МРНТИ 27.39.21

Идентификация граничных условий дифференциального оператора

Кангужин Б.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: kanbalta@mail.ru
Даирбаева Г., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com
Мадибайулы Ж., Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

Настоящая работа состоит из трех частей. Для достижения единственности решения $B_{\max}u = h$ неоднородного уравнения необходимо сузить область определения максимального оператора. Обычно сужение происходит за счет граничных условий. Таким образом, возникает класс корректных сужений максимального оператора. Во второй части статьи приведем доказательство теоремы 1 и обоснование процедуры корректных сужений $\{\sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t)\}$. В третьей части статьи отдельно рассмотрим случай восстановления двухточечных граничных задач по конечному набору собственных значений и приведем иллюстрирующие численные примеры приближенных вычислений коэффициентов граничных условий. Отметим, что задача восстановления граничных функций $\{\sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t)\}$ из предложенной нами процедуры линейная задача. Этот факт неочевиден, если производится восстановление первичного набора граничных функций $\{\sigma_{jk}\}$.
Ключевые слова: граничные условия, корректное сужение, корректных сужений.

Дифференциалдық оператордың шеттік шарттарының идентификациясы

Кангужин Б.Е., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kanbalta@mail.ru
Даирбаева Г., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com
Мадибайулы Ж., Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

Бұл мақала үш бөлімнен тұрады. $B_{\max}u = h$ біртекті емес дифференциалдық теңдеуін шешу үшін максимал оператордың облысын тарылту қажет. Әдетте тарылу шеттік шарттарының көмегі арқылы жүзеге асырылады. Осылайша, максимал оператордың қисынды тарылу класы пайда болады. Мақаланың екінші бөлімінде 1 теореманың дәлелдемесін келтіреміз және $\{\sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t)\}$ шеттік функциясының қалпына келтіру үдерісін негіздейміз. Мақаланың үшінші бөлігінде меншікті мәндерінің ақырлы жиын бойынша екінүктелі шеттік есебінің қалпына келтіру жағдайларын жеке қарастырамыз және шеттік шарттың коэффициенттерінің жуықтап есептеуінің сандық мысалдарын келтіреміз. Атап өтеніміз жөн, шеттік функцияның қалпына келтіру есебі $\{\sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t)\}$ біз ұсынған үдерістер бойынша сызықты есеп. Бұл факт айқын емес, егер $\{\sigma_{jk}\}$ шеттік функцияның алғашқы жиыны бойынша қалпына келтірілсе.
Түйін сөздер: шекаралық шарттар, дұрыс тарылту, дұрыс тарылту.

Identification of boundary conditions of a differential operator

Kanguzhin B.E., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: kanbalta@mail.ru
Dairbayeva G., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com
Madibaiuly Zh., Institute of Mechanics and Mechanical Engineering named after Academician U.A. Zholdasbekov, Almaty, Kazakhstan, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

This paper consists of three parts. To achieve uniqueness of the solution of the $B_{\max}u = h$ indicated inhomogeneous equation, it is necessary to narrow the domain of definition of the maximum operator. The narrowing usually occurs due to boundary conditions. Thus, a class of correct restrictions of the maximum operator arises. In the second part of the article, we give the proof of Theorem 1 and the justification of the procedure for recovering boundary functions $\{\sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\}$. In the third part of the article, we separately consider the case of reconstructing two-point boundary value problems from a finite set of eigenvalues and give illustrative numerical examples of approximate calculations of the coefficients of the boundary conditions. Note that the problem of recovering boundary functions $\{\sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\}$ from the procedure we have proposed, the linear problem. This fact is not obvious if the initial set of boundary functions is restored $\{\sigma_{jk}\}$.

Key words: boundary conditions, correct narrowing, correct narrowing

1 Введение

Пусть в гильбертовом пространстве H задан замкнутый линейный (с плотной областью определения) оператор B такой, что $Ran(B) = H$. Обычно предполагается, что $Ker(B) \neq \{0\}$. Введенный оператор B удобно называть максимальным оператором и обозначать через $B_{\max}$. Иначе говоря, неоднородное операторное уравнение

$$B_{\max}u = h$$

имеет решение при любом $h \in H$, но их может несколько(нет единственности).

Для достижения единственности решения указанного неоднородного уравнения надо сузить область определения максимального оператора. Обычно сужение происходит за счет граничных условий. Таким образом, возникает класс корректных сужений максимального оператора. Его обозначим через $K(B_{\max}; H)$. Итак, $S \in K(B_{\max}; H)$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие требования:

- $S \subset B_{\max}$;
- $Ran(S) = H$;
- $\exists S^{-1}$ и ограничен в H.

Вопросы полного описания корректных сужений максимального оператора для отдельных модельных операторов можно найти в монографии [1].

2 Прямая и обратная задачи спектрального анализа

Прямая задача спектрального анализа. Пусть S – произвольный элемент из $K(B_{\max}; H)$. Требуется исследовать спектральные свойства оператора S. Точнее надо изучить поведение спектральных данных оператора S.

Обратная задача спектрального анализа. Пусть задан максимальный оператор $B_{\max}$ в гильбертовом пространстве H. По спектральным данным и максимальному оператору $B_{\max}$ надо восстановить оператор S. Точные постановки обратных задач для дифференциальных операторов второго порядка можно найти в работе [2].

При этом возникают сдедующие вопросы:

- Что понимать под спектральными данными?

- Однозначность восстановления в данном классе $K(B_{\max}; H)$.
- Конструктивная процедура восстановления.

Пример. В функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим дифференциальный оператор $B_{\max}$, задаваемый линейным дифференциальным выражением высшего порядка

$$B_{\max}y(x) = l(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)y^{(k)}(x)$$

и областью определения $D(B_{\max}) = W_2^n[0,1]$.

Класс корректных сужений $K(B_{\max}; H)$ в данном случае описывается следующим образом [1,3]:

Теорема (М.Отелбаев, 1983)

1. Область определения сужения $D(S)$ выберем так

$$D(S) = \{y \in W_2^n[0,1] : y^{(j-1)}(0) = \int_0^1 \sigma_j(t)l(y)dx, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

$$\sigma_j \in L_2(0,1)$$

Действие оператора определяется по формуле

$$Sy(x) = B_{\max}y(x)$$

Тогда

$$S \in K(B_{\max}; H)$$

2. Обратное утверждение также верно.

Прямая задача спектрального анализа.

Нерешенная задача: существует ли в классе $K(B_{\max}; H)$ оператор, у которого только конечное (непустое множество) собственных значений?

Нам известно следующее утверждение: Если собственных значений больше, чем $\frac{n}{2}$, то их бесконечно.

Обратная задача спектрального анализа.

В дальнейшем нам удобно иметь краевые задачи, у которых системы корневых функций образовывали базис Рисса в $L_2(0,1)$. Будем считать, что восстанавливаемый нами оператор $S \in K(B_{\max}; H)$ имеет такую систему корневых функций.

Итак, нам задан максимальный оператор $B_{\max}$, что эквивалентно заданию дифференциального выражения

$$l(y) \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)y^{(k)}(x)$$

Для любого дифференциального выражения $l(\cdot)$ по теореме Михайлова-Кесельмана [4,5] существует набор даухточечных граничных условий вида

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

таких, что если выбрать область определения оператора S_U в виде

$$D(S_U) = \{y \in W_2^n[0,1] : U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1,\dots,n\}$$

то система корневых функций оператора S_U образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. В дальнейшем считаем, что набор форм $\{U_j\}$ фиксирован и выбран по Михайлову-Кесельману. А.А. Шкаликов [6] заметил, что оператор S_V сохраняет свойство базисности, если набор форм $\{U_j\}$ заменить на другой набор форм $\{V_j\}$ где

$$V_j(y) = U_j(y) + \sum_{k=0}^{\gamma_j} \int_0^1 y^{(k)}(t)\sigma_{jk}(t)dt$$

Итак, задано дифференциальное выражение $l(\cdot)$ и набор граничных форм $\{U_j\}$. Надо по спектральным данным восстановить набор граничных функций $\{\sigma_{jk}\}$.

Задача1. Что понимать под спектральными данными?

Задача 2. Разработать конструктивный алгоритм восстановления?

Эквивалентные краевые условия.

Считаем, что граничные формы $\{V_j\}$ выбраны так, что $S_V \in K(B_{\max}; H)$.

Введем систему решений $\{\varphi_j\}$ однородного уравнения $l(y) = 0$, удовлетворяющих неоднородным краевым условиям $V_k(\varphi_j) = \delta_{kj}$.

Тогда

$$S_V^{-1}f(x) = S_U^{-1}f(x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) V_k(S_U^{-1}f).$$

Отсюда

$$S_V^{-1}f(x) = S_U^{-1}f(x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int_0^1 \rho_k(t)f(t)dt.$$

Теперь к обеим частям применим граничную форму

$$U_j(S_V^{-1}f) + \sum_{k=1}^{n} U_j(\varphi_k) \int_0^1 \rho_k(t)f(t)dt = 0$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$U_j(y) + \int_0^1 \sigma_j(t) l(y) dt = 0.$$

Теорема 1. Область определения

$$D(S_V) = \{y \in W_2^n[0,1] : V_j(y) = 0, \quad j = 1,\dots,n\}$$

оператора S_V может быть записана в виде

$$D(S_V) = \{y \in W_2^n[0,1] : U_j(y) + \int_0^1 \sigma_j(t) l(y) dt = 0, \quad j = 1,\dots,n\}.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает, что для восстановления области определения $D(S_V)$ достаточно однозначно определить набор граничных функций $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\}$ по некоторым спектральным данным. Это эквивалентно восстановлению набора функций $\{\sigma_{jk}\}$. Теорема 1 позволяет уменьшить количество восстанавливаемых функций и тем самым оптимизирует количество спектральных данным, по которым однозначно определяются граничные функции.

Спектральные данные, по которым производится восстановление.

Нам удобно оператор S_U и S_V переобозначить через S_0 и S_n, а также ввести операторы $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$.

Оператор S_k вводится по формуле

$$S_k y(x) = B_{\max} y(x)$$

$$U_j(y) + \int\limits_0^1 \sigma_j(t) B_{\max} y(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = k+1, \dots, n$$

Постановка задачи восстановления граничных условий: По максимальному оператору $B_{\max}$, граничным формам $\{U_j\}$ и набору спектров $\{\sigma(S_k), \quad k = 1, \dots, n\}$ операторов $S_1, S_2, \dots, S_n$ требуется восстановить граничные функций $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\}$.

Процедура восстановления.

На первом шаге по спектру $\sigma(S_0)$ оператора S_0 восстановим целую целую функцию $\Delta_0(\mu)$ так, чтобы $\Delta_0(\mu) = 0$ при $\mu \in \sigma(S_0)$.

На втором шаге вычислим систему решений $\{\theta_1(x,\mu), \theta_2(x,\mu), \dots, \theta_n(x,\mu)\}$ однородного уравнения $l(y) = \mu y$, подчиненные условиям

$$U_j(\theta_k) = \delta_{jk} \Delta_0(\mu), \quad j = 1, \dots, n.$$

На третьем шаге вычислим значения функции систему $\theta_1(x,\mu)$ при $\mu \in \sigma(S_1)$. Получится система корневых функций оператора оператора S_1, которая представляет базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Следовательно, $U_1(\theta_1(x,\mu)) + \mu \int\limits_0^1 \sigma_1(t)\theta_1(x,\mu)dt = 0$ при $\mu \in \sigma(S_1)$.

Отсюда находим все коэффициенты Фурье функции $\sigma_1(t)$

$$\int\limits_0^1 \sigma_1(t)\theta_1(x,\mu)dt = \frac{U_1(\theta_1(x,\mu))}{\mu}$$

при $\mu \in \sigma(S_1)$. По найденным коэффициентам Фурье $\sigma_1(t)$ стандартным образом определяем функцию $\sigma_1(t)$.

Итак, одна из граничных функции вычислена.

Затем по спектру оператора S_2 восстанавливаем вторую граничную функцию. Процесс продолжаем и последовательно восстановим граничные функций $\{\sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\}$.

Отметим, что задача восстановления граничных функций $\{\sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\}$, как видно из предложенной нами процедуры, линейная задача. Этот факт неочевиден, если производится восстановление первичного набора граничных функций $\{\sigma_{jk}\}$.

3 Заключение

В заключении отметим, что настоящая работа состоит из трех частей. Во второй части статьи приведем доказательство теоремы 1 и обоснование процедуры восстановления граничных функций $\{\sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t)\}$. В третьей части статьи отдельно рассмотрим случай восстановления двухточечных граничных задач по конечному набору собственных значений и приведем иллюстрирующие численные примеры приближенных вычислений коэффициентов граничных условий. Историю вопроса восстановления граничных условий по спектральным данным и соответствующие литературные источники приведем в третьей заключительной части статьи.

Список литературы

[1] Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. МИАН. – М.: Наука, 2000. – 229. – С. 3-175.

[2] Левитан Б.М. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов // Труды Моск. Матем. об-ва. – МГУ.–М., 1982.– С. 3-36.

[3] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширений и сужений операторов // Докл. АН СССР. – 1983. – 271, No 6. – С. 1307-1313.

[4] Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$. // Докл. АН СССР. – 1962. – 144, No 5. – С. 981-984.

[5] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Математика. – 1964.–No 2.– С. 82-93.

[6] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. – 1982. – No 6. – С. 12-21.

References

[1] Desin A. A., "Differencialno-operatornye uravneniya. Metod modelnyh operatorov v teorii granichnyh zadach" [Differential operator equations. The method of model operators in the theory of boundary value problems], *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute* 229(2000): 3-175.

[2] Levitan B. M., "Obratnaya zadacha dlya operatora Shturma-Liuvillya v sluchae konechno-zonnyh i beskonechno-zonnyh potencialov" [The inverse problem for the Sturm-Liouville operator in the case of finite-zone and infinite-zone potentials], *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva [Proceedings of Moscow Mathematical Society]*(1982): 3-36.

[3] Kakabaev K. B., Otelbayev, S. N. Shynybekov, "K voprosam rasshirenij i suzhenij operatorov" [To questions of extensions and restrictions of operators], *Docl. USSR ACADEMY OF SCIENCES* 271, No 6. (1983): 1307-1313.

[4] Mikhailov V. P., "O bazisah Rissa v $L_2(0,1)$" [On the basis of Riesz in $L_2(0,1)$], *Docl. USSR ACADEMY OF SCIENCES* 144, No 5. (1962): 981-984.

[5] Keselman G. M., "O bezuslovnoj shodimosti razlozhenij po sobstvennym funkciyam nekotoryh differencialnyh operatorov" [On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of some differential equations operators] *Iz. VUZ USSR. Mathematics* No 2. (1964): 82-93.

[6] Shkalikov A. A., "O bazisnosti sobstvennyh funkcij obyknovennyh differencialnyh operatorov s integralnymi kraevymi usloviyami" [On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions] *Westn. Moscow State University. Ser. 1. Math. Mech.* No 6. (1982): 12-21.