel with transverse hydrogen jet injection is simulated. The Favre averaged Navier–Stokes equations coupled with k $-$ ω turbulence model are solved with using the third order ENO scheme [7, 14]. The initial conditions coincide with the boundary conditions at the flowfield. At the flowfield entrance, the parameters of the free stream are given. Also, the boundary layer is given near the wall, the streamwise velocity profile is defined power law. On the injector, the parameters of the jet are given. The adiabatic no-slip boundary condition is specified on the bottom and top walls . The non–reflection boundary conditions are specified at the outlet boundary [15].

In this paper, the main attention is paid to the influence of flow Mach number to the interaction of the shock wave structure with the boundary layers on the upper and lower duct walls under the conditions of an internal turbulent flow. The flow Mach number of flowfield is varied in the range $2.5 \leq M_\infty \leq 4.5$. It is revealed that complex system of shock–wave structures is reduced growing Mach number. The vortex structures at upper and bottom walls are increased declining Mach number. The numerical experiments revealed that with the increasing flow Mach number, the inclination angle of the bow shock wave is reduced due to the incoming flow rate growth. For $M_\infty = 2.5$ there has arisen multi-structure vortex picture due to the influence reflected shock wave (the supersonic part of the boundary layer deviates and generates the system of converging compression wave, which propagates as reflected shock wave) with the stagnation zone behind the jet. The reduction of the jet penetration with growing Mach number because of increasing flow velocity, have been explored. A comparison of computations with experimental data shows a satisfactory agreement of results [2].

References

[1] A.I. Glagolev, A.I. Zubkov and Yu.A. Panov *Interaction between a Supersonic Flow and Gas Issuing from a Hole in a Plate* Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza, **3**:3 (1968), 65–67.

This work was supported in part by the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan under grant funding of fundamental research in the natural science field ("Numerical simulation of spatial turbulent compressible flows with the injection of jets and solid particles", 2018-2020, IRN of the project AP05131555).

[2] F.W. Spaid and E.E. Zukoski. *A Study of the Interaction of Gaseous Jets from Transverse Slots with Supersonic External Flows* // AIAA Journal, **3**:6 (1968), 205–212.

[3] J.A. Schetz. *Interaction Shock Shape for Transverse Injection in Supersonic Flow* // Journal of Spacecraft and Rockets, **7**:2 (1970), 143–149.

[4] S. Aso, K. Inoue, K. Yamaguchi and Y. Tani. *A Study on Supersonic Mixing by Circular Nozzle with Various Injection Angles for Air Breathing Engine* // Acta Astronautica, **65**:5 (2009), 687–695.

[5] Van Lerberghe, W. M., Santiago, J. G., Dutton, J. C., and Lucht, R. P. *Mixing of a Sonic Transverse Jet Injected into Supersonic Crossflow* AIAA Journal, **38**:3, 470–479.

[6] Gruber, M. R., Nejad, A S., J. C. Dutton. *An Experimental Investigation of Transverse Injection from Circular and Elliptical Nozzles into supersonic Crossflow*// Wright Lab Technical Report Vol. WL-TR-96-2102, 1996.

[7] P. Bruel and A.Zh. Naimanova. *Computation of the Normal Injection of a Hydrogen Jet into a Supersonic Air Flow*// Thermophysics and Aeromechanics, **17**:4 (2010), 531–541.

[8] A.O. Beketaeva and A.Zh. Naimanova.*Numerical Simulations of Shock-Wave Interaction with a Boundary Layer in the Plane Supersonic Flows with Jet Injection* // Thermophysics and Aeromechanics, **23**:2 (2016), 173–183.

[9] E. Erdem, K. Kontis *Numerical and experimental investigation of transverse injection flows shock waves*, (2010), **20**, 103–118

[10] Sriram, A.T., Mathew, J.: *Improved prediction of plane transverse jets in supersonic crossflows*//AIAA J., **44**:2 (2006), 405–408

[11] V. Viti, R. Neel and J. Schetz. *Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field* // Physics of Fluids, **21**:2 (2009), 1-16.

[12] Khali, E. H. and Yao, Y. *Mixing flow characteristics for a transverse sonic jet injecting into a supersonic crossflow.* In: 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting: AIAA 2015 Sci-Tech Conference, Kissimmee, Florida, USA, 5–9 January 2015. Available from: http: // eprints.uwe.ac.uk / 24248

[13] Z. A. Rana, B. Thornber, and D. Drikakis *Transverse jet injection into a supersonic turbulent cross-flow*//Physics of fluids, **46** (2011),46–103.

[14] Ye. Moisseyeva and A. Naimanova *Supersonic flow of multicomponent gaseous mixture with jet injection* // Comp. Tech., **19**:19 (2014), 51–66.

[15] Poinsot T.J., Lele S.K. *Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows* // Journ. of Comput. Phys., 101 (1992), 104–129.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

A SOLVABILITY OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN HIGHER ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Anar ASSANOVA[1], Aziza ABILDAYEVA[1], Askarbek IMANCHIYEV[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

[2]K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

assanova@math.kz

In the present communication we consider on the domain $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ an initial-boundary value problem for the system of partial differential equation of higher order

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^m \partial t} = \sum_{i=1}^{m} \Big\{ A_i(t,x) \frac{\partial^{m+1-i} u}{\partial x^{m+1-i}} + B_i(t,x) \frac{\partial^{m+1-i} u}{\partial x^{m-i} \partial t} \Big\} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{m} \Big\{ P_{k,j}(x) \frac{\partial^{m+1-k} u(t,x)}{\partial x^{m+1-k}} + S_{k,j}(x) \frac{\partial^{m+1-k} u(t,x)}{\partial x^{m-k} \partial t} \Big\}\Big|_{t=t_j} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_0(t), \ \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_1(t), ..., \ \frac{\partial^{m-1} u(t,x)}{\partial x^{m-1}}\Big|_{x=0} = \psi_{m-1}(t), \ t \in [0,T], \tag{3}$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,m}$, $C(t,x)$, and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $n \times n$ matrices $P_{k,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{0,p}$, and n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{p-1} < t_p = T$, the the n vector-functions $\psi_s(t)$, $s = \overline{0,m-1}$, are continuously differentiable on $[0,T]$.

A function $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ having partial derivatives
$\frac{\partial^{s+r} u(t,x)}{\partial x^s \partial t^r} \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $s = \overline{1,m}$, $r = 0,1$, $s + r < m+1$, $\frac{\partial^{m+1} u(t,x)}{\partial x^m \partial t} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$
is called a classical solution to problem (1)–(3) if it satisfies equation (1) for all $(t,x) \in \Omega$ and the initial-boundary conditions (2), (3).

We will investigate the questions of the existence and uniqueness of classical solutions to the initial-boundary value problem for a higher order partial differential equation (1)–(3) and the construction of its approximate solutions. For these purposes, we apply the method of introducing additional functional parameters proposed in [1-9] for solving various types of nonlocal problems for system of hyperbolic equations with mixed derivatives. The considered problem is reduced to a nonlocal problem for system of hyperbolic equations second order, including additional functions and integral relations. An algorithm for finding an approximate solution to the investigated problem is proposed and its convergence is proved. Sufficient conditions for the existence of a unique classical solution to problem (1)–(3) are obtained in terms of the initial data.

Let us consider the nonlocal problem for system of hyperbolic equations second order

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = A_1(t,x) \frac{\partial v}{\partial x} + B_1(t,x) \frac{\partial v}{\partial t} + A_2(t,x) v + g(t,x), \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{p} \Big\{ P_{m,j}(x) \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + S_{m,j}(x) \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + P_{m-1,j}(x) v(t,x) \Big\}\Big|_{t=t_j} = \Phi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$v(t,0) = \psi_{m-1}(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{6}$$

The authors are supported by the grant No. AP05131220 of Science Committee of the MES of the RK

Here the functions $g(t,x) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], \mathbb{R}^n)$.

For $j = \overline{0,1}$, $p = 1$ problem (4)–(6) is investigated in [1-7]. For $j = \overline{0,p}$, $p > 2$ problem (4)–(6) is studied in [8, 9]. An algorithm for finding an approximate solution to problem (4)–(6) is proposed and its convergence is proved. Sufficient conditions for the existence of a unique solution to problem (4)–(6) are established in the terms of initial data. These conditions are also necessary for well-posed solvability to problem (4)–(6) [3, 4, 6, 7, 9]. In [10] we are considered a nonlocal problem for a system of loaded differential equations of the Sobolev type with a multipoint condition. By introducing additional unknown functions, we reduce the problem under consideration to an equivalent problem consisting of a nonlocal multipoint problem for a system of loaded hyperbolic equations of the second order with functional parameters and integral relations. We propose algorithms for solving the equivalent problem. Moreover, we establish conditions for the well-posedness of the nonlocal multipoint problem for the system of loaded hyperbolic equations of the second order and conditions for the existence of a unique classical solution to the nonlocal problem for the system of differential equations of the Sobolev type with multipoint condition.

These results are extended to initial-boundary value problem for higher order partial differential equations.

The following assertion is true.

Theorem. *Let*

i) the $n \times n$ *matrices* $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $i = \overline{1,m}$, $C(t,x)$, *and* n *vector function* $f(t,x)$ *are continuous on* Ω*;*

ii) the $n \times n$ *matrices* $P_{k,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{0,p}$, *and* n *vector function* $\varphi(x)$ *are continuous on* $[0,\omega]$*;*

iii) the n *vector-functions* $\psi_s(t)$, $s = \overline{0,m-1}$, *are continuously differentiable on* $[0,T]$*;*

iv) the nonlocal problem for the system of hyperbolic equations second order (4)–(6) is uniquely solvable for any $g(t,x) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, *and* $\psi_{m-1}(t) \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Then initial-boundary value problem (1)–(3) has a unique solution.

Theorem is proved analogously scheme of proof Theorem 2 in [10].

References

[1] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev, *Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics* // Comput. Mathem. and Mathem. Physics, **42**:11 (2002), 1609–1621.

[2] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev, *Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations* // Differential Equations, **39**:10 (2003), 1414–1427.

[3] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev, *Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations* // Doklady Mathematics, **68**:1 (2003), 46–49.

[4] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev, *Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations* // Differential Equations, **41**:3 (2005), 352–363.

[5] A.T. Asanova, *A nonlocal boundary value problem for systems of quasi-linear hyperbolic equations* // Doklady Mathematics, **74**:3 (2006), 787–791.

[6] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev, *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations* // J. Math. Anal. and Appl., **402**:1 (2013), 167–178.

[7] A.T. Asanova, *Criteria of unique solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives* // Russian Mathematics (Iz.VUZ), **60**:5 (2016), 1–17.

[8] A.T. Asanova, A.E. Imanchiev,*On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations* // Eurasian Math. J., **6**:4 (2015), 19–38.

[9] A.T. Asanova,*Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative* // J. Math. Sciences (United States), **212**:3 (2016), 213–233.

[10] A.T. Assanova, A.E. Imanchiyev, Z.M. Kadirbayeva, *Solvability of nonlocal problems for systems of Sobolev-type differential equations with a multipoint condition* // Russian Mathematics (Iz.VUZ), **63**:12 (2019), 1–12.

— ⁂ —

POINCARE SECTIONS IN THE PROBLEM OF TWO FIXED CENTERS

Askar BEKOV, Serzhan MOMYNOV, Iliyas BEKMUKHAMEDOV,
Dana BERKIMBAY, Adilet ABDULKHAKIM, Daryn SEITOV

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

s.momynov@gmailcom

Interest in the existence of the third integral of motion for stars moving in the potential of the galaxy revived in the late 50's and early 60's of the last century. Initially it was assumed that the potential has a symmetry and does not depend on time, therefore in cylindrical coordinates (r, θ, z) this will be only a function of r and z . There must be five integrals of motion that are constant for the six-dimensional phase space. However, the integrals can be either isolating or non-isolating. Non-isolating integrals usually fill all available phase spaces and do not restrict the orbit.

Henon and Heiles tried to find out if they could find any real proof that there must be a third isolating integral of the motion. Making numerical calculations, they did not complicate the astronomical meaning of the problem; they only demanded that the potential investigated by them be axially symmetric. The authors also suggested that the motion was tied to a plane and passed into the Cartesian phase space (x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$). After some tests they managed to find a real potential. This potential is analytically simple, so that the orbits can be calculated quite easily, but it is still quite complex, so that the types of orbits are nontrivial. This potential is now known as the potential of Henon and Heiles [1].

Some particular solutions to the three-body problem are known, but a general solution has not yet been found. One of the special cases of the three-body problem is the problem of two fixed centers. It was first considered by Euler in 1760. Jacobi showed that the equations of motion can be integrated in terms of elliptic functions. This problem can be used as some first approximation in astronomical problems about the motion of minor planets and comets under the influence of gravity of the Sun and Jupiter. The period of revolution of Jupiter is about twelve years, and for a short period of time the motion of these celestial bodies can be considered in the framework of the problem of two fixed centers. Also, the problem of the motion of a spacecraft to the Moon can be considered within the framework of this task. The flight time of the spacecraft to the Moon is about four days. During this time, the Moon will move slightly in a circular orbit of the Earth. The study of the problem of two fixed centers was carried out in different directions [2-3].

In this paper, we study the Henon-Heiles potential and the problem of two fixed centers. In studies of nonlinear systems for which exact solutions are unknown, the Poincare section method is used. For the Henon-Heiles potential, Poincare sections were obtained. Next, the potential of two fixed centers was investigated. It was shown on the basis of the Poincare section that, in the case $\mu_1 = \mu_2 = 1$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -1.7$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.5, -1.6]$, in the case $\mu_1 = 0.9$ and

$\mu_1 = 0.1$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -0.9$ but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.3, -0.8]$, in the case of $\mu_1 = 0.7$ and $\mu_1 = 0.3$ the internal cross-sectional structure decomposes from the values $H = -0.8$, but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval $H \in [-0.2, -0.7]$. With increasing energy, many of these surfaces decay. It is assumed that the numerical results obtained will serve as the basis for comparison with analytical solutions.

References

[1] A. Lichtenberg, M. Lieberman, *Regular and stochastic dynamics* //M: Mir, 1985.

[2] M.A. Gonzalez Leon, J. Mateos Guilatre, M. de la Torre Mayado, *Orbits in the problem of two fixed centers on the sphere* // Regular and Chaotic Dynamics, **22**:5 (2017), 520–542.

[3] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, *Relations between integrable systems in plane and curved spaces* // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **99**:5 (2007), 253–260.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A PROBLEM WITH PARAMETER FOR HYPERBOLIC EQUATION

Zhazira KADIRBAYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

zhkadirbayeva@gmail.com

Consider the following problem with parameter for hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + D(t,x)\mu(x) + f(t,x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = \varphi_1(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

where the domain is $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$, $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$, $\mu(x) = col(\mu_1(x), \mu_2(x), ..., \mu_n(x))$, the $(n \times n)$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, and the n-vector function $f(t,x)$ are continuous on $\bar{\Omega}$, the n-vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$, the n-vector functions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ are continuous on $[0,\omega]$.

The solution of the problem (1)-(3) is a pair of functions $(u^*(x,t), \mu^*(x))$, where function $u^*(x,t)$ is continuous on $\bar{\Omega}$, that has continuous partial derivatives with respect to x of the first order, with respect to t of the first order on $\bar{\Omega}$, mixed derivative on Ω, satisfies the equation (1) at $\mu(x) = \mu^*(x)$, $x \in [0,\omega]$, and conditions (2), (3).

Problems with parameter for hyperbolic equation arise in various problems of mathematical biology, ecology, etc. [1]. In the present communication we investigate questions of the existence and uniqueness of a solution to the problem with parameter for hyperbolic equation (1)-(3). By the method of introducing unknown functions [2] the considered problem is reduced to an equivalent problem consisting of a family of problems with parameter for ordinary differential equations and integral relations.

The authors were supported by the grants AP05131220, AP05132455 of SC of the MES of RK

Algorithms for finding a solution to problem (1)-(3) are proposed. The main point of the algorithm is solving the family of problems with parameter for ordinary differential equations. The parametrization method [3] is used to solve a family of problems with parameter for ordinary differential equations. For a fixed $x \in [0, \omega]$ the boundary value problem with parameter for ordinary differential equations is investigated in work [4]. Conditions of existence of unique solution to problem (1)-(3) are established in terms of initial data.

References

[1] F.P.Vasiliev , *Optimization methods* // Factorial Press, Moscow, 2002 (in Russ).

[2] A.T.Asanova, D.S.Dzhumabaev, *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations* // J. Math. Appl., **402**:1 (2013), 167–178.

[3] D.S.Dzhumabaev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation* // Comput. Maths. Math. Phys, **29**:3 (2001), 12–21.

[4] D.S.Dzhumabaev, E.A.Bakirova, Zh.M.Kadirbayeva, *An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter* // News of the NAS RK, **5**:321 (2018), 25–32.

— ⁕⁕⁕ —

APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING SPECIAL CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Sayakhat KARAKENOVA

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

sayakhat.karakenova05@gmail.com

We consider the nonlinear Fredholm integro-differential equation (FIDE) on [0,T]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) f_k(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

where the $n \times n$ matrices $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$ are continuous on $[0, T]$, $f_k : [0, T] \times R^n \to R^n, k = \overline{1, m}$ are continuous functions, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

A linear boundary value problem for FIDE solved by parameterization method was proposed in [1]. One of important auxiliary problem in this method is special Cauchy problem for the system of linear FIDEs. Suppose Δ_N is a following partition: $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{N} [t_{r-1}, t_r)$. By setting parameters $\lambda_r \hat{=} x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$, we specify the new unknown functions $u_r(t)$, $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Then we obtained the system of nonlinear integro-differential equations with parameters on subintervals

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, \tag{2}$$

and initial conditions at the left end points of subintervals

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{3}$$

The work is supported by the grant project AP 05132486 (2018-2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

The problem (2), (3) is a special Cauchy problem for the system of nonlinear integro-differential equations with parameters. Criteria of solvability and unique solvability of the special Cauchy problems for the system of linear integro-differential equations with parameters have been established in [1]-[3]. There methods of finding the solution to the linear special Cauchy problems proposed as well.

In the present communication we consider the special Cauchy problem for the system of nonlinear FIDEs on the closed subintervals

$$\frac{dv_r}{dt} = A(t)(v_r + \lambda_r) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau) f_k(\tau, v_j(\tau) + \lambda_j) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}, \tag{4}$$

$$v_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Using results in [4], [5] an iterative process for finding the solution to the problem (4), (5) is constructed. Sufficient conditions of convergence of the iterative process are presented.

These results are published in [6].

References

[1] D.S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro differential Equation.* // Comput. Math. Math. Phys., 50 (2010), 1150-1161.

[2] D.S. Dzhumabaev, *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems.* // J. Comput. and Appl. Math., 327(2018), 79-108.

[3] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.* // J. Comput. and Appl. Math., 294(2016), 342-357.

[4] D.S. Dzhumabaev, *On the convergence of modification of the Newton-Kantorovich method for closed operator equations.* // Amer. Math. Soc. Transl., 2(1989), 95-99.

[5] D.S. Dzhumabaev, *On the solvability on nonlinear closed operator equations.* // Amer. Math. Soc. Transl., 2(1989), 91-94.

[6] D.S. Dzhumabaev, S.G. Karakenova, *Iterative method for solving special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with nonlinear integral part.* // Kazakh Mathematical Journal, **19**:2(2019), 49-58.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON THE STRICT CONVEXITY OF A FUNCTIONAL FOR DETERMINING THE HEAT FLUX IN THE INVERSE STEFAN PROBLEM

A.A. KAVOKIN, A.T. KULAKHMETOVA, Yu.R. SHPADI

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling SC MES RK, Almaty, Kazakhstan

kavokin_alex@yahoo.com, kulakhmetova@mail.ru, yu-shpadi@yandex.ru

The question of the strict convexity of the functional of the inverse Stefan problem for determining the values of the heat flux at a fixed boundary is considered, with the the free boundary $x = z(t)$, known from experiments. This problem appeared by the solving of two-phase inverse Stefan probvlem in spherical domain,[1,2,3], and can be reduced, [1,2], to determine of heat flux function $Q(t)$ of the following one-dimensional problem

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \qquad D : (0 < x < z(t), 0 < t \leq t_0), \tag{1}$$

$$T(0,t) - \alpha \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = Q(t), \tag{2}$$

$$T(z(t),t) = \varphi(t), \tag{3}$$

where $(z(t), \varphi(t)) \in C_{[0,t_0]}$ are functions, known from experiments,; $z(0) = 0$ and $z(0) = 0$; $z(t) > 0$, $\forall t > 0$;

The problem of determining the boundary function $Q(t)$ from the known values of $z(t)$ and $\varphi(t)$ can be reduced, [1], to the problem of minimizing the functional:

$$S(Q) = \int_0^{t_0} \left(T'_x(z(\tau), \tau, Q(\tau)) - \varphi(\tau)\right)^2 d\tau; \tag{4}$$

It is proved that the functional in (4) is strictly convex on the set of functions which are the solution to problem (1)–(3), that is holds the relation:

$$S(m \cdot Q_1 + (1 - m) \cdot Q_2) \leq m \cdot S(Q_1) + (1 - m) \cdot S(Q_2); \tag{5}$$

and equality in (5) is possible **iff** $(m = 0) \bigcup (m = 1) \bigcup (Q_1 = Q_2)$, thus the inverse problem (1)–(3) to determine the component $Q(t)$ of the heat flux through the boundary $x = 0$, using (4), has a unique solution for the above class of functions $z(t)$ and $\varphi(t)$.

References

[1] O.M. Alifanov, et al. *Extreme methods for solving ill-posed problems* // M. Nauka, 1988, pp.255

[2] Iskakova K.S., *Inverse Stefan type problems at the theory of arc electrical processes* // Abstract of dissertation for candidate of math and physics sciences , Almaty, 1994, pp.15.

[3] M. M. Sarsengeldin, et al., *An approach for solving an inverse spherical two-phase Stefan problem arising in modelling of electric contact phenomena* //Willey Math Meth. Appl.Sci, 2017; 1-10. willeyonlinelibrary.com/journal/mma

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Study Is supported by grant AP05133919 SC MES RK

ON INTEGRAL PERTURBATION FOR THE HEAT AND MASS TRANSFER EQUATION

E.M.KHAIRULLIN, A.S.AZHIBEKOVA

Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

khairullin_42_42@mail.ru, aliya_azhibek@mail.ru

.

We consider the boundary problem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_k \Delta\right) U_k(x,t) = \mu_k \int\limits_0^t \Delta U_k(x,\tau) d\tau + f_k(x,t), \tag{1}$$

In domain $Q_T \equiv \left\{(x', x_n, t) : x' \in R^{n-1}, x_n \in R_+, t \in R_+\right\}$, with the following initial and boundary, [1], conditions:

$$U_k(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$\left(\alpha_1^{(1)} U_1(x,t) + \alpha_2^{(1)} U_2(x,t)\right)\Big|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t), \quad (x',t) \in Q_T^{(1)} = Q_T \setminus x_n, \tag{3}$$

$$\left(\alpha_1^{(2)} \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial x_n} + \alpha_2^{(2)} \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial x_n}\right)\Bigg|_{x_n=0} = \varphi_2(x',t), \quad (x',t) \in Q_T^{(1)} = Q_T \setminus x_n, \tag{4}$$

where: Δ is Laplace operator; $\lambda_k, \mu_k, \alpha_i^{(k)} (i,k = 1,2)$ are given constants, and $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; $f_k(x,t), \varphi_k(x',t)$ – are given bounded functions having partial derivatives of first order with respect to the variable t and derivatives of second order with respect to x and x'.

The solution of the boundary problem (1)–(4) was obtained as the sum of the double layer potentials and the Cauchy function for the integral-differential equation (IDE) in multidimensional space. Using the boundary conditions (3) and (4), the problem is reduced to the solving a system of integral-differential equations (SIDE).

The characteristic part of SIDE is solved by the method of Fourier-Laplace integral transforms, under the condition of solvability and then, using the regularization method, SIDE is reduced to a system of Volterra-Fredholm integral equations.

Theorem. *If $\varphi_k(x',t) \in C^{2,1}_{x',t}\left(Q_T^{(1)}\right)$, $f_k(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ and $A_1^2\lambda_2 - A_2^2\lambda_1 \neq 0$, $\frac{A_1}{A_2} > 0$, then solution of problem (1)–(4) exists and $U_k(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$.*

References

[1] Khairullin E.M., Tulesheva G.A., Shakulikova A.T. *On a boundary problem of heat and mass transfer (rus)* // Bulletin of KazNITU, **4** (2019), 510-516.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

This study is supported by a grant AP05133919 SC MRS RK

THE SOLUTION OF TWO-PHASE SPHERICAL STEFAN PROBLEM BY USING LINEAR COMBINATION OF HEAT POLYNOMIALS

Stanislav KHARIN[1,a], Targyn NAURYZ[2,b]

[1,2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[1]Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

[a]staskharin@yahoo.com, [b]targyn.nauryz@gmail.com

In this work, the solution method of two-phase spherical Stefan problem represented in linear combination of heat polynomials. The required coefficients are determined. In this problem heat flux is given and the solution of this problem considered directly. Heat polynomials and their properties is introduced. Test problem is considered to show that linear combination of heat polynomials gives better approximation at heat flux. Let consider the following problem

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1^2\left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right), \quad 0 < r < \alpha(t), \;\; 0 < t < T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2^2\left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \theta_2}{\partial r}\right), \quad \alpha(t) < r < \infty, \;\; 0 < t < T, \tag{2}$$

with initial condition

$$\theta_1(0,0) = \theta_m, \quad \theta_2(r,0) = \phi(x), \quad \alpha(0) = 0 \tag{3}$$

and boundary conditions

$$-\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(0,t)}{\partial r} = P(t), \tag{4}$$

$$\theta_1(\alpha(t),t) = \theta_2(\alpha(t),t) = \theta_m, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta_2(\infty,t)}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

Stefan's condition

$$-\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(\alpha(t),t)}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(\alpha(t),t)}{\partial r} + L\gamma \frac{d\alpha}{dt}. \tag{7}$$

By making substitution $\theta_i(r,t) = \frac{u_i}{r}$, $i = 1,2$ and $r = x$ we can reduce the problem to simple free boundary problem and we represent solution

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{k} A_n \nu_n^{(1)}(x,t), \tag{8}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{k} B_n \nu_n^{(2)}(x,t) + \sum_{n=1}^{k} C_n (2a_2\sqrt{t})^{2n} i^{2n} erfc \frac{x}{2a_2\sqrt{t}} \tag{9}$$

and $\phi(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} x^n$, heat flux $P(t) = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} t^n$ is given. From (3) we have

$$B_n = \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 1,2,3,... \tag{10}$$

From (4) we get

$$A_{2n+1} = -\frac{P^{(n)}(0)}{\lambda_1 (2n)!(2n+1)}, \quad n = 1,2,3,... \tag{11}$$

By integrating (1) and (2) at corresponding interval and using properties of heat polynomials we have

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{k} A_{2n}\frac{2n(2n-1)}{2n+1}\nu_{2n+1}^{(1)}(\alpha(t),t)+\sum_{n=1}^{k} A_{2n+1}\frac{2n(2n+1)}{2n+2}\left[\nu_{2n+2}^{(1)}(\alpha(t),t)-\frac{[2(2n+1)]!}{(2n+1)!}t^{n+1}\right]=\\ =a_1^2\left[\sum_{n=1}^{k} A_{2n}\nu_{2n-1}^{(1)}(\alpha(t),t)+\sum_{n=1}^{k} A_{2n+1}(2n+1)\nu_{2n}^{(1)}(\alpha(t),t)+\frac{P(t)}{\lambda_1}\right]\end{gathered}\tag{12}$$

and similarly for the second we have

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{k} B_n\frac{n(n-1)}{n+1}\nu_{n+1}^{(2)}(\alpha(t),t)+a_2^2\sum_{n=1}^{k} C_n(2a_2\sqrt{t})^{2n-1}i^{2n-1}erfc\frac{\alpha(t)}{2a_2\sqrt{t}}=\\ =-a_2^2\left[\sum_{n=1}^{k} C_n(2a_2\sqrt{t})^{2n-1}i^{2n-1}erfc\frac{\alpha(t)}{2a_2\sqrt{t}}+\sum_{n=1}^{k} B_n n\nu_{n-1}^{(2)}(\alpha(t),t)\right].\end{gathered}\tag{13}$$

Then system of (12) and (13) can be written as follows

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{k} A_{2n}\Phi_n^{(1)}=q_n^{(1)},\\ \sum_{n=1}^{k} C_n\Phi_n^{(2)}=q_n^{(2)}.\end{gathered}\tag{14}$$

where

$$\Phi_n^{(1)}=\frac{2n(2n-1)}{2n+1}\nu_{2n+1}^{(1)}(\alpha(t),t)-a_1^2(2n)\nu_{2n-1}^{(1)}(\alpha(t),t),$$

$$\Phi_n^{(2)}=2a_2^2(2a_2\sqrt{t})^{2n-1}i^{2n-1}erfc\frac{\alpha(t)}{2a_2\sqrt{t}},$$

$$q_n^{(1)}=\sum_{n=1}^{k} A_{2n+1}\left[a_1^2(2n+1)\nu_{2n}^{(1)}(\alpha(t),t)-\frac{2n(2n+1)}{2n+2}\left(\nu_{2n+2}^{(1)}(\alpha(t),t)-\frac{[2(2n+1)]!}{(2n+1)!}t^{n+1}\right)\right]+a_1^2\frac{P(t)}{\lambda_1},$$

$$q_n^{(2)}=-\sum_{n=1}^{k} B_n\left[a_2^2 n\nu_{n-1}^{(2)}(\alpha(t),t)+\frac{n(n-1)}{n+1}\nu_{n+1}^{(2)}(\alpha(t),t)\right],$$

From (14) using linear combination of $\nu_{2n+1}(\alpha(t),t)$, $\nu_{2n-1}(\alpha(t),t)$ and integral error function we can determine coefficients A_n and C_n if $\alpha(t)$ is known. These coefficients also can be determined directly from condition (5). The corresponding problems are considered in [1]-[2].

References

[1] M. Sarsengeldin, S.N. Kharin, *Method of the Integral Error Functions for the Solution of the One- and Two-Phase Stefan Problems and Its Application*//Filomat, **31**:4 (2017), 1017-1029. DOI 10.2298/FIL1704017S, Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat.

[2] A.A. Kavokin, T.A. Nauryz, N.T. Bizhigitova, *Analytical solution of two phase spherical Stefan problem by heat polynomials and integral error functions.*//AIP Conference Proceedings 1759, (2016) 020031; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4959645.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

BLOW-UP OF SOLUTIONS OF THE PSEUDO-PARABOLIC p-LAPLACE EQUATION WITH VARIABLE EXPONENTS AND COEFFICIENTS

Khonatbek KHOMPYSH

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

konat_k@mail.ru

In this work we study the following initial-boundary value problem for the nonlinear pseudo-parabolic p-Laplace equation with variable exponents and coefficients:

$$u_t - \nabla\left(\varkappa(x,t)\,|\nabla u|^{q(x)-2}\,\nabla u_t + \nu(x,t)\,|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\right) = \gamma(x,t)\,|u|^{m(x)-2}\,u,\ (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x),\ x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, and $Q_T = \Omega\times(0,T)$.

The coefficients $\nu,\ \gamma$ and the exponents p, m are given measurable of their arguments. It is assumed that these functions satisfy the following conditions:

$$\begin{array}{ll} 0<\nu^-\le\nu(x,t)\le\nu^+<\infty, & 0<p^-\le p(x)\le p^+<\infty,\\ 0\le\varkappa^-\le\varkappa(x,t)\le\varkappa^+<\infty, & 0<q^-\le q(x)\le q^+<\infty,\\ 0<\gamma^-\le\gamma(x,t)\le\gamma^+<\infty, & 0<m^-\le m(x)\le m^+<\infty. \end{array} \tag{4}$$

Theorem. Let (4) be fulfilled, and the exponents $q(\mathbf{x}),\ p(\mathbf{x}),\ m(\mathbf{x})$ satisfy the conditions:

$$p^+\le m^-,\ \text{ and }\ m^->\max\left\{2,q^+\right\}.$$

Let us assume, that also the coefficients $\varkappa(\mathbf{x},t),\ \nu(\mathbf{x},t),\ \gamma(\mathbf{x},t)$ are differentiable and

$$\varkappa=\varkappa(x)>0,\ \nu_t(x,t)\le 0,\ \gamma_t(x,t)\ge 0.$$

Finally, let $|u_0|^{m(x)},\ |\nabla u_0|^{p(x)}\in L_1(\Omega)$ and

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\gamma(x,0)}{m(x)}|u_0|^{m(x)}-\frac{\nu(x,0)}{p(x)}|\nabla u_0|^{p(x)}\right)d\mathbf{x}\ge 0$$

Then there is exists a finite time $T_{\max}<\infty$ such that the generalized solution to problem (1)-(3) blows up.

— ⁂ —

The work is financially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant N AP05132041).

AN INVERSE PROBLEM OF DETERMINING A COEFFICIENT IN THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Khonatbek KHOMPYSH, Aidos SHAKIR, Nursaule NUGYMANOVA

Kazakh National university from al-Farabi, Almaty, Kazakhstan

nugymanovank@gmail.com

Let $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1;\, 0 < t \leq T\}$ be rectangle. We investigate the following inverse problem of finding a pair of functions $\{u(x,t),\, b(t)\}$ satisfying the pseudoparabolic equation

$$b(t)(u_t - u_{xxt}) - u_{xx} = f(x,t),\ 0 < x < 1,\ \ 0 < t \leq T, \tag{1}$$

the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t),\ \ 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

where $\varphi(x),\ f(x,t),\ E(t)$ are given.

We assume that the data of the problem (1)-(4) satisfy the following conditions:

$$\varphi(x) \in (C^4[0,1],\ \varphi(0) = 0; \tag{5}$$

$$E(t) \in (C^1[0,T],\ E(0) = \int_0^1 \varphi(x)dx,\ E^{'}(t) > 0; \tag{6}$$

$$f(x,t) \in C^2[0,1] \cap \overline{C}(Q_T),\ f(0,t) = f(l,t),\ f(0,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T; \tag{7}$$

$$\xi(c_0(c_1 + c_2) < 1, \tag{8}$$

where ξ, c_0, c_1, c_2 are some numbers depending on the data of the problem.

Theorem. Let the assumptions (5) – (8) are valid. Then the inverse problem (1)-(4) has a unique classical solution.

References

[1] O. Taki-Eddine, B. Abdelfatah *On determing the coefficient a parabolic equation with nonlocal and integral condition* // Electronic Journal of Math. Anal. and App., **6**:1, 94102 (2018).

— ⁂⁂⁂ —

The work is financially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant AP05132041).

SOLVABILITY OF LINEAR THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR IMPULSIVE FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Meirambek MUKASH

K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

mukashma1983@gmail.com

We consider the linear three-point boundary value problem for impulsive Fredholm integro-differential equations (FIDE):

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t) \int_0^T \psi_j(\tau)x(\tau)d\tau + f(t),\ t \neq \theta_j,\ j = 1, ..., m,\ t \in (0,T),\ x \in R^n, \tag{1}$$

$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_m < T = \theta_{m+1})$,

$$B_0x(0) + D_0x(\theta) + C_0x(T) = d_0, \quad d_0 \in R^n, \quad \theta \in (0,T), \tag{2}$$

$$B_jx(\theta_j - 0) + C_jx(\theta_j + 0) = d_j, \quad d_j \in R^n, \quad j = 1, ..., m \tag{3}$$

where the $n\times n$ matrices $A(t)$, $\varphi_j(t)$, $\psi_j(\tau)$, $j = \overline{1,m}$ are continuous on $[0,T]$, and the n-vector function $f(t)$ is piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities at the points $t = \theta_j, j = 1, ..., m$.

We denote the space of piecewise continuous functions $x : [0,T] \to R^n$ continuous on $[\theta_{p-1}, \theta_p), p = 1, ..., m+1$ with the norm $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ by $PC([0,T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$; in other words, $PC([0,T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m) = \{x : [0,T] \to R^n$ continuous on $[\theta_{p-1}, \theta_p)$, there exists a finite limit $\lim_{t\to\theta_p-0} x(t)$ for all $p = 1, ..., m+1$, and $x(T) = \lim_{t\to T-0} x(t)\}$.

A solution of problem (1)-(3) is defined as a piecewise continuously differentiable function $x(t) \in PC([0,T], R^n, \{\theta_i\}_{j=1}^m)$ on (0,T) satisfying the integro-differential equation (1), the boundary condition (2), and the impulsive conditions (3).

A linear boundary value problem for impulsive FIDE solved by parameterization method was proposed in [1]. One of important auxiliary problem in this method is special Cauchy problem for the system of linear FIDEs.

A partition of the interval $[0,T]$ into N parts

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = T,$$

where the set of partition points $\{t_s, s = 1, ..., N-1\}$ contains the impulsive input points $\theta_j, j = 1, ..., m$, i.e. $t_{r_0} = \theta, t_{r_1} = \theta_1, ..., t_{r_m} = \theta_m$, $r = 1, ..., r_0, r_0+1, ..., r_1, ..., r_m, ..., N$ is denoted by $\Delta_N(\theta)$.

We denote the restriction of the function $x(t)$ to the rth interval $[t_{r-1}, t_r)$ by $x_r(t)$; i.e. $x_r(t) = x(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = 1, ..., N$.

By setting parameters $\lambda_r \hat{=} x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1,N}$, we specify the new unknown functions $u_r(t)$, $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Then we obtained the system of linear integro-differential equations with parameters on subintervals

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t) \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(\tau)(u_j(\tau) + \lambda_j)d\tau + f(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

with initial conditions at the left end points of subintervals

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{5}$$

The work is supported by the grant project AP 05132486 (2018-2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

and conditions

$$B_0\lambda_1 + D_0\lambda_{r_0} + C_0 \lim_{t\to T-0} u_N(t) + C_0\lambda_N = d_0, \quad d_0 \in R^n, \tag{6}$$

$$B_j\lambda_{r_j} + B_j \lim_{t\to \theta_j-0} u_{r_j}(t) - C_j\lambda_{r_j+1} = d_j, \quad d_j \in R^n, \quad j = 1,...,m, \tag{7}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to t_p-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p \neq r_j, \quad j = \overline{1,m}, \quad p = \overline{1,N-1}. \tag{8}$$

The problem (4), (5) is a special Cauchy problem for the system of linear integro-differential equations with parameters. Criteria of solvability and unique solvability of the special Cauchy problems for the system of linear integro-differential equations with parameters have been established in [1]-[3]. There methods of finding the solution to the linear special Cauchy problems proposed as well. Conditions of the solvability three-point boundary value problem for impulsive Fredholm integro-differential equations are established in the terms of solvability of system linear algebraic equations.

For $D_0 = 0$ the two-point boundary value problem for Fredholm integro-differential equations with impulse effects are studied in [4]. The method for the study and solution of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulse inputs at given times are suggested. The method is based on a partition of the interval and the introduction of auxiliary parameters as the values of solution at the initial points of subintervals. For each partition containing impulsive points are constructed a Fredholm integral equation of the second kind. The definition of a regular partition are introduced and the set of regular mappings is nonempty are showed. By using the resolvent of the of the constructed integral equation, the fundamental matrix of the differential part, and the original data of the problem a system of linear equations for the introduced parameters are formed. The equivalence of the solvability of that system and the considered linear boundary value problem are proved. Necessary and sufficient conditions for the solvability and unique solvability are obtained.

References

[1] D.S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro differential Equation.* // Comput. Math. Math. Phys., 50 (2010), 1150-1161.

[2] D.S. Dzhumabaev, *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems.* // J. Comput. and Appl. Math., 327(2018), 79-108.

[3] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations.* // J. Comput. and Appl. Math., 294(2016), 342-357.

[4] D.S. Dzhumabaev, *Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro differential Equation with impulsive inputs* // Differential Equations., 51(2015), 1189-1205.

— ⁂ —

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER

Dauren MURSALIYEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, International Infromation Technology University, Almaty, Kazakhstan

mu.dauren@gmail.com

We consider a boundary value problem for the ordinary differential equation with parameter:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)\mu + f(t), t \in [0,T], x \in R^n, \mu \in R^m, f \in R^n, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m},$$

$$C_0\mu + C_1x(0) + C_2x(T) = d, C_0 \in R^{(n+m)\times m}, C_1, C_2 \in R^{(n+m)\times n}, d \in R^{n+m},$$

where $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ is unknown vector function,$(n \times n)$ matrix function $A(t)$, and $(n \times m)$ matrix function $B(t)$, and $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ are all continuous on the whole interval $[0,T]$. The $((n+m) \times m)$ matrix C_0, two $((n+m) \times n)$ matrices C_1, C_2 and $(n+m)$ vector d are constant. The $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$ is unknown parameter.

The numerical solution of the boundary value problem is found by the method proposed in [1].

Interval is divided into 5 parts, values of solution of the initial problem on each subinterval are considered as additional parameters reducing our problem to a new boundary value problem with parameters [2, 3]. A system of linear algebraic equations with respect to initial and introduced parameters is constructed using continuity conditions at the dividing points, boundary condition and solutions of the auxilary Cauchy problems. The solution of system of linear algebraic equations is found using inverse coefficient matrix and free term vector. Results of the algotihms are demonstrated by numerical solutions of particular boundary value problems for ordinary differential equations with parameters obtained using implemented script based on previously mentiond method in MatLab.

References

[1] D.S. Dzhumabaev, *New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary value problems* // Ukr Math J, **71** (2019), 1006–1031

[2] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations* // J. Comput. Appl. Math., **294** (2016), 342–357.

[3] A.T. Assanova, E.A. Bakirova, Zh.M. Kadirbayeva, *Numerical Solution to a Control Problemfor Integro-Differential Equations* // Comput. Math. and Math. Physics, **60**:2 (2020), 203–221.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The author was supported by the grant AP 05132486 of SC of the MES RK

ON AN ALGORITHM OF FINDING A SOLUTION TO A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Sandugash MYNBAYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

mynbaevast80@gmail.com

Many problems of natural science lead to boundary value problems for integro-differential equations. Moreover, as a rule, these problems are nonlinear. The nonlinearity of boundary value problem leads to significant difficulties in solving and in establishing their qualitative properties.

In the communication, it is considered the boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation with nonlinear differential part

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \int_0^T \psi_k(\tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g\left[x(0), x(T)\right] = 0, \tag{2}$$

where $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ are continuous; the $n \times n$ matrices $\varphi_k(t)$, $\psi_k(\tau)$, $k = \overline{1,m}$, are continuous on $[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Denote by $\mathbb{C}\big([0,T], \mathbb{R}^n\big)$ the space of continuous functions $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$. By a solution to problem (1), (2) we mean a continuously differentiable on $(0,T)$ function $x(t) \in \mathbb{C}\big([0,T], \mathbb{R}^n\big)$ that satisfies equation (1) and boundary condition (2).

In [1] employing regular partition Δ_N (see [2, 3]) of the interval [0,T] has been introduced the Δ_N general solution $x(\Delta_N, t, \lambda)$ to the linear Fredholm integro-differential equation. As distinct from the classical general solution, $x(\Delta_N, t, \lambda)$ exists to any linear Fredholm integro-differential equation and depend on parameter $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in R^{nN}$. The new concept of a general solution is extended to the Fredholm integro-differential equation (1) in [7]. Δ_N general solution is constructed through a solution to the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations.

In present communication, an algorithm of finding a solution to boundary value problem (1), (2) is proposed. To this end, we use the parametrization's method [4] and results of [1-3, 5-7].

Substitution the corresponding expression of $x(\Delta_N, t, \lambda)$ into the boundary condition and continuity conditions of a solution to equation (1) at the interior points of Δ_N yields a system of nonlinear algebraic equations in parameters. Closed-form of this system can be constructed only in exceptional cases. However, for the given parameters, the values of the vector functions defining this system and the values of its Jacobi matrix can be found through the solutions to the corresponding special Cauchy problems for the system of integro-differential equations. This fact allows us to construct an algorithm of finding a solution to boundary value problem (1), (2).

References

[1] D.S. Dzhumabaev, *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems* // J. Comput. Appl. Math., **327** (2018), 79–108.

This research is supported by the Ministry of Education and Science of the Republic Kazakhstan Grant AP05132486.

[2] D.S. Dzhumabaev, *Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of Linear Boundary-Value Problems for the Fredholm Integro-differential Equations* // Ukrainian Math. J., **66**: 8 (2015), 1200–1219.

[3] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations* // J. Comput. Appl. Math., **294** (2016), 342–357.

[4] D.S. Dzhumabaev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation* // Comput. Math. Math. Phys., **29** (1989), 34–46.

[5] D.S. Dzhumabaev, *Convergence of iterative methods for unbounded operator equations* // Mat. Zametki, **41**: 5 (1987), 356–361.

[6] D.S. Dzhumabaev, *On the Conergence of a Modification of the Newton-Kantorovich Method for Closed Operator Equations* // Amer. Math. Soc. Transl., **2** (1989), 95–99.

[7] D.S. Dzhumabaev, S.T. Mynbayeva, *New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation* // Eurasian Mathematical Journal., **10:** 4 (2019), 24–33.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION BY MODIFIED PARAMETERIZATION METHOD

Kulzina NAZAROVA [1,a], Roza UTESHOVA [2,b]

[1] Akhmet Yassawi University, Turkestan, Kazakhstan,
[2] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
[2] International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

[a] *gjnazarova@mail.ru*, [b]*ruteshova1@gmail.com*

We consider the boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where the $(n \times n)$ matrices $A(t)$ and $K(t,\tau)$ are continuous on $[0,T]$ and $[0,T]\times[0,T]$, respectively, the n vector $f(t)$ is continuous on $[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=1,N} |x_i|$.

To study problem (1),(2), the parameterization method [1] is applied in [2-4]. The interval $[0,T]$ is partitioned, the values of a solution to problem at the left endpoints of the subintervals are introduced as additional parameters, and problem (1), (2) is reduced to an equivalent problem with parameters. Introduction of additional parameters yields a special Cauchy problem for a system of integro-differential equations with parameters on the subintervals. The unique solvability of this problem determines the regularity of the chosen partition. Employing a regular partition reduces the problem (1),(2) to a system of linear algebraic equations in parameters. It is proved that the solvability of this system is equivalent to that of problem (1),(2). Thus, the construction of a system of linear algebraic equations serves as the basis for algorithms of the parameterization method.

The work is supported by the MES RK, Grant No. AP 05132486 and the Award "The Best University Teacher 2019".

The number of unknown parameters in this system is determined by the number N of the partition subintervals. Increasing N hence results in undesirable increase in the number of unknown parameters. In order to address this issue, we have developed a modified version of the parameterization method.

In this version, the additional parameters are set as the values of the solution to problem (1),(2) at interior mesh points. The definition of a regular pair consisting of a partition and chosen interior mesh points is given. The original problem is transformed into a multipoint boundary value problem with parameters. For fixed values of parameters, we get a special Cauchy problem for a system of integro-differential equations on the subintervals. Using the solution to this problem, the boundary condition, and continuity conditions of solutions at the interior mesh points, we construct a system of linear algebraic equations in introduced parameters. It is established that the solvability of the problem under consideration is equivalent to that of the constructed system. We provide a number of examples illustrating the effectiveness of the proposed modified method.

References

[1] D.S. Dzhumabaev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation* // Comput. Math. Math. Phys., **29** (1989), 34–46.

[2] D.S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation* // Comput. Math. Math. Phys., **50** (2010), 1150–1161.

[3] D.S. Dzhumabaev, *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations* // J. Comput. Appl. Math., **294** (2016), 342–357.

[4] D.S. Dzhumabaev, *New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems* // J. Comput. Appl. Math., **327** (2018), 79–108.

— ⁂ —

SOLVABILITY OF SPECIAL CAUSHY PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH WEAKLY KERNEL

Shattyk NURMUKANBET

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

shattyk.95@list.ru

We consider a linear two-point boundary value problem with a weakly singularity on $[0, T]$:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ is unknown function; the $(n \times n)-$matrix $A(t)$ and $n-$vector function $f(t)$ are continuous on $[0, T]$, B and C are $(n \times n)$ constant matrices, $d \in R^n$, $K(t, \tau)$ is $(n \times n)-$matrix and

$$\|K(t,\tau)\| \le \frac{\beta}{|t-\tau|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Let $C([0, T], R^n)$ be a space of continuous functions $x : [0, T] \to R^n$ with the norm $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$, $\|x(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i(t)|$.

Solution (1),(2) is a function $x(t) \in C([0,T], R^n)$, continuously differentiable on $(0,T)$, which satisfies the integro-differential equation (1) for all $t \in [0,T]$ and condition (2). The parametrization method $[1-3]$ is used to study the two-point boundary value problem (1), (2). We divide the interval $[0,T]$ evenly N and denote by $\triangle_N$ this partition: $\triangle_N = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_N = T\}$, where $t_s = \frac{sT}{N}$. By $x_r(t)$ we denote the restriction of the function $x(t)$ to the r^{th} interval $[t_{r-1}, t_r)$, i.e. $x_r(t) = x(t), r = \overline{1,N}$. From problem (1) – (2) we pass to the equivalent problem

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)x_j(\tau)d\tau + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{3}$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \to T-0} x_N(t) = d, \tag{4}$$

$$\lim_{t \to t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t), \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{5}$$

$x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))$ is a solution of (3) - (5) at $t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}$.

Entering the parameters $\lambda_r \widehat{=} x_r(t_{r-1})$, and on each r^{th} interval, changing the function $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, we obtain the boundary problem with parameters.

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)(u_j(\tau) + \lambda_j)d\tau + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{6}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{7}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t \to T-0} u_N(t) = d, \tag{8}$$

$$\lambda_p + \lim_{t \to t_p - 0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{9}$$

A pair of $(\lambda, u[t])$ with elements $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in R^{nN}$, $u[t] = (u_1, u_2, ..., u_N) \in C([0,T], \triangle_N, R^{nN})$ is a solution to problem (6)-(9). For fixed values of the parameters $\lambda \in R^{nN}$, the system of functions $u[t]$ allows us to determine from special Cauchy problems for systems of integro-differential equations (6), (7). Using the fundamental matrix $X(t)$ of the differential equation $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ the combined problem (6), (7) to the equivalent system of integral equations

$$u_r(t) = X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1\lambda_r +$$

$$+X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, s)(u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau_1 +$$

$$+X(t) \int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}. \tag{10}$$

From left we multiply by $K(t,\tau)$ and then integrate $\int_{t_{j-1}}^{t_j}$, $j = \overline{1,N}$ and adding we get the following expression

$$\Phi(\Delta_N, u, t) = \int_0^T M(\Delta_N, t, \tau)\Phi(\Delta_N, u, \tau)d\tau + D(\Delta_N, t)\lambda + F(\Delta_N, t), \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

where

$$\Phi(\Delta_N, u, t) = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)u_j(\tau)d\tau,$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in R^{nN}$, $D(\Delta_N, t) = (D_r(\Delta_N, t))$, $r = \overline{1,N}$ is continuous on $[0,T]$ matrix dimension $n \times nN$:

$$D_r(\Delta_N, t) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,\tau)X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1 d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t_r} K(\tau_1,s)dsd\tau_1 d\tau,$$

$M(\triangle_N, t, \tau)$ square matrix of dimension n on $[0,T]\times[0,T]$, is continuous in $t\in[0,T]$ and piecewise continuous in $\tau\in[0,T]$:

$$M(\Delta_N,t,\tau)=\int_{\tau}^{t_j} K(t,\tau_1)X(\tau_1)d\tau_1 X^{-1}(\tau),\quad t\in[0,T],\quad \tau\in[t_{j-1},t_j),\quad j=\overline{1,N},$$

$F(\Delta_N,t)\in C([0,T],R^n)$ and

$$F(\Delta_N,t)=\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau.$$

Lemma 1. Let $\tilde{\Phi}(\Delta_N,u,t)$ – be a solution of the Fredholm integral equation of the second kind (11). Then the system of functions $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t),...,\tilde{u}_N(t))$ with elements

$$\widetilde{u}_r(t)=X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1\lambda_r+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1,s)dsd\tau_1\lambda_j+X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1+$$

$$+X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)\widetilde{\Phi}(\Delta_N,\tau_1)d\tau_1,\quad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N}$$

will be a solution to the special Cauchy problem (6), (7).

References

[1] D.S. Dzhumabayev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation.* // USSR.Comput. Maths.Math.Phys. **29**:1 (1989), 34-46.

[2] D.S. Dzhumabaev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation.* // Comp. Math and Math. Physics. **50**:7 (2010), 1150-1161.

[3] D.S. Dzhumabaev, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integro-differential equations.* // Ukr. Math.Journal **66**:8 (2015), 1200-1219.

— ⁕⁕⁕ —

CRITERIA OF UNIQUE SOLVABILITY TO BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR VOLTERRA IDE

Asselya SMADIYEVA

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

aselya87kz@mail.ru

We consider the following boundary value problem for Volterra integro-differential equation on interval $[0,T]$:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where the $(n \times n)$- matrices $A(t), K(t,\tau)$ are continuous on $[0,T]$, $[0,T] \times [0,T]$, respectively, and n-vector function $f(t)$ is continuous on $[0,T]$, B and C are $(n \times n)$ constants matrices, $d \in R^n$.

Let $C([0,T],R^n)$ be a space of continuous functions $x : [0,T] \to R^n$ with the norm

$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$, $\|x(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i(t)|$.

Solution to boundary value problem for Volterra integro-differential equation is a function $x(t) \in C([0,T],R^n)$, continuously differentiable on $(0,T)$, which satisfies the equation (1) for all $t \in (0,T)$ and condition (2).

The parametrization method $[1-3]$ is used to study the two-point boundary value problem (1), (2). Let $h > 0$, be a step - size that can be marked out exactly $N (N = 1, 2, \dots)$ times in the interval $[0,T]$, and consider the partition $[0,T) = \cup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$.

Let $x(t)$ be a solution to the Volterra integro - differential equation (1) and $x_r(t)$ be its restrictions to the subintervals $[(r-1)h, rh)$. Let $x(t)$ be a solution to the Volterra integro - differential equation (1) and $x_r(t)$ be its restrictions to the subintervals $[(r-1)h, rh)$. Then the system of N functions $x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))$ belongs to $C([0,T],R^n)$ and satisfies the system of Volterra integro - differential equations

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{j=1}^{r-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)x_j(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} K(t,\tau)x_r(\tau)d\tau + f(t),\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = \overline{1,N}, \tag{3}$$

with boundary condition

$$Bx_1(0) + C \lim_{t\to T-0} x_N(t) = d, \tag{4}$$

and continuity conditions

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{5}$$

If $x(t)$ is a solution of problem (1), (2), then it is obvious that the set of restrictions $(x_r(t)),\ r = \overline{1,N}$ is a solution of the multipoint problem (3) - (5). Conversely, if a set of vector functions $\tilde{x}_r(t),\ r = \overline{1,N}$ is a solution of problem (3) - (5), then the function $\tilde{x}$ obtained by "joining" the functions together is a solution of the original boundary-value problem.

Let λ_r denote the value of $x_r(t)$ at the point $t = (r-1)h$. In each interval $[(r-1)h, rh)$, make the substitution $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$.

The result is a parametric boundary value problem for Volterra integro-differential equation

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{(j-1)h}^{jh} K(t,\tau)[u_j(\tau) + \lambda_j]d\tau +$$

$$+\int_{(r-1)h}^{t} K(t,\tau)[u_r(\tau)+\lambda_r]d\tau + f(t), \quad t\in[(r-1)h, rh), \quad r=\overline{1,N}, \tag{6}$$

with

$$u_r[(r-1)h]=0, \quad r=\overline{1,N}, \tag{7}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C\lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \tag{8}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s=\overline{1,N-1}. \tag{9}$$

Cauchy problem (6), (7) is equivalent to an integral equation

$$u_r(t) = D_r(t)\lambda_r + \sum_{j=1}^{r-1}\tilde{D}_{j,r}(t)\lambda_j + G_r(t,u_r) + \sum_{j=1}^{r-1}\tilde{G}_{j,r}(t,u_j) + F_r(t), \tag{10}$$

where $t\in[(r-1)h, rh), \ r=\overline{1,N}$,

$$D_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t}[A(\tau) + \int_{(r-1)h}^{\tau} K(\tau,\tau_1)d\tau_1]d\tau, \quad j=\overline{1,N-1},$$

$$\tilde{D}_{j,r}(t) = \int_{(r-1)h}^{t}\int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau,\tau_1)d\tau_1 d\tau, \quad j=\overline{1,N-1},$$

$$G_r(t,u_r) = \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t}\int_{(r-1)h}^{\tau} K(\tau,\tau_1)u_r(\tau_1)d\tau_1 d\tau,$$

$$\tilde{G}_{j,r}(t,u_j) = \int_{(r-1)h}^{t}\int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau,\tau_1)u_j(\tau_1)d\tau_1 d\tau, \quad j=\overline{1,N-1},$$

$$F_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} f(t)d\tau.$$

We define from (10) the left-side limits of the function $u_r(t)$ for $t\to rh-0, \ r=\overline{1,N}$ and substituting its into relations (8), (9), we obtain a system of linear algebraic equations with respect to parameter λ:

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + CD_N(T)\lambda_N + C\sum_{j=1}^{N-1}\tilde{D}_{j,N}(T)\lambda_j =$$

$$= -CG_N(T,u_N) - C\sum_{j=1}^{N-1}\tilde{G}_{j,N}(T,u_j) - CF_N(T) + d, \tag{11}$$

$$[I + D_s(sh)]\lambda_s - \lambda_{s+1} + \sum_{j=1}^{s-1}\tilde{D}_{j,s}(sh)\lambda_j =$$

$$= -G_s(sh,u_s) - \sum_{j=1}^{s-1}\tilde{G}_{j,s}(sh,u_j) - F_s(sh), \ s=\overline{1,N-1}. \tag{12}$$

We rewrite the system of equations (11), (12) in vector matrix form:

$$Q(N)\lambda = -G(N,u) - F(N). \tag{13}$$

We proposed an algorithm for finding a solution to the problem (6)-(9).

On each step of algorithm:

1) we solve the special Cauchy problem for integro-differential equations (6), (7) for fixed parameters .

2) we solve the system of linear algebraic equations (13) for known values of the functions $u_r(t)$, $r=\overline{1,N}$.

The conditions of convergence algorithm are established. Conditions for the existence and uniqueness of the solution to the problem (1), (2) are obtained in the terms of matrix $Q(N)$, $A(t)$ and T.

References

[1] D.S. Dzhumabayev, *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation* // USSR. Comput. Maths. Math. Phys. **29**:1 (1989), 34-46.

[2] D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova, *Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations* // Differ. Equ. **46**:4 (2010), 553-567.

[3] D.S. Dzhumabaev, *Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations* // Math. Meth. Appl. Sci. **41**:4 (2018), 1439-1462.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON THE INITIAL MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FOURTH ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zhanibek TOKMURZIN

K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

tokmurzinzh@gmail.com

We consider on the domain $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ the following initial multi-point boundary value problem for system of fourth order partial differential equations

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$

$$+ A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}|_{t=0} = \varphi_3(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}|_{x=x_j} = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A_i(t,x), (i = \overline{1,7})$, and n vector–function $f(t,x)$ are continuous on Ω; the $n \times n$ - matrices $P_j(t), (j = \overline{0,m})$ and n vector–function $\psi(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$; the n vector–functions $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ and $\varphi_3(x)$ are continuous on $[0,\omega]$.

The compatibility conditions are valid: $\sum\limits_{j=0}^{m} P_j(0)\varphi_3(x_j) = \psi(0)$.

Let $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ be the space of continuous on Ω vector functions $u(t,x)$ with the norm

$$||u||_0 = \max_{(t,x)\in\Omega} ||u(t,x)||, ||u(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|.$$

The work is supported by the grant project AP 05131220 (2018-2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

A function $u(t,x) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ having partial derivatives $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^3 \partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, is called a classical solution to problem (1)–(5) if it satisfies system (1) for all $(t,x) \in \Omega$, and the initial and the boundary conditions (2)–(5).

Partial differential equations of higher order are widely used in various problems of natural science and technology [1-2].

In present communication, we study the questions for the existence and uniqueness of classical solution to a multi-point boundary value problem for system of partial differential equations of fourth order. We also construct the method for finding an approximate solution to this problem.

By introducing new unknown functions [4],[6] problem (1)–(5) is reduced to a multi-point boundary value problem for the system of hyperbolic equations of second order with functional parameters and integral relations. We offer the algorithm for finding the approximate solution to the problem considered and prove its convergence.

The unique solvability of problem (1) – (5) is established in terms of initial data.

References

[1] B.I. Ptashnyck *Incorrect boundary value problems for partial differential equations*// Naukova dumka, Kiev, 1984 (in Russian).

[2] A.M. Nakhushev *Problems with shift for a partial differential equations*// Nauka, Moskow, 2006 (in Russian).

[3] A.T. Assanova, A.A. Boichuk, Zh.S. Tokmurzin *On the initial-boundary value problem for system of the partial differential equations of fourth order*// News of the NAS RK. Physico-Mathem. Ser. 323 (2019), 14-21. https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.2.

[4] A.T. Asanova, D.S. Dzhumabaev *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations*// Journal of Mathematical Analysis and Applications, 402:1 (2013), 167-178. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012.

[5] A.T. Assanova, Zh.S. Tokmurzin *Parameter identification in an initial-boundary value problem for hyperbolic equation of the fourth order*// International Conference "Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra" (EMJ-2019), dedicated to the 10th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal. Abstract books. Nur-Sultan, October 16-19, 2019, P. 27.

[6] A.T. Assanova, Zh.S. Tokmurzin *On two-point initial boundary value problem for fourth order partial differential equations*// Kazakh Mathematical Journal, **19**:3(2019), 66-78.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

DEEP LEARNING MODELS FOR LINK FLOW ESTIMATION

Gulnur TOLEBI, Nurlan DAIRBEKOV

Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

tolebi.glr@gmail.com

This paper considers the problem of estimating a certain observed amount of traffic flow in a given link of a transport network for a short-term forecast. Our aim is to evaluate the changes in the flow at the road section over time. We treat the link flow as the probability of vehicles being generated in unit time. The value is not the exact proportion of the vehicles arrived, but represents some properties of traffic flow in the given link. The link flow estimation problem will be formulated as follows:

- Given data going back and sampled every period of time, can we predict the link flow $F_{i,t+m}$ the near future (at time t + m) based on historical data? F_i, tis the flow rate on the link i at time t.

Our dataset is a time series data, with a time series being a sequence of observations taken sequentially in time [1]. There are two key issues when time series are used for flow estimation:

- The time series analysis requires the process to be stationary. However, the traffic flow is dynamically changing.
- The spatial characteristics of the time series data are not taken into account in the classical methods [2].However, when we consider sequential data it is important to consider a more deep representation of features.

These issues can be solved by a hybrid model of RNN and CNN, which is presented in our study. In this study, three models of deep neural networks were trained and tested on a simulator, as well as a fully connected feed-forward network (FCNN). We consider FCNN as our baseline. The first model is based on the Recurrent Neural Network (RNN). We consider our dataset as a sequence in time. To process data using simple networks, we need to process the entire sequence at once. However, the RNN has an internal loop that allows you to remember the states and reuse the values calculated in the previous state (iteration).
GRU has a update and reset gates. An update gate z_t^j decides how much the past state effect on current state and computed by the following formula:

$$z_t^j = \sigma(W_z x_t + U_z h_{t-1})^j \tag{1}$$

The reset gate calculating as following:

$$r_t^j = \sigma(W_r x_t + U_r h_{t-1})^j \tag{2}$$

The activation h_t^j of the GRU at time t is a linear interpolation between the previous activation h_{t-1}^j and the updated value activation $\hat{h}_t^j$:

$$h_t^j = (1 - z_t^j)h_t^j - 1 + z_t^j \hat{h}_t^j \tag{3}$$

This procedure of taking a linear sum between the existing state and the newly computed state. The candidate activation $\hat{h}_t^j$ is computed as following:

$$\hat{h}_t^j = tanh(W x_t + U(r_t \bigodot h_{t-1}))^j \tag{4}$$

This work was supported by Satbayev University under the program "Software development for 3D modeling, online monitoring and prediction of the air contamination level in urban and industrial areas" no.BRO05236316.

where r_t is a set of reset gates.

CNN is a type of neural network with specific architecture that considers and treats input data as spatial. The main difference of CNN from the fully-connected network is in structure, where neurons only connected to nearest neurons and all have the same weight, instead of connecting to every neuron in the previous layer. CNN has a very high performance in solving computer vision problems since the architecture of this network allows to develop an internal representation of a two-dimensional image. This allows the model to learn position and scale in variant structures in the data, which is important when working with images. We used this feature of CNN to process sequence data and find ordered relationship in the time steps of a time series. CNN is considered a cheaper alternative model of RNN for time series forecasting problems.

Classical CNN has the following stacked layers:

- convolutional :

$$c_j^k = \sum_i x_i^{k-1} * w_{ij}^k + b_j^k \tag{5}$$

- activation

$$x_j^k = \theta(c_i^k) \tag{6}$$

- pooling

$$x_j^{k+1} = pooling(x_j^k) \tag{7}$$

where x_i^{k-1} is an input, k is an engaged layer

A 1D CNN is a modified version of CNN where convolutional hidden layer operates with a 1D sequence. It is very effective when you expect to derive informative features from fixed-length segments of the overall dataset. The main difference between classical 2D CNN and 1D is in the input data dimension and how the filter passes through the data. The recent studies [4756] show that for certain applications including analysis of time sequences of sensor data, analysis of the audio signals 1D CNNs outperform 2D counterparts due to the following reasons:

- lower computational complexity due to dimensionality reduction
- relatively shallow architecture easier to train

The third model consists of CNN and RNN modules, where the first part serves as data conversion for the input of the second module. For the input This approach allows increasing the performance of the model by preprocessing data with CNN and sensitivity to the order (sequence) of RNN.

For evaluation of the proposed models we use the Mean Squared Error (MSE):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{n}^{i=1} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \tag{8}$$

where n - number of estimations, Y_i - target value, $\hat{Y}_i$ - predicted value.

References

[1] E.P. Box George, M. Jenkins, C. Reinsel Gregory, G.M. Ljung, *Time Series Analysis: Forecasting and Control, 2015* // Wiley Series in Probability and Statistics, 2015.

[2] J. Brownlee, *Comparing Classical and Machine Learning Algorithms for Time Series Forecasting* // Lecture notes, Deep Learning for time series, Machine Learning Mastery Pty. Ltd., 2018.

[3] S. Hochreiter, J. Schmidhuber, *Long-short term memory* // Neural Computation, **9**:8 (1997), 1735–1780.

[4] K. Cho, V. M. Bart, C. Gulcehre, D. Bahdanau, F. Bougares, H. Holger, Y. Bengio *Learning Phrase Representations using RNN Encoder-Decoder for Statistical Machine Translation* // ArXiv, Cornell University, 2014.

— ⁂ —

Development of a program for converting graphic information of geological and lithographic profiles into digital information

Nazgul TOYGANBAEVA, Merey KENZHEBAYEVA

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

bodinaz@mail.ru, merey-mex-2017@mail.ru

Currently, most of the major oil and gas fields produced have almost exhausted their oil capacity . In this regard, there is a high interest in small "preserved" deposits. Thanks to scientific and technical progress, the labor intensity of extracting hydrocarbon raw materials from such fields has decreased many times. But there are many difficulties with understanding the current state of the field during the period of operation.

The direct task of gravimetry is to calculate the gravitational field on the Earth's surface, taking into account the known location and the composition of the inhomogeneity. To do this, we need information about the geological and lithological structure of the field, that is , we need to know the density distribution over the entire area under study. The formulation of the problem and the analysis of the solution of the direct and inverse problem on model data were previously described in [1-2].

When working with real data, we decided to use graphical data on the geological and lithological profile, which gives a fairly accurate representation of the density structure in the section. They were obtained during the exploration of the oil field. To use this graphic data in our calculations for a direct task, you must first process it and convert it to digital format.

We wrote a program in Python. It divides the original image into rectangular areas with the necessary step. In each rectangle, we count the number of pixels of a particular color. Select the color with the maximum number of pixels for the color of this rectangle. We run through all the cells in this way. We are forming a matrix. From the dictionary, replace the density value corresponding to this color. Thus, we get a density matrix in digital format, which is completely consistent with the format of the solution of the direct problem. It is easily integrated into the overall program and facilitates the entire process.

To date, results have already been obtained for solving a direct problem with real data. It is planned to use our experience in solving the inverse problem of gravimetry and further implementation of the GIS system in the framework of the project.

References

[1] S.Ya. Serovajsky, M.O. Kenzhebayeva. *Modeling of the potential of the gravitational field at the upper boundary of the region with the existence of a subterranean anomaly* // International Journal of Mathematics and Physics, **1** (2018), 20–26.

The research was supported by the project AP05135158 "Development of geographic information system for solving the problem of gravimetric monitoring of the state of the subsoil of oil and gas regions of Kazakhstan based on highperformance computing in conditions of limited experimental data".

[2] S.Ya. Serovajsky, A.A. Azimov, M.O. Kenzhebayeva, D.B. Nurseitov, A.T. Nurseitova, M.A. Sigalovskiy. *Mathematical problems of gravimetry and its applications* // International Journal of Mathematics and Physics, **1** (2019), 29–35.

— ⁂ —

Absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities

Sailaubay ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan

sailau.math@mail.ru

We will introduce for consideration a class of continuously-differentiable at times t and bounded on a norm matrices Ξ.

Consider the problem of construction of a material system by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x)=0$, in the following form [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B_1(t)\xi, \quad \xi = \varphi\,(t,\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, and $B_1 \in \Xi^{n\times r},\ P \in \Xi^{s\times r}$ are matrices, $\omega \in R^s (s \le n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a differentiable in all variables non-stationary vector-function, satisfying to conditions of local quadratic connection

$$\varphi(t,0) = 0\ \wedge\ 0 < \sigma^T\varphi(t,\sigma) \le \sigma^T K(t)\sigma, \quad \forall\ \sigma \ne 0, \tag{2}$$

$$K_1 \le \frac{\partial\varphi(t,\sigma)}{\partial\sigma} \le K_2,, \quad [K(t) = K^T(t) >> 0] \in \Xi^{r\times r} \quad K_i = K_i^T > 0.$$

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\dot{\omega} = -A(t)\omega - B(t)\xi, \quad \xi = \varphi\,(t,\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,. \tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2), and $F(t,x,\omega) = -A(t)\omega,\ A \in \Xi^{s\times s},\ H(t) = \dfrac{\partial\omega}{\partial x},\ B(t) = H(t)B_1(t)$.

The reviews of the works devoted to the construction of autonomous and non-autonomous automatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of various inverse problems of dynamics were shown (see [3]-[8]).

Statement of the Problem. To get the condition of absolute stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the non-autonomous indirect control systems with non-stationary nonlinearity in relation to the given vector-function ω.

Theorem 1. *Suppose that there exist matrices* $L = L^T > 0$, $\beta = diag\,(\beta_1,\dots,\beta_r) > 0$, *non-autonomous non-linear function* $\varphi(t,\sigma)$ *satisfies the conditions (2) and* $-\dot{V}|_{(3)} = W$.

Then in order that, the program manyfold $\Omega\,(t)$ *with respect to the vector function* ω *will satisfy to inequalities*

$$\lambda_1\|z(t_0)\|exp[\alpha_1(t-t_0)] \le \|z(t)\| \le \lambda_2\|z(t_0)\|exp[\alpha_2(t-t_0)],$$

it is sufficient performing of the following conditions

$$l_1(\|z\|^2 \le V \le l_2(\|z\|^2, \quad g_1(\|z\|^2 \le W \le g_2(\|z\|^2, \tag{4}$$

where $z(t_0) = \|\omega(t_0)\ \xi(t_0)\|^T,\ z(t) = \|\omega(t)\ \xi(t)\|^T$ *and* $\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2,\ l_1,l_2,g_1,g_2$ *are positive constants.*

This results are supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No. AP 05131369 for 2018-2020 years.

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system* // Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold // Prikladnaya Matematika i Mecanika, **10**:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion* // Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. *Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions* // Vestnik RUDN, **1** (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications* // Springer International Publishing Switzerland(2016).

[6] Zhumatov S.S. *Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold* // Nelineinye kolebania. **28**: 3 (2016), 367–375.

[7] Zhumatov S.S. *Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems* // News NAS RK. Series physico-mathematical. **322**: 6 (2018), 37-43.

[8] Zhumatov S.S.*On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients* // Ukrainian Mathematical Journal. **71**: 8 (2020), 1202-1213.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МЕТОД В.С. ВЛАДИМИРОВА В ЗАДАЧЕ КОШИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Нурсауле АЙНАКЕЕВА[1,2,a], Асият ДАДАЕВА[1,b]

[1]Институт математики и математического моделирования,Алматы, Казахстан,
[2]Казахский национальный университет им.Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[a]*nursaule_math@mail.ru*, [b]*dady1262@mail.ru*

Изучение напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций с учетом влияния температуры является актуально научно-технической проблемой, тесно связанной с обеспечением прочности и надежности при их эксплуатации. Здесь, с использованием модели несвязанной термоупругости, исследуется термодинамика термоупругого стержня, который характеризуется линейной плотностью, скоростью распространения упругих волн в стержне и термоупругой константой. Исследуются продольные перемещения сечений стержня и температурное поле, которые описываются системой гиперболо-параболических уравнений второго порядка теории температурных напряжений [1,2]. В работе [3] построен тензор Грина $U_i^j(x,t)$ где $(i,j=1,2)$ уравнений теории температурных напряжений, проведена его регуляризация, на основе которой построен оригинал этого тензора в исходном пространстве времени, что не удается в случае модели связанной термоупругости. Здесь, на основе метода Владимирова В.С. [4,5], с использованием этого тензора, построено решение пространственно-одномерной термодинамической задачи Коши для термоупругого стержня при действии нестационарных силовых и тепловых источников различного вида в пространстве обобщенных вектор-функций медленного роста, которое имеет вид суммы сверток :

: Работа поддержана грантом AP05132272 КН МОН РК

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H(t) = \hat{U}_1^1(x,t) \underset{x,t}{*} \hat{F}_{\Delta 1}(x,t) + \hat{U}_1^2(x,t) \underset{x,t}{*} \hat{F}_{\Delta 2}(x,t) =$$
$$= \hat{U}_1^1(x,t) \underset{x,t}{*} F_1(x,t)H(t) + \hat{U}_1^1(x,t) \underset{x}{*} v_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_1^1(x,t) \underset{x}{*} u_0(x) +$$
$$+\hat{U}_1^2(x,t) \underset{x,t}{*} F_2(x,t)H(t) + \hat{U}_1^2(x,t) \underset{x}{*} k^{-1}\theta_0(x)$$

$$\hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)H(t) = \hat{U}_2^1(x,t) \underset{x,t}{*} \hat{F}_{\Delta 1}(x,t) + \hat{U}_2^2(x,t) \underset{x,t}{*} \hat{F}_{\Delta 2}(x,t) =$$
$$= \hat{U}_2^1(x,t) \underset{x,t}{*} F_1(x,t)H(t) + \hat{U}_2^1(x,t) \underset{x}{*} v_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_2^1(x,t) \underset{x}{*} u_0(x) +$$
$$+\hat{U}_2^2(x,t) \underset{x,t}{*} F_2(x,t)H(t) + \hat{U}_2^2(x,t) \underset{x}{*} k^{-1}\theta_0(x)$$

где $u(x,t)$ продольные перемещения стержня, $\theta(x,t)$ его температура, $u_0(x) = u(x,0)$, $\nu_0(x) = u_{,t}(x,0)$, $\theta_0(x) = \theta(x,0)$, $F_j(x,t)$ плотность силовых и тепловых источников где $(i,j = 1,2)$. Здесь обозначение под знаком свертки указывает переменные, по которым они берутся. Дано регулярное интегральное представление обобщенного решения краевой задачи, которое дает классическое аналитическое решение. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие термонапряженное состояние стержня при разных тепловых и силовых воздействиях.

Список литературы

[1] В. Новацкий, *Теория упругости* // Мир, Москва , (1975).

[2] В. Новацкий, *Динамические задачи термоупругости.* //Мир, Москва , (1970).

[3] А. Алексеева, А. Дадаева, Н. Айнакеева, *Фундаментальные решения уравнений динамики термоупругих стержней* //Вестник ЕНУ им. Л. Гумилева **2**:123, 56–65 (2018).

[4] В. Владимиров, *Уравнение математической физики* // Москва, Наука ,(1981).

[5] В. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике* // Москва, Наука, (1979).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Разрешимость обратной задачи уравнения соболевского типа

Серик АЙТЖАНОВ[1,2], Гузел АШУРОВА[1]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Aitzhanov.Serik81@gmail.com

Исследуется обратная задача определения правой части квазилинейного уравнения соболевского типа с интегральным условием переопределения. Методом Галеркина доказаны существование локального по времени решений обратной задачи и единственность решения. Получены достаточные условия разрушения (взрыва) локального решения за конечное время в ограниченной области с однородным условием Дирихле на ее границе. Исследовано асимптотическое поведение решений обратной задачи при больших значениях времени T.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05132041

В настоящей работе неизвестным параметром является коэффициент правой части, зависящий от временной переменной. Подобные задачи изучались в работах [1]-[9], но не для нелинейного уравнения соболевского типа. В частности, разрешимость обратных задач с локальными и нелокальными условиями переопределения для уравнений соболевского типа была исследована во многих работах [7]-[15] и в ряде других. Следует отметить что в работах [16]-[18] рассмотрен широкий класс прямых задач для нелинейных уравнений соболевского типа.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $R^N,\ N \geq 1$ с достаточно гладкой границей Γ, Q_T -цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$. Пусть $b(x,t)$, $h(x)$, $u_0(x)$, $\varphi(t)$ заданные функции а χ, β положительные константы. Рассмотрим в цилиндре Q_T обратную задачу определении неизвестной правой части $f(t)$ уравнения соболевского типа

$$u_t - \chi\Delta u_t - \Delta u = b(x,t)|u|^{\beta-2}u + f(t)h(x), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

$$\int_\Omega u(x,t) \cdot h(x)dx = \varphi(t). \tag{4}$$

Список литературы

[1] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, М.: Наука, 1984.

[2] С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.

[3] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, Springer: New-York-Berlin-Heidelberg, 1998.

[4] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker: Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. -2000. -Vol. 231.

[5] Yu. Ya. Belov, *Inverse problems for partial differential equations*, The Netherlands VSP, 2002.

[6] A. Favini, A. Lorenzi, *Differential equations. Inverse and direct problems*, Tylor and Francis Group, LLC, 2006.

[7] A. I.Kozhanov, *Composite type equations and inverse problems*, The Netherlands: VSP, 1999.

[8] Antontsev S.N., Aitzhanov S.E., *Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition* // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2019, Vol.60, No.2, pp.265-277.

[9] Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. *Behavior of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation* // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2019. Vol. 16, pp.1366-1382.

[10] A.Asanov, E. R. Atamanov, *Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations*, De Gruyter, Berlin, 2014.

[11] A.Sh.Lyubanova, A.Tani, *An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity* // Appl. Anal, 90(2011), pp.1557-1571.

[12] S.G.Pyatkov, S.N.Shergin, *On some mathematical models of filtration theory* // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. -2015. -T.8, No.2. -C.105-116.

[13] U.U.Abylkairov, K.Khompysh, *An inverse problem of identifying the coefficient in kelvin-voight equations* // Applied Mathematical Sciences. -2015. Vol.9, No.101-104. P. 5079-5088.

[14] M.Yaman, *Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation* // Journal of Inequalities and Applications. -2012. Vol.2012. No.274. -P.1-8.

[15] А.И.Кожанов, Г.В.Намсараева, *Линейные обратные задачи для одного класса соболевского типа* // Челяб. физ.-матем. журн. -2018. Т.3, No.2. -С.153-171.

[16] A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 15. Walter de Gruyter Co., Berlin, 2011.

[17] S.N. Antontsev, H.B.de Oliveira, Kh. Khompysh, *Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids* // Communications in Mathematical Sciences,2019,Vol.17, No.7, pp.1915-1948.

[18] S.N. Antontsev, H.B.de Oliveira, Kh. Khompysh, *Kelvin-Voigt equations with anisotropic diffusion, relaxation, and damping: blow-up and large time behavior* // Asymptotic Analysis, 2020.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Разрешимость начально-краевой задачи уравнения псевдопараболического типа

Серик АЙТЖАНОВ[1,2], Газиза ЖУМАГУЛ[3]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[3]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан

Aitzhanov.Serik81@gmail.com

В работе исследуется начально-краевая задача для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа с нелинейным граничным условием Неймана-Дирихле. С физической точки зрения рассматриваемая нами начально-краевая задача, является математическим моделью квазистационарных процессов в полупроводниках и магнетиках при учете самых разнообразных физических факторов. Методом Галеркина доказывается существование слабого решения псевдопараболического уравнения в ограниченной области. Использование Галеркинских приближений позволяет получить оценку сверху времени существования решения. Использование теорем вложения Соболева, получены априорные оценки решения. Единственность слабого обобщенного решения начально-краевой задачи квазилинейной уравнений псевдопараболического типа доказывается на основе априорных оценок. Особое место в теории нелинейных уравнений занимает круг исследований неограниченных решений, или, как их по-другому называют, режимов с обострением. Нелинейные эволюционные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально неразрешимыми: решения неограниченно возрастают в течение конечного промежутка времени. Получены достаточные условия разрушения его решения за конечное время в ограниченной области с нелинейным граничным условием Неймана-Дирихле.

Первым строгим математическим исследованием задач для уравнений, не являющихся уравнениями типа Коши-Ковалевской, является пионерская работа С.Л.Соболева [1]. Эта же работа пробудила большой интерес к исследованию неклассических уравнений, названных уравнениями соболевского типа. Исследование задач для псевдопараболического типа началось в конце

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05132041

1970-х годах. Изучению нелинейных уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ [2]-[16].

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t) :\ x \in \Omega,\ t \in (0,T)\}$ начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \chi\Delta u) - (a_0 + a_1\|u\|_{2,\Omega}^{2q-2})\Delta u = b(x,t)|u|^{p-2}u + f(x,t), \tag{1}$$

с нелинейным граничным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + K(x,t)|u|^{\sigma-2}u\right|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3}$$

Здесь $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, p, q и σ положительные константы.

Список литературы

[1] S. L. Sobolev, *On a new problem of mathematical physics* // Izv. AN SSSR. Ser.matem. **18**, 3–50 (1954) (in Russian).

[2] G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, I. N. Konina, *On the basic concepts of filtration theory in fractured media* // Prikl. matem. i mekh. **24**(5), 58–73 (1960) (in Russian).

[3] T. W. Ting, *Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations* // J. Math. Soc. Japan. **14**, 1–26 (1969).

[4] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems* // Pliilos. Trans. Roy. Soc. London A. **272**(1220), 47–78 (1972).

[5] R. E. Showalter, T. .W. Ting, *Pseudoparabolic partial differential equations* // SIAM J. Math. Anal. **1**(1), 1–26 (1970).

[6] R. E. Showalter, *Existence and representation theorems for a semilinearSobolev equation in Banach space* // SIAM J. Math. Anal. **3**(3), 527–543 (1972).

[7] U. Stefanelli, *On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations* // Differ. Integr.Equations. **15**(8), 897–922 (2002).

[8] G. A. Sviridyuk, *Variety of solutions of a singular pseudo-parabolic equation* // Dokl. AN SSSR. **289**(6), 1315–1318 (1986) (in Russian).

[9] S. I. Pokhozhaev, *On a class of quasilinear hyperbolic equations* // Matem. sb. **25**(1), 145–158 (1975) (in Russian).

[10] A. P. Oskolkov, *Initial-boundary value problem for the equations of fluid motion of Kelvin-Voight fluids and Oldroit* // Trudy matem. instituta V. A. Steklova. **179**, 126–164 (1988) (in Russian).

[11] M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov *Three-Dimensional nonlinear evolution equations of pseudo-parabolic type in problems of mathematical physics* // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. **43**(12), 1835–1869 (2003) (in Russian).

[12] M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov *On the solvability of a strongly nonlinear pseudo-parabolic equation with double nonlinearity* // J. Comp. Math. and Math. Phys. **43**(7), 944–962 (2003) (in Russian).

[13] A. A. Samarsky, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Modes with aggravation in problems for quasi-linear parabolic equations* (Nauka, Moscow, 1987) (in Russian).

[14] P. A. Makarov, *On a Certain Nonlinear Nonlocal SobolevType Wave Equation* // Mat. Zametki. **92**(4), 567–582 (2012).

[15] A. I. Aristov, *On a Certain Nonlinear Nonlocal SobolevType Wave Equation* // Mat. Zametki. **100**(5), 656–671 (2016).

[16] M. Meyvaci, *Bounds for Blow-up Time in Nonlinear Pseudo-parabolic Equations* // Mediterr. J. Math. **15**(8), 964–968 (2018). https://doi.org/10.1007/s00009-017-1050-3

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБРАТНЫЕ И ПОЛУОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Л.А. АЛЕКСЕЕВА, М.М. АХМЕТЖАНОВА

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

alexeeva@math.kz, mariella60@mail.ru

Термодинамика стержневых конструкций относится к числу весьма актуальных научно-технических проблем, тесно связанных с запросами машиностроения и строительства разнообразных наземных и подземных сооружений. При математическом моделировании термодинамических процессов в стержнях возникают различные краевые задачи для системы дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа, в которых тепловые поля связаны с упругими деформациями и наоборот. При этом возникают задачи, когда на разных концах стержня известными являются различные характеристики процесса, необходимые для определения его термонапряженного состояния (перемещения, деформации, напряжения, температура, тепловые потоки). Краевые задачи при однотипном симметричном виде краевых условий на концах стержня называют прямыми. В случае же, когда краевые условия разные, но число их одинаково, имеем класс полуобратных задач.

Часто при решении практических задач известны на одном конце стержня все упругие и тепловые характеристики (их можно измерить), а на другом конце ни одна неизвестна, либо известна лишь одна из них, и нужно определить термонапряженное состояние стержня. Такие краевые задачи называют обратными.

В частности, здесь рассмотрены две краевые задачи стационарных колебаний с постоянной частотой.

К р а е в а я з а д а ч а 1. Известные перемещения, напряжения, температура и тепловой поток на левом конце $x = x_1$:

$$\begin{aligned} &u\left(x_1,t\right)=w_1\exp\left(-i\omega t\right), \qquad \sigma\left(x_1,t\right)=\rho c^2 p_1\exp\left(-i\omega t\right),\\ &\theta(x_1,t)=\theta_1\exp(-i\omega t), \qquad \theta_{,x}\left(x_1,t\right)=q_1\exp(-i\omega t); \end{aligned}$$

Нужно определить эти характеристики процесса на правом конце стержня $x = x_2$:

К р а е в а я з а д а ч а 2. Известные перемещения, напряжения, температура и тепловой поток на левом конце $x = x_1$:

$$u\left(x_1,t\right)=w_1\exp\left(-i\omega t\right), \quad \theta(x_1,t)=\theta_1\exp(-i\omega t), \quad \sigma\left(x_1,t\right)=\rho c^2 p_1\exp\left(-i\omega t\right),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05132272

Определить температуру на другом конце $x = x_2$: $\theta(x_2, t)$

Для решения этих задач использовалась пространственно одномерная модель связанной термоупругости [1,2], для которой для стержневых конструкций в работе [3] построена система линейных алгебраических уравнений, связывающая граничные значения перемещений и температуры и их производных на концах стержня. В работе [4] решен ряд прямых краевых задач. Здесь, с использованием этой системы, построена разрешающая система для поставленных обратных краевых задач. Проведена компьютерная реализация в системе MathCad-14 при низко- и высокочастотных колебаниях. Расчеты показали высокую точность вычислений. Поскольку любые периодические колебания, столь распространенные на практике, можно разложить в ряды Фурье, и расчеты по каждой гармонике ряда проводить по разработанному алгоритму, эта методика расчета может использоваться для многих инженерных задач. Разработанные компьютерные программы расчета температур, перемещений, деформаций и напряжений внутри стержня позволяют оценить прочностные свойства стержневых конструкций, работающих на продольные расширения и сжатия, допустимый диапазон частот колебаний напряжений и температур и внешних силовых воздействий.

Список литературы

[1] В. Новацкий, *Теория упругости* . - М.: "Мир 1975, - 872 с.

[2] В. Новацкий, *Динамические задачи термоупругости.* - М: "Мир".- 1970, - 256 с.

[3] Л. А. Алексеева, *Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней* // Известия НАН РК. Серия физико-математическая, 3 (2014), 144-152.

[4] Л. А. Алексеева, М. М. Ахметжанова , *Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней.2. Стационарные краевые задачи* // Математический журнал, 3:15 (2015), 5 - 20.

— ⁂ —

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ДЕЙСТВИИ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

Л.А. АЛЕКСЕЕВА, Г.К. ЗАКИРЬЯНОВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

alexeeva@math.kz, gulmzak@mail.ru

Среди задач динамики сплошных сред особый класс составляют транспортные задачи, связанные с движущимися нагрузками, форма которых не меняется с течением времени. При этом скорость их движения существенно влияет на тип дифференциальных уравнений, параметрически зависящих от отношения скорости движения нагрузки к скоростям распространения возмущений в среде, которых может быть несколько. Среди транспортных нагрузок особое место занимают стационарные, которые движутся с постоянной скоростью в фиксированном направлении. Этот класс задач дает возможность исследовать дифракционные процессы в упругой среде в аналитическом виде в дозвуковом, трансзвуковом и сверхзвуковом случае. Он очень важен для изучения влияния движущегося транспорта на подстилающую поверхность в окрестности

Работа поддержана грантом AP05132272 КН МОН РК.

движущегося транспорта, а также генерируемого им сейсмического воздействия на расположенные вблизи него наземные сооружения. В работе на основе обобщенного прямого и обратного преобразования Фурье и теории дифференциальных уравнений построены фундаментальные и регулярные решения транспортной краевой задачи для анизотропного упругого полупространства при движении по его поверхности транспортной нагрузки. Рассмотрен дозвуковой случай, когда скорость движения меньше скорости распространения упругих волн. Построен тензор Грина стационарной краевой задачи и на его основе решение краевой задачи для широкого класса распределенныхи транспортных нагрузок.

Постановка задачи

Рассмотрим анизотропную упругую среду, занимающую полупространство $x_1 > 0$, обозначим через $n(x) = (-1, 0, 0)$ - единичный вектор внешней нормали к его границе $D = \{x \in R^3 : x_1 = 0\}$. Граничные транспортные нагрузки $P(x,t)$ движутся с постоянной скоростью c вдоль оси x_3 противоположно ее направлению: $P(x,t) = \rho c^2 p_k(x_2, x_3 + ct)e_k$. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с перемещениями законом Гука [1]:

$$\sigma_{ij}(x,t) = C_{ij}^{ml} u_{m,l}(x,t) \tag{1}$$

Здесь и всюду далее по одноименным индексам производятся тензорные свертки. Частные производные по соответствующей координате обозначаются индексом после запятой: $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, δ_{ij} - символ Кронекера, $t \in (-\infty, \infty)$. Рассматривается установившееся движение, что позволяет перейти в подвижную систему координат, связанную с транспортной нагрузкой. Обозначим новую подвижную систему координат через $x^{'} = (x_1, x_2, z)$, где $z = x_3 + ct$. Предполагается, что компоненты транспортной нагрузки допускают преобразование Фурье.

Уравнения движения для перемещений упругого полупространства в подвижной системе координат описываются системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$L_{ij}(\partial x_1, \partial x_2, \partial z) u_j(x_1, x_2, z) = 0 \tag{2}$$

$$L_{ij}(\partial x_1, \partial x_2, \partial z) = C_{ij}^{ml} \partial x_m, \partial x_l - \delta_{ij} \rho c^2 \partial x_3$$

В анизотропной упругой среде скорость распространения упругих волн зависит от направления фронта волны [2]. Обозначим через c_* минимальную из них. Возможны разные случаи движения транспортной нагрузки, в частности: дозвуковой $c < c_*$ и сверхзвуковой $c > c_*$. Здесь рассмотрим дозвуковой случай, характерный для транспортных задач. Требуется найти решение задачи, удовлетворяющее условию затухания на бесконечности: $u \to 0$, при $x_1 \to +\infty$ либо $z \to \pm\infty$ и условиям излучения, зависящим от скорости.

Тензор Грина краевой задачи Для решения поставленной задачи построим тензор Грина $\Pi(x,z)$ краевой задачи в подвижной системе координат, связанной с транспортной нагрузкой. Для его определения имеем следующую краевую задачу.

Найти тензорное решение уравнений (2):

$$C_{ij}^{ml} \Pi_{m,lj}^{k} - \rho c^2 \Pi_{i,zz}^{k} = 0$$

в области $x_1 > 0$, которое должно удовлетворять условию затухания на бесконечности $\Pi_j^i(x_1, x_2, z) \to 0$ при $\|(x_1, x_2, z)\| \to 0$. Порождаемый им тензор напряжений вычисляется на основе закона Гука (1):

$$\Sigma_{jk}^{m}(x_1, x_2, z) = C_{jk}^{il} \Pi_{i,l}^{m} = S_{jk}^{i}(\partial x_1, \partial x_2, \partial z) \Pi_i^m(x_1, x_2, z)$$

Здесь введен тензорный оператор $S_{jk}^{i}(\partial x_1, \partial x_2, \partial z) = C_{jk}^{il} \partial_l$. Тензор напряжений должен удовлетворять следующим сингулярным условиям на свободной поверхности $x_1 = 0$:

$$\Sigma_{j1}^{m} = S_{jk}^{i}(\partial x_1, \partial x_2, \partial z) \Pi_i^m(x_1, x_2, z) = \delta_j^m \delta(x_2), \delta(z),$$

где $\delta(x_j)$ - обобщенная сингулярная функция Дирака. Верна следующая теорема.

Теорема.

Тензор Грина $\Pi(x,z)$ дозвуковой транспортной краевой задачи для анизотропного упругого полупространства имеет следующее интегральное представление:

$$\Pi_i^m(x_1,x_2,z) = (2\pi)^{-2}\int\limits_{R^2}\sum_{j=1}^{3} d_i^m(\eta,\zeta)\frac{\triangle_j(\eta,\zeta,m)}{\triangle(\eta,\zeta,m)}\exp(-i\eta x_2 - i\zeta z)d\zeta d\eta$$

При $c < c_R$ все подынтегральные функции непрерывны и при $x_1 > 0$ экспоненциально стремятся к нулю по (η,ζ) на бесконечности. Поэтому интегралы существуют и удовлетворяют условиям затухания на бесконечности. Для вычисления напряжений используем тензор фундаментальных напряжений Σ_{jk}^m, порождаемый тензором Грина для упругого полупространства:

$$\Sigma_{jk}^m = C_{jk}^{ln}\Pi_{l,n}^m$$

и его неполную трансформанту Фурье:

$$\Sigma_{jk}^m(x_1,x_2,z) = (2\pi)^{-2}\int\limits_{R^2}\overline{\Sigma}_{jk}^m(x_1,\eta,\zeta)\exp(-i(\eta x_2 + \zeta z))d\zeta d\eta$$

который описывает напряжения в упругом полупространстве при движении сосредоточенной силы в направлении оси z, направленной вдоль оси x_m.

На основе полученного тензора Грина краевой задачи для упругого полупространства, описывающего движение сосредоточенной на оси нагрузки, движущейся по поверхности полупространства построено решение краевой задачи для распределенных по поверхности транспортных нагрузок. Представленное решение позволяет исследовать динамику упругого массива при движении по его поверхности транспорта различного назначения.

Список литературы

[1] В. Новацкий, *Теория упругости.* М: "Мир", 1970.

[2] Г.И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* М: "Наука", 1980.

— ⁂ —

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТА ТОЛСТОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ КОРРОЗИОННО-СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.М. АЛИМЖАНОВ, К.Ж. ШЕТИЕВА

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Aivarmr@rambler.ru, karlygash.shetiyeva@gmail.com

В инженерной практике при расчетах рассматриваются, как правило, упруго деформируемые элементы трубопроводов. Вместе с тем, с ростом внешних нагрузок материал толстостенного элемента переходит в упругопластическое состояние. Большинство трубопроводов эксплуатируются при длительном действии повышенных нагрузок с агрессивными рабочими средами. Коррозионное воздействие агрессивной перекачиваемой среды приводит к повреждению материала. Происходит разупрочнение элемента, приводящее к существенному снижению его прочности и несущей способности, преждевременному выходу трубопровода из строя.

В настоящей работе исследуется напряженное состояние, прочность и несущая способность упругопластического элемента толстостенного трубопровода в условиях силового и коррозионного воздействия, приводящего к разупрочнению материала в пластической зоне.

Под действием внешних нагрузок материал элемента находится в упругопластическом состоянии. Коррозионное воздействие агрессивной рабочей среды совместно с повышенными статическими напряжениями приводит к появлению в пластической зоне элемента множества дефектов и микротрещин, в результате чего постепенно снижается предел пластичности материала. В работе снижение прочностных свойств материала в процессе нагружения вследствие накопления повреждений и дефектов учитывается через специальную функцию разупрочнения (пластической неоднородности) $K_* = K_*(r, r_0, \theta, \delta)$ в используемом условии пластичности Треска-Сен-Венана. Здесь K_* – коэффициент сцепления материала; r, θ – полярные координаты; r_0, δ – осесимметричный и неосесимметричный параметры нагружения. При этом сама пластическая неоднородность меняется в зависимости от заданных граничных условий и постановки задачи [1].

В осесимметричном состоянии толстостенного элемента функция разупрочнения в пластической зоне K_*^0 зависит от текущего радиуса r и упругопластического радиуса r_0 : $K_*^0(r, r_0) = K_*(r, r_0) = (K_0 - K_1)\overline{f}(r, r_0) + K_1$. Здесь K_0 и K_1 – значение прочности материала на внутреннем контуре элемента a_0 и на граничном радиусе r_0, $\overline{f}(r, r_0)$ – некоторое ядро со свойствами $\overline{f}(a_0, 1) = 1$, $\overline{f}(r_0, r_0) = 0$. В качестве ядра $\overline{f}(r, r_0)$ можно принять ядро [2], хорошо описывающее разупрочнение материала в процессе нагружения. Оно имеет вид (n – параметр нелинейности, a_0 – внутренний радиус) $\overline{f}(r, r_0) = \dfrac{a_0^n(r_0^n - r^n)}{r^n(1 - a_0^n)}$.

Рассмотрены осесимметричная (равномерное внешнее давление) и неосесимметричная (неравномерное по контуру наружное давление) упругопластические задачи в постановке плоской деформации. Задачи решены методом совместного использования статических и физических уравнений для рассматриваемого упругопластического материала. В неосесимметричной задаче применен метод возмущений в теории упругопластического тела [3].

Дана оценка прочности и несущей способности толстостенного элемента при коррозионно-силовом воздействии. Изучены зависимости $\Delta P = \Delta P(r_0)$ между величиной равномерного давления $\Delta P = P_0 - P$ и радиусом пластической зоны r_0 при различных параметрах a_0, n, $\gamma = K_0/K_1$. Все эти зависимости имеют точки максимума с абсциссой $r_0 = r_0 \leq 1$ внутри стенки трубы, характеризующие момент потери ее несущей способности. Соответствующие точке максимума давление ΔP_* и радиус r_* являются предельными для разрушения толстостенного элемента. Полученные результаты могут служить объяснением явления преждевременного разрушения коррозионно поврежденных элементов конструкций.

Зависимость между внешними нагрузками P, P_0 и радиусом r_0 обозначим как $g(P, P_0, r_0) = 0$. Тогда существование точки максимума на интервале $a_0 < r_0 < 1$ выражается в виде дополнительного уравнения $\partial g(P, P_0, r_0)/\partial r_0 = 0$. Несущая способность элемента в осесимметричном случае определяется из двух уравнений $g = 0$, $\partial g/\partial r_0 = 0$: сначала находим критический радиус r_*, а затем критические нагрузки, при которых элемент разрушается.

В неосесимметричном случае уравнение границы пластической зоны r_s принимает вид $r_s = r_0(1 + \delta\varphi(r_0)\cos 2\theta)$. Здесь $\varphi(r_0)$ – аналитическое выражение, полученное при решении задачи. Несущая способность элемента в неосесимметричном случае может быть определена из уравнений $r_* = r_0(1 + \delta\varphi(r_0))$ и $g = 0$. Находим сначала радиус r_*, а затем критические нагрузки, при которых пластическая зона достигнет некоторых "критических" точек элемента. Эти точки находятся внутри элемента на контуре r_* в направлениях минимального наружного давления $P_{\min}$. В работе показано, что разупрочненная (неоднородная) пластическая зона имеет большие размеры, чем однородная пластическая зона. При этом разупрочнение материала зависит не только от размеров пластической зоны, но и от ориентации ее границы.

Список литературы

[1] А.М. Алимжанов, *Плоская упругопластическая задача для неоднородного тела с отверстием* // Изв.РАН. МТТ. **2**, 119–138 (1998).

[2] М.Т. Алимжанов *О накоплении повреждений и несущей способности элементов толстостенных конструкций* // Проблемы машиностроения и автоматизации. Междунар.журн. **1**, 58–64 (1992).

[3] Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов, *Метод возмущений в теории упругопластического тела.* М.: Наука, 1978. 208 с.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ m-ПАР КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Каден БАПАЕВ[1,a], Сая СЛАМЖАНОВА[2,b]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[2]Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан

[a]*v_gulmira@mail.ru*, [b]*beksultan.82@mail.ru*

В работе изучается задача об устойчивости отображения Пуанкаре, независящего от параметров, в предположении, что матрица линейного приближения имеет m-пар различных комплексно-сопряженных мультипликаторов, которые лежат на единичной окружности.

При этом предполагается, что в отображении отсутствует внутренний резонанс.

Исследование устойчивости автономных отображений Пуанкаре. В этом случае отображение описывается следующей разностно-динамической системой

$$x_{n+1} = Ax_n + f(x_n), \;\; n \in Z_t. \tag{1}$$

Здесь $x_n \in R^l$, A – квадратная матрица размерности $l \times l$, $f(x_n)$ – аналитическая вектор-функция вида

$$f(x_n) = \sum_{|k|=2}^{\infty} f^{(k)}(x_n), \quad f^{(k)}(x_n) = \sum_{|k|} f^{(k)}(x_n),$$

где $f^{(k)}(x_n) = \sum f_k x_n^k$ – форма k-го порядка. Изучается устойчивость (1) в критическом случае, когда матрица A имеет m-пар $(2m = l)$ комплексно-сопряженных собственных чисел вида

$$\lambda_k = e^{i\varphi_k}, \;\; \overline{\lambda}_k = e^{-i\varphi_k}.$$

Нормальная форма отображения Пуанкаре (1). Не нарушая общности, можно считать, что в системе (1) $x_n \in R^m$. Предполагается, что в отображении отсутствует внутренний резонанс, т.е. выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \varphi_j \neq 0 \,(mod 2\pi) \text{ при } \sum_{j=1}^{m} |k_j| \neq 0 \;\; k_j \in Z. \tag{2}$$

Авторы были поддержаны грантом AP05131369 КН МОН РК

Требуется преобразование отображения (1) к специальной нормальной форме, имеющей простую структуру для разностно-динамической системы, предложенный в работах [1-5]. Для непрерывных автономных систем подобные преобразования применялись многими авторами, обзор работ которых содержится в работе А. Брюно [6].

Теорема 1.

Пусть выполняется предположение (2). Тогда отображение Пуанкаре с помощью аналитического преобразования может быть приведена к нормальной форме.

Теорема 2.

Если отображение (1) аналитическим преобразованием приводится к линейному, то преобразование сходится в некотором круге в окрестности нуля.

Теорема 3.

Если среди коэффициентов в нормальной форме низшего порядка отображения есть хотя бы один положительный, то нулевое решение отображения Пуанкаре неустойчива.

Список литературы

[1] К. Бапаев, *Нормализация систем нелинейных разностных уравнений* // Препринт №1, КазГУ, НГУ, Алматы, Новосибирск, 1995.

[2] К. Бапаев, *Нормализация систем нелинейных разностных уравнений* // Препринт №2, КазГУ, НГУ, Алматы, Новосибирск, 1995.

[3] К. Бапаев, *Нормализация систем нелинейных разностных уравнений* // Препринт №3, КазГУ, НГУ, Алматы, Новосибирск, 1995.

[4] К. Бапаев, *Устойчивость дискретных систем в критическом случае* // Доклады РАН, **349**:4, 60–67 (1996).

[5] К. Бапаев, Г. Василина, С. Сламжанова, Б. Толеуова, *О сильной устойчивости РДС в критическом случае при параметрических возмущениях и бифуркациях* //Вестник АУЭС, **2**:45, 94–102 (2019).

[6] А. Брюно, *Аналитическая форма дифференциальных уравнений* //Труды Московского математического общества, **25**, 119–262 (1971); **26**, 199–239 (1972).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ФУНКЦИЙ СРАВНЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ДВИЖЕНИЯ

Гулмира ВАСИЛИНА[1,2,a], Марат ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,3,b]

[1] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[2] Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан
[3] КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[a]*v_gulmira@mail.ru*, [b]*marat207@mail.ru*

По заданной программе движения

$$\Lambda(t) : \lambda(y, t) = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in R^k$, $y \in R^n$, $k \leq n$, требуется построить множество стохастических уравнений движения материальной системы

$$\dot{y} = Y(y, t) + \sigma(y, t)\dot{\xi}, \;\; \xi \in R^k, \tag{2}$$

в классе уравнений, допускающих для заданных начальных условий $y|_{t=t_0} = \varphi(t_0)$ существование и единственность до стохастической эквивалентности решения уравнения (2) и множество s-мерных вектор-функций $Q(y, t)$, по отношению к составляющим которых имеется устойчивость по вероятности множества (1).

Здесь $\xi(t) = \omega(t) + \int_{R^n} c(y)P(t, dy)$ – случайный процесс с независимыми приращениями, где $\omega(t)$ – винеровский процесс, $P(t, A)$ – пуассоновский процесс как функция t и пуассоновская стохастическая мера как функция множества A, а $c(y)$ – векторная функция, отображающая R^n в пространство значений процесса $\xi(t)$ при каждом t.

Приведенная постановка является обобщением задачи, рассмотренной ранее в классе обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [1,2].

Предположим, что в окрестности $\Lambda_h(t) \in R^n$

$$\Lambda_h(t) : \|\lambda(y, t)\| \leq h, \;\; t \geq t_0, \tag{3}$$

$rang \left\{ \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} \right\} = k$ при всех $y \in \Lambda_h$, $t \geq t_0$.

Множество уравнений возмущчнного движения, для которых заданная программа (1) является одной из возможных, может быть представлено в виде

$$\dot{\lambda} = A(\lambda; y, t) + B(\lambda; y, t)\dot{\xi}, \tag{4}$$

где $A(\lambda; y, t)$ – вектор-функция, $B(\lambda; y, t)$ – $n \times k$-матрица типа Еругина, удовлетворяющие условию $A(0; y, t) \equiv 0$, $B(0; y, t) \equiv 0$.

Рассмотрим непрерывные s-мерные вектор-функции $Q(\lambda, t)$ удовлетворяющие условию

$$\|x\| \leq \beta(\|\lambda\|), \;\; \beta \in K, \tag{5}$$

где $x = Q(\lambda(y, t)) - Q(0, t)$, $1 \leq s \leq n$.

Приведем следующие определения:

Определение 1. [3]

Функция $a(r)$ называется функцией класса Хана ($a \in K$), если она непрерывна, строго возрастающая и удовлетворяет условию $a(0) = 0$.

Авторы были поддержаны грантом AP05131369 КН МОН РК

Определение 2. [4]

Программное многообразие Λ *(1) уравнения (2) называется* ρ*-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\rho(\varphi(t_0),\Lambda(t_0))\to 0} P_{x_0}\{\sup_{t>0}\rho(y^{\varphi(t_0),t_0}(t),\Lambda(t))>\varepsilon\}=0.$$

Имеет место

Теорема 1.

Если в окрестности (3) интегрального многообразия (1) существует функция Ляпунова $V(\lambda;y,t)$ *со свойствами*

$$a(\|\lambda\|)\le V(\lambda;y,t)\le b(\|\lambda\|),\ \ a,b\in K,$$

$$LV\le -c(\|\lambda\|),\ \ c\in K,$$

то имеет место асимптотическая устойчивость по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$ *относительно произвольной непрерывной по* λ *и* t s*-мерной вектор-функции* $Q(\lambda,t)$ *удовлетворяющей условию (5),* $1\le s\le n$.

Здесь L – производящий оператор процесса $\xi(t)$.

Рассмотрим множество n-мерных вектор-функций вида $Q(t)=C(t)\lambda$.

Пусть уравнение возмущчнного движения (4) в первом приближении имеет вид

$$\dot\lambda=A_1(t)\lambda+A_2(\lambda,t)+B\dot\xi.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(\lambda)=(\lambda,\lambda)$ и n-мерную вектор-функцию $Q(y,t)=C(t)\lambda$, где $\lambda\equiv y-\varphi(t)$, так что $x=Q(y)-Q(\varphi(t))$ в этом частном случае имеет вид

$$x=C(t)\lambda.$$

Предположим также, что

1) матрица $A_1^T(t)+A_1(t)$ – определчнно отрицательна, вектор-функция A_2 удовлетворяет условию $||A_2||=o(||\lambda||)$;

2) матрица $C(t)=\left.\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right|_{y=\varphi(t)}$ непрерывна, ограничена при всех $t\ge t_0$.

Тогда из свойств 1), 2) и теоремы 2 из [5] вытекает

Теорема 2.

Если непрерывные матрицы $A_1(t)$ *и* $C(t)$ *такие, что выполняются условия 1) и 2), то имеет место устойчивость по вероятности движения* $\lambda\equiv y-\varphi(t)=0$ *(1) системы (4) относительно произвольных вектор-функций* $Q(y,t)=C(t)\lambda$.

Список литературы

[1] А. Галиуллин, *Обратные задачи динамики.* Наука, Москва, 1981.

[2] М. Тлеубергенов, *О построении множества функций сравнения программного движения , в:* // Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики, УДН, Москва, 1983.

[3] W. Hahn, *Stability of motion.* Berlin, 1967.

[4] Р. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.* Москва, 1969.

[5] G. Vassilina, M. Tleubergenov, *On construction of the comparison function of program motion in probable statement* // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, **3**:95, 60–67 (2019).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КИСЛОТНОЙ ОБРАБОТКИ ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЫ ПОРОУПРУГОГО ПЛАСТА

Олег ГАЛЬЦЕВ[1,a], Решат ЗИМИН[2,b], Денис ШКУРОПАТ[3,c], Владимир СЕЛЬДЕМИРОВ[4,d]

[1,3,4]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия
[2]Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

[a]galtsev_o@bsu.edu.ru, [b]reshat85@mail.ru, [c]shkuropat@bsu.edu.ru, [d]utherfjord@gmail.com

На сегодняшний день для повышения фильтрационных характеристик призабойной зоны пласта с целью увеличения производительности добывающих и приемистости нагнетательных скважин существует довольно много способов обработки грунта: кислотная обработка, гидропескоструйная перфорация, виброобработка, термообработка, гидравлический разрыв пласта [1]. Наиболее часто используется первый способ растворения пород смесями на основе соляной кислоты (выщелачивание). Такой процесс сопровождается термической реакцией, способствующей ускорению изменения геометрии пористой среды [2].

Известные математические модели выщелачивания твердых материалов описывают процесс только на макроскопическом уровне (Darcy-scale). Каждая точка твердого скелета и жидкости в порах представлена как сплошная среда [3, 4, 5]. Мы будем использовать подход, описанный в работах [6] и [7], где предлагается выводить уравнения пороупругости на основе законов механики сплошных сред и методов усреднения.

Настоящая работа посвящена математическому описанию процесса выщелачивания в упругой пористой среде. Предлагается, в первую очередь, сформулировать задачу на микроскопическом уровне, опираясь на общепринятые законы механики сплошных сред [8] и известные химические законы [9, 10]. Затем, используя методы усреднения, вывести макроскопические аналоги исходных уравнений.

Согласно [7, 11, 12], различные задачи механики сильно неоднородных сред и композитных материалов приводят к необходимости построения усредненных моделей для этих сред. Требуется построить модель среды, локальные свойства которой резко меняются, и поэтому удобнее перейти от микроскопического ее описания к макроскопическому, т.е. рассматривать усредненные характеристики такой среды. Во многих случаях рассматриваемые физические процессы в сильно неоднородных средах описываются уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к дифференциальным уравнениям с резко изменяющимися коэффициентами. Непосредственное численное решение таких задач, как правило, затруднительно даже на современных ЭВМ. Поэтому возникает вопрос о построении моделей для сильно неоднородных сред, приводящих к более простым дифференциальным уравнениям, которые называются усредненными. Часто такие дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Усредненные уравнения позволяют определить с большой точностью эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения – близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений.

Для моделирования динамики кислотных примесей в порах используется уравнение Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Такое приближение вполне приемлемо, так как, движение в порах очень медленное (около 5-8 метров в год) и мы можем пренебречь конвекционными членами в уравнениях Навье-Стокса. Для моделирования перемещений упругого скелета грунта

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект є 19-71-00105).

используется уравнение Ламе. Распространение кислоты описывается уравнением диффузии-конвекции с соотвествующим граничным условием на свободной поверхности «кислота - грунт». С этой границы внутрь порового пространства возникает обратный поток, который препятствует контакту кислоты и твердого тела, а отсутствие диффузии подразумевает отсутствие химической реакции.

Ранее в работах [12, 13] были получены математические модели выщелачивания в абсолютно твердом скелете грунта. Продолжая исследования авторов, нами получены системы уравнений для пороупругого случая.

Список литературы

[1] Л.Х. Ибрагимов, И.Т. Мищенко, *Интенсификация добычи нефти.* Москва, 1996.

[2] Ю.А. Беляев, В.С. Бороздин *Разработка инновационных термохимических элементов для очистки насосно-компрессорных труб и призабойной зоны пласта* // Экспозиция нефть газ, **40**:1, 18–21 (2015).

[3] P.M. Bommer, R.S. Schechter *Mathematical modeling of in-situ uranium leaching* // Society of Petroleum Engineers Journal, **19**:6, 393–400 (1979).

[4] R.D. Schmidt, S.E. Follin, K.A. Peterson, E.V. Level *Geochemical kinetics model for in-situ leach mining* // Society of Petroleum Engineers Journal, **198**:1, 17–32 (1981).

[5] S. Molins, P. Knabner *Multiscale Approaches in Reactive Transport Modeling* // Reviews in Mineralogy and Geochemistry, **85**:1, 27–48 (2019).

[6] R. Burridge *Poroelasticity equations derived from microstructure* // Journal of the Acoustical Society of America, **70**:4, 1140–1146 (1981).

[7] E. Sanchez-Palencia *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory.* Springer, Berlin, 1980.

[8] L.E. Malvern *Introduction to Mechanics of a Continuum Medium.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.

[9] P.V. Brady *Surface-controlled dissolution and growth of minerals* // Physics and chemistry of mineral surfaces, 226–298 (1996).

[10] W.W. Kenneth, E.D. Raymond, M.P. Larry, G.G. Stanley *Chemistry.* Belmont, CA: Brooks, 2014.

[11] A. Meirmanov *Mathematical models for poroelastic flows.* Atlantis Press, Paris, 2013.

[12] A.M. Meirmanov, O.V. Galtsev, R.N. Zimin *Free Boundaries in Rock Mechanics.* Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2017.

[13] A. Meirmanov, N. Omarov, V. Tcheverda, A. Zhumaly *Mesoscopic dynamics of solid-liquid interfaces. A general mathematical model* // Вычислительная математика, **12**, 884–900 (2015).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Муратхан ДАУЫЛБАЕВ[1,a], Наурызбай АВИЛТАЙ[2,b]

[1]Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
[2]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан

[a]mdauylbayev@gmail.com, [b]avyltay.nauryzbay@mail.ru

Краевые задачи для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, обладающие явлениями начальных скачков рассмотрены в [1,2].

В работах [3,4] рассмотрены краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при двух старших производных, когда имеют место явления, так называемых, граничных скачков, т.е. когда некоторые производные решения при достаточно малых значениях параметра становятся бесконечно большими на обоих концах интервала. Но при этом на концах рассматриваемого промежутка решения данных задач имели скачки разных порядков.

В настоящей работе рассматривается интегральная краевая задача для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка, решение которой на концах данного отрезка имеет скачки одинаковых порядков. Работа посвящена установлению асимптотического поведения решения по малому параметру и построению измененной вырожденной задачи.

Рассмотрим сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t)y'' + A_1(t)y' + A_2(t)y = F(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{2} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \tag{1}$$

с интегральными краевыми условиями

$$h_1 y \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad h_2 y \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta, \quad h_3 y \equiv y'(1,\varepsilon) - \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{2} a_i(x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx = \gamma, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ малый параметр, а $\alpha, \beta, \gamma -$ известные постоянные.

Для решений задачи (1), (2) в точках $t = 0$ и $t = 1$ получаем следующий порядок роста:

$$y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \;\; y''(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \;\; \varepsilon \to 0.$$

т.е. решение рассматриваемой задачи обладает граничными скачками первого порядка.

Сингулярно возмущенной краевой задаче (1), (2) ставим в соответствие следующую модифицированную вырожденную задачу:

$$L_0\overline{y} \equiv A_1(t)\overline{y}'(t) + A_2(t)\overline{y}(t) = F(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{2} H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)dx + \Delta(t), \tag{3}$$

$$h_1\overline{y} \equiv \overline{y}(0) = \alpha, \;\; h_2\overline{y} \equiv \overline{y}'(0) = \beta + \Delta_0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05132587

$$h_3\overline{y} \equiv \overline{y}'(1) - \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{2} a_i(x)\overline{y}^{(i)}(x)dx = \gamma + a_2(0)\Delta_0 + (1 - a_2(1))\Delta_1, \tag{4}$$

где $\Delta(t)$ и Δ_0, Δ_1 называются скачками интегральных членов и решения соответственно. Для решения $y(t, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной интегральной краевой задачи (1), (2) справедливы следующие предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = \overline{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \ \ \lim_{\varepsilon \to 0} y^{(i)}(t, \varepsilon) = \overline{y}^{(i)}(t), \ \ i = 1, 2, \ \ 0 < t < 1,$$

где $\bar{y}(t)$ - решение вырожденной краевой задачи (3), (4), а скачок интегральных членов $\Delta(t)$ определяется формулой $\Delta(t) = \Delta_0 H_2(t, 0) - \Delta_1 H_2(t, 1)$.

Список литературы

[1] K.A. Kassymov, D. Nurgabyl *Asymptotic estimates of solution of a singularly perturbed boundary value problem with an initial jump for linear differential equations* //Differential Equations, **40**:5, 641-651 (2004).

[2] M.K. Dauylbayev, N. Atakhan *The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations* // Miskolc Math, **16**:2, 747-761 (2015).

[3] M.K. Dauylbayev, A.E. Mirzakulova *Boundary value problems with initial jumps for singularly perturbed integrodifferential equations* // Journal of Mathematical Sciences, **222**:3, 214-225 (2017), doi: 10.1007/s10958-017-3294-7

[4] M.K. Dauylbayev, A.E. Mirzakulova *Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations* // Journal of Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity,LH Scientific Publishing, LLC, USA, **5**:2, 147-154 (2016).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

К РЕШЕНИЮ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ДВУМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНУСЕ

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М.И. РАМАЗАНОВ, А.О. ТАНИН

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова, Караганды, Казахстан

ramamur@mail.ru

В работе исследуются вопросы разрешимости особого интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода

$$\mu\,(t) + \int_0^t K(t, \tau) \cdot \mu\,(\tau)\,d\tau = f\,(t)\,, \tag{1}$$

ядро которого имеет вид:

$$K(t, \tau) = \frac{t^2}{2a^2(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot \left[I_0 \left(\frac{t\tau}{2a^2\,(t - \tau)} \right) - I_1 \left(\frac{t\tau}{2a^2\,(t - \tau)} \right) \right] +$$

Работа выполнена при поддержке МОН РК, грант №AP05132262.

$$+ \frac{3t^2}{2a^2\tau\,(t-\tau)} \cdot e^{-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2\,(t-\tau)}\right),$$

где $I_n(t)$– модифицированная функция Бесселя порядка - n. Особенностью интегрального уравнения (1) является то, что $\int_0^t K(t,\tau)d\tau = 1, \quad \forall t > 0$.

Интегральное уравнение (1) возникает при решении двумерной, по пространственным переменным, задачи теплопроводности в конусе $Q = \left\{(x,y,t)\,,\ \sqrt{x^2+y^2} < t,\ t > 0\right\}$ для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = g\,(x,y,t) \tag{2}$$

с граничным условием на поверхности конуса

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = \varphi(x,y,t), \tag{3}$$

где $\tilde{u}(t) = u(x,y,t)|_{\sqrt{x^2+y^2}=t}, \varphi(x,y,t)$– заданная функция [1].

Также, при определенных физико-технических допущениях [2, 3] граничная задача (2)-(3) моделирует температурное поле в теле плазмы электрического разряда между размыкающимися контактами высокого напряжения, находившихся первоначально в замкнутом состоянии.

Список литературы

[1] В. А. Солонников, А. Фазано, *Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами*// Записки научных семинаров ПОМИ, **269**, 322–338 (2000).

[2] К. К. Намитоков, П. Л. Пахомов, С. Н. Харин, *Математическое моделирование процессов в газоразрядной плазме* Алма-Ата: Наука, 1988.

[3] Е. И. Ким, В. Т. Омельченко, С. Н. Харин, *Математические модели тепловых процессов в электрических контактах.* Алма-Ата: Наука, 1977.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Ш.А. ДИЛЬДАБАЕВ

Институт механики и машиноведения, Алматы, Казахстан

shdilda@bk.ru

Аннотация. Приводятся теоретические основы расчета напряженно- деформированного состояния упруго- пластических тел при нестационарных динамических воздействиях в случае плоской деформации.

Постановка задачи и линеаризация уравнений. Рассматриваются уравнения динамики упруго- пластической среды, занимающей область D пространства R^2

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) + F_i(\mathbf{x},t) = \rho u_{i,tt}, \qquad \mathbf{x} \in D, \quad t > 0, \quad i,j = 1,2, \tag{1}$$

Работа поддержана грантом AP05135494 КН МОН РК.

при заданных начальных и граничных условиях

$$u_i(\mathbf{x},0)=0, \qquad u_{i,t}(\mathbf{x},0)=0, \quad \mathbf{x}\in D, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)n_j(\mathbf{x})=g_i(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in S. \tag{3}$$

Здесь σ_{ij}, u_i, F_i –компоненты тензора напряжений, вектора смещений и вектора объемных (массовых) сил соответственно, $n_i(\mathbf{x})$- компоненты вектора нормали в точке $\mathbf{x}$ границы S области D, $g_i(\mathbf{x})$–некоторые заданные функции. В дальнейшем не ограничивая общности примем, что массовые силы отсутствуют.

В общем случае действие граничных нагрузок (3) может приводить к появлению зон остаточных (пластических) деформаций. Размер зон пластических деформаций зависит от физических свойств самой среды и от величины и интенсивности приложенных нагрузок. Деформации в точках, находящихся в пластической зоне, представляется как сумма упругой и пластической частей:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)=\varepsilon^e_{ij}(\mathbf{x},t)+\varepsilon^p_{ij}(\mathbf{x},t) \tag{4}$$

В области упругих деформаций выполняется закон Гука $\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ (C_{ijkl}–упругие постоянные среды). В области пластических деформаций вместо имеют место определяющие соотношения теории пластического течения либо теории малых упруго- пластических деформаций [1]

Нахождение решения системы уравнений довольно сложная задача. В связи с этим линеаризуем нелинейную систему (1). Для этого введем тензор фиктивных упругих напряжений σ^{ee}_{ij} для которого напряжения как в области упругих деформаций так и в области пластических деформаций вычисляем по закону Гука и перепишем (1) в следующем виде

$$C_{ijkl}u_{k,l}+\sigma^0_{ij,j}(\mathbf{x},t)+F_i(\mathbf{x},t)=\rho u_{i,tt}, \qquad \mathbf{x}\in D, \quad t>0, \tag{5}$$

где σ^0_{ij}–дополнительные напряжения, которые есть разность между реальными и фиктивными упругими напряжениями, т.е. $\sigma^0_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma^{ee}_{ij}$.

Формулы Кирхгофа-Сомильяны и представления напряжений. В соответствии с теорией уравнений частных производных [2] обобщчнное решение решение системы (5) получаем сверткой с фундаментальным решением нестационарной двумерной динамики линейно-упругой среды [3]

$$u_i(\mathbf{x},t)=\int\limits_D\int\limits_0^t\left[U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)u_j(\mathbf{y},t-\tau)-T_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)p_j(\mathbf{y},t-\tau)\right]dS+$$

$$+\int\limits_D\int\limits_0^t U_{ij,k}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)F_i(\mathbf{y},t-\tau)+\sigma^0_{jk}(\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}\in D, \tag{6}$$

здесь U_{ij}, T_{ij}– ядра запаздывающих потенциалов простого и двойного слоев, и,

$$U_{ij}(\mathbf{x},t)=-U^0_{ij}(\mathbf{x})\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\left(\frac{2\sqrt{t^2-r^2/c_i^2}}{r^2}+\frac{1}{c_i^2\sqrt{t^2-r^2/c_i^2}}\right)H(t-r/c_i)+$$

$$+\left[\frac{H(t-r/c_1)}{c_1^2\sqrt{t^2-r^2/c_1^2}}+\frac{H(t-r/c_2)}{c_1^2\sqrt{t^2-r^2/c_2^2}}\right]U^1_{ij}(\mathbf{x}), \qquad r=|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \tag{7}$$

$$U^0_{ij}(\mathbf{x})=\delta_{ij}/2; \qquad U^1_{ij}(\mathbf{x})=\left(r_{,i}\,r_{,j}-\delta_{ij}/2\right); \quad r_{,i}=x_i/r, \tag{8}$$

$$T_{ij}(\mathbf{x},t)=C_{imkl}U_{jl,k}(\mathbf{x},t)n_m(\mathbf{x}), \tag{9}$$

$p_i(\mathbf{x},t)$–компоненты вектора нагрузок, $H(t)$–функция Хевисайда, c_1,c_2–скорости продольной и поперечной волы. Соотношения (6) позволяют получить значения вектора смещений $u(\mathbf{x},t)$ в произвольной точке среды в момент времени t по известным значениям вектора граничной нагрузки $p(\mathbf{x},t)$ и вектора граничных смещений $u(\mathbf{x},t)$ а также значениям тензора дополнительных напряжений в точках среды, испытывающих пластическую деформацию.

Осуществляя в (6) предельный переход на границу области получаем граничные интегральные уравнения для определения неизвестных граничных перемещений или нагрузок.

Дифференцированием (6) по пространственной координате с учетом закона Гука для $\mathbf{x} \in D$ получены следующие выражения для вычисления тензора фиктивных упругих напряжений

$$\sigma_{ij}^{ee}(\mathbf{x},t) = \int\limits_S \int\limits_0^t \left[G_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)u_k(\mathbf{y},t-\tau) - W_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)p_k(\mathbf{y},t-\tau)\right] dS +$$

$$+ \int\limits_D \int\limits_0^t V_{ijmk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\sigma_{mk}^0(\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{y}, \qquad \mathbf{x} \in D, \tag{10}$$

здесь ядра поверхностных потенциалов и объемного потенциала имеют следующий вид

$$G_{ijk}(\mathbf{x},t) = C_{ijlm}U_{lk,m}(\mathbf{x},t), \quad W_{ijk}(\mathbf{x},t) = C_{ijlm}T_{lk,m}(\mathbf{x},t), \quad V_{ijmk}(\mathbf{x},t) = C_{ijlq}U_{lk,qm}(\mathbf{x},t)$$

На основе (6), (10) разработаны вычислительные схемы, позволяющие применить шаговую процедуру для нахождения перемещений и напряжений, в которой искомые функции на некотором шаге времени вычисляются по найденным значениям на предыдущих шагах. На каждом временном шаге при превышении значений предела упругости фиктивными упругими напряжениями строится итерационный процесс для нахождения истинных напряжений с использованием закона ассоциированного пластического течения.

Список литературы

[1] Л.М.Качанов, *Основы теории пластичности.* Москва:Наука, 1969.

[2] В.С.Владимиров, *Уравнения математической физики.* Москва:Наука, 1981.

[3] W.J. Mansur, C.A. Brebbia *Transient Elastodynamics Using a Time-Stepping Techinque //* in Boundary Elements, Berlin: Springer-Verlag, 677-698 (1983).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМОВАНИЯ КЕРАМИКИ ОКСИДА БЕРИЛЛИЯ

Узак ЖАПБАСБАЕВ, Гаухар РАМАЗАНОВА

Satbayev University, Алматы, Казахстан

uzak.zh@mail.ru

Высокоплотная керамика из оксида бериллия находит широкое применение благодаря ряду ценных свойств и, прежде всего, уникальной теплопроводности. Технология шликерного литья остается основной при получении длинномерных, многоканальных, сложно фасонных керамических изделий [1]. Сущность этого метода заключается в придании шликеру оксида бериллия формы изделия. Это достигается путем заполнения формообразующей полости жидким шликером под давлением и последующей фиксацией приобретенной формы посредством изменения агрегатного состояния шликера по мере его охлаждения.

Технология шликерного литья включает в себя стадии [1] движение и теплообмен шликера в жидком состоянии; движение и теплообмен шликера с учетом кристаллизации; движение и теплообмен отливки в твердом состоянии. Поток шликера после выхода из питателя сохраняет свою конфигурацию. В опытах было установлено, что в диапазоне возможных скоростей литья режим движения шликера в литьевой форме является ламинарным [1]. Шликер поступает в литьевую форму при температуре 75-80 °C и охлаждается в ней до 40-45 °C, отливка извлекается из формы без коробления [1].

В опытах жидкий шликер оксида бериллия показывает реологию неньтоновской жидкости Шведова-Бингама [1]. Движение и теплообмен шликера в формообразующей полости считается стационарным и описывается системой уравнений:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial z} + \rho v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\tau_0\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{r^k}\frac{\partial r^k\rho v}{\partial r} = 0 \tag{2}$$

$$\rho u c_p\frac{\partial t}{\partial z} + \rho v c_p\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k\lambda\frac{\partial t}{\partial r}\right) \tag{3}$$

В уравнениях (1)-(3) приняты следующие обозначения: z, r – осевая и радиальная координаты; u, v – компоненты вектора скорости; $p, \rho, t, \tau_0, c_p, \mu, \lambda$ – давление, плотность, температура, предельное напряжение сдвига, коэффициенты кажущейся теплоемкости, вязкости и теплопроводности шликера, индексы $k = 0, 1$ – для плоской и круглой полостей.

Теплота фазового перехода определяется моделью кажущейся теплоемкости [2], а теплофизические свойства шликера выражаются эмпирическими формулами [1].

Система уравнений (1)-(3) с граничными условиями решается численным методом [3].

В докладе приводятся результаты расчетов движения и теплообмена шликера с фазовым переходом в формообразующей полости. Физико-химические свойства шликера оксида бериллия получены в экспериментах с ультразвуковой активацией. Распределения температуры и плотности показывают изменения термомеханического состояния шликера оксида бериллия из жидкой фазы в твердое при наличии зоны кристаллизации. Представлено сравнение расчетных данных с экспериментом.

Список литературы

[1] U.K. Zhapbasbayev, G.I. Ramazanova, Z.K. Sattinova, S.A. Shakhov, *Experimental and calculated data of the beryllium oxide slurry solidification* // Applied Thermal Engineering, **96**: (2016) 593–599.

[2] V.R. Voller, C.R. Swaminathan, B.G. Thomas, *Fixed grid techniques for phase change problems: a review* // International Journal of Numerical Methods in Engineering, **30**: (1990) 875–898.

[3] Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер, *Вычислительная гидромеханика и теплообмен* Москва: Мир, 1990.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УИТТЕКЕРА СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ

А.А. ИСЕНОВА, Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

tasmam@rambler.ru

Данная работа посвящена исследованию возможности построения нормально-регулярных и логарифмических решений системы, состоящей из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка Уиттекера.

Определение 1. Нормально-регулярное решение трех переменных представляется в виде следующего ряда

$$U(x_1,x_2,x_3)=expQ(x_1,x_2,x_3)\cdot x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}x_3^{\rho_3}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}A_{m_1,m_2,m_3}\cdot x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3},(A_{0,0,0}\neq 0) \tag{1}$$

где ρ_j $(j=1,2,3)$, $A_{m_1,m_2,m_3}(m_1,m_2,m_3=0,1,...)$ - неизвестные постоянные; $Q(x_1,x_2,x_3)$ - многочлен трех переменных

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{\alpha_{p00}}{p}x_1^p+\frac{\alpha_{0p0}}{p}x_2^p+\frac{\alpha_{00p}}{p}x_3^p+...+\alpha_{001}x_3 \tag{2}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p00},...,\alpha_{001}$.

Доказана теорема о существовании нормально-регулярных решений.

Теорема 1.

Система типа Уиттекера [1, с.135] состоящая из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$x_j^2U_{x_jx_j}-x_j\sum_{r\neq j}x_rU_{x_r}+\Big[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{r\neq j}x_r+kx_j+\frac{1}{4}-\mu_j^2\Big]U=0,(j=1,2,3) \tag{3}$$

имеет нормально-регулярные решения вида (1) при выполнении двух необходимых условий:

1) необходимо выполнение равенств

$$f^{(1,0,0)}=\alpha_{100}^2-\frac{1}{4}=0,f^{(0,1,0)}=\alpha_{010}^2-\frac{1}{4}=0,f^{(0,0,1)}=\alpha_{001}^2-\frac{1}{4}=0, \tag{4}$$

из которых определяются неизвестные постоянные многочлена (2).

2) необходимо, чтобы система определяющих уравнений относительно особенности (0,0):

$$f_{000}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv\rho_j(\rho_j-1)+\frac{1}{4}-\mu_j^2=0(j=1,2,3), \tag{5}$$

имела хотя бы одно решение вида $(\rho_1^{(l)},\rho_2^{(l)},\rho_3^{(l)}),(l=1,2)$. *Если все корни (4) и (5) простые, то система (3) имеет* 2^3 *решений вида (1).*

Неизвестные постоянные в решений (1) определяются из вспомогательной системы полученной из системы Уиттекера (3) с помощью преобразования

$$U(x_1,x_2,x_3)=exp(\alpha_{100}x_1+\alpha_{010}x_2+\alpha_{001}x_3)\cdot\Phi(x_1,x_2,x_3).$$

Степень многочлена (2) определяется величиной ранга

$$p=1+k,k=max\frac{\beta_i-\beta_0}{i},\ (i=\overline{1,4}).$$

Поскольку, ранг системы (3) $p = 1$ [2] , то многочлен (2) представляется в виде

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha_{100}x_1 + \alpha_{010}x_2 + \alpha_{001}x_3$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{100}, \alpha_{010}, \alpha_{001}$.

В случае кратных корней или когда они отличаются на целые числа, система (3) имеет логарифмические решения. Установим условия существования логарифмических решений.

Теорема 2.

Пусть в системе (3) разность $\frac{1}{4} - \mu_j^2 = 0 (j = 1, 2, 3)$ *и система определяющих уравнений имеет восемь троек корней:* $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ *и* $(0, 0, 0)$. *Тогда система Уиттекера имеет* 2^3 *линейно-независимых частных решений соответствующие этим корням:*

$$1.\ U_1 = x_1x_2x_3 \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty} A_{m_1,m_2,m_3} \cdot x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}, (A_{0,0,0} \neq 0),$$

$$2.\ U_2 = C_2U_1lnx_1 + f_2,$$

$$3.\ U_3 = C_3U_1lnx_2 + f_3,$$

$$4.\ U_4 = C_4U_1lnx_3 + f_4,$$

$$5.\ U_5 = C_5U_1lnx_1lnx_2 + f_2lnx_1 + f_3lnx_2 + f_5,$$

$$6.\ U_6 = C_6U_1lnx_1lnx_3 + f_2lnx_1 + f_4lnx_3 + f_6,$$

$$7.\ U_7 = C_7U_1lnx_2lnx_3 + f_3lnx_2 + f_4lnx_3 + f_7,$$

$$8.\ U_8 = C_8U_1lnx_1lnx_2lnx_3 + f_2lnx_1lnx_2 + f_3lnx_2lnx_3 + f_4lnx_3lnx_1 + f_5lnx_1 + f_6lnx_2 + f_7lnx_3 + f_8,$$

где $f_t (t = \overline{1, 8})$ *- ряды вида*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\rho_1^{(l)}} x_2^{\rho_2^{(l)}} x_3^{\rho_3^{(l)}} \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty} B^{(t)}_{m_1,m_2,m_3} \cdot x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}, (B_{0,0,0} \neq 0)$$

с показателями $(\rho_1^{(l)}, \rho_2^{(l)}, \rho_3^{(l)}), (l = 1, 2)$ *из вышеприведенных корней.*

Список литературы

[1] P. Appell, M.J. Kampe de Feriet, *Fonctions hypergeometriques et hypesperiques.* Gauthier Villars, Paris, 1926.

[2] Zh.N. Tasmambetov, A.Zh. Tasmambetova, *Construction of normal-regular decisions of one special system connected with Uitteker's system* // Reports of the third congress of the world Mathematical society of Turkic countries ,Almaty, Volume 1, 412–417 (2009).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Сырым КАСЕНОВ, Жанар АСКЕРБЕКОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

syrym.kasenov@gmail.com, askjanar@gmail.com

Рассмотрим обратную задачу для уравнения акустики в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$ где $\Delta(L_x) = \{(x,t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - \left(\frac{\rho_x}{\rho}u_x + \frac{\rho_y}{\rho}u_y\right) \qquad (x,y,t) \in \Delta(L_x) \tag{1}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \qquad y \in (0, L_y), t \in (0, 2L_x) \tag{2}$$

$$u(x,y,x) = q(x,y), \qquad x \in (0, L_x), y \in (0, L_y), \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u(x, L_y, t) = 0. \qquad (x,t) \in \Delta(L_x). \tag{4}$$

Обратная задача к задаче (1) — (4) заключается в определении функции $q(x,y)$ по дополнительной информации

$$u(0,y,t) = f(y,t). \tag{5}$$

Запишем обратную задачу в операторном виде $A(q) = f$. Для численного решения задачу $A(q) = f$ рассмотрим задачу минимизации целевого функционала

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2_{W_2^0} = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x}[u(0,y,t;q_n) - f(y,t)]^2 dydt.$$

Для минимизации функционала применяем метод итерации Ландвебера [1-2]. Вычислено градиент функционала. Построен постановка сопряженной задачи. Записан алгортим решения обратной задачи. Приведено численные результаты прямой и обратной задачи для уравнения акустики.

Список литературы

[1] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсеитова *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*- Алматы-Новосибирск: ОФ ”Международный фонд обратных задач”, 2006.

[2] S.I. Kabanikhin *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications.* De Gruyter, Germany, 2011.-459 p.

— ⁂ —

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК є AP05134121 "Численные методы идентифицируемости обратных и некорректных задач естествознания"

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Сырым КАСЕНОВ, Адил СУЛТАНГАЗИН, Гулсезим НАГИ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

syrym.kasenov@gmail.com, adil_92@mail.ru, g-nagi@mail.ru

Задачи определения параметров математической модели акустики возникают в геофизике, медицине и других областях приложения математики. К основным параметрам моделей акустики относятся скорость звука и плотность среды. Для нахождения или уточнения указанных параметров моделей используют дополнительную информацию об акустических процессах [1-2].

Алгоритм решения обратной задачи

1. Выбираем начальное приближение q_0.
2. Решаем прямую задачу
$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} - \omega_j^2 q_n(y,z)u = 0, && (y,z) \in \Omega, \\ &u_y(-b,z) = 0, u_y(b,z) = 0, && z \in [0,L], \\ &u_z(y,0) = g(y,\omega_j), u_z(y,L) = 0, && j = \overline{1,N}, y \in [-b,b]. \end{aligned}$$
3. Вычисляем функционал $J(q) = \sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_{-b}^{b} \big[u(y,0,\omega_j;q_n) - f(y,\omega_j)\big]^2 dy$;
4. Если значение функционала очень мало, то останавливаем итерации.
5. Находим решение сопряженной задачи
$$\begin{aligned} &\psi_{xx} + \psi_{yy} - \omega_j^2 q_n(y,z)\psi = 0, && (y,z) \in \Omega, \\ &\psi_y(-b,z) = 0, \psi_y(b,z) = 0, && z \in [0,L], \\ &\psi_z(y,0) = -2(u(y,0,\omega_j;q_n) - f(y,\omega_j)), \psi_z(y,L) = 0, && j = \overline{1,N}, y \in [-b,b]. \end{aligned}$$
6. Находим градиент функционала по формуле $J'q_n = \sum\limits_{j=1}^{N} \omega_j u_j \psi_j$;
7. Расчитываем приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n$.
8. переходим к шагу 2;

Список литературы

[1] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсеитова *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*- Алматы-Новосибирск: ОФ "Международный фонд обратных задач", 2006.

[2] S.I. Kabanikhin *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications.* De Gruyter, Germany, 2011.-459 p.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №AP05134121 "Численные методы идентифицируемости обратных и некорректных задач естествознания"

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФАРМАКОКИНЕТИКИ МЕТОДОМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Сырым КАСЕНОВ, Байдаулет УРМАШЕВ, Айдана АМАНТАЕВА, Лида САГИМБАЕВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

syrym.kasenov@gmail.com, baydaulet.urmashev@gmail.com, sagymbaeva.lida@gmail.com

Фармакокинетические модели широко используются в качестве средства прогнозирования распределения лекарственных средств в организме. Это можно предсказать, моделируя одновременное распределение лекарственного средства через ткани тела и клиренс [1-2]. Дифференциальные уравнения, описывающие динамику изменения количества лекарственных средств в трехкамерной линейной модели, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{dC_a}{dt} = -k_a C_a,\\
&\frac{dC_1}{dt} = k_a C_a - (k_{12}+k_{13}+k_{el})C_1 + k_{21}C_2 + k_{31}C_3,\\
&\frac{dC_2}{dt} = k_{12}C_1 - k_{21}C_2,\\
&\frac{dC_3}{dt} = k_{13}C_1 - k_{31}C_3,\\
&\frac{dC_{el}}{dt} = k_{el}C_1.
\end{aligned}$$

с начальными данными $C_a(0) = C_0, C_1(0) = C_2(0) = C_3(0) = C_{el}(0) = 0$.

Функция описывающая поведение концентрации в центральной камере:

$$C_1(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha t} + A_2 \cdot e^{-\beta t} + A_3 \cdot e^{-\gamma t} - (A_1 + A_2 + A_3) \cdot e^{-k_a t}$$

Обратная задача заключается по данным значения функции $f = (C_1(t_1), C_1(t_2), ..., C_1(t_M))$ найти семь параметра вектор $q = (A_1, A_2, A_3, \alpha, \beta, \gamma)$. Численное решение данной задачи ищем минизацией целевого функционала

$$J(q) = \sum_{j=1}^{M} \left(C_1(t_j; q) - f_j\right)^2.$$

Минимизировать целевой функционал будем методом генетического алгоритма. Получены численные результаты обратной задачи фармакокинетики для трехкамерной модели методом генетического алгоритма.

Список литературы

[1] B.A. Urmashev, A.T. Tursynbay, A.N. Temirbekov, A.B. Amantayeva *Solving the Reverse Problems of Pharmacokinetics for a Linear Two-Compartment Model with Absorption.*
The IEEE 12th International Conference Application of Information and Communication Technologies. -Almaty, Kazakhstan, 2018, 17-19 October, Pages 33-39.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №AP05132915 "Разработка и реализация облачного информационно-вычислительног комплекса для автоматизированной разработки и оптимизации моделей фармакокинетики и фармакодинамики"

[2] Т.В. Панченко *Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие/ под ред. Ю.Ю. Тарасевича.* - Астрахань: Издательский дом "Астраханский университет", 2007. - 83с.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ НАГРУЗКОЙ

Минзиля Т. КОСМАКОВА[1], Дана М. АХМАНОВА[1], Лайла Ж. КАСЫМОВА[1,2]

[1]Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, Караганды, Казахстан

[2]Карагандинский государственный технический университет, Караганды, Казахстан

svetlanamir578@gmail.com

В области $Q = \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$ рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} + \lambda \left\{ D^{\beta}_{0,x} u\left(x,t\right) \right\} \big|_{x=\gamma(t)} = f\left(x,t\right), \tag{1}$$

$$u\left(x,0\right) = 0, \quad u\left(0,t\right) = 0, \quad 0 < \beta < 1. \tag{2}$$

Здесь

$$c\, D^{\beta}_{a,\,t}\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau;\ \beta,\, a \in \Re,\ n-1 < \beta < n$$

– производная Капуто при $a = 0$, $t = x$ и $n = 1$,

Вводя обозначение

$$\mu\left(t\right) = \left\{ D^{\beta}_{0,x} u\left(x,t\right) \right\} \big|_{x=\gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)} \int_0^x \frac{u_{\xi}\left(\xi,t\right)}{\left(x-\xi\right)^{\beta}} d\xi.$$

и обращая дифференциальную часть уравнения (1)

$$u\left(x,t\right) = -\lambda \int_0^t \int_0^{+\infty} G\left(x,\xi,t-\tau\right) \mu\left(\tau\right) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} G\left(x,\xi,t-\tau\right) f\left(\xi,\tau\right) d\xi d\tau,$$

где

$$G\left(x,\xi,t\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4t} \right) - \exp\left(-\frac{\left(x+\xi\right)^2}{4t} \right) \right\},$$

задача (1) – (2) сводится к интегральному уравнению

$$\mu\left(t\right) + \lambda \int_0^t K_{\beta}\left(t,\tau\right) \mu\left(\tau\right) d\tau = f_2\left(t\right), \tag{3}$$

где

$$K_{\beta}\left(t,\tau\right) = \frac{\left(\gamma\left(t\right)\right)^{1-\beta}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(2-\beta\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{2-\beta}{2}, \frac{3-\beta}{2}; -\frac{\gamma^2\left(t\right)}{4\left(t-\tau\right)} \right), \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки РК (грант №AP05132262).

поскольку

$$D_{0,x}^{\beta}\left[\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)\,d\tau\right]|_{x=\gamma(t)} = -\frac{(\gamma(t))^{1-\beta}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2-\beta)}\cdot\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\times$$

$$\times{}_2F_2\left(\frac{1}{2},1;\frac{2-\beta}{2},\frac{3-\beta}{2};-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Здесь

$${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(a_1)_\kappa\cdot(a_2)_\kappa}{(b_1)_\kappa\cdot(b_2)_\kappa}\cdot\frac{z^\kappa}{\kappa!},$$

где

$$(a)_\kappa=\frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}$$

– символ Похгаммера. Поэтому $(1)_\kappa=\kappa!$.

Тогда в (4) мы имеем:

$${}_2F_2\left(\frac{1}{2},1;\frac{2-\beta}{2},\frac{3-\beta}{2};-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\kappa}{\left(\frac{2-\beta}{2}\right)_\kappa\left(\frac{3-\beta}{2}\right)_\kappa}\cdot\left(\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right)^\kappa.$$

Здесь

$$f_2(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x\frac{\frac{\partial f_1(\xi,\tau)}{\partial\xi}}{(x-\xi)^\beta}d\xi\,\Big|_{x=\gamma(t)}$$

где

$$f_1(x,t)=\int_0^t\int_0^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Доказана теорема

Теорема.

Интегральное уравнение (3) с ядром вида (4), когда $\gamma(t)\sim t^\omega$ при $t\to 0$

1. при $\omega\geq\frac{1}{2}$ и $0<\beta\leq 1$

или

2. при $\omega>\frac{1}{2}$ и $\beta=0$

разрешима единственным образом в классе непрерывных функций при любой непрерывной правой части.

Список литературы

[1] M. T. Dzhenaliev, M. I. Ramazanov *Loaded equations as perturbations of differential equations*, Gylym, Almaty, (2010) [in Russian].

[2] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York-London, (1974).

[3] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, New York, (1993).

[4] I.S. Gradshtein, and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series,and Products (seventh edition)*, Academic Press, N.Y. (2007).

[5] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series: Special Functions, Vol. 2*, Taylor&Francis Ltd, London, (1998).

[6] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series: More Special Functions, Vol. 3*, Gordon and Breach, New York-London, (1989).

[7] А.Д. Полянин, А.В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям*, Физматлит, Москва (2003).

— ⁂ —

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Минзиля Т. КОСМАКОВА[1], Алибек О. ТАНИН[1], Жанар М. ТУЛЕУТАЕВА[1,2]

[1]Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, Караганды, Казахстан

[2]Карагандинский государственный технический университет, Караганды, Казахстан

svetlanamir578@gmail.com

При изучении двумерной граничной задачи по пространственным переменным в перевернутом конусе $G = \{(x; y, t): \, x^2 + y^2 < t^2, \, 0 < t < T\}$ для уравнения

$$\frac{\partial u(x,\,y,\,t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,\,y,\,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\,y,\,t)}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

с граничным условием на поверхности конуса

$$u(x,y,t) = u_{\text{c}}(x,y,t), \; \sqrt{x^2+y^2} = t, \; 0 < t < T, \tag{2}$$

возникает интегральное уравнение (в операторной форме)

$$\varphi_1(t) - \mathbb{K}\varphi_1(t) = F(t),$$

где $F(t)$ – известная функция,

$$\mathbb{K}\varphi_1(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t^{1/2}}{\tau^{3/2}\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{ -\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}\right) \right\} \varphi_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ 2a^2 t \exp\left\{ \frac{t}{4a^2} + \frac{a^2}{4t} \right\} \left(\sum_{k=0}^{2} [K_k\varphi_1](t) + \exp\left\{ -\frac{t}{4a^2} \right\} [K_3\varphi_1](t) \right).$$

Его характеристическим уравнением является уравнение

$$\varphi_1(t) - \mathbb{K}_{char}\varphi_1(t) = F_{char}(t), \tag{3}$$

где

$$F_{char}(t) = F(t) + (\mathbb{K} - \mathbb{K}_{char})\varphi_1(t),$$

$$\mathbb{K}_{char}\varphi_1(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t^{1/2}}{\tau^{3/2}\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{ -\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}\right) \right\} \varphi_1(\tau)\, d\tau,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки РК (грант є AP05132262.)

$$(\mathbb{K}-\mathbb{K}_{char})\varphi_1(t)=2a^2t\exp\left\{\frac{t}{4a^2}+\frac{a^2}{4t}\right\}\sum_{k=0}^{2}[K_k\varphi_1](t)+2a^2t\exp\left\{\frac{a^2}{4t}\right\}[K_3\varphi_1](t)=$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\exp\left\{\frac{a^2}{4t}\right\}\int_0^t\frac{t^{1/2}}{\tau^{3/2}(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{a^2}{4\tau}\right\}\varphi_1(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\exp\left\{\frac{a^2}{4t}\right\}\int_0^t\frac{t^{1/2}}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{a^2}{4\tau}\right\}\varphi_1(\tau)\,d\tau$$

Показано, что интегральный оператор $t\exp\left\{\frac{a^2}{4t}\right\}[K_3\varphi_1](t)$ является бесконечно малой величиной при $t\to 0_{+0}$ и интегральный оператор

$$t\exp\left\{\frac{t}{4a^2}+\frac{a^2}{4t}\right\}\sum_{k=0}^{2}[K_k\varphi_1](t)$$

является оператором со слабой особенностью над весовым классом существенно ограниченных функций $t^{-\epsilon}\varphi_1(t)\in L_\infty(0,T)$ при $\varepsilon>0$

Тогда функция $F_{char}(t)$ является ограниченной, если $t^{-\epsilon}\varphi_1(t)\in L_\infty(0,T)$ при $\varepsilon>0$.

Доказаны леммы.

Лемма 1.

Интегральное уравнение (3) имеет собственную функцию $\varphi_1(t)=C$.

Простая подстановка показывает, что функция $\varphi_1(t)=C$ действительно удовлетворяет однородному интегральному уравнению (3).

Лемма 2.

Интегральное уравнение (3) имеет частное решение, определяемое формулой

$$\varphi_1(t)=f_2(t)+\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\sqrt{t}}{\tau^{3/2}\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right\}f_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{a^2}{4}\int_0^t\frac{1}{\tau^2}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{t}}\right)+1\right\}f_2(\tau)\,d\tau.$$

Список литературы

[1] I.S. Gradshtein, and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series,and Products (seventh edition)*, Academic Press, N.Y. (2007).

[2] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Физматлит, Москва (1958) (in Russian).

[3] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и ряды. Т.2. Специальные функции*, Физматлит, Москва (2003) (in Russian).

[4] Korn, G.A., & Korn T.M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers.* Dover Publications: Inc. Mineola. New York: USA. 1152 p.

[5] А.Д. Полянин, А.В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям*, Физматлит, Москва (2003) (in Russian).

[6] M. Amangaliyeva, M. Jenaliyev, M. Kosmakova, and M. Ramazanov, On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain, *Siberian Mathematical Journal*, **56**, No. 6 (2015), 982–995.

[7] M. Jenaliyev, M. Amangaliyeva, M. Kosmakova, and M. Ramazanov, On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel, *Advances in Difference Equations*, **2015**, No. 71 (2018).

— ⁂ —

МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Т.С. МУСТАФИН, Б.Ш. КУЛПЕШОВ

Казахстанско-Британский технический университет, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

timurmustafin379@gmail.com, b.kulpeshov@kbtu.kz

Предложена методика для решения задачи классификации траекторий развития состояний динамического объекта при отсутствии априорной информации о классификации траекторий прошедших процессов развития состояний процессов. Методика относится к автоматизированным системам управления и может быть использована при управлении сложными объектами с дискретным характером технологического цикла, а также для решения задач классификации и анализа данных объектов, описываемых временными рядами признаков.

Распознавание образов и классификация объектов (наблюдений, явлений, сигналов, ситуаций, процессов), является одной из наиболее динамически развивающихся областей прикладной математики и кибернетики, что вызвано постоянными запросами практики, которые часто встречаются в задачах с достаточно сложными процессами и явлениями.

Излишнее стремление к точности математических моделей стало оказывать влияние, которое сводило на нет теорию управления и теорию систем, так как оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредоточиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. Многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются по сей день в стороне лишь по той причине, что они не поддаются математической постановке [1].

Построенные математические модели оказывались либо сложными, либо слишком простыми, что не позволяло получать приемлемые результаты. Поэтому в ряде случаях математическое моделирование является искусством, и качество моделей в значительной мере зависит от интуиции, мастерства и изобретательства их разработчиков. Одним из подходов для снятия ряда проблем математического моделирования является построение систем распознавания и классификации на основе накопленной информации [2].

Отметим, что введение методов интеллектуальной обработки информации, основанных на математическом моделировании, представляет собой новый шаг в повышении эффективности производства на основе внедрения современных технологий. Как правило, построение операций по решению конкретных задач без полной или с частичной формализацией осуществляется опытными специалистами в значительной степени интуитивно, и решение каждой новой задачи требует всей работы заново. В результате часто довольно большая часть данных остается необработанной и невостребованной. Что определяет основное требование для перспективных подходов к

Исследования были поддержаны грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (AP05132546)

решению прикладных задач обработки данных: должна быть обеспечена простота и надежность сложных процедур, не требующих привлечения интуитивной работы специалистов [3].

Отметим также последние работы в области математического и компьютерного моделирования динамических объектов и систем [4]–[7].

В настоящей работе предложен метод классификации траекторий динамических объектов, представленных временными рядами признаков — показателей состояний объекта.

Список литературы

[1] Л. Заде, *Понятие лингвистической переменной.* Москва: Мир, 1976.

[2] А.А. Дородницын, *Проблемы математического моделирования в описательных науках* // Кибернетика, **19**:4, 6–10 (1983).

[3] Ю.И. Журавлев, *Избранные научные труды.* Москва: Магистр, 1998.

[4] Д.Д. Мищенко, *Моделирование сложных динамических объектов* // Вестник Красноярского государственного аграрного университета, №4, 35–39 (2014).

[5] И.Н. Ефимов, Е.А. Морозов, К.М. Селиванов, *Компьютерное моделирование динамических систем.* Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014, 134 с.

[6] А.В. Раскина, *Определение структуры линейного динамического объекта в задачах непараметрической идентификации* // Сибирский журнал науки и технологий, **17**:4, 891–898 (2016).

[7] Т.Ю. Цибизова, Пьо Си Тху, М.С. Селезнева, *Математическое моделирование динамических систем с использованием параметрической идентифицируемости* // Современные наукоемкие технологии, №1, 54–60 (2018).

— ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н.Т. ОРУМБАЕВА, А.Б. КЕЛЬДИБЕКОВА

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова, Караганды, Казахстан

Keldibekova_a_b@mail.ru

На $\Omega = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(0,t) + \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}x = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке МОН РК, грант №AP05132262.

где $(n \times n)$ - матрицы $A(x,t), B(x,t), C(x,t)$, n-вектор-функции $f(x,t), \varphi(x,t)$ непрерывны на Ω, здесь $\|u(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \quad \|A(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$.

Для нахождения решения вводятся функции $v(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $w(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ и задача (1)-(4) сводится к периодической краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1] вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + B(x,t)w + C(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{4}$$

$$v(x,0) = v(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

функциональным соотношениям

$$w(x,t) = \varphi_t'(x,t) + \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi \frac{\partial v(\xi_1,t)}{\partial t} d\xi_1 d\xi, \tag{6}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t) + \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi v(\xi_1,t) d\xi_1 d\xi. \tag{7}$$

Для решения задачи (4)-(7) используется метод параметризации [2]. В терминах исходных данных определены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)-(3), предложен алгоритм нахождения приближенного решения, получена оценка между приближенным и точным решениями.

Список литературы

[1] N. Orumbaeva, *On an algorithm of finding periodical boundary value problem for system of the quasi-linear of hyperbolic equations* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **10**, 464–474 (2013). DOI: 10.17377/semi.2013.10.036.

[2] Д. Джумабаев, *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Журнал вычислительной математики и математической физики, **29**:1, 34–46 (1989). DOI: 10.1016/0041-5553(89)90038-4.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МАКСИМАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М.Н. ОСПАНОВ

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Нур-Султан, Kazakhstan

На $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times (-\infty, +\infty)$ рассмотрим уравнение

$$u_{xtt} = a_0(x, t)u_{xt} + a_1(x, t)u_{tt} + a_2(x, t)u_x + a_3(x, t)u_t + a_4(x,t)u + f(x, t), \tag{1}$$

где функции $a_i(x,t)\,(i = \overline{0, 4})\,, f(x,t)$ предполагаются непрерывными и,вообще говоря, неограниченными на $\bar{\Omega}$. Уравнение (1) является псевдопараболическим, к нему приводят ряд прикладных задач в физике, механике и биологии [1]. Через $C_*(\bar{\Omega}, R)$ обозначим пространство ограниченных функций, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0, \bar{\omega}]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0, \omega]$ с нормой $\|V\| = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |V(x, t)|$. Нами для уравнения (1) изучается следующая задача:

$$u(0, t) = \psi(t), \; u_x(x, t), \; u_{xt}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R). \tag{2}$$

Функция $\psi(t)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и ограниченной на R вместе со своими производными $\dot{\psi}(t)$ и $\ddot{\psi}(t)$.

Решение u задачи (1),(2) называется максимально регулярным, если имеет место оценка

$$\|u_{xtt}\| + \|a_0(x,t)u_{xt}\| + \|a_1(x,t)u_{tt}\| + \|a_2(x,t)u_x\| +$$

$$+ \|a_3(x,t)u_t\| + \|a_4(x,t)u\| \leq C \;\; \|f(x,t)u\|\,,$$

где $C - const$, зависит только от исходных данных.

Аналогичная задача для уравнения (1) в случае $a_1(x, t) = 0$ была исследована в [2].

В настоящей работе методом параметризации [3] установлены условия максимальной регулярности решения задачи (1),(2).

Список литературы

[1] Нахушев А.М., *Уравнения математической биологии.*. - М.:Физматлит, 2008.

[2] Оспанов М.Н., *Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка.* // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. -2004, №3. -С.103–107.

[3] Джумабаев Д.С., *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. -1989. -Т.29, №1. -С.50–66.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

Работа поддержана проектом AP05131649 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

УСЛОВИЯ КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кордан ОСПАНОВ, Адилет ЕСБАЕВ

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

adilet.e@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$-\rho(\rho y')' + ry' + sy = f(x), \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}$, ρ положительная и дважды непрерывно дифференцируемая, r непрерывно дифференцируемая, а s непрерывная функции на $\mathbb{R}$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$.

Замкнув в $L_p(\mathbb{R})$ дифференциальное выражение $-\rho(\rho y')' + ry' + sy$, определенное на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем $C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ определим оператор l. Решением уравнения (6) называется функция $y \in D(l)$ такая, что $ly = f$.

Пусть g и $h \neq 0$ — заданные непрерывные функции, $q = \frac{p}{p-1}$. Положим

$$\alpha_{g,h}(t) := \|g\|_{L_p(0,t)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_q(t,+\infty)} \ (t > 0), \qquad \beta_{g,h}(\tau) := \|g\|_{L_p(\tau,0)} \left\|h^{-1}\right\|_{L_q(-\infty,\tau)} \ (\tau < 0),$$

$$\gamma_{g,h} := \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau)\right).$$

Теорема. *Пусть ρ — дважды непрерывно дифференцируемая положительная, а r — непрерывно дифференцируемая функции и выполнены следующие условия:*

$$1 \leqslant \frac{|r|}{\rho^2} \leqslant C\left(\frac{|r|}{\rho}\right)^p, \qquad 1 \leqslant |r|,$$

$$\gamma_{1,\rho\left(\frac{|r|}{\rho^2}\right)^{1/p}} < +\infty, \qquad \gamma_{s,|r|} < +\infty,$$

и пусть найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что

$$\sup_{x<a}\left\{\rho(x)\exp\left(-\int_x^a \frac{|r(t)|}{\rho^2(t)}dt\right)\right\} < +\infty.$$

Тогда уравнение (6) для любой правой части $f \in L_p$ имеет единственное решение.

Если кроме того

$$\rho < +\infty, \quad C^{-1} \leqslant \frac{\rho(x)}{\rho(\nu)} \leqslant C, \quad C^{-1} \leqslant \frac{r(x)}{r(\nu)} \leqslant C, \quad \text{при } |x-\nu| \leq 1,$$

то для решения y выполнена оценка

$$\left\|-\rho(\rho y')'\right\|_p + \left\|ry'\right\|_p + \|sy\|_p \leqslant C_0 \|f\|_p.$$

Пример. *Для следующего уравнения*

$$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}y'\right)' + (x^2+5)^2 y' - 5xy = f,$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, выполняются условия теоремы. Следовательно данное уравнение имеет единственное решение y, для которого выполняется оценка

$$\left\| -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}y'\right)' \right\|_2 + \left\|(x^2+5)^2 y'\right\|_2 + \|-5xy\|_2 \le C\|f\|_2.$$

Уравнение (6) в случае $\rho \equiv 1$ и $p = 2$ было исследовано в работе [1], при $\rho \equiv 1$, $p = 1$ — в [2], а при $\rho \equiv 1, 1 < p < +\infty$ в работе [3]. Отметим, что в работах [1], [2], [3] помимо корректной разрешимости были получены спектральные свойства соответствующего (6) дифференциального оператора, а также условия разрешимости квазилинейного обобщения (6).

Список литературы

[1] K. Ospanov, R. Akhmetkaliyeva, *Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation* // /Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **2012**:66 1–12 (2012).

[2] K. Ospanov, *L_1-maximal regularity for quasilinear second order differential equation with damped term* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **2015**:39, 1–9 (2015).

[3] K. Ospanov, *Maximal L_p-regularity for a second-order differential equation with unbounded intermediate coefficient* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **2019**:39, 1–13 (2019).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ε-ПЕРИОДОМ ЭРЕДИТАРНОСТИ

Жайшылык САРТАБАНОВ, Гулсезим АЙТЕНОВА, Галия АБДИКАЛИКОВА

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

sartabanov42@mail.ru, gulsezim-88@mail.ru, agalliya@mail.ru

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,t-c\tau+cs)u(s,t-c\tau+cs)ds + f(\tau,t) \qquad (1)$$

с оператором дифференцирования $D_c = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle c, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$, который обращается в оператор полной производной $\frac{d}{d\tau}$ вдоль характеристик $t = c\tau - cs + \sigma$ с начальным данным $(s,\sigma) \in R \times R^m$, где $R = (-\infty, +\infty)$, $c = (c_1, \ldots, c_m)$ – постоянный вектор, с отличным от нуля координатами $c_j, j = \overline{1,m}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ – вектор, $\left\langle c, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$ – скалярное произведение векторов, $A(\tau,t)$ и $K(\tau,t,s,\sigma)$ – заданные $n \times n$-матрицы, $f(\tau,t)$ – n-вектор-функция, $(\theta,\omega) = (\theta,\omega_1,\ldots,\omega_m)$ – вектор-период с рационально несоизмеримыми координатами, ε – положительная постоянная.

Вопросу существования многопериодических и почти периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений посвящено значительное количество работ, из них отметим [1-4], имеющие непосредственное отношение к данному исследованию.

Целью настоящей работы является получение условий существования многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с заданным оператором дифференцирования D_c.

Для достижения этой цели решаются сначала начальные задачи для рассматриваемых систем уравнений, а затем устанавливаются необходимые и достаточные условия существования многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений. Определяются интегральные структуры решений линейных неоднородных систем, обладающих свойством единственности.

Предположим выполненными условия:

$$A(\tau+\theta, t+q\omega) = A(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{(\tau,t)}(R\times R^m), q \in Z^m, \tag{2}$$

$$K(\tau+\theta, t+q\omega, s, \sigma) = K(\tau, t, s+\theta, \sigma+q\omega) =$$
$$= K(\tau, t, s, \sigma) \in C^{(0,2e,0,2e)}_{(\tau,t,s,\sigma)}(R\times R^m \times R \times R^m), q \in Z^m, \tag{3}$$

$$f(\tau+\theta, t+q\omega) = f(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{(\tau,t)}(R\times R^m), q \in Z^m. \tag{4}$$

Теорема.

Пусть выполнены условия (2), (3), (4) и соответствующая линейная однородная система не имеет (θ,ω)-периодических решений, кроме тривиального. Тогда система неоднородных линейных интегро-дифференциальных уравнений (1) имеет единственное (θ,ω)-периодическое решение $u(\tau,t)$ вида

$$u(\tau,t) = \left[U^{-1}(0,\tau+\theta,t) - U^{-1}(0,\tau,t)\right]^{-1} \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta} \widetilde{U}_\theta(s,\tau,t) f_\theta(s, h(s,\tau,t))ds.$$

Здесь $U(s,\tau,t)$ решение матричной задачи

$$D_c U(s,\tau,t) = A(\tau,t)U(s,\tau,t) + \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,\xi,h(\xi,\tau,t))U(\xi,h(\xi,\tau,t))d\xi,$$

$$U(s,s,\tau) = E,$$

E – единичная n-матрица, векторно-матричная функция $f_\theta(s,\tau,t)$ определяется с помощью функции $f(s,\tau,t)$ соотношением

$$f_\theta(s,\tau,h(s,\tau,t)) = \begin{cases} f(s,\tau,h(s,\tau,t)), \tau \xrightarrow{s} 0, \\ f(s,\tau+\theta,h(s,\tau+\theta,t)), 0 \xrightarrow{s} \tau+\theta. \end{cases}$$

Отметим, что рассмотренные задачи для интегро-дифференциальных систем можно рассмотреть вдоль характеристик $t = t^0 + c\tau - c\tau^0$ с фиксированными начальными данными (τ^0, t^0).

Разработанный подход применим к исследованию задач о колебаний струны эредитарного характера, относящиеся к примерам прикладного аспекта.

Список литературы

[1] В. Вольтерра, *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1982.

[2] А.М. Нахушев, *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995.

[3] Д.У. Умбетжанов, *Почти периодические решения эволюционных уравнений.* Алма-Ата: Наука, 1990.

[4] Ж.А. Сартабанов, *Псевдопериодические решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений* // Укр.математический журнал,**41**:1, 125–130 (1989).

— ⁂ —

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УЗКО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Жайшылык САРТАБАНОВ, Амире ЖУМАГАЗИЕВ, Галия АБДИКАЛИКОВА

Актюбинский региональный государственный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

sartabanov42@mail.ru, charmeda@mail.ru, agalliya@mail.ru

Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + A_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x}{\partial t_2} = Ax + f(\tau, t), \tag{1}$$

где $x(\tau, t)$ – искомая n-вектор-функция; A_1, A_2 и A – постоянные n-матрицы; $(\tau, t) = (\tau, t_1, t_2)$; $f(\tau, t)$ – n-вектор-функция.

Предположим, что матрицы A_1 и A_2 обладают свойствами узкой гиперболичности системы (1) и n-вектор-функция $f(\tau, t)$ обладает (θ, ω)-периодичностью и $C_{\tau,t}^{(0,1)}(R \times R^2)$:

$$f(\tau + \theta, t + q\omega) = f(\tau, t), \quad (\theta, \omega) = (\theta, \omega_1, \omega_2). \tag{2}$$

Уравнение (1) изучается на основе понятий собственных значений и собственных вектор-функций путем приведения к уравнению с соответствующими жордановыми каноническими видами J_1 и J_2 матриц A_1 и A_2, при помощи подстановки $x = Ky$, к форме

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + J_1 \frac{\partial y}{\partial t_1} + J_2 \frac{\partial y}{\partial t_2} = By + \varphi(\tau, t), \quad B = K^{-1}AK, \varphi(\tau, t) = K^{-1}f(\tau, t), \tag{3}$$

если матрицы A_1 и A_2 Ц коммутативные, то есть когда выполнено условие

$$A_1 A_2 = A_1 A_2.$$

Возникает вопрос об изучении задач для уравнения (1) в терминах собственных значений и собственных вектор-функций A_1 и A_2 в общем случае, когда этим матрицам необязательно быть коммутативными.

Суть этого метода заключается в следующем.

После перехода из выражения $\dfrac{\partial x}{\partial \tau} + A_1 \dfrac{\partial x}{\partial t_1}$ к его каноническому виду $\dfrac{\partial y}{\partial \tau} + J_1 \dfrac{\partial y}{\partial t_1}$, заменой $x = K_1 y$, последнее выражение представим как производную $\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau}$ функции $\tilde{y}(\tau, t) = y(\tau, h^1(\tau), t_2)$ в направлениях характеристик $t_1 = h_j^1(\tau)$, $j = \overline{1, n}$, где

$$y(\tau, h^1(\tau), t_2) = \big(y_1(\tau, h^1(\tau), t_2), ..., y_n(\tau, h^1(\tau), t_2)\big) = \tilde{y}(\tau, t_2). \tag{4}$$

Следовательно, имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + J_1 \frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{\partial \tilde{y}(\tau, t_2)}{\partial \tau}. \qquad (5)$$

Далее, пользуясь соотношениями (4) и (5) из (1) заменой $\tilde{y}(\tau, t_2) = K_2 z(\tau, t_2)$ имеем уравнение с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial z(\tau, t_2)}{\partial \tau} + K_2^{-1} \tilde{A}_2 K_2 \frac{\partial z(\tau, t_2)}{\partial t_2} = K_2^{-1} \tilde{C} K_2 z(\tau, t_2) + K_2^{-1} \tilde{\varphi}(\tau, t_2), \qquad (6)$$

где $\tilde{A}_2 = K_1^{-1} A_2 K_1$, $\tilde{C} = K_1^{-1} B K_1$, $\tilde{\varphi}(\tau, t_2) = \varphi(\tau, h^1(\tau), t_2)$.

Теперь уравнение (6) представим в виде

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} + J_2 \frac{\partial z}{\partial t_2} = Cz + \psi(\tau, t_2), \quad C = K_2^{-1} \tilde{C} K_2, \psi(\tau, t_2) = K_2^{-1} \tilde{\varphi}(\tau, t). \qquad (7)$$

Определив характеристики относительно $t_2 = h_j^2(\tau)$ и рассмотрев (7) вдоль этих характеристик имеем систему

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = C\tilde{z} + \tilde{\psi}(\tau), \quad \tilde{z}(\tau) = z(\tau, h^2(\tau)), \tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau, h^2(\tau)). \qquad (8)$$

Таким образом, методом редукции систему (1) привели к системе (8).

Далее, известным методом теории многопериодических решений при условиях (2) и

$$Re\lambda_j(A) \neq 0, \quad j = \overline{1, n} \qquad (9)$$

установлено существование единственного многопериодического решения уравнения (1).

Теорема.

При условиях (2), (3) и узкой гиперболичности матриц A_1 и A_2 система (1) имеет единственное (θ, ω)-периодическое решение

$$x^*(\tau, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \tau) P f(s, h^1(s, \tau, t_1), h^2(s, \tau, t_2)) ds,$$

где $G(s, \tau)$ – функция Грина задачи для системы (1) о многопериодических решениях, P – оператор проектирования.

Развивая идеи работ [1-3], в данной заметке предлагается метод исследования уравнения (1) на основе постепенного перехода от частных производных по двум независимым переменным к производным неизвестных функций путем дифференцирования по одной переменной τ вдоль характеристик рассматриваемого уравнения.

Описанным методом редукции можно пользоваться в случае больше двух независимых переменных, при предварительно известных собственных значениях и собственных вектор-функциях.

Список литературы

[1] Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964.

[2] Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, *Система квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* М.: Наука, 1968.

[3] С. Фарлоу, *Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.* М.: Мир, 1985.

— ⁂ —

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Ж.А. САРТАБАНОВ, Б.Ж. ОМАРОВА, А.А. РАХМЕТОВ

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан

sartabanov42@mail.ru, bibigul_zharbolkyzy@mail.ru, adilet12.07.96@mail.ru

Рассматривается система уравнений

$$Dx = A_0x + f(s, e\tau), \tag{1}$$

с постоянной матрицей $A = [a_{kj}]_1^2$, $a_{11} = a_{22} = \alpha = 0$, $a_{12} = -a_{21} = \beta > 0$, свободным членом $f\left(s, e\tau\right) = (f_1(s, e\tau), f_2(s, e\tau))$ и оператором дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial s} + \varphi(e\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2)$ – искомая вектор-функция, $\varphi(e\tau)$ – функция переменной t, порожденной от функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_m)$ при $t = e\tau$, $e = (1, \ldots, 1)$ – m-вектор. Этот случай относится к критическому случаю.

Предполагаются, что функции $\varphi(t)$ и $f(s, e\tau)$ являются вещественно аналитическими и многопериодическими

$$\varphi(t + \omega) = \varphi(t) \in A^b_\omega(\Pi^m_\delta), \varphi(t) \neq 0, t \in \Pi^m_\delta, \tag{3}$$

$$f(s + \theta_0, t + \omega) = f(s, t) \in A^b_{\theta_0,\omega}(\Pi^m_\delta \times \Pi^m_\delta), \tag{4}$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_m)$ – вектор-период с координатами рационально несоизмеримыми между собой $\omega_1, \ldots \omega_m$ и вместе с периодами θ_0; $\Pi_\delta = \{\tau \in C : |Im\tau| < \delta\}$, C - комплексная плоскость, $\Pi^m_\delta = \Pi_\delta \times \ldots \times \Pi_\delta$, $A^b_\omega\left(\Pi^m_\delta\right)$ – класс ω-периодических вещественно аналитических в области Π^m_δ функций.

При условии (3) функция $\varphi^{-1}(t)$ разлагается в ряд Фурье $\varphi^{-1}(t) = \varphi_0 + \sum\limits_{k\neq 0} \varphi_k e^{2\pi i\langle k,\nu t\rangle}$, где $k = (k_1, \ldots, k_m) \in Z \times \ldots \times Z = Z^m$, $\varphi_0 \neq 0$, φ_k – коэффициенты Фурье, Z – множество целых чисел, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\nu_j = \omega_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$, $\nu t = (\nu_1, t_1 \ldots, \nu_m t_m)$, $\langle a, b\rangle$ – скалярное произведение векторов a и b. Предположим выполнено расширенное условие несоизмеримости вида

$$|\langle\widetilde{k}, \widetilde{\nu}\rangle| = |k^0\nu^0 + k_0\nu_0 + \langle k, \nu\rangle| \geq \widetilde{c}^{-1}|\widetilde{k}|^{-\widetilde{\gamma}} \tag{5}$$

с некоторыми положительными постоянными $\widetilde{c} > 0$ и $\widetilde{\gamma} \geq m + 3$, где $\widetilde{k} = (k^0, k_0, k) = (k^0, k_0, k_1, \ldots k_m) \in Z^{m+2}$ – множество целочисленных $(m + 2)$-векторов, $\widetilde{\nu} = (\nu^0, \nu_0, \nu) = (\nu^0, \nu_0, \nu_1, \ldots \nu_m)$ – частотный $(m + 2)$-вектор, $\nu^0 = (2\pi)^{-1}\beta$.

Исследуется задачи о выяснении условий существования единственного решения системы (1)–(2), периодических по одной переменной и квазипериодических по другой переменной с тем же частотным базисом. При решений задачи (1)–(2) использован методы теории многопериодических решений системы с многопериодическими входными данными, вещественно-аналитично продолжимыми по каждой переменной на некоторую комплексную окрестность действительной оси $[1 - 5]$.

Характеристическая система $\dot{x} = \varphi(e\tau)$, $\tau|_{s=s^0} = \tau^0$ оператора (2) при условиях (3), (4) и $|\langle k, \nu\rangle| \geq c^{-1}|k|^{-\gamma}$ имеет условно многопериодические решение вида

$$\tau = \tau^0 + \alpha_0(s - s^0) + he\left((s - s^0)\right), \tag{6}$$

где $h(t+\omega) = h(t) \in A^b_\omega\left(\Pi^m_r\right)$, $0 < r < \rho$, $c > 0$, $\gamma \geq m+1$ постоянные.

Если среднее значение α_0 функции $\varphi(e\tau)$ считать равным единице, то из (6) получим $\tau - \tau^0 = s + h(t)$.

Тогда получим новый оператор дифференцирования вида

$$\widetilde{D} = \frac{\partial}{\partial s} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle + \varphi\left(e\tau^0 + t + eh(t)\right)\frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{7}$$

Отметим, что формула $\widetilde{D}y(s,t,\tau)|_{t=es} = Dx(s,\tau)$ позволяет переходить от рассмотрения уравнений, квазипериодических по переменным с (s,τ) к уравнениям, многопериодических по переменным (s,t,τ). Таким образом, колебательные решения системы (4.1) исследовано путем перехода к многопериодической системе вида

$$\widetilde{D}y = A_0 y + f\left(s, t + eh(t)\right). \tag{8}$$

Теорема 1.

Пусть выполнены условия (3), (4) и (5). Тогда линейная система (8)-(7) имеет единственное решение, которое представляется в виде

$$y^*(s,t) = \int\limits_{s^*(s)-\theta_0}^{s^*(s)} G(s,\sigma)g(\sigma, t - es + e\sigma)\,d\sigma,$$

при помощи функции типа Грина $G(s,\sigma)$ и подчиняется оценке

$$\|y^*\|_{r/2} \leq ar^{-\gamma^*}e^{-\beta^* r}\|g\|_r, (s,t) \in \Pi_{r/2} \times \Pi_{r/2}.$$

Далее, учитывая, что s, τ и t связанные соотношениями $\tau = s + h(es)$, $s = \tau + \psi(e\tau)$, $t = es$, как приложение теоремы 1 к исследованию периодических по s и квазипериодических по τ с частотным базисом $(\nu_1, \ldots \nu_m) = \nu$ решений системы (1), имеем следующую теорему.

Теорема 2.

При условиях теоремы 1 задача (1)-(2) имеет единственное θ_0-периодическое по s и квазипериодическое п τ с частотным базисом $(\nu_1, \ldots \nu_m) = \nu$ вещественно аналитическое по $(s,\tau) \in \Pi_{r/2} \times \Pi_{r/2}$ решение

$$x^*(s,\tau) = \int\limits_{s^*(s)-\theta_0}^{s^*(s)} G\left(s,\sigma\right)f(\sigma, e\tau - es + e\sigma + \theta h(e\tau - es + e\sigma))\,d\sigma,$$

удовлетворяющее оценке $\|x^*\|_{r/2} \leq ar^{-\gamma^*}e^{-\beta^*\gamma}\|f\|_r$.

Список литературы

[1] В.Х. Харасахал, *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений.* Наука, Алма-Ата, 1970.

[2] Д.У. Умбетжанов, *Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных.* Наука, Алма-Ата, 1979.

[3] А.А. Кульжумиева, Ж.А. Сартабанов, *Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем* // РИЦ ЗКГУ, Уральск, 2013.

[4] Z.A. Sartabanov, *The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments* // AIP Conference Proceedings, **1880**, 040020 (2017).

[5] Z.A. Sartabanov, B.Zh. Omarova,*Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of dif-ferentiation on the LyapunovŸs vector field* // AIP Conference Proceedings, **1997**, 020041 (2018).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ С ДАННЫМИ ИЗ ГЕОЛОГО-ЛИТОГРАФИЧЕСКИХ РАЗРЕЗОВ

Семен СЕРОВАЙСКИЙ, Данияр НУРСЕИТОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

serovajskys@mail.ru, ndb80@mail.ru

Длительная разработка нефтегазовых месторождений может привести к негативным последствиям. Для своевременного выявления различных негативных явлений регулярно осуществляется гравиметрический мониторинг месторождений с последующей идентификацией экспериментальных данных.

Распределение потенциала гравитационного поля описывается уравнением Пуассона, в правую часть которого входит распределение плотности в данной области. Прямая задача гравиметрии состоит в определении потенциала по известным значениям плотности, а обратная задача - в восстановлении плотности, а значит, и структуры исследуемой области по результатам измерения гравитационного поля. В реальной ситуации экспериментальной базой для решения прямой задачи служат данные из геолого-литографических разрезов месторождения, а для обратной - измерение ускорения силы тяжести на поверхности земли над месторождением. Сложность задачи обусловлена, чрезвычайно малым объемом экспериментальных данных при значительных размерах месторождения, существенной несогласованностью гравиметрических и геологических данных в смысле времени постановки эксперимента и отсутствием информации о состоянии системы на подземной границе исследуемой области. В этих условиях получить сравнительно точную информацию о текущей структуре месторождения практически невозможно.

Предлагается новый подход к решению указанной задачи, основанный на использовании как гравиметрической информации, так и данных о свойствах геолого-литографический разрезов месторождения. Имеющиеся данные геолого-литографический разрезов представляют собой рисунки, на которых изображено расположение тех или иных материалов в данной области. Прежде всего, составлена программа, преобразующая эту информацию в таблицу распределения плотности для уравнения Пуассона. Для постановки краевых условий учитывается, что потенциал гравитационного поля по мере удаления от объекта убывает. Рассматриваемая область искусственно расширяется с постановкой нулевых граничных условий до тех пор, пока влияние этих условий практически сойдет на нет. Тем самым мы получаем возможность решать прямую задачу гравиметрии на основе данных из геолого-литографический разрезов месторождения. Далее,

Работа выполнена при поддержки проекта AP05135158 "*Разработка геоинформационной системы для решения задачи гравиметрического мониторинга земной коры нефтегазоносных районов Казахстана на основе высокопроизводительных вычислений в условиях ограниченного объема экспериментальных данных*".

вычисляется вертикальная составляющая градиента гравитационного потенциала, соответствующая ускорению силы тяжести, которая сравнивается с показаниями гравиметров. Среднеквадратичное отклонение вычисляемой информации от экспериментальных данных служит критерием точности нашего представления о текущей структуре месторождения. Его большие значения объясняются тем, что гравиметрическая информация регистрируется регулярно, в то время как геологические данные обновляются крайне редко. На основе генетического алгоритма вносятся возмущения данного распределения плотностей с целью минимизации рассматриваемого критерия. Тем самым появляется возможность реального уточнения имеющейся информации о структуре нефтегазовых месторождений.

— ⁂ —

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРИОЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

[1] Светлана ТЕМЕШЕВА, [2] Сымбат КАБДРАХОВА

[1,2]Институт математики и математического моделирования МОН РК,
[1,2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби Алматы, Казахстан

nur15@mail.ru, symbat2909.sks@gmail.com

В области $\overline{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для одного неклассического уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = a_1(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_2(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + a_3(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_4(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$

$$+ a_5(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_6(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a_7(x,t)u + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t),\ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}|_{x=0} = \psi_3(t), \qquad t \in [0,T],\ x \in [0,\omega] \tag{4}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,\omega] \tag{5}$$

где $f(x,t), a_i(x,t), (i = \overline{1,7})$ непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции, $\psi_i(t)-$ дважды непрерывно дифференцируемые на $[0,T]$ функции, удовлетворяющие условиям $\psi_i(0) = \psi_i(T)$, $\dot{\psi}_i(0) = \dot{\psi}_i(T)$, $(i = 1,2,3)$

В данном сообщении рассматривается вопрос существование классического решения задачи (1)-(5) и предлагается алгоритм нахождения его приближенного решения. Введя новые неизвестные функции рассматриваемая задача сведется к эквивалентной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральными соотношениями.

На сегодняшний день различные методы исследования и решения начально-краевых задач для уравнений в частных производных четвертого порядка дифференциальных уравнений, гиперболического и композиционного типов исследованы в работах [1-6]. Для того чтобы исследовать различные краевые задачи для уравнений в частных производных четвертого порядка наряду с классическими методами математической физики применялись метод Фурье, метод функций

Данная работа поддерживается проектом AP05131220 (2018-2020) МОН РК

Грина, метод Пуанкаре и другие методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированы условия разрешимости их решения. В работах [7-8] были получены корректная разрешимость полупериодической краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка и численно-аналитическое решение, а в [9] рассмотрены вопросы существования решения и приближенный метод нахождения решения краевой задачи для неклассического уравнения третьего порядка.

Для нахождения численно-аналитического решения задачи (1)-(5) применяется модификация метода ломаных Эйлера [9]. Получены условия существования единственности классического решения краевой задачи (1)-(5). Установлены оценки близости функции построенной с помощью модификации метода ломаных Эйлера к точному решению задачи (1)-(5).

Список литературы

[1] Б.И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Киев: Наукова думка, 264с. (1984).

[2] Т.И. Кигурадзе, Т.О. Кусано*О корректности начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений высших порядков с двумя независимыми переменными* //Дифференц.уравнения., Т.39, 1(2003), С.173 - 185.

[3] T. Kiguradze, V. Lakshmikantham *On Dirichlet problem in a characteristic rectangle for higher order linear hyperbolic equations* //Nonlinear Anal., 50:8 (2002), 1153-1178. PII: S0362-546X(01)00806-9

[4] T. Kiguradze, V. Lakshmikantham *On the Dirichlet problem for fourth order linear hyperbo-lic equations* //Nonlinear Analysis, 49 (2002), No. 2, 197-219.

[5] I. Kiguradze, T. Kiguradze,*On solvability of boundary value problems for higher order nonlinear hyperbolic equations* //Nonlinear Analysis, 69 (2008), 1914–1933.

[6] I. Kiguradze, T. Kiguradze,*On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order* //Georgian Mathematical Journal, 15 (2008), No. 3, pp. 555-569.

[7] С.С. Кабдрахова,*Критерий корректной разрешимости полупериодической краевой задачи для линейного гиперболического уравнения* //Математический журнал, Алматы 2010. том 10 №4 (20). С. 33-37.

[8] С.С. Кабдрахова,*Сходимость модификации метода ломаных Эйлера к решению полупериодической краевой задачи для одного уравнения третьего порядка.* //Математический журнал, Алматы 2012. том 12 №4 (46). С. 80-94.

[9] С.С. Кабдрахова,*Об одном приближенном методе нахождения решения полупериодической краевой задачи для одного неклассического уравнения третьего порядка.* //Математический журнал, Том 18, №4(70), 2018г., стр. 61-85.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Жанар УБАЕВА, Жаксылык ТАСМАМБЕТОВ

Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова, Актобе, Казахстан

zhanar_ubaeva@mail.ru, tasmam@rambler.ru

Постановка задачи. Исследуется однородная вблизи особенности $(0,0)$ регулярная система, состоящая из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$x^3(r_{3,0}-\alpha_{3,0}x^h)p_{3,0}+x^2y(r_{2,1}-\alpha_{2,1}x^h)p_{2,1}+x^2(r_{2,0}-\alpha_{2,0}x^h)p_{2,0}+$$

$$+xy(r_{1,1}-\alpha_{1,1}x^h)p_{1,1}+x(r_{1,0}-\alpha_{1,0}x^h)p_{1,0}+y(r_{0,1}-\alpha_{0,1}x^h)p_{0,1}+(r_{0,0}-\alpha_{0,0}x^h)p_{0,0}=0,$$

$$y^3(t_{0,3}-\beta_{0,3}y^h)p_{0,3}+xy^2(t_{1,2}-\beta_{1,2}y^h)p_{1,2}+y^2(t_{0,2}-\beta_{0,2}y^h)p_{0,2}+$$

$$+xy(t_{1,1}-\beta_{1,1}y^h)p_{1,1}+x(t_{1,0}-\beta_{1,0}y^h)p_{1,0}+y(t_{0,1}-\beta_{0,1}y^h)p_{0,1}+(t_{0,0}\mp\beta_{0,0}y^h)p_{0,0}=0, \quad (1)$$

где $p_{0,0}=Z(x,y)$ - общая неизвестная, $r_{j,k},\alpha_{j,k},t_{j,k},\beta_{j,k}(j,k=\overline{0,3})$ - неизвестные постоянные.

Целью работы является исследование возможности существования логарифмических решений ряда частных случаев малоисследованной однородной системы третьего порядка гипергеометрического типа. Для различных порядков однородной системы (1) требуется установить системы гипергеометрического типа, общий метод построения решений вблизи регулярных особенностей $(0,0)$ и (∞,∞), определить количество линейно-независимых частных решений.

Для построения решения системы третьего порядка (1), целесообразно применение метода Фробениуса-Латышевой [1], хорошо зарекомендавшего себя при изучении системы второго порядка, поскольку они отличаются только порядками.

Система (1) имеет ряд интересных частных случаев.

1. Система типа Эйлера. Из (1) при $h=0$ получим систему типа Эйлера, где выражения в скобках превращаются в постоянные: $r_{j,k}-\alpha_{j,k}=a_{j,k};t_{j,k}-\beta_{j,k}=b_{j,k},(j,k=\overline{0,3})$ и справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$

$$f_1(\rho,\sigma)=a_{3,0}\rho(\rho-1)(\rho-2)+a_{2,1}\rho(\rho-1)\sigma+a_{2,0}\rho(\rho-1)+a_{1,1}\rho\sigma+a_{1,0}\rho+a_{0,1}\sigma+a_{0,0}=0,$$

$$f_2(\rho,\sigma)=b_{0,3}\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+b_{1,2}\rho(\sigma-1)\sigma+b_{0,2}\sigma(\sigma-1)+b_{1,1}\rho\sigma+b_{1,0}\rho+b_{0,1}\sigma+b_{0,0}=0$$

имеет девять пар кратных корней $(\rho_t,\sigma_t),(t=\overline{1,9})$. Тогда общее решение системы (1) представляется в виде следующей суммы

$$Z(x,y)=\sum_{t=1}^{9}C_tZ_t(x,y)=x^{\rho_1}y^{\sigma_1}(C_1+C_2lnx+C_3lny+C_4lnxlny+C_5ln^2xlny+$$

$$+C_6lnxln^2y+C_7ln^2xln^2y+C_8ln^3xln^2y+C_9ln^2xln^3y.$$

Здесь в зависимости от кратности пар корней, как будет показано в дальнейшем, общее решение системы типа Эйлера может иметь разные представления.

2. Система гипергеометрического типа Кампе де Ферье

При $h=1$ из (1) получим систему изученную Кампе де Ферье [2].

Теорема 2. Пусть последовательность пар корней $(\rho_t,\sigma_t),(t=\overline{1,9})$ состоит из трех последовательностей

$$(\rho_1,\sigma_1)=(\rho_2,\sigma_2)=(\rho_3,\sigma_3)=(\rho_4,\sigma_4),$$

$$(\rho_5, \sigma_5) = (\rho_6, \sigma_6) = (\rho_7, \sigma_7) = (\rho_8, \sigma_8), (\rho_9, \sigma_9). \quad (2)$$

Между ними выполняется соотношение:

$$(\rho_i, \sigma_i) > (\rho_k, \sigma_k) > (\rho_r, \sigma_r), (i = 1, 2, 3, 4; k = 5, 6, 7, 8; r = 9), \quad (3)$$

и они не отличается на целые числа. Тогда однородная система дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка (1):

1) имеет подпоследовательность линейно-независимых частных решений

$$Z_1(x, y) = x^{\rho_1} y^{\sigma_1} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n, (A_{0,0} \neq 0)$$

$$Z_2(x, y) = Z_1(x, y) lnx + f_1^{(1)}(x, y),$$

$$Z_3(x, y) = Z_1(x, y) lny + f_2^{(1)}(x, y),$$

$$Z_4(x, y) = Z_1(x, y) lnxlny + f_3^{(1)}(x, y) lnx + f_4^{(1)}(x, y) lny + f_5^{(1)}(x, y), \quad (4)$$

где $f_1^{(1)}(x, y) = x^{\rho_1} y^{\sigma_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{m,n}^{(l)} x^{\mu} y^{\nu}, (A_{0,0} \neq 0), (l = \overline{1,5}), (j = \overline{1,4})$ на оснований теоремы существования логарифмических решений системы второго порядка [1, с.165].

2) Аналогично, также имеется подпоследовательность линейно-независимых частных решений

$$Z_5(x, y) = x^{\rho_5} y^{\sigma_5} \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n} x^m y^n, (B_{0,0} \neq 0)$$

$$Z_6(x, y) = Z_5(x, y) lnx + f_1^{(2)}(x, y),$$

$$Z_7(x, y) = Z_5(x, y) lny + f_2^{(2)}(x, y),$$

$$Z_8(x, y) = Z_5(x, y) lnxlny + f_3^{(2)}(x, y) lnx + f_4^{(2)}(x, y) lny + f_5^{(2)}(x, y), \quad (5)$$

где $f_1^{(2)}(x, y) = x^{\rho_j} y^{\sigma_j} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{m,n}^{(l)} x^{\mu} y^{\nu}, (B_{0,0} \neq 0), (l = \overline{1,5}), (j = \overline{1,4})$.

3) Имеет одно линейно-независимое частное решение

$$Z_9(x, y) = x^{\rho_9} y^{\sigma_9} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} x^m y^n, (C_{0,0} \neq 0). \quad (6)$$

Как видно, из (4)-(6) решения Z_1, Z_5, Z_9 соответствующие первым показателям каждой из последовательностей (2)-(3) представляются в виде обобщенных степенных рядов. Остальные решения являются логарифмическими. Мы получили совокупность девяти решений, необходимо доказать, что они образуют фундаментальную систему. Последовательности можно составлять по разному. Это вызывает определенные трудности, поскольку, с возрастанием кратности пар корней $(\rho_t, \sigma_t), (t = \overline{1,9})$ сложнее будет составлять рекуррентные соотношения вида

$$\frac{\partial}{\partial \rho} Z[x, \rho; y, \sigma], \frac{\partial}{\partial \sigma} Z[x, \rho; y, \sigma], \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \sigma} Z[x, \rho; y, \sigma], ..., \frac{\partial^5}{\partial \rho^3 \partial \sigma^2} Z[x, \rho; y, \sigma], \frac{\partial^5}{\partial \rho^2 \partial \sigma^3} Z[x, \rho; y, \sigma],$$

которые необходимы для построения конкретных решений системы. В работе доказаны еще ряд теорем и построены конкретные примеры.

Список литературы

[1] Zh.N. Tasmambetov, *Construction of normal and normally-regular solutions of special systems of partial equations of second order* // IP Zhanadilov S.T.,463p. (2015).

[2] P. Appell,M.J. Kampe de Feriet,*Fonctions hypergeometriques et hypersperiques* // Paris:Gauthier Villars.,434 pp.1926.

— ⁂ —

ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КОЭФФИЦИЕНТТІ КЕРІ ЕСЕП

Хонатбек ХОМПЫШ, Айдос ШӘКІР

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан

ajdossakir@gmail.com

Есептің қойылымы. Шенелген тіктөртбұрышты $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T\}$ облысында

$$u_t - u_{xx} - b(t)u_{xxt} = f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t \leq T \tag{1}$$

псевдопараболалық теңдеуін,

$$u(x,0) = \varphi(x), \ 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

бастапқы шартын,

$$u(x,0) = 0, u(1,t) = 0, \ 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

шекаралық шарттарын және

$$\int\limits_0^1 u(x,t)dx = E(t), \ 0 \leq t \leq T \tag{4}$$

интегралдық қосымша шартын қанағаттандыратын $u(x,t), \ b(t)$ - функциялар жұбын табу кері есебін қарастырайық. Мұндағы $\varphi(x), \ f(x,t), \ E(t)$ - белгілі функциялар. Аталмыш, (1)-(4) есептің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын деп алайық:

$$\varphi(x) \in C^4[0,1], \ \varphi(0) = 0, \ \varphi(1) = 0, \ \varphi_k < 0, \ k = 0,1,.... \tag{5}$$

$$E(t) \in C^1[0,T], \ E(0) = \int\limits_0^1 \varphi(x)dx, \ E^{'}(t) > 0. \tag{6}$$

$$f(x,t) \in C^2[0,1] \cap \overline{C}(Q_T), \ f(0,t) = 0, \ f(1,t) = 0, \ f_k > 0, \ k = 0,1,.... \tag{7}$$

$$\xi c_0(c_1 + c_2) < 1 \tag{8}$$

мұндағы $\varphi_k, \ f_k(t)$ сәйкес $\varphi(x)$ және $f(x,t)$ функцияларының Фурье коэффициенттері, ал $c_0, \ c_1, \ c_2$ есептің берілгендерінен тәуелді тұрақтылар.

Теорема. Егер (5)-(8) шарттар орындалса, онда (1)-(4) кері есебінің жалғыз классикалық шешімі бар болады.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05132041

— ⁂ —

ТЕПЛОВЫЕ ПОЛИНОМЫ И СМЕЖНЫЕ ФУНКЦИИ

Ю.Р. ШПАДИ, А.Т. КУЛАХМЕТОВА, А.А. КАВОКИН

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан

yu-shpadi@yandex.ru, kulakhmetova@mail.ru, kavokin_alex@yahoo.com

Используя представление решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

в виде двойного степенного ряда $u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x^i t^j$, получены следующие его частные решения $u_m(x,t)$

$$u_m(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^{2n} n! a^{2(n-k)}}{(n-k)!(2k)!} x^{2k} t^{n-k}, & m = 2n, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^{2n} n! a^{2(n-k)}}{(n-k)!(2k+1)!} x^{2k+1} t^{n-k}, & m = 2n+1, \end{cases} \qquad m = 0,1,2,\dots. \tag{2}$$

С помощью функций (2) могут быть построены, в частности, решения задачи Коши в бесконечной области $-\infty < x < \infty$ и задачи в полубесконечной области $0 < x < \infty$ в зависимости от значения в точке $x = 0$. Однако во втором случае значение $u(x,0)$ в начальный момент $t > 0$ становится функцией ее краевого значения $u(0,t)$, что не позволяет полноценно описать температурное поле в области $x > 0$, учитывающее также его начальное состояние.

В работе [1] расширено множество функций (2) за счет ассоциированных функций, однако их количества и свойств недостаточно для полноценного решения краевых задач теплопроводности.

Все решения уравнения (1) обладают свойством подобия, которое утверждает, что если функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1), то функция $u(kx, k^2 t)$ также является его решением [2]. Если принять $k = \frac{1}{2a\sqrt{t}}$, $t > 0$, то функции $u_m(x,t)$ примут вид произведения

$$u_m(x,t) = \left(2a\sqrt{t}\right)^m f(m,z), \quad z = z(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{3}$$

в котором

$$f(m,z) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^{2n} n! z^{2k}}{(n-k)!(2k)!}, & m = 2n, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^{2n} n! z^{2k+1}}{(n-k)!(2k+1)!}, & m = 2n+1, \end{cases} \qquad m = 0,1,2,\dots. \tag{4}$$

Используя тот факт, что функции $u_m(x,t)$ удовлетворяют уравнению (1), а также учитывая их представление (3), находим уравнение для функций $f(m,z)$:

$$\frac{d^2 f(m,z)}{dz^2} + 2z \frac{df(m,z)}{dz} - 2m f(m,z) = 0, \tag{5}$$

Авторы поддержаны грантом AP05133919 КН МОН РК

Теорема 1. *Если функция $f(m,z)$ является решением уравнения (5) при некотором целом $m = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$, то функция*

$$u_m(x,t) = \left(2a\sqrt{t}\right)^m f\left(m, \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{6}$$

является решением уравнения теплопроводности (1) в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

Функции $f(m,z)$, определенные выражением (4), называются тепловыми полиномами, а дифференциальное уравнение (5) — уравнением тепловых полиномов. Теорема 1 позволяет значительно расширить множество (3)–(4) аналитических решений уравнения (1), дополняя его множеством (3), в котором функции $f(m,z)$ являются произвольными решениями уравнения (5).

Определение 1. *Решения $f_1(m,z)$ и $f_2(m,z)$ уравнения (5), удовлетворяющие начальным условиям*

$$\begin{cases} f_1(m,0) = 1, \\ f_1'(m,0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(m,0) = 0, \\ f_2'(m,0) = 1, \end{cases}$$

назовем смежными функциями по отношению к тепловым полиномам (4).

Пара функций $f_1(m,z)$ и $f_2(m,z)$ составляет систему линейно-независимых решений уравнения (5), отвечающую заданному значению параметра m.

Приведем результаты построения и исследования решений уравнения (5).

1) Получены пары линейно-независимых решений уравнения (5) для всех целых значений $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

2) Установлено представление функций Хартри (обобщенных функций ошибок) [3], являющихся решениями уравнения (5), через функции $f_1(m,z)$ и $f_2(m,z)$ при $m \geqslant 0$, а также обратное выражение функций $f_1(m,z)$ и $f_2(m,z)$ через функции Хартри.

3) Для отрицательных m определена связь уравнения (5) с уравнением Эрмита [4] и выражение его решений через решения уравнения Эрмита. Заметим, что уравнение тепловых полиномов (5) и уравнение Эрмита относятся к одной и той же группе уравнений параболического цилиндра.

4) Для всех решений $f_1(m,z)$ и $f_2(m,z)$ уравнения (5), $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, получены представления в интегральной форме вырожденной гипергеометрической функции.

5) Установлены рекуррентные соотношения между решениями уравнения (5) в алгебраической, дифференциальной и интегральной формах.

6) Исследована асимптотика тепловых полиномов и смежных функций при $z \to \infty$, из которой, с учетом (3), следует асимптотика решений $u_m(x,t)$ при $t \to 0$.

Список литературы

[1] P.C. Rosenbloom, D.V. Widder, *Expansion in terms of heat Polynomials and associated functions* // Trans. Amer. Math. Soc. 92, 1959, pp. 220-266.

[2] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский *Уравнения математической физики.* М.:, "Наука", Изд. 6 (1999). – 709с.

[3] Харин С.Н., *Об одном обобщении функции ошибок и ее приложении в задачах теплопроводности* // В сб. "Дифференциальные уравнения и их приложения" , Алма-Ата, "Наука" , 1981. - с. 51-56.

[4] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., *Специальные функции (Формулы, графики, таблицы).* - Пер. с нем. М:, "Наука"(1964). – 344с.

— ⁂ —

Предметный указатель

Традиционная международная апрельская математическая конференция
в честь Дня работников науки Республики Казахстан,

посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и
75-летию Института математики и
математического моделирования

Алматы 2020 год

Тезисы докладов

Опубликовано на сайте ИМММ: 02 апреля 2020 года
www.math.kz