ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР, АНАЛИЗ ЖӘНЕ АЛГЕБРА ПРОБЛЕМАЛАРЫ

THE PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, ANALYSIS AND ALGEBRA

Қ. Жұбанов атындағы
Ақтөбе мемлекеттік университеті
9 - 10 қазан 2009 жыл
Aktobe's K. Zhubanov State University
9 - 10 October 2009

V ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ КОНФЕРЕНЦИЯ МАТЕРИАЛДАРЫ

PROCEEDINGS V INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE

II БӨЛІМ (4, 5, 6 секциялары)
Part II (sections 4, 5, 6)

Ақтөбе - 2009
Aktobe - 2009

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В РЕСПУБЛИКЕ КАЗАХСТАН

Джомартова Ш.А.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
jomartova@mail.ru

Методология математического моделирования завоевала прочные позиции в технологической и естественно-научной сферах, ее прогресс существенно заметен также и в применениях к экономическим системам [1-2].

В современных условиях несомненна актуальность математического моделирования социальных процессов и разработка информационно-аналитических систем, позволяющих осуществлять мониторинг показателей, характеризующих социально-экономическую ситуацию в разрезе регионов Республики Казахстан.

С целью разработки системы автоматизированного прогнозирования социально-экономической ситуации определен перечень социально-экономических параметров (показателей) $x = (x_1,...,x_n)$ (по каждому региону Республики Казахстан - 14 областям и двум городам: Алматы и Астана).

В данный перечень включены 40 демографических показателей, 225 социально-экономических показателей. Демографические показатели характеризуют численность городского и сельского населения региона, количество эмигрировавших и иммигрировавших, смертность, ожидаемую продолжительность жизни.

Социально-экономические показатели сгруппированы по блокам: 1) промышленность, сельское хозяйство, строительство, образование, здравоохранение, 2) жилищные условия, экологические условия, 3) криминал; 4) политическая активность населения (количество публикаций в СМИ, митинги и др. акты протеста).

Для обеспечения автоматизированного мониторинга социально-экономической ситуации и классификации регионов указанные показатели агрегированы в ряд индексов $y = (y_1,..., y_m)$:

- природно-экологический потенциал,
- промышленный потенциал,
- сельскохозяйственный потенциал,
- трудовой потенциал,
- уровень и условия жизни,
- индекс стоимости жизни,
- индекс развития человеческого потенциала,
- уровень образования,
- уровень криминогенности,
- уровень медицинского обеспечения,
- индекс скрытой социальной напряженности,
- индекс открытой социальной напряженности.

Численные данные параметров за предыдущие годы взяты из статистических сборников и ежегодников Агентства Республики Казахстан по статистике. В качестве управляющих параметров $u = (u_1,...,u_k)$ определены директивы, мероприятия республиканского и регионального уровня. В свою очередь управляющие параметры подразделены на социально-экономические, политические.

Используя особенности исследуемой задачи, построим модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t) \qquad (1)$$

$$y = g(x). \qquad (2)$$

Вид функций $f(x,u,t)$ и $g(x,t)$ (с точностью до неизвестных постоянных ρ) строится с учетом «физики» исследуемых показателей. С помощью методов математической теории идентификации на основе ретроспективных знаний значений параметров $x=(x_1,...,x_n)$ и $u=(u_1,...,u_k)$ вычисляются значения параметров ρ.

Зная значения показателей $\tilde{o}$ в момент времени t_0

$$x(t_0)=x_0; \tag{3}$$

$$y(t_0)=g(x_0) \tag{4}$$

можно, решая полученную задачу Коши (1)-(4) численными методами (в частности методом Рунге-Кутта) при заданных внешних воздействиях u, найти значение параметров x,y в момент времени t_1, т.е. таким образом, решить задачу прогнозирования на период $[t_0,t_1]$.

На управления даются ограничения

$$0 \le u_i(t) \le u^i_{\max}, \quad i=\overline{1,k}, \quad t\in[t_0,t_1].. \tag{5}$$

На параметры x накладываются фазовые ограничения

$$0 \le x_i(t) \le x^i_{\max}, \quad i=\overline{1,n}, \quad t\in[t_0,t_1]. \tag{6}$$

Желаемое состояние в конечный момент времени t_1, должно удовлетворять некоторым условиям

$$y(t_1)=g(x(t_1)) \le d_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{7}$$

при этом, момент времени t_1 считается заданным (фиксированным).

Для оценки качества работы системы используется следующий критерии (функционал):

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left[u^*(t)R_0u(t)+(x(t)-z)^*R_1(x(t)-z)\right]dt \tag{8}$$

где постоянный n–вектор $z=(z_1,...,z_n)$ определяется следующим образом:

$$z_i=\begin{cases}0, \text{åñëè çíà÷åíèå ñîîòâåòñòâ óþùåãî ïàðàìåòðà äîëæíî ìèíèìèçèðî âàòüñÿ}\\ \tilde{o}^i_{\max}, \text{èíà÷å}\end{cases}$$

В функционале (8) R_0 - положительно-определенная mxm-матрица, R_1 - неотрицательно-определенная nxn-матрица.

Составим множество допустимых управлений

$$U=\left\{u \middle| 0\le u_i(t)\le u^i_{\max}, \quad i=\overline{1,k}, \; t\in[t_0;t_1]\right\} \tag{9}$$

Это задача оптимального управления с фазовыми ограничениями (6), с закрепленным левым концом (3), подвижным правым концом (7) и ограничениями на управление (5).

Рассматривается задача минимизации функционала (3) при ограничениях (1)-(6). Момент времени t_1 считается фиксированным.

Для поставленной задачи оптимального управления составляется функция Гамильтона

$$H(x(t),u,\psi(t),\psi_0)=u^*(t)R_0u(t)+(x(t)-z)^*R_1(x(t)-z)+(f(x(t),u(t),t))^*\psi. \tag{10}$$

Составляется сопряженная система дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad t\in[t_0,t_1] \tag{11}$$

Оптимальное управление определяется из условия (9) и максимума гамильтониана (10):

$$u = \begin{cases} 0, \ \text{åñëè} \quad R_0^{-1} \dfrac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} \psi < 0 \\ R_0^{-1} \dfrac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} \psi, \ \text{åñëè} \quad 0 \le R_0^{-1} \dfrac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} \psi < u_{\max} \\ u_{\max}, \ \text{åñëè} \quad R_0^{-1} \dfrac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} \psi > u_{\max} \end{cases}.$$

Теорема. *Пусть пара* $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ *– является решением поставленной в задачи. Тогда необходимо существует вектор-функция* $\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ *и параметр такие, что*

1) $\psi_0 \le 0$, $|\psi_0| + |\psi(t)| \ne 0$, $t \in [t_0, t_1]$

2) $\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ *- решение сопряженной системы дифференциальных уравнений (11) удовлетворяющая условию: существуют числа* $\beta_1, \ldots, \beta_k$ *такие, что*

$$\psi_i(t_1) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \frac{\partial g_j(x(t_1))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(x(t_1))}{\partial x_i} - d_i \right) = 0, \quad \beta_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

3) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ *функция* $H(x(t), u, \psi(t), \psi_0)$ *по переменной и достигает своей верхней грани на множестве* U *при* $u = u(t)$, *т.е.*

$$\sup_{u \in U} H(x(t), u, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), \psi(t), \psi_0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малыхин В.И. Социально-экономическая структура общества: математическое моделирование. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 175с.
2. Новая парадигма развития России в XXI веке. Комплексные исследования проблем устойчивого развития: идеи и результаты //Под ред. В.А.Коптюга, В.М.Матросова, В.К.Левашова – М.: Academia, 2000. – 416 с.