Сходимость модификации метода ломаных Эйлера решения линейной нелокальной краевой задачи для одного неклассического уравнения третьего порядка

Кабдрахова С.С.
Институт математик МОН РК, г. Алматы, Казахстан
S_Kabdrachova@mail.ru

Построена модификация метода ломаных Эйлера для нахождения приближенного решения нелокальной краевой задачи для одного неклассического уравнения третьего порядка и получены условия ее сходимости модификации.

На $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t}=a_0(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+a_3(x,t)u+f(x,t),\ (x,t)\in\overline{\Omega}, \qquad (1)$$

$$u(0,t)=\psi(t),\ t\in[0,T], \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u(x,T),\ x\in[0,\omega], \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{\partial u(x,T)}{\partial t},\ x\in[0,\omega] \qquad (4)$$

где $a_i(x,t),\ i=\overline{0,3},\ f(x,t)$ непрерывные на $\overline{\Omega}$, $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ функция и удовлетворяет условиям $\psi(0)=\psi(T),\ \dot\psi(0)=\dot\psi(T)$.

Для вектор-функции $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))$ и матрицы $A(x,t)=(a_{ij}(x,t)),\ i,j=1,2$ нормы определяются равенствами: $\|u(x,t)\|=\max\limits_{i=1,2}|u_i(x,t)|,\ \|A(x,t)\|=\max\limits_{i=1,2}\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}(x,t)|$.

Через $C(\overline{\Omega},R^2)$, $C([0,T],R^2)$ обозначим, соответственно пространство непрерывных функции $u:\overline{\Omega}\to R^2$ и $\psi:[0,T]\to R^2$. Положим $\|u(x,\cdot)\|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|,\ \|\psi\|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|$, $\|A(x,\cdot)\|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|$.

Решением задачи (1)-(4) является функция $u(x,t)$, имеющая непрерывные на $\overline{\Omega}$ частные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}$ и $\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\partial t^2}$ удовлетворяющие уравнению (1) и условиям (2)-(4).

В работе [1] с помощью замены

$$U(x,t)=\begin{pmatrix}u_1(x,t)\\ u_2(x,t)\end{pmatrix},\ V(x,t)=\frac{\partial U}{\partial x},\ \psi(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi(t)+\dfrac{\dot\psi(t)}{\alpha_0}\\ \psi(t)-\dfrac{\dot\psi(t)}{\alpha_0}\end{pmatrix},\ F(x,t)=\begin{pmatrix}\dfrac{f(x,t)}{2\alpha_0}\\ -\dfrac{f(x,t)}{2\alpha_0}\end{pmatrix},$$

$$A(x,t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left[\alpha_0+a_0(x,t)+\dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[\alpha_0+a_0(x,t)-\dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right]\\ \left[\alpha_0+a_0(x,t)-\dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[\alpha_0-a_0(x,t)-\dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right]\end{pmatrix},$$

$$B(x,t)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc}\left[a_2(x,t)+\frac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[a_2(x,t)-\frac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right]\\ \left[a_2(x,t)+\frac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[a_2(x,t)-\frac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right]\end{array}\right),$$

где $\alpha_0=\max\left(\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\left(|a_0(x,t)|+|a_1(x,t)|\right),1\right)$, задача (1)-(4) приведена к задаче

$$\frac{dV}{dt}=A(x,t)V+B(x,t)U(x,t)+F(x,t), \tag{5}$$

$$V(x,0)=V(x,T), \tag{6}$$

$$U(x,t)=\psi(t)+\int_0^x V(\xi,t)d\xi \tag{7}$$

и при предположении $a_1(x,t)\ge\sigma>0$ получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1),(2), установлены оценки ее решений и производных.

В настоящей работе предлагается модификация метода ломаных Эйлера для нахождения приближенного решения краевой задачи для одного неклассического уравнения третьего порядка (1)-(4).

Рассмотрим задачу (5)-(7). Для нахождения решения задачи (5)-(7) применяем модификацию метода ломаных Эйлера. Разобьем отрезок $[0,\omega]$ с шагом $h>0$ на N частей, $Nh=\omega$ и на каждом шаге решаем периодические краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функции $v^{(0)}(t),\dot v^{(0)}(t)$ определим равенствами: $v^{(0)}(t)=0,\dot v^{(0)}(t)=0.$

Решая периодическую краевую задачу

$\frac{dv^{(1)}}{dt}A(0,t)v^{(1)}(t)+B(0,t)\psi(t)+f(0,t),\ t\in[0,T],\ v^{(1)}(0)=v^{(1)}(T)$ находим функцию $v^{(1)}(t)$.

Функцию $v^{(2)}(t)$ найдем решая периодическую задачу

$$\frac{dv^{(2)}}{dt}A(h,t)v^{(2)}(t)+B(h,t)(\psi(t)+hv^{(1)}(t)+f(h,t),\ t\in[0,T],\quad v^{(2)}(0)=v^{(2)}(T)\,.$$

Считая известным $v^{(i-1)}(t),\ i=\overline{1,N+1}$ функцию $v^{(i)}(t)$ найдем решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(i)}}{dt}A((i-1)h,t)v^{(i)}(t)+B((i-1)h,t)\left(\psi(t)+h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t)\right)+f((i-1)h,t),t\in[0,T], \tag{8}$$

$$v^{(i)}(0)=v^{(i)}(T)\,. \tag{9}$$

Признаки однозначной разрешимости задачи (8), (9) устанавливает

Теорема. *Пусть выполняются неравенство $a_1(x,t)\ge\sigma>0$ для всех $[0,\omega]$. Тогда для любого $h>0:Nh=\omega$ периодическая краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11) имеет единственное решение $\{v^{(i)}(t),\ i=\overline{1,N+1}\}$ и справедливы оценки:*

$$\max\left(\|v^{(i)}(\cdot)\|_0,\|\dot v^{(i)}(\cdot)\|_0\right)\le$$

$$\le\max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(1+\alpha_2 h\max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\right)^{\frac{\omega}{h}}\left(\alpha_2\|\psi(\cdot)\|_0+\|\overline{f}\|_0\right),$$

где $\alpha_1=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|A(x,t)\|,\ \alpha_2=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|B(x,t)\|,\ \overline{f}(t)=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\|f(x,t)\|.$

По найденным функциям $v^{(i)}(t),\ i=\overline{1,N+1}$ на $\overline{\Omega}$ построим функции:

$$U_h(x,t) = \psi(t) + h\sum_{j=0}^{i-1} v^{(j)}(t) + v^{(i)}(t)(x-(i-1)h), \quad x \in [(i-1)h, ih),$$

$$V_h(x,t) = v^{(i+1)}(t)\frac{x-(i-1)h}{h} + v^{(i)}(t)\frac{ih-x}{h}, \quad x \in [(i-1)h, ih), i = \overline{1, N}.$$

Устанавливаются оценки $\max\limits_{(x,t)\in\Omega}\left\|U_h(x,t) - U^*(x,t)\right\| \le O(h)$, $\max\limits_{(x,t)\in\Omega}\left\|V_h(x,t) - V^*(x,t)\right\| \le O(h)$, обеспечивающие сходимость модификации метода ломаных Эйлера к решению - $U^*(x,t), V^*(x,t)$ задачи (5)-(7).

Литература

1. Оспанов М.Н. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка// Известия НАН РК. Серия физ.-мат., 2004, № 3, с.103-107.

ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

E-mail: **Sartabanov42@mail.ru** или **a_a_galiya@mail.ru**

РЕГИСТРАЦИОННАЯ ФОРМА УЧАСТНИКА СЕМИНАРА

Фамилия, Имя, Отчество ___**Кабдрахова Сымбат Сейсенбековна**
*Ученая степень и ученое звание*_*к.ф.-м.н.*_______________
*Место работы и должность*_ Институт математики МОН РК, СНС лаб. дифференциальных уравнений_________________
*Электронная почта*__*S_Kabdrachova@mail.ru*
*Название доклада*__ **СХОДИМОСТЬ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРДКА**
*Необходимость гостиницы*_____*да*_______________
*Контактный телефон*____*2-72-61-70*____________________