

УДК 517.5

## ПОГРЕШНОСТЬ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ХАОТИЧЕСКОЙ СЕТКЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА, ПОРОЖДЕННОГО ЯДРОМ ПЕАНО

Е.Н. ИВАНОВА

КазНУ имени аль-Фараби

050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 genremi@yandex.ru

Получены точные оценки погрешности сплайн-интерполяции на классе истокообразных функций двух переменных, представленных в виде суммы константы и свертки с ядром Пеано.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $F_{1,p}(\alpha, \beta)$  — класс истокообразных функций двух переменных, заданных на прямоугольнике  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ :

$$F_{1,p}(\alpha, \beta) = \left\{ f(x, y) : f(x, y) = c_0 + \int \int_{\Omega} f_{\Omega}(u, v)(u - x)_+^{\alpha}(v - y)_+^{\beta} du dv \right\},$$

где  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f_{\Omega}(u, v) \in L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $t_+^l := \max\{0, t^l\}$ ,  $l \geq 0$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ .

На классе  $F_{1,p}(\alpha, \beta)$  определим лагранжевый оператор информации  $\mathbb{I}_n : F_{1,p}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}_n$ ,

$$\mathbb{I}_n(f) = \{f(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\},$$

где  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  — фиксированный набор точек из  $\Omega$ .

Рассмотрим интерполянт  $s_f(x, y)$  функции  $f(x, y)$  вида

$$\begin{aligned} s_f(x, y) = & c_0(f) + \int \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n c_j(f)(u - x_i)_+^{\alpha}(v - y_i)_+^{\beta} \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^n c_j(f)(u - x_i)_+^{\alpha} \times \right. \\ & \left. \times (v - y_i)_+^{\beta} \right) (u - x)_+^{\alpha}(v - y)_+^{\beta} dudv, (1/p + 1/q = 1), \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющий требованиям

$$\begin{cases} \mathbb{I}_n(s_f) = \mathbb{I}_n(f), \\ \sum_{i=1}^n c_i(f) = 0 \quad (c_i(f) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n). \end{cases}$$

---

Keywords: *multivariate function, scattered data, spline, interpolation, error estimate, partition of unity*  
2000 Mathematics Subject Classification: 41A25, 41A05

© Е.Н. Иванова, 2006.

Существование такого интерполянта вытекает из необходимого и достаточного условия, приведенного в [1]. К тому же (см. [1]) он является одним из решений вариационной задачи минимизации функционала  $\mathcal{J}$  относительно оператора информации  $\mathbb{I}_n$ ,

$$\mathcal{J}(f) = \|f_\Omega\|_p := \left( \iint_\Omega |f_\Omega(u, v)|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}} \mapsto \min, \quad f \in F_{1,p}(\alpha, \beta) :$$

$$f(x_i, y_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В [2] получена следующая поточечная оценка погрешности интерполяции функции  $f(x, y)$  посредством  $s_f(x, y)$ :

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq c(p) \|f_\Omega\|_p \left( \iint_\Omega \left| (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta - \sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) (u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right|^q dudv \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2)$$

где  $c(p) \leq 2$ ;  $\psi(x, y) = (\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$  — любая вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Целью исследования в данной работе является поточечная оценка погрешности интерполяции в случае, когда в качестве  $\psi(x, y)$  взята конкретная вектор-функция. При этом показывается, что для  $\alpha = \beta = 0$ ,  $p \in (1, \infty)$  полученный порядок сходимости является точным, а при  $\alpha = \beta = 0$ ,  $p = 2$  константа, присутствующая в оценке, является наименьшей.

**2. Оценка погрешности интерполяции.** Итак, приступим к реализации поставленной цели.

Введем следующие обозначения:

$$h_i(x, y) := |x - x_i| + |y - y_i|, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$h(x, y) := \min_{j=1, \dots, n} h_j(x, y),$$

$$h := \sup_{(x, y) \in \Omega} h(x, y),$$

$$V := \{v_i\}_{i=1}^n, \text{ где } v_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 : h_i(x, y) \leq h\}.$$

Множество  $V$  является покрытием области  $\Omega$  шарами радиуса  $h$  с центрами в узлах интерполяции  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Возьмем в качестве  $\psi(x, y)$  разбиение единицы, подчиненное покрытию  $V$ . Её компоненты зададим следующим образом:

$$\psi_i(x, y) = \chi_{T_i}(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$T_i := \{(x, y) \in \Omega : h_i(x, y) = h(x, y)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\chi_T(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом, если ближайших интерполяционных узлов к точке  $(x, y)$  больше одного, то есть

$$h_{k_i}(x, y) = h(x, y), \quad i = 1, \dots, m, \quad m > 1,$$

то полагаем

$$\psi_i(x, y) = \delta_{ik_1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

То есть значением вектор-функции  $\psi(x, y)$  в каждой фиксированной точке  $(x, y) \in \Omega$  является вектор из  $\mathbb{R}_n$ , у которого только одна из координат равна единице, а остальные равны нулю.

В дальнейшем, для удобства, под записью  $(u_1, v_1) \leq (u_2, v_2)$  подразумеваем покомпонентные неравенства  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ .

Имеет место

**Теорема 1.** Для погрешности интерполяции функции  $f(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$  посредством  $s_f(x, y)$  при фиксированном  $(x, y) \in \Omega$  справедлива оценка

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_p h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y), \quad (4)$$

где  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha, \beta, q, \Omega) \in \mathbb{R}_+$ .

**Доказательство.** Фиксируем  $(x, y) \in \Omega$ . Тогда  $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} : h_k(x, y) = h(x, y)$ . Поэтому согласно (3)  $\psi_i(x, y) = \delta_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, n$  и, следовательно, неравенство (2) примет вид

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq c(p) \|f_\Omega\|_p \left( \iint_\Omega \left| (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta - (u - x_k)_+^\alpha (v - y_k)_+^\beta \right|^q dudv \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5)$$

Введём обозначения

$$T((x, y), (u, v)) := \left| (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta - (u - x_k)_+^\alpha (v - y_k)_+^\beta \right|,$$

$$L(x, y) := \|T((x, y), \cdot)\|_{L_q(\Omega)} = \left( \iint_\Omega T^q((x, y), (u, v)) dudv \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее разобьём  $\Omega$  на четыре подобласти следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u - x_k)_+^\alpha (v - y_k)_+^\beta > 0, (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta > 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : \max\{x_k, x\} < u < b, \max\{y_k, y\} < v < d \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u - x_k)_+^\alpha (v - y_k)_+^\beta > 0, (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta = 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x_k, y_k) \right\} \setminus \Omega_1 \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x_k, y_k) \text{ и либо } x \geq u, \text{ либо } y \geq v \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u - x_k)_+^\alpha (v - y_k)_+^\beta = 0, (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta > 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x, y) \right\} \setminus \Omega_1 \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x, y) \text{ и либо } x_k \geq u, \text{ либо } y_k \geq v \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_4 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u - x_k)_+^\alpha (v - y_k)_+^\beta = 0, (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta = 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3). \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\Omega = \cup_{i=1}^4 \Omega_i$ ,  $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ .

Разложив функцию  $(u - x_k)^\alpha (v - y_k)^\beta$  в окрестности точки  $(x, y)$  по формуле Тейлора при фиксированном  $(u, v)$ , получим

$$(u - x)^\alpha (v - y)^\beta - (u - x_k)^\alpha (v - y_k)^\beta = - \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} \times \\ \times (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} (y_k - y)^{\gamma_2}, \quad \text{где} \quad C_{w_1}^{w_2} = \frac{w_1!}{w_2! (w_1 - w_2)!}.$$

Тогда  $T((x, y), (u, v))$  на  $\Omega$  будет выглядеть следующим образом:

$$T((x, y), (u, v)) = \begin{cases} \left| \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} \times \right. \\ \left. \times (y_k - y)^{\gamma_2} \right|, & (u, v) \in \Omega_1, \\ (u - x_k)^\alpha (v - y_k)^\beta, & (u, v) \in \Omega_2, \\ (u - x)^\alpha (v - y)^\beta, & (u, v) \in \Omega_3, \\ 0, & (u, v) \in \Omega_4. \end{cases}$$

Возможны следующие варианты расположения точек  $(x, y)$ ,  $(x_k, y_k)$  относительно друг друга:  $\{x \geq x_k, y \geq y_k\}$ ,  $\{x \leq x_k, y \leq y_k\}$ ,  $\{x \geq x_k, y \leq y_k\}$ ,  $\{x \leq x_k, y \geq y_k\}$ .

Для оценки  $L(x, y)$  сверху достаточно рассмотреть один из вариантов, например, когда  $x \geq x_k, y \geq y_k$ . Для остальных вариантов оценка  $L(x, y)$  устанавливается аналогичным образом.

Воспользовавшись неравенством (см., например, [3], гл.2)

$$(w_1 + w_2)^{\frac{1}{q}} \leq w_1^{\frac{1}{q}} + w_2^{\frac{1}{q}} \quad \forall w_1, w_2 \geq 0, \quad \forall q \geq 1,$$

оценим  $L(x, y)$  следующим образом:

$$L(x, y) = \left[ \iint_{\Omega_1} \left| \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (y_k - y)^{\gamma_2} \right|^q dudv + \iint_{\Omega_2} (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ \leq \left[ \iint_{\Omega_1} \left| \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (y_k - y)^{\gamma_2} \right|^q dudv \right]^{\frac{1}{q}} + \left[ \iint_{\Omega_2} (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv \right]^{\frac{1}{q}} := I_1 + I_2.$$

В свою очередь, учитывая, что на  $\Omega_1$  функция  $T((x, y), (u, v))$  является многочленом относительно степеней  $(x_k - x)^{\gamma_1} (y_k - y)^{\gamma_2}$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ ,  $\gamma_1 \leq \alpha$ ,  $\gamma_2 \leq \beta$ . В частности, она содержит в себе  $(x_k - x)^{\gamma_1} (y_k - y)^{\gamma_2}$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . Причем ликвидировать данные степени за счет интегрирования по переменной  $(u, v)$  на  $\Omega_1$  нельзя, поскольку при расстановке пределов интегрирования по области  $\Omega_1$  будут одновременно задействованы числа  $u = b$ ,  $v = d$ . С учетом соотношений  $|u_1 - u_2| \leq b - a \quad \forall u_1, u_2 \in [a, b]$ ;  $|v_1 - v_2| \leq d - c \quad \forall v_1, v_2 \in [c, d]$ , очевидно  $\forall (u, v) \in \Omega_1$  следующее неравенство:

$$T((x, y), (u, v)) \leq A_1 |x - x_k| + A_2 |y - y_k|,$$

где  $A_1, A_2$  – некоторые положительные числа, величины которых зависят от геометрической характеристики области  $\Omega$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left[ \iint_{\Omega_1} (A_1|x - x_k| + A_2|y - y_k|)^q dudv \right]^{\frac{1}{q}} \leq A_3 h_k(x, y) \left( \int_x^b \int_y^d dudv \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq A_3 \sqrt[q]{(b-a)(d-c)} h_k(x, y) = Ah(x, y), \end{aligned}$$

где

$$A := \sqrt[q]{(b-a)(d-c)} \max\{A_1, A_2\}.$$

Ясно, что при  $\alpha = \beta = 0$   $I_1 \equiv 0$ .

Теперь оценим  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[ \int_{x_k}^x \int_{y_k}^d (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv + \int_x^b \int_{y_k}^y (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left[ (x - x_k)^{\alpha q + 1} \left\{ \frac{(d - y_k)^{\beta q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} + (y - y_k)^{\beta q + 1} \left\{ \frac{(b - x_k)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(x - x_k)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[ (x - x_k)^{\alpha q + 1} \left\{ \frac{(d - y_k)^{\beta q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} + (y - y_k)^{\beta q + 1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{(b - x_k)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[ (x - x_k)^{\alpha q + 1} \left\{ \frac{(d - c)^{\beta q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} + (y - y_k)^{\beta q + 1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{(b - a)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \leq B_1 \left( |x - x_k|^{\alpha q + 1} + |y - y_k|^{\beta q + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq B_1 B_2 \left( |x - x_k| + |y - y_k| \right)^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}} = Bh^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y), \end{aligned}$$

где  $B = B_1 B_2$ ;  $B_1 = \frac{\max\left\{(d-c)^{\beta + \frac{1}{q}}; (b-a)^{\alpha + \frac{1}{q}}\right\}}{\sqrt[q]{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)}}$ ;

$$B_2 = \begin{cases} \max\{1; (d-c)^{\beta - \alpha}\}, & \text{если } \min\{\alpha, \beta\} = \alpha, \\ \max\{1; (b-a)^{\alpha - \beta}\}, & \text{если } \min\{\alpha, \beta\} = \beta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$L(x, y) \leq Ah(x, y) + Bh^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y) \leq Ch^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y),$$

где

$$C = \begin{cases} \max\left\{A; B[2 \max(b-a, d-c)]^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\} - 1}\right\}, & \text{если } \min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\} = 1, \\ \max\left\{B; A[2 \max(b-a, d-c)]^{1 - \min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}\right\}, & \text{если } \min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\} = \\ & = \min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}. \end{cases}$$

Следовательно, для  $(x, y) \in \Omega$  согласно (5) справедливо неравенство (4), где

$$\mathcal{A} = c(p)C.$$

**Следствие 1.** Для погрешности интерполяции функции  $f(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$  посредством  $s_f(x, y)$  на  $\partial_1\Omega := \{(x, y) \in \Omega : x = b, \text{ либо } y = d\}$  справедлива оценка

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A}_1 \|f_\Omega\|_p h^{\frac{1}{q} + \min\{\alpha, \beta\}},$$

где  $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R}_+$ .

**Доказательство.** Если хотя бы один интерполяционный узел попадает на  $\partial_1\Omega$ , то выполняется равенство  $f(x, y) - s_f(x, y) = 0$ ,  $\forall (x, y) \in \partial_1\Omega$  и, следовательно, утверждение следствия 1 очевидно.

Считаем, что на  $\partial_1\Omega$  не попадает ни один интерполяционный узел. Тогда  $\forall (x, y) \in \partial_1\Omega$  выполняется  $I_1 = 0$  и, следовательно,

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq B h^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}} c(p) \|f_\Omega\|_p = \mathcal{A}_1 \|f_\Omega\|_p h^{\frac{1}{q} + \min\{\alpha, \beta\}},$$

где константа  $B$  определена при доказательстве теоремы 1,  $\mathcal{A}_1 := c(p)B$ .

**Следствие 2.** Для погрешности интерполяции функции  $f(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$  посредством  $s_f(x, y)$  на  $\Omega$  справедливо неравенство

$$\|f - s_f\|_{L_r(\Omega)} \leq \mathcal{A}_2 \|f_\Omega\|_p h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}},$$

где  $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 < r \leq \infty$ .

**Доказательство.** При  $r = \infty$  утверждение следствия 2 очевидно. Пусть  $0 < r < \infty$ . Тогда согласно теореме 1

$$\begin{aligned} \|f - s_f\|_{L_r(\Omega)} &\leq c(p) \|f_\Omega\|_p \left( \iint_{\Omega} L^r(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_p \left( \iint_{\Omega} dx dy \right)^{\frac{1}{r}} h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}} = \mathcal{A}_2 \|f_\Omega\|_p h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}, \end{aligned}$$

где число  $\mathcal{A}$  определено в доказательстве теоремы 1,  $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A} \sqrt[r]{(b-a)(d-c)}$

Далее покажем, что оценка (4) для  $f(x, y) \in F_{1,p}(0, 0)$  точна по порядку, а для  $f(x, y) \in F_{1,2}(0, 0)$  константа, фигурирующая в этой оценке является наименьшей. Для этого нам придется провести некоторые конструктивные построения.

Будем работать с функциями  $g(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$  вида

$$\begin{aligned} g(x, y) &= c_0(g) + \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{i=1}^m c_i(g) (u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right|^{q-1} \times \\ &\times \operatorname{sgn} \left( (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{i=1}^m c_i(g) (u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right) (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta du dv, \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяющими требованиям

$$\begin{cases} g(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ 1 + \sum_{i=1}^m c_i(g) = 0 \quad (c_i(g) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m), \\ g(\bar{x}, \bar{y}) > 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m; (\bar{x}, \bar{y})\}$  – фиксированный набор точек из  $\Omega$ .

Для функции  $g(x, y)$  будет справедливо равенство

$$\|g_\Omega\|_p = \left( \sum_{i=1}^m c_i(g)g(x_i, y_i) + g(\bar{x}, \bar{y}) \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g(\bar{x}, \bar{y})}.$$

Распишем последнюю запись более детально:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}, \bar{y}) &= g(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^m c_i(g)g(x_i, y_i) = c_0(g) \left[ 1 + \sum_{i=1}^m c_i(g) \right] + \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^m c_j(g)(u - x_j)_+^\alpha (v - y_j)_+^\beta \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left( (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{j=1}^m c_j(g)(u - x_j)_+^\alpha \times \right. \\ &\times \left. (v - y_j)_+^\beta \right) \left[ (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{i=1}^m c_i(g)(u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right] dudv = \\ &= \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{j=1}^m c_j(g)(u - x_j)_+^\alpha (v - y_j)_+^\beta \right|^q dudv = \|g_\Omega\|_p^p. \end{aligned}$$

То есть

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = \|g_\Omega\|_p^p. \quad (8)$$

Отметим, что данное равенство будет играть принципиальную роль в последующих изысканиях.

Итак, справедлива

**Теорема 2.** Для функции  $f(x, y) \in F_{1,p}(0, 0)$  оценка на  $\Omega$

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_p \sqrt[q]{h}, \quad (9)$$

где  $\mathcal{A} := c(p) \sqrt[q]{\max\{b-a, d-c\}}$ , является точной по порядку. Более того, для  $f(x, y) \in F_{1,2}(0, 0)$  константа  $\mathcal{A} := \sqrt{\max\{b-a, d-c\}}$ , присутствующая в оценке

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_2 \sqrt{h} \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

является наименьшей.

**Доказательство.** Положим в (6) следующее:

$$(a, c) = (\bar{x}, \bar{y}) < (x_1, y_1) \leq (x_i, y_i), \quad i = 2, \dots, m, \quad \text{где } (x_i, y_i) \neq (x_j, y_j), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

причем  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  подобраны так, что выполняется равенство

$$h_1(\bar{x}, \bar{y}) = h, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} c_0(g) &= - \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left( (u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - \right. \\ &- \left. (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right) (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 dudv, \\ c_i(g) &= -\delta_{1i}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Тогда функция  $g(x, y) \in F_{1,p}(0, 0)$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left( (u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - \right. \\ &- \left. (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right) \left[ (u - x)_+^0 (v - y)_+^0 - (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right] dudv. \end{aligned}$$

Легко проверить, что она удовлетворяет требованиям (7) и, следовательно, для неё будет справедливо равенство (8). Распишем  $g(x, y)$  более подробно. Для этого сначала введём обозначения:

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{(x, y) \in \Omega : (x, y) \geq (x_1, y_1)\}, \\ G_2 &= \{(x, y) \in \Omega : x \leq x_1, y \geq y_1\}, \\ G_3 &= \{(x, y) \in \Omega : x \geq x_1, y \leq y_1\}, \\ G_4 &= \{(x, y) \in \Omega : (x, y) \leq (x_1, y_1)\}. \end{aligned}$$

Итак,

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in G_1, \\ (x_1 - x)(d - y), & \text{если } (x, y) \in G_2, \\ (b - x)(y_1 - y), & \text{если } (x, y) \in G_3, \\ (b - x)(y_1 - y) + (x_1 - x)(d - y_1), & \text{если } (x, y) \in G_4. \end{cases}$$

При этом

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = (b - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_1 - \bar{x})(d - y_1). \quad (12)$$

Далее пусть  $s_g(x, y)$  – сплайн вида (1), интерполирующий функцию  $g(x, y)$  в узлах  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Очевидно, что

$$s_g(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

В силу (11), (12), (13) левая часть неравенства (9) в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  для функции  $g(x, y)$  имеет вид

$$\begin{aligned} |g(\bar{x}, \bar{y}) - s_g(\bar{x}, \bar{y})| &= |g(\bar{x}, \bar{y})| = (b - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_1 - \bar{x})(d - y_1) = \\ &= \tilde{c}_1 (|x_1 - \bar{x}| + |y_1 - \bar{y}|) = \tilde{c}_1 h, \end{aligned}$$

где  $\tilde{c}_1 \in \mathbb{R}_+$ .

В свою очередь, с учетом (8), (11), (12) правая часть неравенства (9) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \|g_\Omega\|_p \sqrt[q]{h} &= \mathcal{A} \sqrt[q]{g(\bar{x}, \bar{y})} \sqrt[q]{h} = \mathcal{A} \sqrt[q]{(b - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_1 - \bar{x})(d - y_1)} \times \\ &\times \sqrt[q]{|x_1 - \bar{x}| + |y_1 - \bar{y}|} = \tilde{c}_2 (|x_1 - \bar{x}| + |y_1 - \bar{y}|) = \tilde{c}_2 h, \text{ где } \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\exists \tilde{c}_3 \in \mathbb{R}_+ : |g(\bar{x}, \bar{y}) - s_g(\bar{x}, \bar{y})| \geq \tilde{c}_3 \|g_\Omega\|_p \sqrt[q]{h}$ . Следовательно первая часть утверждения теоремы 2 доказана, то есть оценка (9) для функций из класса  $F_{1,p}(0, 0)$  точна по порядку.

Докажем вторую часть утверждения теоремы 2. Для этого покажем, что  $\forall \varepsilon \in (0, \mathcal{A}^2) \exists g_\varepsilon(x, y), \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega :$

$$|g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) - s_{g_\varepsilon}(\bar{x}, \bar{y})| > \|g_\varepsilon\|_2 \sqrt{(\mathcal{A}^2 - \varepsilon)h(\varepsilon)}. \quad (14)$$

Пусть  $(\bar{x}, \bar{y}), (x_1, y_1)$  удовлетворяют таким же требованиям, что были раньше, причем  $x_1 - \bar{x} = y_1 - \bar{y} := \varepsilon$ . Положим  $b - a = d - c = \mathcal{A}^2$ .

Очевидно, что  $\forall \varepsilon \in (0, \mathcal{A}^2) \exists m(\varepsilon) : h_1 = 2\varepsilon = h(\varepsilon)$ , где

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &:= \sup_{(x, y) \in \Omega} \min_{j=1, \dots, m(\varepsilon)} h_j(x, y); & (x_1, y_1) &\leq (x_i, y_i), \quad i = 2, \dots, m(\varepsilon) \\ & & ((x_i, y_i) &\neq (x_j, y_j), \quad i, j = 1, \dots, m(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Пусть далее

$$g_\varepsilon(x, y) = g(x, y), \text{ где } (x_1, y_1) = (\bar{x} + \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon),$$

$s_{g_\varepsilon}(x, y)$  – сплайн вида (1), интерполирующий функцию  $g_\varepsilon(x, y)$  в узлах  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m(\varepsilon)$ . Ясно, что

$$s_{g_\varepsilon}(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Поэтому левая часть неравенства (14) в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  имеет вид

$$|g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) - s_{g_\varepsilon}(\bar{x}, \bar{y})| = |g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})| = (b - \bar{x})\varepsilon + (d - y_1)\varepsilon = 2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2. \quad (15)$$

Для правой же части этого неравенства в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  имеем

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon\|_2 \sqrt{(\mathcal{A}^2 - \varepsilon)h(\varepsilon)} &= \sqrt{g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})} \sqrt{2\varepsilon(\mathcal{A}^2 - \varepsilon)} = \sqrt{(2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2)(2\mathcal{A}^2\varepsilon - 2\varepsilon^2)} = \\ &= \sqrt{(2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2)^2 - \varepsilon^2(2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая соотношения (15), (16), приходим к выводу о справедливости неравенства (14). Таким образом константу  $\mathcal{A}$  в неравенстве (10) нельзя уменьшить.

**Замечание 1.** Утверждения теорем 1, 2 легко переносятся на случай, когда  $f(x) \in F_{1,p}(\alpha)$ , где  $x \in \mathbb{R}_d$ ,  $\alpha \in Z_+^d$ ,  $d > 2$ .

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zhensykbayev A.A. // East J. on Approx. 2004. V. 10, № 1-2, P. 7–65.
2. Иванова Е.Н. // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 3. С. 48–54.
3. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.

*Поступила в редакцию 10.04.2006г.*