Организаторы конференции благодарны

Российскому фонду фундаментальных исследований,

Федеральному агентству научных организаций,

ООО НПП «Технофильтр»,

Администрации Владимирской области

за помощь в подготовке и проведении конференции.

Steklov Mathematical Institute of the RAS

Vladimir State University
named after Alexander and Nikolay Stoletovs

Lomonosov Moscow State University

INTERNATIONAL CONFERENCE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DYNAMICAL SYSTEMS

Abstracts

Suzdal
6 — 11 July 2018

Vladimir
«Arkaim»
2018

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль
6 — 11 июля 2018

Владимир
«Аркаим»
2018

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

ISBN 978-5-93767-285-8

Программный комитет

- ◇ **В. В. Козлов**, председатель (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- ◇ **А. А. Давыдов**, зам. председателя (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Национальный исследовательский технологический университет ”МИСиС”, Москва, Россия).
- ◇ **Д. В. Трещев**, зам. председателя (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- ◇ **А. А. Шкаликов**, зам. председателя (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия).
- ◇ **С. М. Асеев** (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- ◇ **А. М. Гайфуллин** (Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), Жуковский, Россия).
- ◇ **В. З. Гринес** (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия).
- ◇ **А. Б. Куржанский** (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия).
- ◇ **В. И. Максимов** (Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия).
- ◇ **Г. П. Панасенко** (Университет Жана Монне, Сен Этьен, Франция).
- ◇ **Ф. Л. Черноусько** (Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия).
- ◇ **А. П. Чупахин** (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия).
- ◇ **С. Янечко** (Центр перспективных исследований, Варшава, Польша).

Организационный комитет

- ◇ **А. А. Давыдов**, сопредседатель (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Национальный исследовательский технологический университет ”МИСиС”, Москва, Россия).
- ◇ **А. М. Саралидзе**, сопредседатель (Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия).
- ◇ **И. А. Петренко**, зам. председателя (Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия).
- ◇ **Е. В. Шелепова**, зам. председателя (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия).
- ◇ **А. Д. Изаак** (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).
- ◇ **В. Г. Прокошев** (Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия).
- ◇ **В. Н. Чубариков** (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия).
- ◇ **П. А. Яськов** (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия).

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Механический и физический смысл дзета-функции Римана

Абраров Д.Л. (Россия, Москва)
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Федерального исследовательского центра "Информатика и управление"РАН
abrarov@yandex.ru

Вопрос о механическом и физическом смысле дзета-функции Римана $\zeta(s)$ появляется естественным образом в контексте утверждения о структуре общего решения классической задачи о тяжелом волчке ([1],[2]).

Теорема 1. *Фазовый поток g^s_{E-P} общих уравнений Эйлера-Пуассона (E-P) имеет следующее каноническое аналитическое представление (см. [1]):*

$$g^s_{E-P} = e^{\zeta(s, E^{ss}/\mathbb{Q})},$$

где $E^{ss}/\mathbb{Q}$ - произвольные полустабильные эллиптические кривые над $\mathbb{Q}$ соответственно; $\zeta(s, E^{ss}/\mathbb{Q})$ - их дзета-функции (соответствующие определения см. в [1]).

Появление дзета-функций эллиптических кривых над полем $\mathbb{Q}$ как точных решений кинематических уравнений Пуассона из динамики классического тяжелого твердого тела (см. [1]), инициировало стремление к выявлению смысла и роли собственно классической дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в контексте гамильтоновых дифференциальных уравнений - гамильтоновых систем (ГС).

Оказывается, что индуктивно обобщая Теорему 1, канонически определяемому аналитическому продолжению $\zeta_{an}(s)$ функции $\zeta(s)$ в формальную бесконечность $s = \infty$ можно однозначно сопоставить конкретное специальное "категорное"дифференциальное уравнение, решением которого данное продолжение $\zeta_{an}(s)$ и является (несмотря на хорошо известный факт неудовлетворяемости собственно функции $\zeta(s)$ никакому дифференциальному уравнению).

Теорема 1. *Функция $\zeta_{an}(s)$ является гамильтонианом аналитического тривиального волчка (АТВ) - гамильтоновой системы, представляющей универсальную $\mathbb{R}$-аналитическую теорию возмущений классического тривиального волчка (шара с произвольной точкой закрепления). Функция $\zeta_{an}(s)$ является образом универсального аналитического возмущения сепаратрисы классического волчка Эйлера.*

Проекция естественной декомпактификации функции $\zeta_{an}(s)$ дает функцию $\zeta(s)$, придавая ей смысл канонической координаты на сепаратрисе универсального аналитического возмущения волчка Эйлера, а также наделяет ее механическим и физическим смыслом.

Следствие 1. *Механический смысл тождества Эйлера для $\zeta(s)$: данное тождество представляет канонические координаты на кинематике АТВ.*

Следствие 2. *Механический смысл римановой поверхности $\zeta(s)$: данная поверхность является фазовым пространством аналитического тривиального волчка и аналитически изоморфна 4-сфере $\mathbb{S}^4$.*

Следствие 3. *Механический смысл гипотезы о нулях $\zeta(s)$: ось собственного вращения АТВ всегда ортогональна его поверхности (аналитической сфере Пуассона).*

Следствие 4. *Механический смысл функционального уравнения для $\zeta(s)$: каноническая глобальная форма уравнений движения АТВ, также выражающее каноническую двойственность между аналитическими версиями симплектической и проективной геометрий.*

Теорема 2. *Функция $\zeta(s)$ - гамильтониан вертикального равновесия максимального ранга классического $N = \infty$-звенного математического маятника.*

Гипотеза 1. *Функция $\zeta(s)$ - универсальный гамильтониан гипотетической категории аналитических ГС.*

Приведем теперь гипотезу о ключевом (на наш взгляд) физическом смысле функции $\zeta(s)$.

Гипотеза 2. *Функция $\zeta(s)$ - математическая модель потенциала поля Хиггса (см. также [1], [2]).*

Литература

[1] Абраров Д. Л. Дзета-функции и L-функции в гамильтоновой динамике. М.: ВЦ РАН, 2010, 225 с.

[2] Абраров Д. Л. Дзета-модель классической механики. Теоретические и прикладные аспекты. LAP Lambert Academic Publishing, 2016, 276 с, ISBN 978-3-330-01623-1

Анализ устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова при наличии плоских и пространственных возмущений

Авдюшкин А. Н. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
avdyushkin.a.n@yandex.ru

Бардин Б. С. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
bsbardin@yandex.ru

Рассматривается плоская ограниченная задача трёх тел. Предполагается, что два тела P_1 и P_2, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, двигаются в одной плоскости относительно их общего центра масс по эллиптическим орбитам, а третье тело P обладает малой массой и не оказывает влияние на движение двух других тел. Если массы тел P_1 и P_2 равны, то уравнения движения допускают замечательное частное решение, впервые обнаруженное К.А. Ситниковым [1], которое описывает движение тела P по прямой, проходящей через центр масс системы перпендикулярно плоскости орбит тел P_1 и P_2. Решение К.А. Ситникова сохраняется и в фотогравитационной задаче трех тел, когда помимо гравитационных сил на тело P со стороны тел P_1 и P_2 действуют равные по величине репульсивные силы светового давления, направленные противоположно силам гравитационного притяжения.

Исследуется задача об устойчивости тривиального положения равновесия тела P, расположенного в центре масс системы. При наличии только пространственных возмущений эта задача рассматривалась ранее в [2], [3], [4]. В данной работе предполагается, что возмущения могут быть как пространственными, так и плоскими. Исследование выполняется в рамках линейного приближения. При малых значениях эксцентриситета были получены аналитические выражения для границ областей неустойчивости. Для произвольных значений эксцентриситета исследование устойчивости было выполнено численно. Результаты исследования представлены в виде диаграммы устойчивости, построенной в плоскости параметров задачи (эксцентриситета орбиты и параметра редукции массы).

Исследование выполнено за счёт средств гранта РНФ №14-21-00068 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

[1] Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трёх тел // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 133. №2. С. 303–306.

[2] Тхай В. Н. Периодические движения обратимой механической системы второго порядка. Приложение к задаче Ситникова // ПММ. 2006. С. 813–834.

[3] Калас В. О., Красильников П. С. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. №1. С. 117–126.

[4] Alfaro J., Chiralt C. Invariant rotational curves in Sitnikov's problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1993. 55. 351–367.

Квазиклассический спектр и собственные функции оператора Шредингера на геометрическом графе

Аллилуева А.И. (Россия, Москва)
Институт Проблем Механики РАН
esina_anna@list.ru

Изучается квазиклассическая асимптотика собственных значений и собственных функций оператора Шредингера на геометрическом графе. Оператор определяется самосопряженными краевыми условиями в вершинах и зависит от параметров – элементов унитарной матрицы, задающей краевые условия. Мы описываем асимптотические собственные значения и собственные функции такого оператора; в частности, рассматриваем собственные функции, локализованные вблизи вершины или вблизи выделенного подграфа. Собственные значения определяются из условий квантования, в которые, помимо интеграла действия, входят спектральные характеристики матриц, задающих оператор.

Об одной задаче консолидации неоднородных грунтов

Алтынбеков Ш. (Шымкент, Казахстан)
Южно-Казахстанский государственный педагогический университет
sh.altynbekov@mail.ru shahmaksut@mail.ru

На основе законов неразрывности жидкой и твердой фаз, уравнения баланса для газообразной фазы, законов Бойля-Мариотта и Генри, и Дарси-Герсеванова, а также по предложению, что растворенная соль движется с водой, а защемленные пузырьки газа и нерастворенная соль перемещаются совместно со скелетом грунта, составлены основные уравнения консолидации соленых грунтов для трех случаев: фазы несжимаемы, влияние начального градиента напора несущетсвенно; фазы сжимаемы; влияние начального градиента напора существенно. Обобщены работы С.Р.Месчяна и Т.Ш.Ширинкулова для неоднородных грунтов. Установлена новая нелинейная зависимость между суммой главных напряжений и коэффициентом пористости, описывающая одновременно три вида неоднородности: уменьшение деформации грунта во времени при увеличении его возраста; изменение коэффициентов упругомгновенной деформации, бокового давления, объемной сжимаемости и деформации ползучести грунта в зависимости от времени и пространственных координат; изменение возраста скелета грунта в зависимости от простраственных координат. Установлена функция, характеризующая изменение возраста скелета грунта в зависимости от пространственных координат. Описаны свойства некоторых параметров ползучести, входящих в эту зависимость. Доказано, что свойство неоднородного старого грунта можно описать функциями пространственных координат. На основе этой зависимости и на базе существующих и разработанных моделей сконструирована многопараметрическая математическая модель процесса консолидации грунтов, содержащая в себе ранее существующие, и тем самым, сделан эффективный шаг к алгоритмизации задачи теории фильтрационной консолидации грунтов, обеспечивающий получить решения самых различных краевых задач. Исследованы вопросы существования, единственность и корректность для краевой задачи. Обоснованы методы ее решения. Доказана возможность применения методов итерации, суммарной аппроксимации и прогонки. Исследована погрешность аппроксимации, устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы (ЛОС). Дана оценка решению задачи при помощи формулы прогонки.

Неравенство Харнака для решений $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$[1]

Алхутов Ю. А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
yurij-alkhutov@yandex.ru
Сурначёв М. Д. (Россия, Москва)
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
peitsche@yandex.ru

Настоящее сообщение посвящено формулировке неравенства Харнака для неотрицательных решений нелинейного эллиптического уравнения

$$Lu = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = 0, \tag{1}$$

заданного в ограниченной области $D \subset R^n$, $n \geqslant 2$. Показатель p измерим в D и

$$1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty \text{ для почти всех } x \in D. \tag{2}$$

Предполагается, что область имеет непустое пересечение с гиперплоскостью $\Sigma = \{x:\ x_n = 0\}$, которая делит ее на части $D^{(1)} = D \cap \{x:\ x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \bigcap \{x:\ x_n < 0\}$ и функция $p(x)$ непрерывна в фиксированной точке $x_0 \in \Sigma \cap D$ со стороны каждой из частей $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, причем

$$|p(x) - p^{(i)}(x_0)| \leqslant \frac{L}{\ln|x - x_0|^{-1}}, \quad x \in D^{(i)}, \quad |x - x_0| \leqslant 1/2, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $p^{(i)}(x_0)$ – предельное значение $p(x)$ при $x \to x_0$, $x \in D^{(i)}$.

Пусть $B_R^{x_0}$ означает открытый шар радиуса R с центром в точкеx_0, а $\tilde{x}$ – точку, симметричную x относительно гиперплоскости Σ. Дополнительно предполагается существование шара $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, такого, что

$$p(x) \geqslant p(\tilde{x}), \text{ для почти всех } x \in B_{R_0}^{x_0} \cap D^{(2)}. \tag{4}$$

Для определения понятия решения уравнения (1) введем класс функций

$$W(D) = \left\{u \in W^{1,1}(D):\ |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\right\},$$

где $W^{1,1}(D)$ – соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Будем говорить, что последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \to u$ в $L^1(D)$ и выполняется

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)}\, dx = 0.$$

Нас будет интересовать класс функций $H(D)$, являющийся пополнением в $W(D)$ гладких в D функций относительно введенной сходимостей. А именно, положим

$$H(D) = \{u \in W(D):\quad \exists u_j \in C^\infty(D) \cap W(D),\ u_j \to u \text{ в } W(D)\}.$$

Поскольку возможна ситуация, когда $W(D) \neq H(D)$ (см. [1]), имеет смысл ввести два типа решения уравнения (1). Под W-решением уравнения (1) будем понимать функцию $u \in W(D)$ удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = 0 \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (задание № 1.3270.2017/4.6).

на всех пробных функциях $\varphi \in W(D)$ с компактным носителем в D. Аналогично, функция $u \in H(D)$, удовлетворяющая (5) на всех пробных функциях $\varphi \in C_0^\infty(D)$, называется H-решением уравнения (1).

Уравнения типа p-Лапласа с переменным показателем нелинейности $p(x)$ и вариационные задачи с интегрантами, удовлетворяющими нестандартным условиям коэрцитивности и роста возникают при моделировании композитных материалов, электрореологических жидкостей (характеристики которых зависят от приложенного электромагнитного поля), в задачах обработки изображений. В данном сообщении рассмотрен модельный случай плоского стыка двух различных фаз. Гиперплоскость $\Sigma = \{x_n = 0\}$ здесь может быть заменена на любую достаточно гладкую гиперповерхность.

Важным свойством решений эллиптических уравнений является неравенство Харнака (см. [2]): если $p(x) \equiv const$, то для неотрицательного в шаре $B_{4R} \subset \Omega$ решения u уравнения (1) выполняется

$$\inf\{u;\, B_R\} \geq \gamma \sup\{u;\, B_R\}, \quad \gamma = \gamma(n,p) > 0. \tag{6}$$

В работе [3] в случае кусочно постоянного показателя p показано, что классическое неравенство (6) для решений уравнения (1) не имеет места. В этой же работе даны фомулировка и доказательство неравенства Харнака, отвечающего рассматриваемому уравнению. В настоящем сообщении этот результат обобщен на уравнения более общего вида.

Для шара $B_R^{x_0} \subset D$ через $Q_R^{x_0}$ обозначим множество $\{x \in B_R^{x_0} :\ x_n < -R/2\}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия (2) – (4) и u есть неотрицательное W- или H-решение уравнения (1) в шаре $B_{8R}^{x_0} \subset D$. Тогда выполнено неравенство*

$$\inf\{u;\, B_R^{x_0}\} + R \geq C \sup\{u;\, Q_R^{x_0}\}, \tag{7}$$

где положительная константа C зависит только от n, α, β, L и $M = \sup\limits_{B_{8R}^{x_0}} u$.

Литература

[1] Жиков В. В. Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Известия АН СССР, Сер. матем. 1986. Т. 50, № 4. С. 675–711.

[2] Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equation // Acta Mathematica. 1964. V. 111. № 1. P. 247–302.

[3] Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. О неравенстве Харнака для эллиптического (p, q)-лапласиана // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 6. С. 623–627.

Об управлении движением антропоморфного робота

Андреев А.С. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
asa5208@mail.ru

Дороговцева Е.В. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
sheiko_1992@mail.ru

В докладе представлены результаты исследования задачи о стабилизации плоских движений руки антропоморфного робота (см. рисунок). В качестве модельных уравнений движения выбраны уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_k} + U_k \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где T, Π — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, U_k — управляющие моменты,

$$T = \frac{1}{2}\left(J_{c1} + m_1 \frac{l_1^2}{4}\right)\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{l_2^2}{4}(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)^2 + l_1 l_2 \dot\theta_1 (\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\cos(\theta_2)\right) + \frac{1}{2} J_{c2} (\dot\theta_1 + \dot\theta_2)^2 +$$

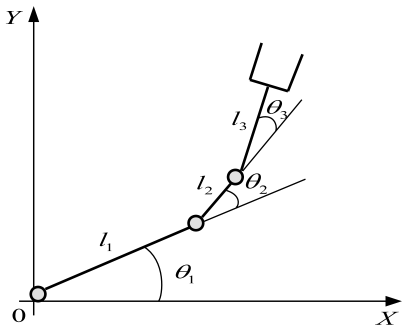


Рис. 1: Модель руки антропоморфного робота

$$+\frac{1}{2}m_3\Big(l_1^2\dot\theta_1^2+l_2^2(\dot\theta_1+\dot\theta_2)^2+\frac{l_3^2}{4}(\dot\theta_1+\dot\theta_2+\dot\theta_3)^2+2l_1l_2\dot\theta_1(\dot\theta_1+\dot\theta_2)\cos(\theta_2)+$$

$$+2l_1l_3\dot\theta_1(\dot\theta_1+\dot\theta_2+\dot\theta_3)\cos(\theta_3+\theta_2)+l_2l_3(\dot\theta_1+\dot\theta_2)(\dot\theta_1+\dot\theta_2+\dot\theta_3)\cos(\theta_3)\Big)+\frac{1}{2}J_{c3}(\dot\theta_1+\dot\theta_2+\dot\theta_3)^2.$$

$$\Pi=\mu_1\sin\theta_1+\mu_2\sin(\theta_1+\theta_2)+\mu_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3),$$

$$\mu_1=(m_1l_{c1}+m_2l_1+m_3l_1)g,\quad \mu_2=(m_2l_{c_2}+m_3l_2)g,\quad \mu_3=m_3l_{c_3}g.$$

Пусть

$$\dot\theta_k=0,\quad \theta_k=\theta_k^0=\mathrm{const},\quad k=1,2,3$$

есть заданное положение системы. В соответствии с методами, предложенными в работах [1], [2], задача о нелокальной стабилизации этого положения решается управляющими моментами, представляющими собой нелинейные ПД-, ПИ- и ПИД-регуляторы вида

$$U_1=M_1^0-k_1\sin(q_1(t)-q_1^0)+p_1\cos(q_1(t))\int_0^t e^{s_1^0(\tau-t)}\sin(q_1(\tau))d\tau,$$

$$U_2=M_2^0-k_2\sin(q_2(t)-q_2^0)+p_2\cos(q_2(t))\int_0^t e^{s_2^0(\tau-t)}\sin(q_2(\tau))d\tau,$$

$$U_3=M_3^0-k_3\sin(q_3(t)-q_3^0)+p_3\cos(q_3(t))\int_0^t e^{s_3^0(\tau-t)}\sin(q_3(\tau))d\tau.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания по НИР (Проект № 9.5994.2017/БЧ).

Литература

[1] Андреев А. С., Перегудова О. А., Раков С. Ю. Уравнение Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора // Журнал СВМО. 2016. Т. 18. № 3. С. 8–18.

[2] Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // ПММ. 2017. Т. 81. № 2. С. 137–153.

Топологическая динамика нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра и устойчивость его решений

Андреев А.С. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
asa5208@mail.ru

Перегудова О.А. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
peregudovaoa@gmail.com

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра

$$\dot{x}(t) = F\left(t, x(t), \int\limits_{t_0}^{t} g(t, \tau, x(t), x(\tau))d\tau\right), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $F : R \times R^n, \times R^n \to R^n$ и $g : S \times R^n \times R^n \to R^n$ – непрерывные вектор-функции, $S = \{(t, \tau) \in R \times R : \quad 0 \leqslant t < +\infty, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$.

Исследуется задача построения топологической динамики уравнения (1). Определяются условия, при которых уравнению (1) можно сопоставить семейство предельных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = F^*\left(t, x(t), \int\limits_{-\infty}^{t} g^*(t, \tau, x(t), x(\tau))d\tau\right).$$

Такое построение, как и в случае дифференциального [1] и функционально-дифференциального уравнения [2], [3], позволяет провести развитие прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости решений (1) с использованием функционалов и функций Ляпунова со знакопостоянной производной.

Излагаемые результаты являются продолжением результатов, полученных в работах [4], [5], [6] и [7]. Показано применение данных результатов в задаче о стабилизации движений механических систем посредством нелинейных ПИ- и ПИД-регуляторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания по НИР (Проект № 9.5994.2017/БЧ) и РФФИ (Проект № 18-01-00702).

Литература

[1] Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.

[2] Андреев А. С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005. 328 с.

[3] Андреев А. С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4—55.

[4] Андреев А. С., Перегудова О. А., Раков С. Ю. Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 3. С. 8—18.

[5] Андреев А. С., Перегудова О. А. Стабилизация программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 95–105.

[6] Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Systems Science and Control Engineering. 2018. Vol. 6. No 1. P. 12–19.

[7] Aleksandr S. Andreev, Sergey P. Bezglasnyi, Olga A. Peregudova. On Stabilization of Stationary Program Motions of a Controlled Mechanical System // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2. P. 777–781.

Метод векторных функций Ляпунова в задаче о стабилизации систем с импульсным управлением

Андреев А.С. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
asa5208@mail.ru

Сутыркина Е.А. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
kea-ul@yandex.ru

Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнениями

$$x(n+1) = f(n, x(n), u(n)), \tag{1}$$

$$y(n) = h(n, x(n), u(n)), \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$ — соответственно векторы состояния, входа и выхода системы; $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ — функции, непрерывные по (x, u), удовлетворяющие также условиям предкомпактности по этим переменным.

Будем полагать, что $f(n, 0, 0) \equiv 0$, $h(n, 0, 0) \equiv 0$, так, что при $u = 0$ система (1)–(2) имеет состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Для системы (1)–(2) можно определить предельную систему

$$x(n+1) = f^*(n, x(n), u(n)), \tag{3}$$

$$y(n) = h^*(n, x(n), u(n)), \tag{4}$$

где (f^*, h^*) – какая-либо предельная пара.

Определение 1. *Система (1)–(2) называется строго наблюдаемой в нулевом состоянии, если для любой предельной пары (f^*, h^*) множество $\{h^*(n, x, 0) = 0\}$ не содержит решений предельной системы (3), кроме $x = 0$.*

При исследовании задач стабилизации как для непрерывных, так и для дискретных систем, посредством функции Ляпунова, выделяют классы управляемых систем, для которых может быть использован некоторый алгоритм построения функции Ляпунова. К числу таких систем относятся и так называемые пассивные системы.

Определение 2. *Систему (1) определим как пассивную, если существует некоторая скалярная функция $V = V(n, x)$, называемая функцией запаса, такая что*

$$V(n+1, f(n, x, u)) \leqslant W(n, V(n, x)) + y'u, \tag{5}$$

где $W(n, w) \geqslant 0$, $W(n, 0) \equiv 0$, есть некоторая непрерывная, монотонная по w функция, такая, что нулевое решение соответствующего уравнения сравнения

$$w(n+1) = W(n, w(n)) \tag{6}$$

равномерно устойчиво.

Теорема 1. *Предположим, что для системы (3)–(4) выполнены условия:*

1) она является пассивной с определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел функцией запаса $V(n, x)$;

2) система строго наблюдаема в нулевом состоянии.

Тогда управляющее воздействие $u = u(n, y)$, такое что $y'u(n, y) \leqslant -\alpha(\|y\|)$, где $\alpha \in K$ (K — класс функций типа Хана), решает задачу о стабилизации состояния $x = 0$ системы (3)–(4).

Результаты, представленные в докладе, являются развитием работ [1] и [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания по НИР (Проект № 9.5994.2017/БЧ) и РФФИ (Проект № 18-01-00702).

Литература

[1] Андреев А.С., Кудашова Е.А., Перегудова О.А. О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 6. С. 113-115.

[2] Перегудова О. А., Кудашова Е. А. Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 1. С. 118–120.

Множество разреза в задаче Эйлера об эластиках

Ардентов А. А. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт Программных Систем им. А. К. Айламазяна РАН
aaa@pereslavl.ru

Рассматривается классическая задача из теории упругости о стационарных положения плоского упругого стержня при фиксированной длине стержня $l > 0$, фиксированных концах и направлениях в них. Геометрически эту задачу можно сформулировать на языке вариационного исчисления, связав кривизну стержня $\kappa(t),\ t \in [0, l]$ с его потенциальной (упругой) энергией $\int_0^l \kappa^2(t)dt$.

Опишем координатную постановку задачи. На плоскости стержня введем координаты $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, угол направления относительно оси x обозначим $\theta \in S^1$. Форму стержня будем искать в виде вектора $q(t) = \big(x(t), y(t), \theta(t)\big),\ t \in [0, l]$.

Используя группу движений плоскости SE(2) один из концов можно расположить в начале координат с нулевым углом, т.е. $q(0) = q_0 = (0, 0, 0)$. С помощью группы квазиоднородных растяжений плоскости длину стержня можно считать единичной, т.е. $l = 1$. В результате получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \cos\theta(t), \\ \dot{y}(t) = \sin\theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = \mathtt{u}(t), \qquad \mathtt{u}(t) \in \mathbb{R},\ t \in [0, 1], \end{cases} \tag{1}$$

$$q(0) = 0, \qquad q(1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \tag{2}$$

$$J(\mathtt{u}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathtt{u}^2(t)dt \to \min. \tag{3}$$

Известно, что оптимальными решениями задачи (1)–(3) являются дуги эластик. Это семейство экстремальных траекторий впервые было исследовано Л. Эйлером в 1744 г. До начала XX века многие исследователи изучали различные свойства эластик и их представления. Но вопрос, какие дуги эластик доставляют решение задаче оптимального управления ()–(3), оставался открытым, см. подробную историю в [1]. В работах [2, 3] начато геометрическое исследование задачи: с помощью симметрий-отражений и соответствующих времен Максвелла была получена верхняя оценка на время разреза (длину оптимальной дуги эластики) и доказана локальная устойчивость соответствующих дуг эластик. Позже в [4] было доказано, что в общем случае полученная оценка на время разреза сводит задачу к поиску двух дуг, подозрительных на оптимальность. Каждая подозрительная дуга ищется как корень однозначно разрешимой системы алгебраических уравнений [5], зависящей от эллиптических интегралов Лежандра I и II рода. Найденные два корня задают соответствующие управления $\mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2$, для которых можно вычислить интеграл энергии (3), определяющим оптимальную дугу.

Известно [4], что существует неизвестное время Максвелла, совпадающее со временем разреза и не соответствующее симметрии-отражению. Условие $J(\mathtt{u}_1) = J(\mathtt{u}_2)$ определяет конфигурации с двумя несимметричными дугами эластик одинаковой длины с совпадающими концами и направлениями в них. Соответствующие граничные значения q_1 формируют неизвестную на данный момент часть множества разреза.

В недавней работе [6] было определено, какие из времен Максвелла, соответствующие симметриям-отражениям, являются временами разреза. Также были описаны соответствующие страты множества разреза. Показано, что концы q_1 симметричных оптимальных дуг эластик лежат в множестве $\{\theta_1 = 0\} \cup \{y_1 = 0, \theta_1 = \pi\}$.

Литература

[1] Levien R. The Elastica: a Mathematical History // Technical Report No. UCB/EECS-2008-103. 2008. P. 1-25.

[2] Sachkov Yu. L. Maxwell strata in Euler's elastic problem // J. Dynam. Control Syst. 2008. V. 14. No. 2. P. 169–234.

[3] Sachkov Yu. L. Conjugate points in Euler's elastic problem // J. Dynam. Control Syst. 2008. V. 14. No. 3. P. 409–439.

[4] Sachkov Yu. L., Sachkova E. L. Exponential mapping in Euler's elastic problem // J. Dynam. Control Syst. 2014. V. 20. No. 4. P. 443–464.

[5] Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Решение задачи Эйлера об эластиках // Автомат. и телемех. 2009. №4. С. 78–88.

[6] Ардентов А. А. Кратные решения в задаче Эйлера об эластиках // Автомат. и телемех. 2018. принято к публикации.

Частичная регулярность решений квазилинейных параболических систем с негладкой по времени главной матрицей при краевом условии Неймана[2]

Архипова А.А. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
arinaark@gmail.com
Гришина Г.В. (Россия, Москва)
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
galinavg@yandex.ru

Рассматривается квазилинейная параболическая система уравнений с недиагональной главной матрицей в модельном параболическом цилиндре. Предполагается, что решение системы удовлетворяет условию Неймана на плоском участке Γ боковой поверхности цилиндра. В предположении, что главная матрица системы не обладает гладкостью по временной переменной, доказана частичная регулярность обобщенного решения задачи (непрерывность по Гельдеру) в окрестности поверхности Γ. Для доказательства используется метод $A(t)$-калорической аппроксимации ([1], [2]) адаптированный к задаче с условием Неймана.

Литература

[1] Arkhipova A., John O., Stará J. "Partil regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix."// Nonlinear Analysis, Ser. A., **95**, (2014), 421-435.

[2] Arkhipova A., Stará J. "Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix."// Nonlinear Analysis, Ser. A., **120**, (2015), 236-261.

О заузленности геодезических в гиперболических потоках

Ахметьев П.М. (Россия, Москва)
Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
им. Н.В. Пушкова РАН
pmakhmet@mail.ru

Вычисляются инварианты изотопического класса траекторий слоения, определяемого геодезическим потоком на поверхности постоянной отрицательной кривизны с особенностями [2]. Будут вычислены вторые моменты для асимптотического инварианта Хопфа [1] (квадратичные спиральности, см. [3]). Асимптотический инвариант высшей зацепленности степени 12, см. [4], вычисляется u-резольвентой [5] с использованием модулярной функции веса 12.

[2]Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант $No.$ 17-01-00678.

Литература

[1] Арнольд В.И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения // Избранное-60, Фазис, 1997, М., с. 215.

[2] Dehornoy P. Geodesic flows, left-handedness and templates // Algebr. Geom. Topol. 15 (3), 2015, 1525-1597.

[3] Akhmet'ev P.M., Candelaresi S., Smirnov A.Yu. Calculations for the practical applications of quadratic helicity in MHD // Physics of Plasmas, Vol.24, N 10, 2017, 102–128.

[4] Akhmet'ev P.M. On a higher integral invariant for closed magnetic lines // Journal of Geometry and Physics 74, 2013, 381—391.

[5] Felix Klein. Vorlesungen uber das Ikosaeder und die Auflosung der Gleichungen vom 5ten Grade // B. G. Teubner, Leipzig 1884; Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М., 1989, 336 с.

Об оценках средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу

Базулкина А. А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
hirasawa33rus@gmail.com

Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, в которой размеры промысловых заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot{x} = g(x)$. В момент времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$. Предположим, что на сбор ресурсов можно влиять так, чтобы остановить данный процесс в том случае, если доля добываемого ресурса становится больше некоторого значения $u_k \in [0, 1]$ в момент времени $\tau_k = kd$. Это нужно для того, чтобы была возможность сохранить как можно больше извлекаемого ресурса для следующего сбора. В таком случае доля добываемого ресурса описывается выражением

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u_k) = \begin{cases} \omega_k, & \text{если } \omega_k < u_k, \\ u_k, & \text{если } \omega_k \geqslant u_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Таким образом, данная модель — это эксплуатируемая популяция, динамика которой задана дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq kd,$$
$$\Delta x\big|_{t=kd} = -\ell(\omega_k, u_k)x, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $(x, \omega_k, u_k) \in [0, +\infty) \times \Omega \times [0, 1]$, $\Delta x\big|_{t=\tau_k} = x(kd) - x(kd - 0)$. Предположим, что решение данного уравнения непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$. Используем вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, описанное в работах [1], [2].

Обозначим $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)\}$, где $u_k \in [0, 1]$;

$$L(\sigma, \bar{u}) \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots) = (\ell(\omega_1, u_1), \ldots, \ell(\omega_k, u_k), \ldots),$$

$X_k = X_k(\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}, x_0)$ — количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$, зависящее от долей ресурса $\ell_i = \ell(\omega_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$, собранного в предыдущие моменты времени и начального значения x_0. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем функцию

$$H_*\big(L(\sigma, \bar{u}), x_0\big) \doteq \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\big(\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}, x_0\big)\ell_k\,,$$

которая называется средней временной выгодой от извлечения ресурса.

В данной работе исследуем задачу выбора управления $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots) \in U$, при котором значение функции $H_*(L(\sigma, \bar{u}), x_0)$ можно оценить снизу по возможности наибольшим числом. Это дает возможность описать способ эксплуатации популяции, при котором добываемый ресурс постоянно возобновляется и средняя временная выгода максимальная.

Условие 1. *Уравнение $\dot{x} = g(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$, и интервал (K_1, K_2) является областью притяжения этого решения.*

Пусть $\varphi(d, x)$ — решение уравнения $\dot{x} = g(x)$ в момент времени $t = d$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Обозначим через $\Psi(u)$ неподвижную точку уравнения

$$\dot{\Psi}_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)\Psi_k\big), \quad \Psi_1 = \varphi(d, x_0), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Отметим, что если $(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1$, то $\Psi(u) > 0$. Через $M\ell(\omega, u)$ обозначим математическое ожидание случайных величин $\ell(\omega_k, u_k)$ при $u_k = u$, где $u \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1 и неравенство $(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1$. Тогда для любого $x_0 \in (K_1, K_2)$ существует управление $\bar{u} \in U$, такое, что*

$$\Psi(u)M\ell(\omega, u) \leqslant H_*\big(L(\sigma, \bar{u}), x_0\big) \leqslant KM\ell(\omega, u)$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Литература

[1] Родина Л.И., Тютеев И.И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 79–86.

[2] Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58.

Гироскопическая стабилизация и малые колебания неконсервативных систем с двумя степенями свободы[3]

Байков А.Е. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (НИУ)
alexbaikov16@gmail.com

Рассматриваются голономные склерономные механические системы с тремя степенями свободы под действием потенциальных сил, неконсервативных позиционных сил, линейных сил вязкого трения и гироскопических сил. С помощью критерия Гурвица получены необходимые и достаточные условия (с точностью до соотношений типа равенства) асимптотической устойчивости положения равновесия. Исследовано влияние двух безразмерных параметров — коэффициента диссипации и гироскопического параметра — на асимптотическую устойчивость положения равновесия. При некоторых ограничениях на матрицу диссипативных и матрицу гироскопических сил полученное необходимое и достаточное условие стабилизации положения равновесия, неустойчивого в отсутствие гироскопических и/или диссипативных сил. Построены области устойчивости и области неустойчивости в пространстве безразмерных параметров.

Исследована слабая неустойчивость, когда при малых отклонениях параметров от критического значения система движется в малой окрестности дестабилизированного положения равновесия. Методом усреднения исследованы нелинейные колебания в окрестности дестабилизированного положения равновесия при малом отклонении коэффициента трения от критического значения. Обнаружена бифуркация Андронова–Хопфа, построен критерий

[3]Исследование выполнено за счёт гранта Российской научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

существования и асимптотической устойчивости малого предельного цикла. Оценена область притяжения предельного цикла.

Рассмотрена проблема устойчивости гироскопического маятника Крэнделла [1]. Когда неподвижная точка совпадает с центром масс, маятник Крэнделла отвечает модели известного устройства – гировертикали с радиальной коррекцией. Неконсервативные и диссипативные силы характеризуются одним безразмерным параметром и одновременно создаются механизмом, описание которого опускаем. Исследование орбитальной устойчивости вертикального стационарного режима маятника Крэнделла можно свести к исследованию устойчивости положения равновесия неконсервативной системы с двумя степенями свободы. Полученные выше результаты позволили полностью решить в линейной постановке задачу об устойчивости вертикального стационарного режима маятника Крэнделла. Описаны малые нутационные колебания в окрестности слабо неустойчивого вертикального режима маятника Крэнделла.

Литература

[1] S. H. Crandall, The effect of damping on the stability of gyroscopic pendulums, ZAMP Z. angew. Math. Phys. 46 (1995), S761–S780.

Методы построения и приложения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем[4]

Байков А.Е., Ковалёв Н.В. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (НИУ)
alexbaikov16@gmail.com, nick_scr@mail.ru

Рассматриваются квазиконсервативные механические системы, где кроме консервативных сил действуют малые неконсервативные позиционные силы и малые линейные и нелинейные диссипативные силы. Предполагается, что уравнения движения невозмущенной системы (в отсутствие неконсервативных позиционных и диссипативных сил) имеют вид интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы, допускающей разделение переменных и эффективное введение переменных действие-угол.

Предлагается два метода построения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативных систем. В первом методе неавтономные интегралы находятся в виде (формального) ряда по малому параметру [1]. При этом коэффициенты прямого разложения определяются из цепочки уравнений в частных производных первого порядка. Приводятся достаточные условия сходимости построенного ряда. Метод эффективен, если разложение интегралов производить в переменных действие-угол невозмущенной системы. Во втором методе для построения семейства неавтономных интегралов применяется метод усреднения. Оказывается, что неавтономные интегралы усредненных систем часто можно построить в явном виде. При этом неавтономные интегралы возмущенной системы асимптотически близки к интегралам усредненных систем. Даны соотвествующие явные оценки точности.

Получен критерий существования периодических движений квазиконсервативных систем в терминах $2n$ независимых неавтономных интегралов, где n — число степеней свободы. Для систем с двумя степенями свободы предложено необходимое и достаточное условие существования условно-периодических движений в терминах неавтономных интегралов. Кроме вышеупомянутых результатов неавтономные интегралы находят следующие приложения: 1) выяснение соотношений между blow-up точных и blow-up усреднённых уравнений [2], 2) анализ орбитальной устойчивости периодических движений, 3) оценка областей притяжения предельных циклов квазиконсервативных систем.

Наконец, неавтономные интегралы существенно упрощают исследование динамики квазиконсервативных систем с сухим трениям. Рассмотрена система из двух упруго

[4]Исследование выполнено за счёт гранта Российской научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

закреплённых ящиков на подвижной ленте транспортёра. Обезразмеренные уравнения движения усреднены в двух случаях: нерезонансном и при резонансе 1:2 между частотами малых колебаний (в окрестности единственного положения равновесия системы). Найдено семейство инвариантных торов (в резонансном случае) и периодических орбит (при резонансе). Анализ семейства неавтономных интегралов усреднённых уравнений движения показал, что прочие движения системы после переходного процесса за конечное время принадлежат одному из предельных инвариантных торов, если резонансов нет, или одному из предельных циклов при резонансе. Также найдены и построены зоны залипания в фазовом пространстве системы, которые невозможно обнаружить методом усреднения.

Литература

[1] Ковалев Н. В. Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 32–40.

[2] Байков А.Е., Ковалёв Н.В. Исследование blow-up обыкновенных дифференциальных уравнений методом усреднения // Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль, 07–11 июля 2017 г. Тезисы докладов. С. 25–26.

Оптимизация геометрии систем типа GNSS

Барабанова Л.П. (Россия, Ковров)
Ковровская государственная технологическая академия им. В.А. Дегтярева
lpbarabanova@yandex.ru

Памяти Василия Васильевича Жикова

Разностно-дальномерная задача (РДЗ) состоит в решении системы уравнений

$$\tau + |x - a_j| = t_j, \quad j = 1, ..., N > n.$$

где $a_j \in \mathbb{R}^n$ – известные величины, $t_j \in \mathbb{R}$ – измеренные величины, $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ – искомые неизвестные.

РДЗ является математическим ядром GNSS (Global Navigation Satellite System). Здесь $n = 3$, a_j – спутники, x – местоположение потребителя.

Объектом исследования в сообщении является матрица Якоби J для РДЗ:
$J = \text{augment}(\bar{1}, A), \text{где } \bar{1} = (1, ..., 1)^T, A = \text{stack}(e_1^T, ..., e_N^T), e_j = |x - a_j|^{-1}(x - a_j),$
где употребляются операции присоединения матриц: augment – справа, stack – снизу.

При стандартном предположении о несмещенности, равноточности и попарной некоррелированности измерений dt_j метод наименьших квадратов приводит к n зависимостям $\sigma_i = K_i \cdot \sigma_t$, где σ_t – СКО для t_j, $j = 1, ..., N$, σ_i — СКО искомых величин, K_i — коэффициенты чувствительности РДЗ, квадраты которых размещаются на главной диагонали матрицы $(J^T J)^{-1}$. Используются стандартные аббревиатуры PDOP $= \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$, GDOP $= \sqrt{K_0^2 + \text{PDOP}^2}$.

Harry B. Lee [1] нашел min PDOP и оптимальные конфигурации при $N = 4, 6, 8, 12$.

В [2] было показано, что оптимальное конфигурирование систем типа GNSS по критериям min PDOP(N), min GDOP(N) нуждается в существовании специальных матриц A.

Аналогичный вопрос был поставлен ранее в [3] по поводу существования матриц, удовлетворяющих трем требованиям: 1) Квадраты строк равны единице; 2) Квадраты столбцов равны между собой; 3) Столбцы попарно ортогональны. Оказалось, что такие матрицы существуют при всех $N \geqslant n$ [4].

Для наших целей нужно добавить еще одно требование для A: 4) Сумма компонент каждого столбца матрицы равна нулю.

Матрица, которая удовлетворяет требованиям 1 – 4 будет называться building matrix (B-матрица).

Теорема 1. *Если матрица A является B-матрицей, то одновременно*

$$\mathit{min\ PDOP(N)} = \sqrt{9/N}, \qquad \mathit{min\ GDOP(N)} = \sqrt{10/N}.$$

Работа [2] завершалась вопросами: 1. Каково выражение для абсолютного минимума PDOP и GDOP для нечетного числа спутников? 2. Как выглядят конфигурации спутников, минимизирующие PDOP и GDOP при $N = 5, 7, 9, ...$?

В докладе приводятся ответы на эти вопросы.

Приводится новый алгоритм построения нетривиальных B-матриц.

Теорема 2. *При всех $N \geqslant 4$, $N \neq 5$ одновременно*

$$min\ PDOP(N) = \sqrt{9/N}, \qquad min\ GDOP(N) = \sqrt{10/N}$$

. *При $N = 5$ будет*

$$min\ PDOP(N) > \sqrt{9/N}, \qquad min\ GDOP(N) > \sqrt{10/N}$$

. Демонстрируются оптимальные конфигурации спутников.

При $N = 5$ компьютерный расчет min PDOP(N), min GDOP(N) приводит к двум разным правильным четырехугольным пирамидам.

Приводится распространение теоремы 2 на все натуральные пары $N > n$.

Литература

[1] Lee H. B. Accuracy limitations of hyperbolic multilateration systems // Massachusetts Institute of Technology Lincoln laboratory. Technical note 1973-11. 22 March 1973.

[2] Барабанова Л. П. К минимизации геометрических факторов GNSS // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №2. С. 145–132.

[3] Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. № 11. С. 561–566.

[4] Мальцев А. И. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов» // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. № 11. С. 567–568.

Обобщенные решения линеаризованной системы гемодинамики

Безяев В. И. (Россия, Москва)
Российский университет дружбы народов
vbezyaev@mail.ru

Принципы построения и исследования математических моделей течения крови в замкнутой сердечно-сосудистой системе человека являются важными и актуальными задачами современной механики и математики. Одним из самых простых и изученных является принцип моделирования течения крови в сосудах с помощью квазиодномерного приближения . Применению квазиодномерного приближения для задач гемодинамики посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [1-4], причем в [1],[2] имеются подробные обзоры и библиографии). В большинстве работ исследуются (явно или неявно) классические решения. В данной работе рассматриваются обобщенные по С.Л. Соболеву решения линеаризованной системы гемодинамики. Интегральное тождество, определяющее эти обобщенные решения, содержит в себе законы сохранения массы и количества движения крови в сосуде.

Линеаризованные дифференциальные уравнения гемодинамики в одном сосуде имеют вид

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где c — скорость распространения пульсовой волны, $\bar{u}$, $\bar{p}$, $\bar{s}$ — некоторые фоновые значения скорости, давления и площади сечения соответственно, а функции $u(x,t)$ и $p(x,t)$ — малые отклонения от фоновых значений ([2]).

К понятию обобщенного решения по С.Л. Соболеву системы можно придти, например, с помощью умножения уравнений системы (1) на пробные функции ϕ и ψ соответственно, сложения полученных тождеств и интегрирования полученной суммы по частям. Пара непрерывных по переменной t и интегрируемых с квадратом по переменной x функций $u(x,t)$ и $p(x,t)$ называется обобщенным решением системы (1) с начальными данными $u(x,0) = u_0(x)$ и $p(x,0) = p_0(x)$, если для них выполняется указанное интегральное равенство при любых пробных функциях ϕ и ψ. Пробные функции это гладкие функции, удовлетворяющие специальным граничным условиям на границах подходящих областей переменных (x,t).

Для введенных таким образом обобщенных решений системы гемодинамики (1) доказываются теоремы о единственности и о существованиии обобщенного решения.

Литература

[1] Мухин С. И. Математическое моделирование гемодинамики. Дисс. д.ф.-м.н., МГУ, 2008.

[2] Кошелев В. Б., Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П. Математические модели квазиодномерной гемодинамики./ В. Б. Кошелев и др. МГУ, 2010.

[3] Мухин С. И. Математическое моделирование гемодинамики. Дисс. д.ф.-м.н., МГУ, 2008.

[4] Безяев В. И., Садеков Н. Х. О некоторых задачах гемодинамики на графах. //СМФН. 2016. Т. 62. С. 5–18.

[5] Алексеева Л. А., Закирьянова Г. К. Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 7, 1280—1293.

Моделирование движения автотранспорта с помощью клеточных автоматов

Бобошина А.В. (Россия, Москва)
Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)
boboshina@gmail.com

Пегачкова Е.А. (Россия, Москва)
Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)
pegachkova@mail.ru

Целью работы является рассмотрение транспортных потоков на многополосных дорогах, изучение влияния увеличения количества транспортных средств и моделирование возникающих транспортных заторов, в том числе пульсирующих заторов, возникающих на перекрёстках, в местах сужения дороги – «бутылочных горлышках».

В работе изложен сравнительный анализ различных методов моделирования транспортных потоков с помощью клеточных автоматов и их комбинаций. Рассматриваются методы моделирования перекрёстков, как регулируемых, так и нерегулируемых. Исследуются способы оптимизации светофорного регулирования на перекрёстках с целью увеличения пропускной способности.

В основе теории клеточных автоматов лежат принципы, предложенные Джоном фон Нейманом в [1]–[2]. Впервые клеточные автоматы применяются к моделированию транспортных потоков в работе [3]. Распространённой стала модель Нагеля-Шрекенберга [4], в которой состояние каждого автомобиля обновлялось по правилам, учитывающим ускорение, торможение, случайные возмущения и движение. Позже Шрекенберг М. вместе со Шадшнайдером А. усовершенствовали модель, модифицировав формулу ускорения так, чтобы учитывалось, что с определённой вероятностью транспортное средство, находящееся перед заданным, может сломаться (правило “slow-to-start”). Однополосные модели на клеточных автоматах являются более простыми, чем многополосные, но они не в состоянии учитывать возможность обгона. Поэтому для изучения выбрана многополосная модель, аналогичная рассмотренной в [5], главной особенностью которой является то, что каждая клетка автомата может находиться в состоянии «участок дорожного полотна, соответствующий данной клетке, занят и недоступен для проезда по нему движущимися автомобилями». Описанный автомат использован в работе для моделирования перекрёстка.

Проведён сравнительный анализ результатов моделирования загруженного перекрёстка и оптимизации светофорного регулирования с результатами применения методов, изложенных в [6], где разработан закон оптимального сигнала светофора в реальном времени с помощью метода бинарной оптимизации, а также метод, применяющий функцию обратной связи, основанной на функциях Ляпунова для регулирования пробок на дорогах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-08-00128-а, гранта Президента № МК-1664.2017.8.

Литература

[1] von Neumann J. The general and logical theory of automata // Cerebral mechanisms in behavior. 1951. Vol. 1. P. 1–41.

[2] von Neumann J., Buks A. W. Theory of selfreproducing automata // IEEE Transactions on Neural Networks. 1966. Vol. 5. Iss. 1. P. 3–14.

[3] Cremer M., Ludwig J. A fast simulation model for traffic flow on the basis of boolean operations // Mathematics and Computers in Simulation. 1986. Vol. 28. Iss. 4. P. 297–303.

[4] Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique, France. 1992. Vol. 2. No 12. P. 2221–2229.

[5] Котов А. Н. Моделирование дорожного движения на многополосной магистрали при помощи двумерного вероятностного клеточного автомата с тремя состояниями: дис. магистра. Санкт-Петербургский гос. унив. информационных технологий, механики и оптики. 2008.

[6] Aihara K., Ito K., Nakaqawa J., Takeuchi T. Optimal control laws for traffic flow // Applied Mathematics Letters. 2013. Vol. 26. Iss. 6. P. 617–623.

О классификации вырождений неявных дифференциальных уравнений

Богаевский И.А. (Россия, Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
bogaevsk@mccme.ru

С геометрической точки зрения, восходящей к Пуанкаре, неявное обыкновенное дифференциальное уравнение представляет собой поверхность (быть может, особую), лежащую в трёхмерном контактном пространстве 1-струй неизвестной функции. Контактные плоскости высекают на ней поле направлений, интегральные кривые которого при забывании производной проектируются в решения исходного дифференциального уравнения, а класс орбитальной эквивалентности является инвариантом уравнения относительно замен независимой и зависимой переменных. Эквивалентность уравнений относительно таких замен, в отличие от орбитальной, называется сильной.

Мы рассматриваем неявные обыкновенные дифференциальные уравнения, квадратичные по производной. Такие уравнения в своих гладких точках при проектировании на плоскость независимой и зависимой переменных в качестве особенностей могут иметь только складки. Если поле направлений неособо на складке, то решения уравнения имеют полукубические точки возврата на её проекции. Это явление описывается локальной нормальной формой Чибрарио [1].

Кроме этого, поле направлений типичного гладкого дифференциального уравнения может иметь сёдла, узлы или фокусы в изолированных точках складки. Так возникают типичные сложенные сёдла, узлы и фокусы, гладкие нормальные формы которых относительно сильной эквивалентности были получены в [2]. Результаты и методы этой работы почти дословно переносятся на аналитические уравнения. Однако, классификация вырождений последних сильно усложняется из-за наличия модулей Экаля–Воронина и Мартине–Рамиса в особых точках нетипичных аналитических полей направлений (например, в сёдлах с малыми знаменателями) и в особенностях самого уравнения (например, у поля направлений на конусе).

Оказывается, что несмотря на сложность самой орбитальной классификации, у квадратичного по производной ростка уравнения относительно сильной эквивалентности нет новых непрерывных инвариантов по сравнению с орбитальной. Более точно, любая связная компонента пересечения квадратичных по производной ростков уравнений с классом их орбитальной эквивалентности является связной компонентой класса сильной эквивалентности. Эта теорема верна и в аналитической, и в гладкой, и в формальной категориях для любых сколь угодно вырожденных ростков уравнений. В частности, она даёт новое доказательство вышеупомянутого результата из [2].

Литература

[1] Cibrario M. Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // Rendiconti del R. Insituto Lombardo, Ser. II. 1932. V. 65. C. 889–906.

[2] Давыдов А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, №2. С. 1–10.

О задаче Дирихле для эллиптического уравнения высокого порядка с постоянными вещественными коэффициентами и простыми комплексными характеристиками на плоскости

Боган Ю. А. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики СО РАН
bogan@hydro.nsc.ru

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение эллиптического типа с двумя независимыми переменными порядка $2m$

$$L(u) = L(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})u(x_1, x_2) = 0,$$

где

$$L(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{2m} a_k \xi^k \eta^{2m-k}$$

– однородный полином с постоянными вещественными коэффициентами степени $2m$ и такой, что $L(\xi, \eta) > 0$ для любых вещественных (ξ, η). Поставим для него краевую задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^l u}{\partial n^l}|_{\partial Q} = g_l(s), \quad g_l(s) \in C^{m-l-1,\alpha}(\partial Q), \quad l = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Для данной краевой задачи известно два способа ее приведения к граничным интегральным уравнениям. Первый состоит в представлении решения в виде суммы потенциалов, аналогичным классическим потенциалам простого и двойного слоя для уравнения Лапласа, а второй – к приведении краевой задачи к системе сингулярных интегральных уравнений. Первый метод был использован в статье [1] С. Агмона. Как известно, задача Дирихле для уравнения удовлетворяет условию Лопатинского [2]. Это обстоятельство использовано для приведения краевой задачи непосредственно, минуя процедуру регуляризации, к системе уравнений Фредгольма второго рода в односвязной области с гладкой границей. При этом существенно используется простота корней характеристического уравнения. Показано, как осуществляется предельный переход к случаю наличия кратных корней. Для решения краевой задачи справедлива альтернатива Фредгольма.

Литература

[1] Agmon S. *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane.* Comm. Pure Appl. Math. V. 10, № 2, 1957, P. 179 – 239.

[2] Лопатинский Я.Б. *Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.* Укр. мат. ж. 1953.Т. 5, № 2. С. 123 — 151.

Решение обратной задачи для крыла в составе полной компоновки летательного аппарата с применением RANS-методов

Болсуновский А.Л., Бузоверя Н.П., Пущин Н.А. (Россия)
Центральный Аэро-Гидродинамический Институт им. профессора Н.Е. Жуковского
nikita_pushin@mail.ru

Опираясь на значительный прогресс в компьютерах и численных методах, вычислительная аэродинамика прошла большой путь от расчета невязкого обтекания тел простейших форм несжимаемой жидкостью (двумерное уравнение Лапласа) до расчета сложнейших пространственных компоновок летательных аппаратов (ЛА) потоком вязкого сжимаемого газа (трехмерные уравнения Навье-Стокса). Многие задачи, которые ранее решались только путем проведения длительных и дорогостоящих экспериментов в аэродинамических трубах, сейчас возложены на численный эксперимент. Современные достижения в развитии методов вычислительной аэродинамики позволили кардинально изменить процесс аэродинамического проектирования ЛА. Теперь это не просто прямой анализ нескольких альтернативных компоновок, а целенаправленный поиск оптимальных форм при помощи специализированных процедур проектирования, включающих обратные и оптимизационные методы.

Обратные методы аэродинамики, определяющие геометрию элементов ЛА, в первую очередь крыла, по заданному (целевому) распределению давления Cp*, являются мощным инструментом аэродинамического проектирования. Они позволяют устранить или ослабить скачки уплотнения, снизить уровень возмущений потока в заданном месте, реализовать распределение давления, благоприятное для развития ламинарного или турбулентного пограничного слоя. Конечно, не всякое заданное распределение давления можно реализовать физически, так как в общем случае обратная задача является некорректной. Условия разрешимости точно сформулированы только для двумерных потенциальных течений, а для реальных течений – вязких, трансзвуковых и, в особенности, трехмерных неизбежно использование инженерных подходов. Отметим, что обратные задачи, в отличие от прямых, можно решать только итерационно, так как граничные условия необходимо выполнять на поверхности тела, которая сама подлежит определению. Существует два больших класса обратных методов. К первому классу относятся т.н. "чистые" обратные методы, в которых условие Cp=Cp* задано явно. При решении краевой задачи на первоначально заданной геометрии тела получают "протекание", т.е. не равенство нулю нормальной скорости. Геометрию тела подправляют, вновь решают краевую задачу и т.д. до сходимости. Однако, авторам неизвестны работы, в которых были бы реализованы "чистые" обратные методы в рамках уравнений Навье-Стокса. Второй класс методов основывается на принципе остаточной коррекции, согласно которому деформация поверхности крыла определяется тем или иным способом через невязку между рассчитанным и заданным распределениями давления. Задача также решается итерационно путем попеременных вызовов прямого метода анализа (используемого как "черный ящик") и блока коррекции (рис.1). Время работы блока коррекции геометрии обычно составляет лишь незначительную долю от времени прямого расчета. Вследствие итерационного характера решения задачи правило деформации поверхности может быть достаточно грубым. Естественно, чем более точно определяется коррекция геометрии, тем меньше потребуется общее число итераций.

Предлагаемый в данной работе итерационный метод построения поверхности крыла по заданному распределению давления в составе полной компоновки ЛА с использованием RANS-методов также относится к классу методов остаточной коррекции. Для создания эффективного алгоритма используется принцип вложенных уровней, согласно которому в качестве блока коррекции геометрии целесообразно применять метод обратной задачи более низкого уровня, где под уровнем подразумевается сложность решаемых уравнений или рассматриваемых форм. Типичными уровнями геометрии в аэродинамике являются профиль, крыло, крыло+фюзеляж, полная компоновка. Типичными уровнями сложности уравнений являются уравнение Лапласа, уравнение полного потенциала, уравнения Эйлера, уравнения Навье – Стокса. Переход к следующему уровню обычно увеличивает вычислительные затраты на один-два порядка. Использование принципа вложенных уровней позволяет постепенно

Рис. 2: Принцип работы методов остаточной коррекции

наращивать уровень решаемых задач при сохранении ясного понимания физики явлений, а также рационально распределять расчеты на разных уровнях, с тем, чтобы минимизировать общий объем необходимых вычислений, основная часть которых приходится на расчеты RANS-методом. Применяя последовательно данный принцип, можно создать n-уровневые комплексы решения обратных задач для сложных компоновок и сложных уравнений, используя фактически только один простейший обратный метод на самом низшем уровне.
Рассматриваемый в данной работе итерационный метод состоит из четырех уровней (рис.2). Верхний уровень включает в себя RANS-метод прямого расчета обтекания ЛА вязким сжимаемым потоком. На ступеньку ниже используется пространственный метод полного

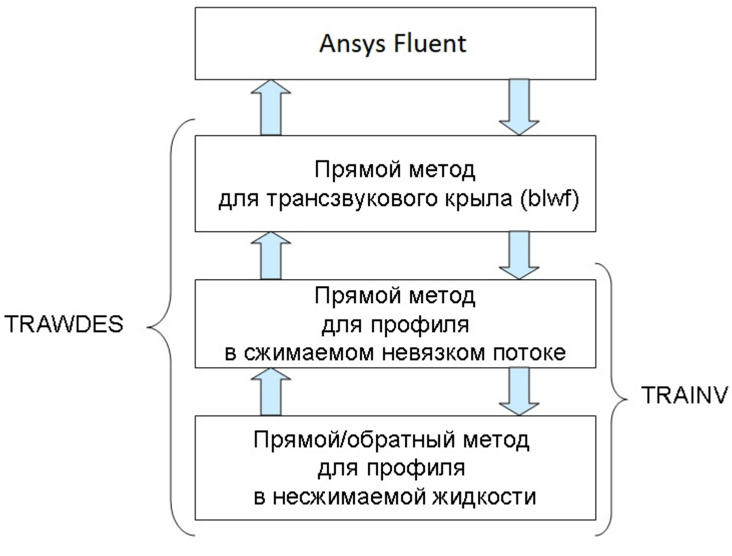


Рис. 3: Применение принципа вложенных уровней в данной работе

потенциала с учетом влияния толщины вытеснения пограничного слоя и следа за крылом – известная отечественная программа BLWF. На следующем уровне применяется двумерный метод полного потенциала. Самый низший уровень представляет собой панельный метод решения прямой/обратной задачи для профиля в несжимаемой жидкости. Заметим, что первые два уровня в совокупности представляют собой метод решения обратной задачи для профиля в потенциальном потоке сжимаемой жидкости - TRAINV, а первые три уровня – метод решения обратной задачи для крыла в трансзвуковом потенциальном потоке – TRAWDES. Данные комплексы широко используются в течение длительного времени для решения задач аэродинамического проектирования в ЦАГИ.

Приведены примеры построения геометрии крыла по заданному распределению давления, демонстрирующие работоспособность описанного алгоритма и высокую скорость сходимости метода (3-4 итерации) даже при наличии скачков уплотнения.

Осесимметричная сингулярная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках

Боревич Е. З. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический университет
danitschi@gmail.comu

Предполагается, что функции ∇v и n, описывающие соответственно напряженность электрического поля и плотность движущихся электронов в круге Ω единичного радиуса, зависят только от полярного радиуса ρ и удовлетворяют при $0 < \rho < 1$ системе уравнений [1]

$$\begin{cases} \mathrm{d}iv(D(|\nabla v|)(\nabla n - n\nabla v)) = 0, \\ \qquad -div(\nabla v) = f - n \end{cases} \tag{1}$$

и граничным условиям

$$v\mid_{\partial\Omega}= 0, \quad \nabla v \cdot \nu \mid_{\partial\Omega}= 0. \tag{2}$$

Здесь постоянная $f > 0$ задает однородную плотность ионизированной примеси, $D(|\nabla v|)$ – коэффициент диффузии.

Краевая задача (1)–(2) эквивалентна следующей задаче

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}(\rho\varphi')' + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi'\varphi + f\varphi = \frac{j}{\rho D|\varphi|)}, \\ \varphi(\rho) = v'(\rho), \\ v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где произвольная константа j задает плотность тока электронов.

Задача (3) имеет при любом f тривиальное решение $v(\rho) = 0$, $j = 0$. Предположим, что плотность тока электронов линейно зависит от однородной плотности ионизированной примеси, т.е. $j = fc_0$. Пусть $H^1_0(0,1)$ – замыкание в $L_2([0,1];\rho)$ множества $\{\Psi' \mid \Psi \in C^1(0,1), \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0\}$, $H^1(0,1)$ – замыкание в $L_2([0,1];\rho)$ множества $\{u \in C^1(0,1) \mid (\rho u)' = 0\}$ на $\{(0,1)\}$. Нетрудно показать, что $L_2([0,1];\rho) = H^1_0(0,1) \bigoplus H^1(0,1)$.

Пусть $G^1_0(0,1)$ – замыкание в $L_2([0,1];\rho)$ множества $\{\Psi' \mid \Psi \in C^1(0,1) \mid \Psi(0) = \Psi(1) = \Psi'(0) = \Psi'(1) = 0\}$. Линеаризуем задачу (3).

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}(\rho\varphi')' = \frac{fK(\rho)\varphi}{\rho} + \frac{c_1}{\rho}, \\ \varphi(\rho) = v'(\rho), \\ v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $K(\rho) = \left(\frac{-c_0D'(0)}{D^2(0)} - \rho\right)$, $c_1 = \frac{fc_0}{D(0)}$.

Предположим, что функция $K(\rho) > 0$ при $\rho \in [0,1]$. Пусть P – ортогональный проектор из $L_2([0,1];\rho)$ на $H^1_0(0,1)$. Задачу (4) можно представить в виде $Au = fPK(\rho)\frac{u}{\rho}$, где $A = -P(\frac{1}{\rho}(\rho u')')$, $u \in G^1_0(0,1)$.

Оператор A является самосопряженным положительным оператором из $G^1_0(0,1)$ на $H^1_0(0,1)$. Пусть λ_k – собственные числа оператора A и $f_k = \frac{\lambda_k}{K}$, $k \in N$.

Теорема. *При сделанных предположениях задача (3) имеет бифуркационные решения при* $f = f_k$, $k \in N$ [2].

Литература

[1] Van Roosbroeck, W. *Theory of flow of electrons and holes in Germanium and other semiconductors.* Bell. Syst. Tech., 1950, **29**, 560–607.

[2] Grandall, M.G., Rabinowitz, P.H. *Bifurcation for simple eigenvalues.* J. Funct. Anal., 1971, **8**, 321–340.

Вырожденная система интегро-дифференциальных уравнений

Борель Л.В. (Россия, Челябинск)
ФГБОУ ВО "Челябинский государственный университет"
lidiya904@yandex.ru

Пусть B и C — квадратные матрицы порядка $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rang} B = k$, $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $K(t,s)$ — квадратная матрица порядка $d \in \mathbb{N}$, зависящая от двух параметров $t, s \in [0,T]$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для алгебро-дифференциальной системы уравнений для функций одной переменной

$$B\dot{u}(t) = Cu(t) + \int_0^T K(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

где $u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_d(t))$, $u_0 = \mathrm{col}(u_{10}, u_{20}, \ldots u_{d0})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Известно, что если существует такое $\alpha \in \mathbb{C}$, что $\det(\alpha B - C) \neq 0$, то оператор B (L,p)-ограничен [1], а потому и сильно (L,p)-радиален [2] при некотором $p \in \{0, \ldots, d-1\}$.

Рассмотрим для определённости при $d = 3$ задачу

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t) &= u_1(t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{1i}(t,s)u_i(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \\
\dot{u}_3(t) &= u_2(t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{2i}(t,s)u_i(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \\
0 &= u_3(t) + \sum_{i=1}^{3} \int_0^T k_{3i}(t,s)u_i(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{4}$$

Имеем

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = I, \quad (\mu B - I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\mu \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\mu B - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$((\mu B - I)^{-1}B)^2 = (B(\mu B - I)^{-1})^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$((\mu B - I)^{-1}B)^2(\mu B - I)^{-1} = I(\mu B - I)^{-1}(B(\mu B - I)^{-1})^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому оператор I сильно $(B,1)$-радиален [2] с константами $a = 1$, $K = 1$. Используя общую теорему из [3], получим следующий результат.

Утверждение 1. *Пусть* $u_{i0} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ *— функция ограниченной вариации,* $k_{ij} \in C^{2,0}([0,T] \times [0,T]; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$k_{ij}(0,s) \equiv 0,\ \frac{\partial k_{ij}}{\partial t}(0,s) \equiv 0,\ s \in [0,T], \tag{5}$$

$$V_0^T(\mu) \sum_{n=0}^{2} \max_{t,s \in [0,T]} \max_{i,j=1,2,3} \left| \frac{\partial^n k_{ij}}{\partial t^n}(t,s) \right| < 1.$$

Тогда существует единственное решение $u_1, u_2, u_3 \in C^1([0,T]; \mathbb{R})$ *задачи* (3), (4).

Для задачи с условием Шоуолтера — Сидорова $u_1(0) = u_{10}$ аналогичное утверждение справедливо и без условий (5).

Литература

[1] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators // Utrecht; Boston: VSP, 2003. 216+vii p.

[2] Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, №3. С. 173–200.

[3] Федоров В. Е., Борель Л. В. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, №3. С. 190–205.

Оптимизация процессов с переключениями моделей систем управления

Бортаковский А.С. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления с конечным числом переключений. В момент переключения происходит смена математической модели системы управления [1,2], а именно: меняются уравнения движения, пространство состояний, допустимые управления и т.п. Такие переключения, например, характерны для задач управления группами летательных аппаратов, когда изменяется количество управляемых объектов. Получены достаточные условия оптимальности, применение которых демонстрируется на академических примерах группового быстродействия.

Работа выполнена по заданию № 1.7983.2017/ВУ Минобрнауки РФ.

1. Постановка задачи. Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$: $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F$. Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i(t), u_i(t)),$$

а в моменты переключений – дискретно:

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Здесь: $x_i(t) \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ – состояние системы после i-го переключения, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$ управление непрерывным движением, $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$ – управление переключением.

На множестве допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ задан функционал

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t))dt + \sum_{i=0}^{N} g_i^+(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) + F_N(x_N(t_F)), \tag{1}$$

где (t_0, x_0) – начальное состояние, а g_i^+ – неотрицательная функция. Количество N и моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$ заранее не заданы и могут отличаться у разных процессов. Задача может быть дополнена терминальными ограничениями.

Требуется найти наименьшее значение функционала (1) и оптимальный процесс $d^* \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается.

2. Метод решения. Обозначим через $\varphi_j(t, x_j)$ функцию цены (функцию Гамильтона – Якоби – Беллмана), равную минимальному значению функционала оставшихся потерь $I_j(t, x_j, d)$ на множестве $\mathcal{D}_j(t, x_j)$ допустимых процессов после j-го переключения. Определим *образующую* функции цены, значение $\varphi_j^k(t, x_j)$ которой равно минимальному значению функционала оставшихся потерь $I_j^k(t, x_j, d)$ на множестве $\mathcal{D}_j^k(t, x_j)$ допустимых процессов с k оставшимися переключениями после j-го. Наконец, *условной* функцией цены будем называть функцию, значение $\phi_j^k(t, x_j|\tau, \widehat{x}_j)$ которой равно минимальному значению функционала оставшихся потерь $I_j^k(t, x_j, d)$ на множестве $\mathcal{D}_j^k(t, x_j|\tau, \widehat{x}_j)$ допустимых процессов с k оставшимися (после j-го) переключениями, первое из которых происходит в позиции $(\tau, \widehat{x})$. Введенные вспомогательные функции связаны "настоящей" функцией цены равенствами

$$\varphi_j(t, x_j) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_j^k(t, x_j); \quad \varphi_j^k(t, x_j) = \min_{t \leqslant \tau \leqslant t_F} \min_{\widehat{x}_j \in X_j} \phi_j^k(t, x_j|\tau, \widehat{x}_j).$$

Применяя метод динамического программирования, получаем уравнения для этих функций. Условная функция цены $\phi_j^k(t, x_j|\tau, \widehat{x}_j)$ удовлетворяет уравнению

$$\min_{u_j \in U_j} \left[\frac{\partial \phi_j^k}{\partial t} + \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_j} f_j(t, x_j, u_j) + f_j^0(t, x_i, u_j) \right] = 0 \tag{2}$$

с рекуррентным терминальным условием

$$\phi_j^k(\tau, x_j|\tau, x_j) = \min_{v_{j+1} \in V_{j+1}} \left[\varphi_{j+1}^{k-1}(\tau, g_{j+1}(\tau, x_j, v_{j+1})) + g_{j+1}^+(\tau, x_j, v_{j+1}) \right]. \tag{3}$$

Процедура последовательного решения уравнений (2)–(3) начинается с нахождения нулевой образующей, которая удовлетворяет уравнению (2) с терминальным условием $\varphi_j^0(t_F, x_j) = F_j(x_j)$. Минимальное значение функционала (1) находится по функции цены: $\min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, d) = \varphi_0(t_0, x_0)$.

Литература

[1] Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967. Т.176. №4. С.754–756.

[2] Болтянский В.Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Диф. уравнения. 1983. Т.19. №3. С.518–521.

Математическое моделирование волновой динамики стратифицированных сред

Булатов В.В., Владимиров Ю.В. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

Доклад посвящен изложению фундаментальных проблемам математического моделирования волновой динамики природных стратифицированных сред (океан, атмосфера). В докладе представлены основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения внутренних и поверхностных гравитационных волн в стратифицированных по вертикали, неоднородных по горизонтали и нестационарных средах, изложены асимптотические методы, являющихся обобщением пространственно временного лучевого метода (метода геометрической оптики, метода ВКБ). Внутренние и поверхностные гравитационные волны изучаются уже достаточно давно, и по данной тематике опубликовано значительное число работ.

В настоящее время возникают новые направления в математическом исследовании этих волн. Во-первых, стало понятным, что в поле внутренних и поверхностных волн могут появляться аномально большие короткоживущие волны-убийцы, природа которых напоминает природу волн-убийц на поверхности моря. Во-вторых, сдвиговые течения внутренних волн приводят к большим изгибающим моментам на опоры морских платформ, что уже приводит к деформации подводных технологических конструкций в ряде районов Мирового океана. В стадии разработки находится система мониторинга интенсивных внутренних и поверхностных волн (аналогичная системе мониторинга цунами), которая основана на фундаментальных результатах математического моделирования волновой генерации. В-третьих, внутренние волны способны вызвать транспорт донных наносов в глубоководных районах, где эффект поверхностных волн на дно минимален. Наконец, классические задачи гидродинамики о взаимодействии внутренних и поверхностных гравитационных волн по-прежнему остаются актуальными.

На распространение внутренних и поверхностных гравитационных волн существенное влияние оказывают как неоднородность и нестационарность гидрофизических полей, так и изменение рельефа дна. При этом точные аналитические решения основных волновых задач получаются только в случае, если распределение плотности морской воды (рельеф дна) описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда характеристики океанической среды (форма профиля дна) произвольны, можно построить только численные решения соответствующих задач. Однако последнее не позволяет качественно анализировать характеристики волновых полей, особенно на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних волн дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации. В этом случае описание и анализ волновой динамики можно осуществить только на основе асимптотических моделей и аналитических методов их решения, изложенных в докладе.

Построенные математические модели волновой динамики позволяют описывать поля внутренних и поверхностных волн для реальных гидрофизических параметров сред. Универсальный характер предложенных асимптотических методов моделирования волновой динамики позволяет не только эффективно рассчитывать волновые поля, но и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно и для правильной постановки математических моделей волновой динамики, и для проведения экспресс оценок при натурных измерениях волновых полей. Особая роль разработанных асимптотических методов обусловлена тем обстоятельством, что основные параметры природных стратифицированных сред (океан, атмосфера), как правило, известны приближенно, и попытки их точного численного решения по исходным уравнениям гидродинамики с использованием таких параметров могут привести к заметной потере точности получаемых результатов. Помимо фундаментального интереса построенные математические модели представляют значительную ценность для практики, поскольку позволяют решать задачи моделирования волновых гидрофизических полей в широком классе приложений.

Литература

[1] Булатов В. В. Владимиров Ю. В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015.

Свойства конечно-аддитивных мер, инвариантных относительно сдвигов

Бусовиков В.М. (Россия, Москва)
Московский физико-технический институт (государственный университет)
treonon38@mail.ru

Меры, инвариантные относительно сдвигов, успешно применяются при исследовании решений дифференциальных уравнений при помощи усреднения случайных блужданий в координатном пространстве. Практическое применение вышеуказанных мер можно найти, например, в [1]. В данной работе усреднение случайных однопараметрических семейств операторов сдвига на векторы координатного пространства по мерам на множестве таких операторов применяются получения однопараметрических сильнонепрерывных полугрупп операторов, разрешающих задачу Коши для уравнения диффузии, уравнения дробной диффузии и уравнения Шрёдингера с разнообразными гамильтонианами. Планируется в дальнейших исследованиях дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах применить свойства мер, установленные в настоящем сообщении.

Как известно (см. [2]), на бесконечномерном топологическом векторном пространстве не существует аналога меры Лебега, т.е. не существует такой нетривиальной меры, удовлетворяющей одновременно следующим свойствам:

1. борелевость
2. счётная аддитивность
3. σ-конечность
4. локальная конечность
5. инвариантность относительно сдвига на любой вектор этого пространства

В силу несуществования нетривиальной меры, удовлетворяющей сразу *всем* перечисленным свойствам, изучались меры, инвариантные относительно сдвига на векторы из некоторого максимального допустимого подпространства, как в [3]. Или, например, не σ-конечные меры, как в [4].

Планируется рассказать о свойствах семейства мер на пространствах последовательностей l_p, удовлетворяющих свойствам 3)-5), изучавшиеся до этого в работах [5] и [6]. В частности, о более сильном результате о верхней мере шаров, чем в [6], в котором она вычислена только для шаров радиуса $r < \frac{1}{2}$ и $r > 1$ в l_2. Будет вычислена верхняя мера шаров для всех радиусов в l_p, кроме $r_p = 2^{-1+\frac{1}{p}}$. Вопрос о верхней мере шара радиуса r_p остается открытым: известно только, что она равна либо 0, либо $+\infty$. Также будет доказана σ-конечность меры на l_p, что не противоречит наличию континуума непересекающихся множеств единичной меры, как утверждалось в [5]. Наконец, будет рассказано о некоторых технических результатах, не публиковавшиеся ранее.

Литература

[1] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана. Изв. РАН. Сер. матем., 80:6 (2016), 141–172; Izv. Math., 80:6 (2016), 1131–1158.

[2] Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд. иностр. лит., 1950.

[3] Вершик А.М. Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?, Анализ и особенности. Часть 2, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, 259, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 256–281; Proc. Steklov Inst. Math., 259 (2007), 248–272.

[4] Baker R. “Lebesgue measure” on R^∞. Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.

[5] Сакбаев В.Ж. Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов. Дифференциальные уравнения. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 140, ВИНИТИ РАН, М., 2017, 88–118.

[6] Сакбаев В.Ж. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига. ТМФ. 2017. Т. 191, № 3.

Математическая модель Буссинеска с аддитивным белым шумом

Бычков Е.В. (Российская Федерация, Челябинск)
ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)»
bychkovev@susu.ru
Котлованов К.Ю. (Российская Федерация, Челябинск)
ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)»
kotlovanovki@susu.ru

В докладе будет рассмотрена задача Шоуолтера – Сидорова

$$P(\eta(0)-\eta_0)=0,\quad P(\overset{o}{\eta}_t(0)-\eta_1)=0 \tag{1}$$

для стохастического уравнения Буссинеска

$$(\lambda-\Lambda)\overset{o}{\eta}_{tt}=k\Lambda\eta+w. \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{U}=\mathbf{l}_q^{m+\deg L}\mathbf{L}_2$, $\mathfrak{F}=\mathbf{l}_q^{m}\mathbf{L}_2$, $m\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}_+$ и $L=L(\Lambda)$ и $M=M(\Lambda)$ – многочлены с действительными коэффициентами; оператор $\Lambda u=(\lambda_1u_1,\lambda_2u_2,...)$ ($\{\lambda_k\}\subset\mathbb{R}_+$ – монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$) действует в пространствах последовательностей. Тогда задачу (1), (2) можно представить в виде

$$L\overset{o}{\eta}^{(2)}=M\eta+N\Theta, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0+}P(\eta(t)-\eta_0)=0,\ \lim_{t\to 0+}P(\overset{o}{\eta}(t)-\eta_1)=0. \tag{4}$$

где $\eta=\eta(t)$ – искомый, а Θ – заданный стохастические процессы; символом $\overset{o}{\eta}$ обозначена производная Нельсона – Гликлиха [1] стохастического процесса $\eta=\eta(t)$. В работе [2] доказана

Лемма. *Пусть многочлены $L=L(s)$ и $M=M(s)$ имеют только действительные корни и не имеют общих корней, тогда оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Определение. Назовем случайный процесс $\eta\in\mathbf{C}^2\mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2(0,\tau)$ *классическим решением уравнения* (3), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (3) при всех $t\in(0,\tau)$. Если, кроме того, решение $\eta=\eta(t)$ уравнения (3) удовлетворяет условию (4), то будем его называть *классическим решением* задачи (3), (4).

Начальные случайные величины η_0,η_1 представим в виде

$$\eta_0=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^0\sqrt{\mu_k}e_k;\qquad \eta_1=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^1\sqrt{\mu_k}e_k,$$

причем случайные величины $\eta_k^0,\eta_k^1\in\mathbf{L}_2$ равномерно ограничены, т.е. найдется такое число $C_0>0$, что $D\eta_k<C_0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Тогда справедлива

Теорема. [3] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен. Тогда при любом $N\in\mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ и случайном процессе w таком, что $(\mathbb{I}-Q)N\Theta\in\mathbf{C}^{p+n}l_q^m\mathbf{L_2}$ и $QNw\in\mathbf{C}l_q^m\mathbf{L_2}$, и независимых случайных величинах $\xi_k\in\mathfrak{P},k=0,\dots,n-1$, независимых с Θ при фиксированных $t\in[0,\tau]$, существует единственное решение и задачи 3, 4. Причем решение имеет вид*

$$u(t)=\sum_{k=0}^{1}V_k^t\xi_k+\int_0^t V_1^{t-s}L_1^{-1}QNw(s)ds-\sum_{q=0}^{p}H^qM_0^{-1}N\overset{o}{W}^{(q)}(t).$$

Здесь

$$V_0^t\eta_0=\sum_{k=1}^{\infty}e^{\nu_kt}\eta_k^0\sqrt{\mu_k}e_k;\qquad V_1^t\eta_1=\sum_{k=1}^{\infty}e^{\nu_kt}\eta_k^1\sqrt{\mu_k}e_k,$$

Доказательство данной теоремы на методах теории вырожденных разрешающих групп операторов [4] аналогично детерминированному случаю. Затем покажем, что задача (1), (2) удовлетворяет условиям теоремы и приведем пример.

Литература

[1] Gliklikh, Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise Protect by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2012, №27 (286), pp. 24–34.

[2] Solovyova N. N., Zagrebina S. A., Sviridyuk G. A. Sobolev Type Mathematical Models with Relatively Positive Operators in the Sequence Spaces // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2017. Т. 9. №4. С. 27–35.

[3] Замышляева А. А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 40(299) С. 73–82.

[4] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.

О структуре обобщенных функций, сосредоточенных на поверхности конуса

Васильев В.Б. (Россия, Белгород)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

vbv57@inbox.ru

При исследовании разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений автору неоднократно приходилось сталкиваться с распределениями, сосредоточенными на поверхности конуса [1-4]. Несмотря на обилие таких функций в известной серии И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова, автора не устроила ни одна из них, и поэтому предлагается взлянуть на эти обобщенные функции несколько по-другому.

В качестве основных функций мы выберем пространство Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций, и обозначать $S'(\mathbb{R}^m)$ соответствующее пространство обобщенных функций.

Пусть C – острый выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^m$, не содержащий целой прямой. Кроме того, мы предположим что поверхность конса задается уравнением $x_m = \varphi(x'), x' = (x_1, \cdots, x_{m-1})$, где $\varphi : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ – гладкая на $\mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$ функция и $\varphi(0) = 0$. Введем следующую замену переменных $t_k = x_k, k = 1, 2, \cdots, m-1, t_m = x_m - \varphi(x')$ и обозначим этот оператор замены переменных $T_\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Для $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ определим обобщенную функцию $T_\varphi f$ формулой

$$(T_\varphi f, \psi) = (f, T_{-\varphi}\psi). \qquad (1)$$

Предложение 1. *Обобщенная функция $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ с носителем на поверхности конуса выглядит следующим образом*

$$f = T_\varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x') \otimes \delta^{(k)}(x_m)\right). \qquad (2)$$

где $c_k \in S'(\mathbb{R}^{m-1}), k = 0, 1, \cdots, n,$ – произвольные обобщенные функции.

3. Преобразование Фурье. Принципиальным моментом является описание преобразования Фурье таких функций. Для $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ имеется определение

$$(Ff, \psi) = (f, F\psi), \ \forall\psi \in S(\mathbb{R}^m). \qquad (3)$$

Из формулы (2) получим

$$\tilde{f} \equiv Ff = FT_\varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x') \otimes \delta^{(k)}(x_m)\right) = (FT_\varphi^{-1}F^{-1})\left(\sum_{k=0}^{n} \tilde{c}_k(\xi')\xi_m^k\right) \equiv$$

$$\equiv V_\varphi\left(\sum_{k=0}^{n}\tilde{c}_k(\xi')\xi_m^k\right).$$

С учетом определений (1) и (3) можно определить оператор V_φ на обобщенных функциях $f\in S'(\mathbb{R}^m)$.

Определение.

$$(V_\varphi f,\psi)=(f,V_\varphi^{-1}\psi),\ \forall\psi\in S(\mathbb{R}^m). \tag{4}$$

Из определения (4) следует, что первоначально нужно описать действие оператора V_φ на функциях $S(\mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим случай $m=2$ и приведем явный вид преобразования V_φ. Пусть $\varphi(x_1)=a|x_1|, a>0$. Обозначим H_1 преобразование Гильберта по первой переменной

$$(H_1\tilde{u})(\xi_1,\xi_2)=v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}(\eta_1,\xi_2)d\eta_1}{\xi_1-\eta_1}.$$

Предложение 2. *Для $\psi\in S(R^2)$ имеет место равенство*

$$(V_\varphi\tilde{\psi})(\xi)=\frac{\tilde{\psi}(a\xi_2+\xi_1,\xi_2)+\tilde{\psi}(a\xi_2-\xi_1,\xi_2)}{2}+\frac{i}{2\pi}(H_1\tilde{\psi})(a\xi_2+\xi_1,\xi_2)-\frac{i}{2\pi}(H_1\tilde{\psi})(a\xi_2-\xi_1,\xi_2)$$

Заключение. Во многих случаях для конкретных конусов в пространстве $\mathbb{R}^m$ получены явные формулы. Автор выражает надежду, что это приведет к существенному прогрессу в исследованиях разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений и краевых задачах на многообразиях с негладкой границей.

Литература

[1] Vasil'ev V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[2] Vasilyev V. B. On the Dirichlet and Neumann problems in multi-dimensional cone // Math. Bohem. 2014. V. 139. No. 2. P. 333–340.

[3] Vasilyev V. B. On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2014. V. 9. No.2. P. 227–237.

[4] Васильев В. Б. Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах // Сибирск. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1129–1149.

Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклинической точкой

Васильева Е. В. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
ekvas1962@mail.ru

Рассматривается диффеоморфизм многомерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. В произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки может лежать бесконечное множество периодических точек, такие периодические точки делятся на однообходные и многообходные.

Из работ Ш. Ньюхауса, Б. Ф. Иванова, Л. П. Шильникова, С. В. Гонченко и других авторов (статьи [1 – 3]) следует, что все существующие однообходные периодические точки неустойчивы. Также из вышеперечисленных работ следует, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразия в гомоклинической точке, ее произвольно малая окрестность может содержать счетное множество многообходных устойчивых периодических точек, но, по крайней мере, один из характеристических показателей у таких точек стремится к нулю с ростом периода.

Пусть f – диффеоморфизм многомерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. В [4], [5] предполагалось, что все собственные числа матрицы $Df(0)$ действительны. В этих работах показано, что при выполнении определенных условий, наложенных, прежде всего, на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки содержит счетное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Предположим, что матрица $Df(0)$ имеет не только действительные, но и комплексно сопряженные собственные числа. Основная цель доклада – сформулировать условия, при которых указанный диффеоморфизм имеет в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки счетное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Литература

[1] Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. V. 12. P. 9 – 18.

[2] Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, 8. С. 1411 – 1419.

[3] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической точкой // Докл. РАН. 1993. Т. 330, No 2. С. 144 – 147.

[4] Васильева Е. В. Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 3 – 13.

[5] Васильева Е. В. Многомерные диффеоморфизмы с устойчивыми периодическими точками // Доклады Академии наук. 2011. Т. 441, No 3. С. 299 – 301.

Многочастотные амплитудно-фазовые операторы[5]

Васильченкова Д. Г. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет
darya.vasilchenkova@mail.ru
Данченко В. И. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет
vdanch2012@yandex.ru

Определение амплитудно-фазового оператора (АФО) $H_n(T, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t)$ дано авторами в другой заметке из настоящего сборника тезисов. Здесь мы рассматриваем следующую задачу. При фиксированном натуральном n и заданном наборе различных частот μ_k, $1 \leqslant \mu_k \leqslant n$, $k = \overline{1, m}$ $(m \leqslant n)$, требуется построить АФО порядка n для выделения сумм гармоник в виде:

$$a_0 \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{k=1}^{m} \tau_{\mu_k}(t) \approx H_n(T, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t), \qquad \{X_j\}, \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\tau_s(t) = a_s \cos s\,t + b_s \sin s\,t$, $T(t) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \tau_s(t)$ — равномерно сходящийся тригонометрический ряд, X_j, λ_j не зависят от T (зависят от n и номеров выделяемых гармоник). При этом равенство (1) должно быть точным на 2π-периодических тригонометрических многочленах $T(t) = T_n(t)$ степени не выше n. Таким образом, для вычисления точного значения суммы гармоник в любой фиксированной точке t_0 достаточно знать значения многочлена T_n в n узлах $t_0 - \lambda_j$. Например, из (1) получается арифметическая формула для суммы коэффициентов Фурье:

$$a_0 \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{k=1}^{m} a_{\mu_k} = H_n(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; 0).$$

[5]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект No 18-01-00744).

При $m = 1$ явные формулы вещественных параметров АФО $\{X_j\}$ и $\{\lambda_j\}$ получены в [1]. Для $m = 2$ аналитическое решение задачи получено в работе [2], но только для некоторых пар гармоник. Выделение сумм гармоник при $m \geqslant 2$ удалось реализовать с помощью численного алгоритма для достаточно широкого набора частот.

В задачах аппроксимации и фильтрации сигналов можно условно разделить АФО на высоко- и низкочастотные, которые выделяют гармоники с номерами $\mu_k =$
$= k$ и $\mu_k = n - k + 1$ ($k = \overline{1, m}$) соответственно. Приведем примеры их действий.

Подействуем АФО порядка $n = 10$ на $T_n(t) = \cos^n t$ и $T(t) = \cos\sqrt{2}t$. Выделим суммы низкочастотных гармоник с номерами $k = \overline{1, 5}$ и высокочастотных: $k = \overline{6, 10}$ (см. рис. 1 и рис. 2 соответственно).

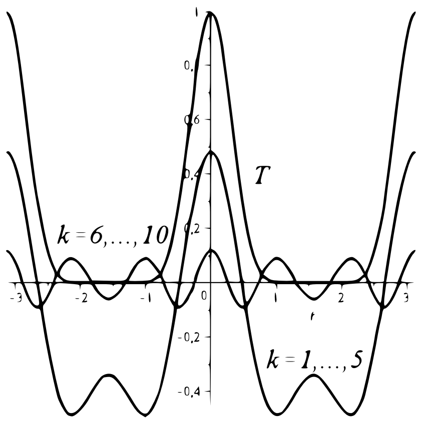


Рис. 1.

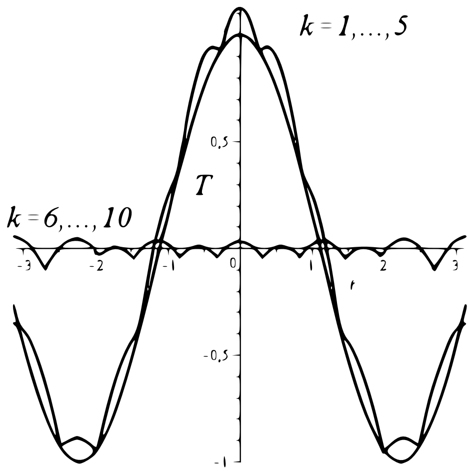


Рис. 2.

Приведем значения параметров этих АФО:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n = 10,\ \mu = \{1, 2, 3, 4, 5\}$										
X_j	-0.77	-0.77	-0.77	-0.77	-0.77	-0.77	-0.75	-0.75	-0.73	-0.73
λ_j	2.87	-2.87	2.28	-2.28	1.75	-1.75	1.16	-1.16	0.66	-0.66
$n = 10,\ \mu = \{6, 7, 8, 9, 10\}$										
X_j	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	-0.32	-0.31	-0.31	-0.47	-0.47
λ_j	2.83	-2.83	2.31	-2.31	1.68	-1.68	1.19	-1.19	0.44	-0.44

Литература

[1] V. I. Danchenko, D. G. Vasilchenkova. Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase operators // arXiv:1606.08716v1 [math.CA], 28 Jun 2016

[2] Данченко Д. Я., Данченко В. И. Оценки сумм двух гармоник тригонометрических многочленов// Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2017). Владимир, Аркаим, 2017. С. 62–63.

Точное выделение гармоник из тригонометрического многочлена, заданного на сетке[6]

Васильченкова Д. Г. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
darya.vasilchenkova@mail.ru

Данченко В. И. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
vdanch2012@yandex.ru

Данченко Д. Я. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
ddanchenko@vlsu.ru

Для выделения гармоник из тригонометрических многочленов

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \qquad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{C} \tag{1}$$

будем использовать вещественные амплитудно-фазовые операторы (АФО) порядка не выше m вида

$$T_n(t) \to H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) := \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t - \lambda_j\right), \qquad m \in \mathbb{N} \tag{2}$$

с вещественными амплитудами $\{X_j\}$ и начальными фазами $\{\lambda_j\}$. Одним из следствий основного результата работ [1], [2] является

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \mu \le n$, $s = \min\{r : r\mu - 1 \geqslant n\}$. *Тогда*

$$\tau_\mu(t) + a_0 \cdot \omega = H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t), \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

где[7]

$$m = \mu(s+1), \qquad \lambda_j = -\arg z_j, \quad X_j = \frac{1}{m}\left(\omega + 2\operatorname{Re} z_j^{\mu}\right),$$

а z_j *составляют множество* $\{z_j\} = \{\sqrt[m]{e^{i\varphi_0}}\}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$.

Возьмем, к примеру, $\varphi_0 = 0$, тогда фазы и амплитуды имеют вид

$$\lambda_j = \frac{2\pi(j-1)}{m}, \quad X_j = \frac{1}{m}\left(2\cos(\lambda_j \mu) + \omega\right), \qquad j = \overline{1,m},$$

а значения АФО (2) в точках λ_k —

$$H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; \lambda_k) = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(\lambda_k - \lambda_j\right).$$

Аргумент $\lambda_k - \lambda_j$ в силу периодичности T_n можно заменить на

$$\begin{cases} \lambda_{k-j+1} & \text{при } k \ge j \\ \lambda_{m+k-j+1} & \text{при } k < j \end{cases}, \qquad 1 \le k, j \le m,$$

откуда получается

Теорема 2. *Пусть многочлен* (1) *задан на равномерной сетке узлов* $\lambda_j = \frac{2\pi(j-1)}{m}$, $j = \overline{1,m}$. *Тогда точные значения гармоники* τ_μ *в узлах сетки вычисляются по формуле:*

$$\tau_\mu(\lambda_k) + a_0 \cdot \omega = \sum_{j=1}^{k} X_j \cdot T_n(\lambda_{k-j+1}) + \sum_{j=k+1}^{m} X_j \cdot T_n(\lambda_{m+k-j+1}), \quad k = \overline{1,m}.$$

---

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект No 18-01-00744).

[7]В работе [1] рассматривалась более сложная задача выделения гармоник посредством АФО минимального порядка $\mu(s-1) < m$, поэтому на ω накладывались дополнительные ограничения.

Литература

[1] V. I. Danchenko, D. G. Vasilchenkova. Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase operators // arXiv:1606.08716v1 [math.CA], 28 Jun 2016.

[2] Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. Фильтрация тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016). М.: МИАН, 2016. С. 40–41.

Об одной математической модели с аддитивным белым шумом в пространствах последовательностей

Васючкова К.В., Манакова Н.А. (Россия, Челябинск)
Южно-Уральский государственный университет
vasiuchkovakv@susu.ru, manakovana@susu.ru

Рассмотрим полное вероятностное пространство $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и множество действительных чисел $\mathbb{R}$, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ будем называть *случайной величиной.* Множество случайных величин, чьи математические ожидания равны нулю, образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$, где $\mathbf{E}$ – математическое ожидание случайной величины. Отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ будем называть *одномерным случайным процессом.* Через $\overset{o}{\eta}{}^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, обозначим l производную Нельсона – Гликлиха [1] случайного процесса η. Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$, $l \in \mathbb{N}$, случайных процессов, чьи траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ до порядка l включительно. Затем, возьмем монотонно убывающую числовую последовательность $K = \{\mu_k\}$, такую, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k < +\infty$. Определим случайный K-процесс $\Theta_K(t) = \sum\limits_{j=k}^{\infty} \sqrt{\mu_k}\eta_k(t)\varphi_k$, при условии, что данный ряд сходится равномерно на любом компакте из $\mathfrak{I}$, причем $\{\eta_k\}$ – последовательность независимых случайных процессов. Введем в рассмотрение производные Нельсона – Гликлиха случайного K-процесса $\overset{o}{\Theta}{}_K^{(l)}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_j}\, \overset{o}{\eta}{}_k^{(l)}(t)\varphi_k$, при условии, что в правой части данного ряда существуют производные до порядка l включительно и ряд сходится равномерно на любом компакте из $\mathfrak{I}$.

Построим пространства $\mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2$ последовательностей [2] случайных величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ с нормой $|||\omega|||_q^m = \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^m \mathbf{D}\omega_k)^{\frac{q}{2}}\Big)^{\frac{1}{q}}$, $q \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{R}$. Вложения $\mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2 \hookrightarrow \mathbf{l}_q^n\mathbf{L}_2$ плотны и непрерывны при всех $m \geq n$ и $q \in [1, \infty)$, а оператор $\Lambda u = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, ...)$, $\Lambda \subset \mathcal{L}(\mathbf{l}_q^{m+2}\mathbf{L}_2; \mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2)$ и непрерывно обратим при всех $m \in \mathbb{R}$ и $q \in [1, \infty)$.

Рассмотрим ослабленную задачу Шоуолтера – Сидорова для стохастического уравнения соболевского типа

$$\lim_{t \to 0+} P(\eta(t) - \eta_0) = 0, \;\; L \overset{o}{\eta} = M\eta + N\Theta, \tag{1}$$

где $\eta = \eta(t)$ – искомый, а Θ – заданный стохастические процессы, P – относительный спектральный проектор [3], действующий вдоль $\ker L$; здесь $L = L(\Lambda)$ и $M = M(\Lambda)$ – многочлены с действительными коэффициентами, причем их степени удовлетворяют условию

$$\deg L \geq \deg M. \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{U} = \mathbf{l}_q^{m+2\deg L}\mathbf{L}_2$, $\mathfrak{F} = \mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in [1, \infty)$, тогда операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Назовем классическим решением задачи (1) случайный процесс $\eta \in \mathbf{C}^1\mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2(0, \tau)$, который п.н. удовлетворяет (1) при всех $t \in (0, \tau)$.

Теорема. *Пусть выполнено условие* (2) *и многочлены* $L = L(s)$ *и* $M = M(s)$ *имеют только действительные корни и не имеют общих корней, оператор* $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. *Тогда при* *любом случайном процессе* $\Theta = \Theta(t)$ *таком, что выполнено* $(\mathbb{I} - Q)N\Theta \in \mathbf{C}^1\mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2$ *и* $QN\Theta \in \mathbf{C}\mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2$*, где* Q *– относительно спектральный проектор, действующий вдоль* $\operatorname{coker} L$*, и любой случайной величине* $\eta_0 \in \mathbf{l}_q^m\mathbf{L}_2$*, не зависящей от* Θ *для всех* $t \in (0, \tau)$*, существует единственное решение* $\eta \in \mathbf{C}^1\mathbf{l}_q^{m+2\deg \mathrm{L}}\mathbf{L}_2$ *задачи* (1).

Литература

[1] Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера – Сидорова и аддитивными шумами // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 1. С. 90–103.

[2] Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Barenblatt – Zheltov – Kochina Model with Additive White Noise in Quasi-Sobolev Spaces // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2016. V. 3. №. 1. P. 61–67.

[3] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo: VSP, 2003.

Химическая кинетика, эргодическая теория и связь гидродинамического и кинетического описания

Веденяпин В.В., Казанцева В.В. (Россия, Москва)
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН
vicveden@yahoo.com
Аджиев С.З., Мелихов И.В. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова

Мы рассмотрим важнейшие кинетические уравнения: уравнение Больцмана, которое описывает короткодействие и его важнейшее приложение - теорему о возрастании энтропии (H – теорема). H-теорема впервые была рассмотрена Больцманом в [1]. Эту теорему, обосновывающую сходимость решений уравнений типа Больцмана к максвелловскому распределению, Больцман связал с законом возрастания энтропии [2- 21]. Мы рассматриваем обобщения уравнений химической кинетики, включающие в себя классическую и квантовую химическую кинетику для непрерывного и дискретного времени [3, 14-21]. Рассматриваем уравнение Власова, которое описывает дальнодействие с её важнейшими приложениями для описания плазмы и крупномасштабных явлений во Вселенной[7-9]. Рассмотрим уравнение Лиувилля или неразрывности с приложениями к статистической механике[3-5] и в методе Гамильтона - Якоби [6-7, 12-13], а также в эргодической теории [3,4,14-16].

Литература

[1] Л. Больцман, "Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа Избранные труды, Наука, М., 1984, 125-189.

[2] Л. Больцман, "О связи между вторым началом механической теории теплоты и теорией вероятностей в теоремах о тепловом равновесии Избранные труды, Наука, М., 1984, 190-235.

[3] Веденяпин В. В. , Аджиев С. З. , "Энтропия по Больцману и Пуанкаре УМН, 69:6(420) (2014), 45-80; Russian Math. Surveys, 69:6 (2014), 995-1029.

[4] Пуанкаре А., Замечания о кинетической теории газов. Избранные труды. Т. 3. Наука, М., 1974.

[5] Козлов В.В., Трещев Д.В., Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем., ТМФ. 2003. 134:3. С.388-400.

[6] Козлов В.В. Общая теория вихрей. М.-Ижевск, 2013.

[7] Веденяпин В.В., Негматов М.А., Фимин Н.Н.Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем., 2017, том 81, выпуск 3, страницы 45-82.

[8] Веденяпин В.В. О стационарных решениях уравнения Власова-Пуассона. Доклады АН СССР, 290:4 (1986), Сс.777-780.

[9] Веденяпин В.В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача, Доклады АН СССР, 323:6 (1992), С. 1004-1006.

[10] Веденяпин В. В., "Временные средние и экстремали по Больцману Доклады РАН,422:2, (2008), 161-163.

[11] Аджиев С. З., Веденяпин В. В., "Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца ЖВМ и МФ.,51:11 (2011), 2063-2074.

[12] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона-Якоби. Доклады РАН, 446:2 (2012), С. 142-144.

[13] Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнений Власова и метод Гамильтона-Якоби, Доклады Академии Наук, 2013, т.449, N 5, С. 521-526.

[14] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова, М:Физматлит, 2001.

[15] Аджиев С.З., Амосов С.А, Веденяпин В. В., Одномерные дискретные модели для смесей. ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44. № 3. С. 553-558.

[16] Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations, Amsterdam, 2011.

[17] Аджиев С.З., Веденяпин В.В., Волков Ю.А., Мелихов И.В. Обобщённые уравнения типа Больцмана в газе. ЖВМ и МФ, 2017, т.57, N 12, с. 2065-2078.

[18] Аджиев С. З., Веденяпин В. В., О размерах дискретных моделей уравнения Больцмана для смесей, ЖВМ и МФ., 2007, N 47, с. 6.

[19] Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V., The h-theorem for the physico-chemical kinetic equations with discrete time and for their generalizations, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. T. 480. C. 39-50., Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. T. 480. C. 39-50.

[20] Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V., The h-theorem for the physico-chemical kinetic equations with explicit time discretization, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. T. 481. C. 60-69.

[21] Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V., The h-theorem for the physico-chemical kinetic equations with discrete time and for their generalizations, Journal of Physics: Conference Series. 2017. T. 788. N 1, C. 012001.

О некоторых свойствах топологической энтропии неавтономных динамических систем

Ветохин А.Н. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
anveto27@yandex.ru

Напомним определение топологической энтропии для неавтономных динамических систем [1]. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, $F \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^F(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)) \quad (f^{\circ i} \equiv f_i \circ \cdots \circ f_1,\ f^{\circ 0} \equiv \mathrm{id}_X), \quad x,\, y \in X,\, n \in \mathbb{N}.$$

Для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(F, \varepsilon, n)$ максимальное количество точек в X, попарные d_n^F-расстояния между которыми больше, чем ε. Такой набор точек назовем (F, ε, n)-отделенным. Тогда *топологической энтропией* неавтономной динамической системы $(X,\, F)$ назовем величину

$$h_{\mathrm{top}}(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(F, \varepsilon, n). \tag{1}$$

Для того, чтобы получить классическое определение топологической энтропии автономной динамической системы, нужно в качестве последовательности F взять стационарную последовательность $(f, f, \ldots)$.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному по совокупности переменных отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \to X \tag{2}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{3}$$

При произвольных $\mathcal{M}$, X и для любого отображения (2) функция (3) принадлежит второму бэровскому классу [3]. В случае, когда пространства $\mathcal{M}$ и X являются множествами Кантора на отрезке [0, 1] с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой, найдется отображение (2), являющееся гомеоморфизмом из X в X при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathcal{M}$, для которого функция (3) всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу [3].

Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

По последовательности непрерывных по совокупности переменных отображений

$$F \equiv (f_1, f_2, \ldots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \to X \tag{4}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(F(\mu, \cdot)). \tag{5}$$

В докладе [4] установлено, что функция (5) принадлежит четвертому классу Бэра. Этот результат усиливает

Теорема 1. *Для любой последовательности отображений* (4) *функция* (5) *принадлежит третьему классу Бэра на пространстве* $\mathcal{M}$.

Теорема 2. *Пусть* X *– канторово совершенное множество и* $\mathcal{M}$ *– множество иррациональных чисел на отрезке* [0; 1] *с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой. Тогда найдется последовательность отображений* (4), *для которой функция* (5) *всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу.*

Литература

[1] Kolyada S., Snoha L'. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random&Computational dynamics. 1996. V. 4. № 2&3. P. 205–233.

[2] Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 448–453.

[3] Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механ. 2016. № 2. С. 44–48.

[4] Астрелина А.А. О бэровском классе топологической энтропии неавтономных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1564.

Об одной модели диффузии информации

Винников Е.В. (Россия, Москва)
НИТУ МИСиС
evinnikov@gmail.com

Исследуется модифицированная модель распространения информации в социальной группе. Поставленная нелинейная задача оптимального управления решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Найденные оптимальные траектории наложены на множество достижимости системы.

Процесс диффузии информации характеризуется с помощью величины $N(t)$ — числа людей в социальной группе, принявших к моменту времени t распространяемую информацию.

Информация может быть получена по двум каналам: внешнему и внутреннему. Внешний канал по отношению к общности характеризуется интенсивностью внешнего воздействия (число равных информационных актов в единицу времени) и обозначается $\alpha_1(t)$ ($\alpha_1 \geqslant 0$). Внутренний канал представляет собой межличностное общение членов социальной группы с постоянной интенсивностью общения $\alpha_2 > 0$. В результате такого общения уже воспринявшие информацию адепты $N(t)$, влияя на ещё неподверженных информационному воздействию членов численностью $N^* - N(t)$, вносят свой вклад в процесс диффузии информации. Таким образом, скорость изменения числа адептов складывается из скорости внешнего и внутреннего воздействия на социальную группу и может быть записана следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{N}(t) = (\alpha_1(t) + \alpha_2 N(t))(N^* - N(t)), \qquad N(0) = N_0,$$

которое составляет математическую модель, описывающую процесс распространения информации. Под внешним воздействием можно понимать информацию, распространяемую посредством телевидения, СМИ и интернет (например, рекламу товаров), которая характеризуется коэффициентом стоимости внешнего воздействия $k = \mathrm{const} > 0$. В данной работе рассматривается следующий функционал:

$$J_1 = \int\limits_0^T [(N^*(t) - N(t))^2 + (k\alpha_1(t))^2]\, dt \to \min_{\alpha_1 \in [0, \alpha_1^1]}.$$

В данном функционале при больших значениях k эффективно ничего не тратить, при этом если $N_0 = 0$, то никто не овладеет информацией.

Получаем нелинейную задачу оптимального управления в безразмерных величинах:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (\alpha x(t) + \beta u(t))(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0, \\ J = \int\limits_0^T [(1 - x(t))^2 + (ru(t))^2]\, dt \to \min\limits_{u(\cdot) \in [0,1]}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(t) \in [0, 1], \quad x_0 \in [0, 1), \quad \alpha, \beta, r, T = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

Эта система описывает модель диффузии информации в социальной группе по внешнему и внутреннему каналам распространения информации по отношению к общности. Здесь $x(t)$ — отношение количества людей, принявших информацию, к общей численности социальной группы N^*, α — максимальное число актов общения между всеми членами группы, $u(t)$ — управление, β — максимальная интенсивность распространения внешней информации в единицу времени, r — коэффициент стоимости внешнего воздействия на одного человека в группе. Функционал J показывает, что мы хотим информировать максимальное число людей, подверженных распространяемой информацией, затратив при этом наименьшее число ресурсов на внешнее воздействие.

Литература

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[2] Измоденова К.В., Михайлов А.П. Об оптимальном управлении процессом распространения информации // Мат. моделирование. 2005. Т. 17. № 5. С. 67–76.

[3] Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. М.: МАКС Пресс, 2003, с. 57–67.

[4] Avvakumov S.N., Kiselev, Y.N. Construction of Optimal Control Laws for a Model of Information Diffusion in a Social Group // Computational Mathematics and Modeling, 26:1 (2015), 61–86.

[5] Vinnikov E.V. Construction of Attainable Sets and Integral Funnels of Nonlinear Controlled Systems in the Matlab Environment // Computational Mathematics and Modeling, 26:1 (2015), 107–119.

Осцилляционные свойства одной задачи четвертого порядка со спектральным параметром в граничном услови

Владимиров А. А. (Россия, Москва)
ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН
vladimirov@shkal.math.msu.su
Карулина Е. С. (Россия, Москва)
РЭУ им. Г.В. Плеханова
karulinaes@yandex.ru

Рассматривается многоточечная граничная задача для дифференциального уравнения

$$(py'')'' - (qy')' = \lambda ry$$

и граничных условий

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} y(\xi_i + 0) - y(\xi_i - 0) = y'(\xi_i + 0) - \eta_i y'(\xi_i - 0) = \\ = \eta_i (py'')(\xi_i + 0) - (py'')(\xi_i - 0) - \alpha_i y'(\xi_i - 0) = \\ = [(py'')' - qy'](\xi_i + 0) - [(py'')' - qy'](\xi_i - 0) = 0, \end{aligned}$$

$$(py)''(1) - \alpha\lambda y'(1) = [(py'')' - qy'](1) + \beta\lambda y(1) = 0,$$

где λ — спектральный параметр, $0 < \xi_0 < \ldots < \xi_m < 1$, $\eta_i > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Показывается, что в случае, если все собственные значения

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$$

рассматриваемой задачи положительны, то они являются простыми, причем производные y_n' соответствующих собственных функций имеют в точности n перемен знака.

Некоторые частные случаи рассматриваемой задачи были рассмотрены, в частности, в работе [1].

Литература

[1] Керимов Н.Б., Алиев З.С. Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Матем. сб., 197:10 (2006), с. 65–86.

[2] Владимиров А.А. К вопросу об осцилляционных свойствах положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки, 100:6 (2016), с. 800–806.

Асимптотика фундаментальных решений уравнения Штурма-Лиувилля при большом спектральном параметре

Владыкина В.Е. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова
vika-chan@mail.ru

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$-(r^2y')' + py' + qy = \lambda^2\rho^2 y, \qquad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где λ^2 — большой параметр, r и ρ — положительные функции, а p и q— комплекснозначные функции. Пусть также

$$p \in L_1[a, b], \quad q \in W_2^{-1}[a, b], \quad \rho, r \in AC[a, b] = W_1^1[a, b],$$

дополнительно предположим, что

$$\rho' u, r' u, pu \in L_1[a,b], \quad \text{где } u = \int q\,dx,$$

первообразная здесь понимается в смысле обобщенных функций.

Основная теорема: *Фундаментальные решения задачи (1) имеют вид*

$$y_\pm(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1+\varphi_\pm(x,\lambda)). \tag{2}$$

Здесь функции $\varphi_\pm$ таковы, что

$$|\varphi_+(x,\lambda)| + |\varphi_-(x,\lambda)| = o(1) \quad \text{при } |\lambda| \to \infty \text{ в полуплоскости } \operatorname{Im}\lambda \geqslant -s,$$

равномерно по $x \in [a,b]$, причем число s можно взять произвольно большим. Асимптотики (2) можно почленно дифференцировать, если вместо производной рассматривать квазипроизводную $y^{[1]} = y' - h(x)\frac{\rho}{r}y$, где $h = \int \frac{q}{r\rho}\,dx$. А именно,

$$y_\pm^{[1]}(x,\lambda) = \pm i\lambda\sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1+\psi_\pm(x,\lambda)),$$

где функции $\psi_\pm$ обладают таким же свойством, как функции $\varphi_\pm$.

Утверждение теоремы сохраняется, если вместо полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant -s$ рассматривать полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda \leqslant s$.

Значимость этой теоремы состоит в том, что асимптотические формулы найдены при минимальных предположениях о гладкости коэффициентов, а функция q является обобщенной функцией первого порядка сингулярности.

Этот результат является обобщением работы [1].

Литература

[1] Shkalikov A. A., Vladykina V. E. Asymptotics of the solutions of the Sturm—Liouville equation with singular coefficients // Mathematical Notes. 2015. V. 99. №5. P. 891–899.

Исследование операторных моделей, возникающих в наследственной механике

Власов В.В. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
vikmont@yandex.ru

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1], [2]) и имеют ряд других важных приложений. В частности, эти уравнения могут быть реализованы в виде следующей системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\rho\ddot{u}(x,t) - Lu(x,t) + \int\limits_0^t K_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \int\limits_0^t K_2(t-s)L_2u(x,s)ds = f(x,t),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, $t > 0$, среда заполняет ограниченную область $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, u удовлетворяет условиям Дирихле в области Ω с гладкой границей, $L_1 = \mu \cdot (\Delta u + 1/3 \cdot \text{grad div} u)$, $L_2 = \lambda \cdot \text{grad div} u$, $Lu = (L_1 + L_2)u$ - оператор Ламе теории упругости, K_1, K_2 функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см., [1], [2]).

Эти результаты являются обобщением результатов, опубликованных в работе [3].

Литература

[1] Vlasov V. V., Rautian N. A. Well-Posedness and Spectral Analysis of Hyperbolic Volterra Equations of Convolution Type // Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2016. V. 164. P. 411–419.

[2] Vlasov V. V., Rautian N. A. Spectral Analysis of Hyperbolic Volterra IntegroDifferential Equations // Doklady Mathematics. 2015. V. 91:2. P. 590–593.

[3] Vlasov V. V., Rautian N. A. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc. 2014. V. 75. P. 185–204.

Преобразование Радона в компьютерной стеганографии

Волосова Н.К. (Россия, Москва)
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
navolosova@yandex.ru

Предложен алгоритм использования преобразования Радона и уравнения типа Пуассона в стеганогафии[8]. Алгоритм комбинирует элементы компьютерной геометрии[9].

При функционировании больших сложных систем важнейшую роль играет безопасность передачи данных и недоступность для злоумышленников важных планов. *Цель работы кратко сформулировать идеи алгоритма, который формирует изображение и восстанавливает оригинал.*

Применение томографии и дифференциальных уравнений с частными производными привело к прогрессу в различных областях науки и приложений [1]. Данная работа открывает возможность использования этих методов ещё в одной области приложении - стеганографии.

1. Пример. Предположим, что некто «НК» хочет передать адресату «А» информацию скрытно от постороннего наблюдателя. Предварительно «НК» передает «А» некоторое количество фотографий. Они будут ниже использованы как «контейнеры» [2]. Предварительно, на каждой фото вводим сетку

$$\Omega = \Big((x,\, y) : x = i\, h,\ y = j\, h,\ i = 1, N,\ j = 1, M,\ 0 < h < 1\Big). \tag{1}$$

Нумеруем все узлы некоторым образом, который известен, только «НК» и результаты занесены в некоторую матрицу. В каждом узле известна конечная амплитуда сигнала, значение которой тоже занесено в другую матрицу, связанную с первой. Вводим новую декартову систему координат $x\ O\ y$. Точка где в которой находится начало координат и орентация одной из осей известно, только «НК». Эти данные занесены в некоторую матрицу B_1. Выше перечисленные матрицы занесены в некоторые массивы в кодах конструируемой программы. Сетка наносится на упомянутые выше фотографии не графически, а на

[8] В криптографии существуют подсказки противнику когда и что, т. е. какой объект надо подвергнуть криптоанализу. В области стеганографии конструируются математические методы которые лишают противника указанных подсказок.

[9] В область компьютерной геометрии входят методы интегральной геометрии, теории фракталов, теории интегральных преобразований, теории распознавания образов, а также теория построения компьютерного и машинного зрения и т.п.

компьютере виртуально, с помощью специальной программы, запоминаются, а затем, после формирования матрицы убирается. Таким образом, эта проведенная процедура остается неизвестной стороннему наблюдателю. Предположим, что некоторая информация закодирована специальным образом и представлена в виде объекта, который называют $QR\ code$. Этот объект будем называть оригиналом «О». Из них формируем базу эталонов которая понадобится для отладки программ.

На первом этапе предлагается применить ряд приёмов при которой появляются несколько новых дополнительных ключей и усложняющих задачу несанкционированного стегоанализа. То есть применим некоторый оператор. Это может быть растяжение, поворот, сжатие или, например, преобразование «пекаря» или итерации с помощью линейных систем используемые в теории фракталов. Все преобразования должны иметь единственное обратное преобразование известное только «НК» и соответствующие алгоритмы заносится в коды программы. Таким образом задана функция двух переменных $f(x,y)$ с носителем, который является объединением компактных носителей. Существует круг радиуса R, вне которого функция $f(x,y)=0$ при $\sqrt{x^2+y^2}>R$.

Математический аппарат преобразований Полученный после проведенных преобразований объект будем также называть оригиналом «О» и по нему можно сформировать изображение «И».

А.В первом случае для построения "И"применим преобразованием Радона.

Определение 1 Преобразованием Радона функции $f(x,y)$ называется функция

$$R(s,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(s\,Cos(\alpha)-z\,Sin(\alpha),\ s\,Sin(\alpha)+z\,Cos(\alpha)\Big)\,dz. \tag{2}$$

Декартова система координат описана выше xOy и скрыта от стороннего наблюдателя. Введём обозначения (замена переменных) $x=s\,Cos(\alpha)-z\,Sin(\alpha),\ y=s\,Sin(\alpha)+z\,Cos(\alpha)$.

Геометрический смысл преобразования Радона - это интеграл от функции вдоль прямой AA', перпендикулярной вектору $\mathbf{n}=(Cos(\alpha),\,Sin(\alpha))$. Здесь также существует много важных математических тонкостей, которые в данной работе не обсуждаем [1].

Замечание 1. *Существование обратного преобразования строго доказано в цикле работ математиков. Это некорректная задача [1], [3]. Отметим, что построения подобные приведенным выше можно проводить используя модифицированное преобразование Радона или преобразования Фурье с весовой функцией.*

В. Во втором случае для построения аналога "И"впервые предлагается применить эллиптические уравнения с частными производными. Предлагаем в простейшем случае рассмотреть уравнение Пуассона $\triangle u(x,y)=f(x,y)$в некоторой замкнутой области с нулевым краевым условием. Построение функции $f(x,y)$ описано выше. Решение краевой задачи существует и единственно. Таким образом и в этом случае строится функция $u(x,y)$ аналог изображения "И". Обратное восстановление функции $f(x,y)$ проводится по дискретным значениям на сетке функции $u(x,y)$с помощью стандартной разностной аппроксимации оператора Лапласа $\triangle u(x,y)$. Затем используется известная технология «водяных знаков» [2] и стегоконтейнер передается «А», который располагает программой восстановления оригинала.
В обоих случаях А,В после построения двух программ, осуществляется цикл отладки программы восстановления «О» используя заготовленную заранее базу эталонов. Автор благодарна М.А. Бассарабу, А.Л.Баландину, К.А. Волосову, Р.Г. Новикову за внимание к работе и полезные советы.

Литература

[1] Novikov R.G. Weighted ray transform and application. Conference handbook and proceedings. Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications. MTPT, Russia. 5-7, 12, 2017.

[2] Шелухин Щ.И., Канаев С.Д. Стеганография. М.: Горячая линия- Телеком. 2017, 592 с.

[3] Пикалов В.В.Баландин А.Л., Радионов Д.Г., Власенко М.Г., Князев Б.А. Терагерцевая томография низкоконтрастных объектов. ISSN 1818-7994. Вестник НГУ. Серия: Физика. 2010, т. 5, вып. 4. с.91-97.

К вопросу о «трагедии исчерпания общего ресурса»

Волосова Н.К. (Россия, Москва)
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
navolosova@yandex.ru

Волосова А.К., Волосов К.А., Вакуленко С.П. (Россия, Москва)
Российский университет транспорта (МИИТ)
konstantinvolosov@yandex.ru

Для того, чтобы построить замкнутую локальную модель структуры существующей в экономике, без сомнительных предположений, проводится аналогия с моделями которые изучаются в проблеме «мир РНК». Рассматриваются математические модели репликаторных систем (РС) связанные с указанной темой. Построены точные и асимптотические решения в случае «жестких» РС. Обнаружен эффект «apriory вымирающего» клона и эффект пограничного слоя, которые наблюдаются при численных расчётах. В модели в экономике обнаружен эффект существования «теневых, невидимых» сверх-потребителей. Сделан вывод, о том что общий ресурс будет исчерпан.

Литература

[1] Berezovskaya F.S., Kareva I.G., Karev G.P. Is it possible to prevent the «Tragedy of Common Resourse?». Math, Biolog. Bioinform., 2012, Volume 7, Issue 1, h. 30-44. Математическая биология и биоинформатика. 2012, т. 7, н.1, с.30-44.

Методы конструирования аналитических объектов

Воронин С.М. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
voron@csu.ru

Шайхуллина П.А. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
fominapa@gmail.com

В работе обсуждаются различные методы, используемые при конструировании аналитических объектов: метод последовательных приближений в его различных модификациях, методы, основанные на теории квазиконформных отображений и почти комплексных структур, теоремах Савельева и Грауэрта. В частности, будет доказана формулируемая ниже теорема о реализации модулей для полугиперболических отображений.

Рассмотрим для некоторого $\lambda, Re\lambda > 0$ стандартное полугиперболическое отображение $F_\lambda : (x,y) \mapsto (\frac{x}{1-x}, e^\lambda y)$. Отображение $H_0 : (x,y) \mapsto (\xi = -\frac{1}{x}, z = y)$ сопрягает его с косым сдвигом $T_\lambda : (\xi, z) \mapsto (\xi+1, \Lambda z)$, $\Lambda = e^\lambda : H_0 \circ F_\lambda = T_\lambda \circ H_0$. Функции $t = e^{2\pi i \xi}, \tau = ze^{-\lambda\xi}$ являются первыми интегралами для T_λ: $t \circ T_\lambda = t, \tau \circ T_\lambda = \tau$, а отображение $\pi : (\xi, z) \mapsto (t, \tau)$ есть проектирование области $D = (\mathbb{C}, \infty) \times (\mathbb{C}, 0)$ на фактор-пространство D/T_λ.

Рассмотрим покрытие $\omega = \{\omega_+^r, \omega_-^r, \omega_+^l, \omega_-^l\}$ области $d_\varepsilon = \{|\xi| > \varepsilon^{-1}\}$, состоящее из четырех областей специального вида: $\omega_+^r = \{\xi \in d_\varepsilon : -\delta < arg(\xi) < \pi - \delta\}$, $\omega_-^r = \{\xi \in d_\varepsilon : -\pi + \delta < arg(\xi) < \delta\}$, $\omega_+^l = \{\xi \in d_\varepsilon : \delta < arg(\xi) < \pi + \delta\}$, $\omega_-^l = \{\xi \in d_\varepsilon : \pi - \delta < arg(\xi) < 2\pi - \delta\}$, где $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\Omega_\pm^{r(l)} = \omega_\pm^{r(l)} \times \{|z| < \varepsilon\}$, тогда $\Omega = \{\Omega_\pm^{r(l)}\}$ — покрытие области $D_\varepsilon = d_\varepsilon \times \{|z| < \varepsilon\}$. Пусть $m = \{\alpha_\pm, \beta_\pm, \alpha_r, \beta_r, C\}$, функции α_+, β_+ голоморфны в $(\mathbb{C}^2, 0)$, функции α_-, β_- голоморфны в $(\mathbb{C}, \infty) \times (\mathbb{C}, 0)$, функции α_r, β_r голоморфны в $(\mathbb{C}, 0)$, $C \in \mathbb{C}$. Рассмотрим набор отображений $\hat{m} = \{\varphi_+, \varphi_-, \varphi_r, \varphi_l\}$, определенный по набору m следующим образом: $\varphi_\pm(t,\tau) = (t\alpha_\pm(t,\tau), \tau\beta_\pm(t,\tau))$, $\varphi_r(t,\tau) = (t\alpha_r(\tau), \tau\beta(\tau)), \varphi_l(t,\tau) = (t, \tau + C)$. Пусть набор M состоит из поднятий отображений набора $\hat{m}$ на накрывающую D_ε, и пусть все отображения набора M обратимы.

Рассмотрим абстрактное многообразие $\mathcal{M}$, полученное из областей покрытия Ω склейкой по отображениям набора M.

Теорема. *При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ многообразие $\mathcal{M}$ является комплексным многообразием, биголоморфно эквивалентным области в $\mathbb{C}^2$: существует вложение $j : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^2$, образ которого содержит область $D_{\varepsilon'}$ для некоторого $\varepsilon' < \varepsilon$.*

Замечание 1. Поскольку все отображения набора M коммутируют со сдвигом T_λ, на $\mathcal{M}$ корректно определено отображение F, в естественных картах на $\mathcal{M}$ совпадающее с T_λ. Вложение $J = H_0^{-1} \circ j$ сопрягает отображение F с некоторым полугиперболическим отображением $\tilde{F}$. Функциональные инварианты этого отображения из [1] в точности совпадают с исходным набором m.

Замечание 2. В случае, когда отображения $\varphi_\pm$ набора m тождественны, на $\mathcal{M}$ корректно определено векторное поле v, в естественных картах на $\mathcal{M}$ совпадающее с полем $\frac{\partial}{\partial \xi}$. Отображение J переводит поле v в голоморфное векторное поле $\tilde{v}$ с особой точкой в нуле типа седлоузел. При этом пара (β_r, C) будет модулем Мартине-Рамиса [2] поля $\tilde{v}$, α_r — дополнительный инвариант этого поля из [3].

Литература

[1] Воронин С. М., Фомина П. А. Секториальная нормализация полугиперболических отображений // Вестник ЧелГУ. 2013. №16. С. 94–113.

[2] Martinet J., Ramis J.P. Probl'eme de modules pour des 'equations diff'erentielles non lin'eaires du premier ordre, Inst. Hautes 'Etudes Sci.PublMath. 1982. **55**. Pp. 63–164.

[3] Воронин С.М., Мещерякова Ю.И. Аналитическая классификация седлоузлов. Тр. ММО. 2005. **66**. С. 93–113.

Задача стартового управления и финального наблюдения для трехкомпонентной математической модели передачи импульса по нейронам

Гаврилова О.В. (Россия, Челябинск)
Южно-Уральский государственный университет
gavrilovaov@susu.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ ограниченная область с гладкой границей класса C^∞. В цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим математическую модель процесса возбуждения в системе нервов на основе вырожденной системы Фитц Хью–Нагумо [1, 2]:

$$\left\{ \begin{array}{r} v_{1t} = \alpha_1 \Delta v_1 - \beta_{11} v_1 - \beta_{12} v_2 - \beta_{13} v_3 - \varkappa v_1^3 + w_1. \\ 0 = \alpha_2 \Delta v_2 - \beta_{21} v_1 - \beta_{22} v_2 - \beta_{23} v_3 + w_2, \\ 0 = \alpha_3 \Delta v - \beta_{31} v_1 - \beta_{32} v_3 - \beta_{33} v_3 + w_3, \end{array} \right. \tag{1}$$

с краевым условием

$$v_1(s,t) = 0, \ v_2(s,t) = 0, \ v_3(s,t) = 0, \ (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Здесь $v_1 = v_1(s,t)$ – функция, описывающая динамику мембранного потенциала; $v_2 = v_2(s,t)$, $v_3 = v_3(s,t)$ – медленные восстанавливающие функции, связанные с ионными токами; $w = (w_1, w_2, w_3)$ – заданная вектор-функция; $\beta_{ij} \in \mathbb{R}, i = j, i,j = \overline{1,3}$, $\alpha_i, \varkappa, \beta_{ij} \in \mathbb{R}_+, i \neq j, i,j = \overline{1,3}$, – фиксированные параметры, характеризующие порог возбуждения, его скорость, электропроводность и реполяризацию среды. Дополним (1), (2) начальными условиями Шоуолтера–Сидорова

$$v_1(s,0) = u(s), \ s \in \Omega. \tag{3}$$

Положим $\mathfrak{H}_i = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\mathfrak{B}_i = L_4(\Omega), i = \overline{1,3}$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_3 = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$. Определим пространства $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_3$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3$, а через $\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{B}^*$ обозначим сопряженные пространства к пространству $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$, соответственно. Пусть матрица $B = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ обладает свойством

$$\exists C_B, C_B > 0 : C_B\,[x,x] \leq [Bx,x] \leq C^B\,[x,x]\,. \tag{4}$$

Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x = (v_1, v_2, v_3)|\ v_1 \in L_\infty(0,T;\mathfrak{H}_1) \cap L_4(0,T;\mathfrak{B}_1),\ v_i \in L_2(0,T;\mathfrak{H}_i), i = 2,3\}.$$

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$ при $T \in \mathbb{R}_+$ назовем слабым обобщенным решением задачи Шоуолтера–Сидорова* (1) – (3)*, если она удовлетворяет*

$$\begin{gathered}
\int_0^T\int_\Omega \left(v_{1t}\zeta_1 + \alpha_1\nabla v_1\cdot\nabla\zeta_1 + \beta_{11}v_1\zeta_1 + \beta_{12}v_2\zeta_1 + \beta_{13}v_3\zeta_1 + \varkappa v_1^3\zeta_1\right)dsdt = \int_0^T\int_\Omega w_1\zeta_1 dsdt,\\
\int_0^T\int_\Omega \left(\alpha_2\nabla v_2\cdot\nabla\zeta_2 + \beta_{21}v_1\zeta_2 + \beta_{22}v_2\zeta_2 + \beta_{23}v_3\zeta_2\right)dsdt = \int_0^T\int_\Omega w_2\zeta_2 dsdt,\\
\int_0^T\int_\Omega \left(\alpha_3\nabla v_3\cdot\nabla\zeta_3 + \beta_{31}v_1\zeta_3 + \beta_{32}v_2\zeta_3 + \beta_{33}v_3\zeta_3\right)dsdt = \int_0^T\int_\Omega w_3\zeta_3 dsdt,\\
\int_\Omega \left(v_1(s,0) - u(s)\right)\zeta_1(s)ds = 0,\ \forall\zeta = (\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \in \mathcal{H}.
\end{gathered}$$

Существование и единственность решения задачи (1)–(3) в случае двухкомпонентной системы было показано в работе [1]. Рассмотрим задачу стартового управления и финального наблюдения

$$\begin{aligned}
J(x(T),u) = \vartheta\|v_1(T) - v_{1f}\|^4_{\mathfrak{B}_1} + \vartheta\|v_2(T) - v_{2f}\|^2_{\mathfrak{H}_2} + \vartheta\|v_3(T) - v_{3f}\|^2_{\mathfrak{H}_3} + \\
+ (1-\vartheta)\|u\|^4_{\mathfrak{B}_1^*} \to \inf, u \in \mathfrak{U}_{ad}
\end{aligned} \tag{5}$$

решениями (1)–(3), где $v_f = (v_1f, v_2f, v_3f)$. Здесь $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_1$. Пару $(\hat{x}(T),\hat{u}) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}$ будем называть решением задачи (1)–(3), (5), если

$$J(\hat{x}(T),\hat{u}) = \min_{(x,u)} J(x(T),u),$$

и пары $(\hat{x},\hat{u})$ удовлетворяют задаче (1)–(3) в смысле определения 1.

Теорема 1. *Пусть $\beta_{ij} \in \mathbb{R}, i = j, i,j = \overline{1,3}$, $\alpha_i, \varkappa, \beta_{ij} \in \mathbb{R}_+, i \neq j, i,j = \overline{1,3}$, $n \leq 4$ и выполняется условие* (4)*. Тогда существует решение $(\hat{x}(T),\hat{u})$ задачи* (1) – (3)*,* (5)*.*

Литература

[1] Манакова Н. А., Гаврилова О. В. Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 4. С. 120–126.

Асимптотическое решение задачи о ламинарном течении вязкого сжимаемого газа, вызванном вращением кругового цилиндра[10]

Гаджиев Д.А., Гайфуллин А.М., Зубцов А.В. (Россия, Жуковский)
Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского
dghji@mail.ru, amgaif@mail.ru, azub1941@yandex.ru

Хорошо известно решение нестационарной задачи о плоском осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости, возникающем при мгновенном приведении во вращение бесконечно протяжённого кругового цилиндра. В любой ограниченной области пространства

[10] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 16-01-00128)).

на достаточно больших временах устанавливается потенциальное течение с циркуляцией, равной циркуляции скорости на поверхности цилиндра Γ_0.

В работе решается аналогичная задача для случая сжимаемого вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса. Ищется решение, удовлетворяющее двумерным нестационарным уравнениям Навье–Стокса. Граничные условия на поверхности цилиндра – условие прилипания для скорости и равенство температуры газа заданной температуре поверхности цилиндра; на бесконечности – условия покоящегося газа. Газ считается совершенным с линейной зависимостью коэффициента динамической вязкости от температуры $\mu(T)$.

Получено асимптотическое решение задачи при стремлении к нулю параметра $\dfrac{r_0}{\sqrt{\nu_\infty t}}$, где r_0 – радиус цилиндра, ν_∞ – кинематический коэффициент вязкости невозмущённого потока, t – время. В дальней области $r \sim \sqrt{\nu_\infty t}$ уравнения линеаризуются, их решение в главном приближении автомодельно. Течение в ближней области $r \sim r_0$ в главном приближении является установившимся. Результаты асимптотической теории сравниваются с численным решением уравнений Навье–Стокса.

Показано, что распределение циркуляции $\Gamma(r)$ имеет минимум в области $r \sim r_0$ и максимум в области сращивания, который превышает значение на поверхности Γ_0. Результат качественно отличается от случая несжимаемой жидкости (рис. 1). Распределение температуры $T(r)$ имеет максимум в области $r \sim r_0$ (рис. 2).

Теорема 1. *Если температура поверхности цилиндра не меньше температуры газа на бесконечности и $\mu(T)$ монотонно возрастает, то циркуляция окружной скорости в области $r \sim \sqrt{\nu_\infty t}$ в сжимаемом газе будет превышать циркуляцию при тех же r и t в несжимаемой жидкости.*

При стремлении числа Маха ($M = \dfrac{\Gamma_0}{r_0 a_\infty}$) к бесконечности максимальная температура газа и максимальная циркуляция его окружной скорости растут пропорционально M^2.

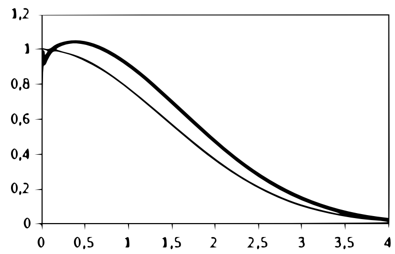


Рис. 1. Распределение циркуляции $\Gamma(\dfrac{r}{\sqrt{\nu_\infty t}})$ в момент $\dfrac{r_0}{\sqrt{\nu_\infty t}} = 0{,}005$. Тонкая линия – $M = 0$; толстая – $M = 1$.

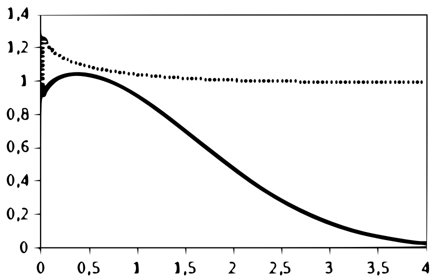


Рис. 2. Распределения циркуляции (нижняя линия) $\Gamma(\dfrac{r}{\sqrt{\nu_\infty t}})$ и температуры (верхняя) $T(\dfrac{r}{\sqrt{\nu_\infty t}})$ в момент $\dfrac{r_0}{\sqrt{\nu_\infty t}} = 0{,}005$ при $M = 1$.

О распределении значений показателя Перрона по решениям линейных систем с неограниченными коэффициентами

Гаргянц А. Г. (Россия, Москва)
МГУ им. М. В. Ломоносова
gaaaric@gmail.com

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty),$$

каждую из которых отождествим с её кусочно непрерывной и, вообще говоря, неограниченной оператор-функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_*(A)$ множества всех и соответственно всех ненулевых её решений, положив $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A)$,

$\mathcal{S}_* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$. Условимся также для каждого ненулевого вектора $c \in \mathbb{R}^n$ обозначать через $\mathrm{Lin}(c)$ натянутую на него прямую в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1 [1], [2]. Под *показателем Перрона* $\pi\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ будем понимать функцию

$$\pi(x) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|, \quad x \in \mathcal{S}_*, \quad \pi(0) = -\infty,$$

а *показателем Перрона решения* $x \in \mathcal{S}$ будем называть значение $\pi(x)$.

Показатель Перрона инвариантен относительно умножения функции (аргумента) на ненулевые скаляры, а значит, его значения на всех ненулевых решениях произвольной системы $A \in \mathcal{M}^n$, начинающихся на одной прямой, заведомо совпадают. Поэтому показатель Перрона естественным образом задаёт на проективизации P^{n-1} пространства начальных значений решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ отображение, которое будем называть *распределением показателя Перрона по решениям* этой системы.

Как показал Н.А. Изобов в [2], для всякой системы с *ограниченными* коэффициентами распределение показателя Перрона по её решениям является почти всюду (по мере Лебега) константой. Согласно [3], это утверждение не распространяется на все неограниченные системы. Более того, оказывается, что в качестве распределения показателя Перрона по решениям некоторой системы годится всякое непрерывное отображение на проективизации фазового пространства. А именно, справедлива

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой непрерывной функции $f\colon P^{n-1} \to \mathbb{R}$ найдётся бесконечно дифференцируемая система $A \in \mathcal{M}^n$, для каждого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ которой выполнено равенство $\pi(x) = f(\mathrm{Lin}(x(0)))$.*

Литература

[1] Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[2] Изобов Н. А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. №12. С. 2168–2170.

[3] Гаргянц А. Г. К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. №11. С. 1505–1506.

Примеры неединственности неограниченных обобщенных энтропийных решений скалярных законов сохранения[11]

Гаргянц Л.В. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова и МГТУ им. Н.Э. Баумана
lsteklova@gmail.com

В работе [1] построено обобщенное энтропийное решение задачи Коши

$$u_t + |u|^{\alpha-1} u_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0,\,\infty), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \exp\left(-\frac{x}{\alpha-1}\right). \tag{2}$$

Это решение имеет счетное число ударных волн, являющихся графиками функций $\gamma_n(t) = 1 + \ln t - nT,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, где $T = T(\alpha) > 0$ — фиксированная константа. Отличительной особенностью этого решения является смена знака при переходе через каждую ударную волну. Следовательно, для него не справедлив принцип максимума (см. [2]), что, в свою очередь, ставит под сомнение единственность решения рассматриваемой задачи. Кроме того, в [3] доказано, что положительного решения задачи (1), (2) не существует.

Поскольку задача (1), (2) инвариантна относительно замены $x \to x + h$, $t \to t \cdot e^h$, $u \to u \cdot e^{-h/(\alpha-1)}$, построенное в [1] решение имеет вид $u(t,x) = t^{-1/(\alpha-1)} v(x - \ln t)$, где $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ —

[11] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/ПЧ) и РФФИ (проект 17-01-00515).

кусочно гладкая функция. В докладе будут описаны **все** обобщенные энтропийные решения уравнения (1), имеющие указанный вид.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(t,x) = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t)$, *где* $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \not\equiv 0$, *— кусочно гладкая функция, является обобщенным энтропийным решением уравнения (1), определенным во всей полуплоскости* $t > 0$. *Тогда выполнено одно из двух утверждений.*

1. Функция v *является* $2T$*–периодической; более того,* T*–антипериодической, т. е.* $v(\xi + T) = -v(\xi)$ *для любого* $\xi \in \mathbb{R}$. *На полупериоде функция* v *является решением некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Соответствующее* ($2T$*-периодическое по* x) *знакопеременное решение и удовлетворяет двусторонней оценке*

$$t^{-1/(\alpha-1)} \leqslant |u(t,x)| \leqslant w \cdot t^{-1/(\alpha-1)}, \quad w = w(\alpha) > 1$$

а, значит, $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = \infty$.

2. Для некоторого $K \in \mathbb{R}$ *функция* u *совпадает в области* $\{(t,\, x) \mid x < \ln t + K\}$ *с одной из функций, описанных в п. 1, а кривая* $x = \ln t + K$ *является еще одной линией разрыва решения. В области же* $D = \{(t,\, x) \mid x > \ln t + K\}$ *функция* u *является гладкой, при этом выполнено одно из двух утверждений:*

i) функция u *удовлетворяет в области* D *неравенству* $|u(t,x)| \geqslant t^{-1/(\alpha-1)}$, *и, следовательно,* $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = \pm\infty$;

ii) функция u *удовлетворяет в области* D *неравенству* $|u(t,x)| \leqslant t^{-1/(\alpha-1)}$ *при этом существует* $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = A\exp\left(-\frac{x}{\alpha-1}\right)$ *для некоторой константы* A. *В частности, при* $A = 0$ *будем иметь* $u \equiv 0$ *в области* D.

Следствие 1. *Поскольку связь между константами* K *и* A *в теореме 1 не является однозначной, кусочно гладкое обобщенное энтропийное решение задачи (1), (2) не является единственным.*

Литература

[1] Гаргянц Л. В. О локально ограниченных решениях квазилинейных уравнений первого порядка со степенной функцией потока // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. №6. С. 854-855.

[2] Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. №2. С. 228–255.

[3] Gargyants L. V. Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data // Russ. Jour. Math. Phys. 2017. V. 24. No 3. PP. 412–414.

Устойчивость в обратной задаче по резонансам и собственным значениям для оператора Шредингера

Гейнц В.Л. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
valgeynts@gmail.com

Помимо классических обратных задач спектрального анализа для уравнения Шредингера ([1], [2]), большой интерес с физической точки зрения представляет задача восстановления потенциала по данному конечному множеству ближних собственных значений и резонансов. Возникает вопрос об устойчивости такого восстановления.

Обратная задача по резонансам и собственным значениям исследовалась в работах [3-5], ее устойчивость по полному набору собственных значений и резонансов — в [5], устойчивость по конечному набору — в [6] и [7].

В даной работе получено усиление и обобщение результатов работы [5]. Рассматривается стационарное уравнение Шредингера

$$-y'' + q(x)y = z^2y,\ x \in [0,\infty). \tag{1}$$

Пусть $q \in L^1(0,a)$. При $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ функция $y_q(x,z)$ — единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее равенству

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_q(x,z)}{e^{izx}} = 1;$$

эта функция называется решением Йоста; целая функция $\psi_q(z) = y_q(0,z)$ называется функцией Йоста. Пусть $y_q(0,z_0) = 0$, тогда если $Im(z_0) > 0$, то z_0^2 — собственное значение оператора Шредингера H_q, соответствующего уравнению (1) с краевым условием $y(0) = 0$; если же $Im(z_0) \leqslant 0$, то z_0^2 называется резонансом оператора H_q.

Пусть $q_j \in L^1(0,a)$ — два потенциала, $\|q_j\|_{L^1} \leqslant Q_1$ для некоторого $Q_1 > 0$, $j = 1,2$, и $\|q_2 - q_1\|_{L^p} \leqslant D_p$ для некоторых $p \in (1,\infty]$, $D_p > 0$.

Предположим, что в круге $\{|z| < R\}$ находится одинаковое количество корней функций Йоста ψ_1 и ψ_2, причем кратности нуля как корня функций ψ_1 и ψ_2 совпадают (в случае вещественных потенциалов q_1 и q_2 достаточно, чтобы $\psi_1(0) = C\psi_2(0)$ для некоторого $C \neq 0$), и отличные от нуля корни $\left\{z_n^{(j)}\right\}_{n=1}^N$ в круге $\{|z| < R\}$ упорядочены так, что выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{z_n^{(2)}} - \frac{1}{z_n^{(1)}}\right| < \varepsilon,\ n = 1,...,N. \tag{1}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\delta \in (0,1)$ произвольно. Существуют такие константы R_0, C_1, что при условии $R > R_0$ выполнена оценка*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a} \left|\int\limits_x^a (q_2(t) - q_1(t))dt\right| \leqslant \psi_1(R,\varepsilon) + C_1 R^{-(1-\delta)\frac{p-1}{3p-2}}(1 + \chi_1(R)); \tag{2}$$

если дополнительно выполнены условия

$$\int\limits_0^a q_1(t)dt = \int\limits_0^a q_2(t)dt,\ q_2 - q_1 \in AC[0,a],\ \|(q_2 - q_1)'\|_{L^p} \leqslant D'_p,$$

то найдется такая константа C_2, что для $1 \leqslant r < \infty$

$$\|q_2 - q_1\|_{L^r} \leqslant \psi_2(R,\varepsilon) + C_2 R^{-\min\left\{\frac{r-1}{2r-1},\ \frac{p-1}{3p-2}\right\}(1-\delta)} (\ln(R))^{\frac{r-1}{r}} (1 + \chi_2(R)),$$

где предъявляемые явно функции $\psi_j(R,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$, $\chi_j(R) \to 0$ $(R \to \infty)$ зависят от параметров $(a,\delta,Q_1,p,D_p,D'_p)$.

Литература

[1] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М. : Мир, 1980.

[2] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М. : Наука, 1984.

[3] Brown B. M., Knowles I, Weikard R.: On the inverse resonance problem. J. London Math. Soc. (2) 68(2), 383–401 (2003).

[4] Korotyaev E. L. Inverse resonance scattering on the half line. Asymptot. Anal. 37 (2004), no. 3-4, 215—226.

[5] Korotyaev E. L. Stability for inverse resonance problem. Int. Math. Res. Not. 2004, no. 73, 3927—3936.

[6] Marletta M., Shterenberg M and Weikard R. On the inverse resonance problem for Schroedinger operators. Comm. Math. Phys., vol. 295, no. 2, 2010, pp. 465-484.

О динамике экипажа с омни-колесами с массивными роликами

Герасимов К.В. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
kiriger@gmail.com
Зобова А.А. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
azobova@mech.math.msu.su
Косенко И.И. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
kosenkoii@yandex.ru

Изучается движение экипажа с омни-колесами по горизонтальной плоскости. Конструкция позволяет экипажу двигаться в любом направлении, не поворачиваясь, за счет роликов, расположенных на ободе колеса, свободно вращающихся вокруг осей, касательных к ободу. Ролики считаются массивными абсолютно твердыми телами. Конфигурационное многообразие экипажа с N колесами и n роликами на каждом – $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times \mathbb{T}^{N(n+1)}$.

Рассматривается два варианта точечного контакта: 1) опорная плоскость абсолютно шероховата, либо 2) действует сухое трение Кулона.

В первом случае составляются уравнения движения для систем с дифференциальными связями в форме Я.В. Татаринова:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \nu_\alpha} + \{P_\alpha, L^*\} = \sum_{\mu=1}^{K}\{P_\alpha, \nu_\mu P_\mu\}.$$

Моменты перехода колес между роликами рассматриваются с точки зрения теории удара.

Во втором случае уравнения движения системы выводятся неявно (в формализме языка `Modelica`) с использованием представления вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов.

Литература

[1] Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов. // Нелин. дин. 2011. Т. 7. №4. С. 771–783.

[2] Косенко И. И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера. // ПММ. 1998. Т. 62, №2. С. 206–214.

Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями изменения типа в прямоугольной области

Гималтдинова А.А. (Россия, Уфа)
Уфимский государственный нефтяной технический университет
alfiragimaltdinova@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + bu = 0, \quad b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -l < x < l, \, -\alpha < y < \beta\}$, α, β, $l \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(\,D\,) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \tag{3}$$

$$u(x,y)\Big|_{x=l} = u(x,y)\Big|_{x=-l} = 0, \;\; y \in [-\alpha, \beta], \tag{4}$$

$$u(x,y)\Big|_{y=\beta} = \varphi(x), \;\; u(x,y)\Big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \;\; x \in [-l, l], \tag{5}$$

где φ и ψ – заданные функции, $\varphi(-l) = \varphi(l) = \psi(-l) = \psi(l) = 0$.

В настоящей работе изучена задача (2)–(5) для уравнения (1) при $b = 0$ и $b \neq 0$. Для обоих случаев установлен критерий единственности и построено решение в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Установлена полнота биортогональной системы в пространстве $L_2[-l, l]$ и на основе этого доказана единственность решения поставленной задачи. При доказательстве существования решения задачи (2)–(5), т.е. при обосновании сходимости ряда, возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование решения задачи в классе функций (2), (3).

Установлено, что знак коэффициента b не влияет на однозначную разрешимость задачи (2)–(5) для уравнения (1) в отличие от классических работ по теории задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с одной или двумя линиями изменения типа [1] – [4].

Литература

[1] Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. Пер. с итал. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 192 с.

[2] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высш. шк., 1985. – 304 с.

[3] Сабитов К.Б. О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. – С. 1977–1984.

[4] Сабитов К.Б., Карамова А.А., Шарафутдинова Г.Г. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Известия вузов. Математика. 1999. № 11. С. 70–80.

Автоколебания в нейронной сети ФитцХью-Нагумо с резисторно-индуктивными связями[12]

Глызин С. Д. (Россия, Черноголовка)
ОПСИ НЦЧ РАН
glyzin.s@gmail.com
Колесов А. Ю. (Россия, Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
kolesov@uniyar.ac.ru
Розов Н. Х. (Россия, Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
fpo.mgu@mail.ru

Предлагается математическая модель одномерной цепочки нейронов ФитцХью-Нагумо с резисторно-индуктивными связями между соседними элементами сети. Рассматриваемая модель является новой и представляет собой цепочку диффузионно связанных трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{u}_j = v_j + \lambda(u_j - u_j^3/3), \\ &\dot{v}_j = -u_j + d\,(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \varepsilon w_j - \varepsilon\beta\,(v_j - w_j), \\ &\dot{w}_j = -u_j - \varepsilon w_j, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой $u_j(t)$ и $v_j(t)$, $w_j(t)$ – нормированное напряжение и токи в цепи, $j = 1, 2, \ldots, N$, $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$, а параметры ε, d, β – характеристики цепи.

[12] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Основной результат работы состоит в доказательстве утверждения о том, что при условиях

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \lambda = \varepsilon\alpha, \quad \alpha, \beta, d = \mathrm{const} > 0 \tag{2}$$

и при подходящем увеличении параметров α, N в этой системе может сосуществовать любое фиксированное число устойчивых двумерных инвариантных торов.

Наряду с дискретной цепочкой нейронов ФитцХью-Нагумо (1) рассматривается соответствующая ей непрерывная сеть. Функционирование такой сети описывается тремя распределенными переменными – напряжением $u(t,s)$ и токами $v(t,s)$, $w(t,s)$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$. Для этих переменных после замены в (1) разностного оператора $u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ частной производной $\partial^2 u/\partial s^2$ приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + D_1 x + \varepsilon F(x), \quad \frac{\partial x}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \frac{\partial x}{\partial s}\bigg|_{s=1} = 0, \tag{3}$$

где $x = \mathrm{colon}\,(u(t,s), v(t,s), w(t,s))$, $F(x) = \mathrm{colon}\,(\alpha(u - u^3/3), -w - \beta(v-w), -w)$,

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представляет интерес сравнительный анализ динамических свойств дискретной цепочки (1) и ее непрерывного аналога (3). Как уже было отмечено, в дискретной модели (1) при согласованном увеличении α, N и уменьшении ε неограниченно растет число сосуществующих устойчивых двумерных торов. В случае непрерывной модели ситуация диаметрально противоположна: все ее торы размерности два и выше неустойчивы, а устойчивыми могут быть лишь циклы. Таким образом, переход от дискретной системы (1) к непрерывной не правомерен, поскольку при таком переходе принципиально меняются динамические свойства модели.

Литература

[1] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445 – 466.

[2] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061 – 2070.

[3] Глызин С. Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Двухчастотные автоколебания в нейронной сети ФитцХью–Нагумо // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 51, № 1. С. 94–110.

Непрерывность по Гёльдеру решений экстремальных задач для собственных значений эллиптических операторов[13]

Гончаров В. Ю. (Россия, Москва)

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

fulu.happy@gmail.com

Задачи оптимального управления коэффициентами уравнений в частных производных эллиптического типа возникают при решении ряда прикладных задач. Наряду с общими проблемами (существование, единственность, условия оптимальности), сопровождающими исследование таких задач, важное значение имеет вопрос о качественных свойствах оптимальных управлений. В частности, в связи с потребностями приложений представляет интерес выяснить условия, обеспечивающие регулярность или релейный характер оптимальных решений. В докладе мы обсудим условия, при которых решения экстремальных задач для собственных значений эллиптических операторов второго порядка являются непрерывными по Гёльдеру.

[13] Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00425 а.

Пусть $d \geq 2$, Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^d$ с границей класса $C^{1,1}$,

$$0 < \check{c} < \hat{c} < +\infty, \qquad I = [\check{c}, \hat{c}].$$

Введем множество

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in L_\infty(\Omega) : \ \check{c} \leq u(x) \leq \hat{c}, \ \int_\Omega \rho(x) u(x)\, dx = \tilde{c} \right\},$$

где $\rho \in C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$, $\kappa \in (0,1]$, $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ для $x \in \Omega$, а постоянная $\tilde{c}$ выбрана так, что $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Определим множество $\mathcal{C}$ всех функций $(x,\xi) \mapsto f(x,\xi) : \bar{\Omega} \times I \to \mathbb{R}$ таких, что $f \in C^{0,1}(\bar{\Omega} \times I)$ и $f'_\xi \in C^{0,\kappa}(\bar{\Omega} \times I)$. Пусть множество $\mathcal{E}$ состоит из всех элементов $f \in \mathcal{C}$, для каждого из которых существует постоянная $E[f] > 0$ такая, что для любых $x \in \Omega$, $\xi_1, \xi_2 \in I$ выполняется неравенство

$$f(x,\xi_2) - f(x,\xi_1) \geq (\xi_2 - \xi_1) f'_\xi(x,\xi_1) + E[f] \cdot |\xi_2 - \xi_1|^2.$$

Пусть

$$a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega}), \qquad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in \Omega,$$
$$a, b \in \mathcal{C}, \qquad a(x,\xi) \geq 0, \quad b(x,\xi) \geq b_0 > 0, \quad (x,\xi) \in \Omega \times I.$$

Для $u \in \mathcal{U}$ рассмотрим равномерно эллиптический оператор

$$L_u \triangleq \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - a(x, u(x))$$

и следующую задачу на собственные значения:

$$\text{найти пару } (\lambda, y) \in \mathbb{R} \times (V \setminus \{\vartheta\}) : \quad L_u y + \lambda (b \circ u) y = 0, \quad y \in V \triangleq W_0^{1,2}(\Omega). \tag{EVP}$$

Здесь ϑ — нейтральный элемент пространства V, $(b \circ u)(x) = b(x, u(x))$. Пусть $\lambda_k[u]$ — k-ое собственное значение (EVP). Поставим следующие экстремальные задачи:

$$\text{найти } \hat{u}_k \in \mathcal{U} : \ \lambda_k[\hat{u}_k] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \lambda_k[u]; \tag{MAX$_k$}$$
$$\text{найти } \check{u}_k \in \mathcal{U} : \ \lambda_k[\check{u}_k] = \inf_{u \in \mathcal{U}} \lambda_k[u]. \tag{MIN$_k$}$$

Один из основных результатов исследования заключен в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть для любого $x \in \Omega$ функции $-a(x,\cdot)$, $b(x,\cdot)$ являются неубывающими (или невозрастающими) и выпуклыми [вогнутыми] на отрезке I, причем*

$$-a \in \mathcal{E} \vee b \in \mathcal{E} \qquad [a \in \mathcal{E} \vee -b \in \mathcal{E}].$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ задача (MAX$_k$) [(MIN$_k$)] *является разрешимой и всякое ее решение суть элемент пространства $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$.*

Существование решений задач (MAX$_k$) и (MIN$_k$) следует из работы [1]. Справедливость Теоремы 1 для задачи (MAX$_1$) установлена в [2]. В докладе также планируется обсудить, при каких значениях чисел d и k имеется возможность ослабить требования на коэффициенты главной части оператора L_u, а также выяснить, чем эта возможность обусловлена.

Литература

[1] Goncharov V. Yu. Existence Criteria in Some Extremum Problems Involving Eigenvalues of Elliptic Operators // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016. T. 9. №1. C. 37–47.

[2] Гончаров В. Ю. Регулярность решений задач максимизации первых собственных значений эллиптических операторов // Матем. заметки. (в печати)

Три типа динамического хаоса

Гонченко С.В. (Россия, Нижний Новгород)
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
sergey.gonchenko@mail.ru

Когда говорят о динамическом хаосе, обычно имеют в виду один из двух весьма разных типов динамики. В гамильтоновых системах наблюдается консервативный хаос, выглядящий в фазовом пространстве как "хаотическое море" с эллиптическими островами внутри него. Хаос в диссипативных системах имеет совсем другую природу, и он ассоциируется со странными аттракторами. Цель этого доклада — привлечь внимание к еще одному, третьему, типу хаоса, т.н. "смешанной динамике". Этот тип хаоса характеризуется прежде всего *принципиальной неотделимостью* друг от друга в фазовом пространстве аттракторов, репеллеров и консервативных элементов динамики (например, эллиптических точек, КАМ-кривых и т.п.). Тот факт, что в случае смешанной динамики аттракторы могут пересекаться с репеллерами кажется, на первый взгляд, весьма странным и противоречащим здравому смыслу. В недавней работе с Д. Тураевым [1] мы сделали некоторую попытку разрешить это противоречие путем модификации понятия аттрактора, оставив за ним свойство "быть замкнутым инвариантным устойчивым множеством", но позволив ему, тем не менее, пересекаться с репеллером по инвариантному множеству, т.н. *обратимому ядру*, которое ничего не притягивает и ничего не отталкивает. Нужно отметить, что смешанная динамика часто наблюдается в приложениях, например, в неголономных моделях движения твердого тела. Соответствующие примеры также будут рассмотрены в докладе.

Литература

[1] Гонченко С.В., Тураев Д.В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды МИАН. 2017. Т. 297. С. 133–157.

О рядах Дюлака, удовлетворяющих ОДУ

Горючкина И.В. (Россия, Москва)
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
igoryuchkina@gmail.com
Гонцов Р.Р. (Россия, Москва)
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН
gontsovrr@gmail.com

Рассматривается ОДУ n-го порядка

$$F(x, y, \delta y, \dots, \delta^n y) = 0, \tag{1}$$

где $F = F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ – многочлен $n+2$ комплексных переменных, δ – дифференцирование $x(d/dx)$. Предполагается, что уравнение (1) имеет формальное решение φ в виде ряда Дюлака [1]:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\ln x)\, x^k, \qquad p_k \in \mathbb{C}[t].$$

Такие ряды встречаются довольно часто среди формальных решений алгебраических ОДУ, например, среди решений уравнений Абеля, уравнений типа Эмдена-Фаулера, уравнений Пенлеве.

Мы предлагаем следующее достаточное условие сходимости таких рядов.

Теорема 1. *Пусть ряд φ формально удовлетворяет рассматриваемому уравнению:*

$$F(x, \Phi) := F(x, \varphi, \delta\varphi, \dots, \delta^n\varphi) = 0,$$

и пусть для всех $j = 0, \dots, n$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(x, \Phi) = a_j x^m + b_j(\ln x) x^{m+1} + \dots,$$

где $a_j \in \mathbb{C}$, $b_j \in \mathbb{C}[t]$, и $m \in \mathbb{Z}_+$ – одно и то же для всех j. Если коэффициент $a_n \neq 0$, то для любого открытого сектора S достаточно малого радиуса с вершиной в нуле и раствора меньше 2π формальный ряд φ сходится равномерно в S.

В случае, когда все $p_k = \mathrm{const}$, формальное решение φ уравнения (1) является степенным рядом и теорема 1 становится хорошо известным достаточным условием его сходимости, полученным Б. Мальгранжем [2].

Отметим, что третье, пятое и шестое уравнения Пенлеве обладают формальными решениями в виде рядов Дюлака. Сходимость таких формальных решений для пятого и шестого уравнений Пенлеве недавно была доказана Ш. Шимомурой [3], [4]. Теперь же пользуясь общей теоремой 1 можно доказать сходимость всех таких формальных решений уравнений Пенлеве (включая третье).

Литература

[1] H. Dulac, Sur les cycles limites // Bull. Soc. Math. France. 1923. Vol. 51. P. 45–188.

[2] B. Malgrange, Sur le théorème de Maillet // Asympt. Anal. 1989. Vol. 2. P. 1–4.

[3] S. Shimomura, The sixth Painlevé transcendents and the associated Schlesinger equation // Publ. RIMS Kyoto Univ. 2015. Vol. 51. P. 417–463.

[4] S. Shimomura, Logarithmic solutions of the fifth Painlevé equation near the origin // Tokyo J. Math. 2017. Vol. 39. №3. P. 797–825.

Динамика, порождаемая нелинейным уравнением Шредингера с отклоняющимся аргументом

Грехнева А.Д. (Россия, Москва)
ЛИИ им. М.М. Громова
alice-prohorses@yandex.ru

Нелинейное уравнение Шредингера описывает ряд явлений нелинейной оптики и моделей самосогласованного поля в квантовой механике. Этим уравнением описывается распространение электромагнитных волн в нелинейных оптических средах и, в том числе, явление самофокусировки. Наличие запаздывания в нелинейном уравнении Шредингера обусловлено описанием некоторых моделей управления с обратной связью и запаздыванием сигнала.

Рассмотрим решение задачи с начальными условиями и граничными условиями Коши для дифференциально-разностного уравнения Шредингера, дополненного операторами сдвига временного аргумента неизвестной функции

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + |u(t,x)|^p u(t,x) + f(|\mathbf{T}_h u(t,x)|^2)\mathbf{T}_h u(t,x) +$$
$$+ f(|\mathbf{T}_{-h} u(t,x)|^2)\mathbf{T}_{-h} u(t,x),\ (t,x) \in (-h,+\infty)\times(-l,l), \tag{1}$$

где $h \in (0,+\infty)$ и операторы сдвига $\mathbf{T}_h$ отображают функции $u : (-h,+\infty) \to H$ в функции $\mathbf{T}_{\pm h} u : (0,+\infty) \to H$ по следующему правилу

$$\mathbf{T}_h u(t) = u(t-h),\ t \in (0,+\infty); \quad \mathbf{T}_{-h} u(t) = u(t+h),\ t \in (0,+\infty).$$

Стнавится задача найти решение дифференциаально-разностного уравнения (1), удовлетворяющего двум условиям:

начальному условию

$$u|_{(-h,0)} = \phi, \tag{2}$$

где ϕ – заданная на промежутке $(-h, 0)$ функция со значениями в пространстве H, и граничному условию

$$u(t, -l+0) = u(t, l-0) = 0, \ t \in (0, +\infty). \tag{3}$$

Относительно функции $f : [0, +\infty) \to R$ сделаем предположение, что существует такая константа $k > 0$, что $|f(s)| \leq k|s|^{\frac{p}{2}}$ при всех $s \geq 0$.

Определение 1. *Функцию u будем называть H^k-решением задачи (1)- (3) ($k \in \mathbf{N}$), если $u \in C([0,T), H^k \bigcap L_{p+2}(-l,l))$ и выполнено равенство*

$$u(t) = e^{-it\mathbf{\Delta}}u_0 - i\int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}}\mathbf{G}u(s)ds, \ t \in [0,T). \tag{4}$$

где

$$\mathbf{G}u(s,x) = |u(s,x)|^p u(t,x) + f(|\mathbf{T}_h u(s,x)|^2)\mathbf{T}_h u(s,x) +$$
$$+ f(|\mathbf{T}_{-h} u(s,x)|^2)\mathbf{T}_{-h} u(s,x); \ (s,x) \in (0,+\infty) \times (-l,l). \tag{5}$$

Согласно теореме вложения при всех $k \in \mathbf{N}$ имеет место вложение $H^k(-l,l) \subset C([-l,l])$ и оценка

$$\|u\|_{C([-l,l])} \leq C_{emb}\|u\|_{H^1}. \tag{Emb}$$

Поэтому в определении 2 условие $u \in C([0,T), H^k \bigcap L_{p+2}(-l,l))$ можно заменить на условие $u \in C([0,T), H^k)$.

Теорема 1. *Пусть $\phi \in C([-h,0], H^1)$ и $\|\phi\|_{C([-h,0],H^1)} = d_0$. Тогда существует $T = T(d_0) > 0$ такое, что на промежутке $(-h,T)$ задача с начальными данными (5)-(7) имеет единственное H^1-решение.*

Литература

[1] Митидиери, Похожаев С. И. Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 234.

[2] Glassey R. T. On the blowing up of solution to the Cauchy Problem for nonlinear Schrodinger equations. J. Math. Phys. 1977. V. **18**:9. P. 1794-1797.

[3] Сакбаев В. Ж.Градиентный взрыв решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера Тр. МИАН. 2013. Т. 283 (2013), С. 171–187.

[4] Zhidkov P. E. Lecture Notes in Math. 2001.

О реализации градиентно-подобных потоков на многообразиях

Гринес В.З. (Россия, Нижний Новгород)
НИУ Высшая школа экономики. Нижний Новгород
vgrines@yandex.ru

В докладе анализируется взаимосвязь между структурой множества состояний равновесия градиентно-подобного потока и топологией несущего многообразия размерности 4 и выше. Вводится класс многообразий, допускающих обобщенное разложение Хегора. Устанавливается, что если неблуждающее множество градиентно-подобного потока состоит в точности из μ узловых и ν седловых состояний равновесия индексов Морса 1 и $(n-1)$, то его несущее многообразие допускает обобщенное разложение Хегора рода $g = \frac{\nu-\mu+2}{2}$. Приводится алгоритм построения градиентно-подобных потоков на замкнутых многообразиях размерности $n > 3$ по заданным числам узловых состояний равновесия и седловых состояний равновесия различных индексов Морса.

Результаты доклада получены совместно с Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужомой и В. С. Медведевым (см. [1], [2]) при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01041), а также в рамках выполнения программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году (проект Т-95).

Литература

[1] Гринес В. З, Жужома Е. В., Медведев В. С. О структуре несущего многообразия для систем Морса Смейла без гетероклинических пересечений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2017. Т. 297. С. 201–210.

[2] Гринес В. З., Гуревич Е .Я., Жужома Е. В., Медведев В. С. О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством // Математического труды. Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (в печати).

Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка

Гусейнов С.Т. (Азербайджан, Баку)
Бакинский Государственный Университет
sarvanhuseynov@rambler.ru

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = div\left(\omega_\varepsilon(x)a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0, \tag{1}$$

где $\omega_\varepsilon(x)$ – неотрицательный вес, зависящий от малого параметра ε, который мы сейчас опишем. Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, действительная симметрическая матрица с измеримым элементами.

Предположим, что относительно коэффициентов оператора L выполнены условия

$$\mu\,|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu^{-1}\,|\xi|^2\,,\ \ \mu \in (0,1]. \tag{2}$$

Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x:\, x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x:\, x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x:\, x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon\omega(x),\, x \in D^{(1)}, \\ \omega(x),\, x \in D^{(2)},\, \varepsilon \in (0,1], \end{cases} \tag{3}$$

где $\omega(x)$ – вес, удовлетворяющий A_p-условию Макенхаупта. Напомним, что вес $\omega(x)$, определенный во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет A_p-условию (см. [1]), если

$$\sup\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} < \infty, \qquad 1 < p < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$.

Для определения решения уравнения (1) введем класс функций

$$W_{loc}(D,\omega) = \left\{u : u \in W^{1,1}_{loc}(D),\ |\nabla u|^p\,\omega \in L^1_{loc}(D)\right\},$$

где $W^{1,1}_{loc}(D)$ - классическое соболевское пространство функций, которые локально суммируемы в области D вместе со всеми обобщенными частными производными первого порядка. Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{loc}(D,\omega)$ для которой интегральное тождество

$$\int\limits_D \omega_\varepsilon(x)a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\xi\,dx = 0 \tag{4}$$

выполнено на финитных пробных функциях $\xi \in W_{loc}(D,\omega)$.

Помимо принадлежности весовой функции классу Макенхаупта A_p дополнительно предполагается, что в открытых шарах B_{R_0} достаточно малого радиуса R_0 с центром на гиперплоскости Σ для почти всех точек x из полушара $B_{R_0} \cap \{x : \ x_n > 0\}$ выполнено неравенство

$$\omega(x) \leqslant \gamma\omega(x'),\ \gamma = const > 0,$$

где x' – точка, симметричная x относительно гиперплоскости Σ. В частности, данному условию удовлетворяют веса $|x|^{\alpha}$, где $-n < \alpha < n(p-1$, и $|x_n|^{\alpha}$, где $-1 < \alpha < p-1$. Кроме того, подходит любой вес, удовлетворяющий A_p-условию Макенхаупта, который является четным относительно гиперплоскости Σ. Основной целью настоящей работы являются формулировка и доказательство равномерного по параметру ε неравенства Харнака, которое отвечает рассматриваемому уравнению. Поскольку классическое неравенство Харнака нарушается в шарах с центром на гиперплоскости Σ, в формулировке результата участвуют именно такие шары, и ниже полагается, что

$$B_R^- = B_R \cap \{x : -R < x_n < -R/2\}.$$

Теорема. *Если вес $\omega(x)$ удовлетворяет A_p-условию Макенхаупта и выполнены предположения (2) и (3) то для неотрицательного в шаре $B_{4R} \subset D$ с центром на Σ решения u уравнения (1) справедливо неравенство*

$$\inf_{B_R} u \geqslant c_0 \sup_{B_R^-} u, \tag{1}$$

в котором положительная постоянная $c_0 < 1$ не зависит от u, R и ε.

Литература

[1] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities forn the Hardy-Littlewood maximal function, Transactions A.M.S. 1972, Vol.15, pp.207-226.

Конструирование стабилизирующих регуляторов на основе Паде-аппроксимаций

Даник Ю.Э. (Россия, Москва)
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
juliet.d.e.777@mail.ru

Дмитриев М.Г. (Россия, Москва)
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
mdmitriev@mail.ru

Для одного класса псевдолинейных систем управления с параметром при нелинейности, который может принимать как малые, так и большие значения, построена матричная аппроксимация Паде [1, 2] для решения уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами. Паде-аппроксимация строится на основе двух асимптотических разложений, по малому и по большому значению параметра, соответственно. За счет этого удается получить параметрическое семейство стабилизирующих регуляторов [3], обеспечивающее лучшее приближение к субоптимальному решению в середине интервала значений параметра, чем регуляторы, построенные на основе отдельных асимптотик [4].

Литература

[1] Бейкер Д., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде: Основы теории. Обобщения и приложения. М.: Мир, 1986.

[2] Andrianov I. V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Applied Mechanics Reviews. 2001. №1, PP. 69–91.

[3] Danik Yu. E., Dmitriev M. G., Komarova E. V., Makarov D. A. Application of Pade-approximations to the solution of nonlinear control problems // International Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (DSTA 2017). Lodz, Poland, 2017. PP. 155–164.

[4] Belyaeva N. P., Dmitriev M. G., Komarova E. V. Pade-Approximation as a “Bridge” Between Two Parametric Boundary Asymptotics // IFAC Proceedings Volumes. 2001. №6, PP. 605–609.

Алгоритм построения наипростейших дробей наилучшего приближения констант[14]

Данченко В.И. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
vdanch2012@yandex.ru

Кондакова Е.Н. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
kebox@mail.ru

Введем вещественнозначную на $\mathbb{R}$ наипростейшую дробь порядка n:

$$\rho_n(x;\xi;c) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - z_k(\xi,c)}, \qquad \xi = \{\xi_1,\dots,\xi_n\}, \quad z_k(\xi,c) \in \mathbb{C} \setminus [-1,1],$$

интерполирующую вещественную константу c по узлам $\xi \subset [-1,1]$.

Известно, что при определенных ограничениях на c для наилучшей равномерной интерполяции (и приближения) этой константы на отрезке $[-1,1]$ необходимо и достаточно существование альтернанса из $n+1$ точек для разности $\rho_n - c$. (Необходимость доказана авторами в [1], а достаточность — М.А. Комаровым в [2], [3].) Таким образом, задача наилучшего приближения констант сводится к построению альтернанса.

В случае $c \in (0, \ln\sqrt{2})$ нами доказана сходимость следующего процесса построения узлов ξ^*, при котором возникает альтернанс для $\rho_n(z;\xi^*;c) - c$ (без строгого обоснования схема построения была предложена в [1]). Сначала берутся произвольно узлы ξ, для определенности считаем, что $-1 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < 1$. Строится интерполяционная наипростейшая дробь $\rho_n(z;\xi;c)$ (один из способов построения см. в [1]). Вычисляются sup-нормы N_k разности $\rho_n(z;\xi;c) - c$ на отрезках $[\xi_{k-1},\xi_k]$, $k = 1,\dots,n+1$, где $\xi_0 = -1$, $\xi_{n+1} = 1$. Если все N_k равны, то искомая наипростейшая дробь построена. В противном случае выбирается какой-либо номер m, для которого значение N_m минимально. Если $2 \leqslant m \leqslant n$, то соответствующие узлы ξ_{m-1} и ξ_m слегка «раздвигаются», т.е. заменяются на $\xi_{m-1} - \varepsilon,\ \xi_m + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Если $m = 1$, то узел ξ_1 «сдвигается» вправо, если $m = n+1$, то узел ξ_n «сдвигается» влево. И все повторяется с новым набором узлов. Величина параметра ε в этом процессе контролируется, она зависит от $\max_{n,k} |N_n - N_k|$ и стремится к нулю.

За начальный набор узлов ξ рекомендуется брать нули многочлена Чебышева первого рода, т.к. норма соответствующей разности $\rho_n(z;\xi;c) - c$ близка по порядку к наименьшему уклонению [3].

Литература

[1] Данченко В. И., Кондакова Е. Н. Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями. Труды МИАН, Т. 270. 2010. С. 86–96.

[2] Комаров М. А. Критерий наилучшего приближения констант наипростейшими дробями. Матем. заметки. Т. 93. №2. 2013. С. 209–215.

[3] Комаров М. А. Скорость наилучшего приближения констант наипростейшими дробями и альтернанс. Матем. заметки. Т. 97. №5. 2015. С. 718–732.

[14] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект No 18-01-00744).

О разрешимости интегральных операторов с однородными ядрами на группе Гейзенберга

Денисенко В.В. (Россия, Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
ru.victa@gmail.com
Деундяк В.М. (Россия, Ростов-на-Дону)
Южный федеральный университет
vl.deundyak@gmail.com

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор растяжения ϑ_α, определяемый равенством $(\vartheta_\alpha f)(x) = f(x/\alpha)$, $\alpha > 0$. И. Б. Симоненко введен и изучен класс однородных операторов, коммутирующих со всеми операторами ϑ_α. Этому классу принадлежат интегральные операторы с однородными ядрами, которые в настоящий момент хорошо изучены (см., например, [1], [2], [3], [4]). Для таких операторов и различных их модификаций получены условия ограниченности и обратимости, для операторов с различными классами коэффициентов получены условия фредгольмовости и формулы для вычисления индекса.

В связи с развитием в последнее время некоммутативного гармонического анализа и его применением в различных областях науки и техники представляется актуальным распространить теорию операторов с однородными ядрами с группы $\mathbb{R}^n$ на некоммутативные группы. В работе [5] введен класс интегральных операторов с однородными ядрами на группе Гейзенберга, и для таких операторов получены условия ограниченности и регулярности. В работе на группе Гейзенберга введен новый класс однородных ядер компактного типа, для банаховой алгебры операторов с однородными ядрами такого вида построено символическое исчисление, в терминах которого получены критерии обратимости и фредгольмовости.

Литература

[1] Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators. Boston: Birkhauser, 2001.

[2] Авсянкин О. Г. О С*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Доклады Академии наук. 2008. Т. 419. №6. С. 727–728.

[3] ДДеундяк В. М. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Матем. заметки. 2010. Т. 87. №5. С. 704–720.

[4] Deundyak V. M. Convolution Operators with Weakly Oscillating Coeffcients in Hilbert Moduli on Groups and Applications // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208. №1. P. 100–108.

[5] Денисенко В. В., Деундяк В. М. Об ограниченности интегральных операторов с однородными ядрами на группе Гейзенберга с нормой Кораньи // Известия высших учебных заведений. Сев.-Кавк. рег. Ест. науки. 2017. №3–1. С. 21–27.

О скорости стабилизации решения задачи Коши для недивергентных параболических уравнений с растущим младшим коэффициентом

Денисов В.Н. (Россия, Москва)
Московский Государственный университет им М.В. Ломоносова
vdenisov2008@yandex.ru

В полупространстве $\overline{D} = R^N \times [0, \infty)$ рассмотрим задачу Коши при $N \geqslant 3$

$$L_1 u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где

$$Lu=\sum_{i,k=1}^{N}a_{ik}(x,t)u_{x_ix_k},(b,\nabla u)=\sum_{i=1}^{N}b_i(x,t)u_{x_i},c(x,t)\leqslant 0.$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) непрерывны в $\overline{D}=R^N\times[0,\infty)$ и удовлетворяют условию Гельдера, равномерно по x,t на каждой ограниченной области G в D. Коэффициенты при старших производных в (1) симметричны, $a_{ik}=a_{ki}$, $(i,k=1,\ldots,N)$ и удовлетворяют условию

$$\lambda_0^2|\xi|^2\leqslant\sum_{i,k=1}^{N}a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k\leqslant\lambda_1^2|\xi|^2,$$

где $\lambda_0>0,\lambda_1>0$, для $\forall(x,t)\in D$,

Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x,t),...,b_N(x,t)$ удовлетворяют условию (B) , если существует $B>0$ такое, что

$$\sup_D(1+r)\sum_{i=1}^{N}|b_i(x,\,t)|\leqslant B,r=\sqrt{x_1^2+...+x_N^2},$$

Будем говорить, что коэффициенты $c(x,t)$ удовлетворяют условию (C) , если для всех (x,t) в D справедливо неравенство

$$c(x,t)\leqslant k_\alpha(r)=\begin{cases}-\alpha^2, & \text{при } r\leqslant 1\\ -\alpha^2r^{2l}, & \text{при } r>1\end{cases}$$

где $0<l\leqslant 1,\alpha>0$.

Задача Коши (1), (2) с ограниченной начальной функцией (2) изучалась во многих работах (см. например [1-2]).

При сделанных здесь предположениях существует и единственно классическое ограниченное решение задачи (1), (2) (см. [1], с.78, теорема 4).

Скорость стабилизации решений параболических уравнений изучалась, например в работах [3-5]. В работе [1, с. 181] методом барьеров, основанном на принципе максимума, установлено, что для ограниченной начальной функции $u_0(x)$ решение задачи Коши (1), (2) с ограниченными коэффициентами, при выполнении условия

$$c(x,t)\leqslant C_0<0 \tag{3}$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(x,t)|\leqslant M\exp(-at),a>0,t>0.$$

Отметим, что в работах [3, 4] получены другие оценки стремления к нулю при $t\to+\infty$ решения краевых задач, однако при этом от начальной функции $u_0(x)$ требовалось, чтобы эта функция была финитной и достаточно гладкой [3, с. 5], или чтобы $u_0(x)$ была ограниченной, непрерывной и существовал в смысле Лебега интеграл от $u_0(x)$.

Целью настоящей работы является замена условия (3) и получение достаточных условий, обеспечивающих экспоненциальную скорость стабилизации решения при $t\to+\infty$, равномерно по x на каждом компакте K в R^N для любой ограниченной непрерывной в R^N начальной функции $u_0(x)$. Метод доказательства основан на построении точных по порядку роста на бесконечности антибарьеров [6], учитывающих поведение коэффициентов уравнения (1) при больших $|x|$ и не использует оценок фундаментального решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (1), (2) стабилизируется в точке $x\in R^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в R^N), если существует предел

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0.$$

Стабилизация решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка для различных классов начальных функций изучалась в работах [2-5].

С обзором работ по стабилизации решений параболических уравнений можно ознакомиться в работе [2].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если коэффициенты $b_i(x,t), i=1,...,N$ в (1) удовлетворяют условию (B) , коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию (C) , функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в R^N, то для решения задачи Коши (1), (2) при

$$n = n(l),\ \text{где}\ \frac{1}{3} < \frac{1}{n(l)} \leqslant \frac{1}{2}$$

справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant M_2 \exp[-m^2 t^{\frac{1}{n}}], m = m(K) > 0,$$

равномерная по x на каждом компакте K в R^N.

В случае, когда в уравнении (1) $L = \Delta$ - оператор Лапласа, $b_i(x,t) = 0, i = 1,...,N, c(x,t) = c(x).$, т.е. теорема была установлена в работе [5].

Теорема уточняет Теорему 1 из работы [5].

Замечание. Утверждение Теоремы не допускает усиления, т.е. нельзя заменить компакт K в R^N на все пространство R^N.

Литература

[1] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. // Труды семинара им. И.Г.Петровского.-2001, т. 17,с.9-193.

[2] Денисов В.Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи матем. наук, -2005, -60, №4,с.145-212.

[3] Гущин А.К. Некоторые оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности в неограниченной области // Труды МИАН СССР имВ.А.Стеклова, -1967, -91, с.5-18.

[4] Гущин А.К. О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения // Сибирский Мат. журнал, -1969, -10, №1,с.43-57.

[5] Денисов В.Н. О скорости стабилизации решения задачи Коши с растущим младшим коэффициентом // Ломоносовские чтения, МГУ, ВМК, -2017, с.23.

[6] Meyers N., Serrin J., The Exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations // Journ. of Math. Mech., -1960, -9, №4,с.513-538.

Об одной задаче для нагруженного уравнения Чаплыгина

Джамалов С.З. (Узбекистан, Ташкент)
Институт Математики АНРУз
siroj63@mail.ru

В докладе излагаются некоторые результаты об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для нагруженного уравнения Чаплыгина в плоскости. Нагруженным уравнением принято называть уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах значения тех или иных функционалов от решения уравнения [1]. В области $Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) = \{ (x,t);\ \alpha < x < \beta;\ \ 0 < t < T < +\infty\ \}$ рассмотрим нагруженное дифференциальное уравнение Чаплыгина

$$Lu = K(x)u_{tt} - u_{xx} + \alpha\,(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) + Pu(x,t_0) \qquad (1)$$

где $x \cdot K(x) > 0$ при $x \neq 0$, $-\alpha < x < \beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$.
$Pu\,(x,t_0) = b_1(x,t)u_x(x,t_0) + b_0(x,t)u(x,t_0),\quad 0 \leq t_0 \leq T.$

Краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям.

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p u|_{x=-\alpha} = D_x^p u|_{x=\beta}. \tag{3}$$

где γ и $\eta - const \neq 0$, $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, $D_t^0 u = u$, при $p = 0, 1$.
В данной работе, в случае, когда $Pu(x, t_0) \neq 0$ и при выполнении некоторых условиях на коэффициенты уравнение (1) доказывается методами "ε-регуляризации",
априорных оценок и последовательных приближений однозначное разрешимости задач (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$.

Литература

[1] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения. Диф. уравн,1983.Т 19,№-1,с. 86–94.

Субфинслерова задача на группе Гейзенберга

Максим Дидин (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем РАН
didin.maxim@yandex.ru

Субфинслерова задача на группе Гейзенберга ставится следующим образом: требуется наискорейшим образом попасть из точки $(0,0)$ в точку (x,y), заметая область на плоскости заданной площади S, с вектором скорости из заданного компакта P. Субфинслерова сфера определяется как множество точек в пространстве (x,y,S), достижимое за время 1 вдоль наискорейших кривых.

Элементарными методами получено решение субфинслеровой задачи на группе Гейзенберга; для случая, когда P — выпуклый многоугольник, построена субфинслерова сфера.

Асимптотика линейных уравнений с локализованными правыми частями и канонический оператор Маслова на паре лагранжевых многообразий[15]

Доброхотов С.Ю. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН
dobr@ipmnet.ru

Задачи об асимптотике функции Грина для оператора Гельмгольца $h^2\triangle + n2(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ с малым параметром h и гладкой функцией $n^2(x)$ изучалась во многих работах, например, в работах Дж. Келлера, В.М. Бабича, В.В. Кучеренко. В случае переменных коэффициентов она строилась путем склейки асимптотики функции Грина для уравнения с замороженными коэффициентами с ВКБ-асимптотикой, либо в более общей ситуации с каноническим оператором Маслова. В настоящей работе предлагается новый метод её вычисления, не предполагающий знания точной функции Грина для уравнения с замороженными коэффициентами. Развитый подход основан на появлении и использовании в таких задачах пары лагранжевых многообразий (это соображение, близко к идеям Мельроуза-Ульмана и Стернина-Шаталова, высказанных в других задачах) и работает для более широкого класса операторов, а также когда в правой части вместо δ-функции стоит гладкая локализованная функция $f(\frac{x}{h})$. В частности, метод работает и для псевдодифференциальных уравнений, например для неоднородного линеаризованного уравнения волн на воде. Мы обсуждаем также другие задачи, в которых появляются пары Лагранжевых многообразий.

[15] Эта работа выполнена совместно с А.Ю. Аникиным, В.Е. Назайкинским и М. Руло (M. Rouleux) при частичной поддержке грантов РФФИ.

Исследование разрешимости задачи Коши для одной системы квазилинейных уравнений[16]

Донцова М.В. (Россия, Н. Новгород)
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
dontsowa.marina2011@yandex.ru

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ - неизвестные функции, $a_1(t),\ b_1(t),\ b_2(t),\ c_1(t),\ g_1(t)$ - известные функции, $a_2,\ g_2$ - известные константы.

Примем, что $a_1(t) > 0,\ b_1(t) > 0,\ b_2(t) > 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) > 0, \quad t \in [0,T]$.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т.е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - известные функции.

Задача (1), (2) определена на $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

Исследование разрешимости задачи Коши (1), (2) основано на методе дополнительного аргумента. Так же, как в работе [1] определяем условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида (1) с начальными условиями (2) на Ω_T.

С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1],[2]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau) + \int_0^s (a_2 w_1(\tau,t,x) + b_2(\tau)w_3(\tau,t,x))d\tau, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_4(\tau,t,x) + g_1(\tau)w_2(\tau,t,x))d\tau) + \int_0^s g_2 w_2(\tau,t,x)d\tau, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau). \tag{6}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^2(R)$ - пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на R, $C([0,T])$ - пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0,T]$.

Общим итогом исследования является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$, $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$ *и выполняются условия:*

1) $a_1(t) > 0,\ b_1(t) > 0,\ b_2(t) > 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) > 0, \quad t \in [0,T]$,

2) $\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \geqslant 0$ *на* R.

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений (3) - (6).*

В теореме 1 сформулированы условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1), (2), где $u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$.

[16]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

Литература

[1] Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. №4. С. 71–82.

[2] Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т.379. №1. С. 16–21.

Позиционный принцип минимума в задачах оптимального управления с терминальными ограничениями[17]

Дыхта В.А. (Россия, Иркутск)
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
dykhta@gmail.com

В работах [1, 2] получены необходимые условия оптимальности, усиливающие принцип максимума Понтрягина для классической (гладкой) задачи оптимального управления, а также для некоторых классов негладких задач со свободным правым концом. Все эти условия оптимальности названы позиционным принципом минимума, поскольку они утверждают, что из оптимальности траектории $\bar{x}(\cdot)$ в рассматриваемой задаче с допустимыми измеримыми программными управлениями $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], U)$, где U — компакт, следует оптимальность $\bar{x}(\cdot)$ в так называемой присоединенной задаче в классе позиционных управлений потенциального спуска по функционалу.

Отметим характерные свойства позиционного принципа: он формулируется в рамках конструкций принципа максимума и использует понятие конструктивных движений Красовского-Субботина в качестве решений динамической системы с разрывным позиционным управлением; носит нелокальный характер, так как может «браковать» экстремали задачи и локально оптимальные процессы; в случае нарушения на исследуемом процессе (т.е. его «браковки») конструктивно предъявляется процесс спуска, улучшающий исходный процесс.

Данный доклад посвящен распространению позиционного принципа минимума на задачи оптимального управления с терминальными ограничениями. Это распространение охватывает ряд методов снятия терминальных ограничений посредством модифицированных лагранжианов задачи (метод штрафных оценок, параметризации целевой функции), так что попутно предлагаются процедуры «встраивания» позиционного принципа в известные численные методы оптимизации как базового метода решения аппроксимирующих задач. Что касается качественных результатов, полученных на этом пути, то выделим следующие: позиционный ε-принцип минимума для квазиоптимальных (субоптимальных) процессов — усиление известного ослабленного принципа максимума И. Экланда (это необходимый промежуточный результат для всех методов снятия ограничений); позиционный принцип минимума для нормальных экстремалей в задачах с терминальными ограничениями типа равенства (его распространение на случай более «мягких» ограничений-неравенств представляется вполне реальным).

Литература

[1] Дыхта В. А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. №6. С. 653–656.

[2] Dykhta V. A. Positional strengthenings of the Maximum Principle and sufficient optimality conditions // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. V. 293. No. 1. Pp. S43—S57.

[17]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00733-а.

О задаче Коши для сингулярного уравнения типа уравнения Ибрагимова-Мамонтова

Елецких К.С. (Россия, Елец)
Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина
kostan.yeletsky@gmail.com

Рассмотрим уравнение вида

$$u_{tt}=u_{xx}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x-t)\,(D_B)_{ij}u,\quad (D_B)_{ij}=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}, & i\neq j,\\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\gamma_i}{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}, & i=j,\end{cases}\tag{1}$$

где $\gamma_i\geqslant 0$, $\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\gamma_i}{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$ — сингулярный оператор Бесселя $(B_\gamma)_{y_i}$. Коэффициенты уравнения (1) симметричны $a_{ij}=a_{ji}$ и бесконечно дифференцируемы. Если все $\gamma_i=0$, то это уравнение Ибрагимова-Мамонтова [1]. Строим решение задачи Коши:

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=f(x,y).\tag{2}$$

Функция $f(x,y)$ предполагается четной по каждой координате вектора y, финитной и бесконечно дифференцируемой. Решение задачи (1), (2) ищем в классе функций, четных по каждой переменной $y=(y_1,\,\ldots\,,y_n)$.

К задаче (1), (2) применим $\mathcal{F}_B$-преобразование [2] по переменным y. Обозначая $\mathcal{F}_B[u]=\widehat{u}$, получим следующую задачу Коши

$$\widehat{u}_{tt}=\widehat{u}_{xx}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j\,\widehat{u}_{y_iy_j},\quad \widehat{u}|_{t=0}=0,\quad \widehat{u}_t|_{t=0}=f(x,\lambda),\tag{3}$$

которая не отличатся от задачи Коши, рассмотренной в [1], полученной применением преобразования Фурье к уравнению Ибрагимова-Мамонтова и начальным условиям (2). Поэтому мы воспользуемся результатами [1]. А именно, с помощью функции Римана определим следующее решение задачи (3)

$$\widehat{u}(t,x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}j_0\left(k\sqrt{Q(\lambda)}\right)\,\mathcal{F}_B[f](\xi,\lambda)\,d\xi\,,\tag{4}$$

где $k^2=(t+x-\xi)$, $Q(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}[A_{ij}(\xi)-A_{ij}(x-t)]$, $A_{ij}(\sigma)=\int a_{ij}(\sigma)\,d\sigma$. Квадратичную форму $Q(\lambda)$, т.к. она положительно определена при $\xi>x-t$, приводим с помощью невырожденного вещественного преобразования $\mu=T\lambda$ к сумме квадратов: $Q(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^2$.

Применим обратное преобразование Фурье-Бесселя к равенству (4). В рамках весовых обобщенных функций имеем

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(F_B[j_0(k|\mu|)](\eta)\,,\,T_\eta^y f(\xi,\eta)\right)_\gamma d\xi\,.$$

Используя формулы F_B-преобразования Фурье-Бесселя радиальной функции Бесселя $j_p(k\,|x|)$, полученные в [3], для индекса $p=0$ в случае четного и нечетного числа $n+|\gamma|$ получим следующее представление решения задачи (1), (2):

а) при четном $n+|\gamma|$

$$u(t,x,y)=\frac{A_0'(n,\gamma)}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\left(\frac{d}{s\,ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[s^{n+|\gamma|-2}\times\int\limits_{S_1^+(n)}T_y^{\sqrt{s}\,\Theta}f(\xi,y)\,\Theta^\gamma dS(\Theta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi},$$

b) При нечетном $n+|\gamma|$

$$u(t,x,y)=\frac{A_0''(n,\gamma)}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^1 z^{n+|\gamma|-2}(1-z^2)^{-1/2}\times$$
$$\times\left\{\omega\left(\frac{d}{\omega\,d\omega}\right)^{\frac{n+|\gamma|-1}{2}}\left[\omega^{n+|\gamma|-2}\times\int\limits_{S_1^+(n)}T_y^{\sqrt{\omega}\,z\,\Theta}f(\xi,y)\,\Theta^\gamma\,dS(\Theta)\right]\right\}\Bigg|_{\omega=x+t-\xi}dz.$$

Литература

[1] Ибрагимов Н. Х., Мамонтов Е. В. О задаче Коши для уравнения $u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i,j=1}^{n-1}u_{y_iy_j}=0$ // Математ. сб. 1977. No 3. С. 391–409.

[2] Ляхов Л. Н., Рощупкин С. А. Об априорной оценке решений сингулярных B-эллиптических псевдодифференциальных уравнений с ∂_B оператором Бесселя // Проблемы математ. анализа. 2013. 74. С. 109–116.

[3] Lyakhov L. N., Yeletskikh K. S. The Mixed Fourier–Bessel Transform of a Radial Bessel j-Function // Jornal Of Mathematical Sciences. 2017. No 4. C. 388–401.

Приведенный потенциал системы шар Чаплыгина с ротором

Жила А.И. (Россия, Москва)
Московский государственный университет им. Ломоносова
saffeya@yandex.ru

Рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по горизонтальной шероховатой плоскости. Данная динамическая система,назаваемая также шаром Чаплыгина с ротором, является конформно-гамильтоновой. Ее уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases}\dot{M}=(M+K)\times\omega, & M=J\omega-d(\gamma,\omega)\gamma, \quad J=I+dE,\\ \dot{\gamma}=\gamma\times\omega, & d=mr^2\geq 0, \quad E=\|\delta_{ij}\|,\end{cases}$$

где ω — вектор угловой скорости, $I=\mathrm{diag}(I_1,I_2,I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, γ — орт вертикали, m — масса шара, r — его радиус. Вектор M имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта, а K — постоянный вектор момента ротора. Система допускает четыре первых интеграла:

$$H=\frac{1}{2}(M,\omega),\ N=(M+K,M+K),\ C=(M+K,\gamma),\ G=(\gamma,\gamma).$$

Изоэнергетической поверхностью называется неособое трехмерное многообразие $Q_h^3=\{x\in M^4|H(x)=h\}$, где $\mathrm{d}H(x)\neq 0$ для всех $x\in Q_h^3$.

Различные 3-поверхности Q_h^3 задаются двумя параметрами h и c, то есть значениями интегралов H и C. Для определения топологического типа изоэнергетических поверхностей будем рассматривать проекцию Q^3 на сферу Пуассона, задаваемую уравнением $\langle\gamma,\gamma\rangle=1$. Слой над ней будет являться пересечение 2-плоскости $\langle M,\gamma\rangle=c-\langle K,\gamma\rangle$ и эллипсоида $2h=\langle M,J^{-1}M\rangle+\dfrac{d\langle M,J^{-1}\gamma\rangle^2}{1-d\langle M,J^{-1}\gamma\rangle}$. Подробнее про определение топологического типа см. [1].

Обозначим за A матрицу

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{J_1}&0&0\\0&\frac{1}{J_2}&0\\0&0&\frac{1}{J_1}\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}l_1^2&l_1l_2&l_1l_3\\l_1l_2&l_2^2&l_2l_3\\l_1l_3&l_2l_3&l_3^2\end{pmatrix},$$

где $p=\dfrac{d}{1-d\langle M,J^{-1}\gamma\rangle}$ и $l_i=\frac{\gamma_i}{J_i}$

Теорема 1. *Приведенный потенциал системы шар Чаплыгина с ротором имеет вид:*

$$\varphi_H = \frac{(c - \langle K, \gamma \rangle)^2}{\langle A^{-1}\gamma, \gamma \rangle}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00170 и РНФ № 17-11-01303.

Литература

[1] Болсинов А. В, Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: РХД, 1999.

Одномерные соленоиды Вильямса. Комбинаторное описание и реализация на поверхностях

Жиров А.Ю. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт
alexei_zhirov@mail.ru

Соленоид в смысле Р. Вильямса (обобщённый соленоид) это предел обратного спектра, порождённого отображением разветвлённого одномерного многообразия, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям. Вилямсом установлено, что гиперболический аттрактор диффеоморфизма гомеоморфен некоторому обобщённому соленоиду, а ограничение диффеоморфизма на аттрактор сопряжено автоморфизму сдвига соленоида. В докладе обсуждается вопрос о том, как определить по комбинаторному заданию одномерного обобщённого соленоида, существует ли поверхность и её диффеоморфизм с одномерным гиперболическим аттрактором, моделью которого служит данный соленоид.

Аттракторы трансверсально подобных псевдоримановых слоений

Жукова Н.И. (Россия, Москва)
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
nzhukova@hse.ru

Напомним, что преобразование $f \in Diff(N)$ q-мерного псевдориманова многообразия (N, g) называется подобием, если $f^*g = \lambda g$, где λ — положительная константа. Множество всех подобий псевдориманова многообразия (N, g) образует группу Ли $Sim(N, g)$.

Слоение произвольной коразмерности q на n, где $0 < q < n$, называется *трансверсально подобным псевдоримановым* (или трансверсально подобным римановым) слоением, если преобразования трансверсальных координат слоения являются локальными подобиями некоторого псевдориманова (соответственно риманова) q-мерного многообразия (N, g), связность которого не предполагается.

Напомним, что подмножество многообразия M называется насыщенным, если оно является объединением некоторых слоев слоения (M, F). Замкнутое насыщенное непустое подмножество $\mathcal{M}$ в M, для которого существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$, что замыкание произвольного слоя из $\mathcal{U} \setminus \mathcal{M}$ содержит $\mathcal{M}$, называется *аттрактором* этого слоения. Окрестность $\mathcal{U}$ однозначно определяется указанным выше условием, называется бассейном аттрактора $\mathcal{M}$ и обозначается через $Attr(\mathcal{M})$. Если, более того, $Attr(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, то аттрактор $\mathcal{M}$ называется *глобальным.*

Напомним, что минимальным множеством слоения (M, F) называется такое непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{K}$ в M, что каждый слой из $\mathcal{K}$ всюду плотен в $\mathcal{K}$.

Минимальные множества слоения и его аттракторы во многом определяют топологию слоения, поэтому исследование минимальных множеств и аттракторов является одной из основных задач как топологической динамики, так и качественной теории слоений.

Аттракторы, являющиеся минимальными множествами конформных слоений коразмерности $q \geq 3$, исследовались автором в [1]. Вопросам существования и строения аттракторов картановых слоений посвящена работа А.С. Галаева и автора [2].

Целью данной работы является нахождение достаточных условий для существования аттракторов трансверсально подобных псевдоримановых слоений произвольной коразмерности на n-мерных многообразиях. Для трансверсально подобного псевдориманова слоения (M, F) нами найдено достаточное условие для существования аттрактора, являющегося минимальным множеством этого слоения. Показано, что, если это слоение допускает связность Эресмана в смысле [3], то аттрактор является глобальным.

Если (M, F) — трансверсально подобное риманово слоение, то мы доказываем, что выполнение указанных выше условий гарантирует обращение в ноль трансверсальной кривизны и даем описание глобальной структуры этого слоения.

Слой слоения называется собственным, если он является вложенным подмногообразием многообразия M. Слоение (M, F) называется собственным, если все его слои собственные. В случае, когда (M, F) — собственное слоение, упомянутые выше аттракторы транверсально подобных слоений являются замкнутыми слоями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00312-а) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 95) в 2018 году.

Литература

[1] Zhukova N. I. Global attractors of complete conformal foliations. Sbornik: Mathematics. 2012. V. 203, no. 3. P. 380–405.

[2] Galaev A. S., Zhukova N. I. Attractors of Cartan foliations. ArXiv [Math. DG]. 2017, 1703.07597.

[3] Blumenthal R. A., Hebda J. J. Ehresmann connections for foliations. Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. no 4. P. 597–611.

Условия стабилизации систем со случайной структурой методом малого параметра

Завьялова Т.В. (Россия, Москва)
Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС"
tzava@yandex.ru

Рассмотрим управляемую стохастическую систему, описываемую уравнением

$$dx = [A(y(t))x + B(y(t))u]dt + \sum_{v=1}^{l} \sigma_v(y(t))x dw_v, \tag{1}$$

где $x \in R^{(n)}$ – n-мерный вектор фазовых координат системы; время может изменяться в области $I = \{t : t \geq t_0\}$; величина $u = u(t, x, y)$ – r-векторное управляющее воздействие. Структурное состояние системы описывается чисто разрывным марковским процессом $y(t)$, допускающим разложение:

$$P\{y(t + \Delta t) \in (\beta, \beta + \Delta\beta) \mid y(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta) \cdot \Delta\beta \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{y(\tau) \equiv \alpha, t < \tau \leq t + \Delta t \mid y(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha) \cdot \Delta t + o(\Delta t), \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in Y[k_1, k_2]$, $P\{\cdot|\cdot\}$ – условная вероятность, $o(\Delta t)$ – бесконечно малая величина, более высокого порядка малости, чем Δt. Функции $p(t, \alpha, \beta), p(t, \alpha)$ – известны. $A(y(t)), B(y(t))$, $\sigma_v(y(t))$ – известные матрицы-функции, зависящие от состояния и определенные в области $Z : x \in R^{(n)}, t \geq 0, y(t) \in Y$. $w(t) = \{w_1(t), \ldots, w_m(t)\}$ – m-векторный стандартный винеровский процесс, не зависящий от вероятностных характеристик процесса $y(t)$.

Пусть в области Z заданы начальные условия $x = x^0, t = t^0, y \in Y$. Тогда система определяет $(n+1)$ – мерный марковский случайный процесс $\{x(t), y(t)\}$. Так как процесс $y(t)$ –

кусочно-постоянный на каждом интервале времени $t < \tau \leq t + \Delta t$, то движение определяется уравнением (1), (2). Если в момент $t = \tau$ скачкообразно изменяется структурное состояние системы, то необходимо задать новые начальные условия для продолжения движения. Такие ситуации возникают в виброударных системах, механических системах, когда скачком изменяется масса движущегося объекта. Наиболее естественным в подобных задачах выглядит условие скачка фазового вектора, зависящее от случайной величины:

$$x(\tau) = K(\alpha, \beta) \cdot x(\tau - 0) + \sum_{s=1}^{N} Q_s \xi_s x(\tau - 0), \tag{3}$$

здесь τ – момент перехода системы из состояния $y(\tau - 0) = \alpha$ в состояние $y(\tau + 0) = \beta \neq \alpha; x(\tau) = x(\tau + 0)$ – вектор фазовых координат, непрерывный справа, $K(\alpha, \beta)$ – заданная матрица размерности $n \times n$, зависящая от структурного состояния системы, ξ_s – независимые случайные величины, для которых $M\xi_s = 0, M\xi_s^2 = 1$, Q_s – заданные матрицы размера $n \times n$.

В случае, если в условии (3) $K(\alpha, \beta) = E, Q_s = 0, E$ – единичная матрица, то фазовый вектор изменяется непрерывно и вопросы стабилизации таких систем изучены в работах [1], [2]. Если $Q_s = 0$, условие (3) соответствует детерминированному скачку. Предполагается, что скачки фазового вектора малы, то есть $K(\alpha, \beta) = E + \mu\tilde{K}(\alpha, \beta), Q_s = \mu\tilde{Q}_s, \mu$ – параметр.

Качество переходного процесса оценивается квадратичным функционалом:

$$J_u(x, y) = \int_0^\infty M[x'[t]C(y(t))x[t] + u'[t]D(y(t))u[t]|x^0, y^0]dt. \tag{4}$$

где $C(y(t)) \geqslant 0, D(y(t)) > 0$ симметричные $n \times n$ и $r \times r$ соответственно матрицы.

Для стохастической системы (1), испытывающей структурные изменения разрывного марковского процесса (2) с условием скачка (3) получено решение линейно-квадратичной задачи оптимальной стабилизации, а именно, построено управление представимое в виде сходящегося ряда по параметру μ. Применение этого метода к системам со случайной структурой известно во многих работах, в том числе [2].

Литература

[1] Кац И. Я. Стабилизация управляемых систем со случайной структурой // Теория и системы управления. 1996. № 1. С.41–46.

[2] Kats I. Ya. Optymal stability of the stochastic system with discontinuous trajectories // IMACS annals on Computing and Applied Mathimatiks. V.8. The Lyapunov functions method and applications. 1990. P. 219–223.

Об одной стохастической эволюционной модели

С.А. Загребина, А.С. Конкина (Россия)
ЮУрГУ
zagrebina_sophiya@mail.ru, alexandra.konkina@yandex.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ – банахово пространство, $\mathfrak{F}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линейный, непрерывный), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линейный, замкнутый, плотно определенный), причем оператор M сильно (L, p)-секториален [1]. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW, \tag{1}$$

где $W = W(t)$ $\mathfrak{F}$-значный K-винеровский процесс, т.е

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k.$$

Здесь $\{\lambda_k\}$ – спектр самосопряженного ядерного оператора $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, $\beta_k(t)$ – стандартные (одномерные) винеровские процессы, называемые также броуновскими движениями.

Теорема 1. *Пусть операторы* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем оператор* M *сильно* (L,p)*-секториален и выполнено условие*

$$QN = N. \tag{2}$$

Тогда для любой $\mathfrak{U}^1$*-значной гауссовой случайной величины* ξ *не зависящей от* $W(t)$ *существует единственное сильное решение задачи Коши*

$$u(0) = \xi \tag{3}$$

для уравнения (1), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = U^t\xi + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}NdW(s).$$

Рассмотрим теперь стохастическое эволюционное уравнение

$$(\lambda - \Delta)du = \alpha\Delta udt - \beta\Delta^2 udt + NdW \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Задача (4), (5) описывает эволюцию свободной поверхности жидкости, фильтрующуюся в пласте ограниченной мощности со случайным внешним воздействием.

Пусть $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ и $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$, а операторы L и M заданы формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$, причем

$$\mathrm{dom}M = \mathfrak{U} \cap \{u \in W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а при всех $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Лемма 1 [1]. При всех $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, оператор M сильно $(L,0)$-секториален.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, *тогда существует сильное решение задачи (3)-(5), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\nu_k t}\langle\xi,\varphi_k\rangle\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda - \mu_k}\int_0^t e^{\nu_k(t-s)}d\beta_k(s)\varphi_k.$$

Здесь $\nu_k = \dfrac{(\alpha\mu_k - \beta\mu_k^2)}{(\alpha - \mu_k)}$ – точки L-спектра оператора M, $\{\lambda_k\}$ – собственные значения специальными образом построенного ядерного оператора K, $\{\mu_k\}$ – собственные значения оператора Лапласа.

Литература

[1] Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. – Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003.

Моделирование открытых потоков сред, обладающих пределом текучести[18]

Зайко Ю.С., Эглит М.Э. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
juliazaiko@yandex.ru, m.eglit@mail.ru
Якубенко А.Е., Якубенко Т.А. (Россия, Москва)
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
yakub@imec.msu.ru, yakubta@mail.ru

Работа посвящена математическому моделированию открытых потоков, движущихся по наклонным поверхностям под действием силы тяжести. Такие потоки широко встречаются в природе и в технике. Во многих случаях движущаяся среда в таких потоках обладает неньютоновскими реологическими свойствами, в частности, обладает пределом текучести. Это означает, что течение с деформированием происходит только когда интенсивность касательных напряжений достигает величины предела текучести; в противном случае среда не движется или движется без деформирования, как твердое тело. Примерами являются потоки, несущие взвешенные твердые частицы, которые используются в горнодобывающей, нефтяной, химической, пищевой, бумажной и других отраслях промышленности. Природные потоки на горных склонах – снежные лавины, сели, оползни, лавовые потоки также проявляют неньютоновские свойства, в частности, могут останавливаться на склонах с ненулевым уклоном, что является одним из проявлений наличия предела текучести. Другим эффектом, связанным с пределом текучести, является образование в открытых потоках поверхностного слоя, который движется без деформирования, как квазитвердая корка. Причиной существования такого слоя является малость величины трения о воздух на верхней поверхности потока.

В работе с помощью построенных математических и численных моделей [1-3] проводится исследование влияния предела текучести на динамику ламинарных и турбулентных открытых потоков, движущихся без вовлечения и с вовлечением подстилающего материала. В частности, показано, что влияние предела текучести может проявляться по-разному в ламинарных и турбулентных потоках, а также при наличии или отсутствии вовлечения материала дна. В ламинарных потоках сред с пределом текучести, движущихся без вовлечения массы со дна, скорости меньше, чем в потоках с нулевым пределом текучести при одинаковых остальных входных данных. Если же ламинарный поток вовлекает подстилающий материал, причем это вовлечение происходит, когда касательное напряжение на дне потока достигает предела прочности подстилающего материала, то скорость вовлечения массы оказывается тем больше, чем больше предел текучести. Так как увеличение массы приводит к ускорению потока, то захватывающие донный материал ламинарные потоки сред с большим пределом текучести движутся быстрее, чем аналогичные потоки с меньшим пределом текучести. В турбулентных потоках, движущихся без захвата донного материала, наличие предела текучести приводит к увеличению скоростей потока, что, по-видимому, объясняется тем, что существование предела текучести уменьшает интенсивность турбулентности в потоке. Скорость захвата донного материала турбулентными потоками существенно больше, чем ламинарными, а ее зависимость от величины предела текучести не монотонна.

Литература

[1] Eglit M. E., Yakubenko A. E. Numerical modeling of slope flows entraining bottom material // Cold Regions Science and Technology. 2014. V. 108. P. 139–148.

[2] Эглит М. Э., Якубенко А. Е. Влияние захвата донного материала и неньютоновской реологии на динамику турбулентных склоновых потоков // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 3–15.

[3] Зайко Ю.С. Численное моделирование склоновых потоков различной реологической природы. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 3-11.

[18] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 15-01-08023).

Стабилизация динамической системы при воздействии неконтролируемых факторов

Зайцев В.В. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
vlad128gp@yandex.ru

Рассматривается построение управления, стабилизирующего квазиинвариантное множество динамической системы при воздействии неконтролируемых факторов. Предполагаем гладкость и ограниченность этих факторов и допустимых управлений. Квазиинвариантное множество строится в некоторой окрестности особой точки (иногда малой). Подобные задачи возникают в динамике летательных аппаратов, при анализе движения судов и др.

Для динамической системы получены необходимые и достаточные условия стабилизации для известного квазиинвариантного множества. При дополнительном воздействии неконтролируемых факторов возможны следующие случаи: 1) стабилизация возможна; 2) невозможно стабилизировать квазиинвариантное множество допустимым управлением (устойчивость возможна в «практическом» смысле, – например, в смысле определения Н.Г.Четаева); 3) возмущения в системе могут привести к «дрейфу» рассматриваемой области. В последних случаях получены оценки фазового потока, начинающегося в квазиинвариантном множестве системы. Приводятся примеры.

Изучается стабилизация в вероятностном смысле при соответствующих неконтролируемых факторах и рассматривается стабилизация при факторах, моделируемых нейросетевыми методами.

Вычислительный эксперимент для одной обратной задачи

Замышляева А.А., Муравьев А.С. (Россия, Челябинск)
Южно-Уральский государственный университет
alzama@mail.ru, gg.amur@gmail.com

Рассмотрена обратная задача для операторно-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве. Для этой задачи сформулирована и доказана теорема об однозначной разрешимости. На основе полученных в теории результатов была исследована обратная задача Буссинеска-Лява. Алгоритм численного решения указанной задачи реализован в среде Maple. Полученная программа была использована для проведения вычислительного эксперимента. $\Phi : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{F})$, $\quad F : [0,T] \to \mathfrak{F}$, $\quad \Psi : [0,T] \to \mathfrak{Y}$, $\quad C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

$$A\ddot{u}(t) = B_1\dot{u}(t) + B_0u(t) + \Phi(t)q(t) + F(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \tag{2}$$

$$Cu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть пучок* $\overrightarrow{B}$ *полиномиально A-ограничен,* ∞ *– полюс порядка p A-резольвенты пучка* $\overrightarrow{B}$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, $\ker C \neq \{\emptyset\}$ $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\Phi_0 \in C^{p+2}([0,T];\mathfrak{F}^0)$, $F_0 \in C^{p+2}([0,T];\mathfrak{F}^0)$, *начальные данные* $v_k^0 \in \mathfrak{U}^0$ *удовлетворяют условию* $v_k^0 = -\sum\limits_{q=0}^{p} K_q^2(B_0^0)^{-1}\frac{d^{q+k}}{dt^{q+k}}(\Phi_0(t)q(t) + F_0(t))_{t=0}$, *оператор* $C\Phi(t)$ *обратим, причем* $(C\Phi)^{-1} \in C^{p+2}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{Y}))$ *и выполняется условие согласования* $Cv_0 = \Psi(0)$. *Тогда решение* (u,q) *задачи (1)–(3) существует и единственно, причем* $u = w + v$, *где* $u \in C^{p+2}([0,T];\mathfrak{U}^1)$, $v \in C^2([0,T];\mathcal{U}^0)$, $q \in C^{p+2}([0,T];\mathfrak{Y})$.

Литература

[1] Федоров В.Е., Уразаева А.В. Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа // Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск) 2010. С. 293-310.

[2] Замышляева А. А. Исследование одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка. Дис. канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2003. 101 с.

Исследование структуры графа сети из движущихся объектов[19]

Звягин М. Ю. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
muz1953@yandex.ru

Голубев А. С. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
andy.golubev@gmail.com

Васильченкова Д. Г. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
darya.vasilchenkova@mail.ru

Современные беспроводные системы связи привели к появлению нового класса сетей передачи данных, которые можно охарактеризовать как одноранговые динамические сети произвольной структуры (или MESH-сети) [1], [2]. Среди них чаще всего выделяют MANET (Mobile Ad-hoc Networks) — сети мобильных устройств, FANET (Flying Ad-hoc Networks) — сети беспилотных летательных аппаратов, VANET (Vehicular Ad-hoc Networks) — сети транспортных средств. Для подобных сетей особый интерес представляет задача изучения структуры и динамических свойств графа связей. Именно эта информация представляет наибольший интерес в прикладных задачах, так как на её основе разрабатываются ключевые протоколы сетевого и транспортного уровней.

В своей работе мы исследуем систему связи для автотранспортных средств. Целью является пересылка экстренных сообщений между различными участниками дорожного движения (в том числе находящихся вне зоны покрытия традиционных средств связи) за счёт ретрансляции множеством подвижных транзитных узлов.

На первом этапе была поставлена задача адекватного моделирования подобной графовой структуры, отражающей указанные характерные особенности. Источник динамического графа – сеть автодорог с трафиком дорожного движения. Вершины графа – движущиеся транспортные средства. Ребра графа отражают наличие связи между узлами сети. Множество вершин, достижимых за один шаг, назовем 1-окрестностью узла, за n шагов – n-окрестностью.

Следует отметить, что граф сети данной системы имеет ярко выраженные характерные особенности:

1) концентрация узлов сети вдоль известных маршрутов (автодорог);
2) двусторонний характер движения узлов;
3) относительная стабильность их взаимного расположения при движении в одном направлении;
4) значительная протяженность графа при небольшом поперечном сечении;
5) позиционность вершин графа – узлы сети имеют координаты в некоторой неподвижной системе координат, которые обновляются с течением времени;
6) каждый узел может обладать актуальной информацией о структуре графа только в пределах некоторой фиксированной n-окрестности, для чего используется метод ограниченной лавинной рассылки; при этом выбор величины n (например, $n = 3$) определяется взаимоотношением максимальной скорости движения узлов и максимального времени передачи сообщения.

Организация взаимодействия транспортных средств на основе описанного подхода позволяет решить ряд задач, среди которых: рассылка срочных сообщений, аварийных

[19] Работа выполнена в рамках государственного задания ВлГУ: Разработка телематических средств оперативной связи для интеллектуальных информационных систем на транспорте в условиях неустойчивого сотового покрытия (ГБ 1151/18)

сигналов, оповещений; возможность проанализировать дорожную обстановку и предупредить потенциальные столкновения, выбрать альтернативный маршрут движения при возникновении заторов.

Литература

[1] S. Bodhy Krishna Study of Ad hoc Networks with Reference to MANET, VANET, FANET // International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering. – [S.l.], v. 7, n. 7. – p. 390–394.

[2] Павлов А. А., Датьев И. О. Исследование влияния различных параметров на характеристики передачи данных беспроводных многошаговых сетей // Труды Кольского научного центра РАН. – 2016. №6-7 (40). – с. 45–55.

Аналог формулы Планшереля для K_γ-преобразования гельдеровских функций

Зелюкина В.С. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
vzelyukina@mail.ru

Пусть натуральные числа N и n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ фиксированные; $x{=}(x', x'') \in \mathbb{R}_N$, причем $x' \in \mathbb{R}_n$, $x'' \in \mathbb{R}_{N-n}$. В $\mathbb{R}_N$ выделим область $\mathbb{R}^+_N{=}\mathbb{R}^+_n{\times}\mathbb{R}_{N-n}$, $\mathbb{R}^+_n{=}\{x'{\in}\mathbb{R}_n\colon x_i{>}0,\ i=\overline{1,n}\}$. Все рассматриваемые далее функции считаем x'-четными, то есть определенными в $\mathbb{R}^+_N$ и допускающими продолжение в $\mathbb{R}_N$ с сохранением класса гладкости (см. [1]). Их носители $\Omega^+ \in \overline{\mathbb{R}^+_N}$, т.е. могут прилегать к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Часть границы, принадлежащую этим координатным гиперплоскостям, обозначим Γ_0. Под носителем функции понимаем частично замкнутую область $\Omega^+ \cup \Gamma_0$.

K_γ-преобразование определено в [2] выражением $K_\gamma[f](\xi;p) = \int_{\mathbb{R}^+_N} f(x)\, \mathcal{P}^\gamma_{x'}\, \delta(p - \langle x, \xi\rangle)\, (x')^\gamma\, dx$, где $\langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^N x_i\xi_i$, $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$, $\gamma{=}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, $\mathcal{P}^\gamma_{x'}$ – многомерный оператор Пуассона:

$$\mathcal{P}^\gamma_{x'} g(x',x''){=}\prod_{i=1}^n \left[\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) / \left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\sqrt{\pi}\right)\right] \times$$

$$\times \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi g(x_1\cos\alpha_1, \ldots, x_n\cos\alpha_n\,, x'') \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i d\alpha_1\, \ldots\, d\alpha_n.$$

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – гельдеровские, их носители принадлежат области $\overline{\Omega^+_N} \cup \Gamma_0$. Предположим, что $K_\gamma[f]$ и $K_\gamma[g]$, как функции параметра p принадлежат $C^{N+|\gamma|-1}$. Тогда*

1) если $N + |\gamma| > 2$ нечетное число, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_N} f(x)\overline{g(x)}(x')^\gamma dx = \frac{2^{2n-|\gamma|-N}\pi^{n+1-N}}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{S^+_1(N)} (\xi')^\gamma dS(\xi)\, \times$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (K_\gamma[f])_p^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}(\xi;p)\ \overline{(K_\gamma[g])^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}}(\xi;t)}\ dp;$$

2) если $N + |\gamma| > 2$ четное, то

$$\int f(y)\overline{g(y)}\,(y')^\gamma dy = -\frac{2^{2n-|\gamma|-N}(N{+}|\gamma|{-}1)!}{\pi^{N-n}\prod\limits_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{S^+_1(N)} (\xi')^\gamma dS(\xi)\, \times$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_\gamma[f](\xi;p_2)\,\overline{K_\gamma[g](\xi;p_1)}}{(p_1-p_2)^{N+|\gamma|}}\,dp_1\,dp_2\,,$$

где интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.

Литература

[1] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи, Наука, М. (1997).

[2] Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона. // ДАН

Существование и асимптотика решений задачи Коши для некоторого дифференциального уравнения неявного вида

Зернов А.Е., Кузина Ю.В. (Украина, Одесса)
Южноукраинский национальный педагогический университет им. К.Д. Ушинского
Военная академия
zernov.o@gmail.com, yuliak@te.net.ua

Рассматриватся задача Коши

$$P(t,x(t),x'(t))+f(t,x(t),x'(t)),x(0)=0$$

где $x\ :\ (0,\tau)\ \to\ \mathbb{R}-$ неизвестная функция. Первое слагаемое в данном уравнении есть некоторый многочлен, а второе слагаемое - непрерывная функция, которая в определенном смысле мала в сравнении с первым слагаемым. Решением рассматриваемой задачи называется непрерывно дифференцируемая функция $x:(0,\rho)\to\mathbb{R},(0<\rho<\tau)$, которая тождественно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению при всех $t\in(0,\rho)$, причем $x(t)\to 0$, если $t\to+0$.

Формулируются достаточные условия, при выполнении которых у изучаемой задачи Коши существуют непустое множество решений $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, где $\rho-$ достаточно мало; каждое из этих решений обладает требуемыми асимптотическими свойствами при $t\to+0$; также устанавливаются условия единственности решений указанного вида.

Исследования базируются на методах функционального анализа и качественной теории дифференциальных уравнений.

Аналитические методы детектирования нетривиальных элементов фундаментальной группы алгебраической кривой

Зубов И.С. (Россия, Коломна)
Государственный социально-гуманитарный университет
reestr_rr@mail.ru

На неособой алгебраической кривой можно ввести комплексную структуру и рассмотреть голоморфные и мероморфные дифференциальные 1-формы. В этой ситуации детектирование нетривиальных элементов фундаментальной группы этой кривой можно эффективно выполнить с помощью вычисления итерированных интегралов от голоморфных форм на гиперэллиптических кривых рода g. Они задаются компактификацией в $\mathbb{CP}^2$ аффинных кривых в $\mathbb{C}^2$ уравнениями

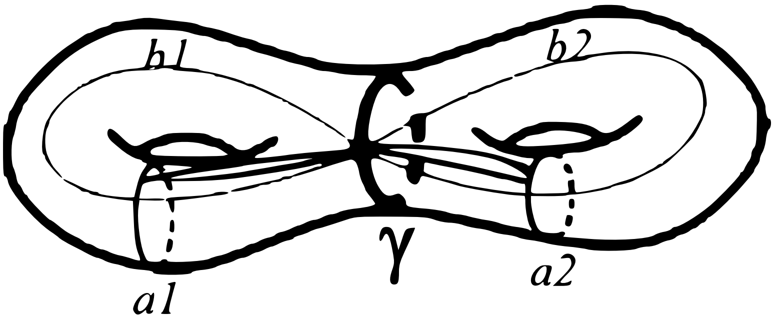
$$y^2=(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{2g+1}),\qquad g\geq 0,$$

зависящих от параметров $a_1,a_2,\ldots,a_{2g+1}$. Базис голоморфных 1-форм на такой алгебраической кривой в явном виде задается следующими 1-формами.

$$\omega_j = \frac{x^j dx}{\sqrt{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{2g+1})}},$$

где $j = 0, \ldots, g-1$.

Интегралы от голоморфных форм по циклам на алгебрической кривой не всегда детектируют гомотопическую нетривиальность петли. Например, для петли γ на кренделе (горловины)



интеграл вдоль неё от любой голоморфной 1-формы равен нулю $\int_\gamma \omega = 0$. Однако элемент фундаментальной группы, представленный этой петлей, не равен нулю. Действительно, 2-итерированный интеграл от голоморфной формы ω_0 и антиголоморфной формы $\overline{\omega}_0$ вдоль элемента $\gamma = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$

$$2\int_\gamma \omega_0\overline{\omega}_0 = \int_{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}} \omega_0\overline{\omega}_0 + \int_{a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}} \omega_0\overline{\omega}_0 =$$

$$= \int_{a_1}\omega_0 \int_{b_1}\overline{\omega}_0 - \int_{a_1}\overline{\omega}_0 \int_{b_1}\omega_0 + \int_{a_2}\omega_0 \int_{b_2}\overline{\omega}_0 - \int_{a_2}\overline{\omega}_0 \int_{b_2}\omega_0 > 0.$$

Последнее неравенство следует из соотношений Римана. Итак, $\int_\gamma \omega_0\overline{\omega}_0 \neq 0$, что влечет за собой нетривиальность элемента γ нулю.

Предложение. *Нетривиальность любого элемента из r-го члена нижнего центрального ряда фундаментальной группы алгебраической кривой детектируюся с помощью итерированных интегралов порядка не выше r от голоморфных и антиголоморфных 1-форм.*

Теорема. *Если на петле γ все итерированные интегралы любого порядка от голоморфных и антиголоморфных 1-форм обращаются в нуль, то эта петля представляет тривиальный элемент фундаментальной группы.*

Литература

[1] Chen K. T. Iterated integrals of diffferential forms and loop space homology. Ann. Math. 97(1973), 217-246.

[2] Хейн Р. М. Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов. М.: Наука, 1988.

[3] Спрингер Дж. Введение в теорию Римановых поверхностей. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

[4] Cartier P. Jacobiennes generalisees, monodromie unipotente et integrales iterees. - Seminair bourbake, 10 eme annee, 1987-88, n 687, Asterisque 161-162, 1988, p. 31-52.

[5] Лексин В. П. Метод Лаппо–Данилевского и тривиальность пересечения радикалов членов нижнего центрального ряда некоторых фундаментальных групп, Матем. заметки, 79:4 (2006), 577–580; Math. Notes, 79:4 (2006), 533–536.

О решении задачи быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением[20]

Ибрагимов Д.Н. (Россия, Москва)
Московский Авиационный Институт
pehdom@gmail.com

В докладе рассматривается нестационарная линейная дискретная система с ограниченным на каждом шаге множеством допустимых значений управлений и бесконечномерным вектором состояния

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U}(k),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbb{L}$ – вектор состояния системы. Предполагается, что пространство $\mathbb{L}$ является нормированным. Для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $\mathcal{U}(k) \subset \mathbb{L}$ – множество допустимых значений управлений, удовлетворяющее условиям: $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}(k)$, $\mathcal{U}(k)$ строго выпуклое и слабо компактное, $A(k)\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – линейный, ограниченный и обратимый оператор.

Для системы (1) решается задача быстродействия: для некоторого заданного $x(0) = x_0$ требуется построить набор допустимых управлений, переводящих систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов N_{min}. Предполагается, что $N_{min} < \infty$. Решение поставленной задачи базируется на использовании аппарата множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N,k)\}_{N,k=0}^{\infty}$, где $\mathcal{X}(N,k)$ представляет собой множество состояний системы (1), для которых существует управление, переводящее систему, начиная с шага $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в начало координат за N шагов:

$$\mathcal{X}(N,k) = \begin{cases} \{x(k) \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(k) \in \mathcal{U}(k), \ldots, \\ \ u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1) \colon x(N+k) = 0\},\ N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, N = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Одним из существенных допущений является принадлежность множеств допустимых значений управлений $\{\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ классу строго выпуклых и слабо компактных множеств. В этом случае удается сформулировать и доказать критерий оптимальности управления для граничных точек множеств 0-управляемости в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (Принцип макисмума). *Пусть* $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min}, 0)$, $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{L}^*$, $\{u(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1} \subset \mathbb{L}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &\psi(k+1) = (A^{-1})^*\psi(k),\ \psi(0) = \psi_0, \\ &u(k) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}(k)} ((A^{-1})^*\psi(k), u),\ k = \overline{0, N_{min}-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда набор управлений $\{u(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$ *оптимален в задаче быстродействия тогда и только тогда, когда* $-\psi_0 \in \mathcal{N}(x^*(0), \mathcal{X}(N_{min}, 0))$. *Оптимальная траектория системы* $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$ *единственна и удовлетворяет условию*

$$x^*(k) \in \partial\mathcal{X}(N_{min}-k, k),\ k = \overline{0, N_{min}}.$$

В случае, когда $x_0 \in \operatorname{int}\ \mathcal{X}(N_{min}, 0)$, принцип максимума приобретает вырожденный характер: оптимальное по быстродействию управление в этом случае удовлетворяет соотношениям (3) тогда и только тогда, когда $\psi_0 = 0$. Тем не менее удается построить оптимальное управление для системы (1), решая задачу быстродействия для вспомогательной системы с последовательностью множеств допустимых значений управлений $\{\alpha \cdot \mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$, где $\alpha = \min\{t > 0 \colon x_0 \in t \cdot \mathcal{X}(N_{min})\}$. В силу включения $x_0 \in \partial\mathcal{X}_\alpha(N_{min}, 0)$ оказывается возможным свести случай внутренней точки к условиям теоремы (1).

[20] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-08-00128-а.

Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере решения задачи коррекции движения спутника. Предполагается, что управление движением спутника осуществляется посредством двигателей импульсной тяги. Корректирующие импульсы исполняются без ошибок через равные промежутки времени. Требуется за минимальное число корректирующих импульсов вернуть спутник на исходную круговую орбиту, с которой он сошел.

Литература

[1] Ибрагимов Д.Н. Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // Труды МАИ. 2017. №94.

[2] Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // Автоматика и Телемеханика. 2017. №10. С.3–32.

[3] Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О решении задачи быстродействия линейной бесконечномерной дискретной системой с ограниченным управлением // Сборник тезисов докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 8–12 июля 2016 г., Суздаль. – М.: МИАН, 2016. С.75–76.

Неподвижная вращающаяся частица в поле Максвелла: устойчивость солитонных решений

Имайкин В.М. (Россия, Королев)
ГБОУ г. Москвы "Школа № 179"
ivm61@mail.ru

Система уравнений, описывающая неподвижную вращающуюся частицу в поле Максвелла (с релятивистской угловой скоростью), имеет вид, см. [1,2]:

$$E(-x,t) = -E(x,t), \;\; B(-x,t) = B(x,t), \tag{1}$$

$$\dot{E}(x,t) = \nabla \wedge B(x,t) - (\omega(t) \wedge x)\rho(x), \;\; \dot{B}(x,t) = -\nabla \wedge E(x,t), \tag{2}$$

$$\nabla \cdot E(x,t) = \rho(x), \;\; \nabla \cdot B(x,t) = 0, \tag{3}$$

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega(t)^2}}\,, \quad I\dot{\Omega}(t) = \int x \wedge [E(x,t) + (\omega(t) \wedge x) \wedge B(x,t)]\rho(x)\,dx, \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $(E(x,t), B(x,t)) \in \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ — электромагнитное поле, $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость вращения частицы, $\rho(x) \in \mathbb{R}$ — плотность заряда частицы, $I = \frac{2}{3}\int x^2\rho(x)\,dx$ — момент инерции частицы.

Введем пространство с весом $\mathbf{H}^0_1 := \{E \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) : \int |x||E(x)|^2\,dx < \infty\}$, с нормой $\|E\|_1^2 = \int |x||E(x)|^2\,dx$. Фазовое пространство $\mathcal{M}$ системы (1)–(4) определим как нелинейное многообразие состояний $\{(E(x), B(x), \omega) \in \mathbf{H}^0_1 \oplus \mathbf{H}^0_1 \oplus \mathbb{R}\}$, для которых выполнены условия (1) и (3).

Пусть $(\rho, \nabla\rho) \in L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\rho(x) = 0$ при $|x| > R_\rho > 0$, $\rho(x) = \rho_r(|x|)$. При этих условиях регулярности и симметрии для начальных данных из $\mathcal{M}$ существует динамика системы (1)–(4) в $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$, причем $|\omega(t)| \le \overline{\omega} < 1$, $t \in \mathbb{R}$, энергия

$$H(t) := \frac{1}{2}I\omega(t)^2 + \frac{1}{2}\int |E(x,t)|^2 + |B(x,t)|^2 dx \equiv H(0), \;\; t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

сохраняется, угловой момент

$$M(t) := I\omega(t) + \int x \wedge (E(x,t) \wedge B(x,t))\,dx \equiv M(0), \;\; t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

также сохраняется. Заметим что полный импульс $P(t) := \int E(x,t) \wedge B(x,t)\,dx \equiv 0$ ввиду условий (1).

Система (1)–(4) инвариантна относительно вращений в $\mathbb{R}$ и имеет решения специального вида, называемые *солитонами*: $E(x,t) = E_\omega(x)$, $B(x,t) = B_\omega(x)$, $\omega(t) = \omega = const \in \mathbb{R}$. В Фурье-представлении солитонные поля имеют вид. см. [1,2]:

$$\hat{E}_\omega(k) = \frac{-ik\hat{\rho}(k)}{k^2}, \quad \hat{B}_\omega(k) = -\frac{k \wedge (\omega \wedge \nabla_k \hat{\rho}(k))}{k^2}. \tag{7}$$

Обозначим $H(E, B, M_\omega) := H(E, B, \tilde{\omega})$, где $\tilde{\omega}$ выражена из равенства $M = M_\omega$, т.е.

$$I\tilde{\omega} + \int x \wedge (E \wedge B)\, dx = I\omega + \int x \wedge (E_\omega \wedge B_\omega)\, dx.$$

Теорема 1. *Положим $E = E_\omega + e$, $B = B_\omega + b$, e нечетно по x, b четно x; $\nabla \cdot e = 0$, $\nabla \cdot b = 0$. Тогда для достаточно малого $c > 0$ справедлива оценка*

$$H(E, B, M_\omega) - H(E_\omega, B_\omega, M_\omega) \geq c \int (|e|^2 + |b|^2) dx$$

для таких возмущений e, b, что $|\int x \wedge (e \wedge b)\, dx| \leq \frac{1}{2} \int (|e|^2 + |b|^2)\, dx$.

Из этой оценки следует орбитальная устойчивость солитонов:

Теорема 2. *Рассмотрим солитонное решение $(E_\omega, B_\omega, \omega)$. Рассмотрим возмущение (e, b) из указанного в Теореме 1 класса, а также начальную угловую скорость ω_0; положим* $\delta := \|e\|_1 + \|b\|_1 + |\omega_0 - \omega|$. Пусть $(E(x,t)), B(x,t), \omega(t))$ — решение с начальными данными $(E_\omega + e, B_\omega + b, \omega_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\|E(\cdot, t) - E_\omega\|_{L^2} + \|B(\cdot, t) - B_\omega\|_{L^2} + |\omega(t) - \omega| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

при $\delta < \delta(\varepsilon)$.

Литература

[1] Imaikin V., Komech A., Spohn H. Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit // Monatshefte für Mathematik. 2004. V. 142, №1-2. P. 143–156.

[2] Spohn H. Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field. Cambridge University Press, 2004.

Связь между базисными множествами А-эндоморфизмов и А-диффеоморфизмов Смейла-Виеториса

Исаенкова Н.В. (Россия)
Нижегородская Академия МВД России
nisaenkova@mail.ru

В докладе рассматривается класс А-диффеоморфизмов Смейла-Виеториса, которые определяются с помощью базовых А-эндоморфизмов многообразий, размерность которых меньше размерности несущих многообразий А-диффеоморфизмов. Класс диффеоморфизмов Смейла-Виеториса содержит ДЕ-отображения Смейла. Показано, что имеется взаимно однозначное соответствие между базисными множествами базового А-эндоморфизма и А-диффеоморфизма Смейла-Виеториса. Для назад-инвариантного базисного множества базового А-эндоморфизма приводится точное описание соответствующего нетривиального базисного множества А-диффеоморфизма Смейла-Виеториса.

Примеры моделей со смешанной динамикой

Казаков А.О. (Россия, Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
kazakovdz@yandex.ru

В настоящий момент считается, что наряду с консервативным (гамильтоновым) хаосом, характерным для консервативных неинтегрируемых систем, и странными аттракторами, присущими диссипативным системам, существует третий тип хаоса – смешанная динамика. Если для консервативного хаоса аттрактор совпадает с репеллером ($\mathcal{A} = \mathcal{R}$), для диссипативного хаоса аттрактор не пересекается с репеллером ($\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$), то для смешанной динамики аттрактор пересекается с репеллером, но не совпадает с ним ($\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset, \mathcal{A} \neq \mathcal{R}$) [1].

В докладе будет объяснено, как аттракторы могут пересекаться с репеллерами, будут описаны возможные сценарии возникновения такого явления в обратимых системах. В качестве примеров моделей, в которых смешанная динамика является типичным явлением, будут рассматриваться: задача о движений двух вихрей, находящихся под воздействием волнового возмущения, неголономный волчок Суслова и некоторые другие модели.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01041.

Литература

[1] Гонченко С.В., Тураев Д.В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды Математического института имени ВА Стеклова. 2017. Т. 297. С. 133–157.

Квазистационарные приближения для системы уравнений Максвелла и математические задачи атмосферного электричества

Калинин А.В. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
avk@mm.unn.ru
Милешин И.Г. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
komrad.mileshin@yandex.ru
Тюхтина А.А. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
kalinmm@yandex.ru

В связи с важным прикладным значением и интенсивными исследованиями, связанными с разработкой численных алгоритмов, особый интерес вызывает теоретическое изучение математических задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарных приближениях. В частности, если проводимость достаточно высока, можно пренебречь током смещения и такое приближение называется нерелятивистским магнитным приближением, или квазистационарным магнитным приближением. В средах с малой проводимостью можно пренебречь изменением во времени магнитного поля, в этом случае рассматривается нерелятивистское электрическое приближение.

В настоящей работе обсуждается корректность квазистационарных приближений и рассматриваются математические постановки начально-краевых задач в квазистационарных приближениях в существенно неоднородных средах. Доказываются теоремы о существовании и решении поставленных задач. Обсуждается возможность применения рассматриваемых задач к теории атмосферного электричества, в частности, рассматриваются задачи о глобальной электрической цепи.

При изучении электрических процессов во всей атмосфере проводимость резко меняется и требуются постановки, охватывающие оба случая квазистационарных приближений. В работе обсуждается соответствующий новый класс задач.

Прямые и обратные задачи для системы уравнений Максвелла в нерелятивистском магнитном приближении

Калинин А.В. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
avk@mm.unn.ru

Сумин М.И. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
m.sumin@mm.unn.ru

Тюхтина А.А. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
kalinmm@yandex.ru

Нерелятивистское магнитное приближение (квазистационарное магнитное приближение) для системы уравнений Максвелла [1] находит своё применение при исследовании широкого класса современных технологических проблем [2,3]. В настоящей работе рассматриваются прямые и обратные задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в неограниченной области, содержащей проводящие и непроводящие включения при общих условиях на коэффициенты системы. Формулируются начально-краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа [4], описывающих напряженность магнитного поля. Свойства решений поставленных задач исследуются с использованием полученных в [5] неравенств для скалярных произведений векторных полей.

Выделен класс задач о восстановлении источников и начальных данных по известной с определенной погрешностью конфигурации магнитного поля в конечный момент времени. Особенностью изучения обратных задач электродинамики в неоднородных средах является то, что функциональные пространства, в которых ищется решение, зависят от параметров, характеризующих физические свойства среды и задаваемых, вообще говоря, с некоторой погрешностью. Обсуждаются вопросы конструирования на основании методов двойственной регуляризации [6]–[8] алгоритмов решения поставленных обратных задач, устойчивых к ошибкам начальных данных и коэффициентов системы.

Литература

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 1982.

[2] Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. М.: Мир, 1988.

[3] Alonso Rodriguez A., Valli A. Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.

[4] Arnold L., Harrach B. A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72. P. 558–76.

[5] Калинин А. В., Жидков А. А., Тюхтина А. А. L_p-оценки векторных полей в неограниченных областях и некоторые задачи электромагнитной теории в неоднородных средах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. №1. С. 3–14.

[6] Сумин М. И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Ж. вычислит. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 25—49.

[7] Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А. Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 608—624.

[8] Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А. Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 2. С. 18–40.

О фредгольмовости одного класса линейных уравнений с частными интегралами в пространстве $L^1(D)$

Калитвин А.С. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
kalitvinas@mail.ru

Работа содержит условия фредгольмовости в пространстве суммируемых функций $L^1(D)$ линейного интегрального уравнения с частными интегралами

$$x(t,s) = (L+M+N)x(t,s) + f(t,s), \tag{1}$$

где операторы L, M и N определяются равенствами

$$(Lx)(t,s) = \int_0^1 l(t,s,\tau)p(t-\tau,s)x(\tau,s)d\tau,$$

$$(Mx)(t,s) = \int_0^1 m(t,s,\sigma)q(t,s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_0^1\int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)r(t-\tau,s-\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

в которых $t,s \in [0,1]$, функции $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны на $D=[0,1]\times[0,1]$, $D\times[0,1]$, $D\times[0,1]$, $D\times D$ соответственно, функция $p(u,s)$ определена на $[-1,1]\times[0,1]$ и чётна по $u\in[-1,1]$, функция $q(t,v)$ определена на $[0,1]\times[-1,1]$ и чётна по $v\in[-1,1]$, функция $r(u,v)$ определена на $[-1,1]\times[-1,1]$ и удовлетворяет условию $r(-u,-v)=r(u,v)$, а функция f суммируема на D.

Предполагается конечность выражений

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_{-1}^1 |p(u,s)|du,\ \ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{-1}^1 |q(t,v)|dv, \int_{-1}^1\int_{-1}^1 |r(u,v)|dudv \tag{2}$$

и выполнение следующего условия (A): для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что при $|t_1-t_2|<\delta$, $|s_1-s_2|<\delta$

$$\int_0^1 |l(t_1,s_1,\tau)p(t_1-\tau,s_1) - l(t_2,s_2,\tau)p(t_2-\tau,s_2)|d\tau < \varepsilon,$$

$$\int_0^1 |m(t_1,s_1,\sigma)q(t_1,s_1-\sigma) - m(t_2,s_2,\sigma)q(t_2,s-\sigma)|d\sigma < \varepsilon,$$

$$\int_0^1\int_0^1 |n(t_1,s_1,\tau,\sigma)r(t_1-\tau,s_1-\sigma) - n(t_2,s_2,\tau,\sigma)r(t_2-\tau,s_2-\sigma)|d\tau d\sigma < \varepsilon.$$

При сделанных предположениях операторы L, M, N и $L+M+N$ действуют в $C(D)$ и в $L^1(D)$ и непрерывны. Уравнение (1) не является фредгольмовым даже в общем случае непрерывных заданных функций [1], [2]. Отметим, что условия фредгольмовости линейных уравнений с частными интегралами в пространстве суммируемых функций до настоящего времени исследованы недостаточно, хотя такие уравнения имеют многочисленные приложения в задачах механики сплошных сред, теории упругих оболочек, дифференциальных и интегро

- дифференциальных уравнений с частными производными, при изучении ряда других вопросов.

Через $L(s)$ и $M(t)$ обозначим операторы

$$L(s)x(t) = \int\limits_0^1 l(t,s,\tau)p(t-\tau,s)x(\tau)d\tau \ (s \in [0,1]),$$

$$M(t)x(s) = \int\limits_0^1 m(t,s,\sigma)q(t,s-\sigma)x(\sigma)d\sigma \ (t \in [0,1]).$$

Справедлива

Теорема 1. *Если l,m,n — непрерывные функции и выполнены условия (2) и (A), то в* $L^1(D)$ *фредгольмовость уравнений* $(I-L)x = f$ *и* $(I-M)x = f$ *равносильна их обратимости и обратимости в* $L^1([0,1])$ *уравнений* $(I-L(s))x(t) = f(t)$ $(s \in [0,1])$ *и* $(I-M(t))x(s) = f(s)$ $(t \in [0,1])$ *соответственно, а фредгольмовость в* $L^1(D)$ *уравнения (1) равносильна обратимости в* $L^1([0,1])$ *уравнений* $(I-L(s))x(t) = f(t)$ $(s \in [0,1])$ *и* $(I-M(t))x(s) = f(s)$ $(t \in [0,1])$.

Литература

[1] Калитвин А. С., Калитвин В. А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006.

[2] Калитвин А. С., Фролова Е. В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ЛГПУ, 2004.

О системах линейных уравнений типа Романовского с частными интегралами

Калитвин А.С. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
kalitvinas@mail.ru
Калитвин В.А. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
kalitvin@gmail.com
Трусова Н.И. (Россия, Липецк)
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
trusova.nat@gmail.com

В 1932 году известный советский математик В.И. Романовский описал задачу теории марковских цепей с двухсторонней связью, которая приводится к уравнению

$$x(t,s) = \int\limits_a^b m(t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma + f(t,s) \equiv (Rx)(t,s) + f(t,s). \qquad (1)$$

Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно содержат частный интеграл, в котором у неизвестной функции сначала переставляются переменные и лишь затем производится интегрирование по одной из переменных. Поэтому линейный оператор R из уравнения (1) не является ни интегральным и ни компактным оператором. Уравнение (1) с непрерывным ядром $m(t,s,\sigma)$ было исследовано В.И.Романовским в [1] методом, аналогичным методу определителей Фредгольма.

Отметим, что более общие классы линейных интегральных уравнений типа Романоского при более общих предположениях относительно ядер изучались в [2].

В [3] исследовались системы линейных интегральных уравнений Романовского.

В данной работе изучаются системы линейных уравнений, содержащие линейные операторы с частными интегралами и линейные операторы типа оператора R.

Пусть $D = [a,b] \times [a,b]$, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, $C_n(D)$ — пространство непрерывных вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s), \ldots, x_n(t,s))$, где $x_j \in C(D)$, $j = 1, \ldots, n$. Через $C(L^1)$ обозначим пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в $L^1 = L^1([a,b])$. В $C_n(D)$ рассмотрим систему

$$x_i(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b l_{ij}(t,s,\tau) x_j(\tau,s) d\tau + \int_a^b m_{ij}(t,s,\sigma) x_j(\sigma,t) d\sigma \right) + f_i(t,s), i = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

Будем называть уравнение $x = Ax + f$, где A — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X и $f \in X$, обратимым (фредгольмовым) уравнением в X, если оператор $I - A$ обратим (фредгольмов, т.е. имеет нулевой индекс).

Теорема 1. *Пусть $l_{ij}, m_{ij} \in C(L^1)$ и $f_i \in C(D)$ $(i,j = 1, \ldots, n)$. Тогда в $C_n(D)$ фредгольмовость системы (2) равносильна фредгольмовости системы*

$$x_i(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b l_{ij}(t,s,\tau) x_j(\tau,s) d\tau + f_i(t,s), i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Пусть $l_{ij}, m_{ij} \in C(L^1)$ и $f_i \in C([a,b])$ $(i,j = 1, \ldots, n)$. Тогда фредгольмовость системы (2) в $C_n(D)$ равносильна обратимости в $C_n([a,b])$ при каждом $s \in [a,b]$ следующей системы интегральных уравнений с параметром s :*

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b l_{ij}(t,s,\tau) x_j(\tau) d\tau + f_i(t), i = 1, \ldots, n.$$

Утверждения теорем 1 и 2 справедливы для системы (2) с непрерывными ядрами l_{ij}, m_{ij} $(i,j = 1, \ldots, n)$ и ядрами типа потенциала.

Литература

[1] Romanovskij V. I. Sur une classe d'equations integrales lineares// Acta Math. 1932. Vol. 59. P. 99–208.

[2] Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2014. 196 с.

[3] Калитвин А. С., Калитвин В. А., Трусова Н. И. Системы интегральных уравнений Романовского с частными интегралами // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 6 (227). Вып. 42. Март 2016. С. 45–49.

О разрешимости линейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина с частной производной второго порядка

Калитвин В.А. (Россия, Липецк)
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
kalitvinas@gmail.com

В данной заметке рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = c(t,s)x(t,s) + l(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + \int_c^d m(t,s,\sigma)\frac{\partial x(t,\sigma)}{\partial t} d\sigma +$$

$$+ \int_c^d n(t,s,\sigma) x(t,\sigma) d\sigma + f(t,s) \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$x(a,s)=\varphi(s), x'_t(a,s)=\psi(s). \tag{2}$$

Предполагается, что $t\in J=[a,b]$, $s\in[c,d]$, $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, заданные функции $l,l'_t,m,m',c,f,n,\varphi,\psi$ непрерывны, а решением задачи (1)-(2) считается непрерывная на $J\times[c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая интегро-дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям (2).

Задача (1)-(2) сводится к интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s)=\int\limits_a^t l(\tau,s)x(\tau,s)d\tau+\int\limits_a^t\int\limits_a^\tau \tilde{l}(\tau_1,s)x(\tau_1,s)d\tau_1 d\tau+$$

$$+\int\limits_a^t\int\limits_a^\tau\int\limits_c^d \tilde{n}(\tau_1,s,\sigma)x(\tau_1,\sigma)d\tau_1 d\sigma d\tau+p(t,s), \tag{3}$$

где

$$\tilde{l}(\tau,s)=-\frac{\partial l(\tau,s)}{\partial\tau}+c(\tau,s),\ \tilde{n}(\tau,s,\sigma)=-\frac{\partial m(\tau,s,\sigma)}{\partial\tau}+n(\tau,s,\sigma),$$

$$p(t,s)=\varphi(s)+\int\limits_a^t h(\tau,s)d\tau,$$

$$h(t,s)=\psi(s)+\int\limits_a^t f(\tau,s)d\tau-l(a,s)\varphi(s).$$

Задача (1)-(2) эквивалентна интегральному уравнению (3), если под решением уравнения (3) понимается непрерывная вместе с $x'_t(t,s)$ функция $x(t,s)$.

Пусть $D=[a,b]\times[c,d]$, $C(D)$, $C(D\times[c,d])$ и $C([c,d])$ — пространства непрерывных на D, $D\times[c,d]$ и $[c,d]$ соответственно функций.

Теорема 1. *Если функции $l,l'_t,c,f\in C(D)$, $m,m',n\in C(D\times[c,d])$, $\varphi,\psi\in C([c,d])$, то уравнение (3) имеет единственное непрерывное на D вместе с $x'_t(t,s)$ решение*

$$x(t,s)=\int\limits_a^t r_1(t,s,\tau)p(\tau,s)d\tau+\int\limits_a^t\int\limits_c^d r_2(t,s,\tau,\sigma)p(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+p(t,s), \tag{4}$$

где $r_1(t,s,\tau)$ и $r_2(t,s,\tau,\sigma)$ — непрерывные резольвентные ядра.

Отметим, что в силу [1], [2] резольвентные ядра записываются в виде

$$r_1(t,s,\tau)=\sum_{p=1}^\infty l^{(p)}(t,s,\tau),\ r_2(t,s,\tau,\sigma)=\sum_{p=1}^\infty n^{(p)}(t,s,\tau,\sigma),$$

где

$$l^{(1)}(t,s,\tau)=l(\tau,s)+(t-\tau)\tilde{l}(\tau,s),\ l^{(p)}(t,s,\tau)=\int\limits_\tau^t l^{(1)}(t,s,u)l^{(p-1)}(u,s,\tau)du,$$

$$n^{(1)}(t,s,\tau,\sigma)=(t-\tau)\tilde{n}(\tau,s,\sigma),\ n^{(p)}(t,s,\tau,\sigma)=\int\limits_\tau^t l^{(1)}(t,s,u)n^{(p-1)}(u,s,\tau,\sigma)du+$$

$$\int\limits_\tau^t n^{(1)}(t,s,u,\sigma)l^{(p-1)}(u,\sigma,\tau)du+\int\limits_\tau^t\int\limits_c^d n^{(1)}(t,s,u,v)n^{(p-1)}(u,v,\sigma,\tau,\sigma)dudv.$$

Из теоремы 1 и эквивалентности задачи (1)-(2) интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами (4) вытекает

Теорема 2. *Пусть функции $l,l'_t,c,f\in C(D)$, $m,m',n\in C(D\times[c,d])$, $\varphi,\psi\in C([c,d])$. Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение.*

Литература

[1] Калитвин А. С., Калитвин В. А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006.

[2] Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

Анализ модели для системы ядерных спинов в антиферромагнетике

Калякин Л.А. (Россия, Уфа)
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
klenru@mail.ru

Цель доклада – анализ уравнений для модели ядерной намагниченности антиферромагнетика в той форме, которая недавно была представлена в работе [1]. После перенормировки переменных уравнения приводятся к виду

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda - z)y - Bzx, \;\; \frac{dy}{dt} = -(\lambda - z)x - Bzy - Az, \;\; \frac{dz}{dt} = B(1 - z^2) + Ay, \tag{1}$$

где A, B, λ – три независимых безразмерных параметра. Система имеет частный интеграл $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Поэтому на единичной сфере она сводится к двум уравнениям, которые в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\frac{dz}{dt} = B(1 - z^2) - A\sqrt{1 - z^2}\sin\psi, \;\; \frac{d\psi}{dt} = \lambda - z + A\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\cos\psi.$$

Последняя система связана с уравнениями Ландау-Лифшица предельным переходом. Модель Ландау-Лифшица для ферромагнетика в магнитном поле с продольной компонентой h_0 и быстро вращающейся поперечной компонентой h_1 может быть приведена к форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dT} &= \gamma h_1\sqrt{1 - z^2}\sin\psi + \frac{b}{M_0}h_0(1 - z^2) - \frac{b}{M_0}h_1 z\sqrt{1 - z^2}\cos\psi + \frac{b}{M_0}\frac{2K}{M_0}(1 - z^2), \\ \frac{d\psi}{dT} &= \gamma h_0 - \omega + \gamma\frac{2K}{M_0}z - \gamma h_1\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\cos\psi + \frac{b}{M_0}h_1\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\sin\psi. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\gamma, b, K = \text{const} \geq 0$, соответствующие гиромагнитному отношению, параметру релаксации и коэффициенту одноосной анизотропии; $M_0 = \text{const} > 0$. Условия приближенного перехода к более простой модели (1):

$$\frac{b}{M_0}/\gamma \approx \frac{2K}{M_0}h_0 \approx h_1/h_0 \ll 1;$$

они соответствуют малому затуханию и сильному продольному полю. При переходе следует изменить масштаб времени.

Предельный переход от модели Ландау-Лифшица (2) к модели (1) возможен лишь на единичной сфере. Вне этой сферы уравнения отличаются радикально. В частности, существует конус в пространстве $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, в котором траектории системы (1) уходят на бесконечность, тогда как все траектории уравнений Ландау-Лифшица лежат на сферах.

Все стационарные решения (положения равновесия) системы (1) находятся на единичной сфере. Для них исследована зависимость от параметров A, B, λ. Найдена бифуркационная поверхность, на которой меняется число таких решений. Полностью устойчивые равновесия бывают лишь на верхней полусфере. Тем не менее, на нижней полусфере может случиться равновесие, устойчивое относительно возмущений на сфере; этот факт был указан в [2].

Литература

[1] Борич М. А., Буньков Ю. М., Куркин М. И., Танкеев А. П. Ядерная магнитная релаксация, наведенная релаксацией электронных спинов // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 105, вып. 1. С. 23–27.

[2] Калякин Л. А., Шамсутдинов М. А. Адиабатические приближения для уравнений Ландау–Лифшица // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. №2. С. 104–119.

Устойчивость точек покоя дискретных систем в критическом случае

Канатников А.Н. (Россия, Москва)
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

При исследовании точек покоя динамических систем особым является вырожденный случай, в котором заключение об устойчивости нельзя сделать на основании системы первого приближения. Для системы дискретного времени $x_{n+1} = F(x_n)$, где $F\colon X \to X$ — непрерывное отображение множества $X \in \mathbb{R}^n$, вырожденным является случай, когда некоторые собственные значения матрицы Якоби в точке покоя попадают на единичную окружность, а остальные находятся в единичном круге.

В критическом случае сделать заключение об устойчивости точки покоя можно, предъявив функцию Ляпунова [1]. Однако построение функции Ляпунова в общем случае — сложная и нетривиальная задача. Метод функций Ляпунова базируется на построении с помощью функции Ляпунова положительно инвариантных окрестностей точки, существование которых и приводит к заключению об устойчивости или асимптотической устойчивости. Возникает идея проводить анализ устойчивости путем непосредственного построения и исследования положительно инвариантных множеств [2]. Следующие две теоремы дают критерии устойчивости и асимптотической устойчивости точки покоя дискретной системы в терминах инвариантности множеств.

Множество $M \subset X$ назовем положительно (отрицательно) инвариантным, если $F(M) \subset M$ $(F(M) \supset M)$. Множество $M \subset X$ инвариантно, если оно и положительно инвариантно, и отрицательно инвариантно, т.е. $F(M) = M$.

Теорема 1. *Положение равновесия x_0 дискретной системы устойчиво тогда и только тогда, когда в любой окрестности G точки x_0 можно выбрать положительно инвариантное множество K, для которого точка x_0 является внутренней.*

Теорема 2. *Положение равновесия x_0 дискретной системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда: 1) в любой окрестности G точки x_0 существует положительно инвариантное множество K, для которого точка x_0 является внутренней; 2) существует окрестность точки x_0, в которой точка x_0 — единственный отрицательно инвариантный компакт.*

Проверка условий сформулированных теорем может выполняться с помощью теоретико-множественных операций. Пусть $G \subset X$ — некоторое множество. Рассмотрим последовательность множеств $G_0 = G$, $G_n = G_{n-1} \cap F^{-1}(G_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $G_\infty = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n$.

Теорема 3. *Множество G_∞ положительно инвариантно и является максимальным положительно инвариантным множеством, целиком содержащимся в G.*

Пусть $W \subset X$ — компактное множество. Рассмотрим последовательность множеств $W_0 = W$, $W_n = W_{n-1} \cap F(W_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $W_\infty = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} W_n$.

Теорема 4. *Множество W_∞ — отрицательно инвариантный компакт системы $\tilde{x} = F(x)$, причем это максимальное отрицательно инвариантное множество, целиком содержащееся в W.*

Построение множеств G_∞ и W_∞ для произвольной ограниченной окрестности точки покоя позволяет проверить критерии устойчивости. Например, если для любой окрестности G точки покоя x_0 точка x_0 является внутренней для соответствующего множества G_∞, то x_0 устойчива. Если же существует окрестность G точки x_0, для которой x_0 является граничной точкой G_∞, то точка x_0 неустойчива. Множество W_∞ аналогичным образом позволяет проверить второе условие теоремы 2 об асимптотической устойчивости.

Использование теорем 1–4 иллюстрируется примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-07-00269).

Литература

[1] LaSalle J.P. The Stability and Control of Discrete Processes. New York: Springer, 1986.

[2] Крищенко А.П. Анализ асимптотической устойчивости автономных систем методом локализации инвариантных компактов // Докл. Академии наук. 2016. Т. 469. №1. С. 17–20.

Асимптотическое поведение и аттрактор для систем, описывающих двумерные вязкоупругие течения

Каразеева Н. А. (Россия, Санкт-Петербург)
С.-Петербургское отделение Математического института
karazeev@pdmi.ras.ru

В работе рассматриваются уравнения движения линейных вязкоупругих жидкостей вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v - \int_0^t K(t-\tau)\Delta v(x,\tau)\, d\tau + \nabla p = f(x,t) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{2}$$

Здесь ядро K представлено в виде суммы экспоненциального ряда

$$K(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s e^{-\alpha_s \tau}, \quad \alpha_s, \beta_s > 0. \tag{3}$$

Система рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C$. В цилиндре $Q_T = \Omega \times [0,T]$ ставится начально-краевая задача с условием прилипания

$$v(x,0) = v_0(x); \quad v(x,t)|_{x \in \partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Данная начально-краевая задача имеет единственное глобальное по времени решение. Этот факт вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f, f_t \in L_{2,1}(Q_T)$, $v_0 \in W_2^2(\Omega) \cap \mathring{J}(\Omega)$. Коэффициенты α_s, β_s удовлетворяют условиям*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \beta_s < \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s}{\alpha_s} < \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s \alpha_s < \infty.$$

Тогда начально-краевая задача (1),(2),(4) с оператором свертки, имеющим вид (3), разрешима, то есть существует и единственно решение v такое, что $v \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, кроме того $v_x, v_{xt} \in L_2(Q_T)$.

Доказывается, что полугруппа разрешающих операторов V_t асимптотически компактна и операторы V_t могут быть представлены в виде суммы $V_t = W_t + U_t$, где W_t - экспоненциально сжимающая полугруппа, а операторы U_t компактны.

Строится поглощающее множество и аттрактор для данной начально-краевой задачи. Утверждается, что аттрактор является компактным связным множеством и его Хаусдорфова размерность конечна.

Литература

[1] Ladyzhenskaya O. A, Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge Univ. Press, 1991.

Функция Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона

Карачик В.В. (Россия, Челябинск)
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
karachik@susu.ru

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре при $n > 2$ имеет вид

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) - E\Big(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\Big),$$

где $E(x,\xi) = (n-2)^{-1}|x-\xi|^{2-n}$ – элементарное решение уравнения Лапласа [1]. Имеется много работ, которые посвященны построению функции Грина для различных областей и задач, например, в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений [2], задачи Неймана для уравнения Пуассона в полупространстве, задачи Робена в круге и т.д. В работе [3] дано представление функции Грина для третьей краевой задачи в круге. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения Пуассона в шаре

$$\Delta u(x) = f(x),\, x \in S; \quad \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u\Big)\Big|_{\partial S} = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f \in C^1(\overline{S})$ и $\lambda > 0$. Тогда решение задачи (1) можно представить в виде*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_\lambda(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где функция Грина $\mathcal{N}_\lambda(x,\xi)$ имеет вид

$$\mathcal{N}_\lambda(x,\xi) = E(x,\xi) - E_\lambda(x,\xi),$$

функция $E_\lambda(x,\xi)$ записывается в форме

$$E_\lambda(x,\xi) = \int_0^1 \hat{E}_\lambda\Big(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\Big) t^{\lambda-1}\, dt$$

и $\hat{E}_\lambda(x,\xi) = (\Lambda_x + \lambda)E(x,\xi)$, причем $\Lambda_x = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Следствие. Если $H_s(x)$ – однородный гармонический полином степени s, то

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_\lambda(x,\xi)|\xi|^{2k} H_s(\xi)\, d\xi = \frac{|x|^{2k+2} - (2k+2+s+\lambda)/(s+\lambda)}{(2k+2)(2k+2s+n)} H_s(x).$$

Доказательство теоремы опирается на результаты работ [4,5].

Основной результат дополняет следующая теорема.

Теорема 2. *Функция Неймана $\mathcal{N}(x,\xi)$ задачи (1) при $\lambda = 0$ имеет вид*

$$\mathcal{N}(x,\xi) = E(x,\xi) - E_0(x,\xi),$$

где функция $E_0(x,\xi)$ записывается в форме

$$E_0(x,\xi) = \int_0^1 \Big(\hat{E}\Big(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\Big) + 1\Big)\frac{dt}{t}$$

и $\hat{E}(x,\xi) = \Lambda_x E(x,\xi)$.

Литература

[1] Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

[2] Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. V. 58, No 1. P. 7—22.

[3] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6, No 3. P. 163–172.

[4] Карачик В.В., Антропова Н.А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. XV, № 2. С. 86–98.

[5] Карачик В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1038–1047.

О корректности промежуточных моделей в задачах теплопроводности

Качалкин И. О. (Россия, Москва)
ООО "Яндекс. Технологии"
xikxp1@gmail.com
Филимонов А. М. (Россия, Москва)
Российский университет транспорта (МИИТ)
amfilimonov@yandex.ru

Обычно уравнение теплопроводности получается путем объединения уравнения неразрывности $\rho_t + \mathrm{div}\bar{J} = f$, где ρ - температура, $\bar{J}$ - плотность потока, а f - плотность внешних источников, с законом Фурье $\bar{J} = -a^2\nabla\rho + \bar{V}\rho$, где $\bar{V}$ - скорость переноса. Однако, в некоторых работах (см., например, [1]) вместо закона Фурье используется аналогичный закон с отклонением по времени:

$$\bar{J}(x, t+\tau) = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t)$$

При этом получается аналог уравнения теплопроводности в виде функционально-дифференциального уравнения с частными производными. Уравнения такого типа рассматривались [2]. В частности, в [2] показано, что решения уравнения теплопроводности с отклонением аргумента, обладают некоторым свойством, названным авторами нестабильностью ("unstable"). Наличие этого свойства ставит под сомнение использование упомянутого уравнения в качестве математической модели физического явления. Однако, остается возможность рассмотрения "промежуточное" (“intermediate” - по терминологии [3]) уравнения, не содержащего отклонения аргумента, но, быть может, все же отражающего некоторые свойства уравнения с отклонением аргумента ([4]). Такое уравнение можно получить путем формального разложения по величине запаздывания (считая ее малой) и оставления конечного числа слагаемых. В линейном случае, например, в задаче о колебаниях цепочки, подобный прием был использован в [3], причем оказалось, что задача корректна, если "промежуточное" уравнение имеет порядок, равный удвоенному нечетному числу.

В рассмотренном нами случае такое "промежуточное" уравнение имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}}\frac{\tau^k}{k!} - a^2\Delta\rho + \rho\mathrm{div}\bar{V} + (\bar{V}, \nabla\rho) = \sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\frac{\tau^k}{k!}$$

Полагая для простоты $\bar{V} = 0$, $f = 0$, ограничиваясь одномерным случаем, после замены $\rho(x,t) = e^{\xi x}u(x,t)$, получаем уравнение

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^{k+1}u}{\partial t^{k+1}}\frac{\tau^k}{k!} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V^2}{4a^2}u = 0 \tag{1}$$

Для этого уравнения рассмотрим краевые условия Дирихле,и, разделяя обычным образом переменные ($u(x,t) = T(t)X(x)$), приходим к уравнению

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\tau^k}{k!} T^{(k+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2\right)}_{\gamma} T = 0 \tag{2}$$

Теорема 1. *Решения уравнения (2) при произвольном* $\gamma > 0$ *устойчивы только при* $m = 1$.

Для уравнения (1) это означает, что при $m > 1$ соответствующая задача не будет корректно поставленной (легко построить пример типа примера Адамара). Отметим, в частности, что в [1] изучен случай "промежуточное" уравнения только при $m = 1$ (в этом случае в [1] получен гиперболический вариант задачи Стефана), а вопрос о рассмотрении более высоких приближений оставлен открытым.

Литература

[1] Gupta S.C. The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis. Amsterdam, 2003.

[2] Ismagilov R.S., Rautian N.A., Vlasov V.V. Examples of very unstable linear partial functional differential equations. Arxiv:1402.4107v1 [math.AP] 17 Feb 2014.

[3] Filimonov A.M. Continuous approximations of difference operators. Journal of Difference Equations and Applications. 1996, 2, N4, p. 411-422.

[4] Filimonov A.M. Some unexpected results on the classical problem of the string with N beads. The case of multiple frequencies. Computes Rendus Acad. Sci. Paris t. 315, Serie 1, 1992, p. 957-961.

Динамические системы с заданными единственными инвариантными мерами

Кириллов А.И. (Россия, Москва)
Московский Центр Непрерывного Математического Образования
AcademiaXXI@mail.ru

Обсуждается следующая задача.

Пусть μ — вероятностная мера на измеримом пространстве X. Найти динамическую систему в X для которой μ — единственная вероятностная мера.

По эргодической теореме такую динамическую систему можно использовать для интегрирования по мере μ и для исследования свойств меры μ.

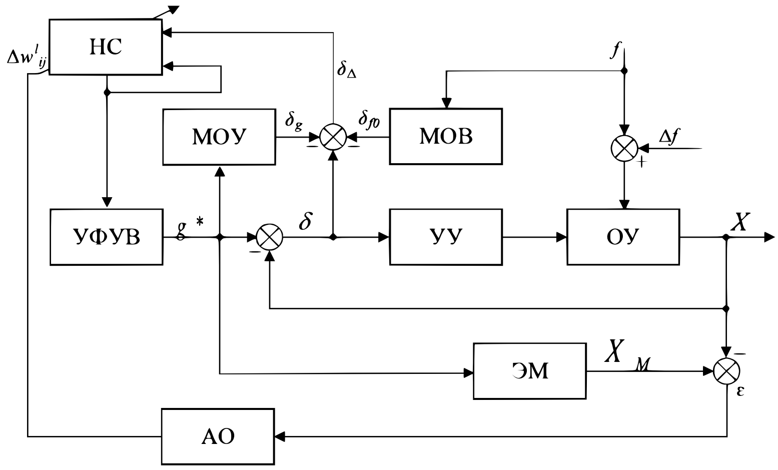
Реализация контура адаптивной коррекции в системах автоматического управления на базе методов искусственного интеллекта[21]

Кобзев А.А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
kobzev42@mail.ru
Лекарева А.В. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
tasya671@rambler.ru

Процесс проектирования нейросетевого регулятора можно условно описать следующей последовательностью шагов: 1) определение целей и задач управления; 2) выбор структуры системы автоматического управления (САУ) и типа нейронной сети (НС); 3) выбор алгоритма обучения; 4) обучение НС; 5) моделирование САУ с НС. В данной работе рассматривается комплементарная коррекция в САУ траекторного типа, основанная на реализации четвертой

[21]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-08-01126.

модифицированной формы инвариантности [1, 2, 3]. Проведенный анализ структур САУ с комплементарной коррекцией позволяет предложить две схемы включения нейросетевого регулятора в контур САУ (рис. 1).



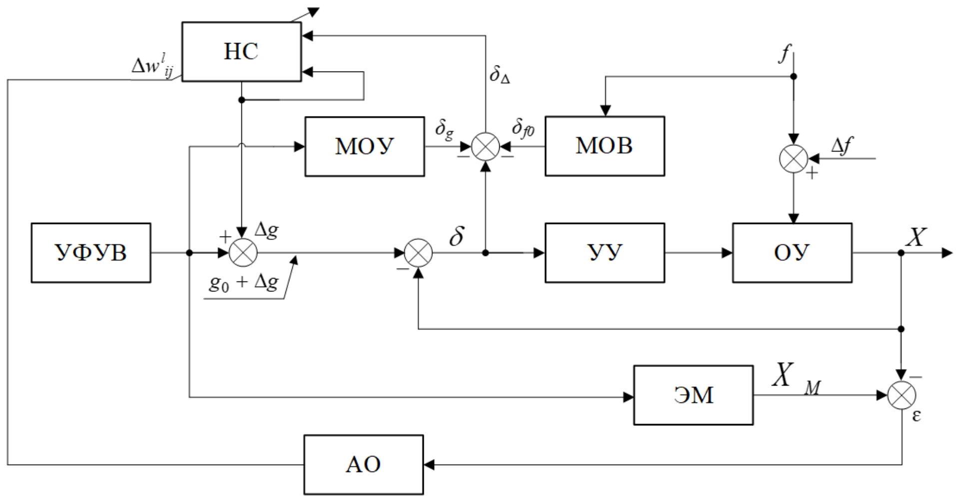


Рис. 1 - Структурные схемы САУ с нейросетевым регулятором:
а) формирование автономной корректирующей поправки в закон управления;
б) коррекция на стадии формирования управляющего воздействия

На схемах обозначено: УФУФ - устройство формирования управляющего воздействия; УУ - устройство управления; ОУ - объект управления; ЭМ - эталонная модель, обладающая заданными динамическими показателями; МОУ - модель ОУ по ошибке от управляющего воздействия; МОВ - модель ОУ по ошибке от возмущающего воздействия. МОВ и МОУ образованы статическими зависимостями первого и второго коэффициентов ошибки от соответствующего воздействия; НС - нейронная сеть; АО - алгоритм обучения, g_0, g – управляющее и возмущающее воздействия соответственно; X, X_M - регулируемая координата и выходная координата эталонной модели соответственно; δ – суммарная ошибка системы; Δf – дополнительное не измеряемое возмущение; δ_{f0}, δg – составляющие ошибки системы, обусловленные возмущающим и задающим воздействиями; δ_Δ – составляющая ошибки, пропорциональная дополнительному возмущению; Δg - дополнительная составляющая управляющего воздействия; □ - ошибка между выходной координатой ОУ и ЭМ. Входом нейронной сети служит ошибка пропорциональная внешнему неопределенному возмущению, выделяемая из суммарной ошибки системы исключением детерминированных составляющих ошибки, получаемых с помощью МОУ и МОВ. Рассматриваемые структуры предполагают динамическое обучение НС в процессе работы. В качестве сигнала ошибки, используемого для настройки весов НС, предлагается использовать сигнал рассогласования между выходной координатой ЭМ и ОУ ?. Здесь полагаются неизвестными поправки закона управления, формируемые в контуре коррекции системы, т.е. отсутствие эталонного значения выходного сигнала НС. Анализ результатов исследования подтверждают работоспособность предложенного подхода. Однако при изменении параметров возмущающего воздействия наблюдается увеличение ошибки отработки задающего сигнала при постоянных значения параметров НС. Уменьшение времени дискретности НС существенно снижает рассогласование выходных величин ОУ и ЭМ. Поэтому целесообразно косвенное определение параметров возмущения, на основании ошибки, пропорциональной данному воздействию, для разработки алгоритма определения оптимальных параметров и величины дискретности НС. Кроме того, развитие алгоритмов комплементарной коррекции на базе применения нейросетевого регулятора в части расширения класса возмущений, действующих на объект управления, возможно модификацией представленных схем, введение в контур коррекции блока оценки основных статистических параметров ошибки САУ и использовании данных параметров в качестве входов НС.

Литература

[1] Новоселов Б.В. Автоматы-настройщики следящих систем / Б.В. Новоселов, Ю.С. Горохов, А.А. Кобзев, А.И. Щитов; под ред. Б.Г. Новоселова. М.: Энергия, 1975. - 264 с.

[2] Лекарева А.В. Обеспечение инвариантности ошибки по возмущению в системах автоматического управления траекторными перемещениями технологических объектов// Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. - 2016. -Т.16., № 5. - С. 787-795. - doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-5-787-795.

[3] Кобзев А.А. Алгоритмы управления технологическим манипулятором гидрорезания нефтепроводов с учетом специфики выполняемого процесса / А.А. Кобзев, А.В. Лекарева, А.А. Махфуз // Динамика сложных систем - XXI век. - 2016. - с. 34-40.

Равномерная глобальная достижимость линейных равномерно вполне управляемых (по Калману) периодических систем

Козлов А. А. (Республика Беларусь, г. Новополоцк)
Полоцкий государственный университет
kozlovaa@tut.by

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m \leqslant n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Выбирая управление u в системе (1) по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U – некоторая кусочно-непрерывная и ограниченная $(m \times n)$-матрица, получим замкнутую однородную систему, коэффициенты которой также кусочно-непрерывны и ограничены:

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Определение 1 [1]. Система (2) называется *равномерно глобально достижимой*, если существует число $T > 0$, при котором для любых $r > 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ найдется такая величина $d = d(r, \rho) > 0$, что для любого числа $t_0 > 0$ и всякой $(n \times n)$-матрицы H, удовлетворяющей оценкам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, на отрезке $[t_0; t_0 + T]$ существует такое кусочно-непрерывное и ограниченное $(m \times n)$-управление U, удовлетворяющее для всех $t \in [t_0; t_0 + T]$ неравенству $\|U(t)\| \leqslant d$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s > 0$, системы (2) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$.

Задача о равномерной глобальной достижимости системы (2), как правило, решается (см., напр. [2, с. 281 – 300]) в предположении равномерной полной управляемости (по Калману) системы (1), соответствующей системе (2).

Определение 2 [3]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (в смысле Калмана), если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что при всяком $t_0 > 0$ имеют место неравенства

$$\alpha_1 E \leqslant W(t_0; t_0 + \sigma) \leqslant \alpha_2 E \quad \text{и} \quad \alpha_3 E \leqslant \widehat{W}(t_0; t_0 + \sigma) \leqslant \alpha_4 E, \tag{3}$$

где *матрица управляемости* (*матрица Калмана*) $W(\cdot,\cdot)$ определяется равенством

$$W(t_0,t_0+\sigma)=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}X(t_0,s)B(s)B^T(s)X^T(t_0,s)ds,$$

E — единичная матрица, $X(t;s)$ — матрица Коши свободной системы $\dot{x}=A(t)x$;

$$\widehat{W}(t_0,t_0+\sigma)=X(t_0+\sigma,t_0)W(t_0,t_0+\sigma)X^T(t_0+\sigma,t_0).$$

Замечание. Здесь неравенства (3) понимаются в смысле квадратичных форм.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть в системе* (1) *матричные коэффициенты* $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ — *кусочно-непрерывные и ограниченные ω-периодические функции. Тогда для равномерной глобальной достижимости соответствующей ей замкнутой системы* (2) *необходимо и достаточно, чтобы исходная система* (1) *обладала свойством равномерной полной управляемости* (*по Калману*).

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание № 1.2.01).

Литература

[1] Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. 2003. С. 31–62.

[2] Макаров Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука. 2012.

[3] Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5, №1. P. 102–119.

Гидродинамика и электромагнетизм: дифференциально-геометрические аспекты и аналогии

В.В. Козлов (Россия, Москва)
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
vvkozlov@mi.ras.ru

Известные уравнения эволюции соленоидального векторного поля с вторженными в сплошную среду интегральными кривыми представлены в инвариантном виде в четырехмерном пространстве-времени. Вводится фундаментальная 1-форма (4-потенциал) и рассматривается задача о вариации действия (интеграл от 4-потенциала по гладким кривым). Описаны экстремали действия в классе кривых с закрепленными концами и законы сохранения, порожденные группами симметрий. В предположении ортогональности электрического и магнитного полей уравнения Максвелла представлены в виде уравнений эволюции соленоидального векторного поля. Роль поля скоростей играет поле нормированных векторов Пойтинга.

Об одной формуле высокоточного численного дифференцирования аналитических функций[22]

Комаров М.А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
kami9@yandex.ru

[22]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00312 мол_а).

Рассматривается задача численного дифференцирования функций

$$f(z) = f_0 + f_1 z + \dots, \qquad |f_m| \leqslant 1, \quad m = 0, 1, \dots \tag{1}$$

(таким образом, f аналитична в открытом единичном круге $|z| < 1$). Через $\nu_1, \dots, \nu_n$ обозначим корни обобщённого полинома Лагерра[23] $L_n^{-2n-1}(z)$ и положим

$$a_k = 1 - \nu_k^{-1}, \qquad b_k = 1 + \nu_k^{-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Положим также

$$n_0(x) = \max\left\{14;\ \frac{ex^2}{4(1-x)^2}\right\} - 1; \qquad \mu_n = \frac{n!^2}{(2n)!^2} \approx (e/(4n))^{2n}/2.$$

Мы доказываем одно важное свойство совокупности $\{\nu_k\}$ и, применяя ещё результат [2], приходим к следующей высокоточной формуле дифференцирования.

Теорема. *Для любой функции f вида (1) и $0 < r < r_1 < 1$ при $n \geqslant n_0(r_1)$ имеет место тождество*

$$zf'(z) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(a_k z) - f(b_k z)\big) + z^{2n+1} E_n(z), \qquad |z| \leqslant r, \quad |a_k z|, |b_k z| < 1 \tag{2}$$

с определённой аналитической в круге $|z| \leqslant r$ функцией $E_n(z) = E_n(f; z)$, допускающей в этом круге равномерную оценку

$$|E_n(z)| < \frac{2\mu_n \cdot r_1^2}{(r_1 - r)(1 - r_1)^{2n+2}}.$$

Эта оценка при $r_1 \approx r$ близка к неулучшаемой по порядку n, что показывает пример рациональной функции $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Если f — многочлен степени $\leqslant 2n$, то $E_n(f; z) \equiv 0$.

Замечание 1. В работе [2] показано, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|\nu_k| > 2\sqrt{(n+1)/e}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ верны оценки

$$1 - \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{n+1}} < |a_k|, |b_k| < 1 + \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{n+1}}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Поэтому при всех $|z| \leqslant r_1$ и $n \geqslant n_0(r_1)$ точки $a_k z$ и $b_k z$ остаются внутри открытого единичного круга (где f аналитична).

Замечание 2. Важно, что параметры a_k, b_k носят универсальный характер (не зависят от конкретной функции f). Родственные (2) формулы (с дифференцирующими суммами несколько иного вида) рассматривались в работах [3], [4].

Пример. При $z = r = 1/2$, $r_1 = 1/2 + 1/(2n)$, $n \geqslant 13$ из формулы (2) имеем

$$\left| f'(1/2) - 2\sum_{k=1}^{n} \big(f(a_k/2) - f(b_k/2)\big) \right| < \frac{4\mu_n \cdot (n+1)^2}{n(1-n^{-1})^{2n+2}} \approx 2ne^2 \left(\frac{e}{4n}\right)^{2n}.$$

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 2. М.: Наука, 1966.

[2] Комаров М. А. О приближении специальными разностями наипростейших дробей // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. №4. (В печати)

[3] Данченко В. И. Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. 2008. Т. 83. №5. С. 643–649.

[4] Chunaev P. V., Danchenko V. I. Approximation by amplitude and frequency operators // J. Approx. Theory. 2016. Vol. 207. P.1–31.

[23] См. [1, §10.12]. Степень этого полинома в точности равна n, поэтому корней ровно n с учётом кратностей. Кроме того, все $\nu_k \neq 0$, ибо $L_n^{-2n-1}(0) \neq 0$.

Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений[24]

Конечная Н. Н. (Россия, Архангельск)
САФУ имени М.В. Ломоносова
n.konechnaya@narfu.ru

В докладе будет изложен способ получения главного члена асимптотики некоторой фундаментальной системы решений одного класса линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка $\tau y = \lambda y$ на бесконечности, где λ – фиксированное комплексное число. При этом рассматривается специальный класс матриц типа Шина – Зеттла, и τy – квазидифференциальное выражение, порожденное матрицей из этого класса. Накладываемые на первообразные коэффициентов квазидифференциального выражения τy – т.е. на элементы соответствующей матрицы – условия не связаны с их гладкостью, а лишь обеспечивают определенный степенной рост на бесконечности этих первообразных. Таким образом, коэффициенты выражения τy могут и оссилировать. К рассматриваемому классу, в частности, относится обширный класс дифференциальных уравнений произвольного (четного или нечетного) порядка с коэффициентами-распределениями конечного порядка. В докладе, используя известное определение произведения двух квазидифференциальных выражений с негладкими коэффициентами, также будет предложен метод, позволяющий получить асимптотические формулы для фундаментальной системы решений рассматриваемого уравнения в случае, когда левая часть этого уравнения представляется как произведение двух квазидифференциальных выражений. Полученные результаты применяются к спектральному анализу соответствующих сингулярных дифференциальных операторов. В частности, предполагая симметричность квазидифференциального выражения τy, по известной схеме определяется минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный этим выражением в пространстве интегрируемых с квадратом модуля по Лебегу функций на $[1, +\infty)$ (в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[1, +\infty)$), и определяются индексы дефекта этого оператора.

Об одной стохастической эволюционной модели с многоточечным начально-конечным условием

Конкина А.С. (Россия, Челябинск)
Южно-Уральский государственный университет
alexandra.konkina@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим эволюционную модель Девиса

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f, \tag{1}$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Уравнение (1) вместе с условиями (2), где свободный член $f = f(t)$ это белый шум, можно привести к стохастическому уравнению соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW. \tag{3}$$

Здесь $\mathfrak{U}$ – банахово пространство, $\mathfrak{F}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а $W = W(t)$ это $\mathfrak{F}$-значный винеровский K-процесс.

Возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$, если $\tau_{j-1} < \tau_j$ для $j = \overline{1,n}$. Уравнения (3) можно дополнить многоточечным начально-конечным условием

$$\lim_{t \to \tau_0+} P_0(u(t) - \xi_0) = 0, \qquad P_j(u(\tau_j) - \xi_j) = 0, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

[24]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

где P_j – *относительно спектральные проекторы*. Целью исследования является разрешимость (3), (4), где

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\xi_{jk}\varphi_k, \qquad j = \overline{0,n}, \tag{5}$$

причем $\xi_{jk} \in \boldsymbol{L_2}$ гауссовская случайная величина такая, что ряд (5) сходится (например, $D\xi_{jk} \le C_j$, $k \in \mathbf{N}$, $j = \overline{0,n}$ [1]).

Литература

[1] Конкина А. С. Multipoint Initial-Final Value Problem for the Model of Devis with Additive White Noise // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2017. V. 10, №. 2, P. 144–149.

О робастной устойчивости дифференциально-алгебраических уравнений высокого индекса в условиях структурированной неопределенности

Кононов А.Д. (Россия, Иркутск)
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
my_official@rambler.ru

Рассматривается стационарная система дифференциальных уравнений

$$(A + C_1\Delta_1 D_1)x'(t) + (B + C_2\Delta_2 D_2)x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

где произведения $C_1\Delta_1 D_1$ и $C_2\Delta_2 D_2$ называются структурированными возмущениями матриц A и B соответственно. Предполагается, что $\det A = 0$, $\lambda A + B \not\equiv 0$, а матрицы, фигурирующие в уравнении, являются вещественными и имеют размер $(n \times n)$, при этом C_1, C_2, D_1 и D_2 — это известные матрицы, а Δ_1 и Δ_2 — это матрицы неопределенностей.

Исследуется вопрос об устойчивости системы вида (1) в предположении, что номинальная система

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0 \tag{2}$$

асимптотически устойчива. На основании результатов статьи [1] показано, что для ДАУ (2) существует обратимый оператор

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1\frac{d}{dt} + \cdots + R_r\left(\frac{d}{dt}\right)^r,$$

действие которого преобразует систему (2) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n-d} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

где r – индекс неразрешенности, E_d – единичная матрица указанного порядка; $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Qx(t)$, Q – матрица перестановки строк; J_1 и J_2 – некоторые матрицы соответствующих размеров. При этом множества решений систем (2) и (3) совпадают.

Основная сложность исследования робастной устойчивости ДАУ связана с тем, что возмущения коэффициентов могут изменить структуру и дифференциальный порядок системы даже в случае индекса 1. Поэтому матрицы возмущений не могут быть произвольными.

Найдены достаточные условия, при которых возмущения не меняют внутреннюю структуру ДАУ (1). В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены условия робастной устойчивости ДАУ (2). Кроме того, для ДАУ (1) введено понятие радиуса устойчивости и получены соответствующие оценки этого радиуса.

Литература

[1] Щеглова А.А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.

Особенности спектра собственных колебаний локазованных вихрей

Копьев В.Ф. (Россия, Москва)
ФГУП ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, Московский комплекс
vkopiev@mktsagi.ru

Рассматриваются собственные колебания вихревых течений - цилиндрического вихря Ранкина с постоянной завихренностью и вихревого кольца с простейшим распределением завихренности в ядре (изохронное вихревое кольцо). Задача о колебаниях стационарных вихрей в этих случаях допускает точное аналитическое решение. Так, еще Кельвином была решена задача о трехмерных колебаниях вихря Ранкина. Спектр собственных колебаний цилиндрического вихря имеет сложную структуру, обладая точками сгущения собственных частот, определяемыми средней завихренностью в ядре. Аналогичный спектр имеют собственные колебания вихревого кольца. В окрестности каждой точки сгущения собственные частоты располагаются с двух сторон от нее на расстояниях $\nabla\omega \equiv \frac{1}{n}$, где n – номер соответствующего колебания.

Рассмотрены энергии возмущений собственных колебаний. Такие исследования опираются на теорему Арнольда, утверждающую, что стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости являются точками условного экстремума функционала кинетической энергии на множестве равнозавихренных течений. Это позволяет получить выражение для функционала энергии, опираясь только на линейную часть возмущенного решения. Определены энергии всех собственных колебаний и показано, что собственные колебания распадаются на два класса - моды с положительной энергией (знак разности энергий возмущенного и невозмущенного течений больше нуля) и моды с отрицательной энергией (знак разности энергий возмущенного и невозмущенного течений меньше нуля). Обсуждается отличие колебаний вихрей со спектром, имеющим точки сгущения, от колебаний упругих динамических систем с бесконечным набором частот.

Рассмотрены различные типы неустойчивости, которые могут реализовываться в вихревых структурах такого типа. Рассмотрены механизмы возникновения неустойчивости при учете слабой неконсервативности системы (слабая сжимаемость или слабая завихренность вблизи ядра), которая может быть количественно проанализирована с помощью условия баланса энергии в системе. Одна из этих неустойчивостей (сдвиговая неустойчивость вихревых колец) связана с потоком энергии из критического слоя к ядру вихря. Сдвиговая неустойчивость может оказаться причиной генерации высокочастотных пульсаций в трехмерных вихрях, а также главной причиной излучения аэродинамического шума вихревыми структурами. Показано, что неустойчивость такого типа является существенно трехмерной и не может развиваться в двумерных вихрях типа вихря Ранкина, несмотря на близость средних течений. Механизм такой неустойчивости сравнивается с другим механизмом, возникающим для вихря Ранкина и вихревого кольца в слабосжимаемой жидкости за счет уноса энергии из системы на бесконечность звуковыми волнами.

Обсуждается также неустойчивость, которая может возникать для колебаний расположенных вблизи точек сгущения собственных частот. Неустойчивость может возникнуть за счет взаимодействия оказывающихся рядом мод с отрицательной и положительной энергией, имеющих близкие частоты. Эта неустойчивость, также как и сдвиговая, может реализовываться только в трехмерных вихревых структурах, поскольку взаимодействие мод с энергией разного знака может возникнуть за счет кривизны вихревых линий основного течения. Аналитическое исследование этого механизма неустойчивости может быть осуществлено для случая тонкого вихревого кольца, где малый параметр тонкости кольца может быть использован для построения процедуры последовательных приближений как для среднего течения, так и для форм колебаний.

Лагранжев и гамильтонов формализм в задачах о малых колебаниях вихревых течений

Копьев В.Ф., Чернышев С.А. (Россия, Москва)
ФГУП ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, Московский комплекс
vkopiev@mktsagi.ru

Лагранжев и гамильтонов формализм являются мощным инструментом анализа интегральных характеристик механических систем. При использовании этих методов в механике жидкости одним из ключевых моментов является выбор канонических переменных, наиболее удобных для того или иного класса задач. В настоящей работе в качестве канонических переменных предложено использовать поля смещения и возмущения плотности импульса. Такой выбор позволяет естественным образом перенести представления лагранжевой механики конечномерных систем на механику возмущений течений идеальной несжимаемой жидкости. Выписаны выражения для лагранжиана и гамильтониана возмущений с использованием этих переменных.

Рассмотрена задача об интегралах движения в течениях жидкости. Для их исследования используется теорема Нетер. Универсальным образом получены известные интегралы двумерных и трехмерных вихревых течений - вихревой импульс и вихревой момент. Поставлен вопрос о возможности сохранения квадрупольного момента в вихревом течении и сформулированы условия его сохранения при эволюции малых возмущений. Показано, что эти условия всегда выполняются для возмущений плоскопараллельных течений. Полученные результаты представляют собой не только решение общей задачи механики об интегралах движения, но имеют важное значение в аэроакустике в связи с тем, что квадрупольный момент вихревого течения представляет собой главный член разложения акустического источника по числу Маха.

Об одном подходе в исследовании асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных включений[25]

Корнев С.В., Обуховский В.В. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный педагогический университет
kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x:[-\tau,0]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[-\tau,0]}\|x(t)\|$.

Для функции $\psi\in\mathcal{C}$ символом D_ψ обозначим множество всех непрерывных функций $x:[-\tau,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ таких, что $x(t)=\psi(t),\ t\in[-\tau,0]$, и сужение x на $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$ является абсолютно непрерывным. Для функции $x\in D_\psi$ и $t\geq 0$ символом $x_t\in\mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-\tau,0]$.

Исследуется вопрос об асимптотическом поведении решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$\begin{cases} x'(t)\in R(t,x_t) \quad \text{п.в. } t\in\mathbb{R}_+, & (1)\\ x(t)=\psi(t), \quad t\in[-\tau,0], & (2)\end{cases}$$

в предположении, что $R:\mathbb{R}_+\times\mathcal{C}\to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным мультиотображением, т.е. найдется такая константа $M>0$, что $\|R(t,\varphi)\|\leq M$ для всех $(t,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times\mathcal{C}$ и существует мультиотображение $F:\mathbb{R}_+\times\mathcal{C}\to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее следующим условиям (по поводу терминологии см., напр., [1, 2]): (i) мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста; (ii) $F(t,\varphi)\cap R(t,\varphi)\neq\emptyset$ для всех $\varphi\in\mathcal{C}$; (iii)

[25]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части Госзадания (проект № 1.3464.2017/4.6), РФФИ (проекты №№ 17-51-52022, 16-01-00386).

каждое решение $x \in \mathcal{D}_\psi$ включения $x'(t) \in F(t, x_t)$ является решением включения $x'(t) \in R(t, x_t)$.

Замечание (см., напр., [2]). Всякое ограниченное почти полунепрерывное снизу мультиотображение $R : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, ограниченное мультиотображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори, является нормальным.

Для каждого начального условия $\psi \in \mathcal{C}$ под решением задачи (1), (2) понимается функция $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющая (1) п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим символом $\mathfrak{V}$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию коэрцитивности $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = -\infty$.

Пусть $V \in \mathfrak{V}$. Заметим, что для каждого $r > 0$ найдется $k(r) > r$ такое, что если $\alpha_r := \inf\{V(x),\ \|x\| \le r\}$, то $V(x) < \alpha_r,\ \|x\| \ge k(r)$. Пусть теперь $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\inf\{g(t),\ t \in \mathbb{R}\} \ge 1$.

Определение (ср., напр., [3, 4]). Функция $V \in \mathfrak{V}$ называется *интегральным направляющим потенциалом* для включения (1) вдоль функции g, если существует $r_V > g(0)\|\psi(0)\|$ такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей условиям: (j) существует число $\tau_1^x > 0$ такое, что $g(t)\|x(t)\| \le r_V$ для всех $t \in [0, \tau_1^x)$; (jj) существует число $\tau_*^x > \tau_1^x$ такое, что $g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V := k(r_V)$; (jjj) $\|x'(t)\| \le \|R(t, x_t)\|$ для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$; имеем для каждого локально суммируемого сечения $f(s) \in R(s, x_s)$

$$\int_{\tau_\sharp^x}^{\tau_*^x} \big\langle \nabla V(x(s)), g'(s)x(s) + g(s)f(s) \big\rangle ds \ge 0,$$

где $\tau_\sharp^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x),\ \|g(\tau)x(\tau)\| = r_V\}$.

Теорема. *Если $V \in \mathfrak{V}$ является интегральным направляющим потенциалом для включения (1) вдоль функции g, то найдется по крайней мере одно решение задачи Коши (1), (2), удовлетворяеющее оценке:* $\|x(t)\| \le k_V \cdot \frac{1}{g(t)}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

[1] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, 2-е изд. М.: „Либроком“, 2011.

[2] Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, 2nd Ed. Berlin: Springer, 2006.

[3] Корнев С. В., Обуховский В. В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 700–705.

[4] Корнев С. В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика, математика. 2016. № 1. С. 96–104.

Решение задачи о построении асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами на бесконечности

Коровина М. В. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова
betelgeuser@yandex.ru

Работа посвящена построению асимптотики решения обыкновенного дифференциального уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с голоморфными коэффициентами

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + ... + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + ... + a_0(x)\, u(x) = 0 \qquad (1)$$

здесь коэффициенты $a_i\left(x\right)$ голоморфны в окрестности бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x|>a$, что функции $a_i\left(r\right),\ i=0,1,...,n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i\left(x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_i^j}{x^j}$ Эта задача, путем замены $x=\frac{1}{r}$ сводится к уравнению с вырождением типа клюва второго порядка, которое можно записать в виде

$$H\left(r,-r^2\frac{d}{dr}\right)u=0$$

где

$$H\left(r,p\right)=p^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\left(r\right)p^i=p^n+r\sum_{i=k_1}^{n-1}b_i^1p^i+r^2\sum_{i=k_2}^{n-1}b_i^2p^i+...+r^n\sum_{i=k_2}^{n-1}b_i^np^i+r^{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}b_i\left(r\right)p^i$$

Здесь через $b_i\left(r\right)$ обозначены соответствующие голоморфные функции, а через k_i минимальные степени p при которых коэффициенты не равны нулю.

В нашем случае основной символ оператора $H\left(0,p\right)=p^n$, иными словами основной символ оператора имеет корни кратности n. Заметим, что в случае, когда основной символ имеет простые корни задача была решена ранее. Без ограничения общности будем считать, что $k_1+1\leqslant k_j+j,\ j=2,...,n$, тогда верна

Теорема. Асимптотика решения уравнения (1) имеет вид

$$u(r)=\sum_{j=1}^{n-k_1}e^{\sum_{i=1}^{n-k_1-1}\frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{n-k_1}}}}r^{\frac{C_j}{n-k_1}}\sum_{l}^{\infty}A_l^jr^{\frac{l}{n-k_1}}+\sum_{j=0}^{k_1}r^{\sigma_j}\left(\ln r\right)^j\sum_{i=0}^{\infty}B_jr^j$$

Здесь через $\alpha_{n-k_1-1}^j,\ j=1,...,n-k_1$ обозначены корни полинома $p^{n-k_1}+\left(\frac{n-k_1}{n-k_1-1}\right)^{n-k_1}\frac{b_{k_1}^1}{n-k_1}$, а через $\alpha_i^j,\ \ i<n-k_1-1,\ C_j\ ,A_l^j\ ,\sigma_j,\ B_j$ – некоторые константы.

О динамике периодически возмущенного асимметричного уравнения маятникового типа

Костромина О.С. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
os.kostromina@yandex.ru

Рассматриваются периодические по времени возмущения асимметричного уравнения маятникового типа, близкого к интегрируемому. Изучается структура резонансных зон, а также устанавливается глобальное поведение решений в областях, отделенных от невозмущенных сепаратрис. Исследуются основные гомоклинические бифуркации в малой окрестности невозмущенных сепаратрис. Строится бифуркационная диаграмма для отображения Пуанкаре на плоскости основных параметров. Изучаются свойства гомоклинической зоны нового типа – области разбиения плоскости основных параметров, имеющей кусочно-гладкие границы.

Работа поддержана грантами РФФИ №16-01-00364 и №18-01-00306.

Условие Гёльдера и динамические системы над поворотом окружности

Кочергин А.В. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
a.kochergin@gmail.com

Известно, что специальный поток над поворотом окружности, задаваемый функцией ограниченной вариации, не может быть перемешивающим, а цилиндрический каскад, задаваемый такой функцией (но с нулевым средним), не может иметь траекторий, стремящихся к бесконечности. Напротив, просто непрерывность практически не налагает ограничений на эти свойства. В ряде работ построены примеры перемешивающих специальных потоков и цилиндрических каскадов с дискретными траекториями, задаваемых функциями, удовлетворяющими условию Гёльдера. В этих примерах знаменатели подходящих к углу поворота дробей должны удовлетворять довольно жестким условиям.

В докладе будет сделана попытка более детально изучить связь между свойствами поворота и функции, по которым строятся специальные потоки и цилиндрические каскады, а также свойствами множества дискретных орбит каскада.

Эволюция плоских орбит спутника-баллона под действием возмущающего притяжения Солнца и светового давления[26]

Красильников П. С., Доброславский А. В. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
krasil06@rambler.ru, a.dobroslavskiy@gmail.com

Предполагается, что в невозмущенном движении пассивно гравитирующее тело (спутник-баллон) обращается по эллиптической орбите вокруг центрального тела (Земли). На орбиту спутника оказывает влияние гравитационная возмущающая сила со стороны третьего тела (Солнца) и световое давление (считаем отношение площади миделева сечения спутника-баллона к его массе большим). Предполагается также, что Солнце обращается вокруг Земли по эллиптической орбите, при этом рассматриваются только высокие невозмущенные орбиты спутника, позволяющие пренебречь временем нахождения спутника в зоне земной тени.

Получена возмущающая функция задачи в спутниковом приближении. Проведено осреднение возмущающей функции по средним аномалиям орбиты спутника и орбиты Солнца. Для усредненных уравнений движения, записанных в кеплеровских оскулирующих элементах, найдены первые интегралы: интеграл энергии и тривиальный интеграл, описывающий сохранение большой полуоси орбиты спутника.

На основе анализа интеграла энергии была получена область значений параметров, при которых эволюция эксцентриситета орбиты спутника сохраняет его действительные значения. Определены стационарные точки интеграла энергии, исследована их устойчивость в первом приближении метода усреднения. Построен фазовый портрет усредненных эволюционных уравнений движения.

Анализ фазовых портретов выявил три типа возможных орбит спутника: орбиты с либрационным колебанием оскулирующего перицентра, орбиты с вековым уходом оскулирующего перицентра и вырожденные орбиты, приводящие к падению на центральное тело. Для значений параметров, приблизительно соответствующих спутнику «Эхо-1», было проведено численное интегрирование каждого из типов орбит и построены траектории движения.

Простая и сложная динамика в нелинейных системах

Крищенко А.П. (Россия, Москва)
МГТУ им. Н.Э. Баумана, ФИЦ ИУ РАН
apkri@bmstu.ru

Для качественного анализа поведения траекторий нелинейных систем $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ используется метод локализации инвариантных компактов. С помощью этого метода строится конечное семейство вложенных локализирующих множеств, которому соответствует разбиение фазового пространства на непересекающиеся подмножества. Вне наименьшего локализирующего множества указывается качественное поведение любой траектории.

[26]Исследования выполнены в Московском авиационном институте при поддержке гранта РНФ, проект №14-21-00068.

Функции $\phi \in C^1(\mathbf{R}^n)$ и множеству $Q \subset \mathbf{R}^n$ соответствует универсальное сечение $S(\phi) = \{x \in \mathbf{R}^n : \dot{\phi}(x) = 0\}$ и экстремальные значения $\phi_{\inf}(Q) = \inf_{S(\phi)\cap Q} \phi(x)$, $\phi_{\sup}(Q) = \sup_{S(\phi)\cap Q} \phi(x)$.

Теорема 1 [1]. *Все инвариантные компакты автономной системы $\dot{x} = f(x)$ содержащиеся в множестве Q, содержатся в локализирующем множестве*

$$\Omega(\phi, Q) = Q \cap \{\phi_{\inf}(Q) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q)\}.$$

Известно [2], что локализирующее множество вида $\Omega(\phi) := \Omega(\phi, \mathbf{R}^n)$ разделяет фазовое пространство системы на области с простым и сложным поведением траекторий. Это означает следующее. Вне локализирующего множества для любой траектории возможен лишь один из стандартных вариантов поведения, в то время как поведение траекторий в локализирующем множестве может иметь сложный, в частности хаотический характер.

Следствие. *Если $h_1(x), \ldots, h_m(x) \in C^1(\mathbf{R}^n)$, то локализирующие множества $K_0 = \mathbf{R}^n$, $K_i = \Omega(h_i, K_{i-1})$, $i = 1, \ldots, m$ содержат все инвариантные компакты системы.*

Предположим, что $K_i \neq K_{i-1}$, а $K_m \neq \emptyset$. Поскольку $K_i \subset K_{i-1}$, то получаем разложение фазового пространства на непустые подмножества

$$\mathbf{R}^n = (K_0 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus K_2) \cup \cdots \cup (K_{m-1} \setminus K_m) \cup K_m.$$

В точках множества $K_{i-1} \setminus K_i$ функция $\dot{h}_i$ не равна нулю. Поэтому это множество распадается на связные компоненты I рода (где $h_i(x) > h_{i\sup}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) > 0$ или $h_i(x) < h_{i\inf}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) < 0$) и II рода (где $h_i(x) > h_{i\sup}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) < 0$ или $h_i(x) < h_{i\inf}(K_{i-1})$, $\dot{h}_i(x) > 0$).

Теорема 2. *Если траектория системы выходит из локализирующего множества $K_i = \Omega(\phi_i, K_{i-1})$, то она попадает в компоненту I рода множества $K_{j-1} \setminus K_j$ при некотором $j \leqslant i$.*

Теорема 3. *Если траектория системы проходит через точку компоненты I рода множества $K_{i-1} \setminus K_i$, то она остается в этой компоненте и уходит в бесконечность при $t \to +\infty$ или она выходит в компоненту I рода множества $K_{j-1} \setminus K_j$ при некотором $j < i$.*

Теорема 4. *Если траектория системы проходит через точку компоненты II рода множества $K_{i-1} \setminus K_i$, то возможны четыре варианта ее поведения: 1) траектория остается в компоненте и при $t \to +\infty$ уходит в бесконечность; 2) траектория остается в компоненте и при $t \to +\infty$ стремится к $\partial\Omega(\phi_i, K_{i-1})$ — границе локализирующего множества $K_i = \Omega(\phi_i, K_{i-1})$, а ее ω-предельное множество содержится в пересечении границы локализирующего множества, границы этой компоненты и универсального сечения $S(\phi_i)$; 3) траектория покидает компоненту, переходя через ее границу в локализирующее множество $K_i = \Omega(\phi_i, K_{i-1})$; 4) траектория покидает компоненту, переходя через ее границу в компоненту I рода множества $K_{j-1} \setminus K_j$ при некотором $j < i$.*

Полученные результаты проиллюстрированы на примере трехмерной системы [3] $\dot{x} = -\omega y + 2xz$, $\dot{y} = \omega x + 2yz$, $\dot{z} = 1 - x^2 - y^2 - z^2 - \epsilon(1 + \delta x^2 + \delta y^2)z - \mu xy$.

Литература

[1] Крищенко А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. №12. С. 1597–1604.

[2] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Локализирующие множества и поведение траекторий // ДАН. 2016. Т. 470. №2. С. 133–136.

[3] Chen F., Li J. Strange attractors in a three-dimensional autonomous polynomial equation // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24. No 9.

Классификация Ω-устойчивых потоков на поверхностях с точки зрения топологической сопряжённости

Круглов В.Е. (Россия, Нижний Новгород)
НИУ ВШЭ, ННГУ им. Н.И. Лобачевского
kruglovslava21@mail.ru

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях заключается в разбиении несущего многообразия на области с предсказуемым поведением траекторий — ячейки. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], опубликованной в 1937 году. В этой статье они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x),$$

где $v(x)$ это C^1-векторное поле на 2-диске, ограниченном кривой без контакта на плоскости, и нашли критерий грубости такой системы. Более общий класс потоков на 2-сфере рассмотрен в работах Е. А. Леонтович и А. Г. Майера [2,3], где тоже было использовано разбиение на ячейки (схема Леонтович-Майера). В 1971 в работе [4] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков с помощью ориентированного графа. В 1976 году Д. Ньюманом и Т. О'Брайеном [5] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые регулярные потоки, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – орбитальный комплекс. В 1998 году А.А. Ошемков и В.В. Шарко [6] ввели новый инвариант для потоков Морса – трехцветный граф. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул. Грубые или, что эквивалентно, структурно устойчивые потоки на поверхностях имеют неблуждающее множество, состоящее только из конечного числа особых точек и конечного числа замкнутых траекторий, или предельных циклов, каждая из которых является гиперболической; кроме того, такие потоки не имеют траекторий, соединяющих седловые точки. Нарушение последнего условия приводит к Ω-устойчивым потокам на поверхностях, которые уже не являются грубыми.

В 1978 году Ж. Палис [7] рассмотрел окрестность двух седловых точек, соединённых сепаратрисой, и построил сопрягающий гомеоморфизм для двух окрестностей с одинаковыми модулями устойчивости, а также доказал критерий топологической сопряжённости для двух таких окрестностей с помощью модулей устойчивости. В настоящей работе мы, с помощью ориентированных двудольных графов, оснащённых четырёхцветными графами и модулями устойчивости, осуществляем классификацию с точки зрения топологической сопряжённости класса Ω-устойчивых потоков.

Работа выполнена под руководством О. В. Починки. Результаты получены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00022 мол_а.

Литература

[1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, №5. С. 247—250.

[2] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // ДАН СССР. 1937. Т. 14, №5. С. 251—257.

[3] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // ДАН СССР. 1955. Т. 103, №4. С. 557—560.

[4] Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds // Dynamical systems Proc. 1971.

[5] Neumann D., O'Brien T. Global structure of continuous flows on 2-manifolds // J. DifF. Eq. 1976 V. 22, № 1. P. 89—110.

[6] Ошемков А. А., Шарко ВВ. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. 1998. Т. 189, №8. С. 93—140.

[7] Palis J. A Differentiable Invariant of Topological Equivalence and Moduli of Stability // Astérisque. 1978. V. 51 P. 335–346.

Сценарий пересоединения в короне Солнца с простой дискретизацией

Круглов Е.В. (Россия, Нижний Новгород)
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
kruglov19@mail.ru

В докладе рассматривается описание и реализация одного из возможных сценариев рождения гетероклинических сепараторов в солнечной короне. Предлагаемый сценарий пересоединения связывает магнитное поле с двумя нулевыми точками разного знака, веерные поверхности которых не пересекаются, с магнитным полем с двумя нулевыми точками и двумя гетероклиническими сепараторами, их соединяющими. Метод доказательства заключается в создании модели магнитного поля, создаваемого плазмой в короне солнца, и исследования её методами теории динамических систем. А именно, в пространстве векторных полей на сфере S^3 с двумя источниками, двумя стоками и двумя сёдлами строится простая дуга с двумя седло-узловыми бифуркационными точками, соединяющая систему без гетероклинических кривых с системой с двумя гетероклиническими кривыми, причём дискретизация данной дуги также является простой дугой в пространстве диффеоморфизмов.

Изложенные результаты получены совместно с О.В. Починкой и опубликованы в [1].

Литература

[1] Починка О. В, Круглов Е. В., Долгоносова А. Ю. Сценарий пересоединения в короне Солнца с простой дискретизацией // Нелинейная динамика. 2017. Т.13. № 4. С. 573–578.

Комплексы программ для оптимальной фильтрации сигналов в непрерывных и дискретных динамических системах

Кудрявцева И.А. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт
irina.home.mail@mail.ru
Рыбаков К.А. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт
rkoffice@mail.ru

Задачи фильтрации сигналов возникают при управлении движением в условиях случайных внешних воздействий и наличии ошибок в измерениях текущих параметров, в задачах навигации и позиционирования, в задачах радиотехники, при идентификации параметров систем и многих других задачах. Для проведения апробации и сравнительного анализа новых методов и алгоритмов оптимальной фильтрации сигналов в динамических системах, подверженных случайным внешним воздействиям, разработаны специализированные пакеты программ.

Первый из них разработан в среде программирования *Borland Delphi* (язык *Object Pascal / Delphi*). Его основное назначение состоит в апробации новых алгоритмов оптимальной фильтрации и прогнозирования, построенных на основе анализа вспомогательных стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий, а также непрерывных фильтров частиц [3]. В качестве методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений реализованы методы типа Рунге – Кутты и Розенброка, а для моделирования пуассоновского потока обрывов и ветвлений траекторий, а также изменения весовых коэффициентов в фильтре частиц применяется метод максимального сечения и метод, основанный на определении интенсивности потока. Существенное ограничение этого пакета программ состоит в том, что размерность состояния системы, которое требуется оценить, и размерность измерения равны единице. В случае фильтрации сигналов в линейных системах дополнительно моделируется фильтр Калмана – Бьюси, для нелинейных систем — обобщенный фильтр Калмана – Бьюси. Оценка состояния строится по ансамблю траекторий вспомогательного случайного процесса с учетом обрывов и ветвлений или весовых коэффициентов на основе критериев минимума среднего квадрата ошибки оценивания, максимума апостериорной плотности вероятности или с помощью нахождения медианы апостериорного распределения. Для оценки плотностей вероятности строятся гистограммы.

Для второго пакета программ выбрана система компьютерной математики *Mathcad*. Этот пакет имеет модульную структуру и позволяет решать задачи фильтрации и прогнозирования для многомерных непрерывных стохастических систем диффузионного типа. В нем реализованы алгоритмы, построенные по типу непрерывных фильтров частиц [3, 4], используемые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений: методы типа Рунге – Кутты, Мильштейна, Платена и Розенброка. В качестве критерия оптимальности оценки могут выступать как критерий минимума среднего квадрата ошибки, так и критерий максимума апостериорной плотности вероятности (в последнем случае при построении гистограммы апостериорного распределения, а также с использованием ядерной оценки апостериорной плотности вероятности). К плюсам этого пакета программ можно отнести наглядность, простоту решения тестовых задач, а к минусам — невысокую скорость вычислений. Для проведения сравнительного анализа реализованы обобщенный фильтр Калмана – Бьюси и сигма-точечный фильтр Калмана – Бьюси.

Третий пакет программ реализован с применением технологии параллельного программирования *OpenMP* на базе среды разработки приложений *Microsoft Visual Studio* и оптимизирующего компилятора из пакета *Intel Parallel Studio* (язык *C/C++*). Пакет состоит из консольных приложений и его основная функция — тестирование новых алгоритмов оптимальной фильтрации (непрерывных фильтров частиц) для задач большой размерности при малом шаге численного интегрирования и большом числе моделируемых траекторий в ансамбле, т.е. числе частиц, что требует привлечения значительных вычислительных ресурсов. Методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений — это методы типа Рунге – Кутты.

В четвертом пакете программ реализованы алгоритмы оптимальной фильтрации по среднеквадратическому критерию для систем с дискретным временем (для непрерывных систем необходима дискретизация). В частности, это бутстреп-фильтры частиц с остаточной повторной выборкой и с улучшенной выборкой, сигма-точечный фильтр частиц, Монте-Карло фильтр частиц, сигма-точечный фильтр Калмана, а также их модификации на основе QR-разложения и UD-разложения ковариационных матриц [1, 2]. С помощью разработанного пакета программ был проведен сравнительный анализ результатов моделирования и дана оценка эффективности применения алгоритмов фильтрации. Для разработки этого пакета программ использовалась система компьютерной математики *Matlab*.

Апробация для всех пакетов программ проводилась на модельных примерах. Кроме того, второй и третий пакеты программ были апробированы на решении задачи оценивания траектории спускаемого аппарата на участке аэродинамического торможения и задаче отслеживания координат и скоростей самолета, осуществляющего маневр в горизонтальной плоскости. При помощи четвертого пакета программ проведены вычисления в задаче трассового анализа для двух случаев: пассивной и активной локации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00530-а).

Литература

[1] Волков В. А., Кудрявцева И. А. Численное решение задач нелинейной фильтрации на основе алгоритмов фильтра частиц // Труды МАИ. 2016. № 89.

[2] Кудрявцева И. А. Анализ эффективности расширенного фильтра Калмана, сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц // Научный вестник МГТУ ГА. 2016. № 224 (2). С. 43–51.

[3] Рыбаков К. А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017.

[4] Рыбаков К. А. Применение фильтра частиц в задаче оценивания траектории спускаемого аппарата при аэродинамическом торможении // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Международная научно-техническая конференция, Воронеж, 18–20 декабря 2017 г.: Сб. тр. конф. Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. С. 863–872.

Особенности формирования полос локализованной деформации в материалах[27]

Кудряшов Н.А., Муратов Р.В., Рябов П.Н. (Россия, Москва)
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
nakudr@gmail.com, rodyon-mur@yandex.ru, pnryabov@mephi.ru

Хорошо известно, что к одному из ярких проявлений нелинейной науки можно отнести процессы самоорганизации устойчивых структур в физических системах. Примеры подобных процессов встречаются в различных технологических процессах и физических экспериментах. В частности, явление самоорганизации наблюдалось при проведении исследования прочностных характеристик некоторых технологически значимых материалов [1, 2]. Однако на сегодняшний день, по существу, отсутствуют теоретические работы посвященные данной проблеме.

В этой связи, в докладе рассматривется математическая модель, описывающая процессы самоорганизации полос локализованной деформации в различных диполярных материалах [3], которая имеет вид

$$
\begin{gathered}
v_t - \frac{1}{\rho} s_y + \frac{l}{\rho}\sigma_{yy} = 0,\\
s_t - \mu v_y = -\mu\dot{\varepsilon},\\
\sigma_t - \mu l v_{yy} = -\mu\dot{d},\\
\psi_t = \frac{s_e\dot{\varepsilon}_e}{\kappa(\psi)}\\
C\rho T_t = \left(kT_y\right)_y + s_e\dot{\varepsilon}_e,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
s_e = \sqrt{s^2+\sigma^2}, \qquad \dot{\varepsilon}_e = \sqrt{\dot{\varepsilon}^2+\dot{d}^2}, \qquad \varepsilon_e = \int_0^t \dot{\varepsilon}_e(\tau)d\tau,\\
\dot{\varepsilon} = \frac{s}{s_e}\dot{\varepsilon}_e, \qquad \dot{d} = \frac{\sigma}{s_e}\dot{\varepsilon}_e, \qquad \dot{\varepsilon}_e = D(s_e,\psi,T).
\end{gathered}
$$

В работе проведен численный анализ физических процессов, описываемых данной математической моделью. Разработана разностная схема и проведена ее верификация на известных решениях данной задачи. Изучено влияние диполярных эффектов на процессы самоорганизации полос локализованной деформации. Рассмотрено влияние диполярных эффектов на время, требуемое для самоорганизации полос локализованной деформации. Проведено исследование статистических характеристик рассматриваемого процесса. В частности, получены статистические распределения ширины, образовавшихся структур, а также расстояния между ними.

Литература

[1] Nesterenko V. F., Meyers M. A., Wright T. W. 1998. Self-organization in the initiation of adiabatic shear bands // Acta Materialia. 1998. V. 46. P. 327–340.

[2] Kudryashov N. A., Ryabov P. N., Zakharchenko A. S. Self-organization of adiabatic shear bands in OFHC copper and HY-100steel // J. Mech. Phys. Sol. 2015. V. 76. P. 180–192.

[3] Batra R. C., Kim C. H. The interaction among adiabatic shear bands in simple and dipolar materials // Int. J. Engng. Sci. 1990. V. 28. I. 9. P. 927–942.

[27] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых, проект № 14.Y30.18.6044-МК.

Задача о дивергенции крыла

Куликов А.Н. (Россия, Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
anat_kulikov@mail.ru

Задача о крутильных колебаниях крыла [1] после перенормировок может быть сведена к анализу нелинейной краевой задачи (КЗ)

$$v_{tt} + gv_t = v_{xx} + av + bv^3, \tag{1}$$

$$v|_{x=\pi} = v_x|_{x=0} = 0, \; v = v(x) \tag{2}$$

где $a, b \in R_+$ и зависят от параметров задачи, главным из которых следует считать скорость набегающего потока. Наконец, $g > 0$ – обобщенный коэффициент демпфирования (трения).

При $a < (1/4)$ нулевое состояние равновесия КЗ (1), (2) асимптотически устойчиво и теряет устойчивость при $a > (1/4)$.

Если $a = (1/4)$, то реализуется критический случай нулевого собственного значения в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия КЗ (1), (2).

Положим $a = (1/4) - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. При таком выборе a нелинейная КЗ имеет два ненулевых неустойчивых состояния равновесия, для которых справедливы асимптотические представления

$$v_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{3b}}\varepsilon^{1/2}\cos\frac{x}{2} \pm \frac{8\sqrt{3}}{105\sqrt{b}}\varepsilon^{3/2}\cos\frac{3x}{2} + o(\varepsilon^{3/2}),$$

т.е. реализуется докритический вариант бифуркаций типа «вилка».

Добавим, что КЗ (1), (2) имеет счетное семейство неустойчивых состояний равновесия $v_m(x) = A_m cn(c_m x, k_m)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, где через $cn(*, *)$ обозначен эллиптический косинус, а параметры данных точных решений КЗ (1), (2) восстанавливаются по следующим формулам

$$A_m = \pm\sqrt{2}\frac{c_m k_m}{\sqrt{b}}, \qquad c_m = \sqrt{\frac{a}{1 - 2k_m^2}}, \qquad a > 0.$$

Величина k_m определяется как корень уравнения

$$a = \left(\frac{2m-1}{\pi}\right)^2 (1 - 2k^2) I^2(k^2, \pi/2), \qquad I(k^2, \varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 z}}.$$

При обтекании крыла потоками газа с разными скоростями получаем уже иной вариант КЗ. В этом случае она имеет следующий вид

$$v_{tt} + gv_t = v_{xx} + av + b_1v^2 + b_2v^3, \tag{3}$$

$$v|_{x=\pi} = v_x|_{x=0} = 0, \tag{4}$$

где уже $b_1 \neq 0$. При $a = (1/4) + \gamma\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\gamma = \pm 1$ КЗ (3), (4) может иметь и устойчивые ненулевые состояния равновесия. При этом в КЗ (3), (4) реализуется уже «транскритический» вариант бифуркаций.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1.

Литература

[1] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961.

[2] Куликов А. Н. Ненулевые состояния равновесия одной краевой задачи, моделирующей явление дивергенции крыла в сверхзвуковом потоке газа // Моделир. и анализ информ. систем. 1997. Вып. 4. С. 69–72.

Пространственно неоднородные решения одного функционально-дифференциального уравнения

Куликов Д.А. (Россия, Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
kulikov_ d_ a@mail.ru

Нелокальное уравнение эрозии было предложено в качестве одной из математических моделей формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием ионной бомбардировки [1,2]. В наиболее характерных вариантах это уравнение может быть сведено к следующему функционально-дифференциальному уравнению

$$v_t = dv_{xx} + hbw_x + hb_1(w^2)_x + hb_2(w^3)_x, \tag{1}$$

которое принято рассматривать вместе с периодическими условиями

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x). \tag{2}$$

Здесь $w = v(t, x + h)$, $h \in (0, h_0)$, $h_0 \ll 1$, $d > 0$, $h > 0$, $b_1, b_2 \in R$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

Нелинейная краевая задача (КЗ) (1), (2) имеет семейство состояний равновесия $v(t, x) = \alpha$, где $\alpha \in R$. Более того, для любого решения КЗ (1), (2) справедливо равенство $M_0(v) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(t, x)dx = \alpha$, α – действительная постоянная.

Положим $v(t, x) = \alpha + u(t, x)$. Имеем $M_0(u) = 0$. КЗ для $u(t, x)$ запишется в виде

$$u_t = du_{xx} + hcw_x + hb_3(w^2)_x + hb_2(w^3)_x, \tag{3}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad M_0(u) = 0, \tag{4}$$

где $w = u(t, x + h)$, $b_3 = b_1 + 3b_2\alpha$, $c = b + 2b_1\alpha + 3b_2\alpha^2$.

Можно показать, что существует такое $d_* = d(h, c)$, что при $d > d_*$ нулевое состояние равновесия КЗ (4), (5) асимптотически устойчиво, а при $d < d_*$ – неустойчиво. При $d = d_*$ и любом малом h, за исключением некоторых значений $h = h_*$, для спектра устойчивости нулевого решения КЗ (3), (4) выполнено следующее:

1) существует пара собственных значений (СЗ) $\pm i\sigma$ ($\sigma \neq 0$), отвечающих собственным функциям (СФ) $\exp(\pm imx)$, $|m| \gg 1$;

2) остальные точки спектра устойчивости удовлетворяют неравенству $Re\lambda_j \leq \gamma(h) < 0$.

При $h = h_*$ спектр устойчивости содержит нерезонансные пары СЗ $\pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2$, отвечающих СФ $\exp(\pm imx)$, $\exp(\pm(m + 1)x)$, соответственно.

Если положить $d = d_*(1 - \gamma\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $h \neq h_*$ и $\gamma \in R$, то в КЗ (3), (4) реализуются условия теоремы Андронова-Хопфа и анализ бифуркаций сводится к изучению обыкновенного дифференциального уравнения (НФ) для комплекснозначной функции $z(t)$: $\dot{z} = \varepsilon[\beta z + (l_1 + il_2)z|z|^2]$ ($\beta, l_1 \neq 0$). Следовательно, КЗ (3), (4) может иметь пространственно неоднородный цикл $C(\alpha, h)$, а КЗ (1), (2) при таком выборе d – двумерное инвариантное многообразие, «заполненное» пространственно неоднородными периодическими решениями. Это двумерное многообразие – локальный аттрактор, если цикл $C(\alpha, h)$ КЗ (3), (4) орбитально асимптотически устойчив.

При $d = d_*(1 - \gamma_1\varepsilon)$, $h = h_*(1 - \gamma_2\varepsilon)$ ($\gamma_1, \gamma_2 \in R$) для КЗ (3), (4) реализуется бифуркационная задача коразмерности 2 в случае, близком к критическому двух пар чисто мнимых собственных значений. При достаточно малых ε_0 возможен вариант, когда бифурцируют двумерные инвариантные торы, заполненные квазипериодическими по t и пространственно неоднородными по пространственной переменной решениями.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

Литература

[1] Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Известия РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72. №5. С. 624–629.

[2] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием ионной бомбардировки. Неоднородные наноструктуры // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. №3. С. 33–50.

О классификации одномерных аттракторов посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов

Куренков Е. Д. (Россия, Нижний Новгород)
НИУ ВШЭ, Нижний Новгород
eugene2402@mail.ru

В настоящей работе рассматриваются A-диффеоморфизмы (диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме F С. Смейла) замкнутого ориентируемого двумерного многообразия M^2 рода $p \geqslant 2$, неблуждающее множество которых содержит просторно расположенное базисное множество Λ. Установлено, что проблема топологической классификации таких диффеоморфизмов тесно взаимосвязана с топологической классификацией псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхностей.

Определение 1. *Одномерное базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ назовем совершенным, если его дополнение $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску.*

Определение 2. *Гомеоморфизм $PA\colon M^2 \to M^2$ называется псевдоаносовским, если на M^2 существует пара PA-инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ с множеством седловых особенностей $\mathcal{S}$ и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:*

- каждая седловая особенность из $\mathcal{S}$ имеет не менее трех сепаратрис;
- существует число $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ ($\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha)$) для любой дуги α, трансверсальной $\mathcal{F}^s$ ($\mathcal{F}^u$).

В работе [1] было анонсировано, что для любого псевдоаносовского гомеоморфизма поверхности можно с помощью хирургической операции построить гомотопный ему структурно устойчивый диффеоморфизм с совершенным базисным множеством. Однако, вопрос топологической классификации ограничений таких диффеоморфизмов на одномерные базисные множества не решался.

Теорема 1. *Пусть $f\colon M^2 \to M^2$ — диффеоморфизм двумерного ориентируемого многообразия рода $p \geqslant 2$, обладающий совершенным базисным множеством Λ. Тогда существует гомотопное тождественному непрерывное отображение $h\colon M^2 \to M^2$ и псевдоаносовский гомеоморфизм $PA_f\colon M^2 \to M^2$ такие, что $hf = PA_f h$, и отображение h отображает множество $\bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^s_x$ на $\mathcal{F}^s$ и множество $\bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^u_x$ на $\mathcal{F}^u$.*

Периодическую $p \in M^2$ гомеоморфизма PA_f будем называть отмеченной типа $k \geqslant 2$, если множество $h^{-1}(p) \cap \Lambda$ содержит в точности k ($k \geqslant 2$) периодических точек, а через P^k_f множество всех отмеченных точек типа k. Обозначим через K_f множество всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $P^k_f \neq \varnothing$. Заметим, что множества K_f и P^k_f для любого $k \in K_f$ конечны.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть f и f' A-диффеоморфизмы замкнутого ориентируемого двумерного многообразия M^2 рода $p \geqslant 2$, обладающие совершенными просторно расположенными аттракторами Λ и Λ' соответственно. Тогда для того, чтобы существовал гомеоморфизм $g\colon M^2 \to M^2$ такой, что $f'|_{\Lambda'} = g \circ f \circ g^{-1}|_{\Lambda'}$, необходимо и достаточно, чтобы $K_f = K_{f'}$, и существовал гомеоморфизм $h\colon M^2 \to M^2$ такой, что $P_{f'} = h \circ P_f \circ h^{-1}$ и $h(P^k_f) = P^k_{f'}$ для любого $k \in K_f$.*

Благодарности. Автор благодарит В. З. Гринеса за постановку задачи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041).

Литература

[1] Жиров А. Ю., Плыкин Р. В. Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами // Математические заметки. 1995. Т. 58. №. 1. С. 149–152.

Гамильтонов формализм в задаче группового управления

Куржанский А.Б. (Россия)
Факультет ВМК МГУ
kurzhans@mail.ru

Доклад посвящен проблеме оптимизации в задаче целевого группового управления в условиях препятствий. Указана возможность применения Гамильтонова формализма к её решению.

Математические задачи, порождённые проблемами оптимизации групповых управлений:

· Управление эллипсоидальным движением, включая их конфигурацию. Управление трубками траекторий

· Сбор в стаю, минуя столкновения

· Динамическое программирование (гамильтонов формализм) для группового управления

· Групповое управление внутри эллипсоидальной трубки, совершающей движение среди препятствий

· Координация движений контейнера и стаи. Реконфигурация стаи внутри подвижного контейнера. Виды формаций.

· Оптимизация групповых движений. Групповое быстродействие.

· Принцип оптимальности для группового управления. Понятие обобщённой позиции системы

· Информационное обеспечение группового управления при неполных текущих измерениях

· Задачи группового наблюдения

· Коммуникационные задачи синхронизации и координации составляющих движений.

Условия существования асимптотически устойчивого множества относительно управляемой системы

Ларина Я.Ю. (Россия, Ижевск)
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
yana_larina89@mail.ru

Рассмотрим управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,x,u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = g(x,w_i), \quad (t,x,u,w_i) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p. \end{gathered} \tag{1}$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное непрерывной в метрике Хаусдорфа функцией $t \mapsto M(t)$, где для каждого $t \in [t_0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и замкнуто. Пусть $M^r(t)$ — замкнутая r-окрестность множества $M(t)$, а $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(t)$. Положим $\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}$.

Определение 1. (см. [1]) Множество $\mathfrak{M}$ называется *асимптотически устойчивым* относительно системы (1), если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое число $r > 0$, что для каждого решения $x(t, x_0)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\big(x(t, x_0), M(t)\big) = 0$, где $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y\in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $V^o_{\max}(t, x)$ верхнюю производную в силу системы $\dot{x} = f(t, x, u)$.

Теорема 1. (см. [2]) *Пусть существует функция $V(t, x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что неравенство $V^o_{\max}(t, x) \leqslant 0$ выполнено для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ и*

$$\max_{w\in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x)\big) \quad \text{для всех } x \in N^r(\tau_i), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы (1).

Рассмотрим модель конкуренции двух видов, численности которых равны x_1, x_2.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, & t \neq \tau_i, \\ \dot{x_2} = x_2 - x_2^2 - bx_1x_2, & t \neq \tau_i, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1|_{t=\tau_i} = w_1x_1 \doteq g_1(x_1, x_2, w_1, w_2), \\ \Delta x_2|_{t=\tau_i} = w_2x_2 \doteq g_2(x_1, x_2, w_1, w_2). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь w_1, w_2 — параметры управления, $w = (w_1, w_2) \in W \doteq [w_{11},\ w_{12}] \times [w_{21}, w_{22}]$, $-1 < w_{12} < 0, -1 < w_{22} < 0$. Оба вида могут сосуществовать, если произведение коэффициентов межпопуляционного взаимодействия $ab < 1$.

Обозначим $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$. Пусть M — треугольник, заданный следующим образом: $M = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leqslant C\big\}$, где $C > 0$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in M\}$ и функцию

$$V(t, x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \ \text{ если } \ (x_1, x_2) \in M, \\ x_1 + x_2 - C, \ \text{ если } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M, \end{cases}$$

которая является функцией Ляпунова относительно данного множества. Проведя необходимые вычисления, получим следующие условия. Если для системы (2) выполнено неравенство $a+b < 2$ и множество M такое, что $C \geqslant \dfrac{4}{a+b+2}$, то применима теорема 1, из которой следует, что заданное множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно системы (2), (3).

Литература

[1] Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009, Т. 15. № 3. С. 185–201.

[2] Ларина Я.Ю. Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015, Т.25. Вып. 1. С. 51–59.

Решения гиперэллиптического типа уравнений Шлезингера

Лексин В. П. (Россия, Коломна)
Государственный социально-гуманитарный университет
lexin_vp@mail.ru

Для гипергеометрических систем Жордана-Похгаммера [3, 6]

$$\mathrm{d}\, u_i = - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

анализируются их интегральные решения вида

$$u_i(a_1, \dots, a_n) = \lambda_i \int\limits_{\gamma} (z - a_1)^{\lambda_1} \cdots (z - a_n)^{\lambda_n} \frac{\mathrm{d}\, z}{z - a_i}, \qquad i = 1,\, 2,\, \dots,\, n. \tag{2}$$

В системе (1) и в интегральном представлении решения (2) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – это комплексные параметры, а в интегральном представлении γ является 1-циклом, представляющим класс в группе гомологий с локальными коэффициентами [1] $H_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \mathcal{L})$. Локальная система $\mathcal{L}$ определяется представлением фундаментальной группы $\rho : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \to \mathbb{C}^*$, которое в свою очередь определяется равенствами $\rho(g_j) = \exp 2\pi\lambda_j$ на образующих g_j, $1 \leq j \leq n$ группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, соответствующих обходам точек a_j, $1 \leq j \leq n$ по малым окружностям.

При равных значениях параметров $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ системы вида (1) и решения (2) появляются в работе [5], посвященной исследованию классических r-матриц. При любых положительных значениях параметров λ_j, $1 \leq j \leq n$ системы (1) являются линеаризацией уравнений изгибания многоугольников в трехмерном евклидовом пространстве [4]. Системы (1) появляются также при изучении уравнений изомонодромных деформаций Шлезингера фуксовых систем на сфере Римана [6].

Показано, что к системам вида (1) редуцируются уравнения Шлезингера для наборов верхнетреугольных квадратных матриц некоторого размера $p \geq 2$, с дополнительными ограничениями на собственные числа матриц из набора. Собственные числа каждой матрицы из набора образуют арифметические прогрессии с одним и тем же знаменателем d. Для рационального знаменателя $d = \pm\frac{1}{N}$ параметры получаемых систем (1) будут равны $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \pm\frac{k}{N}$, $1 \leq k \leq p-1$. Показано, что интегралы вида (2) для компонент базисных решений системы (1) являются периодами голоморфных форм на комплексных кривых заданных в двумерном комплексном пространстве уравнениями $w^N = [(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)]^k$, то есть циклы с локальными коэффициентами от многозначных 1-форм можно заменить на обычное интегрирование 1-дифференциальной формы по 1-циклу на многообразии. Для $N = 2$ в работе [2] получены гиперэллиптические решения уравнения Шлезингера для верхнетреугольных матриц размера $p = 2$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-51-150005 НЦНИ-а.

Литература

[1] Deligne P., Mostow G.D. Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy. Publications of IHES. 1986. – V. 63. P. 5–90.

[2] Dragovich V., Schramchenko V. Algebro-geometric solutions to triangular Schlesinger systems. arxiv: 1604.01820v2[math.AG]

[3] Gontsov R.R., Leksin V.P. On the reducibility of Schlesinger isomonodromic families. In "Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012" (S.V.Rogosin, M.V.Dubatovskaya Eds.) Cambridge: Cambridge Scientific Publishers – 2014. – P. 21–34.

[4] Kapovich M., Millson J. Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation. Canad. Math. Bull. 2001. V. 44. № 1. P. 36–60.

[5] Kohno T. Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations. Contemporary Math. 1988. V. 78. P. 339–363.

[6] Лексин В.П. Многомерные системы Жордана–Похгаммера и их приложения. Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 138–147.

Типичные свойства перемешивающих потоков

Липатов М.Е. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова
ergodic@yandex.ru

Рыжиков В.В. (Россия, Москва)
МГУ имени М.В. Ломоносова
vryzh@mail.ru

Полная метрика на множестве перемешивающих потоков вводится аналогично метрике Альперна-Тихонова для перемешивающих преобразований [1], [2]. А.И. Баштанов, используя свой результат о кратной почти независимости образов и наблюдения С.В. Тихонова о плотности бернуллиевских действий, доказал, что типичное перемешивающее преобразование имеет ранг 1 [3]. Мы доказываем другим методом, используя специальные стохастические конструкции, что типичный перемешивающий поток также обладает рангом 1. Из этого вытекает, в силу известных результатов [4], что в пространстве перемешивающих потоков на вероятностном пространстве свойства кратного перемешивания и минимальных самоприсоединений типичны. В частности, типичны тривиальность централизатора и отсутствие факторов у потока.

Работа выполнена в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6222.2018.1).

Литература

[1] Alpern St. Conjecture: In General a Mixing Transformation is Not Two-Fold Mixing // Ann. of Prob. 1985. Vol. 13. No. 1. P. 310–313.

[2] Тихонов С.В. Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 4. С. 135–158.

[3] Баштанов А.И. Типичное перемешивание имеет ранг 1 // Матем. заметки. 2013. Т. 93. № 2. С. 163–171.

[4] Рыжиков В.В. Проблема Рохлина о кратном перемешивании в классе действий положительного локального ранга // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34. № 1. С. 90–93.

Представление B-производной Рисса обобщенно разностным интегралом

Ляхов Л.Н. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
levnlya@mail.ru

Половинкина М.В. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет инженерных технологий
polovinkina-marina@yandex.ru

Производной Рисса порядка α называется псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|^\alpha$ (см. [1]): $(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}[|\xi|^\alpha F[f]]$ где $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, F и F^{-1} — прямое и обратное преобразование Фурье.

Введем сингулярный дифференциальный оператор [2]

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i} + \sum_{j=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Дробной B-производной Рисса будем называть сингулярный псевдодифференциальный оператор [3] $(-\Delta_B)^{\alpha/2} f = F_B^{-1}[\,|\xi|^\alpha F_B[f]\,]$, построенный на основе прямого и обратного смешанных преобразований Фурье-Бесселя

$$F_B[f](\xi) = \int\limits_{R_n} \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i \xi_i)\; e^{-ix''\xi''}\, f(x)\; (x')^\gamma\, dx$$

$$F_B^{-1}[f](x) = C(\gamma)\, F_B[f](x)$$

(в [4] рассматривалось только преобразование Бесселя, т.е. полагалось, что $N = n$). Функция $j_\nu(mx) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)\, J_\nu(mx)}{(mx)^\nu}$, где J_ν — функция Бесселя первого рода, называется j-функцией Бесселя порядка ν (основные свойства этих функций описаны в работе [3] и в книге [2], §1.3).

Обобщенный смешанный сдвиг (по части переменных действуют обобщенные сдвиги Пуассона, по оставшимся переменным — обычные) определен на непрерывных, четных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ функциях следующим образом [3]:

$$(T_x^y f)\,(x', x''-y'') = C(n,\gamma) \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi f(\sqrt{x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha},\, x''-y'') \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\, d\alpha_i.$$

B-гиперсингулярные интегралы (далее используентся сокращение B-г.с.и.) вводятся как интегральные операторы типа обобщённой свёртки, у которых особенность ядра больше чем число $n + |\gamma|$. Эти операторы имеют вид

$$\left(\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\Omega}\varphi\right)(x) = \frac{1}{d_{n,\gamma,l}(\alpha)} \int\limits_{E_n^+} \frac{(\square_t^l \varphi)(x)}{|t|^{n+|\gamma|+\alpha}}\, \Omega(t)\, t^\gamma\, dt\,. \qquad (1)$$

Регуляризация достигается применением обобщенных конечных разностей следуещего вида $(\square_t^l\varphi)(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k\, T_x^{kt}\varphi(x)\,.$

Рассмотрим конструкцию B-г.с.и. при Ω=1 взяв ее с нормирующим множителем $d_{n,\gamma}(\alpha)$, значение которого далее выбрано так, чтобы эта конструкция не зависела от l при $l > \alpha$. По аналогии с риссовым дифференцированием выражение $\left(\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\Omega}\varphi\right)(x)$ будем называть также B-производной Рисса функции $f(x)$ порядка α.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p^\gamma(R_N^+)$, $\alpha > 0$, $1 \le p < \infty, 1 \le r < \infty$. *Тогда для обобщенных конечных разностей* $(\square\square_h^m f)(x)$ *при* $m \ge \alpha$ *(при* α *нечетном* $m = \alpha$*) справедливо представление*

$$(\square_h^m f)(x) = \int\limits_{R_n^+} T^\xi (\square_h^m k_\alpha^\gamma)(x)\, (\mathbf{D}_\alpha^\gamma f)\,.$$

где k_α^γ *— ядро B-потенциала Рисса [4].*

Через S_{ev} будем обозначать подпространство пространства Шварца, состоящее из четных функций.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in S_{ev}$. *Имеет место равенство* $F_B[\mathbf{D}_\gamma^\alpha\varphi](\xi) = (i\xi)^\alpha\, F_B[\varphi](\xi)$.

Литература

[1] Самко С.Г. О пространствах Риссовых потенциалов // Изв. АН, Сер. мат.- 1976.- Т.40, N5.- С.1443-1472.

[2] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. - М.: Наука, 1997.—199 с.

[3] Б. М. Левитан Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. // УМН. 1951, Т. 6. № 2.

[4] Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // ДАН.- 1990.- Т.315, N2.- С.291-296.

Гауссово соотношение для смежных функций Горна H_3 с приращением по первому параметру

Мавлявиев Р.М. (Россия, Казань)
Казанский федеральный университет
mavly72@mail.ru

Гарипов И.Б. (Россия, Казань)
Казанский федеральный университет
ilnur_garipov@mail.ru

Известно [1], что конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Горна можно записать через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!(1-\alpha)_n}F\left(\alpha-n,\beta;\delta;z\right),\quad (|z|<1). \tag{1}$$

В работе [2], приведены следующие Гауссовы соотношения для смежных функций с приращениями по третьему и второму параметру соответственно

$$H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)-H_3\left(\alpha,\beta;\delta-1;z,t\right)=\frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)}zH_3\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t\right), \tag{2}$$

$$H_3\left(\alpha,\beta+1;\delta;z,t\right)-H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=\frac{\alpha}{\delta}zH_3\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t\right). \tag{3}$$

Как указано в [2] функция Горна при нулевом втором аргументе вырождается в функцию Гаусса $H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,0\right)=F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)$. Тогда формулы (2) и (3) перейдут в известные [3] формулы для функции Гаусса

$$F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)-F\left(\alpha,\beta;\delta-1;z\right)=\frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)}zF\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z\right), \tag{4}$$

$$F\left(\alpha,\beta+1;\delta;z\right)-F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)=\frac{\alpha}{\delta}zF\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z\right). \tag{5}$$

Целью нашей работы является доказательство формулы

$$H_3\left(\alpha+1,\beta;\delta;z,t\right)-H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=$$

$$=\frac{\beta}{\delta}zH_3\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t\right)+\frac{t}{\alpha(1-\alpha)}H_3\left(\alpha-1,\beta;\delta;z,t\right) \tag{6}$$

дополняющая формулы (2) и (3).

Рассмотрим Гауссово соотношение [3]

$$F\left(\alpha+1,\beta;\delta;z\right)-F\left(\alpha,\beta;\delta;z\right)=\frac{\beta}{\delta}zF\left(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z\right). \tag{7}$$

Взяв $(\alpha-n)$ вместо α в формуле (7), получим

$$F\left(\alpha-n+1,\beta;\delta;z\right)-F\left(\alpha-n,\beta;\delta;z\right)=\frac{\beta}{\delta}zF\left(\alpha-n+1,\beta+1;\delta+1;z\right). \tag{8}$$

Запишем разность смежных функций Горна с приращением по первому параметру используя представление (1) и объединим ряды

$$I\equiv H_3\left(\alpha+1,\beta;\delta;z,t\right)-H_3\left(\alpha,\beta;\delta;z,t\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!(-\alpha)_n}\left(F\left(\alpha-n+1,\beta;\delta;z\right)-\frac{(-\alpha)_n}{(1-\alpha)_n}F\left(\alpha-n,\beta;\delta;z\right)\right).$$

Возпользовавшись выражением $\frac{(-\alpha)_n}{(1-\alpha)_n}=1-\frac{n}{n-\alpha}$, получим

$$I\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!(-\alpha)_n}\left(F\left(\alpha-n+1,\beta;\delta;z\right)-F\left(\alpha-n,\beta;\delta;z\right)\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!(-\alpha)_n}\frac{n}{(n-\alpha)}F\left(\alpha-n,\beta;\delta;z\right)=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!(1-(\alpha+1))_n} \frac{\beta}{\delta} zF\big((\alpha+1)-n, \beta+1; \delta+1; z\big) +$$

$$+ \frac{(-t)}{(-\alpha)(1-\alpha)_n} \sum_{n-1=0}^{\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!(1-(\alpha-1))_{n-1}} F\big((\alpha-1)-(n-1), \beta; \delta; z\big).$$

Свернув ряды по формуле (1), получим

$$I \equiv \frac{\beta}{\delta} zH_3\left(\alpha+1, \beta+1; \delta+1; z, t\right) + \frac{t}{\alpha(1-\alpha)} H_3\left(\alpha-1, \beta; \delta; z, t\right).$$

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра (2-е изд.). М.: Наука, 1973.

[2] Капилевич М.,Б. О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. №9. С. 1239-1254.

[3] Градштейн И. С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.). М.: Наука, 1963.

Полигармонические подпространства, разложение в ортогональную сумму

Марковский А. Н. (Россия, Краснодар)
Кубанский государственный университет
mark@kubsu.ru

Определяется обратный оператор Лапласа и строится процедура выделения из $f \in L_2(Q)$ полигармонических составляющих; Q – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Доказывается разложение пространства полигармонических функций в ортогональную сумму соответствующих подпространств. Некоторые частные случаи этого разложения рассматривались в [1, 2].

Дается представление полигармонической (m-гармонической) в Q функции устанавливающее взаимно однозначное соответствие с m гармоническими в Q функциями отличное от разложения Альманси [3]. Результаты применяются к решению задачи Рикье [4] для полигармонического уравнения.

Рассматриваются системы сдвигов фундаментальных решений полигармонических уравнений. Приводится достаточное условие полноты таких систем; гармонический случай ($m = 1$) рассматривался в [5, 6]. Приводятся приложения к решению краевых задач для полигармонических уравнений.

Литература

[1] Рамазанов А. К. Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям // Матем. заметки, 1999, том 66, выпуск 5, 741-759.

[2] Бесов К. О. О граничном поведении компонент полигармонических функций // Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 4, 518-530.

[3] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

[4] Карачик В. В. Метод нормированных систем функций, Челябинск: ЮУрГУ, 2014.

[5] Купрадзе В. Д. О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук, 22:2 (1967), С. 59–107.

[6] Лежнев А. В., Лежнев В. Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009.

Прогнозирующее оптимальное управление большими динамическими системами со случайными ограничениями

Марьясин О.Ю. (Россия, Ярославль)
ФГБОУ ВО "Ярославский государственный технический университет"
maryasin2003@list.ru

Огарков А.А. (Россия, Ярославль)
ФГБОУ ВО "Ярославский государственный технический университет"
drivemox@mail.ru

В настоящее время в западной научной прессе активно обсуждается подход, использующий прогнозирующие модели для управления различными динамическими системами. Этот подход получил название Model Predictive Control (MPC) и уже давно хорошо зарекомендовал себя при применении в таких областях, как химия и нефтехимия, а в последнее время начинает широко применяться в энергетике, на транспорте и других сферах.

Для управления большими динамическими системами, состоящими из множества взаимосвязанных подсистем, используются распределенные версии MPC, такие как распределенный MPC и иерархический, распределенный MPC [1]. Из них только иерархический, распределенный MPC-алгоритм позволяет достичь минимума глобального критерия качества для всей системы с учетом взаимосвязей между подсистемами. При реализации иерархического, распределенного MPC-алгорима на каждом шаге его выполнения возникает проблема скоординированного решения задач математического программирования для каждой из подсистем. Для критерия оптимальности в виде нормы l_2 это будут задачи квадратичного программирования.

Авторы предлагают метод решения глобальной задачи математического программирования, решаемой на каждом шаге MPC-алгорима, основанный на методах явной декомпозиции и декомпозиции путем разделения ресурсов [2],[3]. При этом все ограничения типа равенства, связанные с выполнением условий координации, переводятся в ограничения типа неравенства. Это позволяет, в рамках единого подхода, учитывать и связи между подсистемами, и ограничения, связанные с объемом расходуемых ресурсов. Если на выполнение ограничений в локальных задачах оказывают влияние случайные факторы, то в этом случае может быть поставлена одноэтапная задача стохастического программирования с жесткими и/или мягкими ограничениями [4].

Авторы использовали предложенный метод для решения задачи управления энергопотреблением и микроклиматом больших многозонных зданий. Математическая модель микроклимата большого многозонного здания основана на уравнениях теплового и материального баланса и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для обеспечения требуемого микроклимата в здании могут использоваться различные виды энергоресурсов, в том числе и возобновляемые. Для каждого вида энергоресурсов существуют ограничения как для отдельных зон, так и для всего здания. Поэтому расход энергоресурсов на управление микроклиматом будет зависеть от расхода энергоресурсов на другие, в том числе бытовые, нужды. Так как расход энергоресурсов на бытовые нужды оказывается случайным, то и ограничения на расход энергоресурсов для управления микроклиматом будут случайными.

Результаты численных экспериментов показали преимущества использования предложенного авторами метода для управления микроклиматом больших многозонных зданий. Наличие различных видов энергоресурсов позволяет, например, при резком увеличении потребления тепловой энергии в часы пик, связанном с ее расходом на бытовые нужды, увеличить, для поддержания требуемого микроклимата, расход электроэнергии или газа. При этом в целом обеспечивается минимум энергозатрат с учетом стоимости энергоресурсов по текущим тарифам.

Литература

[1] Scattolini R. Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control. – A review. Journal of Process Control, 19, 2009, P. 723–731.

[2] Артамонов А. Г., Володин В. М., Авдеев В. Г. Математическое моделирование и оптимизация плазмо-химических процессов. М.: Химия, 1989.

[3] Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. М.: Наука, 1975.

[4] Островский Г. М., Зиятдинов Н. Н., Лаптева Т. В. Оптимизация технических систем. М.: КНОРУС, 2012.

Об одной задаче дорожного движения

Мастерков Ю. В. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
Jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается задача о существовании "зелёной волны" при организации дорожного движения. На заданном участке дороги с двусторонним движением, в определенных точках (на перекрестках) стоят светофоры, работающие одинаковое время $\tau \geq \varepsilon > 0$ в каждом из режимов "красный-зеленый" с периодичностью 2τ. Максимальная разрешенная скорость на данном участке дороги равна v_0. Возникают следующие вопросы:

1. *Можно ли организовать работу светофоров так, чтобы в каждом направлении существовала "зелёная дорога" для движения со скоростью* v_0?

2. *Каково гарантированное время* $\theta(\tau)$ *продолжительности "зелёной волны" для движения с максимальной скоростью* v_0 *в каждом направлении за период* 2τ?

Теорема 1. *Пусть* n — *количество светофоров на прямолинейном участке дороги. Тогда для любых* $\tau > 0$ *и* $v_0 > 0$ *можно организовать работу* n *светофоров так, что:*

a) все светофоры будут работать время τ *в каждом из режимов "красный-зеленый" с периодичностью* 2τ;

b) в каждом направлении существует "зеленая волна" продолжительностью $\theta \geq \tau/n$ *для движения с максимальной скоростью* v_0.

Быстрая сегментация растровых изображений

Медведев Ю.А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
Еропов И.А. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

Использование видеоинформации в современном мире стремительно возрастает. Интерес к методам обработки изображений исходит из двух основных областей её применения, которыми являются: повышение качества изображений для улучшения его визуального восприятия человеком и обработка изображений для их хранения, передачи и представления в автономных системах машинного зрения. Рассматривается сегментация растровых изображений с целью их сжатия.

Изображение можно определить как двумерную функцию $f(x, y)$, где x и y – координаты в *пространстве* (конкретно, на плоскости), значение f которой в любой точке, задаваемой парой координат (x, y), называется *интенсивностью* или *уровнем серого* изображения в этой точке. Если величины x, y и f принимают конечное число дискретных значений, то говорят о *цифровом изображении.* Цифровой *обработкой изображений* называется обработка цифровых изображений с помощью ЦВМ (компьютеров).

Цифровое изображение состоит из конечного числа элементов, каждый из которых расположен в конкретном месте и принимает определенное значение. Эти элементы называются элементами изображения или пикселями. Зрение является наиболее совершенным из наших органов чувств, поэтому зрительные образы играют важнейшую роль в человеческом восприятии. Однако в отличие от людей машинная обработка изображений охватывает практически весь электромагнитный спектр от гамма-излучения до радиоволн.

"Сегментация изображений представляет собой одну из самых сложных задач обработки изображений. Конечный успех компьютерных процедур анализа изображений во многом определяется точностью сегментации" [1]. Существующие (массовые) алгоритмы сжатия изображений с потерями или без неё используют процедуры сегментации. Почему? Во-первых, для сжатия изображения без потерь необходима 100% точность сегментации, что в десятки раз увеличивает время кодирования. Во-вторых, для сжатия изображений с потерями требуется заранее устанавливать параметры точности сегментации, которые для разных изображений, особенно при грубых сегментациях, различны.

Алгоритмы сегментации изображений основываются на одном из двух базовых свойств сигнала яркости: разрывности и однородности. В первом случае подход состоит в разбиении изображения на основе резких изменений сигнала, таких как перепады яркости на изображении. Вторая категория методов использует разбиение изображения на области, однородные в смысле заранее заданных критериев. Алгоритмы сегментации предназначены для обнаружения таких объектов как изолированная точка, линия; область постоянной яркости; контур. Эти алгоритмы базируются на локальных и глобальных операторах, которые и создают проблемы использования процедур сегментации для сжатия изображений.

Литература

[1] Сэломон Д. Сжатие данных, изображения и звука. – М.: Техносфера, 2004.

[2] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2006.

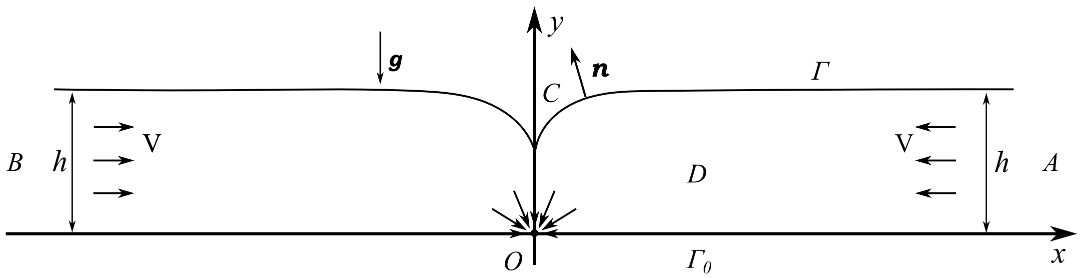
[3] Ватолин Д. и др. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М., 2002.

[4] Яне Б. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2007.

О форме свободной поверхности потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости с сингулярным стоком

Местникова А. А. (Россия, Новосибирск)
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
mestnikova@hydro.nsc.ru

Рассматривается двумерная стационарная задача о течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной плоским горизонтальным дном снизу и свободной поверхностью сверху. Нижняя граница предполагается непроницаемой всюду кроме одной точки, в которой расположен сингулярный точечный сток заданной интенсивности. Течение предполагается потенциальным. Верхняя граница является неизвестной и должна быть определена в процессе решения задачи.



С помощью конформных отображений и обобщенного метода Леви-Чивита было выведено уравнение типа Некрасова на единичной окружности. Это уравнение точно описывает форму свободной поверхности. Показано, что для чисел Фруда, превышающих некоторое значение, существует единственное решение задачи, такое, что свободная поверхность монотонно убывает при переходе от бесконечности к точке над стоком. В точке над стоком свободная поверхность имеет особенность типа касп. Проведено исследование гладкости решения.

Об адекватности математической модели продольно-поперечного изгиба упругоподкрепленной прямоугольной полосы

Минаева Н.В., Сизиков А. В. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
nminaeva@yandex.ru, sizikovandrei94@mail.ru

Рассматривается проблема непрерывной зависимости решения, описывающего прогиб пластины от параметров, характеризующих поперечную нагрузку и жесткость основания. Реакция основания описывается однопараметрической моделью, основанной на гипотезе Винклера. Пластина находится в условиях сжатия продольными распределенными усилиями интенсивности p и q, приложенными по краям. Одна пара кромок жестко защемлена, а другая шарнирно оперта.

Согласно линейной теории жестких пластин, функция u, описывающая форму изогнутой пластины, является решением краевой задачи [1], [2]:

$$\begin{gathered}\nabla^4 u(x,y) + q\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r + ku = 0\\ u(0,y) = u(l,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0\\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть при $r(x,y) = r_0(x,y)$ и $k = k_0$ задача (1) имеет решение

$$u(x,y) = u_0(x,y) \tag{2}$$

Оно будет описывать прогиб рассматриваемой пластины, если функция u непрерывно зависит от $r(x,y)$ и k при $r(x,y) = r_0(x,y)$, $k = k_0$. В силу линейности задачи это требование равносильно требованию адекватности математической модели (1). Для исследования этой зависимости, согласно [3], [4], необходимо построить вспомогательную задачу относительно $\zeta(x,y)$, определяемую следующим образом:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \zeta(x,y) \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая, что (2) — решение, получаем:

$$\begin{gathered}\nabla^4 \zeta(x,y) + q\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k_0\zeta = 0\\ \zeta(0,y) = \zeta(l,y) = \zeta(x,0) = \zeta(x,1) = 0\\ \left.\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_{y=1} = 0\end{gathered} \tag{4}$$

Основным условием непрерывной зависимости $u(x,y)$ от $r(x,y)$ и k является требование существования только тривиального решения у линеаризованной задачи, соответствующей (4).

В результате проведенных исследований было получено условие нетривиальности решения линеаризованной вспомогательной задачи (4):

при $0 < p < 2\gamma^2$ и $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\lambda_1\lambda_2(1 - \cosh\lambda_1\cosh\lambda_2) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sinh\lambda_1\sinh\lambda_2 = 0 \tag{5}$$

при $0 < p < 2\gamma^2(1 + \sqrt{1 + k_0/\gamma^4})$ и $0 < q < -\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$\alpha^2\sin^2\beta - \beta^2\cosh^2\alpha = 0 \tag{6}$$

при $p > 2\gamma^2$ и $-\frac{p^2}{4\gamma^2} + p + \frac{k_0}{\gamma^2} < q < \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\beta_1\beta_2(1 - \cos\beta_1\cos\beta_2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2)\sin\beta_1\sin\beta_2 = 0 \tag{7}$$

при $0 < p$ и $q > \gamma^2 + \frac{k_0}{\gamma^2}$

$$2\lambda_1\beta_1(1 - \cosh\lambda_1\cos\beta_1) + (\lambda_1^2 - \beta_1^2)\sinh\lambda_1\sin\beta_1 = 0 \tag{8}$$

С точностью до обозначений (8) совпадает с результатом, полученным в [2], если положить $p = 0$ и $k_0 = 0$.

Таким образом, если параметры пластины и сжимающих усилий таковы, что соответствующая им точка лежит внутри области, ограниченной линией (5)-(8), то решение (2) непрерывно зависит от $r(x,y)$ и k при $r(x,y) = r_0(x,y)$, $k = k_0$. Если же точка лежит вне этой области, то (2) уже не будет приближенно описывать поведение рассматриваемой пластины. Следовательно, линии (5)-(8) будут определять границу адекватности математической модели (1).

Литература

[1] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1963. – 636 с.

[2] Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.

[3] Darinskii B. M., Sapronov Y. I. and Tsarev S. L. // J. Math. Sci., 2007. – 145 5311.

[4] Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. – 235 с.

Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и вычисление сумм некоторых сходящихся рядов[28]

Мирзоев К.А. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
mirzoev.karahan@mail.ru

В докладе будет изложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов найти суммы некоторых сходящихся рядов. Приведём формулировку одной из теорем, справедливость которой можно установить предлагаемым методом.

Теорема 1. *Пусть $P_k(x)$ - некоторый многочлен степени k ($k \geq 2$) с вещественными коэффициентами и такой, что $P_k(n+\alpha) \neq 0$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\alpha \in [0,1)$, и пусть при $(x,t) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ функция $G(x,t)$ является функцией Грина самосопряжённого дифференциального оператора, порождённого выражением*

$$l[y] = P_k(i\frac{d}{dx})y$$

и граничными условиями

$$y(0) = e^{2\pi i\alpha}y(2\pi), \quad y'(0) = e^{2\pi i\alpha}y'(2\pi), \quad \ldots, \quad y^{(k-1)}(0) = e^{2\pi i\alpha}y^{(k-1)}(2\pi).$$

Тогда при $x \in [0,2\pi]$ функция $G(x,x)$ не зависит от x и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_k(n+\alpha)} = 2\pi G(x,x).$$

[28] Автор поддержан РНФ, грант № 17-11-01215.

Об асимптотике кусочно аналитических функций

Митин С.П. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет имени А.Г.и Н.Г.Столетовых
miser65@mail.ru
Солдатов А.П. (Россия, Москва)
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук
soldatov48@gmail.com

Для четного натурального $n = 2n'$ положим $\theta = \pi/n'$ и рассмотрим на единичной окружности $|z| = 1$ точки $\tau_j = e^{(j-1)\theta}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Соответствующие радиальные отрезки $l_j = [0, \tau_j]$ разбивают единичный круг $\{|z| < 1\}$ на n открытых секторов D_j с граничными отрезками l_j и l_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant n$ (считая $l_{n+1} = l_1$). Эти отрезки служат разрезами для открытого множества $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n = \{|z| < 1\} \setminus l$, $l = l_1 \cup \ldots \cup l_n$.

Пусть на D задана гармоническая функция $u(z)$, допускающая оценку

$$|u(z)| \leqslant C|z|^\alpha \tag{1}$$

с некоторым вещественным α, функция v гармонически сопряжена к u в каждом секторе D_j; задано положительное число ρ и в дополнение к (1) гармоническая функция u такова, что $\phi = u + iv$ удовлетворяет краевым условиям

$$\operatorname{Re}(\phi^+ - \phi^-)\big|_{l_j} = 0, \quad \operatorname{Im}(\phi^+ - \rho_j\phi^-)\big|_{l_j} = \xi_j, \; 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2}$$

где $\xi_j \in \mathbb{R}$ и положено $\rho_j = \rho$, если j нечетно, и $\rho_j = \rho^{-1}$, если j четно.

Возникает вопрос, какова асимптотика функции $\phi(z)$ при $z \to 0$ в секторах D_j.

В случае, когда функция ϕ принадлежит весовому пространству Гельдера в секторах D_j, вопрос об асимптотике был решен в работе [1] в терминах дискретного множества Δ на вещественной прямой.

Обозначим $C^\mu_0(D, 0)$, $0 < \mu < 1$, пространство всех ограниченных функций $\varphi(z)$, $z \in D$, для которых функция $\psi(z) = |z|^\mu\varphi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ в каждом секторе D_j.

Основные свойства весовых пространств C^μ_α приведены в [2]. В частности, эти пространства с возрастанием α монотонно убывают по вложению и можно ввести классы $C^\mu_{\alpha+0} = \cup_{\varepsilon>0} C^\mu_{\alpha+\varepsilon}$, $\quad C^\mu_{\alpha-0} = \cap_{\varepsilon>0} C^\mu_{\alpha-\varepsilon}$.

В принятых обозначениях основной результат [1] формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \notin \Delta$ и $\delta = \max\{t \in \Delta,\ t > \alpha\}$. Пусть гармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит $C^\mu_\alpha(D, 0)$ и аналитическая в D функция $\phi = u+iv$ удовлетворяет краевым условиям (2).*

Тогда она представима в виде

$$\phi(z) = \begin{cases} a(z) + b\ln z + \phi_0(z), & \delta = 0, \\ c(z)z^\delta + \phi_0(z) & \delta \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\phi_0 \in C^\mu_{\delta+0}(D, 0)$, $\;b \in \mathbb{R}$ и вещественная функция $a(z)$ и комплексная $c(z)$ сохраняют постоянные значения в каждом секторе D_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Следующая основная теорема показывает, что в общем случае, когда гармоническая в D функция u только удовлетворяет оценке (1), теорема 1 сохраняет свою силу для меньшего круга $|z| < r < 1$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \notin \Delta$ и $\delta = \max\{t \in \Delta,\ t > \alpha\}$. Пусть гармоническая в D функция $u(z)$ подчинена оценке (1) и аналитическая в D функция $\phi = u + iv$ удовлетворяет краевым условиям (2).*

Тогда для любого $0 < r < 1$ в секторах $S_j = D_j \cap \{|z| < r\}$ функция ϕ представима в виде (3) с $\phi_0 \in C^\mu_{\delta+0}(S_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Литература

[1] Жура Н.А., Солдатов А.П., Об асимптотике кусочно – аналитической функции, удовлетворяющей контактным условиям, Сибирский матем. Журнал, 2012, т. 53, № 5, 1001 - 1006.

[2] Солдатов А.П., Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи, Современная математика. Фундаментальные направления, 2016, Т. 63, С. 1-179.

О квазипериодических возмущениях систем с предельными циклами

Морозов А.Д. (Россия, Н. Новгород)
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского
morozov@mm.unn.ru
Морозов К.Е. (Россия, Н. Новгород)
Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского
kirwamath@gmail.com

Рассматриваются квазипериодические m-частотные возмущения систем с предельными циклами, близкие к двумерным нелинейным гамильтоновым. В окрестности резонансных уровней невозмущенной системы строится усредненная система [1]. Проводится исследование этой системы в случае, когда резонансный уровень невозмущенной гамильтоновой системы близок к уровню, в окрестности которого у автономной возмущенной системы существует предельный цикл. Обсуждается вопрос о прохождении $(m+1)$-мерного тора через резонансную зону.

Работа поддержана РФФИ, грант 18-00306а.

Литература

[1] Морозов А.Д., Морозов К.Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 12, с. 1607–1615.

Двухточечные формулы средних для эллиптических уравнений в неевклидовых пространствах

Мугланов А.Л. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
muglanov_artem@mail.ru
Половинкин И.П. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
polovinkin@yandex.ru
Половинкина М.В. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет инженерных технологий
polovinkina-marina@yandex.ru

Следуя конструкции А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева, рассмотрим две точки $(\chi^{(j)}, \tau^{(j)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1, 2$, где $\chi^{(j)} = (\chi_1^{(j)}, \chi_2^{(j)}, \ldots, \chi_n^{(j)})$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие условию $|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}| < |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|$. Построим матрицу $A(\dim A = n \times n)$ следующим образом. Зафиксируем какой-нибудь индекс iи положим $a_{ij} = \chi_j^{(1)} - \chi_j^{(2)}/|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|$, $j = 1, \ldots, n$. Оставшиеся позиции матрицы A заполним исходя из условий $AA^T = I$, $\det A = 1$, где A^T — матрица, транспонированная к матрице A, $I = \|\delta_{ij}\|$ — единичная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть A_i — матрица, полученная из матрицы А заменой i-го столбца нулями. Введем усредняющий оператор S_ϱ и оператор B_ϱ^n по формулам

$S^n v = S_\varrho^n v = \sqrt{\pi^{1-n}} \int_{|\xi|=\varrho} v\,(\eta,\, \sigma)\; d\omega_\xi,\; |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}| > 0,$

$S^n = S_\varrho^n v = \gamma(n) \int_{|\xi|=\varrho} v\left(\chi^{(2)} + \xi, (\tau^{(1)} + \tau^{(2)})/2\right) d\omega_\xi,\; \chi^{(1)} = \chi^{(2)},$

$B^n v = B^n_\varrho\, v = \varrho\,(\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{(n-1)/2}\,(1/\varrho S_\varrho v)\,,\ n = 1(\mathrm{mod}2),$
$B^n v = B^n_\varrho\, v = \pi^{-1/2}\,(\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{n/2}\int_0^\varrho S_\varrho v\, d\theta/\sqrt{\varrho^2-\theta^2},\ n = 0(\mathrm{mod}2),$
где $d\omega_\xi$ — элемент площади поверхности сферы $|\xi| = \varrho$ в $\mathbb{R}^n$,

$$\eta = \frac{|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|\,\xi_i(\chi^{(1)}-\chi^{(2)})}{|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|\sqrt{(\tau^{(1)}-\tau^{(2)})^2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|^2}} + \frac{\chi^{(1)}+\chi^{(2)}}{2} + A_i\xi,$$

$$\sigma = \left(\tau^{(1)}+\tau^{(2)}\right)/2 - |\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|\xi_i/\sqrt{(\tau^{(1)}-\tau^{(2)})^2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|^2}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{x = (x_1,\ldots,x_n,z) = (x,z)\}, n \geq 2,$ множество $S_n^+ = \{(x,z)\in S_n : z = \sqrt{1-|x|^2}\}$ — верхнюю половину сферы с метрикой $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{i=1}^n(\delta_{ik} + x_ix_k/z^2)dx_idx_k$ и оператором Лапласа-Бельтрами в этой метрике Δ_ω.

Введем в рассмотрение отображение $S_n\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (преобразование П. Лакса и Р. Филлипса) с помощью формул $\tau = \tau_\pm(x,z,t) = \pm\sin t/(z\mp\cos t)$, $\chi = \chi_\pm(x,z,t) = \pm x/(z\mp\cos t)$, где $\chi = (\chi_1,\ldots,\chi_n)$. Введем также замену функции $u(x,z,t) = (z - \cos t)^{-(n-1)/2}v(\chi(x,z,t),\tau(x,z,t))$.

Теорема 1. *Для любых двух точек* $(x^{(1)},z^{(1)})$, $(x^{(2)},z^{(2)})\in S_n$ *и любых двух значений* $t^{(1)}$, $t^{(2)}\in(0,2\pi]$, *удовлетворяющих условию*

$$(z^{(1)}z^{(2)}+x^{(1)}x^{(2)}-\cos(t^{(1)}-t^{(2)}))/((z^{(1)}-\cos t^{(1)})(z^{(2)}-\cos t^{(2)}))>0,$$

регулярное решение $u(x)$ *уравнения* $\Delta_\omega u - ((n-1)/2)^2\,u = 0$ *удовлетворяет формуле среднего значения*

$$(z^{(1)}\mp\cos t^{(1)})^{(n-1)/2}u(x^{(1)},z^{(1)}) + (z^{(2)}\mp\cos t^{(2)})^{(n-1)/2}u(x^{(2)},z^{(2)}) =$$

$$= B^n_\varrho(v(x(\chi,\tau),z(\chi,\tau)),\ \varrho = \sqrt{(\tau^{(1)}-\tau^{(2)})^2-|\chi^{(1)}-\chi^{(2)}|^2}/2.$$

Рассмотрим реализацию П геометрии Лобачевского на полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = (x',x_n) : x_n > 0\}, n\geq 2$, с метрикой $ds^2 = dx^2/x_n^2$ и оператором Лапласа-Бельтрами Δ_Π.

Теорема 2. *Для любых двух точек* $x^{(1)}$, $x^{(2)}\in\Pi$ *и любых двух значений* $t^{(1)}$ *и* $t^{(2)}\in\mathbb{R}$, *удовлетворяющих условию*

$$(x_n^{(2)}\,e^{t^{(1)}}-x_n^{(1)}\,e^{t^{(2)}})\,(x_n^{(1)}\,e^{t^{(1)}}-x_n^{(2)}\,e^{t^{(2)}}) - e^{t^{(1)}+t^{(2)}}|\triangle x'|^2\ > 0,$$

регулярное решение $u(x)$ *уравнения* $\Delta_\Pi u + ((n-1)/2)^2\,u = 0$ *удовлетворяет формуле среднего значения*

$$e^{t^{(1)}(1-n)/2}u(x^{(1)}) + e^{t^{(2)}(1-n)/2}u(x^{(2)}) = B^n_\varrho(fu(x(\chi,\tau))).$$

$$x' = \chi'/(\tau+\chi_n), x_n = \sqrt{\tau^2-|\chi|^2}/(\tau-\chi_n), t = \ln\sqrt{\tau^2-|\chi|^2}, f = (\tau^2-|\chi|^2)^{(1-n)/4}.$$

Об эллиптических и параболических уравнениях с мерой в правой части

Мукминов Ф.Х. (Россия, Новосибирск)
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
mfkh@rambler.ru

В работе [1] рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$-\mathrm{div}a(x,u,\nabla u) + b(x,u,\nabla u) = \mu,$$

с диффузной мерой в правой части $\mu = f(x) - \mathrm{div}F(x)$. Здесь $f \in L_1(\Omega)$, $F \in (L_{p'(.)}1(\Omega))^n$. Условие коэрцитивности наложено в виде

$$a(x,r,y)y \geqslant \alpha|y|^{p(x)}.$$

В нашей работе показано, что если ввести переобозначения

$$\overline{a}(x,r,y) = a(x,r,y) + F(x),\ \overline{b}(x,r,y) = b(x,r,y) - f(x).$$

и записать условие коэрцитивности в виде

$$\overline{a}(x,r,y)y \geqslant \alpha|y|^{p(x)} + yF(x),$$

то доказательство существования ренормализованного решения задачи Дирихле проводится обычными средствами.

В работе [2] в области $D^T = (0,T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача параболического уравнения

$$(\beta(u))'_t = \triangle_p u + b(t,x,u) + \mu,$$

с диффузной мерой в правой части $\mu = f(t,x) + \mathrm{div}F(t,x) + g_t(t,x)$. Здесь $f \in L_1(D^T)$, $g \in L_{p'(.)}1!(D^T)$, $F \in (L_{p'(.)}1!(D^T))^n$, и также допустима замена

$$\overline{a}(t,x,u,\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u + F(t,x),\ \overline{b}(t,x,u) = b(t,x,u) + f(t,x).$$

Новизну вносит лишь слагаемое g_t.

Литература

[1] M. B. Benboubker, H. Chrayteh, M. El Moumni, H. Hjiaj. Entropy and Renormalized Solutions for Nonlinear Elliptic Problem Involving Variable Exponent and Measure Data// Acta Mathematica Sinica, English Series Jan., 2015, Vol. 31, No. 1, pp. 151–169.

[2] D. Blanchard, F. Petitta, H. Redwane. Renormalized solutions of nonlinear parabolic equations with diffuse measure data //Manuscripta Mathematica July 2013, Volume 141, Issue 3–4, pp 601–635.

О гашении колебаний движущегося бумажного полотна

Л. А. Муравей (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
l_muravey@mail.ru

1. *Модель.* Рассматривается следующая модель поперечных колебаний $w(x,t)$, связанных с движением бумажного полотна (см. [1]):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v_0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(v_0^2 - c^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g\left(x,t\right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

где v_0 – вектор продольной скорости движения полотна, c – продольная скорость распространения возмущений в полотне, $g\left(x,t\right)$ – управляющая функция. При этом заданы граничные условия

$$w\left(0,t\right) = w\left(l,t\right) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

и начальные возмущения

$$w\left(x,0\right) = h_0\left(x\right), w_t\left(x,0\right) = h_1\left(x\right), \quad x \in [0;l]\,. \tag{3}$$

2. *Метод автомодельных решений смешанной задачи (1)-(2) при* $g\left(x,t\right) = 0$. Заметим, что для решения смешанной задачи обычным приемом (см. [2]) устанавливается «закон сохранения энергии»:

$$E\left(t\right) = \int_0^l \left[w_t^2\left(x,t\right) + \left(c^2 - v_0^2\right) w_x^2\left(x,t\right)\right] dx \equiv Const. \tag{4}$$

При этом, для вывода проблемы моментов требуется найти его решение в виде ряда стоячих волн, то есть такую систему стоячих волн $v_k(x,t)$, $k = 1, 2, \dots$, что система $\{v_k(x,0)\}_{k=1}^{\infty}$ была бы базисом Рисса в $L_2(-l,l)$. Показано, что

$$v_k(x,t) = \exp\left\{\pm\frac{ik\pi}{cl}\left[\left(v_0^2 - c^2\right)t - v_0 x\right]\right\}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{5}$$

причем базисность Рисса системы $\{v_k(x,0)\}_{k=1}^{\infty}$ вытекает из работ [3-5].

3. *О гашении колебаний движущегося полотна.* Показано, что при $h_0(x) \in W_0^1(0,l)$, $h_1(x) \in L_2(0,l)$ найдётся такое минимальное время $t = T_0 = \frac{2lc}{(c^2 - v_0^2)}$ и такое оптимальное управление $g_0(x,t) \in L_2(0 \le x \le l, 0 \le t \le T_0)$, что в момент времени T_0 проблема моментов имеет единственное решение $g_0(x,t)$, при котором энергия $E(t)$ системы (1)-(3) тождественно равна 0, то есть $w(x,T_0) \equiv 0$, $w_t(x,T_0) \equiv 0$. Таким образом, колебания струны за время T_0 гасятся полностью. Заметим, что аналогично [6] колебания бумажного полотна можно полностью погасить за время T_0, если управление $g(x,t)$ сосредоточено на произвольном отрезке $[\gamma,\delta] \subset [0,l]$, то есть при $g(x,t) \in L_2(\gamma \le x \le \delta, 0 \le t \le T_0)$.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00425.

Литература

[1] Banchuk N., Jeronen J., Neittaanmaki P., Saksa T., Tuovinen T. Mehanics of moving materials. Springer. 2014.

[2] Михайлов В. П. Уравнения в частных производных. М., Наука. 1986.

[3] Muravey L. A. On the suppression on membrane oscillations // Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system". Moscow. 1990. P. 50–51.

[4] Билалов Б. Т., Муравей Л.А. О гашении колебаний больших механических систем // Труды международного симпозиума Intels-96. С.-Петербург. Ч.П. 1996. С. 246–254.

[5] Билалов Б. Т. О базисности системы $\left\{e^{i\alpha nx}\sin(nx)\right\}$ экспонент со сдвигом // ДАН. Т. 345. №2. 1995. С. 644–647.

[6] Lagness J. E. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // SLAM Journ. Control and Optim. 1983. V. 1. №1. P. 68–85.

Конструирование ограниченного управления для одного класса нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления

Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А., Мирзахмедова Г.А. (Казахстан, Алматы)
НИИ Математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
murzabekov-zein@mail.ru, aipanov@mail.ru, gulbanu.myrzahmedova@mail.ru

В технических и экономических системах существуют множество различных типов нелинейностей, поэтому возникают и различные подходы к построению законов управления с обратной связью, рациональных относительно заданного критерия качества [1, 2].

В данной работе рассмотрена задача оптимального управления для одного класса нелинейных систем с закрепленными концами траекторий и ограничениями на управления. Математическая модель рассматриваемой системы управления имеет вид:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y)u(t) + \psi(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad y(T) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{1}$$

Здесь $y = (y_1, \dots, y_n)^*$ означает вектор состояния объекта, $u = (u_1, \dots, u_n)^*$ – вектор управления, матрица $D(y)$ и вектор $\psi(y)$ удовлетворяют условиям: $D(y) > 0$, $\psi(0) = 0$. Компоненты вектора управления u удовлетворяют двусторонним ограничениям:

$$u(t) \in U(t) = \{u \mid \gamma_1(t) \leqslant u(t) \leqslant \gamma_2(t), \ t \in [t_0, T], \ \gamma_1, \gamma_2 \in C[t_0, T]\}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что система (1) вполне управляема в момент времени t_0. Обозначим через $\Delta[t_0,\,T]$ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0,\,T]$, и соответствующих траекторий $y(t,\,u)$ системы (1), определенных на отрезке $t \in [t_0,\,T]$.

Пусть на множестве $\Delta[t_0,\,T]$ задан функционал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [y(t)^* Q(t) y(t) - 2(K(t)y(t) + q(t))^* \psi(y) + (D(y)u(t))^* R(t) D(y) u(t)]\,dt. \qquad (3)$$

Здесь $R(t)$ – симметрическая положительно определенная $(r \times r)$-матрица; $Q(t)$ – симметрическая положительно полуопределенная $(n \times n)$-матрица. Ставится задача: *найти синтезирующее управление* $u(y,\,t)$*, которое удовлетворяет ограничениям* (2) *и переводит систему* (1) *из заданного начального состояния* $y(t_0) = y_0$ *в желаемое конечное состояние* $y(T) = 0$ *за интервал времени* $[t_0,\,T]$*, минимизируя при этом функционал* (3).

Для решения поставленной задачи был применен подход, основанный на достаточных условиях оптимальности с использованием множителей Лагранжа специального вида.

Результаты, полученные для задачи оптимального управления (1)-(3), сформулированы в виде следующего утверждения.

Теорема. *Пусть матрица* $Q(t)$ *положительно полуопределена, а матрицы* $R(t)$, $D(y)$ *положительно определены в интервале* $[t_0,\,T]$*; матрица* $W_0 = W(t_0,\,T)$ *положительно определена. Предположим, что система* (1) *является вполне управляемой в момент времени* t_0*. Тогда для оптимальности пары* $(y(t),\,u(t))$ *в задаче* (1) – (3) *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) *траектория* $y(t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению:*

$$\dot{y}(t) = A_1 y(t) - B_1(t) q(t) + \psi(y) + BD(y)\varphi(y,\,t), \quad y(t_0) = y_0;$$

2) *управление* $u(t)$ *определяется следующим образом:*

$$u(y,\,t) = -D^{-1}(y) R^{-1}(t) B^*(K(t)y + q(t)) + \varphi(y,\,t).$$

Здесь матрица $K(t)$ и вектор-функция $q(t)$ удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, а $\varphi(y(t),\,t)$ определяется таким образом, чтобы обеспечить выполнение ограничений на управление (2).

Литература

[1] Афанасьев В. Н., Орлов П. В. Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 3. С. 13–22.

[2] Дмитриев М. Г., Макаров Д. А. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Тр. ИСА РАН. 2014. Т. 64. № 4. С. 53–58.

О разрешимости одной квазилинейной краевой задачи

Мухамадиев Э. (Россия, Вологда)
Вологодский государственный университет
emuhamadiev@rambler.ru
Наимов А. Н. (Россия, Вологда)
Вологодский государственный университет
nan67@rambler.ru
Сатторов А. Х. (Таджикистан, Худжанд)
Худжандский госуниверситет имени академика Б. Гафурова
stahhs@rambler.ru

Доклад посвящен исследованию следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = A_n\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) + F\left(u\right), \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}(0,t) - \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}(2\pi,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad \nu = 0,\dots n-1, \tag{2}$$

$$a_j\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,0) + b_j\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,T) = 0, \quad x \in (0,2\pi), \quad j = 0,1. \tag{3}$$

Здесь $D_T = (0,2\pi) \times (0,T)$, $n \geq 2$, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, $A_n(z) = A_{n0}z^p + A_{n1}z^{p-1} + \dots + A_{nn}$ - многочлен степени n с комплексными коэффициентами, $A_{n0} \neq 0$, a_k, b_k, $k = 0,1$ - заданные комплексные числа, удовлетворяющие условиям $a_k + b_k \neq 0$, $k = 0,1$. В уравнении (1) предполагается, что F - заданное непрерывное отображение, в общем нелинейное, действующее из пространства $C(\overline{D}_T)$ в пространство $L_2(D_T)$ и удовлетворяющее условию

$$\frac{||F(u)||_{L_2(D_T)}}{||u||_{C(\overline{D}_T)}} \to 0 \quad \text{при} \quad ||u||_{C(\overline{D}_T)} \to \infty. \tag{4}$$

Краевая задача вида (1)-(3) в линейном случае изучена в работе [1]. В настоящей работе ставится цель исследовать разрешимость квазилинейной краевой задачи (1)-(3) применяя принцип Лере-Шаудера ([2]).

Введем пространство

$$W_2^{n,2}(D_T) = \left\{v(x,t): \quad \frac{\partial^{k_1+k_2}v}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_2}} \in L_2(D_T) \quad \text{при всех} \quad \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{2} \leq 1\right\}$$

с нормой

$$||v||_{W_2^{n,2}(D_T)} = \sum_{\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{2}\leq 1}\left|\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}v}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_2}}\right|\right|_{L_2(D_T)}.$$

Пространство $W_2^{n,2}(D_T)$ банахово и компактно вложено в пространство $C(\overline{D}_T)$.

Решением краевой задачи (1)-(3) назовем функцию $u(x,t)$ из $W_2^{n,2}(D_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти при всех $(x,t) \in D_T$ и краевым условиям (2), (3) почти при всех $t \in (0,T)$ и $x \in (0,2\pi)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условие (4) и условия*

$$a_k^2 \neq b_k^2, \quad k = 0,1, \qquad a_0b_1 + a_1b_0 \neq 0, \quad Im(A_{n0}) \neq 0, \tag{5}$$

$$A_n(k_1) + \left(\frac{2\pi k_2}{T}\right)^2 \neq 0 \quad \textit{при всех целых} \quad k_1,k_2. \tag{6}$$

Тогда краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно решение.

Условия (5) и (6) обеспечивают обратимость линейного дифференциального оператора

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_n\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

действующего из $W_2^{n,2}(D_T)$ в $L_2(D_T)$ с областью определения, состоящей из всех функций, удовлетворяющих краевым условиям (2) и (3). При выполнении условий (5) и (6) обратный оператор L^{-1} определен и ограничен на всем пространстве $L_2(D_T)$.

Литература

[1] Романко В. К. К теории операторов вида $\frac{d^m}{dt^m} - A$ //Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 1957–1970.

[2] Красносельский М. А, Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

Решения с различными периодическими структурами для некоторых полулинейных уравнений

Нарышкин П. Е. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный университет
p.e.naryshkin@gmail.com

В докладе мы рассмотрим уравнение

$$\Delta u - u + u^3 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2$$

и докажем для него существование решений с различными симметриями (прямоугольными, треугольными, шестиугольными), как положительных, так и знакопеременных. Метод основан на рассмотрении соответствующей вариационной задачи и применении теоремы о концентрации и соображений симметрии. Мы также обсудим обобщения наших результатов для уравнений вида

$$\Delta_p u - |u|^{p-2}u + f(u) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n,$$

с некторыми условиями на функцию f.

Доклад основан на совместной работе с А. И. Назаровым и Л. М. Лерманом.

Оптимальное управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа

Немыченков Г.И. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
grigorian_05@list.ru

Дискретная система автоматного типа (САТ) описывается рекуррентными уравнениями и служит математической моделью устройств управления в форме автомата с памятью. На непрерывном промежутке времени функционирования САТ конечное число раз меняет свое состояние. В моменты переключений, когда происходят изменения состояния, траектория системы имеет скачки. Между переключениями система сохраняет свое состояние. В отличие от классических моделей дискретных систем, изменения состояний которых происходят в заданные (тактовые) моменты времени, переключения САТ могут быть в произвольные, заранее не заданные моменты времени [1]. Такая модель переключений используется при управлении многорежимными динамическими системами. Качество управления одной траекторией системы оценивается функционалом, в котором учитываются затраты на переключения. Выбор количества переключений и тактовых моментов является одним из ресурсов управления и подлежит оптимизации. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени. Таким образом, задача синтеза оптимальной САТ обобщает задачу управления дискретной системой.

Предполагается, что состояние САТ в каждый момент времени точно неизвестно, а известно множество возможных состояний, т. е. речь идет об управлении пучком траекторий [2,3]. Синтез управления САТ производится с целью минимизации среднего или максимального значений функционала качества управления изолированной траекторией. Другими словами, синтезируется либо оптимальное в среднем [2], либо оптимальное гарантирующее [3] управления пучком траекторий. Для управления пучками траекторий предлагается использовать программное управление, оптимальное для одной специальным образом выбранной траектории системы. Получаемое таким способом управление пучком является, вообще говоря, субоптимальным. Однако оно может оказаться удовлетворительным для практики.

Представляют интерес задачи, в которых субоптимальное управление пучком оказывается оптимальным. Известные результаты относятся к линейно-квадратичным задачам, в которых управление линейными системами оценивается квадратичным функционалом качества. В [2] показано, что оптимальное в среднем управление пучком траекторий непрерывной системы совпадает с оптимальным управлением одной (изолированной) траекторией, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний. Гарантирующее управление пучком также совпадает с управлением, оптимальным для некоторой траектории, исходящей из выпуклого замыкания множества возможных состояний системы.

В линейно-квадратичной задаче управления пучками траекторий САТ принцип разделения, вообще говоря, не выполняется. В [1] приводятся примеры, в которых оптимальное в среднем управление не совпадает с оптимальным управлением для траектории, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний, а оптимальное гарантирующее управление не является оптимальным ни для одной траектории системы. В работе [4] на основе достаточных условий оптимальности доказано, что в линейно-квадратичных стационарных задачах выполняется так называемый модифицированный принцип разделения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-08-00128-а.

Литература

[1] Бортаковский А.С. Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 5–26.

[2] Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.

[3] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[4] Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных стационарных систем автоматного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 6. С. 20–34.

Об асимптотике решений некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

Нестеров П.Н. (Россия, Ярославль)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
nesterov.pn@gmail.com

В докладе обсуждается вопрос об асимптотике решений (понимаемых в слабом смысле) при $t \to \infty$ дифференциального уравнения

$$\dot{u} = \big[A + G(t)\big]u, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

где u — элемент комплексного банахова пространства $\mathcal{B}$. Здесь A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения, который является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ $(t \geqslant 0)$. Далее, $G(t)$ $(t \geqslant t_0)$ — семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$, причем

$$G(t) = B(t) + R(t). \tag{2}$$

В представлении (2) семейство линейных ограниченных операторов $B(t)$ обладает тем свойством, что операторная функция $B(t)$ сильно измерима на любом отрезке $[t_0, T]$, $T \geqslant t_0$, и $\|B(t)u\|$ стремится к нулю колебательным образом при $t \to \infty$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Семейство линейных ограниченных операторов $R(t)$ также является сильно измеримым на любом отрезке $[t_0, T]$, $T \geqslant t_0$, и, кроме того, существует такая функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что $\|R(t)u\| \leqslant \gamma(t)\|u\|$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Целесообразность изучения уравнений вида (1), где операторная функция $G(t)$ понимается как некоторое параметрическое возмущение с непрерывным спектром, отмечена, в частности, в известной монографии [1, стр. 230].

Уравнение (1) рассматривается при следующих условиях, накладываемых на оператор A:

(i) $\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, где линейное конечномерное подпространство $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ с нулевой вещественной частью (с учетом кратностей);

(ii) замкнутое линейное подпространство $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно полугруппы $T(t)$, и кроме того, для любого $y \in \mathcal{Y}$ имеет место неравенство

$$\|T(t)y\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|y\|, \quad t \geqslant 0,$$

где $K, \alpha > 0$.

Сформулированные условия (i) и (ii) — это стандартные требования теории центральных многообразий (см., например, [2]). Используя основные идеи этой теории, а также вариант метода усреднения, изложенный в работе [3], мы предложим метод построения асимптотических представлений для слабых решений уравнения (1) при $t \to \infty$. В докладе метод демонстрируется на примере задачи получения асимптотических формул для решений возмущенного уравнения теплопроводности (см. [4]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x)\frac{\sin \omega t}{t^\rho}u, \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant t_0 > 0$$

с начальным условием $u(t_0, x) = \varphi(x)$ и граничным условием Неймана $\partial u/\partial \nu = 0$, $x \in \partial\Omega$. Здесь функция $u(t, x)$ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Символом $\partial u/\partial \nu$ обозначена производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. Действительнозначные функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ считаются принадлежащими пространству $L_2(\Omega)$, параметры ω и ρ — положительны. Наконец, Δ — оператор Лапласа по компонентам вектора x.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект №1.10160.2017/5.1.

Литература

[1] Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.

[2] Carr J. Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981.

[3] Нестеров П. Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 731–742.

[4] Langer M., Kozlov V. Asymptotics of solutions of a perturbed heat equation // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 397. P. 481–493.

О задаче типа Горина для h-сумм в круге[29]

Нигматянова Ю. М. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
yuliko33@mail.ru

Для наипростейших рациональных дробей $\rho_n(z) := \sum_1^n (z - z_k)^{-1}$ хорошо известна задача Е.А. Горина: найти инфимум $d_n(\mathbb{R})$ расстояний от множества полюсов дроби ρ_n до действительной оси по всем ρ_n, таким что $\|\rho_n\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant 1$. Эта задача была полностью решена в [1] (там же см. историю вопроса). Рассматривались её различные модификации, например, доказано [2], что в случае единичной окружности C имеем $d_n(C) \asymp (\ln n)/n$.

Параллельно с теорией аппроксимации наипростейшими дробями активно развиваются и методы аппроксимации и интерполяции их обобщениями. Одно из таких обобщений это предложенные в [3] *h-суммы*

$$H_n(\lambda; z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z), \qquad h(z) := \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j, \qquad h_j \neq 0, \qquad |\lambda_k| < 1; \tag{1}$$

[29] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00312 мол_а).

здесь $h(z)$ — фиксированная аналитическая в открытом единичном круге функция. Аппроксимация производится за счёт выбора параметров λ_k. Требование $|\lambda_k| < 1$ обеспечивает аналитичность функций $H_n(\lambda; z)$ в замкнутом единичном круге. Очевидно, что $H_n(\lambda; z) \equiv \rho_n(z)$, если положить $h(z) = (z-1)^{-1}$ и $\lambda_k = z_k^{-1}$.

В докладе рассматривается задача, аналогичная задаче Горина для наипростейших дробей в случае окружности C. Через $\operatorname{dist}(\lambda)$ обозначим расстояние от множества $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^n$, $|\lambda_k| < 1$, до единичной окружности C.

Каково наименьшее число $r = r_n(h) \in (0, 1]$ такое, что

$$\min_{\operatorname{dist}(\lambda) \leqslant r} \max_{|z| \leqslant 1} |H_n(\lambda; z)| \leqslant 1 \ ?$$

(Случаю $r = 1$ соответствуют все $\lambda_k = 0$.) Оказывается, $r_n(h) \preceq \frac{\ln n}{n}$ $(n \to \infty)$, какой бы ни была аналитическая в круге $|z| < 1$ функция h (см. (1)). Для доказательства мы полагаем $a = 1 - r$ и равномерно распределяем λ_k на окружности $|z| = a$: $\lambda_k := ae^{2\pi ki/n}$, $k = 1, \ldots, n$. Замечаем, что соответствующая h-сумма раскладывается в ряд $n \sum_{\nu=1}^{\infty} h_{n\nu-1} a^{n\nu} z^{n\nu-1}$. Как показывает случай $h(z) = (z-1)^{-1}$ (см. [2]), оценка не может быть улучшена по порядку n одновременно для всех h.

Литература

[1] Данченко В. И. Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185. №8. С. 63—80.

[2] Данченко В. И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Матем. сб. 2006. Т. 197. №4. С. 33–52.

[3] Данченко В. И. Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. 2008. Т. 83. №5. С. 643–649.

О решении задачи Шварца в круге

Николаев В.Г. (Россия, Великий Новгород)
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
vg14@inbox.ru

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det J \neq 0$ не имеет вещественных собственных чисел, и пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$. Назовем n-вектор-функцию $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$ аналитической по Дуглису [1] в области D, если для нее выполнено уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

Пусть контур Γ — граница *односвязной* области D. Для эллиптической системы в частных производных (1) рассмотрим следующую задачу Шварца [1]. *Требуется найти* аналитическую по Дуглису в D функцию $\phi(z)$ по граничному условию $\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = \psi(t)$, $t \in \Gamma$, где вещественная n-вектор-функция $\psi(t) \in C(\Gamma)$ задана.

Задачу Шварца изучим для частного случая $n = 2$. Пусть векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^2$, и пусть $\overline{\mathbf{y}}$ — комплексное сопряжение вектора $\mathbf{y}$. Обозначим:

$$J_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad Q = (\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \det Q \neq 0, \quad J = Q \cdot J_1 \cdot Q^{-1}, \quad l = \frac{\det(\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \tag{2}$$

Матрица Q в (2) — это жорданов базис матрицы J, которая имеет кратное собственное число $\lambda = i$. При этом вектор $\mathbf{y}$ — собственный для матрицы J.

Обозначим через $H^{1,\sigma}(\Gamma)$, $\sigma \in (0, 1)$ класс функций, первые производные которых непрерывны по Гёльдеру с показателем σ на контуре Γ. Через $H^\sigma(\overline{D})$ обозначим функции, непрерывные по Гёльдеру с показателем σ в замыкании $\overline{D}$ области D.

Если матрица J в (1) имеет вид (2), то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть область* D *— произвольный круг, и пусть в* (2) $|l| \neq \{0; 2\}$. *Тогда для любой граничной функции* $\psi(t) \in H^{1,\sigma}(\Gamma)$ *однозначно* (*с точностью до вектор-постоянной*) *разрешима задача Шварца в классе функций* $\phi(z) \in H^{\sigma}(\overline{D})$.

Литература

[1] Васильев В. Б., Николаев В. Г. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №10. С. 1351–1361.

О периодах единственной седловой орбиты

Е.В. Ноздринова (Россия)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
maati@mail.ru

Рассмотрены полярные диффеоморфизмы поверхности, то есть диффеоморфизмы, имеющие единственную стоковую и единственную источниковую периодические орбиты. Классическим примером такого диффеоморфизма является диффеоморфизм "источник-сток", который не имеет седловых точек и существует только на двумерной сфере. Однако, добавление даже одной седловой орбиты значительно расширяет класс полярных диффеоморфизмов на поверхностях. Установлены все возможные типы периодических данных для таких полярных диффеоморфизмов и показано, что седловая орбита всегда имеет отрицательный тип ориентации.

Исследование периодических данных для полярных диффеоморфизмов выполнено при поддержке гранта РФФИ 18-31-00022 мол_а.

Использование аксиомы Лейбница теории бесконечно малых и аксиомы Ньютона теории исчезающе малых величин при выводе волнового дифференциального уравнения

Овсянников В. М. (Россия, Москва)
Московская государственная академия водного транспорта - филиал
ФГБОУ ВО "Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова"
Ноябрьский институт нефти и газа - филиал Тюменского индустриального университета
OvsyannikovVM@yandex.ru

Дифференциальное и интегральное исчисление было сделано параллельно и независимо практически одновременно на Европейском континенте Лейбницем, как теория бесконечно малых, и в Англии Ньютоном, как теория исчезающе малых величин. Их существенная разница, как пишет Лазарь Карно, состояла в рассмотрении Лейбницем и его последователями на Континенте дифференциала малой, но конечной величиной $dt = t - t_0$. В теории исчезающе малых величин Ньютона аналог дифференциала, названный моментом, необходимо занулять после окончания построений. При взятии от дифференциала и момента производной по t получается разный результат.

В теории бесконечно малых Лейбница производная

$$\frac{d(dt)}{dt} = \frac{d(t - t_0)}{dt} = 1$$

равна единице, а в теории исчезающе малых величин Ньютона

$$\frac{d(dt)}{dt} = \frac{d(0)}{dt} = \frac{d(const)}{dt} = 0$$

производная равна нулю.

В механике и в гидромеханике выводы всех уравнений делаются для объектов конечных размеров Δx, Δy, Δz, перемещающихся за конечный интервал времени Δt на конечное расстояние с использованием элементарной геометрии. Производить в механике умозаключения с объектами нулевого размера с перемещениями за нулевой интервал времени не представляется возможным. Геометрия Эвклида не работает с объектами нулевого размера.

Л.Эйлер [1], [2], выводя уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, сделав линейные по времени деформации контрольной фигуры во взаимно-перпендикулярных направлениях, получил для плоского двухмерного течения параболический закон изменения площади по времени, выражающийся через квадрат приращения времени Δt.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + (\Delta t)\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0,$$

где $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ – якобиан вектора поля скорости. Будучи сторонником подхода Ньютона, Эйлер занулил член с приращением времени, совершив предельный переход устремления Δt к нулю.

После находки у Эйлера члена второго порядка малости аналогичный член удалось обнаружить в выводе уравнения неразрывности с использованием формулы Гаусса – Остроградского за счет двукратного пересечения некоторыми жидкими частицами границы выпуклой контрольной фигуры по секущей за конечный интервал времени Δt.

Метод акустической аналогии Лайтхилла 1952-54 гг. использует для вывода дифференциального волнового уравнения взятие производной по времени t от уравнения неразрывности для сжимаемого газа. Мы сталкиваемся с той же дилемой; считать ли производную от члена второго порядка малости нулевой или равной якобиану вектора скорости. В построениях Лайтхилла член с якобианом проникает в неоднородную часть волнового уравнения и приводит к генерации периодических волн потоком газа, возникновения автоколебаний без участия внешних воздействий и звука [3], [4]. Раскачка ветром крупного тяжелого моста может быть вычислена по волновому уравнению, приведенному в параграфе 75 учебника Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица. Дополнительный учет в уравнении неразрывности члена с якобианом в $[(2+1)/2]^2 = (3/2)^2 = 2,25$ раза интенсифицирует раскачку.

Согласно подходу Ньютона, члена с якобианом в уравнении неразрывности нет и дополнительного вклада в волнообразование не производится. Различие подходов Лейбница и Ньютона можно заключить в такие две аксиомы.

Аксиома. Теория бесконечно малых Лейбница рассматривает дифференциал $dt = t - t_0$ конечной величиной и постулирует производную по t от дифференциала равной единице.

Аксиома. Теория исчезающе малых величин Ньютона рассматривает дифференциал dt нулевой величиной и постулирует производную по t от дифференциала dt равной нулю.

Исходя из инженерных соображений необходимо использовать ту аксиому, которая даст оценку наиболее опасной ситуации. Так, для расчета опасной раскачки моста надо использовать аксиому Лейбница, а для расчета работы перемешивающего устройства - аксиому Ньютона.

Литература

[1] Euler L. Principes generaux du movement des fluids // Mem. Acad. Sci. et belles letters. Berlin, 1757, T.II (1755). P. 274 – 315 = Opera omnia. Ser. II.V.12. P.54 – 91.

[2] Leonhardi Euleri. Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius. Edidit C. A. Truesdell. Lausannae, 1954.

[3] Овсянников В.М. История вывода уравнения неразрывности. Доклад на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20-24 августа 2015г. Сборник докладов. С. 2823-2824.

[4] Овсянников В.М. Сопоставление дополнительных слагаемых второго порядка малости для конечно-разностных уравнений Эйлера и малых добавок в регуляризованных уравнениях гидродинамики. ЖВМ и МФ, 2017, №5, с. 876 - 880. DOI 10.1134/S0965542517050098

О кольце эндоморфизмов комплексного простого абелева многообразия, обладающего стабильной редукцией с торическим рангом 1[30]

Орешкина (Никольская) О. В. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
papichonok@yandex.ru

А.Силверберг и Ю.Г.Зархин [1, теорема 4.1] доказали полупростоту группы Ходжа комплексного g-мерного абелева многообразия с вполне вырожденной редукцией (другими словами, с торическим рангом g специального слоя его модели Нерона над некоторым дискретно нормированным кольцом).

В следующей теореме рассматривается случай, когда торический ранг нетривиален и принимает минимальное значение 1.

Теорема. *Пусть J – абсолютно простое абелево многообразие над подполем $k \subset \mathbb{C}$, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} J = \mathrm{End}_k J$, v – дискретное нормирование поля k. Если абелево многообразие J имеет стабильную редукцию в точке v и торический ранг специального слоя $\mathcal{M}_v$ минимальной модели Нерона равен* 1, *то* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} J = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Обозначим через k_v поле дробей кольца $\mathcal{O}_v$ дискретного нормирования. Поскольку редукция стабильная, то слой минимальной модели Нерона $\mathcal{M} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v$ над замкнутой точкой $v \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v$ является расширением абелева многообразия с помощью линейного тора. Хорошо известно, что формация моделей Нерона коммутирует с этальной заменой базы. Поэтому, обозначая через $\mathcal{M}_v^0$ связную компоненту нейтрального элемента алгебраической группы $\mathcal{M}_v$, мы можем считать (в силу условия теоремы на торический ранг специального слоя минимальной модели Нерона), что имеется точная последовательность алгебраических групп над полем $\kappa(v)$ вычетов точки v

$$1 \to \mathrm{G}_m \to \mathcal{M}_v^0 \to A \to 0,$$

где A – некоторое абелево многообразие над полем $\kappa(v)$.

В силу универсального свойства модели Нерона [2, (1.1.2)] имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{k_v}(J).$$

Значит, в силу хорошо известных равенств

$$\mathrm{Hom}_{\kappa(v)}(\mathrm{G}_m, A) = \mathrm{Hom}_{\kappa(v)}(A, \mathrm{G}_m) = 0,$$

определены канонические морфизмы колец

$$\mathrm{End}_k(J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{k_v}(J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v}(\mathcal{M}) \to \mathrm{End}_{\kappa(v)}(\mathcal{M}_v^0) \to \mathrm{End}_{\kappa(v)}(\mathrm{G}_m).$$

Ясно, что образ эндоморфизма $J \xrightarrow{n} J$ умножения на целое число $n \geq 2$ в кольце $\mathrm{End}_{\kappa(v)}(\mathrm{G}_m) = \mathbb{Z}$ нетривиален, так что в силу простоты абелева многообразия J определен канонический нетривиальный морфизм $\mathbb{Q}$-алгебр с делением

$$\mathrm{End}_k(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathrm{End}_{\kappa(v)}(\mathrm{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}.$$

Поэтому $\mathrm{End}_k(J) = \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий теоремы алгебра Ли группы Ходжа $\mathrm{Hg}(J)$ абелева многообразия J является $\mathbb{Q}$-простой по теореме Борового [3]. Хорошо известно, что каноническое представление алгебры Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(J) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ в пространстве $H^1(J, \mathbb{C})$ задается с помощью микровесов [4], [5, теорема 0.5.1], поэтому если $g \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}} J$ – нечетное число, то полупростая алгебра Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(J) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ имеет тип C_g и для любого целого числа $d \in \{1, ..., g\}$ имеется равенство [6, теорема 4.7]

$$\dim_{\mathbb{Q}}[\bigwedge^{2d} H^1(J, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(J)} = 1.$$

[30]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 18-01-00143).

Литература

[1] Silverberg A., .Zarhin Yu. G. Hodge groups of abelian varieties with purely multiplicative reduction // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №2. С. 149–158.

[2] Grothendieck A. Modéles de Néron et monodromie // Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lecture Notes in Mathematics. 1972. V. 288, SGA 7 I, Exposé IX, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York. С. 313–523.

[3] Боровой М. В. Группа Ходжа и алгебра эндоморфизмов абелева многообразия // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославский гос. университет. (Ярославль, 1981). С. 124–126.

[4] Deligne P. Variétés de Shimura: interprétation modulaires et techniques de construction de modéles canoniques // Proc. Symp. Pure Math. 1979. V. 33. Pt. 2. P. 247–290.

[5] Зархин Ю. Г. Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №2. С. 264–304. Англ. пер.: Zarhin Yu. G. Weights of simple Lie algebras in cohomology of algebraic varieties. Math. USSR-Izv. 1985. V. 24. №2. P. 245–281.

[6] Танкеев С. Г. Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №2. С. 398–434. Англ. пер.: Tankeev S. G. On algebraic cycles on surfaces and abelian varieties. Math. USSR-Izv. 1982. V. 18. №2. P. 349–380.

Гёльдеровость решений эллиптических уравнений на стратифицированных множествах[31]

Палецких А.А. (Россия, Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский Государственный Университет
a.paletskikh@gmail.com

Мы доказываем классический результат Де Джорджи для эллиптических уравнений на стратифицированных множествах. В простейшем случае двух стратов

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, 0 < x_n < R_0, |x'| < R_0 \leqslant 1\},$$
$$\Gamma = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n = 0, |x'| < R_0 \leqslant 1\},$$

модельная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1\ldots n} -D_j(a_{ij}D_iu) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \sum_{\tau,\mu=1\ldots n-1} -D_\mu(\alpha_{\tau\mu}D_\tau u) - \sum_{i=1\ldots n} a_{in}D_iu = 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты измеримы и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности

$$\nu|\zeta|^2 \leqslant \sum_{i,j=1\ldots n} a_{ij}\zeta_i\zeta_j \leqslant \frac{1}{\nu}|\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n,$$
$$\nu|\zeta'|^2 \leqslant \sum_{\tau,\mu=1\ldots n-1} \alpha_{\tau\mu}\zeta_\tau\zeta_\mu \leqslant \frac{1}{\nu}|\zeta'|^2 \quad \forall \zeta' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Теорема. *Пусть функция $u \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\Gamma)$ является обобщенным решением задачи (1). Тогда $u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на множестве $\Omega' \cup \Gamma'$, отделенном от $\partial\Omega\backslash\Gamma$. При этом показатель Гёльдера зависит только от ν и n.*

Для доказательства мы модифицируем метод из работы [1], основанный на технике Де Джорджи.

Доклад основан на совместной работе с А.И.Назаровым [2]. Полученные результаты обобщаются на случай более сложных стратифицированных множеств.

[31] Работа поддержана грантом РФФИ 18-01-00472 А.

Литература

[1] Алхутов Ю. А., Жиков В. В. О гёльдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений // ДАН. 2001. Т. 378. № 5. С. 583–588.

[2] Назаров А. И., Палецких А. А. О гёльдеровости решений эллиптической задачи Вентцеля // ДАН. 2015. Т. 465. № 5. С. 532-536.

О стабилизации периодических вязкостных решений многомерных уравнений Гамильтона-Якоби[32]

Панов Е. Ю. (Россия, Великий Новгород)
Новгородский государственный университет
Eugeny.Panov@novsu.ru

В полупространстве $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$u_t + H(\nabla_x u) = 0, \tag{1}$$

с начальными данными

$$u(0, x) = u_0(x) \in BUC(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $BUC(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что гамильтониан $H(p)$ является лишь непрерывной функцией на $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\bar{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $BUC_{loc}(\bar{\Pi})$ – пространство функций, ограниченных и равномерно непрерывных в любом слое $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$. Напомним определение вязкостного решения задачи (1), (2) в смысле [1,2].

Определение. Функция $u(t, x) \in BUC(\bar{\Pi})$ называется вязкостным решением (в.р.) задачи (1), (2), если:

a) $\pm[\varphi_t(t_0, x_0) + H(\nabla_x \varphi(t_0, x_0))] \leqslant 0$ как только $\varphi(t, x) \in C^1(\Pi)$ и точка $(t_0, x_0) \in \Pi$ является точкой локального минимума функции $\pm(\varphi(t, x) - u(t, x))$;

b) выполнено начальное условие (2).

Известно (см. [2]), что существует единственное в.р. задачи (1), (2).

Предположим теперь, что начальная функция u_0 является почти периодической функцией на $\mathbb{R}^n$ в смысле Бора. Пространство таких функций, снабженное равномерной нормой, будем обозначать $AP(\mathbb{R}^n)$. Пусть M_0 – аддитивная подгруппа $\mathbb{R}^n$, порожденная спектром $Sp(u_0)$ начальной функции. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $u(t, x)$ – в.р. задачи (1), (2). Тогда $u(t, \cdot) \in C([0, +\infty), AP(\mathbb{R}^n))$ и $Sp(u(t, \cdot)) \subset M_0$.*

Предположим теперь, что гамильтониан $H(p)$ является выпуклой функций и выполнено следующее условие линейной невырожденности в "резонансных" направлениях $\xi \in M_0$:

$$\forall \xi \in M_0, \xi \neq 0 \ \text{ функция } s \to H(s\xi)$$

$$\text{не линейна ни в какой окрестности нуля } |s| < \delta, \delta > 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Верно следующее асимптотическое свойство в.р. $u(t, x)$*:

$$u(t, x) + H(0)t \rightrightarrows c = \inf u_0(x). \tag{4}$$

В частности, при $H(0) = 0$ выполнено свойство стабилизации в.р. к константе c. Заметим, что условие (3) точно: если оно нарушено, то можно выбрать начальную функцию так, что $u(t, x) + H(0)t$ не стабилизируется к константе. Отметим также, что в случае

[32]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.445.2016/1.4) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 18-01-00472-а).

вогнутого гамильтониана утверждение Теоремы 2 верно с константой $c = \sup u_0(x)$. В случае строго выпуклого гамильтониана условие (3) всегда выполнено и в этом случае утверждение Теоремы 2 вытекает из известных результатов Кружкова [3].

Доказательства основных теорем содержатся в препринте [4].

Литература

[1] Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–42.

[2] Crandall M. G., Evans L. C., Lions P. L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282. P. 487–502.

[3] Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. II // Матем. сборник. 1967. Т. 72(114). №1. С. 108–134.

[4] Panov E. Yu. On decay of almost periodic viscosity solutions to Hamilton-Jacobi equations // arXiv:1711.03853, 8 Nov 2017. P.1–31.

Глобальное отслеживание траекторий голономных механических систем в цилиндрическом фазовом пространстве

Перегудова О.А. (Россия, Ульяновск)
Ульяновский государственный университет
peregudovaoa@gmail.com

В докладе рассматривается задача об отслеживании траектории манипуляционных роботов, описываемых уравнениями вида

$$A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + d(q,\dot{q}) = u, \tag{1}$$

где $q \in \mathbb{R}^n$ — вектор угловых координат звеньев манипулятора, $A(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица инерции, $C(q,\dot{q})\dot{q}$ — вектор кориолисовых и центробежных сил инерции, $g(q)$ — вектор гравитационных моментов, $d(q,\dot{q})$ — вектор диссипативных сил вязкого трения в шарнирах, $u \in \mathbb{R}^n$ — вектор управляющих моментов.

Построен нелинейный закон управления $u = u(t,q,\dot{q})$, обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость отслеживаемой траектории $q^{(0)}(t)$ робота (1) в цилиндрическом фазовом пространстве

$$\{(t,x,\dot{x}) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n\},$$

где $\mathbb{T}^n$ — n-мерный тор, т.е.

$$\mathbb{T}^n = \{x_1(mod\,2\pi), x_2(mod\,2\pi), \dots, x_n(mod\,2\pi)\}.$$

Задача решена на основе построения функции Ляпунова со знакопостоянной производной. Найденный закон управления состоит из двух слагаемых: нелинейная функция по обратной связи по состоянию и программное управление

$$u = u^{(1)}(q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}(t)) + u^{(0)}(t),$$

где $u^{(1)}(x,\dot{x}) = B(\dot{x} + r(x))$,

$$u^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))\ddot{q}^{(0)}(t) + C(q^{(0)}(t),\dot{q}^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) + g(q^{(0)}(t)) + d(q^{(0)}(t),\dot{q}^{(0)}(t)),$$

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — постоянная матрица, $r(x)$ — периодическая функция с периодом 2π.

Проведен сравнительный анализ полученной схемы управления с известными подходами, основанными на построении классического ПД-регулятора [1], ПД-регулятора с насыщением и с изменяемыми коэффициентами [2] и применении метода линеаризации обратной связью [3]. Показано применение полученных результатов в задаче об отслеживании траекторий трехзвенного пространственного робота манипулятора. Полученные результаты являются развитием работы [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания по НИР (Проект № 9.5994.2017/БЧ).

Литература

[1] Santibanez V., Kelly R. Global Asymptotic Stability of the PD Control with Computed Feedforward in Closed Loop with Robot Manipulators // 14th Triennial World Congress of IFAC, Beijing, P.R. China. 1999. P. 683–688.

[2] Qu Z. Global Stability of Trajectory Tracking of Robot Under PD Control // Dynamic and Control. 1994. №4. P. 59–71.

[3] Aguinaga-Ruiz E., Zavala-Rio A., Santibanez V., and Reyes F. Global Trajectory Tracking Through Static Feedback for Robot Manipulators with Input Saturations // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Calcun, Mexico, Dec. 9–11, 2008. P. 3516–3522.

[4] Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы // Автоматика и телемеханика. 2016. № 3. С. 66–80.

Симметрии и оптимальность экстремальных траекторий

А. В. Подобряев (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН
alex@alex.botik.ru

В геометрической теории управления (см., например, [1]) рассматриваются левоинвариантные задачи оптимального управления на группе Ли G. Задано семейство гладких левоинвариантных векторных полей f_u, зависящих от $u \in U \subset \mathbb{R}^n$. Требуется найти $u \in L^\infty([0,t_1],U)$ такое, что

$$\dot{q} = f_{u(t)}(q(t)), \qquad q(0) = \mathrm{id}, \qquad q(t_1) = q_1 \in G, \qquad \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t))dt \to \min .$$

Принцип максимума Понтрягина [2] дает необходимое условие оптимальности. Пусть H — гамильтониан принципа максимума Понтрягина, а $\vec{H}$ — соответствующее гамильтоново векторное поле. Для левоинвариантных задач гамильтонова система становится треугольной, т. е. сопряженная подсистема не зависит от переменных состояния. При исследовании нормальных экстремальных кривых на глобальную оптимальность ключевую роль играют симметрии задачи, индуцированные симметриями сопряженной подсистемы. Получены некоторые условия для продолжения симметрий сопряженной подсистемы до симметрий экспоненциального отображения (отображения в конец экстремальной траектории). Дадим необходимые определения.

Определение. *Точкой Максвелла* называется точка, в которую приходят две различные экстремальные траектории с одним и тем же значением максимизируемого функционала.

Известно (см., например, [3]), что после точки Максвелла экстремальная траектория не может быть оптимальной. Поэтому описание точек Максвелла играет важную роль в исследовании экстремальных траекторий на оптимальность. В частности, время Максвелла доставляет верхнюю оценку времени потери оптимальности. Естественной причиной возникновения точек Максвелла может быть симметрия экстремальных траекторий.

Определение. *Экспоненциальным отображением* называется отображение в конец экстремальной траектории, а именно

$$\mathrm{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \to G, \qquad \mathrm{Exp}(p,t) = \pi e^{t\vec{H}}(id, p), \qquad (p,t) \in C \times \mathbb{R}_+,$$

где проекция $\pi : T^*G \to G$, а $C = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid H(p) = \frac{1}{2}\}$ — это поверхность уровня гамильтониана.

Определение. *Симметрией экспоненциального отображения* называется пара диффеоморфизмов $s : C \times \mathbb{R}_+ \to C \times \mathbb{R}_+$, $S : G \to G$, таких, что $\mathrm{Exp} \circ s = S \circ \mathrm{Exp}$.

Теорема. *Пусть группа G — компактна или нильпотентна и связна, преобразование σ коалгебры Ли $\mathfrak{g}^*$ таково, что $H\sigma^* = H$ и выполняется одно из двух условий:*
(1) σ^* — внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\sigma^*\vec{H}_{vert} = \vec{H}_{vert}$;

(2) σ^* *— внутренний антиавтоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *и* $\sigma^*\vec{H}_{vert} = -\vec{H}_{vert}$*;*
тогда пара диффеоморфизмов (s_σ, S_σ) *является симметрией экспоненциального отображения* Exp*, где*

$$s_\sigma(p,t) = \begin{cases} \sigma(p), & \text{если} \quad \sigma(\vec{H}_{vert}) = \vec{H}_{vert}, \\ \sigma e^{t\vec{H}_{vert}}(p), & \text{если} \quad \sigma(\vec{H}_{vert}) = -\vec{H}_{vert}, \end{cases}$$

а $S_\sigma(\exp\xi) = \exp(\sigma^*\xi)$, $\xi \in \mathfrak{g}$*, где* $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Следствие. *Пусть* G *связная компактная группа Ли. Множества Максвелла (соответствующие рассматриваемым симметриям) левоинвариантной задачи оптимального управления содержатся в множествах Максвелла римановой задачи для метрики Киллинга.*

Литература

[1] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

[2] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.

[3] Сачков Ю. Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 2006. Т. 197. №4. С. 123–150.

Топологические препятствия глобальной стабилизации

Полехин И.Ю. (Россия, Москва)
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
ivanpolekhin@mi.ras.ru

В [1] было показано, что если конфигурационное пространство управляемой системы имеет достаточно сложную топологию, то система не может иметь глобально асимптотически устойчивого положения равновесия. Точнее, если конфигурационное пространство управляемой системы замкнуто (компактно и без края), а управление с обратной связью не зависит от времени и решения соответствующей системы существуют, единственны и непрерывно зависят от начальных данных, то у системы не может существовать глобально асимптотически устойчивого положения равновесия. Данный результат является прямым следствием того, что никакое замкнутое многообразие не является стягиваемым. Это утверждение может быть применено ко многим механическим системам, конфигурационные пространства которых замкнуты. Например, если мы рассмотрим плоский математический маятник, то получаем, что каким бы ни было выбрано управление с обратной связью (при условии достаточной регулярности), такая система не может иметь единственного асимптотически устойчивого положения равновесия такого, что к нему стремятся все решения системы.

Естественным образом возникает ряд вопросов, связанных с применимостью данного утверждения. Например, рассмотрим управляемую систему, представляющую собой плоский перевернутый маятник, управление которым осуществляется путем задания ускорения его точки подвеса, которая может двигаться вдоль горизонтальной прямой. При этом мы считаем, что маятник не может находиться ниже этой прямой (например, можно рассмотреть какую-либо модель удара о плоскость). Конфигурационное пространство такой системы уже будет стягиваемым (полуокружность). Возможна ли глобальная стабилизация в таком случае (возможно, с учетом ударов)? Возможна ли глобальная стабилизация, если управление явно зависит от времени или не является периодической функцией угла? Для случая перевернутого маятника в [2] было показано, что, несмотря на стягиваемость пространства положений, глобальная стабилизация невозможна при произвольной модели удара о плоскость. Точнее, показано, что в такой системе будет всегда существовать семейство решений, которые одновременно отделены от положения равновесия и от горизонтальной плоскости на всем интервале существования. Это утверждение может быть перенесено на другие подобные механические управляемые системы (маятник на тележке, сферический маятник, перевернутый маятник с дополнительным управляющим моментом и др.).

Доказательство основано на несложных топологических соображениях, аналогичных используемым при доказательстве существования решений без падений для перевернутого маятника [3] и при доказательстве существования периодических решений без падений для аналогичных систем [3–6].

Литература

[1] Bhat S. P., Bernstein D. S. A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon // Systems & Control Letters 39(1), 2000. P. 63–70.

[2] Polekhin I. On topological obstructions to global stabilization of an inverted pendulum // Systems & Control Letters, 113, March, 2018. P. 31–34 (Published online).

[3] Полехин И. Ю. Примеры использования топологических методов в задаче о перевернутом маятнике на подвижном основании // Нелинейная динамика, 10:4, 2014. С. 465–472.

[4] Polekhin I. Forced oscillations of a massive point on a compact surface with a boundary // Nonlinear Anal., 128, 2015. P. 100–105.

[5] Болотин С. В., Козлов В. В. Вариационное исчисление в целом, существование траекторий в области с границей и задача Уитни о перевернутом маятнике // Изв. РАН. Сер. матем., 79:5, 2015. С. 39–46.

[6] Polekhin I. On forced oscillations in groups of interacting nonlinear systems // Nonlinear Anal., 135, 2016. P. 120–128.

Классификация обыкновенных операторов Дункла на основе их сплетения с оператором дифференцирования[33]

Политов К.О. (Россия, Коломна)
Государственный социально-гуманитарный университет
mr.politov.k@gmail.com
Хэкало С.П. (Россия, Коломна)
Государственный социально-гуманитарный университет
khekalo@mail.ru

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования на $\mathbb{R}$, s – оператор отражения на $\mathbb{R}$ $(sf(x) = f(-x))$, φ – оператор умножения на достаточно гладкую четную или нечетную функцию.

В работе [1] осуществлены попытки классификации обыкновенного дифференциально-разностного оператора Дункла

$$\nabla_\varphi = \frac{d}{dx} - (\log|\varphi(\mathrm{x})|)'\, s \tag{1}$$

на основе его сплетения с оператором дифференцирования

$$\nabla_\varphi V = V\,\frac{d}{dx}. \tag{2}$$

Здесь V – некоторый линейный дифференциально-разностный оператор, допускающий сплетение (2) в алгебре Чередника $A = \left\langle 1, x, \frac{d}{dx}, s \right\rangle$.

В [2] эта задача обобщается на случай алгебры Чередника $A^* = \left\langle A, \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} \right\rangle$ псевдодифференциально-разностных операторов (псевдоалгебры Чередника), где $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ - псевдодифференциальный оператор, обратный к $\frac{d}{dx}$. Устанавливается, что проблема классификации сводится к решению специальной системы дифференциально-разностных уравнений на коэффициенты оператора V и функцию φ.

[33]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-51-150005 НЦНИ_а.

В простейшем случае эта ситема сводится к интегрированию трех нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{vmatrix} \varphi''' & \varphi'' & \varphi' & 6\varphi' \\ \varphi'' & 0 & \varphi & 2\varphi \\ a & -\varphi' & \varphi & 0 \\ b & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $(a, b, c) = (4, 0, 1)$ или $(a, b, c) = (2, \varphi, \pm 1)$.

Все эти уравнения автономные, т.е. допускают понижение степени. В случае $(a, b, c) = (4, 0, 1)$ решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{2}{c_2^2}\left[c_2(c_1 + x)\frac{c_3 \tanh(\mathrm{c_2 x}) + 1}{\tanh(\mathrm{c_2 x}) + \mathrm{c_3}} - 1\right],$$

где c_1, c_2 и c_3 – произвольные постоянные.

Остается отметить, что решения уравнений (3) фактически классифицируют операторы вида (1): рациональные, гиперболические, тригонометрические.

Литература

[1] Мещеряков В. В, Хэкало С. П. Дифференциально-разностные операторы Дункла и их интегрируемость. В сборнике: Дифференциальные уравнения и смежные вопросы материалы V научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. Ответственный редактор: О. Н. Бирюков, 2013. С. 51–54.

[2] Политов К. О. Сплетение обыкновенного оператора Дункла с оператором дифференцирования в псевдоалгебре Чередника/ В сборнике: Воронежский государственный университет: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. С. 158–160.

Качественный анализ некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Полищук О.Р. (Украина, Одесса)
Одесская Мариинская гимназия
olgapolchai@gmail.com

В докладе излагаются результаты качественного анализа уравнений

$$tx'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)tx'(h(t)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ – неизвестная функция,

$$a(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k + \overline{\overline{o}}(t^n), b(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} t^k + \overline{\overline{o}}(t^n), i \in \{1, 2, 3\},$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k t^k + \overline{\overline{o}}(t^n), h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k t^k + \overline{\overline{o}}(t^n).$$

Для каждого $\rho \in (0, \tau)$ решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

1. при всех $t \in (0, \rho)$ выполнено равенство (1);
2. $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0.$

Указываются достаточные условия , при которых каждая из этих задач имеет непустое множество решений $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ (ρ достаточно мало) с определенными свойствами при $t \to +0$. Одновременно обсуждаются вопросы единственности и неединственности таких решений. Использованы методы качественной теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Литература

[1] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.- 421 с.

[2] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1991.—280 с.

[3] Зернов А.Е. Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Украинский матем. журнал.— 2001.— Т.53.— №3.— С. 302-310.

О дискретной модели Лотки-Вольтерра

Полтинникова М.С. (Россия)
СИ РАН
maria.poltinnikova@gmail.com

Рассмотрим модель Лотка-Вольтерра [1], в которой изучаются две взаимодействующие популяции. Пусть численность первой равна $x(t)$, а второй – $y(t)$. Числа a_1 и a_2 задают коэффициенты скорости свободного размножения. Внутривидовая конкуренция изменяет численность пропорционально количеству пар каждого вида с коэффициентами пропорциональности b_1 и b_2. Взаимодействие популяций пропорционально количеству пар $(x(t), y(t)$ с коэффициентами пропорциональности c_1 для изменения численности $x(t)$ и c_2 для изменения численности $y(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} dx/dt = (a_1 + b_1 x)x + c_1 xy, \\ dy/dt = (a_2 + b_2 y)y + c_2 xy. \end{cases}$$

Её фазовое пространство K — это угол в плоскости (x, y), в котором $x(t)$ и $y(t)$ неотрицательны. Сверху значения $x(t)$ и $y(t)$ тоже ограничены некоторым числом, которое характеризует максимум ресурсов. Предполагается, что $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$.

Экологи, которые активно используют модели Лотка-Вольтерра, отмечают, что они не всегда согласуются с экспериментами. Поэтому предлагается изучать дискретную модель, которая обладает более сложным поведением.

Литература

[1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование, М.: Наука, 1976. 288 с.

Исследование специального режима в системе синаптически связанных нейронов

Преображенская М. М. (Россия, Ярославль)
Ярославский Государственный Университет им. П. Г. Демидова
rita.preo@gmail.com

Рассматривается система нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \Big(\lambda f\big(u_1(t-1)\big) + b\, g\big(u_2(t-h)\big) \ln(u_*/u_1)\Big) u_1, \\ \dot{u}_2 &= \Big(\lambda f\big(u_2(t-1)\big) + b\, g\big(u_1(t-h)\big) \ln(u_*/u_2)\Big) u_2 \end{aligned} \tag{1}$$

(см. [1,2]), моделирующая взаимодействующую пару нейронов с синаптической связью. Здесь $h > 1$ — параметр, определяющий запаздывание, $u_1(t), u_2(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов, $\lambda \gg 1$ — большой параметр, характеризующий скорость протекания электрических процессов, $b = \mathrm{const} > 0$, $u_* = \exp(c\lambda)$ — пороговое значение, управляющее взаимодействием, $c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, слагаемые $bg\big(u_{j-1}\big)\ln(u_*/u_j)u_j$ моделируют синаптическую связь. Относительно функций $f(u)$, $g(u)$ предполагаем, что они из класса $C^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geqslant 0\}$, и удовлетворяют условиям:

$$f(0) = 1;\quad f(u) + a,\ uf'(u),\ u^2 f''(u) = O(1/u) \text{ при } u \to +\infty,\quad a > 0;\quad g(0) = 0;$$
$$g(u) > 0\ \forall u > 0;\quad g(u) - 1,\ ug'(u),\ u^2 g''(u) = O(1/u) \text{ при } u \to +\infty.$$

Поставим вопрос о существовании у системы (1) такого решения, что функция $u_1(t)$ обладает периодическими асимптотически высокими всплесками, а функция $u_2(t)$ принимает асимптотически малые значения при всех $t > 0$. Последнее означает, что соответствующий нейрон находится в состоянии покоя или рефрактерности.

После перехода к новым переменным $x_j = (1/\lambda)\ln u_j$, $j = 1, 2$, система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f\bigg(\exp\frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\bigg) + b\,(c - x_1)g\bigg(\exp\frac{x_2(t-h)}{\varepsilon}\bigg),\\ \dot{x}_2 &= f\bigg(\exp\frac{x_2(t-1)}{\varepsilon}\bigg) + b\,(c - x_2)g\bigg(\exp\frac{x_1(t-h)}{\varepsilon}\bigg), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. В силу сделанной экспоненциальной замены $u_j = \exp(\lambda x_j)$, $j = 1, 2$, постановка задачи для системы (2) состоит в отыскании релаксационных режимов таких, что $x_1(t)$ меняет знак, а $x_2(t)$ остается отрицательной при всех $t > 0$. Справедлива

Теорема. *Существует такое достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система* (2) *допускает экспоненциально орбитально устойчивое решение $\big(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)\big)$ периода $T(\varepsilon)$, удовлетворяющее предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\max_{0\leqslant t\leqslant h}|x_1(t,\varepsilon) - x_0(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant h}|x_2(t,\varepsilon) - y_0(t)|\big) = 0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = T_0,$$

$$x_0(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1,\\ 1 - a(t-1) & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant t_0 + 1,\\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases}\qquad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t),$$

$$y_0(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} e(t) & \text{при } h \leqslant t \leqslant t_0 + h,\\ t - t_0 - h + e(t_0 + h) & \text{при } t_0 + h \leqslant t \leqslant T_0 + h, \end{cases}\qquad y_0(t + T_0) \equiv y_0(t),$$

$$e(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{(a+1)\exp(-b(t-h))}{1 - \exp(-bt_0)} + 1/b + c,\quad T_0 = (1+a)t_0,\quad t_0 = 1 + 1/a.$$

Из явных формул функций x_0, y_0 следует, что x_1 и x_2 удовлетворяют требуемым условиям отрицательности x_2 и смене знака функции x_1.

Отметим, что в силу симметричного вхождения функций x_1 и x_2 в систему (2) аналогичная теорема может быть сформулирована для x_1, близкой к отрицательной функции y_0, и x_2, близкой к x_0, меняющей знак.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Литература

[1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифф. ур. 2013. Т. 49. № 10. С. 1227–1244.

[2] Преображенская М. М. Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов // МАИС. 2017. Т. 24. № 2. С. 186–204.

Кластеризация Т-клеточных рецепторов при инициировании специфического иммунного ответа

Приходько И.В. (Россия, Москва)
ФГБУ «НМИЦ гематологии» Минздрава России, Московский физико-технический институт
ivan.prikhodko@phystech.edu

Гурия Г.Т. (Россия, Москва)
ФГБУ «НМИЦ гематологии» Минздрава России, Московский физико-технический институт
guria@blood.ru

Процесс инициации специфического иммунного ответа исследовался с помощью дискретной динамической системы типа «клеточного автомата», реализованного на OpenCL. Предполагалось, что в каждой «клетке» находится по одному лиганду. Часть из лигандов полагалась условно патогенной. Патогенные лиганды, оказавшиеся в контакте с Т-клеточными рецепторами, диссоциируют за большие времена, чем эндогенные [1]. В части «клеток» помимо лигандов находились Т-клеточные рецепторы, способные стохастически мигрировать по системе и образовывать кластеры. Кластеры Т-клеточных рецепторов, в составе которых имелись рецепторы, находящиеся в контакте с лигандами, полагались более устойчивыми к самопроизвольному распаду. В рамках развитого подхода, формирование закритического по размерам кластера, полагалось необходимым условием инициации специфического иммунного ответа. Патогенные лиганды, образующие контакты с Т-клеточными рецепторами, выступали в качестве гетерогенных нуклеационных затравок макроскопической кластеризации.

В результате проведенного анализа удалось построить параметрическую диаграмму, отображающую изменение способности рассмотренной динамической системы к детектированию условных патогенов в зависимости от степени патогенности и их доли в общем количестве лигандов. Так, при доле патогенных лигандов равной 1%, а степени их патогенности равной 5, образование закритических кластеров происходило с вероятностью превышающей 0.99, в тоже время в отсутствии патогенных лигандов кластеризация не происходила вовсе. Оценки показали, что чувствительность использованной модели превышала 99%, а её специфичность превышала 98%. В свете априорных требований, предъявляемых к иммунным системам распознавания, полученные результаты представляются удовлетворительными [2].

Литература

[1] Lyons D. S, et al. A TCR binds to antagonist ligands with lower affinities and faster dissociation rates than to agonists // Immunity. 1996. Т. 5. №.1. P. 53–61.

[2] Feinerman O., Germain R. N., Atlan-Bonnet G. Quantitative challenges in understanding ligand discrimination by $\alpha\beta$ T cells // Molecular immunology. 2008. Т. 45. №.3. P. 619–631.

Дополнительные стационарные первые интегралы многомерных дифференциальных систем с симметриями

Проневич А.Ф. (Республика Беларусь, Гродно)
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
pranevich@grsu.by

Рассмотрена автономная система уравнений в полных дифференциалах [1]

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(x)\, dt_j\,, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

которая индуцирует линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)\, \partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad X_{ij} \in C^1(\mathcal{X}), \quad \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Используя многомерный аналог [2] теоремы А. Буля (A. Buhl) для системы (1), обладающей симметриями, получены утверждения, позволяющие строить ее дополнительный первый интеграл по известному первому интегралу.

Теорема 1. *Пусть функция* $F\colon x \to F(x)\ \ \forall x \in \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ *является первым интегралом системы в полных дифференциалах* (1), *а индуцированные ею дифференциальные операторы* (2) *симметричны с оператором* $\mathfrak{X}_\xi,\ \xi \in \{1,\ldots,m\}$, *т.е. имеет место операторная система тождеств*

$$\big[\mathfrak{X}_j(x),\, \mathfrak{X}_\xi(x)\big] = \mathfrak{O} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = 1,\ldots,m, \quad \xi \in \{1,\ldots,m\}.$$

Тогда скалярная функция

$$F_\xi\colon x \to \sum_{i=1}^{n} X_{i\xi}(x)\,\partial_{x_i} F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \xi \in \{1,\ldots,m\},$$

будет дополнительным первым интегралом дифференциальной системы (1).

В случае, когда система (1) является вполне разрешимой [3, с. 17] имеет место

Следствие 1. *Пусть функция* $F\colon x \to F(x)\ \ \forall x \in \mathcal{X}'$ *есть первый интеграл вполне разрешимой системы в полных дифференциалах* (1). *Тогда функции*

$$F_j\colon x \to \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)\,\partial_{x_i} F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad j = 1,\ldots,m,$$

будут первыми интегралами автономной вполне разрешимой системы (1).

Литература

[1] Амелькин В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2003.

[2] Проневич А. Ф. Теорема Пуассона построения стационарных интегралов автономных систем уравнений в полных дифференциалах // Проблемы физики, математики и техники. 2016. №3. С. 52–57.

[3] Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно: ГрГУ, 2006.

О группе Брауэра арифметической модели полного пересечения над числовым полем

Прохорова Т. В. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
tvprokhorova@mail.ru

Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Обозначим через A кольцо целых поля k. Арифметической моделью многообразия V называется собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : V \to SpecA$, где X – регулярная схема и общий схемный слой π изоморфен V.

Гладкое проективное n-мерное многообразие $V \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{n+r}$ называется полным пересечением, если существуют такие гладкие определенные над полем k гиперповерхности $H_1,\ldots,H_r \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{n+r}$ в общем положении, что $V = H_1 \cap \cdots \cap H_r$ в смысле теории схем.

По определению, группа Брауэра $Br(X)$ классифицирует пучки центральных простых алгебр на X по модулю подобия. Известно, что существует каноническое вложение $Br(X) \hookrightarrow Br'(X)$, где $Br'(X) = H^2_{\text{ét}}(X, G_m)$ - когомологическая группа Брауэра.

Артин высказал гипотезу о том, что группа Брауэра $Br(X)$ конечная ([1], гл. IV, §2, вопрос 2.19). Хорошо известно, например, что группа $Br(A) \overset{def}{=} Br(SpecA)$ конечная.

Теорема. *Когомологическая группа Брауэра арифметической модели полного пересечения размерности больше 2 над числовым полем является конечной.*

Доказательство Из неравенства $n \geq 3$ и теоремы Гротендика - Лефшеца [2], [3] следует существование канонических изоморфизмов ограничения

$$\begin{aligned} &Pic(\mathbb{P}_k^{n+r}) \tilde{\to} Pic(V), \\ &\mathbb{Z} = H^2(\mathbb{P}_k^{n+r} \otimes_k \mathbb{C}, Z) = NS(\mathbb{P}_k^{n+r}) \tilde{\to} NS(V) = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим точную последовательность ([4], формула (5))

$$\begin{aligned} &0 \to [NS(V \otimes_k \overline{k}/l)]^{Gal(\overline{k}/k)} Pic(V) \to H^2_{\text{ét}}(V \otimes_k \overline{k}, \mu_l)^{Gal(\overline{k}/k)} \to Br'(V \otimes_k \overline{k})_l^{Gal(\overline{k}/k)} \\ &\quad \to H^1(Gal(\overline{k}/k), NS(V \otimes_k \overline{k})/l) \to H^1(Gal(\overline{k}/k), H^2_{\text{ét}}(V \otimes_k \overline{k}, \mu_l)). \end{aligned} \tag{2}$$

Теоремы сравнения этальных когомологий с классическими и (1) дают изоморфизмы

$$\begin{gathered} [NS(V \otimes_k \overline{k}/l)]^{Gal(\overline{k}/k)} \tilde{\to} Z/lZ; \\ H^2_{\text{ét}}(V \otimes_k \overline{k}, \mu_l) \tilde{\to} H^2_{\text{ét}}(V \otimes_k \mathbb{C}, Z/lZ) \tilde{\to} Z/lZ. \end{gathered}$$

Поэтому точная последовательность (2) даёт точную последовательность

$$\begin{aligned} &0 \to Br'(V \otimes_k \overline{k})_l^{Gal(\overline{k}/k)} \\ &\quad \to H^1(Gal(\overline{k}/k), NS(V \otimes_k \overline{k})/l) \to H^1(Gal(\overline{k}/k), H^2_{\text{ét}}(V \otimes_k \overline{k}, \mu_l)). \end{aligned}$$

Так как $char(k) = 0$, то в силу ([4], предложение 2.5 и следствие 2.6) каноническое отображение

$$H^1(Gal(\overline{k}/k), NS(V \otimes_k \overline{k})/l) \to H^1(Gal(\overline{k}/k), H^2_{\text{ét}}(V \otimes_k \overline{k}, \mu_l))$$

инъективно *почти для всех* простых чисел l (для всех, кроме конечного подмножества исключительных простых чисел). Поэтому группа $Br'(V \otimes_k \overline{k})_l^{Gal(\overline{k}/k)}$ тривиальна почти для всех l. В нашем случае выполнено условие (c) в [4, предложение 2.5], поэтому группа $Br'(V \otimes_k \overline{k})^{Gal(\overline{k}/k)}(l)$ конечная *для всех* простых чисел l. Значит, группа $Br'(V \otimes_k \overline{k})^{Gal(\overline{k}/k)}$ конечная. Поскольку $Pic(V \otimes_k \overline{k}) = NS(V \otimes_k \overline{k})$ и $NS(V \otimes_k \overline{k})_{tors} = 0$, то конечность группы $Br'(V)/Im[Br(k) \to Br'(V)]$ следует из конечности группы $Br'(V \otimes_k \overline{k})^{Gal(\overline{k}/k)}$ [4, замечание 1.3]. Наконец, согласно предложению 1.3 в [5], конечность группы $Br'(X)$ следует из конечности группы $Br'(V)/Im[Br(k) \to Br'(V)]$. Теорема доказана.

Литература

[1] Дж. Милн. Этальные когомологии. Мир. М. 1983; пер. с англ.: J.S. Milne. Etale cohomology. Princeton Univ. Press. Princeton. 1980.

[2] A.Grothendieck. (SGA-2) Séminaire de Géométrie Algébrique. Bures-sur-Yvette. 1962.

[3] R.Hartshorne. Ample subvarieties of algebraic varieties. Lect. Notes Math. 1970. V. 156.

[4] A.N.Skorobogatov, Yu.G.Zarhin. A finiteness theorem for the Brauer group of Abelian varieties and K3 surfaces. J. Algebraic Geom. 2008. 17:3. P. 481–502.

[5] С.Г.Танкеев. О группе Брауэра арифметической модели гиперкэлерова многообразия над числовым полем. Изв. РАН. Сер. матем. 2015. 79:3. С. 203–224; англ. пер.: S.G.Tankeev. On the Brauer group of an arithmetic model of a hyperkähler variety over a number field. Izv. Math. 2015. 79:3. P. 623–644.

О некоторых методах исследования разрешимости нелокальных задач для гиперболических уравнений

Пулькина Л.С. (Россия, Самара)

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

louise@samdiff.ru

В докладе рассматриваются примеры задач с нелокальными условиями для гиперболического уравнения. Выбор метода исследования разрешимости нелокальной задачи во многом зависит от вида нелокального условия. В докладе особое внимание уделяется задачам с нелокальными условиями, содержащими интегралы от искомого решения. В процессе разработки методов, эффективных именно для нелокальных задач с интегральными условиями, были выделены интегральные условия различных типов. В докладе предполагается обсудить критерии выбора метода обоснования разрешимости нелокальных задач в зависимости от вида нелокальных условий, а также схемы реализации этих методов.

Построение управлений, обеспечивающих заданный температурный режим для многокамерной системы нагревания

Раецкая Е.В. (Россия, Воронеж)
Воронежский лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
raetskaya@inbox.ru

Решается задача управления работой многокамерного нагревательного устройства, обеспечивающего получение на выходе желаемого температурного режима. То есть для неоднородной линейной стационарной динамической системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Du(t) + f(t), \tag{1}$$

$$F(t) = Bx(t), \tag{2}$$

решается задача получения на выходе заданной вектор-функции $F(t)$ (температуры в помещениях) с помощью программного управления. Здесь $x(t), u(t), f(t) \in R^n$; $F(t) \in R^m$; A, B, D — матрицы соответствующих размеров; $t \in [0, T]$.

Рассматриваются случаи как полностью наблюдаемой, так и ненаблюдаемой системы (1), (2). Задача решается методом каскадной декомпозиции, заключающемся в поэтапном переходе от исходной задачи к аналогичным задачам в подпространствах. За счет конечномерности исходных пространств процесс полностью реализуется за конечное количество шагов. Вектор-функция $F(t)$ может не быть произвольно заданной; ее необходимые свойства устанавливаются непосредственно в процессе декомпозиции.

При решении применяются лишь линейные замены переменных, процедуры дифференцирования и решение линейных алгебраических уравнений. Построено управление и соответствующее состояние.

Литература

[1] Раецкая Е.В. Об управлении одной динамической системой // Вестник Курган-Тюбинского государственного университета имени Носира Хусрава. 2014. Т. 29. № 3. С. 3–6.

О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости

Раутиан Н. А. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
nrautian@mail.ru

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегродифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. В работе рассматриваются уравнения следующего вида

$$\frac{du(t)}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где A – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau),$$

где $d\mu$ - положительная мера, которой соответствует возрастающая непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Получены представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений (см. [1]). Указанные представления являются новыми для данного класса интегродифференциальных уравнений.

Литература

[1] Vlasov V. V., Rautian N. A. Properties of solutions of integro-differential equations arising in heat and mass transfer theory // Trans. Moscow Math. Soc. 2014. V. 75. P. 185–204.

Формула для решения многомерного уравнения Шрёдингера[34]

Ремизов И.Д. (Россия, Нижний Новгород)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
ivremizov@yandex.ru

Доклад посвящён выводу формулы (4), дающей (при произвольном фиксированном $d \in \mathbb{N}$) решение задачи Коши для следующего уравнения Шрёдингера:

$$\begin{cases} \psi_t'(t,x) = \frac{1}{2}i\left(\sum\limits_{m=1}^{d} \psi''_{x_m x_m}(t,x)\right) - iV(x)\psi(t,x) = iH\psi(t,x), & t \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^d, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1)$$

Мы ищем такое решение ψ, что $\psi(t,\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ при каждом $t \geq 0$. Подбор формулы в равенстве (4) и его доказательство основаны на теореме Чернова [1, 2] и на принадлежащих автору доклада конструкции касания по Чернову [3,4] и формуле $R(t) = e^{i(S(t)-I)}$, которая позволяет выражать решение уравнения Шрёдингера через решения уравнения теплопроводности, получаемом путём стирания в исходном уравнении Шрёдингера мнимой единицы i. Формула (4) включает в себя степени оператора сдвига, такой подход был впервые предложен в работе [5], результаты этой работы на случай неограниченного потенциала V расширяет следующая

Теорема 1. *Пусть функция $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ лежит в пространстве $L_2^{loc}(\mathbb{R}^d)$, т.е. V измерима и $\int_{\|x\|\leq R} V(x)^2dx < \infty$ для любого $R > 0$, где $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$. Пусть функция $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена и непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, дифференцируема в нуле, причём $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$; например, можно взять $w(x) = \sin(x)$, $w(x) = \mathrm{arctg}(x)$. Пусть для каждого $j = 1,\ldots,d$ вектор $e_j \in \mathbb{R}^d$ имеет 1 на позиции j и 0 на остальных $d-1$ позициях. Для каждой $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$, каждой финитной гладкой $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ и каждых $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ положим*

$$(W(t)f)(x) = \frac{1}{2d}\sum_{j=1}^{d}\Big(f(x+\sqrt{d}\sqrt{t}e_j) + f(x-\sqrt{d}\sqrt{t}e_j) - 2f(x)\Big) + w(-tV(x))f(x), \quad (2)$$

$$(H\varphi)(x) = \frac{1}{2}\Delta\varphi''(x) - V(x)\varphi(x). \quad (3)$$

Пусть, сверх того, выполняется любое из следующих условий: А) Замыкание оператора H, заданного на множестве всех бесконечногладких финитных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, является самосопряжённым оператором в $L_2(\mathbb{R}^d)$ или Б) $V(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^d$.

[34] Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году.

Тогда задача Коши (1) для уравнения Шрёдингера (гамильтониан равен $-H$) имеет при каждом $t \geq 0$ и $\psi_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ единственное в $L_2(\mathbb{R}^d)$ решение $\psi(t,x) = \left(e^{itH}\psi_0\right)(x)$, непрерывно по норме $L_2(\mathbb{R}^d)$ зависящее (при фиксированном t) от ψ_0 и задаваемое при почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ формулой

$$\psi(t,x) = \left(\lim_{n\to+\infty}\lim_{j\to+\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{(in)^k}{k!}W(t/n)^k\psi_0\right)(x), \tag{4}$$

где $W(t/n)$ получается заменой t на t/n в (2), а $W(t/n)^k$ это композиция k копий линейного ограниченного оператора $W(t/n)$.

Замечание 1. В работе [6] близкий подход применяется к уравнению Шрёдингера с одномерной координатой x, т.е. для случая $d=1$, но при этом гамильтониан может содержать производные по x сколь угодно высокого порядка.

Литература

[1] Johnson G., Lapidus M. The Feynman Integral and Feynman Operational Calculus. Clarendon Press, Oxford, 2000.

[2] Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer, 2000.

[3] Remizov I. D. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation. // J. Funct. Anal. 270:12 (2016), 4540-4557.

[4] Ремизов И. Д. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Докл. РАН. 2017. Т. 476. No 1. с. 17–21.

[5] Ремизов И. Д. Решение уравнения Шредингера с помощью оператора сдвига // Мат. заметки. 2016. Т. 100. Вып. 3. С. 477–480.

[6] Ремизов И. Д. Формула, дающая решение задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера на прямой с переменными коэффициентами и производными сколь угодно большого порядка. // Дифференциальные уравнения, 2018, том 54, номер 6, с. 850-851

Пороговая величина управления в задаче о наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение[35]

Решмин С. А. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
reshmin@ipmnet.ru

Управляемое вращение спутника вокруг собственной оси в плоскости круговой орбиты описывается уравнением [1]:

$$A\ddot{\varphi} + 3\omega^2(B-C)\sin\varphi = 2M, \qquad \varphi = 2\nu. \tag{1}$$

Здесь ω — угловая скорость движения спутника по орбите, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, ν — угол между осью C спутника и его радиус-вектором, M — внешний или внутренний управляющий момент. По предположению $B > C$. Ось A спутника перпендикулярна плоскости орбиты. Если $M = 0$, то существуют устойчивые положения равновесия, соответствующие ориентациям спутника по радиус-вектору: $\nu = 2\pi n$, где n — целое число. Пусть требуется перевести спутник в какое-либо из указанных положений с условием $\dot{\nu} = 0$ за минимальное время при помощи ограниченного по модулю управляющего момента. В безразмерных переменных такая задача быстродействия может быть сформулирована в виде:

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = ku, \qquad |u| \leqslant 1, \qquad T \to \min, \tag{2}$$

[35]Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310382-5). Частично работа подготовлена при поддержке программы президиума РАН № 30 «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации» (№ госрегистрации АААА-А17-117121120031-8).

$$\varphi(T) = 4\pi n, \qquad \dot{\varphi}(T) = 0, \qquad n \in Z. \tag{3}$$

Здесь u — нормированное на единицу управление, k — положительный коэффициент, рассматриваемый как параметр задачи. Инвариантность уравнения (2) и терминального множества (3) относительно преобразования сдвига $\varphi \to \varphi + 4\pi$ приводит к периодической по координате структуре (цилиндричности) картины синтеза. При этом всегда имеет место неединственность оптимальных траекторий для некоторых начальных точек, лежащих на рассеивающих кривых (терминология Айзекса Р.).

При $k \gg 1$ оптимальное управление по обратной связи наиболее простое: релейно и имеет не более одного переключения [1]. Его структура аналогична структуре решения для линейной системы [2], получаемой из (2) путем отбрасывания нелинейного слагаемого $\sin\varphi$. В фазовом пространстве расположено бесконечное множество кривых переключений, проходящих через терминальные точки, и рассеивающих кривых, перемежающихся с ними и смыкающихся с ними на бесконечности. Кривые переключений совпадают с оптимальными траекториями без переключений и для них имеется аналитическое выражение. Рассеивающие кривые называются в [1] «кривыми разделения» и могут быть получены только численно. Указанные кривые переключений и кривые разделения ограничивают области в фазовом пространстве, соответствующие разным предельным значениям оптимального управления.

При уменьшении возможностей управления в исходной системе (1) на фазовой плоскости бифуркационным образом появляются дополнительные кривые переключений (даже при $k > 1$, см. [3]). В докладе при использовании [4] будет показано следующее: во-первых, точки бифуркации лежат на рассеивающей кривой и, во-вторых, только в том месте, где локальный наклон рассеивающей кривой достигает некоторого критического значения, для которого имеется аналитическое выражение. В результате численно найдено соответствующее пороговое значение $k^* \approx 1.095$.

Литература

[1] Белецкий В. В. Об оптимальном приведении искусственного спутника Земли в гравитационно-устойчивое положение // Космич. исслед. 1971. Т. 9. Вып. 3. С. 366–375.

[2] Friedland B., Sarachik P. Indifference regions in optimum attitude control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1964. Vol. 9. No. 2. P. 180–181.

[3] Решмин С. А. Оценка пороговой величины управления в задаче о наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. № 1. С. 12–22.

[4] Reshmin S. A., Chernousko F. L. Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system // Journal of Optimization Theory and Applications. 2014. Vol. 163. No. 1. P. 230–252.

Оптимизационные задачи для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу

Родина Л. И. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
LRodina67@mail.ru

Исследуется одна из моделей популяционной динамики, заданная дифференциальным уравнением с импульсными воздействиями, зависящим от случайных параметров:

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = -\ell(v_k, u_k)x, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1$ между моментами импульсов и параметры $v_k \in \Omega_2$, $k = 1, 2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно. На процесс сбора ресурса можно влиять таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k). В этом случае доля добываемого ресурса равна $\ell_k = \ell(v_k, u_k)$, где $\ell(v_k, u_k) = v_k$, если $v_k < u_k$ и $\ell(v_k, u_k) = u_k$, если $v_k \geqslant u_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Обозначим $U \doteq \{u : u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)\}$, где $u_k \in [0, 1]$; $\Sigma \doteq \Sigma_1 \times \Sigma_2$,

$$\Sigma_1 \doteq \{\theta : \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)\},\ \theta_k \in \Omega_1,\ \Sigma_2 \doteq \{v : v = (v_1, \ldots, v_k, \ldots)\},\ v_k \in \Omega_2;$$
$$L(v, u) \doteq \{\ell : \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)\}, \quad \ell_k = \ell(v_k, u_k).$$

Пусть $X_k = X_k(\theta, \ell, x_0)$ — текущий размер популяции перед извлечением ресурса в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зависящий от $\theta_1, \ldots, \theta_k$, $\ell_1, \ldots, \ell_{k-1}$ и x_0. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*\big(\theta, L(v, u), x_0\big) \doteq \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \sum_{k=1}^{n} X_k\big(\theta, \ell, x_0\big)\ell_k\,,$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса.

Исследуется задача выбора управления $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots) \in U$, ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени τ_k, при котором значение функции $H_*\big(\theta, L(\sigma, u), x_0\big)$ можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Управление $u_k = u(x, X_k)$ будем строить таким образом, чтобы эксплуатировать популяцию до достижения определенного уровня $x > 0$; это можно сделать, если положить $u(x, X_k) = 1 - \dfrac{x}{X_k}$. Пусть $\varphi(t, x)$ — решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, x) = \ell\big(v, u(x, \varphi(\vartheta, x))\big) = \begin{cases} v, & \text{если } \ v < u(x, \varphi(\vartheta, x))\,, \\ u(x, \varphi(\vartheta, x)), & \text{если } \ v \geqslant u(x, \varphi(\vartheta, x))\,, \end{cases}$$

которая является случайной величиной на множестве $\Omega_1 \times \Omega_2$, равной доле добываемого ресурса с учетом ограничения уровня добычи до $x > 0$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины, m_θ — математическое ожидание $\theta_1, \theta_2, \ldots$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *уравнение $\dot{x} = g(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$, где $K > 0$ и интервал (K_1, K_2) является областью притяжения этого решения.*

2) $\Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, *где* $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < +\infty$, $\Omega_2 \subseteq [0, 1]$ *и* $F_2(0) < 1$.

Тогда для любых $(x, x_0) \in (K_1, K) \times (K_1, K_2)$ существует управление $u \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$\frac{M\big(\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)\big)}{m_\theta} \leqslant H_*\big(\theta, L(v, u), x_0\big) \leqslant \frac{KM\ell(\omega, x)}{m_\theta}.$$

Рассматривается также следующая задача — требуется найти минимальное время между соседними изъятиями, необходимое на возобновление ресурса, чтобы можно было производить добычу до тех пор, пока доля извлеченного ресурса не достигнет заданного значения $u \in (0, 1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Литература

[1] Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университа. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, вып. 1. С. 48–58.

Инвариантные множества и аттракторы разностного уравнения со случайными параметрами[36]

Родина Л. И. (Россия, Владимир)
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
LRodina67@mail.ru

Хаммади А. Х. (Ирак, Аль-Дивания)
университет Аль-Кадисия
alaa.hammadi@qu.edu.iq

Рассматривается вероятностная модель, заданная разностным уравнением, в предположении, что в каждый момент времени n функция f зависит также от случайного параметра ω_n, принимающего значения в множестве Ω :

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{1}$$

Здесь Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$, $I = [a, b]$.

Введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma \colon \omega_0 \in \Omega_0, \dots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где} \quad \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ j = 0, \dots, n,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_n) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_n)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma_n \doteq (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}), \quad f^n(\sigma_n, x) \doteq f\big(\omega_{n-1}, \dots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))\big).$$

Будем также пользоваться обозначениями $x_n(\sigma, x) = f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma_n, x)$. Образ множества A при преобразовании $f(\omega, x)$, $x \in A$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ будем обозначать $f(\omega, A)$, тогда $f(\Omega, A) \doteq \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega, A)$. Множество A является *инвариантным* множеством уравнения со случайными параметрами (1), если $f(\Omega, A) \subseteq A$. Пусть $f^n(\Omega^n, A) \doteq f\big(\Omega, f^{n-1}(\Omega^{n-1}, A)\big)$, $n = 2, 3, \dots$.

Определение 1. Множество $A(f, \Omega)$ назовем *максимальным аттрактором* уравнения (1), если существует окрестность U множества $A(f, \Omega)$ такая, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(\Omega^n, U) = A(f, \Omega).$$

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть $A = [\widehat{a}, \widehat{b}]$, $a < \widehat{a} \leqslant \widehat{b} < b$, инвариантное множество уравнения* (1) *и существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $K_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что $K_1 < 1$, $K_4 < 1$ и для всех $\omega \in \Omega$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\widehat{a} + K_1(x - \widehat{a}) \leqslant f(\omega, x) \leqslant \widehat{b} - K_2(x - \widehat{a}), \ \ \text{если } x \in (\widehat{a} - \varepsilon, \widehat{a}), \\ &\widehat{a} - K_3(x - \widehat{b}) \leqslant f(\omega, x) \leqslant \widehat{b} + K_4(x - \widehat{b}), \ \ \text{если } x \in (\widehat{b}, \widehat{b} + \varepsilon). \end{aligned} \tag{1}$$

Если, кроме того, выполнено хотя бы одно из условий:

1) $K_2 < 1$ *и* $K_3 \cdot \max(K_1, K_2, K_4) < 1$,

2) $K_3 < 1$ *и* $K_2 \cdot \max(K_1, K_3, K_4) < 1$,

то $A(f, \Omega) \subseteq A$. Если, кроме перечисленных выше условий, выполнено равенство $f(\Omega, A) = A$, то A является максимальным аттрактором уравнения (1).

Определение 2. Решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (1) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем *хаотическим,* если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует.

[36]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Точку $x_0 \in I$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (1), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические. Точку y назовем *со временем периодической* или предпериодической точкой уравнения (1), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $\sigma_m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma_m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geqslant 1$.

Теорема 2 (см. [1]). *Предположим, что уравнение* (1) *либо не имеет ни одного цикла* (*периода* $k \geqslant 1$), *либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Пусть* Y — *множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка* $x_0 \in I \setminus Y$ *апериодическая с вероятностью единица.*

Литература

[1] Родина Л.И., Хаммади А.Х. Об инвариантных множествах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университа. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 2. С. 238–247.

Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна

Романенков А. М. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
romanaleks@gmail.com
Петров В. М. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
pm@mati.ru

1. В данной работе мы будем предполагать, что управляющая функция $g(x,t)$ имеет вид

$$g(x,t) = u_0(t)\chi_0(x) + u_1(t)\chi_1(x), \tag{1}$$

где $\chi_0(x), \chi_1(x)$ – характеристическая функция двух узких непересекающихся отрезков, которые принадлежат отрезку $[0,l]$ и шириной 2ε. Введем минимизируемый функционал

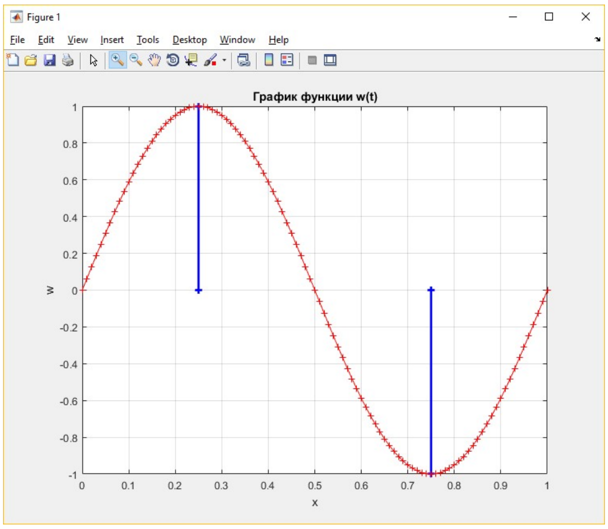
$$J(t) = \int_0^l [w_t^2(x,t) + (c^2 - v_0^2)w_x^2(x,t)]dx + 2\lambda\varepsilon(u_0^2(t) + u_1^2(t)) \qquad (2))$$

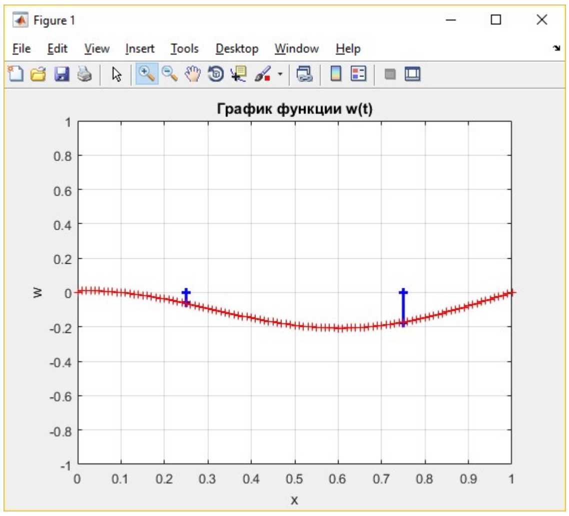
Положим $2\lambda\varepsilon = \mu$ и будем считать функции $u_k(t)$ кусочно-постоянными

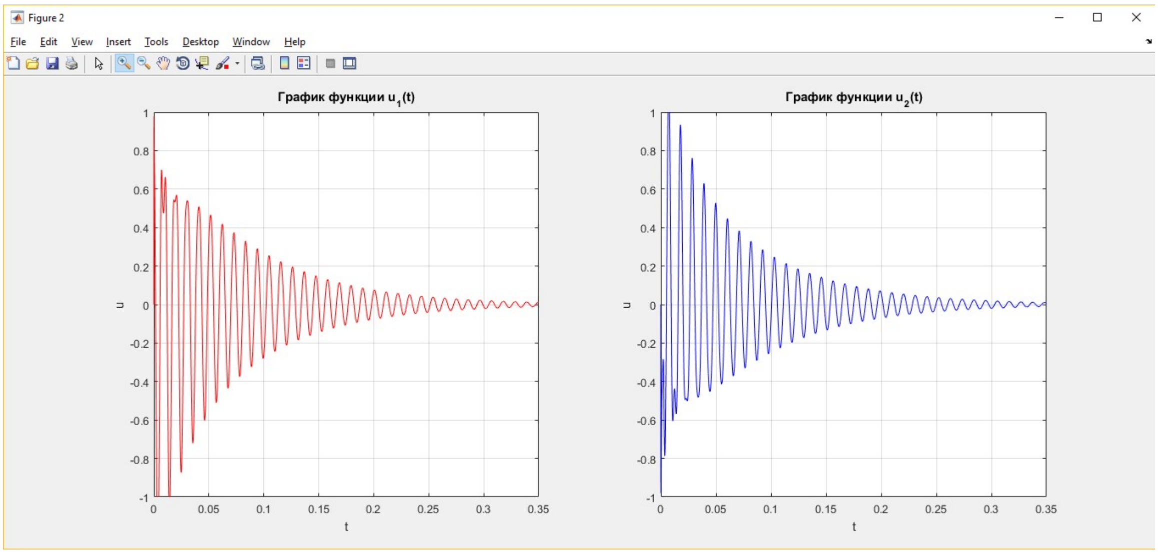
$$u_k(t) = u_{kp}, \text{ при } t_{p-1} < t < t_p, \quad k = 0,1, p = 1,2,\dots,P, \tag{3}$$

здесь P может принимать значения от 1 до N, где N – число шагов по времени, используемых при численном решении задачи. Таким образом, функционал J становится функцией значений u_{kp} и для применения градиентного метода требуется значение всех частных производных $\frac{\partial J}{\partial y_{xp}}, k = 0,1, p = \overline{1,P}$ (см. [3])

Полученный результат проиллюстрируем для начального возмущения $\sin 2\pi x$ и двух точечных демпферов.







2. Необходимые условия оптимальности. Пусть демпфер $g(x,t)$ имеет вид

$$g(x,t) = g_0(x,t) + g_1(x,t), \tag{4}$$

где $g_0(x,t) = u_0(t)\chi_{[\gamma_0;\beta_0]}(x), g_1(x,t) = u_1(t)\chi_{[\gamma_1;\beta_1]}(x), [\gamma_0;\beta_0] \cup [\gamma_1;\beta_1] \subset [0;l], [\gamma_0;\beta_0] \cap [\gamma_1;\beta_1] = \emptyset$ и $0 \le u_0(t) \le M, 0 \le -u_1(t) \le M$. Используя сингулярную вариацию и стандартные приемы доказательства необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. [1, 2]), получим соответствующую структуру оптимального управления, которая качественно показана на следующем примере.

В качестве начального возмущения возьмем функцию $\sin 2\pi x$ (см. предыдущий рисунок). Структура оптимального управления представлена на рисунке 1. Из данного рисунка можно видеть, что имеется четыре зоны: 1-включен левый демпфер, 2- включен правый демпфер, 3-включены оба демпфера, 4-оба демпфера выключены.

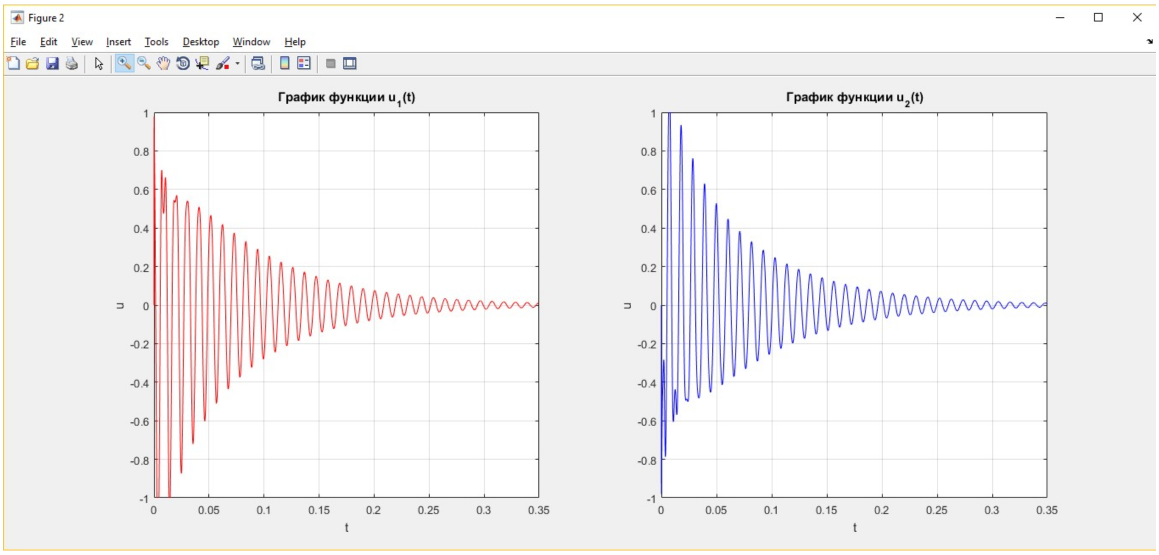


Рисунок 1.

Отметим, что использование необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума, вообще говоря, не позволяет полностью погасить колебания, как это было сделано в первом пункте.

Литература

[1] Л. А. Муравей, В. М. Петров, А. М. Романенков. Оптимальное управление нелинейными процессами в задачах математической физики. М.: МАИ, 2018, 160 с.

[2] Nikolay Banichuk, Victor Petrov, Alexander Sinitsyn, Pekka Neittaanmaki, Tero Tuovinen. On the Optimality Conditions for Suppression of Vibration of Axially Moving Materials. University if Jyvaskyla, (2016). ISBN 978-951-39-6883-0 (nid.).

[3] Ф. П. Васильев. Методы оптимизации: В 2-х кн. — Новое изд., перераб. и доп. —М.: МЦНМО, 2011.

Компактность операторов Киприянова-Катрахова

Рощупкин С.А. (Россия, Елец)
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
roshupkinsa@mail.ru

j-Функция Бесселя $j_\nu(t)$ — функция, удовлетворяющая сингулярному уравнению Бесселя (см. [1])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\nu+1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)j_\nu(x\xi)=-\xi^2 j_\nu(x\xi),$$

и начальным условиям

$$j_\nu(0)=1,\quad j'_\nu(0)=0.$$

Эта функция четная. На ее основе в [1] построено *четное* преобразование Фурье-Ганкеля

$$F_B[u]=\int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)u(x)x^\gamma dx.$$

В [2] введены одномерные сингулярные псевдодифференциальные операторы, на основе *нечетного j-преобразования Ганкеля*

$$\mathcal{F}_{B,od}[u](\xi)=\widehat{u}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\xi}{\gamma+1}j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi)\ u(x)x^\gamma dx,\ \ \gamma>0\,.$$

Пусть

$$H^s_\gamma(\mathbb{R}_1) \iff \|u\|_{H^s_\gamma} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi)\xi^\gamma d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Операторы Киприянова-Катрахова имеют вид (см. [2]):

$$Au(x) = \mathcal{F}_B^{-1}\left[\mathcal{F}_B[a(x,\xi)u(x)]\right], \quad \tilde{A}u(x) = \mathcal{F}_B^{-1}\left[a(x,\xi)\mathcal{F}_B[u(x)]\right].$$

Компактность с.п.д. операторов в $H^s_\gamma(\mathbb{R}_1)$ построенных на основе четного j-преобразования Фурье-Ганкеля, исследовано в [3].

Теорема 1. *Оператор $A - \tilde{A}$, как оператор действующий из $H^s_\gamma(\mathbb{R}_1)$ в $H^{s-m}_\gamma(\mathbb{R}_1)$, является компактным.*

Теорема 2. *Пусть A_1 и A_2 — с.п.д. операторы типа (1) с символом $a(x,\xi)$ порядков m_1 и m_2 соответственно. Тогда коммутатор $[A_1, A_2]$, как оператор, действующий из $H^s_\gamma(\mathbb{R}_1)$ в $H^{s-m_1-m_2}_\gamma(\mathbb{R}_1)$ является компактным.*

Следствие 1. *Если функция $\varphi(x) \in S$, то оператор $\varphi A - A\varphi$ как оператор, действующий из пространства $H^s_\gamma(\mathbb{R}_1)$ в $H^{s-m}_\gamma(\mathbb{R}_1)$, является компактным.*

Следствие 2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат S и имеют не пересекающиеся носители. Тогда оператор $\varphi A\psi$ как оператор, действующий из $H^s_\gamma(\mathbb{R}_1)$ в $H^{s-m}_\gamma(\mathbb{R}_1)$, является компактным.*

Литература

[1] Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН, 1951. Т. 6, i 2, С. 102–143.

[2] Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Матем. сб. 1977. Т. 104, № 6, с. 49–68.

[3] Ляхов Л. Н. О компактности и псевдолокальности сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения, 1983. Т.19, № 6. С. 1025–1032.

Задача о колебаниях двутавровой балки[37]

Рудаков И.А. (Россия, Москва)
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
rudakov-ia@mail.ru

Рассматривается задача

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t,u) + f(x,t), \;\; 0 < x < \pi, \;\; t \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \;\; t \in \mathbf{R}; \tag{2}$$

$$u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0, \;\; t \in \mathbf{R}; \tag{3}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t) = 0; \;\; 0 < x < \pi, \;\; t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Функции $g(x,t,u), f(x,t)$ являются T-периодическими по $t, T > 0$ и a есть положительная константа. Уравнение (1) представляет математическую модель колебаний проводов, стержней, способных сопротивляться изгибу, а также двутавровых балок [1],[2]. При $a = 0$ задача о периодических колебаниях балки исследована в работах [3]-[5]. При $a \neq 0$ в работе [6] доказано существование по крайней мере одного периодического решения малой амплитуды, если внешняя сила имеет малую амплитуду и нелинейное слагаемое зависит от u и u_x.

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times \mathbf{R}/(T\mathbf{Z}), w = 2\pi/T, \mu_{nm} = n^4 + an^2 - (wm)^2$, $\sigma = \{\mu_{nm} | n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$.

[37]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/ПЧ)

Пусть g удовлетворяет следующим условиям:

$$g \in C^1(\Omega \times R) \text{ и } T - \text{периодична по } t; \tag{5}$$

Существуют константы α, β, r, такие, что $r > 0$ и

$$\alpha \leqslant \frac{g(x,t,u)}{u} \leqslant \beta \text{ при } u \in (-\infty, -r] \cup [r, +\infty), (x,t) \in \Omega. \tag{6}$$

Будем говорить, что выполнено условие (A), если либо a является иррациональным числом, $w \in Q, w > 0$; либо для фиксорованного $l \in \mathbf{N}$

$$w \in Q_l \equiv \left\{ \frac{m}{l} | m \in \mathbf{N} \right\}, a = \frac{p}{q} \text{ не принадлежит } Q_l, p, q \in \mathbf{N}, (p,q) = 1, \; q \text{ не квадрат;}$$

либо $a = 2b - 1; w = \frac{p}{2q-1}; b, p, q \in \mathbf{N}, (p, 2q-1) = 1.$

Теорема 1. Предположим выполнены условия $(A), (5), (6)$ с константами α, β, r такими, что $r > 0, \alpha < \beta$ и $[\alpha, \beta] \cap \sigma = \emptyset$. Тогда для любой фунции $f \in H_1(\Omega)$ задача (1)-(4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ и $u_{xx} \in C(\Omega)$.

Запишем уравнение (1) в следующем виде

$$u_{tt} + u_{xxxx} - a u_{xx} + g(x,t,u) = f(x,t), \;\; 0 < x < \pi, \;\; t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Обозначим $G(x,t,u) = \int_0^u g(x,t,s)ds$. Предположим выполнено (5), а также следующие условия. Существуют положительные константы $D_0, A_1, A_2, A_3, A_4, p > 2, d \in [p-1, p)$ такие, что

$$ug(x,t,u) \geqslant pG(x,t,u) > 0 \text{ при } u \in (-\infty, -D_0) \cup (D_0, +\infty), (x,t) \in \Omega; \tag{8}$$

$$A_3|u|^d + A_4 \geqslant |g(x,t,u)| \geqslant A_1|u|^d - A_2 \text{ для всех } (x,t,u) \in \Omega \times \mathbf{R}; \tag{9}$$

$$g(x,t,u) = -g(x,t,-u) \text{ при всех } (x,t,u) \in \Omega \times \mathbf{R}. \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A), (5), (8)-(10) и $f(x,t) \in H_1(\Omega)$ есть $T-$ периодическая по t функция. Тогда для любого $c > 0$ задача (7), (2), (3), (4) имеет обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ такое, что $u_{xx} \in C(\Omega)$ и $||u||_{L_{d+1}} \geqslant c$.

Литература

[1] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.:Наука, М., 1968.

[2] Ванько В. И. О собственных частотах колебаний проводов воздушных ЛЭП// Известия ВУЗов. 1987. № 8. С. 48-56.

[3] Feireisl E. Time periodic solutions to a beam equations// Non. An. 1988. V. 12. P. 279-290.

[4] Chang K. C., Sanchez L. Nontrivial periodic solutions of a nonlinear beam equation// Math. Meh. in Appl. Sci. 1982. V. 4. P. 194-205.

[5] Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки// Известия РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 215-238.

[6] Yamaguchi M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications//Funkcialaj Ekvacioj. 1995. V. 38. P. 519-538.

Оптимальная структура рекуррентных нелинейных фильтров большого порядка, кратного порядку объекта наблюдения

Руденко Е.А. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
rudenkoevg@yandex.ru

Рассматриваются две задачи среднеквадратически оптимального оценивания вектора состояния нелинейного стохастического объекта по результатам дискретных во времени измерений. В дискретной задаче объект описывается разностными уравнениями, в непрерывно-дискретной – дифференциальными уравнениями.

Получение оценок фильтром Стратоновича требует нахождения зависящей от всей предыстории измерений апостериорной плотности вероятности оцениваемого случайного процесса, что делает такой фильтр системой с распределёнными параметрами. Поэтому его вектор состояния имеет бесконечный порядок и фильтр не реализуем в реальном масштабе времени. На практике это заставляет использовать приближенные конечномерные алгоритмы фильтрации вроде различных обобщений фильтра Калмана, теряя в точности, либо создавать банки таких фильтров, усложняя вычислитель. Применение же фильтра частиц, основанного на методе Монте-Карло, тоже требует применения мощного вычислителя.

Конечномерным, а потому и быстрым, является фильтр Пугачева, но он лишь параметрический, а его порядок ограничен порядком объекта наблюдения. Свободные от этих ограничений конечномерные фильтры оптимальной структуры (ФОС) разных порядков синтезированы в [1–5]. Однако точность ФОС малого порядка [1,3] ограничена, ФОС произвольного порядка [2] довольно сложен, а его упрощение – ФОС с конечной памятью [4,5], порядок которого кратен размерности вектора измерений – забывает старые измерения, которые могли быть точнее новых.

В настоящем докладе демонстрируется построение достаточно простого рекуррентного ФОС большого порядка, кратного теперь размерности оцениваемого вектора. Его память уже бесконечна, а противоречие между точностью и сложностью снова регулируется выбором величины кратности. Вектор оценки по-прежнему ищется как наилучшая функция от последнего измерения и от вектора состояния ФОС. Но последний теперь предлагается формировать из нескольких векторов предыдущих оценок, увеличивая этим оперативную память нового ФОС. Тем самым снимается проблема сложного получения функции перехода ФОС произвольного порядка [2]. По сравнению с «однократным» ФОС малого порядка [1,3] это позволяет получать лучшую точность за счёт расширения допустимого множества оценок. При этом не забываются все старые измерения, как в ФОС с конечной памятью [4,5], ибо они аккумулируются в предыдущих оценках.

Показано, что синтез нового ФОС сводится к нахождению соответствующей условной плотности вероятности из рекуррентной цепочки уравнений типа прогноз-коррекция. Для дискретного фильтра это цепочка интегральных формул нелинейных преобразований случайных величин, а для непрерывно-дискретного – цепочка из дифференциального уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и интегральной формулы Байеса. Эти уравнения необходимо решить заранее, что можно сделать численно методом Монте-Карло, но с громоздким построением на каждом измерительном такте гистограммы искомой функции значительного числа аргументов. Поэтому обсуждается и построение численно-аналитических приближений к фильтру.

Работа финансово поддержана РФФИ (гранты 17-08-00530-а, 18-08-00128-а).

Литература

[1] Руденко Е.А. Оптимальные дискретные нелинейные фильтры порядка объекта и их гауссовские приближения // АиТ. 2010. №2. С.159–178.

[2] Руденко Е.А. Оптимальный дискретный нелинейный фильтр произвольного порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 4. С. 39–51.

[3] Руденко Е.А. Оптимальный непрерывно-дискретный нелинейный фильтр малого порядка // Труды X Межд. конф. «Идентификация систем и задачи управления». М.: ИПУ РАН, 2015. С. 1335–1349.

[4] Руденко Е.А. Оптимальный непрерывно-дискретный нелинейный фильтр с конечной памятью и дискретными прогнозами // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 38–52.

[5] Руденко Е.А. Оптимальный нелинейный рекуррентный фильтр с конечной памятью // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 1. С. 45–63.

О нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа

Рузиев М.Х. (Узбекистан, Ташкент)
Институт Математики АНРУз
mruziev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где D^+ - первый открытый квадрант плоскости, D^-- конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$, и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$.

Задача . Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, которая:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$;

2) $\lim\limits_{R \to \propto} u(x,y) = 0$, $R^2 = x^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

3) удовлетворяет краевым условиям

$u(0,y) = \varphi(y)$,$y > 0$, $u(x,0) = \tau_1(x)$, $\quad \vee x \in \bar{I}_1$,

$$x^\beta D_{0,x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] + \mu(x)(1-x)^\beta D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta_k(x)] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(D_{0,x}^{1-2\beta} u(x,0) - D_{x,1}^{1-2\beta} u(x,0)) + \delta(x),$$

$x \in \bar{I}$, и условию сопряжения $\lim\limits_{y \to +0} y^{\beta_0} u_y = \lim\limits_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} u_y$, $\quad x \in (0,1)$.

Пределы при $x = 0$, $x = 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, $\varphi(y)$, $\tau_1(x)$,$\delta(x)$, $\mu(x)$ - заданные функции,

$\theta_0(x) = \frac{x_0}{2} - i(\frac{m+2}{4}x_0)^{\frac{2}{m+2}}$ - аффикс точки пересечения характеристики OC с характеристикой , исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in (0,1)$, а $\theta_k(x) = \frac{x_0+k}{1+k} - i(\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(1+k)})^{\frac{2}{m+2}}$ - аффикс точки пересечения характеристики BC с кривой $x - \frac{2k}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$, $k = const > 1$. $\bar{I}_1 = \{(x,y) : 1 \leq x <\propto, y = 0\}$.

С помощью принципа экстремума и методом интегральных уравнений доказаны единственность и существование решения исследуемой задачи. Заметим, что краевая задача для уравнения (1) при $\beta_0 = 0$ изучена в работе[1].

Литература

[1] Коржавина М.В. Задача T для обобщенного уравнения Трикоми в случае бесконечной полуполосы // Волжский мат. сборник.1971.Вып.8. С.114–119.

Об условиях ε-оптимальности для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа

Рыбаков К.А. (Россия, Москва)
Московский авиационный институт
rkoffice@mail.ru

В работе сформулированы и доказаны достаточные условия ε-оптимальности управления нелинейными многомерными стохастическими системами диффузионно-скачкообразного типа в условиях неполной информации о векторе состояния. Они позволяют оценить точность приближенно найденного управления по отношению к оптимальному по величине функционала качества. Получены соотношения для нахождения ε-оптимального управления, сформирована методика его нахождения с помощью минимизации суммарной невязки полученных соотношений.

Модель динамической системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито со скачкообразной компонентой:

$$dX(t) = f\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dW(t) + \int_{\Theta} c\big(t, X(t-), \theta\big)\nu(dt \times d\theta),$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный вектор состояния системы; $t \in T = [t_0, t_1]$ — время, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $f(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $c(t,x,\theta)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}^n$ — заданные n-мерные вектор-функции, $\Theta = \mathbb{R}^k$; $\sigma(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times s}$ — заданная $(n \times s)$-мерная матричная функция; $W(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс; ν — пуассоновская мера на $T \times \Theta$ с характеристической мерой Π, заданной неотрицательной функцией $\pi(t,x,\theta)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}_+$. Предполагается существование плотности вероятности $\varphi(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ вектора состояния X, начальный вектор состояния $X_0 = X(t_0)$ задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

Через $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ обозначен q-мерный вектор управления. При управлении используется информация о времени и о величине m первых координат вектора состояния: $0 \leqslant m \leqslant n$, т.е. $X = [X_{(1)}\ X_{(2)}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}(t) = u(t, X_{(1)}(t))$, где $X_{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$. В предельных случаях $m = 0$ и $m = n$ управление будет программным и позиционным соответственно.

Функционал качества на множестве допустимых управлений задается следующим образом:

$$J\big(u(t,x_{(1)}), \varphi(t,x); \varphi_0(x)\big) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\big(t, x, u(t, x_{(1)})\big)\varphi(t,x)dtdx + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x)\varphi(t_1, x)dx,$$

где $\omega(t,x,u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ и $\gamma(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — заданные функции, на них можно накладывать дополнительные условия, обеспечивающие конечность величины функционала качества.

Задача оптимального в среднем управления состоит в нахождении таких управления $u^*(t, x_{(1)})$ и плотности вероятности $\varphi^*(t,x)$ соответствующего оптимального процесса $X^*(t)$, что $J(u^*(t,x_{(1)}), \varphi^*(t,x); \varphi_0(x)) = \min\limits_{u(\cdot),\, \varphi(\cdot)} J(u(t,x_{(1)}), \varphi(t,x); \varphi_0(x))$.

Достаточные условия ε-оптимальности управления доказаны на основе принципа расширения В. Ф. Кротова [1]. Ранее аналогичный результат был получен для нелинейных многомерных стохастических систем диффузионного типа [3], т.е. при отсутствии в уравнении модели динамической системы скачкообразной компоненты, которая задается пуассоновской мерой. Эти условия и полученные из них соотношения позволяют находить искомое приближенное управление, минимизируя отклонение от оптимального решения. Полученные результаты могут служить обоснованием процедур применения спектрального метода для синтеза оптимального управления [2, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-00419-а).

Литература

[1] Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

[2] Пантелеев А. В., Рыбаков К. А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012.

[3] Пантелеев А. В., Рыбаков К. А. Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 130–146.

[4] Рыбаков К. А. Оптимизация нелинейных стохастических систем в пространстве спектральных характеристик управлений // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20. № 2. С. 16–26.

Бифуркационная диаграмма системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате[38]

Рябов П. Е. (Россия, Москва)
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
Институт машиноведения РАН им. А.А. Благонравова
peryabov@fa.ru
Соколов С. В. (Россия, Москва)
Институт машиноведения РАН им. А.А. Благонравова
Московский физико-технический институт (Государственный университет)
sokolovsv72@mail.ru

В докладе представлены результаты бифуркационного анализа задачи о движении двух прямолинейных вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в цилиндрической ловушке, при этом предполагается, что нити параллельны образующей кругового цилиндра. Уравнения движения двух точечных вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме с функцией Гамильтона

$$H = \ln[1-(x_1^2+y_1^2)] + a^2\ln[1-(x_2^2+y_2^2)] - a\ln[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2].$$

Здесь через (x_k, y_k) обозначены декартовы координаты k-ого вихря ($k=1,2$), фазовый вектор $\boldsymbol{\zeta}$ имеет координаты $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$, параметр a обозначает отношение интенсивностей. Фазовое пространство $\mathcal{P}$ задается в виде прямого произведения двух открытых кругов радиуса 1. Система допускает один дополнительный первый интеграл движения – *момент завихренности*

$$F = x_1^2 + y_1^2 + a(x_2^2+y_2^2).$$

Функция F вместе с гамильтонианом H образуют на $\mathcal{P}$ полный инволютивный набор интегралов. Согласно теореме Арнольда–Лиувилля можно утверждать, что компактная связная компонента интегрального многообразия $\mathcal{M} = \{H = h, F = f\}$ диффеоморфна двумерному тору. Определим *интегральное отображение* $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$, полагая $(f,h) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}) = (F(\boldsymbol{\zeta}), H(\boldsymbol{\zeta}))$. Отображение $\mathcal{F}$ принято также называть *отображением момента.* Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображений момента, то есть точек, в которых $\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ называется *бифуркационной диаграммой.* Основную роль в топологическом анализе играет определение бифуркационной диаграммы Σ отображения момента $\mathcal{F}$. Для задачи о движении двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате в случае интенсивностей противоположных знаков, т.е. когда параметр a имеет отрицательный знак, в работе [1] аналитически получена и исследована бифуркационная диаграмма. В настоящем докладе представлена в явном виде бифуркационная диаграмма Σ отображения момента $\mathcal{F}$, когда параметр отношения интенсивностей a имеет положительный знак.

Теорема 1. *Бифуркационная диаграмма* Σ *отображения момента* $\mathcal{F}$ *в задаче о движении двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате состоит из двух кривых* Π_1 *и* Π_2*, параметризация которых имеет следующий явный вид*

$$\Pi_1 : \begin{cases} f(s) = \frac{(1+2s)^2 + a(s^2-1)^2}{(1+s+s^2)^2}, \\ h(s) = \ln\left[\frac{s(s+2)(s^2-1)}{(1+s+s^2)^2}\right] + a^2\ln\left[\frac{s(s+2)(1+2s)}{(1+s+s^2)^2}\right] - 2a\ln\left[\frac{s(s+2)}{1+s+s^2}\right], \\ s \in (1; +\infty), \end{cases}$$

и

$$\Pi_2 : \begin{cases} f(t) = \frac{(at-1)(at^2+1)}{t(a-t)}, \\ h(t) = \ln\left[\frac{1-t^2}{t(a-t)}\right] + a^2\ln\left[\frac{a(1-t^2)}{a-t}\right] - a\ln\left[\frac{(at-1)(t+1)^2}{t(a-t)}\right], \\ t \in \left(1; \frac{1}{a}\right), a \in (0;1); \quad t \in \left(\frac{1}{a}; 1\right), a \in (1; +\infty). \end{cases}$$

[38]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00170, 16-01-00809 и 17-01-00846.

В качестве приложения приводится анализ устойчивости критических траекторий (т.е. невырожденных особенностей ранга 1 отображения момента) путем определения типа траектории (эллиптический/гиперболический) для каждой кривой из бифуркационного множества.

Литература

[1] Sokolov S. V., Ryabov P. E. Bifurcation analysis of the dynamics of two vortices in a bose - einstein condensate. The case of intensities of opposite signs // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22. No. 8. P. 976–995.

Теорема Карлесона-Ханта в связи с асимптотическими оценками собственных значений обыкновенных дифференциальных операторов

Савчук А.М. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
artem_savchuk@mail.ru

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка, заданный на отрезке $[0,\pi]$ дифференциальным выражением

$$l(y)=\sum_{k,s=0}^{m}(\tau_{k,s}(x)y^{(m-k)}(x))^{(m-s)}$$

и регулярными по Биркгофу краевыми условиями. При этом будем предполагать, что функции $\tau_{k,s}$ комплекснозначны, $\tau_{0,0}>0$, а остальные функции $\tau_{k,s}$ являются распределениями, так что

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_{0,0}(x)}},\ \frac{\tau_{k,s}^{(-l)}(x)}{\sqrt{\tau_{0,0}(x)}}\in L_2[0,\pi],$$

где $l=\min(k,s)$. Оказывается, что такого рода операторы можно определить вполне корректно, спектр их устроен «в главном» так же, как спектр невозмущенного оператора порядка $2m$, а оценки остаточных членов в асимптотических разложениях собственных значений и собственных функций приводят к интересным задачам, связанным с оценкой выражений типа

$$\Upsilon(\lambda)=\sup_{x\in[0,\pi]}\left|\int_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right|$$

при $\lambda\to\infty$. Здесь в качестве функции f выступают явно определяемые по коэффициентам $\tau_{k,s}$ функции и основным вопросом является оценка выражения $\Upsilon(\lambda)$ в зависимости от функционального класса, которому принадлежит функция f.

Сходимость спектральных разложений для оператора Штурма–Лиувилля[39]

Садовничая И.В. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
ivsad@yandex.ru

Изучается оператор Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с регулярными по Биркгофу краевыми условиями. Потенциал предполагается комплекснозначным распределением первого порядка — производной функции из пространства Лебега.

[39] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00706).

Рассматриваются вопросы равносходимости спектральных разложений, соответствующих возмущенному и невозмущенному операторам.

Теорема 1. *Рассмотрим оператор* $\mathcal{L}_q$*, действующий в пространстве* $L_2[0,\pi]$*, с регулярными по Биркгофу краевыми условиями, потенциал которого* $q = u'$*, где комплекснозначная функция* $u \in L_2[0,\pi]$*. Пусть* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– система собственных и присоединенных функций оператора* $\mathcal{L}_q$*,* $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– биортогональная к ней система;* $\{y_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ *– система собственных и присоединенных функций оператора* $\mathcal{L}_0$*,* $\{w_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ *– биортогональная к ней система. Для произвольной функции* $f \in L_2[0,\pi]$ *обозначим*

$$c_n = (f, w_n), \qquad c_n^0 = (f, w_n^0).$$

Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ *равносходимость разложения функции* f *в ряд по системам* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{y_n^0\}_{n=1}^{\infty}$*:*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n - \sum_{n=1}^{m} c_n^0 y_n^0 \right\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

.

Далее результат предполагается обобщить на случай, когда первообразная u потенциала лежит в пространстве Лебега L_p, $p \geqslant 2$.

Случайные блуждания и полугруппы в гильбертовом пространстве, снабженном аналогом меры Лебега

Сакбаев В.Ж. (Россия, Москва)
МФТИ
fumi2003@mail.ru

Исследуются инвариантные относительно сдвигов и ортогональных преобразований меры на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, которые в силу теоремы А. Вейля не могут обладать всеми свойствами меры Лебега. Исследуются свойства пространства функций, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно движений мере. Установлено свойство отсутствия сильной непрерывности у группы сдвигов вдоль постоянного векторного поля и исследованы свойства усредненных по гауссовским мерам операторов сдвига на случайный вектор и соответствующие операторы диффузии. Найдены инвариантные подпространства, подпространства сильной непрерывности и генераторы сильно непрерывных полугрупп. С помощью генераторов определены аналоги пространств Соболева и аналоги пространств гладких функций, исследованы аппроксимации интегро-дифференциальных операторов.

Влияние фото-гравитационных и электромагнитных сил на формирование облаков Кордылевского

Сальникова Т.В. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Российский университет дружбы народов
tatiana.salnikova@gmail.com
Степанов С.Я. (Россия, Москва)
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»
Российской академии наук,
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
stepsj@ya.ru

В предыдущих работах авторами было предложено объяснение феномена появления-исчезновения облаков Кордылевского - скопления пылевой космической массы в окрестности треугольных точек либрации системы Земля-Луна. При учете гравитационного и светового возмущения Солнца треугольные точки либрации перестают быть положениями относительного равновесия. Тем не менее, существуют устойчивые периодические движения частиц, охватывающие каждую из треугольных точек либрации. Это позволяет построить вероятностную модель образования пылевых облаков, сопровождающих перемещающиеся вдоль периодических орбит точки. В продолжение указанного исследования в данной работе предлагается математическая модель для исследования и электромагнитных эффектов, возникающие при движении заряженной пылевой массы в окрестности треугольных точек либрации системы Земля-Луна. В этой модели мы пренебрегаем фото-гравитационным влиянием Солнца на пылевые частицы чрезвычайно малой массы, для которых силы светового давления и гравитационного притяжения компенсируют друг друга. При этом вводятся в рассмотрение силы Кулона взаимодействия друг с другом заряженных частиц пыли, находящихся в малой окрестности каждой точки либрации Лагранжа. Функция плотности распределения вероятности эволюционирует в соответствии с системой уравнений Власова-Пуассона. В результате показана возможность образования стабильного образования облака пылевой плазмы в малой окрестности каждой из треугольных точек либрации.

Функции Грина некоторых обыкновенных дифференциальных операторов и многочлены Бернулли и Эйлера[40]

Сафонова Т.А. (Россия, Архангельск)
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
t.Safonova@narfu.ru

Пусть S - самосопряжённый оператор, порождённый выражением $l_2[y] = -y''$ и граничными условиями Дирихле ($y(0) = y(\pi) = 0$) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$, и пусть $p_m(x)$-многочлен с вещественными коэффициентами степени $m \geq 1$. Рассмотрим оператор $p_m(S)$. Область определения $\mathcal{D}$ этого оператора -

$$\mathcal{D} = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0,2\pi];\ U_j(y) = 0,\ j = 1,\ldots,2m\},$$

где линейные формы $U_j(y)$ определяются равенствами

$$U_{j+1}(y) := y^{(j)}(0),\ U_{j+m+1}(y) := y^{(j)}(\pi),\quad j = 0,\ldots,m-1,$$

и если $y \in \mathcal{D}$, то

$$p_m(S)y = p_m(-\frac{d^2}{dx^2})y =: l_{2m}[y].$$

Если многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1,2,\ldots$, то для функции Грина задачи

$$\begin{cases} l_{2m}[y] = f \\ U_j(y) = 0,\ j = 1,\ldots,2m. \end{cases}$$

справедливо представление

$$G(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx \sin kt}{p_m(k^2)}.$$

В частности, при $t = x$ и $p_m(x) = x^m$ справедливо соотношение

$$G(x,x) = (-1)^m\frac{(2\pi)^{2m-1}}{(2m)!}(B_{2m}(x/\pi) - B_{2m}),$$

[40]Автор поддержан РФФИ (грант № 18-01-00250) и Правительством Архангельской области (конкурс "Молодые учёные Поморья", научный проект № 06-2018-03а "Спектральный анализ дифференциальных операторов и его приложения к вычислению сумм некоторых сходящихся рядов").

где B_{2m} и $B_{2m}(x)$ - числа и многочлены Бернулли соответственно.

Пусть далее L - самосопряжённый оператор, порождённый выражением $l_2[y]$ и граничными условиями $y(0) = y'(\pi) = 0$ в $\mathcal{L}^2[0,\pi]$, тогда

$$G(x,x) = (-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m-1}}{2(2m-1)!}(E_{2m-1}(x/\pi) - E_{2m-1}(0)),$$

где $E_{2m-1}(x)$ - многочлены Эйлера, причём $E_{2m-1}(0) = -\frac{2^{2m}-1}{m}B_{2m}$.

Доклад основан на работе [1].

Литература

[1] Мирзоев К. А., Сафонова Т. А. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Доклады АН. 2018 (в печати).

Косые произведения над квазипериодическими потоками на торе

Сахаров А.Н. (Россия, Нижний Новгород)
Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия
ansakharov2008@yandex.ru

Доклад посвящен вопросам топологической классификации потоков на трехмерном торе, порождаемых системами вида

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\theta} = a(\boldsymbol{\varphi}, \theta),$$

где $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ – двумерный вектор угловых координат на торе $\mathbb{T}^2$, θ – угловая координата на окружности S^1, вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ имеет рационально независимые компоненты, функция $a(\boldsymbol{\varphi}, \theta)$ непрерывная и периодическая с периодом 2π по всем переменным. Ясно, что (1) задает поток на расслоении $\mathbb{T}^2 \times S^1$, с линейным потоком на базе $\mathbb{T}^2$. Поднятие этого потока на универсальное накрытие тора $\mathbb{T}^3$ представимо в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\omega} t, \qquad \theta(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0) = \theta_0 + r(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0),$$

где $r(t, \boldsymbol{\varphi}, \theta)$ – периодическая функция по переменным $\boldsymbol{\varphi}$ и θ.

Топологическая классификация строится относительно отношения послойной топологической эквивалентности и основывается на следующих свойствах таких потоков:

1. поток имеет *вектор вращения* $\boldsymbol{\rho} = (\omega_1, \omega_2, \varrho)$, где число $\varphi = \lim_{t\to\infty} \dfrac{r(t, \boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0)}{t}$ не зависит от начальных данных $(\boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0)$ [1].

2. имеет место альтернатива: либо существует постоянная $c > 0$ такая, что $D(t) = |\widetilde{f}^t(\boldsymbol{\varphi}_0, \theta_0) - \theta_0 - t\varrho| \leqslant c$ (*регулярный* поток), либо существует последовательность $\{t_n\}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} D(t_n) = \infty$ (*нерегулярный* поток).

Регулярность потока – это частный случай условий справедливости теоремы Готшалка-Хедлунда о существовании непрерывных решений аддитивных когомологических уравнений [2].

Литература

[1] Веременюк В.В. Формула для числа вращения уравнения первого порядка с квазипериодической по времени правой части // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 1. С. 158–159.

[2] Gottschalk W., Hedlund G. Topological dynamics // Providence. Amer. Math. Soc. 1955. P. 151.

Субфинслерова задача на группе Картана

Сачков Ю.Л. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем РАН
yusachkov@gmail.com

Ардентов А.А. (Россия, Переславль-Залесский)
Институт программных систем РАН
aaa@pereslavl.ru

Левоинвариантная субфинслерова задача с l_∞-метрикой на группе Картана рассматривается как задача быстродействия.

К задаче применяется принцип максимума Понтрягина. Описаны анормальные, релейные и особые экстремальные траектории.

Исследована оптимальность анормальных и особых траекторий. Получены оценки количества переключений на оптимальных релейных траекториях.

Об использовании проекционного метода наименьших квадратов для решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами[41]

Серегина Е. В. (Россия, Калуга)
Калужский филиал Московского государственного технического ун-та им. Н. Э. Баумана
evfs@yandex.ru
Степович М. А. (Россия, Калуга)
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
m.stepovich@rambler.ru
Аунг Мье (Россия, Калуга)
Калужский филиал Московского государственного технического ун-та им. Н. Э. Баумана

В работе изложены результаты исследований возможностей использования проекционного метода наименьших квадратов для моделирования нестационарного процесса теплопроводности в полупроводниковых материалах с разрывными коэффициентами, облучённых широким электронным пучком. Искомое решение находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по многочленам Чебышёва. В работах [1], [2] было проведено обоснование и рассмотрен вопрос вычислительной устойчивости предложенной модифицированной проекционной схемы метода наименьших квадратов для моделирования одномерного и пространственного распределений неосновных носителей заряда после их диффузии в полупроводниковых материалах, а в работе [3] — проекционного метода Галёркина для решения стационарного уравнения диффузии по модифицированным функциям Лагерра. Настоящая работа продолжает такие исследования: даётся оценка погрешности и условие вычислительной устойчивости проекционной схемы метода наименьших квадратов для расчета температурного поля с разрывным коэффициентом температуропроводности в полупроводниковых материалах.

Вычисления выполнялись в системе MATLAB (The MathWorks, Inc.) версии 7.5.0.342 на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel Pentium E5400 (2x2.70 GHz, 2MB Cache), объем оперативной памяти – 2 GB. Затраты машинного времени на расчет температурного поля с использованием проекционного метода наименьших квадратов составили приблизительно 6 с, что говорит о вычислительной эффективности предложенного метода.

[41]Исследования частично поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–03–00515), и грантом РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

Литература

[1] Серегина Е. В, Степович М. А, Макаренков А. М. О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 11. С. 65–69.

[2] Серегина Е. В, Степович М. А, Макаренков А. М. Анализ трехмерной модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом в однородном полупроводниковом материале, с использованием проекционных методов // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2018. № 1. С. 93–100.

[3] Макаренков А. М, Серегина Е. В, Степович М. А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 5. С. 801–813.

Оценки погрешности усреднения недивергентных эллиптических операторов второго порядка[42]

Сиражудинов М. М. (Россия, Махачкала)
Дагестанский научный центр РАН
sirazhmagomed@yandex.ru

Оценкам погрешности усреднения дивергентных операторов посвящено много работ (см. [1] и имеющую там литературу). Аналогичные вопросы для недивергентных эллиптических операторов второго порядка, удовлетворяющих условию типа условия Кордеса, рассмотрены в работе [2] и для обобщенных операторов Бельтрами изучены в работе [3].

Рассмотрим задачу Дирихле

$$A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\,\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(Q), \qquad u_\varepsilon \in W_{2,0}^2(Q), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $a_{ij}^{\varepsilon}(x) = a_{ij}(\varepsilon^{-1}x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $W_2^{2,0}(Q) = W_2^2(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, Q — ограниченная выпуклая область $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ — измеримые ограниченные периодические функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности и условию Кордеса во всем пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\nu\,|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}\,|\xi|^2, \qquad x,\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$(n-1+\mu)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x) \le \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\Big)^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где $\nu, \mu < 1$ — положительные постоянные.

Решение задачи (1) сходится в $W_2^1(Q)$ к решению усредненной задачи

$$A_0 u_0 \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(Q), \quad u_0 \in W_{2,0}^2(Q), \tag{4}$$

причем коэффициенты усредненного оператора (4) постоянные, определяемые равенством $a_{ij}^0 = \langle p a_{ij}\rangle$, $i, j = 1, \ldots, n$, где $p \in L_2(\square)$, $(p > 0,\ \langle p\rangle = 1)$ — базисный вектор ядра оператора, сопряженного к оператору периодической задачи:

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \in L_2(\square), \qquad u \in W_2^2(\square),$$

[42] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-01-00508-а)

$\square$ — ячейка периодов. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть правая часть f задачи Дирихле* (1) *принадлежит пространству $W_2^2(Q)$, Q — выпуклая область с гладкой* (*класса C^4*) *границей, тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^2(Q)} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{W_2^2(Q)}, \qquad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q)} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{W_2^2(Q)}, \tag{5}$$

где $c > 0$ — постоянная, независящая от ε и f.

Здесь $u_1^\varepsilon(x)$ — первое приближение к решению u_ε задачи (1), оно определяется формулой

$$u_1^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n} N_{ij}(y)\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad y = \varepsilon^{-1}x,$$

где $N_{ij}(x)$, $(i,j = 1,\dots,n)$, — решение периодической задачи

$$AN_{km} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 N_{km}(x)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{km}^0 - a_{km}(x),$$
$$N_{km} \in W_2^2(\square), \quad \langle N_{km}\rangle = 0, \quad k,m = 1,\dots,n.$$

Следует отметить, что для малых размерностей ($n = 2,3,4$) постоянная c в (5) зависит только от постоянной эллиптичности ν и постоянной μ из условия Кордеса (2). Если размерность больше четырех, то c зависит еще от модулей непрерывности коэффициентов.

Литература

[1] Жиков В. В, Пастухова С. Е. Об операторных оценках в теории усреднения// Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 3. С. 27–122.

[2] Юринский В. В. Об усреднении диффузии в случайной среде// Тр. Ин-та матем. СО АН СССР. 1985. Т. 5. С. 75—85.

[3] Сиражудинов М. М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 4. С. 87—110.

Эллиптическая система Моисила – Теодореску в многосвязных областях

Солдатов А.П. (Россия, Москва)
Вычислительный центр ФИЦ ИУ РАН
soldatov48@gmail.com

В ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ с гладкой границей Γ рассматривается эллиптическая систему Моисила – Теодореску

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \quad M(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\zeta_3 & \zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & -\zeta_1 \\ \zeta_3 & -\zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

для четырехмерного вектора $u(x) = (u_1,u_2,u_3,u_4)$. Для этой системы ставится аналог краевой задачи Римана - -Гильберта

$$Bu^+ = f \tag{2}$$

с (2×4)– матрицей

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

имеющей ранг 2 в каждой точке поверхности. Полагая $p = (p_1,p_2,p_3)$, $q = (q_1,q_2,q_3)$, с этой матрицей свяжем ненулевой вектор

$$l = p_0 q - q_0 p - [p,q].$$

В случае, когда поверхность Г гомеоморфна сфере, эта задача была изучена В.И. Шевченко [1,2] (см. также [3]). Им было установлено, что при некоторых предположениях относительно матрицы- функции B задача (1), (2) фредгольмова и ее индекс $æ = -1$. Условие фредгольмовости состоит в том, что вектор l не выходит в касательную плоскость всюду на Г.

В докладе обсуждается аналогичный результат для произвольной, вообще говоря, многосвязной области. Он заключается в том, что при выполнении того же условия на B задача фредгольмова и ее индекс дается формулой $æ = m - n - 1$. Здесь n – число связных компонент Г, а m – порядок связности области D. Последний определяется как увеличенное на единицу число попарно непересекающихся двумерных разрезов области, приводящих ее к односвязной области.

Полученный результат основан на интегральном представлении [4,5] общего решения системы (1), позволяющем редуцировать задачу к системе сингулярных уравнений на Г.

Литература

[1] Шевченко В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора, // Сб. "Матем. физика". Киев. - 1970. Вып.8. - С. 172-187.

[2] Шевченко В. И. О задаче Гильберта для голоморфного вектора в многомерном пространстве, Дифференциальные и интегральные уравнения. // Краевые задачи. Тбилиси, 1979. С.279-291.

[3] Полунин В.А., Солдатов А.П. Задача Римана- Гильберта для системы Моисила- Теодореску в конечной области, // сб. научных работ "Неклассические уравнения математической физики посвященных В.Н.Врагову, Новосибирск: Изд-во Института математики, 2010, С. 192-201.

[4] Polunin V.A., Soldatov A.P. Riemann - Hilbert problem for the Moisil - Teodorescu system in multiply connected domains,
2016, EJDE, 310, P. 1-5.

[5] Полунин В.А., Солдатов А.П. Об интегральном представлении решений системы Моисила—Теодореску в многосвязных областях, // Докл. РАН, 2017, т. 475, 4, С.369-372.

Система обратных связанных маятников[43]

Соловьёв А.М., Семёнов М.Е. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
darkzite@yandex.ru, mkl150@mail.ru

Мелешенко П.А. (Россия, Воронеж)
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
melechp@yandex.ru

Карпов Е.А. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
believedream95@gmail.com

В работе рассматривается дискретная система, состоящая из n перевернутых маятников с упругими связями [1,2], а также ее континуальный аналог. Основное внимание в работе уделяется стабилизации этой системы в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия, формулируются условия, обеспечивающие стабилизацию, а также изучаются динамические свойства. Близкие результаты содержатся в работах [3,4].

Система уравнений, описывающая динамику исследуемой дискретной механической системы, имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega^2\varphi_1 + a\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - c, \\ \ddot{\varphi}_i = \omega^2\varphi_i + a\left(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}\right) - c, \\ \ddot{\varphi}_n = \omega^2\varphi_n - a\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right) - c, \\ a_i = \frac{k}{m}, \quad c = \frac{u}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \end{cases} \tag{1}$$

[43] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-08-312 и № 17-01-00251)

где φ_1 – отклонение i-го маятника массой m и длиной l от вертикального положения, k – жесткость упругой связи между соседними маятниками, а u – ускорение, приложенное к основанию механической системы, трактуемое ниже как управление.

Определим управление по обратной связи следующим соотношением:

$$u = A \cdot \mathrm{sign}\left(Bs + \dot{s}\right), \qquad s = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \tag{2}$$

где A и B – коэффициенты нужных размерностей, задающие характер управления.

Найдены области значений коэффициентов управления (2), обеспечивающих стабилизацию маятников системы (1) в окрестности вертикального положения:

$$\begin{cases} A \geqslant \frac{\omega l}{n} \left|\omega s_0 + \dot{s}_0\right|, \\ B = \omega. \end{cases} \tag{3}$$

Континуальный аналог системы (1) имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}\left(x,t\right) = \omega^2 \varphi\left(x,t\right) + V^2 \varphi''\left(x,t\right) - \alpha u\left(\dot{\varphi},\varphi,t\right), \\ \varphi'\left(0,t\right) = 0, \quad \varphi'\left(L,t\right) = 0, \\ \varphi\left(x,0\right) = f\left(x\right), \quad \dot{\varphi}\left(x,0\right) = g\left(x\right), \\ \alpha = \sqrt{\frac{\rho L}{M}}, \quad \omega^2 = g\alpha, \quad V^2 = \frac{E}{\rho}, \end{cases} \tag{4}$$

где M – масса материала, ρ – его плотность, L – длина, ω – собственная частота, V – скорость распространения упругой волны, а $f(x)$ и $g(x)$ – начальные условия.

Установлено, что условия, обеспечивающие стабилизацию системы (4), имеют вид

$$T_\nu \leqslant T_\omega,$$

где T_ν – время прохождения упругой волны от одного конца материала до его другого конца и обратно, а T_ω – период собственных колебаний системы.

Литература

[1] Семенов М. Е., Соловьев А. М., Попов М. А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. №93.

[2] Semenov M. E., Solovyov A. M., Popov M. A., Meleshenko P. A. Coupled inverted pendulums: stabilization problem // Archive of Applied Mechanics. 2017.

[3] Fenn J. G., Bayne D. A., Sinclair B. D. Experimental investigation of the «effective potential» of an inverted pendulum // Am. J. Phys. 1998. 66. pp. 981–984.

[4] Butikov E. I. On the dynamic stabilization of an inverted pendulum // Am. J. Phys. 2001. 69. pp. 755–768.

Многоточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с относительно позитивными операторами

Соловьёва Н.Н. (Россия, Челябинск)
ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)»
nsolowjowa@mail.ru

Загребина С.А. (Россия, Челябинск)
ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)»
zagrebinasa@susu.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{1}$$

Вектор-функцию $u \in C([0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовем *решением уравнения* (1), если она удовлетворяет этому уравнению при некотором $f = f(t)$. Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи* [1]

$$\lim_{t\to 0+} P_0(u(t) - u_0) = 0, \quad P_j(u(t) - u_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

если оно вдобавок удовлетворяет многоточечному начально-конечному условию (2).

Если оператор $(L,0)$-ограничен [2], то существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}).$$

Здесь $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – *правая*, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – *левая L-резольвенты оператора M*; контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Контурные интегралы здесь и ниже понимаются в смысле Римана. Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$ и обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k(\mathfrak{U}^k \cap \mathrm{domM})$, $k = 0,1$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда*
(i) оператор $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$, причем существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(ii) оператор $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) – банахова структура, порожденная конусом $\mathfrak{U}_+$ ($\mathfrak{F}_+$) [3]. Решение $u = u(t)$ задачи (1), (2) назовем *позитивным*, если $u(t) \in \mathfrak{U}_+$ при любом $t \in [0,\tau)$. Подпространства $\mathfrak{U}^k$ и $\mathfrak{F}^k$, $k = 0,1$, тоже будут банаховыми структурами, порожденными конусами $\mathfrak{U}^k_+ = \mathfrak{U}^k \cap \mathfrak{U}_+$ и $\mathfrak{F}^k_+ = \mathfrak{F}^k \cap \mathfrak{F}_+$, $k = 0,1$, соответственно [3]. Назовем (L,p)-ограниченный оператор M *сильно позитивно (L,p)-ограниченным*, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если

(iP) оператор $L_0 : \mathfrak{U}^0_+ \to \mathfrak{F}^0_+$, а оператор $L_1 : \mathfrak{U}^1_+ \to \mathfrak{F}^1_+$ – топлинейный изоморфизм

(iiP) оператор $M_1 : \mathfrak{U}^1_+ \cap \mathrm{dom}M \to \mathfrak{F}^1_+$, а оператор $M_0 : \mathfrak{U}^0_+ \cap \mathrm{dom}M \to \mathfrak{F}^0_+$, причем $M_0^{-1}[\mathfrak{F}^0_+] \subset \mathfrak{U}^0_+$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{U}$ – банахова структура, и оператор M сильно позитивно (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любой вектор-функции $f : [0,\tau) \to \mathfrak{F}$ такой, что $f^0 \in C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, $-f^{0(k)}(t) \in \mathfrak{F}^0_+$, $k = \overline{0,p+1}$, $t \in (0,\tau)$, $f^1 \in C([0,\tau);\mathfrak{F}^1_+)$, и любого вектора $u_0 \in \mathfrak{U}$, такого, что $u^1_0 \in \mathfrak{U}^1_+$ существует единственное позитивное решение $u = u(t)$.*

Литература

[1] Solovyova N.N., Zagrebina S.A. Multipoint initial-final value problem for hoff equation in quasi-sobolev spaces // Journal of computational and engineering mathematics. 2017. Vol. 4. № 2. pp. 73–79.

[2] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.

[3] Solovyova N.N., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Type Mathematical Models with Relatively Positive Operators in the Sequence Spaces // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2017. Т. 9. № 4. С. 27–35.

Алгоритмы численного решения задач оптимального импульсного управления на основе позиционного принципа минимума

Сорокин С.П., Старицын М.В. (Россия, Иркутск)
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
sorsp@mail.ru, starmaxmath@gmail.com

Доклад посвящен проблеме конструктивного численного решения задач оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации. С помощью известных преобразований такие задачи сводятся к классическим вариационным задачам с терминальным ограничениями, которые, в свою очередь, подвергаются дальнейшей дискретизации при численном анализе. Исследуемый нами класс импульсных моделей [1] может быть преобразован к задаче дискретного оптимального управления (P), для которой разрабатывается вариант позиционного принципа минимума [1–3]:

$$\begin{gathered} I(\sigma) = l(x(N)) := \langle c, x(N)\rangle \to \min; \\ x(t+1) = x(t) + h\Big[(1-|u(t)|)\, f(x(t)) + g(x(t))\, u(t)\Big], \\ y(t+1) = y(t) + h\Big[1-|u(t)|\Big], \quad t = 0,1,\dots,N-1, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad y(N) = y_N, \\ |u(t)| \le 1. \end{gathered}$$

Здесь N — число шагов, h — шаг дискретизации, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$, $y_N > 0$, и функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ предполагаются дифференцируемыми. Управлением и (соответствующей) траекторией назовем конечные последовательности

$$u = \big\{u(t) |\ t = \overline{0, N-1}\big\} \quad \text{и} \quad z = \big\{z(t) = (x(t), y(t)) |\ t = \overline{0,N}\big\}.$$

Набор $\sigma = (z,u) = (x,y,u)$ будем называть процессом системы.

Введем функцию Понтрягина

$$H(x,y,\psi,\xi,u) = h\,(1-|u|)H_0(x,\psi,\xi) + h\,uH_1(x,\psi) + \langle\psi, x\rangle + \xi y,$$

$$H_0(x,\psi,\xi) = \langle\psi, f(x)\rangle + \xi, \quad H_1(x,\psi) = \langle\psi, g(x)\rangle,$$

и сопряженную систему

$$\psi(t) = \nabla_x H\big(x(t), y(t), \psi(t+1), \xi, u(t)\big), \quad \psi(N) = -c.$$

Пусть $\psi = \big\{\psi(t), t = \overline{0,N}\big\}$ — решение сопряженной системы (котраектория). Определим экстремальное многозначное отображение:

$$\mathbf{U}_\xi(x,\psi) := \operatorname{Arg}\max_{u\in[-1,1]} H(x,y,\psi,\xi,u) = \operatorname{Arg}\max_{u\in[-1,1]} \big\{(1-|u|)\, H_0(x,\psi,\xi) + uH_1(x,\psi)\big\}.$$

Зафиксируем допустимый в задаче (P) процесс $\bar\sigma$, и пусть $\bar\psi = \psi(\bar\sigma)$ — соответствующая котраектория, а $\xi \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{V}_\xi(\bar\psi)$ множество селекторов отображения $\mathbf{U}_\xi(x,\psi)$, суженного на котраекторию $\bar\psi$, — позиционных управлений $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,z) \in \mathbf{U}_\xi\big(x, \bar\psi(t+1)\big)$. Через $z^{\mathbf{v}} = (x^{\mathbf{v}}, y^{\mathbf{v}})$ будем обозначать траекторию управляемой системы, замкнутой позиционным управлением $\mathbf{v}$.

Теорема. *Пусть процесс $\bar\sigma = (\bar z, \bar u)$ глобально оптимален в задаче (P). Тогда*

$$l\big(\bar x(N)\big) \le \min\Big\{ l\big(x^{\mathbf{v}}(N)\big) \Big|\, z^{\mathbf{v}} = (x^{\mathbf{v}}, y^{\mathbf{v}}),\ y^{\mathbf{v}} = y_N,\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\xi(\bar\psi),\ \xi \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Полученное необходимое условие оптимальности не требует выпуклости входных данных задачи и приводит к итеративной процедуре решения задач оптимального импульсного управления, которая будет представлена в докладе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 17-01-00733, 16-31-60030.

Литература

[1] Sorokin S. P., Staritsyn M. V. Necessary optimality condition with feedback controls for nonsmooth optimal impulsive control problems // Proc. VIII Int. Conf. Optimization and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro. 2017. Pp. 531–538.

[2] Dykhta V. A. Positional strengthenings of the Maximum Principle and sufficient optimality conditions // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. V. 293. No. 1. Pp. S43—S57.

[3] Sorokin S., Staritsyn M. Feedback necessary optimality conditions for a class of terminally constrained state-linear variational problems inspired by impulsive control // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2017. V. 7. No. 2. Pp. 201–210.

Об одной вырожденной задаче управления уравнением неразрывности

Старицын М.В. (Россия, Иркутск)
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
starmaxmath@gmail.com

В докладе обсуждается вопрос конструктивного описания замыкания множества решений уравнения неразрывности, управляемого "неограниченным" векторным полем, а именно, системы вида

$$\mu_0 = \vartheta; \quad \partial_t \mu_t + \nabla \cdot (\mu_t f_t) = 0, \quad t \in \mathcal{T} \doteq [0, T], \tag{1}$$

где ϑ — заданная вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$,

$$t \mapsto f_t(x) \doteq f\big(x, u(t)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad f(x, u) = g(x) + H(x)\, u;$$

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ — заданные векторная и матричная функции, а управления $u(\cdot) : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^m$ — измеримые по Борелю вектор-функции, удовлетворяющие ограничению:

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}(M) \doteq \big\{ u \in L_\infty(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m) \,\big|\, \|u\|_{L_1(\mathcal{T},\mathbb{R}^m)} = M \,\big\}. \tag{2}$$

Здесь $M > 0$ — заданный "ресурс" управления.

Ввиду аффинной зависимости поля скоростей от управления и неограниченности последнего в пототечном смысле решения характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающих (1), могут оказаться сколь угодно близкими к разрывным, и, как следствие, решения $t \mapsto \mu_t$ самого уравнения неразрывности стремятся к разрывным мерозначным функциям. Этот факт относит рассматриваемую модель к классу вырожденных.

Основным результатом доклада является конструктивное представление замыкания множетсва решений системы (1), (2) в слабой* топологии пространства мерозначных функций ограниченной вариации, основанное на преобразовании времени и известном представлении решений уравнения (1) в терминах сдвига по траекториям характеристической системы. Данное исследование продолжает некоторые результаты [1] и опирается, в частности, на [2, 3].

Литература

[1] Pogodaev, N. Optimal control of continuity equations // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2016.

[2] Ambrosio, L. Metric space valued functions of bounded variation // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Serie 4. 1990. V. 17. N. 3. Pp. 439–478.

[3] Ambrosio, L., Fusco, N., and Pallara, D. Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

Стабилизация решений задачи Коши для параболического $p(x)$-лапласиана[44]

Сурначёв М. Д. (Россия, Москва)
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
peitsche@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши для параболического $p(x)$-лапласиана

$$u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

[44] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (задание № 1.3270.2017/4.6).

Предположим, что показатель $p(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty \text{ для почти всех } x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

и найдётся такая константа $p_\infty \in [\alpha, \beta]$, что

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{L}{\ln|x|}, \quad \text{для почти всех} \quad |x| > e. \tag{4}$$

Введём понятие решения следуя [1], [2], где рассматривались вопросы существования и единственности решений первой начально-краевой задачи для параболического $p(x,t)$-лапласиана. Положим $Q_{R,T} = B_R \times (0,T)$, где B_R открытый шар радиуса R с центром в начале координат и $T > 0$. Пусть

$$V(Q_{R,T}) = \left\{ u \in L^2(Q_{R,T}) : \; u(\cdot,t) \in W^{1,1}(B_R) \text{ для п.в.}, \; t \in (0,R), \; |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(Q_{R,T}) \right\}.$$

Множество $V(Q_{R,T})$ можно снабдить нормой

$$\| u \|_{V(Q_{R,T})} = \| u \|_{L^2(Q_{R,T})} + \| \nabla u \|_{L^{p(\cdot)}(Q_{R,T})},$$

где второе слагаемое есть норма ∇u в пространстве Орлича $L^{p(\cdot)}(Q_{R,T})$. После введения такой нормы множество $V(Q_{R,T})$ будет рефлексивным сепарабельным банаховым пространством. Будем говорить, что функция u, определённая в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, принадлежит классу W, если $u \in V(Q_{R,T})$ для всех $R > 0$ и $T > 0$.

Будем говорить, что u, определённая в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, принадлежит классу H, если для любых $R > 0$ и $T > 0$ найдется последовательность $\{u_j\} \subset C^\infty(\overline{Q}_{R,T})$, такая, что $u_j \to u$ при $j \to \infty$ в норме $V(Q_{R,T})$ для всех $R, T > 0$. Очевидно, H является подпространством W, но может и не совпадать с ним.

Положим ещё

$$S^{(1)}_{R,T} = \{\varphi \in V(Q_{R,T}), \; \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(Q_{R,T}), \; \varphi|_{\partial B_R \times (0,T)} = 0, \; \varphi|_{t=T} = 0\},$$

$$S^{(2)}_{R,T} = \{\varphi \in C^\infty(\overline{Q}_{R,T}), \; \varphi|_{\partial B_R \times (0,T)} = 0, \; \varphi|_{t=T} = 0\}.$$

Будем говорить, что функция u является W-решением (H-решением) задачи (1)-(2), если $u \in W$ $(u \in H)$ и для поизвольных $R > 0$ и $T > 0$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_{R,T}} \left(-u\varphi_t + |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \right) dxdt = \int_{B_R} f(x)\varphi(x,0)\, dx$$

для всех $\varphi \in S^{(1)}_{R,T}$ (соответственно $\varphi \in S^{(2)}_{R,T}$).

Следующая теорема является обобщением результатов работ [3] и [4].

Теорема. *Пусть u — ограниченное H-решение (W-решение) задачи Коши (1)-(2), выполнены условия (3)-(4) и $\alpha > 2n/(n+1)$. Тогда $u(x,t)$ сходится к нулю равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{|y|<1} f(z + Ry)\, dy \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty \quad \textit{равномерно по} \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Литература

[1] Алхутов Ю. А., Жиков В. В. Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. МИАН. 2010. Т. 270, С. 21–32.

[2] Алхутов Ю. А., Жиков В. В. Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 3, С. 3–14.

[3] Жиков В. В. О стабилизации решений параболических уравнений // Матем. сб. 1977. Т. 104(146). № 4(12). С. 597–616.

[4] Surnachev M. D., Zhikov V. V. Stabilization of solutions to nonlinear parabolic equations of the p-Laplace type // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, No. 4, P. 523–541.

Обобщенные якобиевы матрицы и спектральный анализ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами

Тагирова Р.Н. (Россия, Архангельск)
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
tagirova_rena@mail.ru

Рассмотрим формально самосопряженное дифференциальное выражение l порядка r (четного или нечетного) на прямой вида

$$l = \sum_{j=0}^{r} q_j(x) \frac{d^j}{dx^j}, \tag{1}$$

где q_j $(j = 0, 1, \ldots, r)$ – заданные полиномы от переменного x. Это выражение можно представить в нормальной форме

$$l = \sum_{i+j \leqslant n} h_{ij} a^{*i} a^j,$$

где $h_{ij} \in \mathbb{C}$, $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$, $n \geqslant 0$ – целое число, суммирование ведется по всем целым неотрицательным числам i и j, для которых $i + j \leqslant n$, и

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx}), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx}).$$

Хорошо известно, что в базисе функций Чебышева-Эрмита матричное представление J_n минимального замкнутого симметрического оператора L_0, порожденного в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(-\infty; +\infty)$ дифференциальным выражением l, есть трехдиагональная якобиева матрица с матричными элементами специального вида.

В докладе, используя указанную связь между операторами, порожденными в пространстве $\mathcal{L}^2(-\infty; +\infty)$ дифференциальным выражением l с полиномиальными коэффициентами, и их матричным представлением J_n в пространстве l^2, исследуются спектральные свойства этих операторов. В частности, приведены признаки самосопряженности оператора L_0, найдены дефектные числа операторов и их степеней в случае, когда им соответствуют двухдиагональные обобщенные якобиевые матрицы, и исследован характер спектра самосопряженных расширений полученных операторов, а также построены примеры целых в смысле М.Г. Крейна дифференциальных операторов минимального типа, которые порождаются иррегулярными дифференциальными выражениями.

Доклад основан на совместной статье: Мирзоев К.А., Конечная Н.Н., Сафонова Т.А., Тагирова Р.Н. Обобщенные якобиевы матрицы и спектральный анализ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Математическая физика. Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры т. 152, ВИНИТИ РАН, 2018 (в печати).

Действия с экстремальным отклонением от кратного перемешивания

Тихонов С.В. (Россия, Москва)
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
tikhonovc@mail.com

Под *преобразованиями* в дальнейшем подразумеваются обратимые сохраняющие меру отображения единичного отрезка в себя. *Непрерывным действием* топологической группы

G называется непрерывное отображение G во множество преобразований, сохраняющее групповую структуру.

В работе изучаются перемешивающие динамические системы, не обладающие свойством кратного перемешивания, введенным В.А. Рохлиным [1]. Эта работа является продолжением работы [2], где показано, что отсутствие кратного перемешивания у трехточечного примера Ледрапье [3] связано с его предельным поведением, а не с его алгебраическими свойствами.

Введем несколько определений. Ниже все последовательности преобразований состоят из элементов некоторого фиксированного действия L.

При $n > 1$, набор последовательностей $\left\{T_i^{(1)}\right\}, \ldots, \left\{T_i^{(n)}\right\} \subset L$ называется *(вполне) перемешивающим,* если для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ имеем

$$\mu\left(\bigcap_j T_i^{(j)} A_j\right) \to \prod_{j=1,\ldots,n} \mu\left(A_j\right)$$

при $i \to \infty$. Набор последовательностей называется $k-$*(кратно) перемешивающим*, если любой его поднабор из k последовательностей перемешивает. Из k-кратного перемешивания следует и перемешивание с любой кратностью меньшей k.

Ослабленная проблема Рохлина для группы G (ОПР). Предположим, что конечный набор последовательностей $\left\{T_i^{(1)}\right\}, \ldots, \left\{T_i^{(n)}\right\}$ является дважды перемешивающим. Верно ли, что он вполне перемешивает?

В дальнейшем все рассматриваемые последовательности $\{T_i\}$, $\{S_i\}$ предполагаются попарно перемешивающими.

Определение. Действие L называется $L^{(n)}$*-системой*, если существует множество $A, 0 < \mu(A) < 1$, и $(n-1)$-перемешивающая система последовательностей $\mathbb{T} = \left\{\left\{T_i^{(1)}\right\}, \ldots, \left\{T_i^{(n)}\right\}\right\}$ элементов L такая, что мера $\mu\left(\Delta_j T_i^{(j)} A\right)$ стремится к нулю или единице при $i \to \infty$.

Трехточечный пример Ледрапье является $L^{(3)}$-, а пятиточечный — $L^{(5)}$-системой.

Можно показать, что мера множества A, порождающего $L^{(n)}$-систему L, всегда равна $\frac{1}{2}$.

Утверждение 1. *$L^{(n)}$-система не обладает кратным перемешиванием.*

Теорема 1. *Пусть задана произвольная $L^{(n)}$-система и коммутирующее с ней преобразование U. Тогда мера $\mu(UA \cap A)$ равна или $\frac{1}{2}$, или $\frac{1}{4}$.*

Следствие 1. *Любое перемешивающее преобразование, коммутирующее с $L^{(n)}$-системой, имеет лебеговскую компоненту в спектре.*

Следствие 2. *Многомерные потоки (т. е. действия группы R^d) не являются $L^{(n)}$-системой.*

Теорема 2. *Пусть каждое из множеств $\{A_j\}_{j=1,\ldots,m}$ можно взять в качестве множества A для $L^{(n)}$-системы L. Имеет место следующая альтернатива:*

1. Одно из множеств набора $\{A_j\}_{j=1,\ldots,m}$ представляется как симметрическая разность нескольких других.

2. Множества $\{A_j\}_{j=1,\ldots,m}$ независимы в совокупности.

Следствие 3. *Преобразование не может быть $L^{(n)}$-системой.*

Теорема 3. *Каждая перемешивающая $L^{(n)}$-система для $G = \mathbb{Z}^2$ с фиксированным множеством A имеет минимальный шейп, то есть набор $\{h_1, ..., h_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ такой, что множество*

$$\triangle_{i \leq k} L^{g_i} A$$

имеет меру ноль или один тогда и только тогда, когда $(g_1, ..., g_k) = \left(2^l h_1, ..., 2^l h_k\right)$ для некоторого натурального l.

Литература

[1] Рохлин В.А. Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп. Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 13. №4. 1949. С. 329–340.

[2] Tikhonov S.V. On the absence of multiple mixing and on the centralizer of measure-preserving actions. Mathematical Notes, 97(2015), pp. 652–656.

[3] Ledrappier F. Un champ markovien peut être d'entropie nulle et mèlangeant. C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A-B 287, 7 (1978), pp. A561–A563.

Об отсутствии предельных циклов кубических дифференциальных систем, имеющих особую точку типа "центр"

Тлячев В.Б. (Россия, Майкоп)
Адыгейский государственный университет
stvb2006@rambler.ru
Ушхо Д.С. (Россия, Майкоп)
Адыгейский государственный университет
damirubych@mail.ru
Ушхо А.Д. (Россия, Майкоп)
Адыгейский государственный университет
uschho76@rambler.ru

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – взаимно простые многочлены степени n над полем $\mathbb{R}$.

Определение 1. Точка $M(x_0,y_0)$, принадлежащая гладкой кривой L, называется контактом на L, если вектор $\overrightarrow{V} = (P_n(x_0,y_0), Q_n(x_0,y_0))$ является направляющим вектором касательной к кривой L в точке M.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ F'_x(x,y)\cdot P_n(x,y) + F'_y(x,y)Q_n(x,y) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $F(x,y) = 0$ – гладкая алгебраическая кривая порядка m, $m \geq 1$.

Система (2) имеет не более $m(m+n-1)$ решений [1]. Поэтому справедлива

Теорема 1. Сумма числа особых точек системы (1) и числа контактов, расположенных на гладкой алгебраической кривой порядка m, $m \geq 1$, не превосходит $N = m(m+n-1)$, если эта кривая не состоит из траекторий системы (1).

Определение 2 [2]. Прямая $y = kx$ называется осью симметрии N – типа системы (1), если преобразование

$$\begin{cases} \overline{x} = x + ky, \\ \overline{y} = -kx + y, \end{cases} \tag{3}$$

переводит систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y}), \end{cases} \tag{4}$$

где $\overline{P}_n(\overline{x},-\overline{y}) = -\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y})$, $\overline{Q}_n(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y})$.

В [2] показано, что ось симметрии N–типа системы (1) является изоклиной, которую пересекают траектории системы (1) под прямым углом.

Определение 2 [3]. Прямая $y = kx$ называется осью симметрии S–типа системы (1), если преобразование (3) переводит систему (1) в систему (4), где
$\overline{P}_n(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{P}_n(\overline{x},\overline{y})$, $\overline{Q}_n(\overline{x},-\overline{y}) = -\overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y})$.

В [3] доказано, что ось симметрии S–типа системы (1) является ее инвариантной прямой.

Теорема 2. Пусть система (1) при $n = 3$ имеет хотя бы одну ось симметрии N–типа и не менее трех центров, два из которых не лежат на оси симметрии N–типа. Тогда эта система не имеет предельных циклов.

Теорема 3. Пусть система (1) при $n = 3$ имеет ось симметрии S–типа и четыре центра. Тогда эта система не имеет предельных циклов.

Замечание. Если кубическая дифференциальная система имеет ось симметрии S–типа и четыре центра, то, как следует из процедуры доказательства теоремы 3, для этой системы не возникает проблема существования предельных циклов.

Литература

[1] Уокер Р. Алгебраические кривые. М: Издательство иностранной литературы, 1952.

[2] Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы. Майкоп: АГУ, 2012.

[3] Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т.10. №2. С. 41–49.

Асимптотика решения уравнения Клейна–Гордона с локализованными и быстро осциллирующими начальными условиями[45]

Толченников А.А. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
tolchennikovaa@gmail.com

Доклад будет посвящен уравнению Клейна–Гордона с локализованными, либо быстро осциллирующими начальными условиями. В докладе будет приведена асимптотика решения и приведены упрощения асимптотических формул для различных соотношений параметров задачи (а именно соотношения массы и того параметра, который задает или частоту осцилляций, или ширину начального условия).

Исключительные точки комплексного оператора Эйри на отрезке

Туманов С. Н. (Россия, Москва)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
sergey.tumanov@topofmind.ru

Рассмотрим $\mathcal{PT}$-симметричный оператор Штурма–Лиувилля:

$$T(\varepsilon) = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon P(x), \quad \varepsilon > 0,$$

в $L_2(-a, a)$, $0 < a < \infty$ с краевыми условиями Дирихле, где потенциал P не сингулярный и подчиняется условию $P(x) = \overline{P(-x)}$.

Спектр оператора $T(\varepsilon)$ симметричен относительно вещественной оси и дискретный. При малых ε он чисто вещественный, и $T(\varepsilon)$ подобен самосопряженному оператору. При больших ε возникают невещественные собственные значения, число которых увеличивается с ростом ε.

Мы обсудим модельный пример — комплексный оператор Эйри с $P(x) = ix$, $a = 1$ и проанализируем динамику его вещественных собственных значений.

Оказывается, с ростом ε от 0 к $+\infty$, комплексные собственные значения возникают только в результате столкновения пар вещественных собственных значений в точке $\lambda_0 = 1/\sqrt{3}$ при исключительных $\varepsilon = \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, которые вычисляются явно через нули специальных функций.

[45]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10282.

Положим
$$U_-(z) = \mathrm{Bi}(z) - \sqrt{3}\mathrm{Ai}(z),\ U_+(z) = \mathrm{Bi}(z) + \sqrt{3}\mathrm{Ai}(z).$$

Теорема. Нули функций U_- и U_+ расположены на лучах $\arg z = \pi/3 + 2\pi k/3$, $k = -1, 0, 1$ симметрично относительно начала координат. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — модули нулей функций U_- и U_+ соответственно, занумерованные в порядке их возрастания. Нули обеих функций чередуются:
$$\alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \ldots.$$
Положим
$$\delta_k = \Big(\beta_k \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3, \quad \varepsilon_k = \Big(\alpha_k \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3, \quad k \in \mathbb{N}$$
(очевидно, $0 < \delta_1 < \varepsilon_1 < \delta_2 < \varepsilon_2 < \ldots$). Тогда

- При $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ все собственные значения простые вещественные, а оператор $T(\varepsilon)$ подобен самосопряженному. При всех остальных значениях ε это свойство не выполняется.

- Все исключительные точки совпадают с множеством $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$. При этих значениях параметра точка $\lambda_0 = 1/\sqrt{3}$ является двукратрным собственным значением оператора $T(\varepsilon_k)$, которому отвечает жорданова клетка. При $\varepsilon \neq \varepsilon_k$ оператор $T(\varepsilon)$ подобен нормальному (т.е. оператору, коммутирующему со своим сопряженным).

- Все нечетные собственные значения $\lambda_{2k-1}(\varepsilon)$ движутся влево (убывают) при возрастании параметра ε, проходят узловую точку $1/\sqrt{3}$ при значениях $\varepsilon = \delta_k$, двигаясь влево до некоторых точек $\lambda_{2k-1,\,turn} < 1/\sqrt{3}$, а в этих точках поворачивают назад и движутся вправо до столкновения при критических значениях $\varepsilon = \varepsilon_k$ с четными собственными значениями λ_{2k} в узловой точке $\lambda_0 = 1/\sqrt{3}$. Все четные собственные значения λ_{2k} до столкновения движутся влево.

- После столкновения собственные значения уходят в комплексную плоскость перпендикулярно вещественной оси в противоположных направлениях к вещественной оси и в последствии на вещественную ось не возвращаются. Вне вещественной оси собственные значения не сталкиваются.

- При $\varepsilon = \delta_k$ собственные функции для $\lambda_{2k-1} = 1/\sqrt{3}$ явно выписываются:
$$y(z) = U_+\left(\delta_k^{1/3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - iz\right)\right).$$

- При $\varepsilon = \varepsilon_k$ собственные функции для $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = 1/\sqrt{3}$ явно выписываются:
$$y(z) = U_-\left(\varepsilon^{1/3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - iz\right)\right).$$

- Справедливы асимптотики при $k \to \infty$:
$$\varepsilon_k = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\pi k - \frac{\pi}{12} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2,$$
$$\delta_k = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\pi k - \frac{5\pi}{12} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2.$$

Следующая теорема дает оценку сверху для точек разворота собственных значений $\lambda_{2k-1,turn}$, $k \geqslant 1$.

Теорема. *Занумеруем в порядке возрастания модулей комплексные нули* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, *функции* Bi, *лежащие в первой четверти комплексной плоскости. Справедлива следующая оценка для точки разворота нечетного собственного значения:*
$$\lambda_{2k-1,turn} < \operatorname{ctg}\arg z_k < 1/\sqrt{3}.$$

Доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым.

Нелокальная задача со свободной границей типа Флорина

Тураев Р.Н. (Узбекистан, Ташкент)
Институт Математики АНРУз
rasul.turaev@mail.ru

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению и следующую начальную и граничную условию

$$u_t(t, x) = a(u)u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in D \tag{1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t, 0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t, x_0) = u(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t, s(t)) = p, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

При исследовании задачи используем идеи и результаты работы [1,2]. Сначала задача сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность, а затем устанавливаются некоторые априорные оценки свободной границей и решений и их производных в норм Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы, доказывается единственность решения. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [1,2].

Литература

[1] Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. // Вест. Самарского Гос. Тех. Универ. Сер. "Физ.-мат. Науки". 2012.№ 26. С. 99–106.

[2] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. // Труды Моск. Матем. Общ-ва. 1967г. т. 16. С. 329–346.

Модули Мартине – Рамиса симметричной задачи о классификации ростков седловых векторных полей[46]

Туров М.М. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
turov_m_m@mail.ru

В работе рассматриваются ростки седловых резонансных голоморфных векторных полей на плоскости. Аналитическая классификация таких ростков получена в [2]. Такие ростки векторных полей естественным образом возникают в некоторых задачах симплектической и контактной геометрии. При этом, как отмечено в работе В. Арнольда [1], возникающие в приложениях ростки часто обладают некоторой дополнительной симметрией. В [1] поставлена задача исследования таких ростков, обладающих симметричностью, по действию соответствующей “симметричной” группы локальных замен координат.

Определение. Пусть V - росток голоморфного векторного поля в $(\mathbb{C}^2, 0)$, $I : (x, y) \to (-x, y)$ - инволюция. Росток V назовем $I-$симметричным, если $I^{'}V = V \circ I$.

[46] Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00739а.

Будем использовать определение преобразования монодромии из [3].

Теорема 1. Если росток V симметричен относительно некоторой инволюции I, $I'V = V \circ I$, трансверсаль T выбрана симметричной относительно инволюции I, $I(T) = T$ и $i = I_0\Big|_T$ - сужение симметрии I на трансверсаль T, то преобразование монодромии Δ, определяемое по трансверсали T, так же симметрично: $i \circ \Delta = \Delta \circ i$.

В качестве следствия теоремы 1, получена

Теорема 2. Пусть m_V - модули Мартине – Рамиса для ростка V. Тогда у модуля m_V можно выбрать такие представители $\{\phi_j\}_{j=1}^{2n}$, что $\phi_j(-x) = \phi_{j+n}(x)$, для всех $j = 1, ..., n$.

Литература

[1] Арнольд В. И., "О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями", Матем. заметки, 44:1 (1988), 3–18; Math. Notes, 44:1 (1988), 489–497.

[2] Martinet, J., Ramis, J. -P. Classification analytique des equations differentielles non lineaires resonnantes du premier ordre / J. Martinet, J. -P. Ramis // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 16.

[3] Il'iashenko, IU. S. Lectures on analytic differential equations /Yulij Ilyashenko, Sergei Yakovenko // Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339 ; v. 86.

О качественном анализе одного класса дифференциальных уравнений тепломассопереноса в конденсированном веществе[47]

Туртин Д. В. (Россия, Иваново)
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Ивановский филиал
turtin@mail.ru
Серегина Е. В. (Россия, Калуга)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет), Калужскиий филиал
evfs@yandex.ru
Амрастанов А. Н., Степович М. А. (Россия, Калуга)
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
an_amr@mail.ru, m.stepovich@rambler.ru

Рассмотрено дифференциальное уравнение

$$a^2 \mathrm{div}\,[\mathrm{grad}\Delta p(M)] - \Delta p(M) = -\rho(M) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$D\ \, d\Delta p(x, y, z = 0)/\,dz = v_s\,\Delta p(x, y, z = 0), \Delta p(\infty, \infty, \infty) = 0,$$

описывающее стационарное распределение частиц вследствие их диффузии или изменение температуры в конденсированном веществе в результате теплопроводности. Здесь a, D, v_s — постоянные величины, функция $\Delta p(M)$ — искомое распределение диффундирующего вещества (или тепла), $M(x, y, z)$ — произвольная точка вещества, $x, y \in (-\infty, \infty)$, $z \in [0, \infty)$, а функция $\rho(M)$ описывает источники вещества (тепла).

В настоящей работе на основе уравнения (1) проведено математическое моделирование процессов взаимодействия остро сфокусированного электронного пучка, электронного зонда, с различными материалами. В качестве источника неосновных носителей заряда (ННЗ) в полупроводниковой мишени и/или тепла в мишени произвольной природы использовалась модель $\rho(M)$, основанная на возможности раздельного количественного описания вклада энергии поглощенных в мишени и обратно рассеянных электронов [1]. Расчёты распределений ННЗ или тепла проводились с использованием математических моделей, описанных в [2, 3],

[47]Исследования частично поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–03–00515) и грантом РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

а некоторые математические аспекты вычислений обсуждались в [4]. В настоящей работе продолжено изучение математических моделей исследуемых физических явлений, основное внимание уделено решению дифференциальных уравнений тепломассопереноса, проблемам их корректности и устойчивости.

Литература

[1] Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А. Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии // Известия АН СССР. Серия физическая. 1991. Т. 55. № 8. С. 1474–1482.

[2] Белов А. А., Петров В. И., Степович М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66. № 9. С. 1317–1322.

[3] Амрастанов А. Н., Гинзгеймер С. А., Степович М. А., Филиппов М. Н. Об одной возможности математического моделирования теплового воздействия остро сфокусированного электронного пучка на однородный полупроводник // Известия РАН. Серия физическая. 2016. Т. 80. № 10. С. 1448–1452.

[4] Степович М. А., Серегина Е. В., Амрастанов А. Н. О некоторых проблемах математического моделирования процессов тепломассопереноса, вызванных киловольтными электронами в полупроводниковых материалах // Сборник материалов 28 Крымской осенней математической школы–симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман, 2017). Секции 5–9. Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. С. 56–58.

О нахождении точных решений системы уравнений газовой динамики в поле силы Кориолиса

Турцынский М.К. (Россия, Москва)
МГУ им. Ломоносова
M13041@yandex.ru

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики (1), задающую движение политропного Ньютоновского газа в эйлеровых координатах, на плотность $\varrho(t,x)$, скорость $\mathbf{u}(t,x)$ и давление $P(t,x)$ газа:

$$\varrho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u}) + \nabla P = 0,$$

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t P + (\mathbf{u}\cdot\nabla P) + \gamma P \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{L} = lL$, $L = (L_{ij})_{i,j=1..2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in (1,2]$ – показатель адиабаты, $l > 0$ – параметр Кориолиса; ∇ и div – градиент и дивергенция по пространственным переменным, $P = C\rho^\gamma$, где $C = \text{const}$.
Введя $\pi = P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ и $c_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}C^{\frac{1}{\gamma}}$, получим:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{L}\,\mathbf{u} + c_0\,\nabla\pi = 0, \quad \partial_t \pi + (\nabla\pi\cdot\mathbf{u}) + (\gamma-1)\,\pi\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем рассмотрим специальный класс решений системы (2), соответствующим движению с однородной деформацией (см. [1]). Решения ищем в виде: $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$; $Q = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$; $\pi(t,\mathbf{x}) = A(t)x_1^2 + B(t)x_1x_2 + C(t)x_2^2 + K(t)$.

Тогда, если $R = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t) \\ \frac{1}{2}B(t) & C(t) \end{pmatrix}$, имеем: $\dot{R} + RQ + Q^T R + (\gamma-1)\mathbf{tr}QR = 0$,

$$\dot{Q} + Q^2 + lLQ + 2c_0 R = 0, \quad \dot{K} + 2(\gamma-1)\mathbf{tr}QK = 0. \tag{3}$$

Перепишем систему (3) в лагранжевых координатах:

$$\ddot{F}_{ik} + \frac{\partial U}{\partial F_{ik}} = \sum_j \mathcal{L}_{ij}F_{jk}, \tag{4}$$

где $F = (F_{ij})_{i,j=1..2}$ - матрица перехода от лагранжевых координат частицы газа x_i к эйлеровым w_i, т.е. $x_i = \sum_k F_{ik} w_k$, U – внутренняя энергия частиц газа, $U = U(\det F)$.

В статье [1] показывается, что система (3) в эйлеровых координатах имеет только одну особую точку $a = d = 0$, $b = -c = b^*$, $A = C = A^* = \frac{b^*(b^*-l)}{2c_0}$, $B = 0$. Она соответствует решениям $F = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b^*t & \sin b^*t \\ -\sin b^*t & \cos b^*t \end{pmatrix}$ системы (4), C_i – константы.

Следуя статьям [2]–[3], можно найти точное решение системы (4) в окрестности положения равновесия.

Лемма 1. *Система (4) имеет три первых интеграла* $\frac{1}{2}\sum_{i,k} \dot{F}_{ik}^2 + U = E = const$; $J + \frac{l}{2} G = A = const$; $K - l \det F = B = const$. *В случае* $U = U_0 (\det F)^{-1}$ *(при* $\gamma = 2$*) имеется дополнительный первый интеграл* $G = s^2 = \tilde{C}_1 \cos lt + \tilde{C}_2 \sin lt + \frac{4E+2lA}{l^2}$.

Лемма 2. *Замена* $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\cos u & 0 \\ 0 & s \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$ *сводит систему (4) к одному дифференциальному уравнению первого порядка на функцию* u*:*

$$\dot{u} = \pm\sqrt{f(u,t)}, \text{где } f(u,t) = \frac{2E - (s')^2 + Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{4U_0}{s^4 \sin 2u} - \frac{A^2 + B^2 + 2AB \sin 2u}{s^4 \cos^2 2u}, \quad (5)$$

положениями равновесия которого являются $\tilde{u} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ *при* $0 < k = \frac{b^*}{l} < 1$ *и* $\tilde{u} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ *при* $k < 0$ *и* $k > 1$.

В окрестности положения равновесия $\tilde{u} = \frac{\pi}{4}$ имеем: $A = \tilde{A} + \varepsilon_1$, $B = -\tilde{A} + \varepsilon_2$, $E = \tilde{E} + \varepsilon_3$, $s^2 = \text{const}$. Введем $v = u - \frac{\pi}{4}$; $\tau = t + \frac{\phi_0}{l}$; $\phi_0 = \arcsin \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2}}$; $w = \cos 2v$.

Уравнение (5) тогда перепишется в виде: $-\frac{w'_\tau}{\sqrt{1-w^2}} = \pm 2\sqrt{A_1 - \frac{B_1}{w} - \frac{C_1 + D_1 w}{1-w^2}}$, где $A_1 = \frac{l^2}{4}$, $B_1 = \frac{4U_0}{s^4}$; $C_1 = \frac{(\tilde{A}+\varepsilon_1)^2 + (-\tilde{A}+\varepsilon_2)^2}{s^4}$; $D_1 = \frac{2(\tilde{A}+\varepsilon_1)(-\tilde{A}+\varepsilon_2)}{s^4}$. Оно является автономным и может быть явно разрешено через эллиптические интегралы.

Теорема 1. *В окрестности положения равновесия* $\tilde{w} = 1$ *имеем:*

$$-2\tau + C_0 = \int \frac{\sqrt{w}dw}{\sqrt{(A_1 - C_1)w - B_1 + (B_1 - D_1)w^2 - A_1 w^3}} =$$

$$-\frac{2w_1}{\sqrt{-A_1 w_2 (w_3 - w_1)}} \left(F\left(\sqrt{\frac{w(w_3-w_1)}{w_3(w-w_1)}}, \sqrt{\frac{w_3(w_1-w_2)}{w_2(w_1-w_3)}}\right) - \Pi\left(\frac{w_3}{w_3-w_1}, \sqrt{\frac{w(w_3-w_1)}{w_3(w-w_1)}}, \sqrt{\frac{w_3(w_1-w_2)}{w_2(w_1-w_3)}}\right)\right),$$

где w_1, w_2, w_3 *- корни уравнения* $(A_1 - C_1)w - B_1 + (B_1 - D_1)w^2 - A_1 w^3 = 0$*;*
F *и* Π *– нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода.*

Литература

[1] Olga S. Rozanova, Jui-Ling Yu, Marko K. Turzynsky, Chin-Kun Hu. Nonlinear stability of two-dimensional axisymmetric vortices in compressible inviscid medium in a rotating reference frame. arXiv:1511.07039.

[2] S. I. Anisimov, Iu. I. Lysikov. Expansion of a gas cloud in vacuum. PMM Vol. 34, no. 5, 1970, PP. 926–929.

[3] Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. Наука, 1980.

Задача Гурса для дескрипторного уравнения в частных производных

Усков В.И. (Россия, Воронеж)
Воронежский государственный университет
vum1@yandex.ru

Рассматривается задача:

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu(x,t) = F(x,t), \quad (1)$$

$$u(x,0)=g(x),\ u(0,t)=h_1(t),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=h_2(t)\ (g(0)=h_1(0),\ g'(0)=h_2(0)), \tag{2}$$

где A, B, C — стационарные линейные замкнутые операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, с областями определения $\overline{\operatorname{dom} A}=\overline{\operatorname{dom} B}=\overline{\operatorname{dom} C}=E_1$; A — фредгольмов оператор с $\dim\operatorname{Ker} A=1$; $g(x)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, $F(x,t)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции; $g(x), h_1(t), h_2(t)\in E_1$; $F(x,t)\in E_2$; $(x,t)\in \Pi=[0,x_k]\times[0,t_k]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(x,t)$: 1) дифференцируемая по t и дважды по x; 2) непрерывная по x вместе со своими производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; 3) удовлетворяющая тождеству $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}$; 4) удовлетворяющая (1), (2).

Уравнение (1) встречается при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки; фильтрации жидкости в средах с двойной пористостью; передачи тепла в гетерогенной среде и т. д.

Задача (1), (2) исследовалась в [1] в конечномерном пространстве в случае $\det A=0$, $\det B=0$, $\det(\lambda A+B)=0$, $\forall\lambda$, при условии существования левого регуляризирующего оператора.

В настоящей работе для решения поставленной задачи применяется метод каскадной декомпозиции уравнения, разработанный в [2]. Этот метод позволяет расщепить исходное уравнение на уравнения в подпространствах. Там же приводится свойство, вполне определяющее фредгольмов оператор.

Вводятся: проектор Q на подпространство $\operatorname{Coker} A$; элементы $e\in\operatorname{Ker} A$, $\varphi\in\operatorname{Coker} A$; полуобратный оператор $A^-:\operatorname{Im} A\to\operatorname{Coim} A\cap\operatorname{dom} A$. В $\operatorname{Coker}A$ определяется скалярное произведение $<\cdot,\cdot>$ так, чтобы $<\varphi,\varphi>=1$.

Наложим следующие условия.

Условия Y_1**.** 1) F дифференцируема по t; 2) A^-F дифференцируема по x; 3) $<QBe,\varphi>\neq 0$.

Условия Y_2**.** 1) A^-B, A^-C, QB, QC ограничены; 2) F_0 непрерывна по x.

Условия Y_3**.** 1) A^-F непрерывна по t; 2) $h_1(t)$, $h_2(t)$ непрерывны; 3) $g(x)$ непрерывно дифференцируема.

Получен следующий результат с применением результатов монографии проф. С.Г. Крейна [3].

Теорема. *Пусть выполнены условия Y_1, Y_2, Y_3. Решение задачи (1), (2) существует при выполнении соотношений:*

$$\begin{aligned}&<QBg'(x),\varphi>+<QCg(x),\varphi>-<QF(x,0),\varphi>=0;\\&<QBh_2(t),\varphi>+<QCh_1(t),\varphi>-<QF(0,t),\varphi>=0.\end{aligned}\tag{3}$$

Это решение единственно и имеет вид:

$$u(x,t)=e^{t\cdot T(x)}g(x)+\int\limits_0^t e^{(t-\tau)\cdot T(x)}\Phi(x,\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Оно обладает свойством:

$$<QB\frac{\partial u}{\partial x},\varphi>+<QCu(x,t),\varphi>-<QF(x,t),\varphi>=0. \tag{5}$$

Значения оператора T и вектор-функций $F_0(x,t)$, $\Phi(x,t)$ будут приведены в докладе.

Литература

[1] Чистяков В. Ф., Нгуен Хак Диеп О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6, № 1. С. 98–111.

[2] Зубова С. П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика, Математика. 2013. № 2. С. 192–199.

[3] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука. 1967. 464 с.

Об орбитальной линеаризации аффинных систем

Фетисов Д.А. (Россия, Москва)
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
dfetisov@yandex.ru

Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1}$$

где $x \in M$ – состояние, $u \in \mathbb{R}$ – управление, $\dot{x} \equiv dx/dt$, M – область в пространстве состояний $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Системе (1) соответствуют векторные поля

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad g = \sum_{ij=1}^{n} g_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i, g_i \in C^\infty(M), \quad i = \overline{1,n},$$

система Пфаффа $\omega_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, где $\omega_i = dx_i - f_i(x)dt - g_i(x)udt$, $i = \overline{1,n}$, и кораспределение $\mathcal{I} = \operatorname{span}\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Условия линеаризуемости системы (1) обратной связью приведены в работе [1]. В работе [2] получены условия линеаризуемости на основе выполнения в системе (1) замены независимой переменной, не зависящей от управления. В настоящей работе доказываются условия линеаризуемости системы (1) на основе выполнения в системе замены независимой переменной, зависящей от управления.

Лемма 1. *Пусть функции λ, μ, ρ, $\sigma \in C^\infty(M)$ удовлетворяют условию*

$$\rho(x)\mu(x) - \lambda(x)\sigma(x) \neq 0, \quad x \in M. \tag{2}$$

Тогда система (1) заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \lambda(x) + \mu(x)u \tag{3}$$

и заменой управления

$$v = \frac{\rho(x) + \sigma(x)u}{\lambda(x) + \mu(x)u} \tag{4}$$

преобразуется на множестве $Q_1 = \{(x, u) : x \in M, \lambda(x) + \mu(x)u \neq 0\}$ в систему

$$x' = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)v,$$

определенную на множестве $Q_2 = \{(x, v) : x \in M, \mu(x)v - \sigma(x) \neq 0\}$, где

$$\tilde{f} = af + bg, \quad \tilde{g} = cf + dg,$$

$$a = -\frac{\sigma}{\rho\mu - \lambda\sigma}, \quad b = \frac{\rho}{\rho\mu - \lambda\sigma}, \quad c = \frac{\mu}{\rho\mu - \lambda\sigma}, \quad d = -\frac{\lambda}{\rho\mu - \lambda\sigma}.$$

Будем говорить, что система (1) орбитально линеаризуема в области M, если существуют функции λ, μ, ρ, $\sigma \in C^\infty(M)$, удовлетворяющие условию (2), и диффеоморфизм Φ: $M \to N$, такие что система (1) заменой независимой переменной (3), заменой управления (4) и заменой состояния $y = \Phi(x)$ преобразуется на множестве $Q_1 = \{(x, u) : x \in M, \lambda(x) + \mu(x)u \neq 0\}$ в линейную управляемую систему

$$y_1' = y_2, \dots, y_{n-1}' = y_n,\, y_n' = v,$$

определенную на множестве $Q_3 = \{(y, v) : y \in N, \mu(\Phi^{-1}(y))v - \sigma(\Phi^{-1}(y)) \neq 0\}$.

Введем в рассмотрение кораспределение $\mathcal{I}_1$ и производный ряд для него по следующему правилу:

$$\begin{gathered}\mathcal{I}_1 = \{\omega \in \mathcal{I} \,|\, \omega(f) = 0, \omega(g) = 0\},\\ \mathcal{I}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{I}_k \,|\, d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{I}_k\},\, k = 1, 2, \dots,\end{gathered} \tag{5}$$

Будем обозначать через $\mathcal{CI}_k$ характеристическое кораспределение кораспределения $\mathcal{I}_k$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть x_0 – регулярная точка производного ряда (5). Для того чтобы существовала окрестность точки x_0, в которой система (1) орбитально линеаризуема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\dim \mathcal{I}_{n-2} = 1$ в окрестности точки x_0;

2) $\dim \mathcal{CI}_{n-2} = 3$ в окрестности точки x_0;

3) $\mathcal{CI}_{n-2}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_1(x_0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-07-00653).

Литература

[1] Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. М.: Физматлит, 1997.

[2] Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems and Control Letters. 1999. V. 38. № 4–5. P. 271–281.

Фундаментальные решения многомерного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

Хасанов А., Эргашев Т.Г. (Узбекистан, Ташкент)
Институт Математики АН Республики Узбекистан
ergashev.tukhtasin@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{2\alpha}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{2\beta}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

в области $R_p^{2+} \equiv \{x : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, где $x = (x_1, ..., x_p), p-$ размерность Эвклидова пространства $(p \geq 2)$, а α, β и λ - постоянные, причем $0 < 2\alpha,\ 2\beta < 1$.

В настоящем сообщении найдены и исследованы 4 фундаментальные решения уравнения (1):

$$q_1(x, x_0) = k_1 \left(r^2\right)^{1-\alpha-\beta-\frac{p}{2}} A_2 \left(\alpha + \beta - 1 + \frac{p}{2}; \alpha, \beta; 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta, \zeta\right),$$

$$q_2(x, x_0) = k_2 \left(r^2\right)^{\alpha-\beta-\frac{p}{2}} x_1^{1-2\alpha} x_{01}^{1-2\alpha} A_2 \left(-\alpha + \beta + \frac{p}{2}; 1-\alpha, \beta; 2-2\alpha, 2\beta; \xi, \eta, \zeta\right),$$

$$q_3(x, x_0) = k_3 \left(r^2\right)^{-\alpha+\beta-\frac{p}{2}} x_2^{1-2\beta} x_{02}^{1-2\beta} A_2 \left(\alpha - \beta + \frac{p}{2}; \alpha, 1-\beta; 2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta, \zeta\right),$$

$$q_4(x, x_0) = k_4 \left(r^2\right)^{-1+\alpha+\beta-\frac{p}{2}} x_1^{1-2\alpha} x_{01}^{1-2\alpha} x_2^{1-2\beta} x_{02}^{1-2\beta} \times$$

$$\times A_2 \left(1 - \alpha - \beta + \frac{p}{2}; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta, \zeta\right),$$

где

$$x_0 = (x_{01}, ..., x_{0p}) \in R_p^{2+},\ \xi = 1 - \frac{r_1^2}{r^2},\ \ \eta = 1 - \frac{r_2^2}{r^2},\ \ \zeta = -\frac{\lambda^2}{4} r^2,$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(x_i - x_{0i}\right)^2,\ \ r_k^2 = \left(x_k + x_{0k}\right)^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^{p} \left(x_i - x_{0i}\right)^2, k = 1, 2,$$

$$A_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) = \sum_{m,n,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-q}(b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n m! n! q!} x^m y^n z^q,\ |x| < 1,\ |y| < 1,$$

$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ - символ Похгаммера, $k_1, ...k_4$ постоянные, которые подлежат определению при исследовании краевых задач для уравнения (1).

Нетрудно проверить, что фундаментальные решения уравнения (1) обладают следующими свойствами:

$$\frac{\partial q_1(x, x_0)}{\partial x_1} \mid_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial q_1(x, x_0)}{\partial x_2} \mid_{x_2=0} = 0, \quad q_2(x, x_0) \mid_{x_1=0} = 0,$$

$$\frac{\partial q_2(x, x_0)}{\partial x_2} \mid_{x_2=0} = 0, \quad \frac{\partial q_3(x, x_0)}{\partial x_1} \mid_{x_1=0} = 0, \quad q_3(x, x_0) \mid_{x_2=0} = 0,$$

$$q_4(x, x_0) \mid_{x_1=0} = 0, \quad q_4(x, x_0) \mid_{x_2=0} = 0.$$

Кроме того, в работе показано, что вырожденная гипергеометрическая функция $\omega = A_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z)$ удовлетворяет систему уравнений

$$\begin{cases} x(1-x)\omega_{xx} - xy\omega_{xy} + xz\omega_{xz} + [c_1 - (a + b_1 + 1)x]\omega_x \\ \qquad -b_1 y\omega_y + b_1 z\omega_z - ab_1\omega = 0, \\ y(1-y)\omega_{yy} - xy\omega_{xy} + yz\omega_{yz} + [c_2 - (a + b_2 + 1)y]\omega_y \\ \qquad -b_2 x\omega_x + b_2 z\omega_z - ab_2\omega = 0, \\ \qquad z\omega_{zz} - x\omega_{xz} - y\omega_{yz} + (1-a)\omega_z + \omega = 0, \end{cases}.$$

С помощью установленного здесь разложения

$A_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) =$

$$= (1-x)^{-b_1}(1-y)^{-b_2} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i-j}(b_1)_i (b_2)_i}{(c_1)_i (c_2)_i i! j!} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i \left(\frac{y}{1-y}\right)^i z^j \times$$

$$\times F\left(c_1 - a + j, b_1 + i; c_1 + i; \frac{x}{x-1}\right) F\left(c_2 - a + j, b_2 + i; c_2 + i; \frac{y}{y-1}\right)$$

доказано, что фундаментальные решения $q_1 - q_4$ при $r \to 0$ имеют особенность порядка $\frac{1}{r^{p-2}}$,где $p > 2$. Здесь $F(a, b; c; x)$- известная гипергеометрическая функция Гаусса.

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (1) в случае $p = 2$ построены в [1], а в случае $p = 3$, $\lambda = 0$ в [2].

Литература

[1] Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. Vol.52, No.8. P.673-683.

[2] Karimov E.T.,Nieto J.J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2011. Vol.62. P.214-224.

О решениях дифференциальных включений с почти выпуклой правой частью

Хачатрян Р. А. (Армения, Ереван)
Ереванский государтвенный университет
khachatryan.rafik@gmail.com

Рассматривается вопрос существования решения включения вида $Dx(t) \subseteq a(x(t))$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$, где $Dx(t)$- паратингентная производная функции $x(t)$. Предполагается, что многозначное отображение a непрерывно, а множества $a(x)$ почти выпуклы.

Определение 1 [3] Паратингентной производной $Dx(t_0)$ функции $x(t)$ в точке t_0 называется совокупность всех пределов:

$$\lim_{\substack{t_n \to t_0 \\ s_n \to t_0}} \frac{x(t_n) - x(s_n)}{t_n - s_n}, \ s_n \neq t_n.$$

Определение 2 [3] Множество $M \subseteq R^n$ удовлетворяет условию выпуклости с константой $\theta \geq 0$, если для любых $x_j \in M, \lambda_j \geq 0, j \in J,$ где $J-$ конечное множество индексов, таких, что $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$, выполняется

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \in M + \theta r^2 B_1(0),$$

где $r \equiv \max_{i,j \in J} \|x_i - x_j\|$.

Теорема. Пусть

1) многозначное отображение $a : R^n \longrightarrow 2^{R^n}$ с компактными значениями непрерывно;

2) для любого $x \in R^n$ множество $a(x)$ почти выпукло с константой $\theta \geq 0$;

3) существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|a(x)\| \leq C(1 + \|x\|) \ \forall x \in R^n.$$

Тогда существует липшицевая функция $x(t)$, паратингентная производная $Dx(t)$ которой всюду удовлетворяет включению

$$Dx(t) \subseteq a(x(t)), \ t \in [0, 1]$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Литература

[1] Филиппов А. Ф. Об условиях существования решений многозначных дофференциальных уравнений, *дифференциальные уравнения,* **13**:6(1977), 1070-1078.

[2] Остапенко В.В. Об одном условии почти выпуклости, *Украинский мат. журнал,* **35**:2(1983), 169-172.

[3] Wazewski T. Sur une conditions equivalente a l'equation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser.Sci. Math Austronom. Phys.*, **9**: 12(1961), 865-867.

[4] Zaremba S. K.,Sur une extention de la notion d'equation differential, *S. R.Acad. Sci. Paris,* **199**:10(1934), 545-548.

Оценки убывания функции потока решения уравнения p-Пуассона на плоскости

Хрипунова Балджы А.С. (Германия, Билефельд; Россия, Владимир)
Билефельдский Университет,
Владимирский Государственный Университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
akhripun@math.uni-bielefled.de

Рассматривается уравнение p-Пуассона с правой частью в дивергентной форме на плоскости: $-\mathrm{div}(A(\nabla u)) = -\mathrm{div} F$ для некоторого показателя $p \in [2, \infty)$. Основной результат представляет собой следующая оценка убывания функции потока $A(\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$: для любого $\beta \in (0,1)$ и любого $\theta \in (0,1)$ найдется $c_\beta > 0$, такая что $\big(\fint_{\theta B} |A(\nabla u) - \langle A(\nabla u)\rangle_{\theta B}|^{p'}\, dx\big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\theta^\beta \big(\fint_B |A(\nabla u) - \langle A(\nabla u)\rangle|_B^{p'} dx\big)^{\frac{1}{p'}} + c_\beta \big(\fint_B |F - \langle F\rangle|_B^{p'}\, dx\big)^{\frac{1}{p'}}$, где показатель β является показателем Гельдера, связанным с оценкой градиента ∇h решения p-гармонического уравнения ($F = 0$) на плоскости (в полученной оценке показатель β улучшен по сравнению с предыдущими результатами). Были рассмотрены два случая: в так называемом невырожденном случае функция $V(\nabla h) := |\nabla h|^{\frac{p-2}{2}}\nabla h$ является в терминах средних интегралов близкой к среднему значению на шаре $\langle V(\nabla h)\rangle_B$ и решение уравнения близко к решению линейного уравнения с постоянными коэффициентами. В вырожденном случае оценки убывания были получены с использованием соответственных оценок убывания для квазиконформных градиентных отображений. Оценка убывания, записанная в терминах осцилляции : $\mathrm{osc}_{p'}(A(\nabla u))(x, \theta t) \leq c\,\theta^\beta \mathrm{osc}_{p'}(A(\nabla u))(x,t) + c_\beta \mathrm{osc}_{p'}(F(\nabla u))(x,t)$ позволяет получить, в частности, оценки в норме пространств Бесова для функции потока $A(\nabla u)$.

Литература

[1] Breit D., Cianchi A.,Diening L., Kuusi T., Schwarzacher S., Pointwise Calderon–Zygmund gradient estimates for the p-Laplace system, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, Volume 114,146-190, 2018.

[2] Arasujo D.J, Teixeira E.V, Urbanov J.M. A proof of the regularity conjecture in the plane. Adv. Math., 316:541, 2017.

[3] Aronsson G. On certain p-harmonic functions in the plane. Manuscripta Math.,61(1):79-101, 1988.

[4] Baernstein A II, Kovalev L.V. On Holder regularity for elliptic equations of non-divergence type in the plane. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 4(2):295-317, 2005.

[5] Diening L., Kaplicky P., Schwarzacher S. BMO estimates for the p-Laplacian. Nonlinear Anal., 75(2):637-650, 2012.

Нелинейный осциллятор как модель артериальной гемодинамики мозга

А.А. Черевко[1,2], Е.Е. Борд[2], М.А. Шишленин[2,3], А.К. Хе[1,2] (Россия)
[1]Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН
[2]Новосибирский государственный университет, [3]Институт математики СО РАН
cherevko@mail.ru

В.А. Панарин, К.Ю. Орлов, В.В. Берестов (Россия)
Новосибирский научно-исследовательский институт патологии кровообращения
им. академика Е.Н. Мешалкина

Аномалии сосудистой системы головного мозга, такие как аневризмы (выпячивание стенок сосуда вследствие их растяжения) и артерио-венозные мальформации (патологическое хаотичное срастание артерий с венами), ведут к нарушению правильной работы системы кровообращения. Поэтому с медицинской точки зрения важно знать поведение кровотока в окрестности патологии. В тоже время по этическим соображениям не всегда возможно изучать это поведение экспериментально. Целью работы является получение информации о характерном поведении интегральных характеристик кровотока в окрестности патологий на основе построенной по клиническим данным математической модели.

Модель строится на основе клинических данных о зависимостях от времени скорости и давления, измеренных внутри кровеносных сосудов, вблизи патологии во время нейрохирургических операций.

Клинические данные о давлении $p(t)$ и скорости $v(t)$ представляются как комбинации "медленных" и "быстрых" переменных:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_m(t)\, q(t), \\ v(t) &= v_a(t) + v_m(t)\, u(t), \end{aligned}$$

где $p_a(t), p_m(t), v_a(t), v_m(t)$ – "медленные" переменные (их величина мало изменяется за один сердечный цикл и определяется сложными механизмами ауторегуляции организма), $q(t) \in [-1, 1]\,, u(t) \in [-1, 1]$ – "быстрые" безразмерные переменные (их поведение определяется реакцией кровеносного сосуда на пульсовую волну).

Для выявления характерного поведения величин $q(t), u(t)$ использована модель обобщённого уравнения Ван дер Поля – Дуффинга:

$$q'' + f(q)\, q' + g(q) = k\, u(t). \tag{1}$$

Функции $f(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2$, $g(q) = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3$ в (1) характеризуют демпфирование и упругость сосудов. Величины $q = q(t)$ и $u = u(t)$ представляют собой нормированные (безразмерные) значения давления и скорости кровотока соответственно.

Коэффициенты уравнения определяются методами теории обратных задач по реальным клиническим данным. Они индивидуальны для каждого пациента и связаны с состоянием его кровеносных сосудов вблизи патологии.

Исследование уравнения выполнялось посредством замены правой части (1) на гармоническую функцию, причем ее амплитуда и частота рассматривались в качестве параметров. Проведено численное и аналитическое исследование свойств решений уравнения (1) в физиологически значимых областях значений параметров. На основе анализа массива клинических данных исследованы свойства амплитудо-фазово-частотных характеристик и типичное поведение решений в окрестности сосудистых патологий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №17-08-01736 и гранта Правительства РФ 14.W03.31.0002.

Литература

[1] Cherevko A. A., Mikhaylova A. V., Chupakhin A. P., Ufimtseva I. V., Krivoshapkin A. L., Orlov K. Yu. Relaxation oscillation model of hemodynamic parameters in the cerebral vessels // Journal of Physics: Conference Series 2016.

[2] Cherevko A. A., Bord E. E., Khe A. K., Panarin V. A., Orlov K. Yu. The analysis of solutions behaviour of Van der Pol Duffing equation describing local brain hemodynamics // Journal of Physics: Conference Series 2017.

Оптимальное управление системой двух тел

Черноусько Ф.Л. (Россия, Москва)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Московский физико-технический институт
chern@ipmnet.ru

Рассматривается задача оптимального управления для системы, состоящей из твердого тела P массы M и материальной точки Q массы m, которая управляется актюатором и может перемещаться относительно тела P со скоростью, ограниченной величиной V.

Предполагается, что движение происходит в плоскости при отсутствии внешних сил и моментов, так что единственными силами, действующими на систему, являются внутренние силы взаимодействия между телами. В начальный момент система $P + Q$ покоится, поэтому ее центр масс O остается неподвижным.

Используя закон сохранения импульса и момента импульса, приведем уравнения движения к следующей системе третьего порядка:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = \frac{yu - xv}{1 + \mu(x^2 + y^2)}, \quad \mu = \frac{m}{M + m}, \tag{1}$$

где x,y – декартовы координаты точки Q в системе координат, связанной с телом P, u,v – компоненты относительной скорости точки Q, удовлетворяющие ограничению

$$u^2 + v^2 \leq V^2, \tag{2}$$

z – угол поворота тела P в плоскости движения.

Поставлены две задачи оптимального быстродействия для системы (1) при ограничении (2). В Задаче 1 фиксированы начальные и конечные значения всех переменных x,y,z. В Задаче 2 фиксированы начальные значения всех переменных и конечное значение z. Явное аналитическое решение обеих задач получено в случае малого $\mu \ll 1$.

Оптимальными траекториями точки Q относительно тела P в общем случае являются дуги окружностей.

Если в Задаче 1 начальное и конечное положение точки Q различны, то оптимальное решение единственно; в противном случае, оптимальными являются любые окружности определенного радиуса, проходящие через начальную (она же и конечная) точку.

Если в Задаче 2 начальная точка не совпадает с центром масс C тела P, то решение единственно; в противном случае оптимальными являются любые полуокружности определенного радиуса, проходящие через точку C.

Полученные результаты представляют интерес для задач управления мобильными роботами посредством движения внутренних масс. Эти результаты могут быть полезны также для задач управления ориентацией космических аппаратов.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310387-0) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00652) и Программы №29 Президиума РАН "Актуальные проблемы робототехнических систем".

О нелинейных диофантовых неравенствах

В.Н. Чубариков (Россия, Москва)
МГУ
chubarik2009@live.ru

Метод И.М.Виноградова оценок тригонометрических сумм в качестве своей составной части имеет утверждение о кратности пересечения областей ([1], лемма 5, с.59), в которой оценка числа решений системы нелинейных диофантовых неравенств сводится к подобной задаче для линейных диофантовых неравенств.

Пусть $n \geq 3$ и $\alpha_n, \ldots, \alpha_1 \in \mathbf{R}, f(x) = \alpha_n x_n + \cdots + \alpha_1 x$. Каждому $y \in \mathbf{Z}$ поставим в соответствие точку $(Y_{n-1}, \ldots, Y_1)$ из разложения многочлена $f(x+y) - f(y)$ по степеням x, т.е.

$$f(x + y) - f(y) = \alpha_n x^n + Y_{n-1}x^{n-1} + \cdots + Y_1 x, \quad Y_s = Y_s(y), \quad s = n - 1, \ldots, 1.$$

Пусть $Y \leq P$ — натуральные числа, $P > 1$. Тогда для любого $y_0 \leq Y$ число решений системы сравнений $Y_s(y) - Y_s(y_0) \equiv \theta_s P^{-s} \pmod 1 (s = n-1, \ldots, 1)$ при некоторых $|\theta_s| \leq 1$, не превосходит числа решений линейной системы неравенств

$$\|n \ldots s\alpha_s(y - y_0)\| \leq n \ldots (s + 1)\,(1,5n)^{n-1}\,P^{-s+1}(s = n, \ldots, 2),$$

где $\|h\|$ — расстояние вещественного числа h до ближайшего целого.

Первое нетривиальное обобщение этой теоремы И.М.Виноградова на кратный случай дал Г.И.Архипов ([2], лемма 2, с.65). Последний вариант его изложен в ([3], лемма 1, с.174).

Пусть многочлен $F(x_1,\dots,x_r)\in\mathbf{R}[x_1,\dots,x_r]$ имеет вид

$$F(x_1,\dots,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}.$$

Тогда

$$F(x_1+y_1,\dots,x_r+y_r)-F(x_1+z_1,\dots,x_r+z_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}B(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r},$$

где

$$B(u_1,\dots,u_r)=\sum_{t_1=u_1}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=u_r}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)\binom{t_1}{u_1}\dots\binom{t_r}{u_r}\times(y_1^{t_1-u_1}\dots y_r^{t_r-u_r}-z_1^{t_1-u_1}\dots z_r^{t_r-u_r}).$$

Пусть, далее, $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_r)$, $u=u_1+\dots+u_r$,

$$A(\mathbf{u};s)=\sum_{\substack{t_1=u_1\\ v=s+u}}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=u_r}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)\times\binom{t_1}{u_1}\dots\binom{t_r}{u_r}(y_1^{t_1-u_1}\dots y_r^{t_r-u_r}-z_1^{t_1-u_1}\dots z_r^{t_r-u_r}),$$

форма степени s многочлена $B(\mathbf{u})=\sum\limits_{s=0}^{n-u}A(\mathbf{u};s)$.

Выделим формы $A(\mathbf{u};1)$ первой степени. Они имеют вид

$$A(\mathbf{u};1)=\sum_{j=1}^{r}(u_j+1)\alpha(u_1,\dots,u_j+1,\dots,u_r)(y_j-z_j).$$

Теорема 1. *Существуют многочлены $H(\mathbf{u};\mathbf{v};s)$ от переменных $y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_r$ с целыми неотрицательными коэффициентами и такие, что выполняются равенства*

$$A(\mathbf{u};s)=\frac{1}{u_1!\dots u_r!s!}\sum_{\substack{v_1=u_1\\ v=s-1+u}}^{n_1}\cdots\sum_{v_r=u_r}^{n_r}v_1!\dots v_r!H(\mathbf{u};\mathbf{v};s)A(\mathbf{v};1);\tag{1}$$

при этом сумма коэффициентов каждого многочлена $H(\mathbf{u};\mathbf{v};s)$ не превосходит sr^{s-1}, а сумма степеней переменных $y_j,z_j(j=1,\dots,r)$, входящих в любой одночлен многочлена H, не превосходит $v_j-u_j(j=1,\dots,r)$.

Несколько слов о p-адическом варианте теоремы 1 (см., напр., [2]-[6]). Пусть многочлен $F(x_1,\dots,x_r)$ имеет вид

$$F(x_1,\dots,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{p^{b(t_1,\dots,t_r)}}x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r},\qquad \alpha(t_1,\dots,t_r)=\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{p^{b(t_1,\dots,t_r)}}.$$

Тогда при $p>\max\{n_1,\dots,n_r\}$ справедливо равенство (1).

Литература

[1] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.

[2] Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

[3] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987.

[4] Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

[5] Чубариков В. Н. Кратные полные рациональные арифметические суммы от значений многочлена // Докл. РАН. 2018. Т. 478. №1. С. 22–24.

[6] Архипова Л. Г., Чубариков В. Н. Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. 2018. №5. С. 59–62.

Замечания о собственных функциях и собственных значениях d-оператора вещественных иррациональных порядков

Чуриков В.А. (Россия, Томск)
Томский государственный университет
vachurikov@list.ru

В d-анализе, т. е. дробном анализе на основе d-оператора, было показано, что в случае дробного интегродифференцирования для любого вещественного или комплексного порядка s имеются свои экспоненты, инвариантные относительно интегродифференцирования порядка s с точностью до сложения с полиномами интегродифференцирования [1].

Для каждого вещественного иррационального порядка $s > 0$ в d-анализе имеется бесконечное счётное множество экспонент (*экспоненциальное вырождение*), которые являются собственными функциями дифференцирования и интегрирования d-оператора с точностью до умножения на константу

$$d^{-s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(x) = \exp_s^{\{q|l\}}(x) + C_{-s}(x);$$
$$d^{s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(x) = \exp_s^{\{q|l\}}(x) + C_{s}(x).$$

Здесь $d^s x$ и $d^{-s}x$ – операторы порядка s дифференцирования и интегрирования соответственно; $C_{-s}(x)$, $C_s(x)$ – полиномы дифференцирования и интегрирования, которые являются произвольными функциями и могут быть приравнены к нулю $C_{-s}(x) = C_s(x) = 0$; $\exp_s^{\{q|l\}}(x)$ – экспоненты порядка s.

Все экспоненты иррационального порядка s представляются дробностепенными рядами

$$\exp_s^{\{q|l\}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)} = \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)} + \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{2s-q}}{\Gamma(2s-q+1)} + \frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{3s-q}}{\Gamma(3s-q+1)} + ...$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция, индексы q и l пробегают бесконечное множество натуральных чисел, и каждой их паре соответствует отдельная экспонента; $\alpha_s^{\{l\}}$ – *корни инвариантности*, или константы являющиеся корнями алгебраического *уравнения инвариантности* $(\alpha_s^{\{l\}})^s = 1$, которые будут [2]

$$\alpha_s^{\{l\}} = 1^{1/s} = \exp\left(\frac{i2\pi l}{s}\right) = \cos\left(\frac{2\pi l}{s}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi l}{s}\right).$$

Найдём собственные значения d-оператора подставив в экспоненты порядка s число 1 и найдём производную и первообразную порядка s

$$d^{-s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(x) = d^{-s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(1x) = 1^{s\{k\}} \exp_s^{\{q|l\}}(x);$$
$$d^{s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(x) = d^{s}x : \exp_s^{\{q|l\}}(1x) = 1^{-s\{k\}} \exp_s^{\{q|l\}}(x).$$

Коэффициенты $1^{s\{k\}}$ и $1^{-s\{k\}}$ образуют бесконечное счётное множество собственных значений экспонент операторов дифференцирования и интегрирования соответственно будут: $1^{\mp s\{k\}} = \exp(\mp i2\pi sk) = \cos(2\pi sk) \mp i\sin(2\pi sk)$ $(k = 0, 1, 2, 3, ...)$.

Исходя из полученных данных, сформулируем утверждение.

Теорема. *Собственными функциями d-оператора дробного дифференцирования и d-оператора дробного интегрирования вещественного иррационального порядка s, с точностью до сложения с константами дифференцирования и интегрирования $(C_{-s}(x) = C_s(x) = 0)$, является бесконечное счётное множество экспонент $\exp_s^{\{q|l\}}(x)$ порядка s, а собственными значениями для каждой экспоненты является бесконечное счётное множество комплексных* *чисел $1^{s\{k\}}$ для оператора дифференцирования и $1^{-s\{k\}}$ для оператора интегрирования, модули которых* $|1^{-s\{k\}}| = |1^{s\{k\}}| = 1$.

Получили, что все собственные значения d-оператора дробного дифференцирования (интегрирования) всех собственных функций оператора образуют точечный спектр, в котором каждое собственное значение появляется бесконечное счётное множество раз, т. е. спектр является бесконечно вырожденным для каждого собственного значения.

Корни инвариантности $\alpha_s^{\{l\}}$ и собственные значения $1^{\mp s\{k\}}$ для l=k связаны равенством $(\alpha_s^{\{l\}})^s = (1^{\mp s\{k\}})^{1/s}$, а для l=0 и k=0 будет $\alpha_s^{\{0\}} = 1^{\{0\}} = 1$.

Литература

[1] Чуриков В. А., Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. Томск: Изд-во ТПУ, 2011.

[2] Чуриков В. А., Экспоненциальное вырождение в случае нецелочисленных порядков в локальном дробном анализе на основе d-оператора // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322. №2. С. 29–33.

Аналитическая классификация полугиперболических отображений

Шайхуллина П.А. (Россия, Челябинск)
Челябинский государственный университет
fominapa@gmail.com

Росток голоморфного отображения $F : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ будем называть *полугиперболическим*, если один из его мультипликаторов — единичный, а второй — гиперболический: $F(x, y) = (x + ..., \Lambda y + ...)$, где $|\Lambda| \neq 0, 1$. В частности, отображение $F_\lambda : (x, y) \mapsto (\frac{x}{1-x}, e^\lambda y)$, где $Re\lambda > 0$, является полугиперболическим.

Определение 1. Два ростка $\mathcal{F}, \mathcal{F}' : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ будем называть строго аналитически (формально) эквивалентными, если существует голоморфная (формальная) замена координат $H : (x, y) \mapsto (x + o(x^2), y + o(x))$, сопрягающая их: $H \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}' \circ H$.

Пусть $\mathbf{F}_\lambda$ — класс ростков голоморфных отображений, строго формально эквивалентных ростку F_λ. Мы ограничимся исследованием ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$. В работе [1] была доказана теорема о формальной нормализации ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$: существует полуформальная нормализующая замена $\mathcal{H}$, сопрягающая росток F с F_λ. Эта замена $\mathcal{H}$ является формальным рядом по переменной «x» с голоморфными по «y» коэффициентами. При этом $\forall N \in \mathbb{N}$ если $\mathcal{H}_N$ — частичная сумма ряда $\mathcal{H}$, то $\mathcal{H}_N$ голоморфна и переводит росток F в росток $\mathcal{F}_N$, такой, что: $\mathcal{F}_N(x, y) = F_\lambda(x, y) + O(x^N)$ при $x \to 0$.

Аналитическую нормализацию удобнее производить в координатах ($\xi = -\frac{1}{x}, z = y$). В этих координатах росток $\mathcal{F}_N$ имеет вид

$$\tilde{F}_N(\xi, z) = F_0(\xi, z) + (\Delta_1(\xi, z), \Delta_2(\xi, z))$$

где $F_0 = (\xi + 1, \Lambda z)$, $\Lambda = e^\lambda$, $\Delta_1(\xi, z) = O(\xi^{-N+2})$, $\Delta_2(\xi, z) = O(\xi^{-N+2})$ при $|\xi| \to \infty$.

Определение 2. Пусть область $S^+_{R\delta\varepsilon}$ ($S^-_{R\delta\varepsilon}$) есть прямое произведение области $\{\xi : |\xi| \geq R, -\delta < arg(\xi) < \pi - \delta, Re\xi \geq -R - 1\}$ (соответственно $\{\xi : |\xi| \geq R, -\pi + \delta < arg(\xi) < \delta, Re\xi \geq -R - 1\}$) на круг $\{|z| < \varepsilon\}$. Будем называть их правой верхней (правой нижней) секториальной областью.

Определение 3. Пусть область $S^+_{R\delta\varepsilon L}$ ($S^-_{R\delta\varepsilon L}$) есть прямое произведение области $\{\xi : \delta < arg(\xi) < \pi + \delta, Re\xi \leq -R\}$ (соответственно $\{\xi : -\pi - \delta < arg(\xi) < -\delta, Re\xi \leq -R\}$) на круг $\{|z| < \varepsilon\}$. Будем называть их левой верхней (нижней) секториальной областью.

В работе [2] для отображения $\widetilde{F}_N$ во всех секториальных областях были построены секториальные аналитические нормализующие преобразования вида $H_N(\xi, z) = (\xi + h_N(\xi, z), z + g_N(\xi, z))$ с условием нормировки $h_N, g_N \to 0$, при $Im\xi \to \pm\infty$ и доказана их единственность при выполнении условия нормировки. Отметим, что из построений [2] можно получить существенно более сильные оценки:

$$h_N(\xi, z) = O(\xi^{-N+5}),\ g_N(\xi, z) = O(\xi^{-N+5}),\ |\xi| \to \infty.$$

Лемма. *Формальное нормализующее отображение $\tilde{\mathcal{H}}$ является асимптотическим для голоморфных секториальных нормализующих отображений.*

Символами H_{R-}, H_{R+}, H_{L-}, H_{L+} будем обозначать секториальные нормализующие преобразования в областях $S^-_{R\delta\varepsilon}$, $S^+_{R\delta\varepsilon}$, $S^-_{R\delta\varepsilon L}$ и $S^+_{R\delta\varepsilon L}$ соответственно.

Определение 4. Отображения $\Phi_R = H_{R-} \circ H^{-1}_{R+}$, $\Phi_L = H_{L-} \circ H^{-1}_{L+}$, $\Phi_+ = H_{R+} \circ H^{-1}_{L+}$ и $\Phi_- = H_{R-} \circ H^{-1}_{L-}$ с естественными областями определения будем называть функциями перехода.

Рассмотрим отображение $J(\xi, z) \to (t, \tau)$, действующее по правилу $(t = e^{2\pi i\xi}, \tau = ze^{-\lambda\xi})$. В координатах (t, τ) функции перехода выглядят следующим образом:

$$\varphi_\pm(t, \tau) = (t\alpha_\pm(t, \tau), \tau\beta_\pm(t, \tau)),\ \varphi_R(t, \tau) = (t\alpha_R(\tau), \tau\beta_R(\tau)),\ \varphi_L(t, \tau) = (t, \tau + c),\ c \in \mathbb{C}.$$

Определение 5. Построенный выше набор ($\alpha_\pm$, $\beta_\pm$, α_R, β_R, c) будем называть набором функциональных инвариантов ростка $\mathcal{F}$.

Теорема. *Для строгой аналитической эквивалентности ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$ необходимо и достаточно совпадения их наборов функциональных инвариантов.*

Литература

[1] Шайхуллина П. А. Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. №4. С. 79–90.

[2] Воронин С. М., Фомина П. А. Секториальная нормализация полугиперболических отображений // Вестник ЧелГУ. 2013. №16. С. 94–113.

К вопросу о возмущении линейного уравнения двумя малыми линейными слагаемыми

Шаманаев П.А. (Россия, Саранск)

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

korspa@yandex.ru

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассматривается задача о нахождении решений линейного уравнения с возмущением в виде двух малых линейных слагаемых

$$Bx = h + \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2, \tag{1}$$

где B, A_1 и A_2 – плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2, ε_1, ε_2 – малые вещественные параметры.

Предполагается, что оператор-функция $B - \varepsilon_1 A_1 - \varepsilon_2 A_2$ имеет полный обобщённый жорданов набор, определённый согласно работе [1]. При этом для элемента φ_k существуют присоединённые элементы $\varphi_k^{(i,j)}$ для всех пар $(i,\ j)$ для которых $i + j \leqslant p_k$, $k = 1, ..., n$. Здесь p_k – неотрицательные целые числа.

Показывается, что при достаточно малых не равных нулю ε_1 и ε_2 уравнение (1) имеет $(p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_n + 1)$ решений, имеющих особенность в точке $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$=$(0,\ 0)$. Решения уравнения (1) строятся в виде линейной комбинации элементов жорданова набора и дополнительного слагаемого, аналитически зависящего от ε_1 и ε_2.

Подход к решению этой задачи основывается на развитии методов теории ветвления, изложенных в работе [2]. В частности, для оператора B вводится обобщённый регуляризатор Шмидта, представляющий собой вообще говоря многозначный оператор. Далее исходная задача сводится к решению $(p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_n + 1)$ линейных уравнений и показывается, что каждое из них имеет единственное решение. В ходе решения поставленной задачи существенным образом используется жорданов набор для сопряжённой оператор-функции $B^* - \varepsilon_1 A_1^* - \varepsilon_2 A_2^*$.

Полученный результат может быть применен для отыскания периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде двух малых линейных слагаемых и линейных однородных дифференциальных уравнений с одним малым параметром.

Литература

[1] Шаманаев П. А. О некоторых обобщениях жордановых наборов линейных оператор-функций, зависящих от двух малых параметров [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). Саранск: СВМО, 2017. С. 511–516. Режим доступа: http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper69.pdf. – Дата обращения: 02.05.2018.

[2] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1964.

Об устойчивости по части переменных положения равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений в критическом случае

Шаманаев П.А. (Россия, Саранск)
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
korspa@yandex.ru

Язовцева О.С. (Россия, Саранск)
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
kurinaos@gmail.com

В работе исследуется задача об устойчивости по части переменных положения равновесия нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае [1]-[2]. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \tag{1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица,

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x), \\ \dots, \\ P_n(x) \end{pmatrix}, \; P_j(x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_{p_j} x^{p_j}, \; x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \dots x_n^{p_{jn}}, \; \sigma \geq 2, \; |p_j| = p_{j1} + \dots + p_{jn};$$

$p_j = (p_{j1}, ...p_{jn})$, и ее линейное приближение

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{2}$$

Для элементов фундаментальной матрицы системы (2) справедливы оценки [3]

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq De^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq De^{(\alpha_i - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \leq t_0, \quad j = \overline{1, n},$$

где β_i принимает максимальное, а α_i – минимальное значение из чисел $\Lambda_1, ..., \Lambda_r$ – вещественных частей собственных значений по тем индексам j, для которых $y_{ij}(t) \neq 0$, причем

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < ... < \Lambda_r, \quad \Lambda_r \leq 0.$$

Сформулируем теорему 3.2 из работы [3] в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть геометрические кратности собственных значений матрицы A с нулевыми вещественные частями равны 1. Тогда, если выполняются неравенства*

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \alpha_i, i \in M_0, \tag{3}$$

$$p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < \beta_k, k \in N \setminus M_0, \tag{4}$$

по всем наборам $(p_{j1}, ..., p_{jn})$ *таким, что* $d_{p_j} \neq 0, j = \overline{1, n}$, *то нулевое решение системы (1)*
1) асимптотически устойчиво по тем компонентам $i \in M_0$, *для которых* $\beta_i < 0$;
2) устойчиво по тем компонентам $i \in M_0$, *для которых* $\beta_i = 0$.

Пример 1. Рассмотрим систему, описывающую кинетическую модель реакции образования амида уксусной кислоты:

$$\begin{cases} \dot{c_1} = -k_1 c_1 c_2 \\ \dot{c_2} = -k_1 c_1 c_2 \\ \dot{c_3} = -k_2 c_3 + k_1 c_1 c_2 \\ \dot{c_4} = k_2 c_3 \\ \dot{c_5} = k_2 c_3 \end{cases}, \tag{5}$$

где $c_i \geq 0$, $i = \overline{1, 5}$, – концентрации уксусной кислоты, аммиака, ацетата аммония, амида уксусной кислоты и воды соответственно; $k_j > 0$, $j = \overline{1, 3}$, – скорости стадий химического превращения.

Данная система имеет два семейства положений равновесия: $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$ и $(c_1^*, 0, 0, c_4^*, c_5^*)$. Исследуем фиксированное положение равновесия первого вида при условии $c_2 > c_1$.

Учитывая соотношения

$$c_2 = c_1 + b_1, \quad c_5 = c_4 + b_2, \tag{6}$$

где $b_1 \in R^1_+$, $b_2 \in R^1$, и, вводя обозначения $c_1 = x_1, c_3 = x_2, c_4 = x_3$, понизим порядок системы (5). Получим

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -b_1 k_1 x_1 - k_1 x_1^2 \\ \dot{x_2} = -b_1 k_1 x_1 - k_1 x_1^2 + k_2 x_2 \\ \dot{x_3} = k_2 x_2 \end{cases}. \tag{7}$$

Приравнивая правую часть к нулю и учитывая, что $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, 3}$, находим, что положения равновесия образуют множество точек в пространстве R^3 вида

$$x^* = (0, 0, x_3),$$

где $x_3 \in R^1_+$.

Фиксируя некоторое x_3^*, исследуем на устойчивость по части переменных ненулевое положение равновесия $x^* = (0, 0, x_3^*)$, а также асимптотику решений системы (7) в окрестности этого положения равновесия. Поскольку правая часть системы не зависит от x_3, то при переносе положения равновесия x^* в начало координат вид системы (7) не изменится. Таким образом задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального положения равновесия системы (7).

Вещественные части собственных значений матрицы линейного приближения системы (7) равны $\Lambda_1 = -b_1 k_1$, $\Lambda_2 = -k_2$, $\Lambda_3 = 0$ (критический случай по Ляпунову).

Определим α_i и β_i при $M_0 = N \equiv \{1, 2, 3\}$:

$$\alpha_1 = \beta_1 = -b_1 k_1,$$

$$\alpha_2 = -b_1 k_1, \quad \beta_2 = -k_2,$$

$$\alpha_3 = -b_1 k_1, \quad \beta_3 = 0.$$

Тогда условия теоремы 1 примут вид

$$2\beta_1 < \alpha_1, \quad 2\beta_1 < \alpha_2$$

и будут выполняться при условии $-b_1k_1 < -k_2$.

Из выполнения условий теоремы 1 с учетом переноса положения равновесия в начало координат можно сделать вывод, что исследуемое положение равновесия x^* системы (7) асимптотически устойчиво по переменным x_1 и x_2 и устойчиво по переменной x_3.

Таким образом, учитывая замену (6), каждое из положений равновесия вида $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$, где $c_2^*, c_3^*, c_4^* \in R_+^1$, системы (5)

1) асимптотически устойчиво по переменным c_1 и c_3;

2) устойчиво по переменным c_2, c_4 и c_5.

Заметим, что, так как выполняются условия теоремы 3.1 из работы [3], каждое из положений равновесия вида $(0, c_2^*, 0, c_4^*, c_5^*)$ системы (5) имеет асимптотическое равновесие по компонентам c_2, c_4 и c_5 [4].

Аналогичным способом исследуется на устойчивость по части переменных положение равновесия вида $(c_1^*, 0, 0, c_4^*, c_5^*)$, где $c_1^*, c_3^*, c_4^* \in R_+^1$ при условии $c_1 > c_2$. Каждое фиксированное положение равновесия вида $(c_1^*, 0, 0, c_4^*, c_5^*)$ системы (5)

1) асимптотически устойчиво по переменным c_2 и c_3;

2) имеет асимптотическое равновесие по компонентам c_1, c_4 и c_5.

Литература

[1] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966

[2] Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО. 2000. 300 с.

[3] Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19. №1. С. 102-–115.

[4] Язовцева О. С. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2017. №13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx

Интегрируемые динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия

Шамолин М.В. (Россия, Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В задачах динамики систем с тремя степенями свободы пространствами положений являются трехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного твердого тела-маятника (обобщенного сферического маятника) в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1], [2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2], [3].

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. В ряде случаев в системах с переменной диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией [1], [2], [3] и обобщают ранее рассмотренные.

Рассмотрим для примера следующую систему при $b \neq 0$ с достаточно гладкой правой частью на касательном расслоении $\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) z_1 z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases}$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0. \end{cases}$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Но рассматриваемая система обладает рядом симметрий, при некоторых условиях позволяющих снизить достаточное число трансцендентных первых интегралов до четырех.

Литература

[1] Shamolin M. V. Integrability according to Jacobi in the Problem of Motion of a Four-Dimensional Solid in a Resistant Medium // Doklady Physics. 2000. V. 45. No. 11. P. 632–634.

[2] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Доклады РАН. 2002. Т. 383. № 5. С. 635–637.

[3] Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.

Лапласиан и волновое уравнение на многогранниках

Шафаревич А.И. (Россия, Москва)
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
shafarev@yahoo.com

Рассматриваются лапласианы и соответствующие волновые уравнения на двумерных многогранниках. Лапласианы задаются краевыми условиями в вершинах и зависят от параметров – элементов унитарной матрицы, задающей краевые условия. Мы описываем пространства гармонических функций на компактных многогранниках в терминах задачи Миттаг – Леффлера на соответствующей римановой поверхности. Для простейших многогранников мы описываем решение задачи Коши для волнового уравнения и лагранжевы многообразия, задающие фронты локализованных асимптотических решений.

Дискретный и непрерывный спектр в задаче о колебаниях струны М. Г. Крейна[48]

Шейпак И. А. (Россия, Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова

Изучается спектральная задача

$$-y'' = \lambda \rho y,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

с весовой функцией ρ, являющейся обобщённой производной кусочно-постоянной функции P, т.е. $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \delta(x - x_k)$. В случае самоподобной функции P получены условия (в терминах чисел m_k и x_k), гарантирующие дискретность спектра этой задачи или наличие непрерывного спектра. Задача решается в терминах описания мультипликаторов в пространствах Соболева с негативным индексом гладкости.

Мультипликаторы в пространствах Соболева и их приложения в теории дифференциальных операторов[49]

Шкаликов А. А. (Россия, Москва)
shkalikov@mi.ras.ru

В докладе будут представлены последние результаты об описании пространств мультипликаторов действующих из одного пространства бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в другое пространство $H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)$. Основное внимание будет уделено случаю, когда индексы гладкости этих пространств разного знака, т.е. $s, t \geqslant 0$. Соответствующее пространство мультипликаторов состоит из распределений u, таких, что для всех $\varphi \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ произведение $\varphi \cdot u$ корректно определено и принадлежит пространству $H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)$. В случае, когда $p \leqslant q$ и выполнено одно из условий

$$s \geqslant t \geqslant 0,\ s > n/p \quad \text{или} \quad t \geqslant s \geqslant 0,\ t > n/q' \quad (\text{где } 1/q + 1/q' = 1),$$

рассматриваемые пространства мультипликаторов удается описать явно, а именно

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H_{q,\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

где $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$ — пространства равномерно локализованных бесселевых потенциалов.

Для важного случая $s = t < n/\max(p, q')$ доказаны двусторонние вложения

$$H_{r_1,\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] \subset H_{r_2,\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

где числа $r_1 > r_2 > 1$ указываются явно.

Полученные результаты имеют важные приложения в теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями (обыкновенных и с частными производными), о чем будет рассказано в докладе. Доклад основан на совместных работах с А.А. Беляевым.

[48]Работа выполнена при поддержке РНФ, грант №17-11-01215.
[49]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ № 17-11-01215.

О нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией[50]

Щелчков К.А. (Россия, Ижевск)
Удмуртский государственный университет
incognitobox@mail.ru

Рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц, описываемая системой вида $\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad u \in U, \quad v \in V$, где $U = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^k$ — множество значений управления преследователя, $V \subset \mathbb{R}^k$ — компакт — множество значений управления убегающего. Целью преследователя является приведение траектории системы в любую наперед заданную окрестность нуля за конечное время. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию. Убегающий использует кусочно-программную стратегию. При этом, для построения управлений, игроки используют информацию о фазовых координатах в точках разбиения временного интервала игры. Получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит поимка. Кроме того, доказано, что, независимо от действий убегающего, время, необходимое преследователю для перевода системы в ноль, стремится к нулю с приближением начального положения к нулю.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)$ образует положительный базис и*

$$-g(0,V) \subset Int\,(co\{f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)\})\,.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ такие, что для любой точки $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ в игре $\Gamma(x_0,T)$ происходит поимка.

Литература

[1] Петров Н. Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.

[2] Щелчков К. А. К нелинейной задаче преследования с дискретным управлением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 389–395.

[50] Работа поддержана грантом РФФИ № 17-38-50118-мол_нр.

Galois modularity as foundation of highly efficient exact algorithms in Classical Mechanics

Semjon Adlaj (Russia, Moscow)
CC FRC “Informatics and Control” of RAS
SemjonAdlaj@gmail.com

Evariste Galois' last letter (written on the eve of his murder May 30, 1832) [1], eloquently described by Hermann Weyl as “the most substantial piece of writing in the whole literature of mankind”, contained explicit constructions for depressing the degree of the modular equation of (prime) levels 5, 7 and 11. In particular, the (Galois) group the modular equation of level 5 (which degree is depressable from 6 to 5) coincides with the group of the (general) quintic. Nonetheless, and while Galois' contribution to formulating necessary and sufficient condition for solving algebraic equations via radicals is widely known, Galois' decisive contribution to actually solving the quintic is barely (if at all) recognized. And, in fact, Galois must be solely and entirely credited for bringing to light the tight intertwinement of calculating the roots of the modular equation of level p with calculating the p-torsin points on a corresponding elliptic curve [2,3,4].

Even the most basic problems of dynamics such are concerning the motion of a simple pendulum or a free rigid body [5,6,7], or a static problem, concerning tether equilibria in linear parallel force field [8,9], cannot be exhaustively solved without determining the (full) structure of the group of transformations, which carry out a solution to another. And the construction of highly efficient exact algorithms in Classical Mechanics necessarily rely upon highly efficient arithmetic on elliptic curves, as well as, efficient calculation of complete elliptic integrals of all (three) kinds [10].

References

[1] Galois É. Lettre de Galois ‘a M. Auguste Chevalier // Journal des Mathématiques Pures et Appliquées XI, 1846: 408-415.

[2] Adlaj S. *Modular polynomial symmetries.* Polynomial Computer Algebra International Conference, St. Petersburg, Russia, 2014, April 14-19: 4-5.

[3] Adlaj S. Torsion points on elliptic curves and modular polynomial symmetries. Presented on the joined MSU-CCRAS Computer Algebra Seminar on September 24, 2014. Available at `http://www.ccas.ru/sabramov/seminar/lib/exe/fetch.php?media=adlaj140924.pdf`.

[4] Adlaj S. *Multiplication and division on elliptic curves, torsion points and roots of modular equations.* Available at `http://www.ccas.ru/depart/mechanics/TUMUS/Adlaj/ECCD.pdf`

[5] Adlaj S. *An analytic unifying formula of oscillatory and rotary motion of a simple pendulum* (dedicated to 70$^{\text{th}}$ birthday of Jan Jerzy Slawianowski) // Proceedings of International Conference “Geometry, Integrability, Mechanics and Quantization”, Varna, Bulgaria, 2014, June 6-11: 160-171.

[6] Adlaj S. *Dzhanibekov's flipping nut and Feynman's wobbling plate* // Polynomial Computer Algebra International Conference, St. Petersburg, Russia, 2016, April 18-23: 10-14.

[7] Adlaj S. *Torque free motion of a rigid body: from Feynman wobbling plate to Dzhanibekov flipping wingnut.* Available at `http://www.ccas.ru/depart/mechanics/TUMUS/Adlaj/FRBM.pdf`.

[8] Adlaj S. Tether equilibria in a linear parallel force field // 4th IYR Workshop on Geometry, Mechanics and Control. Ghent, Belgium (2010). Available at `http://www.wgmc.ugent.be/adlaj.pdf(23pages)`.

[9] Adlaj S. Mechanical interpretation of negative and imaginary tension of a tether in a linear parallel force field // Selected Works of the International Scientific Conference on Mechanics "Sixth Polyakhov Readings", Saint-Petersburg (2012): 13-18.

[10] Adlaj S. An arithmetic-geometric mean of a third kind! Available at `http://www.ccas.ru/depart/mechanics/TUMUS/Adlaj/GAGM.pdf`.

Determinant and trace of the Second Variation

A. Agrachev (SISSA, Trieste and MIAN, Moscow)

Second Variation is the Hessian of the cost for an optimal control problem at an extremal. If the extremal is regular, then Second Variation is a quadratic form on a Hilbert space defined by a symmetric operator $I + A$ where A is compact. In general, A is not a trace class operator, the series $\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{spec}A} |\lambda|$ diverges. We show however that the determinant of $I + A$ and the trace of A can be properly defined and computed. More precisely, let i_λ be the multiplicity of the eigenvalue λ. We prove that the sequences $\prod\limits_{\substack{\lambda\in\mathrm{spec}A\\|\lambda|\geqslant\varepsilon}} (1+\lambda)^{i_\lambda}$ and $\sum\limits_{\substack{\lambda\in\mathrm{spec}A\\|\lambda|\geqslant\varepsilon}} i_\lambda\lambda$ converge as $\varepsilon \to 0$ and we give explicit expressions for the limits in terms of "Jacobi fields" along the extremal. In the case of the least action principle for the harmonic oscillator these expressions give classical Euler identities:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\nu}{(\pi n)^2}\right) = \frac{\sin\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^2} = \frac{1}{6}.$$

Quantum adiabatic theorem in a semi-classial setting[51]

Anikin A. (Russia, Moscow)
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences
anikin83@inbox.ru

We consider a Cauchy problem for a one-dimensional Schrodinger equation in semi-classical approximation (with respect to the small parameter h). The potential is assumed to vary slowly with respect to another small parameter ϵ. Let us take an eigenfunction of the Schrodinger operator for time $t = 0$ generated by a closed trajectory of the classical Hamiltonian. We take it as an initial condition for the Cauchy problem and study the evolution of the solution for times $t \in [0, \varepsilon]$. Using the method of Maslov's canonical operator [1] we estimate its closeness to the eigenfunctions of the Schrodinger operator for time t. This result is a semi-classical analog of the fact that the classical action is an adiabatic invariant [2].

References

[1] Maslov V.P, Fedoryuk M.V. Semiclassical Approximation for the Equations of Quantum Mechanics. Moscow: Nauka. 1976.

[2] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Springer. 2006.

Regularity issues in the obstacle-type problems: a short survey

Apushkinskaya D. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
darya@math.uni-sb.de

Many problems in physics, biology, finance, industry and other areas can be described by partial differential equations that exibit apriori unknown sets such as moving boundaries, interfaces, etc. The study of such sets, also known as free boundaries, often plays central role in the understanding of these problems.

Observe that the free boundary is not completely free. For a well posed problem the free boundary is determined as a set of points where some conditions on a solution are satisfied. The only problem is that this set of points is not a-priori known (it is free in this sense).

In the modern theory of free boundary problems one can identify three main research areas: *regularity properties of solutions and free boundaries, issues concerning existence or nonexistence of solutions* and *estimates the deviation of an approximate solution from the exact solution.* The regularity topics belong to the mainstream of investigations. It is due to the fact that most possible

[51] This work was done together with S. Dobrokhotov, S. Kuksin and A. Neishtadt, and was supported by RFBR-CRNS Grant No. 17-51-150006.

'bad things' in free boundsry problems may happen on free boundaries only. Therefore, to get an information about behavior of the free boundaries is difficult and extremly interesting part of investigation

In this talk we present a short survey on the special class of free boundary problems, which is called the obstacle-type problems. Following Hans Lewy, we can say that obstacle-type problems occur when the behavior of the variables changes discontinuosly across one of its values. The exact mathematical formulation is as follows: to find a function u and a set $\Omega(u)$ satisfying

$$\begin{cases} \Delta u - \partial_t u = f(x,t,u) & \text{in} \quad \Omega(u)\cap\mathcal{E}\subset\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}, \\ \mathcal{B}(u,Du)=0 & \text{on} \quad \partial\Omega(u)\cap\mathcal{E}, \\ u=\phi_1 & \text{on} \quad \partial_{par}\mathcal{E}. \end{cases} \tag{1}$$

The first equation in (1) is understood in weak (distributional) sense, while the function f is assumed to be bounded and discontinuous. It is allowed that f have a jump discontinuity across the surface where u vanishes. The discontinuity set is a-priori unknown and, consequently, *"free"*.

We discuss the different local regularity aspects arising in obstacle-type problems such as the optimal regularity of solutions, the study of blow-ups, and the regularity of the free boundary.

We emphasize that for problems like (1) the most part of the classical parabolic (elliptic) techniques is not applicable. The reason of this is an absence of any a-priori information about regularity of the free boundary. To find such an information is a part of the problem. So, we have to combine the ideas from calculus of variations with geometrical observations, rescaling and blow-up techniques, analysis of caloric and harmonic functions, etc.

A formula for a product of hypergeometric functions and it's applications[52]

Artamonov D.V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University, RANEPA
artamonov.dmitri@gmail.com

The definition of a hypergeometric Γ-series is the following Let $B=\mathbb{Z}(1,-1,-1,1)$ be a lattice, let $\gamma\in\mathbb{Z}^4$ be a fixed vector. We define the hypergeomtric Γ-series as follows

$$F_{\gamma,B}(z)=\sum_{b\in B}\frac{z^{b+\gamma}}{\Gamma(b+\gamma+1)},$$

where $z=(z_1,\dots,z_N)$ and

$$z^{b+\gamma}:=\prod_{i=1}^{N}z_i^{b_i+\gamma_i},\qquad \Gamma(b+\gamma+1):=\prod_{i=1}^{N}\Gamma(b_i+\gamma_i+1).$$

In the talk the case $N=4$, $B=\mathbb{Z}<(1,-1,-1,1)>$ is considered. The series satisfies the Gelfand-Kapranov-Zelevinsky system

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_4}-\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial z_3}\right)F_{\gamma,B}=0,$$

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}=(\gamma_1+\gamma_2)F,\qquad z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial}{\partial z_3}=(\gamma_1+\gamma_3)F,$$

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1}-z_4\frac{\partial}{\partial z_4}=(\gamma_1-\gamma_4)F.$$

In the talk we present a formula for the product of two Γ-series of the following type

[52]The work was supported by RFBR-16-51-150005

$$F_{\gamma,B}(z)F_{\delta,B}(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} X_p(z_1z_4 - z_2z_3)^p F_{\theta^p,B}(z), \qquad X_p \in \mathbb{C}.$$

The GKZ system plays a key role in derivation of explicit formulas for the coefficients X_p and parameters θ^p in the right hand side. The considered function $F_{\gamma,B}(z)$ can be expressed through the Gauss hypergeometric function $F_{2,1}$ and the presented formula gives a new formula for the product of two Gauss hypergeometric function $F_{2,1}$.

$$F_{2,1}(a,b,c;x)F_{2,1}(d,e,f;x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} X_p(1-z)^p F_{2,1}(\alpha^p,\beta^p,\gamma^p;x), \qquad x \in \mathbb{C}.$$

In the talk we discuss an application of the presented formula. It allows to obtain explicit formulas for the Clebsh-Gordan coefficients than give an explicit decomposition of a symmetric product of two irreducible representations of a Lie algebra gl_3 into a sum of irreducible representations.

References

[1] I.M. Gel'fand, M.I. Graev, V.S. Retakh, General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type // Russian Math. Surveys. 1992. V. 47. No. 4. P. 1—88.

Finite group actions that admit no equivariant simple singularities

E. Astashov (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
ast-ea@yandex.ru

Given two linear representations of a group G on $\mathbb{C}^n$ and on $\mathbb{C}$, we call a function $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *equivariant* with respect to the given representations if for all $\lambda \in G$, $z \in \mathbb{C}^n$ the condition $f(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot f(z)$ holds. Similar definitions can be given for holomorphic function germs at 0 and for zero-preserving biholomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$ and their germs at 0.

The group $\mathcal{D}_n^{GG}$ of equivariant biholomorphic germs $\Phi\colon (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ acts on the space $\mathcal{O}_n^{GG}$ of equivariant function germs $f\colon (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$. The space $\mathcal{O}_n^{GG}$ is split into orbits of this action. The same is true for all spaces $j_r\mathcal{O}_n^{GG}$ of r-jets at 0 of germs from $\mathcal{O}_n^{GG}$. The orbit $\mathcal{D}_n^{GG}(j_rg) \subset j_r\mathcal{O}_n^{GG}$ is said to be *adjacent* to the orbit $\mathcal{D}_n^{GG}(j_rf)$ if any neighborhood of some (and therefore any) point in $\mathcal{D}_n^{GG}(j_rf)$ intersects with $\mathcal{D}_n^{GG}(j_rg)$.

A germ $f \in \mathcal{O}_n^{GG}$ is called *equivariant simple* with respect to the given representations of the group G on the source and target if for all $r \in \mathbb{N}$ the orbit $\mathcal{D}_n^{GG}(j_rf) \subset j_r\mathcal{O}_n^{GG}$ has only a finite number of adjacent orbits, and this number is bounded from above by a constant M independent of r.

Two germs $f,g \in \mathcal{O}_n^{GG}$ are called *equivariant right equivalent* if there exists a germ $\Phi \in \mathcal{D}_n^{GG}$ such that $g = f \circ \Phi$. There exists a general problem to classify all equivariant simple function germs in $\mathcal{O}_n^{GG}$ with a critical point at $0 \in \mathbb{C}^n$ (for a given abelian group G and a pair of its linear representations on $\mathbb{C}^n$ and on $\mathbb{C}$) up to this equivalence relation. This problem is a natural generalization of a similar problem for the non-equivariant case that has been solved by V.I.Arnold in [1]. Particular cases of the general problem for $G = \mathbb{Z}_2$ are treated in [2] and [3].

There exist pairs of finite abelian group actions on $\mathbb{C}^n$ and on $\mathbb{C}$ that admit no equivariant simple singularities. Classification of all such pairs is an important step in the solution of the general problem described above. In the talk I will present some recent advances related to this problem. In particular, for all cyclic groups $G = \mathbb{Z}_m$ all such pairs of actions are described for the case $n = 2$.. Some of the presented results can be found in [4], [5].

References

[1] V. I. Arnold. Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities // Functional Anal. Appl., 6:4 (1972), pp. 254–272.

[2] V. I. Arnold. Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Russian Math. Surveys, 34:1 (1979), pp. 1–42.

[3] W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // Journal of Geometry and Physics, 71 (2013), 58–72.

[4] E. A. Astashov. On the classification of singularities that are equivariant simple with respect to representations of cyclic groups (in Russian) // Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 26:2 (2016), pp. 155–159.

[5] E. A. Astashov. On the classification of bivariate function germs singularities that are equivariant simple with respect to the cyclic group of order three (in Russian) // Bulletin of Samara University. Natural sciences, 3-4 (2016), pp. 7–13.

Behavior of Blow-up and Kneser Solutions to Higher-Order Emden–Fowler Type Equations Depending on the Spectra of Related Linear Operators

Astashova I.V. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University,
Plekhanov Russian University of Economics
ast@diffiety.ac.ru

Consider the equation

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \operatorname{sign} y, \; n > 4, \; k > 1. \tag{1}$$

A new result is proved on asymptotic behavior of blow-up and Kneser (see [1, Definition 13.1] solutions to this equation.

Theorem 1. *Suppose $p \in C(\mathbf{R}^{n+1}) \bigcap Lip_{y_0,\dots,y_{n-1}}(\mathbf{R}^n)$ and $p \to p_0 > 0$ as $x \to x^*, y_0 \to \infty, \dots, y_{n-1} \to \infty$. Then for any integer $n > 4$ there exists $K > 1$ such that for any real $k \in (1, K)$, any solution to equation (1) tending to $+\infty$ as $x \to x^* - 0$ has power-law asymptotic behavior, namely*

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)) \tag{2}$$

with

$$\alpha = \frac{n}{k-1}, \quad C^{k-1} = \frac{1}{p_0} \prod_{j=0}^{n-1} (j + \alpha)\,. \tag{3}$$

Theorem 2. *Suppose $p \in C(\mathbf{R}^{n+1}) \bigcap Lip_{y_0,\dots,y_{n-1}}(\mathbf{R}^n)$ and $(-1)^n p \to p_0 > 0$ as $x \to \infty$, $y_0 \to 0, \dots, y_{n-1} \to 0$. Then for any integer $n > 4$ there exists $K > 1$ such that all Kneser solutions to equation (1) with any real $k \in (1, K)$ tend to zero with power-law asymptotic behavior, namely*

$$y(x) = C(x - x^*)^{-\alpha}(1 + o(1)), \; x \to \infty, \tag{4}$$

with some x^* and α, C given by (3).

To prove these results we reduce equation (1) to a nonlinear dynamical system, linearize it in a neighborhood of its singular point, and investigate the related eigenvalues. It appears that asymptotic properties of equation (1) depend on the existence of the special types of these eigenvalues. See, for example, [2, (**5**)], [5], [6]. Theorem 1 for the case $p \equiv p_0 > 0$ is proved in [6]. Earlier it was proved that for $n = 2$ (see [1])and for $n = 3, 4$ all blow-up and Kneser solutions to equation (1) have the power-law asymptotic behavior (see [2]). It was also proved for equation (1) with $(-1)^n p \equiv p_0 > 0$ for sufficiently large n (see [3] and for $n = 12, 13, 14$ (see [5]), $n = 15$ (see [7]), that there exists $k > 1$ such that equation (1) has a solution with non-power-law behavior, namely

$$y(x) = (x - x^*)^{-\alpha} \; h(\log{(x - x^*)}), \tag{5}$$

where h is a positive periodic non-constant function on $\mathbf{R}$.

References

[1] Kiguradze I. T., Chanturia T. A. Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations. Kluver Academic Publishers, Dordreht-Boston-London. 1993.

[2] I. Astashova. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations (in Russian), in: I. V. Astashova (ed.), Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, UNITY-DANA, Moscow (2012), 22–290.

[3] V. A. Kozlov. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations, // Ark. Mat. **37** (1999), No 2, 305–322.

[4] I. Astashova. On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations, *Advances in Difference Equations. Springer Open Journal.* (2013), No 2013:220. 1–15.

[5] I. Astashova. On Kiguradze's problem on power-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type differential equations, //Georgian Mathematical Journal, 2017, 24(2), 185–191.

[6] Vasiljev M. On positive solutions with non-power-law behavior to the 15th-order Emden–Fowler type differential equation // Materials of the International Youth Scientific Forum "Lomonosov-2018 DVD-ROM. ISBN 978-5-317-05800-5, "MAKS Press MSU, v 1, 1 p.

Control and inverse problems for differential equations on graphs

Sergei Avdonin (USA, Fairbanks)
University of Alaska Fairbanks
s.avdonin@alaska.edu

Quantum graphs are metric graphs with differential equations defined on the edges. Recent interest in control and inverse problems for quantum graphs is motivated by applications to important problems of classical and quantum physics, chemistry, biology, and engineering. For trees, i.e. graphs without cycles, various types of inverse and control problems were discussed in the literature (see, e.g. [1],[2] and references therein) and almost nothing (with several exceptions [3],[4],[5]) was done for graphs with cycles. In this talk we describe exact controllability and identifiability results for the wave, heat and Schrödinger equations on general compact graphs.

Let $\Gamma = E \cup V$ be a finite compact connected metric graph, where $E = \{e_j\}_{j=1}^N$ is a set of edges and $V = \{v_j\}_{j=1}^M$ is a set of vertices. We recall that a graph is called a *metric graph* if every edge $e_j \in E$ is identified with an interval of the real line with a positive length. Let the index of a vertex, $id(v)$, be the number of edges incident to it and $\partial\Gamma$ be the set of boundary vertices, i.e. $\partial\Gamma = \{v \in V | id(v) = 1\}$.

The metric graph Γ determines naturally the Hilbert space of square integrable functions $\mathcal{H} = L^2(\Gamma) = \{\phi = (\phi_j)_{j=1}^N, \phi_j \in L^2(e_j)\}$. We define the space $\mathcal{H}^1$ of continuous functions ϕ on Γ such that $\phi_j \in H^1(e_j)$ for every $e_j \in E$ and $\phi|_{\partial\Gamma} = 0$.

Let $q = (q_j)_{j=1}^N$ be a real valued function such that $q_j \in L^\infty(e_j)$. We consider the initial boundary value problem for the wave equation on the graph:

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \text{ in } \{\Gamma \setminus V\} \times (0,T) \tag{1}$$

$$\begin{array}{l} \sum_{e_j \in E(v)} \partial u_j(v,t) = 0 \ \text{ at each vertex } v \in V \setminus \partial\Gamma, \text{ and } t \in [0,T] \\ u(\cdot,t) \text{ is continuous at each vertex, for } t \in [0,T] \end{array} \tag{2}$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Gamma \times [0,T], \quad u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{H}^1, \ u_t|_{t=0} = u_1 \in \mathcal{H} \text{ in } \Gamma. \tag{3}$$

In (2) and below $\partial u_j(v,t)$ denotes the derivative of u at the vertex v taken along the edge e_j in the direction outwards the vertex and $E(v)$ is the set of all edges incident to v.

We prove that a proper choice of observations in the form of directional derivatives of u at some boundary and internal vertices guarantees observability of the system. More exactly, we specify subsets $V^* \subset V$ and $E^*(v) \subset E(v)$ such that the following statement is true.

Theorem 1. *For sufficiently large T there are exist positive constants c and C such that for any $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}$, the solution u of the system (1)–(3) satisfies the (observability) inequalities*

$$c\,\left[\|u_0\|^2_{\mathcal{H}^1} + \|u_1\|^2_{\mathcal{H}}\right] \le \int_0^T \left[\sum_{v\in V^*}\sum_{e_j\in E^*(v)} |\partial u_j(v,t)|^2\right] dt \le C\,\left[\|u_0\|^2_{\mathcal{H}^1} + \|u_1\|^2_{\mathcal{H}}\right].$$

We describe the observability sets (of the vertices V^* and directions E^*) and give estimates of the observability time T. The corresponding exact controllability result can be formulated using the standard duality argument.

The inverse problem consists of reconstructing the graph's topology, the lengths of all edges and the functions q_j on them from the observations (directional derivatives of u) described in Theorem 1. The problem is solved using a new version of the leaf peeling method proposed for trees in [2]. We prove the uniqueness theorem and describe the constructive identification algorithm.

References

[1] Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E. J. P. G. Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Boston: Birkhäuser. 1994.

[2] Avdonin S., Kurasov P. Inverse problems for quantum trees // Inverse Problems and Imaging. 2008. Vol. 2. No. 1, P. 1–21.

[3] Avdonin S., Belinskiy B., Pandolfi L. Controllability of a nonhomogeneous string and ring under time dependent tension // Math. Model. Natur. Phenom. 2010. Vol. 5. No. 4. P. 4–31.

[4] Kurasov P. Inverse scattering for lasso graph // J. Math. Phys. 2013. Vol. 54. No. 4. 042103, 14 pp.

[5] Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs // Inverse Problems. 2015. Vol. 31. No. 9. 095007, 29 pp.

On robust versions of reachable sets for one-pulse controls

Artem Baklanov (Russia, Yekaterinburg)
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
International Institute for Applied Systems Analysis
baklanov@iiasa.ac.at

Alexander Chentsov (Russia, Yekaterinburg)
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
chentsov@imm.uran.ru

As the first approximation, dynamics of some objects can be described by a linear control system. Usually, it is assumed that controls comply with impulse or geometric constraints. Modeling of some real processes, e.g., rocket staging, implies not only impulse constraints, but also discontinuous coefficients at the control action. One reason for modeling is to study reachable (attainable) sets for a controlled object, i.e., the sets of all possible terminal states reachable at some fixed time by using admissible controls. In the presence of impulse constraints and discontinuous coefficients, reachable sets may not be robust with respect to small relaxations of phase constraints even in the case of linear systems. This motivates us to explore robust versions of reachable sets for linear control systems with discontinuous coefficients at the control action with 'impulsive structure'.

Due to the presence of discontinuous coefficients, we follow [1-3] to overcome mathematical difficulties connected with the product of discontinuous and generalized functions (representing impulsive control) for linear control systems. This approach uses an extension construction in the class of finitely-additive measures.

We study two formalizations (models) of one-pulse controls: controls with vanishingly small duration (Model 1) and instantaneous jumps ('pushes') that used in Model 2. Controls in Model 1 naturally generate constraints of asymptotic character with respect to their duration. An additional type of the constraints of asymptotic character (similar for both models) is due to a sequential relaxation of phase constraints. The main goal of the research is to study attraction sets, the asymptotic versions of reachable set, which are robust estimates of reachable sets given a potential relaxation of the phase constraints. In [4], we present our results. Namely, for both formalizations, we obtained attraction sets for constraints of asymptotic character given that the coefficient at the control is a piecewise continuous function. To illustrate the developed theoretical framework for both formalizations, we demonstrated examples of attraction sets for both models.

The reported study was partially supported by RFBR, research project No 16-01-00505 A.

References

[1] Berdyshev Y.I. and Chentsov A.G. Equivalence of regularizations in abstract problems with different classes of admissible controls // Cybernetics and Systems Analysis. 1998. Vol. 34. No 3. P.377–385.

[2] Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2011. Vol. 275. Suppl. 1. P.12–39.

[3] Chentsov A.G. and Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 291. No 1. P.279–298.

[4] Baklanov A., Chentsov A., and Savenkov I. On reachable sets for one-pulse controls under constraints of asymptotic character // Cybernetics and Physics. 2017. Vol. 6. No 4. P.166–173.

A piecewise smooth system having multidimensional Lorenz attractor[53]

Barabash N.V. (Russia, Nizhny Novgorod)
Volga state university of water transport
barabash_nikita@mail.ru

Belykh V.N. (Russia, Nizhny Novgorod)
Volga state university of water transport
belykh@unn.ru

We present an explicitly given multidimensional system of ODE glued from three smooth systems in the phase space. It is proven that this system flow generates the skew product map satisfying a condition for singularly hyperbolic attractor [1].

For example, in $4D$-case the flow of this glued system generates a Poincare map of the form

$$\begin{cases} \bar{x} = -1 - \gamma(|x|^{\nu} - 1) \\ \bar{y}_1 = -a + p_1(|x|^{\alpha_1} y_1 + a) \\ \bar{y}_2 = -a + p_2(|x|^{\alpha_2} y_2 + a) \end{cases} \qquad \text{for} \quad -1 \le x < 0,\ |y_{1,2}| \le a,$$

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 + \gamma(x^{\nu} - 1) \\ \bar{y}_1 = a + p_1(x^{\alpha_1} y_1 - a) \\ \bar{y}_2 = a + p_2(x^{\alpha_2} y_2 - a) \end{cases} \qquad \text{for} \quad 0 < x \le 1,\ |y_{1,2}| \le a.$$

We consider a nonlinear perturbation of this skew map leading to the attractor breakdown via infinite sequence of bifurcations corresponding to appearance of Smale horseshoes.

References

[1] Vladimir N. Belykh. Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 200, 2000.

[53]This work was supported by the RFBR (project 18-01-00556/18).

Multipliers in the scale of periodic Bessel potential spaces and singular perturbations of Laplacian powers on multidimensional torus

Belyaev A. A. (Russia, Khimki)
Lomonosov Moscow State University,
Peoples' Friendship University of Russia
alexei.a.belyaev@gmail.com

The main objective of this talk is to show how a constructive description of multipliers, acting in the scale of Bessel potential spaces defined on the n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$, allows us to investigate spectral properties for singular perturbations of Laplacian powers.

Let $s,\ t \in \mathbb{R},\ p,\ q > 1$. Then a distribution $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ is said to be a multiplier from the Bessel potential space $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ to the Bessel potential space $H^t_q(\mathbb{R}^n)$ (which we shall denote by $u \in M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$) iff $u \in H^t_{q,\,loc}(\mathbb{R}^n)$ and there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|f \cdot u\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\mathbf{f}\|_{H^t_q(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f \in D(\mathbb{R}^n).$$

It turns out that employing a scale $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 1$, of uniformly localized Bessel potential spaces we can establish a constructive description of the multiplier space $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$. Here uniformly localized Bessel potential space is a linear space of all distributions $u \in H^\gamma_{r,\,loc}(\mathbb{R}^n)$ such that $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta_z \cdot u\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)} < +\infty$, equipped with a norm

$$\|u\|_{H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)} \stackrel{def}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta_z \cdot u\|_{H^\gamma_r(\mathbb{R}^n)},$$

where $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$ is an arbitrary function which satisfies the following conditions

$$\eta(x) = 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leqslant 1, \quad \eta(x) = 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \geqslant 2$$

and $\eta_z(x) = \eta(x - z)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 1 ([1]) *Let $s \geqslant 0,\ t < 0,\ p,\ q > 1,\ s - n/p \geqslant t - n/q,\ p \leqslant q$ and either 1) $s \geqslant t$ and $s > n/p$, or 2) $t \geqslant s$ and $t > n/q'$ (here q' is defined by condition $1/q' + 1/q = 1$).*

Then the following spaces coincide

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] = H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n)$$

and norms of these spaces are equivalent.

Multipliers in the scale of periodic Bessel potential spaces $H^\gamma_r(\mathbb{T}^n)$, defined on the n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$, can be introduced similarly to the case of $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)]$. Compactness of the torus $\mathbb{T}^n$ allows us to use spaces $H^\gamma_r(\mathbb{T}^n)$ instead of uniformly localized Bessel potential spaces. Additionally, we can also weaken some conditions on indices s, t, p and q.

Theorem 2. *Let $s \geqslant 0,\ t \leqslant 0,\ p,\ q > 1$ and one of the following conditions hold: a) $p > q$; b) $p \leqslant q$ and $s - n/p \geqslant t - n/q$. Let additionally either $s \geqslant -t$ and $s > n/p$ or $-t \geqslant s$ and $t > n/q'$. Then the following spaces coincide*

$$M[H^s_p(\mathbb{T}^n) \to H^t_q(\mathbb{T}^n)] = H^t_q(\mathbb{T}^n) \cap H^{-s}_{p'}(\mathbb{T}^n)$$

and their norms are equivalent.

It will be shown (see [2] where partial cases were considered) how Theorem 2 allows us to study singular perturbations $(-\Delta)^\alpha + M_u$, where $(-\Delta)^\alpha\colon H^{2\alpha}_2(\mathbb{T}^n) \to H^{-2\alpha}_2(\mathbb{T}^n)$ is a power of Laplacian of degree $\alpha > 0$ and $M_u\colon H^{2\alpha}_2(\mathbb{T}^n) \to H^{-2\alpha}_2(\mathbb{T}^n)$ is a compact multiplier from $H^{2\alpha}_2(\mathbb{T}^n)$ to $H^{-2\alpha}_2(\mathbb{T}^n)$. For these singular perturbations of Laplacian's power by a potential from the corresponding multiplier space different spectral properties are investigated, such as having a compact resolvent, completeness of operator's root functions in $L_2(\mathbb{T}^n)$, approximation by the Laplacian power's perturbations with smooth potentials in terms of uniform resolvent convergence and asymptotic behaviour of the function counting its eigenvalues.

References

[1] Belyaev A. A., Shkalikov A. A., Multipliers in spaces of Bessel potentials: the case of indices of nonnegative smoothness, Math. Notes, **102**: 5–6 (2017), 632 – 644.

[2] Belyaev A. A., Singular perturbations of powers of the Laplacian on the torus, Math. Notes, **94**: 3 - 4 (2013), 594 – 598.

Synchronization and attractors in a network of systems coupled via right hand parts[54]

Belykh V.N. (Russia, Nizhny Novgorod)
Volga state university of water transport
belykh@unn.ru

Given n different differential equations of second order

$$\ddot{x}_i = f_i(x_i, \dot{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

In this talk we consider the system

$$\ddot{X} = AF(X, \dot{X}) \tag{2}$$

where $X = column(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $F = column(f_1(x_1, \dot{x}_1), f_2(x_2, \dot{x_2}), \dots, f_n(x_n, \dot{x}_n))$ and A is a constant nondegenerate $n \times n$ - matrix. Several important regimes of synchronization for sertain subsystems (1) are discussed. Chaotic attractors for examples of (2) are presented.

The main example of the system (2) is the equations of the form

$$\ddot{x}_i + f_i(x_i, \dot{x}_i) = -\ddot{y}, \qquad \ddot{y} + 2h\dot{y} + \Omega^2 y = -r\sum_{i=1}^{n} \ddot{x}_i,$$

corresponding to the mechanical problem of pedestrians-bridge interaction. For certain functions f_i we derive explicit analytical conditions under which phase locking and bridge wobbling appear in the system when the crowd size exceeds a threshold value.

Nonlinear Mixed-Integer Optimal Control — From the Maximum Principle Approach to Online Computation of Closed Loop Controls in Real Time

Hans Georg Bock (Germany, Heidelberg)
Interdisciplinary Center for Scientific Computing, University of Heidelberg
scicom@iwr.uni-heidelberg.de

The presentation discusses theoretical and numerical aspects of optimal control problems with integer-valued controls. Despite the practical relevance and ubiquity of integer or logical valued controls such as valves, gears or the start-up, resp., the reconfiguration of sub-units in production plants or networks, optimization methods capable of solving such nonlinear mixed-integer optimal control problems (MIOCP) that can be practically applied to large-scale systems and in real-time, have only recently come within reach.

Nonlinear MIOCP — such as the minimum energy operation of subway trains equipped with discrete acceleration modes — were solved as early as the late seventies for the city of New York applying an «indirect» approach by Pontryagin's Maximum Principle. Based on a «Competing Hamiltonians» algorithm open loop and closed loop optimal control solutions for problems with discontinuous dynamics were computed that allowed a tested reduction of 18 per cent in traction energy. However, such «indirect» methods are relatively difficult to apply to large-scale and real-time optimization problems.

[54]This work was supported by the RFBR (project 18-01-00556/18).

As an alternative, a new «direct» approach is presented based on functional analysis arguments approach, which leads to a relaxed problem without integer gap — the so-called «outer convexification». The resulting problem can then be solved by the well-known «direct» multiple shooting method as an «all-at-once» approach. Moreover, the optimal solution can be arbitrarily closely approximated by an integer solution with finitely many switches. The gain in performance is enormous, orders of magnitude of speed-up over a state-of-the-art MINLP approach to a control problem, where the NP hardness of the discretized problem is demonstrated to be computationally prohibitive. Real-time applications of a «multi-level real-time iteration» NMPC method to compute energy optimal feedback cruise control on-board of Daimler heavy-duty trucks (the Actros), as well as minimum time control of a fictitious racecar around the Hockenheim racetrack are presented. The presentation is based on joint work with F. Kehrle, C. Kirches, E. A. Kostina, F. Lenders, R. W. Longman, D. B. Muralidhara, S. Sager and J. P. Schloder.

Topology, singularities and integrability in Hamiltonian systems with two degrees of freedom

Sergey Bolotin (Russia, Moscow)
Moscow Steklov Mathematical Institute
bolotin@mi.ras.ru

We consider a Hamiltonian system with the configuration space M^2 and Hamiltonian $H = \|p\|^2/2 + V(q)$. It is well known that if the potential energy V has $n > 2\chi(M)$ Newtonian singularities, then the system has positive topological entropy on energy levels $H = h > \sup V$. We generalize this result to the case when V has several singular points a_j of type $V(q) \sim -\mathrm{dist}(q, a_j)^{-\alpha_j}$. Let $A_k = 2 - 2k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$, and let n_k be the number of singular points with $A_k \leqslant \alpha_j < A_{k+1}$. If

$$\sum_{2\leqslant k\leqslant\infty} n_k A_k > 2\chi(M),$$

then the system has a compact chaotic invariant set of on any energy level $H = h > \sup V$. For noncompact M some conditions at infinity are required.

This is joint work with V.V. Kozlov.

Homogenization of networks in domains with oscillating boundaries

Braides Andrea (Italy, Rome)
Università di Roma 'Tor Vergata', via della Ricerca Scientifica
braides@mat.uniroma2.it
Chiadò Piat Valeria (Italy, Torino)
Politecnico di Torino
valeria.chiadopiat@polito.it

In memoriam V.V. Zhikov

We consider the asymptotic behaviour of integral energies with convex integrands defined on one-dimensional networks contained in a region of the three-dimensional space with a fast-oscillating boundary as the period of the oscillation tends to zero, keeping the oscillation themselves of fixed size. The limit energy, obtained as a Γ-limit with respect to an appropriate convergence, is defined in a 'stratified' Sobolev space and is written as an integral functional depending on all, two or just one derivative, depending on the connectedness properties of the sublevels of the function describing the profile of the oscillations. In the three cases, the energy function is characterized through an usual homogenization formula for p-connected networks, a homogenization formula for thin-film networks and a homogenization formula for thin-rod networks, respectively.

Equation-domain duality with applications to boundary value problems for PDEs

Burskii V. P. (Russia, Moscow)
Donetsk Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Moscow Institute of Physics and Technology
bvp30@mail.ru

Let consider in the space $W_2^m(\Omega)$ the first boundary-value problem

$$L(D_x)u = f\,, u|_{P(x)=0} = 0. \tag{1}$$

Here $L(D), L \in \mathbb{C}[\xi], D = -i\nabla$ is a linear operator and $\deg L = 2$ for simplicity, the equation (1) is given in the domain Ω that is bounded, semialgebraic, i.e. $\exists P \in \mathbb{R}[x],\ \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | P(x) > 0\}$, and with smooth boundary $\partial\Omega = \{x | P(x) = 0, \nabla P|_{\partial\Omega} \neq 0\},\ f \in L_2(\Omega),\ \theta_\Omega = 1$ inside Ω and $\theta_\Omega = 0$ beyond Ω.

The second boundary-value problem is

$$P(-D_\xi)\, w = g,\ w|_{L(\xi)=0} = 0. \tag{2}$$

Here $w \in Z_\Omega = \{\widehat{\theta_\Omega u}|\ u \in W_2^2(\Omega)\}$ is a space of entire functions, $g = F[P(x)\theta_\Omega(x)f(x)]$, F is the Fourier transform, $\hat{v} = F[v]$.

The report is devoted to the equation-domain duality which for the problems (1) and (2) has the following form:

Theorem 1 ([1],[2]). For any solution $u \in W_2^2(\Omega)$ of the problem (1) there exists an unique solution $w \in Z_\Omega$ of the problem (2) and vise versa.

This method is applying to the investigations of some boundary-value problems ([2],[3],[4]). For instance let us consider the following homogeneous Dirichlet problem ([3])

$$\tilde{L}u = L\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)u = (a^1 \cdot (\nabla + \lambda))(a^2 \cdot (\nabla + \lambda))u = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

in an angle Ω where $a^1, a^2, \lambda \in \mathbb{C}^2$ are arbitrary constant complex vectors, the sides of the angle is described by the equations of the direct lines $(b^1 \cdot x) = 0,\ (b^2 \cdot x) = 0$ respectively, $b^1 = (b_1^1, b_2^1),\ b^2 = (b_1^2, b_2^2)$ are normal vectors to the direct lines, $\tilde{b}^1 = (-b_2^1, b_1^1),\ \tilde{b}^2 = (-b_2^2, b_1^2),\ \tilde{a}^1 = (-a_2^1, a_1^1),\ \tilde{a}^2 = (-a_2^2, a_1^2)$. Here also $\lambda \in T^C \subset \mathbb{C}^2$, T^C depends of the angle Ω: $T^C = \mathbb{R}^2 + iC = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^2, y \in C\}$, $C = \operatorname{int}\Omega_*, C \neq \varnothing$, $\Omega_* = -\Omega^*$, Ω^* is conjugate cone to Ω.

Theorem 2. *The problem (3) has a nontrivial solution $u(x)$ from the space $C^2(\overline{\Omega})$ with a polynomial growth in the infinity then and only then there exists $n \in \mathbb{N}$ such that*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1)^n & (\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1)^n \\ (\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2)^n & (\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2)^n \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

References

[1] Burskii V.P. Boundary properties of L_2-solutions of linear differential equations and equation-domain duality // Doklady of Academii Nauk of the USSR, 1989, Vol.309, No. 5, pp.1036-1039.

[2] Burskii V.P. Investigate methods of boundary-value problems for PDEs / Kiev: Naukova dumka, 2002. 315 p.

[3] Burskii V.P., Kirichenko Ye.V. On the non-trivial solvability of boundary value problems in the angle domains // Journal of partial differential equations, Vol. 23 (2010), No. 3, pp. 235-250.

[4] V.P. Burskii, A.S. Zhedanov, On Dirichlet, Poncelet and Pell-Abel problems// Communications on pure and applied analysis. Vol.12, No.4, July 2013. Pp.1587 - 1633.

On invariants of normal forms of mixed type second order PDE's on the plane

Alexey Davydov (Russia)
The National University of Science and Technology MISiS
Lomonosov Moscow State University
Vladimir State University
davydov@mi.ras.ru

We consider mixed type second order linear PDEs on the plane and analyze invariants of their main symbols up to smooth or sufficiently smooth changes of coordinates and multiplication on nonvanishing smooth functions. Such invariants have both local and nonlocal nature. The local ones were described in the end of last century for a generic cases. The complete description of smooth nonlocal invariants is open problem even for simplest configurations of characteristic net, while for such configurations topologically there are no invariants of characteristic net at all.

The talk is devoted to these results and recent achievements in this area.

Dispersive bounds for the infinite system of harmonic oscillators on the half-line[55]

Dudnikova T.V. (Russia, Moscow)
Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
tdudnikov@mail.ru

We consider the infinite system of harmonic oscillators on the half–line:

$$\ddot{u}(x,t) = (\nu^2\Delta_L - m^2)u(x,t), \quad x\in\mathbb{N}, \quad t>0, \tag{1}$$

with the boundary condition (as $x=0$)

$$\ddot{u}(0,t) = \nu^2(u(1,t)-u(0,t)) - m^2u(0,t) - \kappa u(0,t) - \gamma\dot{u}(0,t), \quad t>0, \tag{2}$$

and with the initial condition (as $t=0$)

$$u(x,0)=u_0(x), \quad \dot{u}(x,0)=v_0(x), \quad x\in\mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Here $u(x,t)\in\mathbb{R}$, $\nu>0$, $m,\kappa,\gamma\geqslant 0$, Δ_L denotes the second derivative on $\mathbb{Z}$:

$$\Delta_L u(x) = u(x+1) - 2u(x) + u(x-1), \quad x\in\mathbb{Z}.$$

We assume that the initial data $Y_0(x)=(u_0(x),v_0(x))$ belong to the Hilbert space $\mathcal{H}_{\alpha,+}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, defined below.

Definition. *$\ell^2_{\alpha,+}\equiv\ell^2_{\alpha,+}(\mathbb{Z}_+)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, is the Hilbert space of sequences $u(x)$, $x\in\mathbb{Z}_+$, with norm $\|u\|^2_{\alpha,+}=\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}_+}\langle x\rangle^{2\alpha}|u(x)|^2<\infty$, $\langle x\rangle:=(1+x^2)^{1/2}$.*

$\mathcal{H}_{\alpha,+}=\ell^2_{\alpha,+}\otimes\ell^2_{\alpha,+}$ is the Hilbert space of pairs $Y=(u,v)$ of sequences equipped with norm $\|Y\|^2_{\alpha,+}=\|u\|^2_{\alpha,+}+\|v\|^2_{\alpha,+}<\infty$.

On the coefficients m,κ,ν,γ of the system we impose condition $\mathbf{C}$ or $\mathbf{C}_0$.

Condition C. *If $\gamma\neq 0$, then m or κ is not zero.*
In addition, if $\gamma\in(0,\nu)$ and $m=0$, then $\kappa\neq 2(\nu^2-\gamma^2)$;
if $\gamma\in\left(0,\left(\sqrt{m^2+4\nu^2}-m\right)/2\right]$ and $m\neq 0$, then $\kappa\neq\nu^2-\gamma^2\pm\sqrt{(\nu^2-\gamma^2)^2-m^2\gamma^2}$.
If $\gamma=0$, then $\kappa\in(0,2\nu^2)$.

Condition $\mathbf{C}_0$. *(i) $\gamma=0$ and $\kappa=2\nu^2$ or (ii) $\gamma=\kappa=0$ and $m\neq 0$.*

The main result is the following theorem.

[55]This work was supported partly by the research grant of RFBR (grant no.18-01-00524).

Theorem. *Let $Y_0 \in \mathcal{H}_{\alpha,+}$, $\alpha > 3/2$, and condition* **C** *or* $\mathbf{C}_0$ *hold. Then the solution of the problem (1)–(3) obeys the bound*

$$\|Y(t)\|_{-\alpha,+} \leqslant C\langle t\rangle^{-\beta/2}\|Y_0\|_{\alpha,+}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

where $\beta = 3$ if condition **C** *holds, and $\beta = 1$ if condition* $\mathbf{C}_0$ *holds.*

For the solutions of the linear discrete Schrodinger and Klein–Gordon equations in the whole space, the dispersive estimates of the type (4) were obtained by Shaban and Vainberg [1], Komech, Kopylova and Kunze [2] and Pelinosky and Stefanov [3]. In [4], we considered the linear Hamiltonian system consisting of the discrete Klein–Gordon field coupled to a particle and obtained the similar results on the long–time behavior for the solutions. In [5], the model (1)–(3) was studied with *random* initial data $Y_0 \in \mathcal{H}_{\alpha,+}$ with $\alpha < -3/2$. Now the model is studied with initial data from the space $\mathcal{H}_{\alpha,+}$ with $\alpha > 3/2$, and the long time asymptotics of the solutions are constructed.

References

[1] Shaban W., Vainberg B. R. Radiation conditions for the difference Schrödinger operators // Applicable Anal. 2001. Vol. 80. P. 525–556.

[2] Komech A. I., Kopylova E. A., Kunze M. Dispersive estimates for 1D discrete Schrodinger and Klein–Gordon equations // Applicable Anal. 2006. Vol. 85. No 12. P. 1487–1508.

[3] Pelinosky D. E., Stefanov A. On the spectral theory and dispersive estimates for a discrete Schrödinger equation in one dimension // J. Math. Phys. 2008. Vol. 49. No 11. P. 113501.

[4] Dudnikova T. V. Long-time asymptotics of solutions to a Hamiltonian system on a lattice // Problems in Mathematical Analysis 2016. Vol. 85. P. 69–82. P.1–31.

[5] Dudnikova T. V. On convergence to equilibrium for one-dimensional chain of harmonic oscillators on the half-line // J. Math. Phys. 2017. Vol. 58. No 4. P. 043301. P.1–31.

[6 Dudnikova T. V. Large-time behavior of the infinite system of harmonic oscillators on the half-line // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2018. Vol. 301.

On the Structure of the Subspace of C^1-Smooth Skew Products with the Complicated Dynamics of Quotient Map

Efremova L.S. (Russia, Nizhni Novgorod)
National Research Nizhni Novgorod State University
lefunn@gmail.com

We consider the subspace of C^1-smooth skew products of maps of an interval with the complicated dynamics of their quotient maps satisfying: the sequence of suitable functions for the Ω-function of a skew product contains a countable number of discontinuous functions, and the Ω-function of a skew product is discontinuous.

We investigate approximate properties (in C^1-topology) of some subsets of the distinguished subspace (for details see [1]).

References

[1] Efremova L.S. Dynamics of skew products of interval maps. Russ. Math. Surv., vol. 72:1, 101–178 (2017).

Solvability of MHD problem with free interface

Elena Frolova (Russia, St. Petersburg)
St.Petersburg State Electrotechnical University,
St.Petersburg State University
elenafr@mail.ru

We consider the free boundary problem governing the motion of two viscous incompressible electrically conducting capillary fluids separated by a closed interface. Media is moving under the action of magnetic field. We assume that the first fluid is contained in the bounded variable domain Ω_{1t}, which is surrounded by the bounded variable domain Ω_{2t}, filled with the second fluid. The boundary of Ω_{2t} consists of two disjoint components: the free boundary $\Gamma_t = \partial\Omega_{1t}$ and the fixed surface S. Both Γ_0 and S are homeomorphic to a sphere, $dist\{\Gamma_0, S\} \geq \delta > 0$. The surface S is assumed to be a perfect conductor. Free boundary problem for MHD system for the case when Ω_{2t} is vacuum region in studied in [1], [2].

To reduce the free boundary problem for a problem in a fixed domain, we use Hanzawa coordinate transform. The linearized problem can be decomposed in two parts: hydrodynamical and magnetic. The hydrodynamical part is similar to the one obtained in linearization of the free boundary problem for two liquids in absence of magnetic field. In the talk we will concentrate on the investigation of the corresponding conjugation problem for magnetic field. We prove unique solvability of this problem in Sobolev-Slobodetskii spaces $W_2^{2+l,1+l/2}$, $1/2 < l < 1$ and obtain weighted estimates for the solution of the corresponding homogeneous problem.

For the magneto-hydrodynamical problem with free interface we obtain local existence result in Sobolev-Slobodetskii spaces. In the case when the initial position of the free boundary is assumed to be a small normal perturbation of a sphere and under the additional smallness assumptions on initial data, solvability of this free boundary problem can be proved in an infinite time interval in the same way as in [2].

References

[1] Padula M., Solonnikov V.A. On the free boundary problem of magnethydrodynamics // Zap. Nauchn. Sem. POMI. 2010. Vol. 385. P. 135–186.

[2] Solonnikov V.A., Frolova E.V. Solvability of a free boundary problem of magnetohydrodynamics in an infinite time interval // Zap. Nauchn. Sem. POMI 2013. Vol. 410. P. 131-167.

Limit Cycle Bifurcations of a Cubic-Linear System

Gaiko V. A. (Belarus)
National Academy of Sciences of Belarus
valery.gaiko@gmail.com

We study a cubic-linear system in the form

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \delta y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3. \tag{1}$$

I. S. Kukles was the first who began to study (1) solving the center-focus problem for this system in [1]. In [2], we constructed a canonical cubic dynamical system of Kukles type and carried out the global qualitative analysis of a special case of the Kukles system corresponding to a generalized cubic Liénard equation. In particular, it was shown that the foci of such a Liénard system could be at most of second order and that such system could have at most three limit cycles in the whole phase plane. Moreover, unlike all previous works on the Kukles type systems, global bifurcations of limit and separatrix cycles using arbitrary (including as large as possible) field rotation parameters of the canonical system were studied. As a result, a classification of all possible types of separatrix cycles for the generalized cubic Liénard system was obtained and all possible distributions of its limit cycles were found.

Applying Erugin's two-isocline method [3] and studying rotation properties of the parameters of (1), we prove the following theorem.

Theorem 1. *System* (1) *with limit cycles can be reduced to the canonical form*

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = q(x) + (\alpha_0 - \beta + \gamma + \beta\, x + \alpha_2\, x^2)\, y + (c + dx)\, y^2 + \gamma\, y^3, \tag{2}$$

where

1) $q(x) = -x + (1 + 1/a)\,x^2 - (1/a)\,x^3,\ a = \pm 1, \pm 2$ *or*
2) $q(x) = -x + b\,x^3,\ b = 0, -1,$ *or*
3) $q(x) = -x + x^2;$

$\alpha_0,\ \alpha_2,\ \gamma$ *are field rotation parameters and* β *is a semi-rotation parameter.*

Using system (2) and studying global bifurcations of its limit cycles by means of our bifurcational geometric approach [3], we prove the following theorem.

Theorem 2. *Cubic-linear system* (1) *can have at most four limit cycles in* $(3\!:\!1)$*-distribution.*

For the global analysis of limit cycle bifurcations in [3], we used the Wintner–Perko termination principle which connects the main bifurcations of limit cycles. Let us formulate this principle for the polynomial system

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \tag{3}$$

where $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2;\ \ \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n;\ \ \boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^2$ ($\boldsymbol{f}$ is a polynomial vector function).

Theorem 3 (Wintner–Perko termination principle). *Any one-parameter family of multiplicity-m limit cycles of relatively prime polynomial system* (3) *can be extended in a unique way to a maximal one-parameter family of multiplicity-m limit cycles of* (3) *which is either open or cyclic. If it is open, then it terminates either as the parameter or the limit cycles become unbounded; or, the family terminates either at a singular point of* (3), *which is typically a fine focus of multiplicity* m, *or on a* (*compound*) *separatrix cycle of* (3), *which is also typically of multiplicity* m.

Using Theorem 3, we give an alternative proof of Theorem 2 for system (1), namely, we prove the following theorem.

Theorem 4. *There exists no system* (1) *having a swallow-tail bifurcation surface of multiplicity-four limit cycles in its parameter space. In other words, system* (1) *cannot have either a multiplicity-four limit cycle or four limit cycles around a singular point, and the maximum multiplicity or the maximum number of limit cycles surrounding a singular point is equal to three. Moreover, system* (1) *can have at most four limit cycles with their only possible* $(3\!:\!1)$*-distribution.*

References

[1] Kukles I. S. Necessary and sufficient conditions for the existence of centre // Dokl. Acad. Sci. USSR. – 1944. – Vol. 42. – P. 160–163 (in Russian).

[2] Gaiko V. A. and van Horssen W. T. Global bifurcations of limit and separatrix cycles in a generalized Liénard system // Nonlinear Anal. – 2004. – Vol. 59. – P. 189–198.

[3] Gaiko V. A. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem, Boston: Kluwer, 2003.

To the problem of synchronization of physical pendulums

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (Russia, Moscow)
Moscow Aviation Institute (National Research University)
sglad@newmail.ru, sonjaf@list.ru

The system of two coplanar independent physical pendulums are considered. The points of their suspension are lying in the horizontal plane at condition that distance b from each other are fixed. It's proofed that the interaction between metallic pendulums has a long-range nature and take place due to the electrons interaction of both pendulums. The time synchronization from the numerical solution of the nonlinear differential equations of the dynamics estimated. The mathematically strictly proofed that this time are corresponds to the experimentally observation time of synchronization. In the particular firstly Huygens's experiment in this direction. Moreover, the possibility of synchronization effect discussed as a diffusion mechanism. The problem which discuss in this work is devoted goes back to times of Huygens who has for the first time paid attention to effect of synchronization of the physical pendulums hanging nearby on a beam. Later the effect of synchronization was studied in numerous papers [1]–[4] and in the set of monographs [5] — is devoted to it [7]. Note that in some sources, for example, in [8] and [9], the synchronization model is based on the assumption that the adjustment of oscillations of pendulums to each other is associated with «dry friction» proportional to the speed of the pendulum, which, in the authors' opinion, is determined only the internal structure of the clock mechanism. In this paper, we do not research the mechanism of the structure of the clock as such, but we are going to approach the solution of the problem from a purely physical point of view. Notice that in one of the sources mentioned above time of synchronization (τ_c) has not been calculated and the mechanism of interaction between pendulums resulting in effect of synchronization (though in many papers on this subject the role of interaction and is allocated for the elastic spring mechanism with potential energy equal $kx^2/2$, where k — rigidity of a spring) has not been entered. We do not undertake to discuss or to analyze why it is related, because we are setting ourselves the task of explaining the synchronization effect not only from purely natural curiosity and from purely intuitive considerations, but based precisely on the physical perception of this very curious and not simple phenomenon. As an example, we choose two identical physical pendulums made of metal that points of a suspension are at b distance from each other. In order to specify the problem, we assume that the pendulums are coplanar and identical, so their lengths and masses are the same, $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$.

Our main suppositions are the following: 1. We are considering the potential energy as an electromagnetic interaction between the metallic pendulums and 2. The «friction» energy is the friction of electromagnetic radiation. Moreover, in the language coordinates of φ_1 and φ_2 as an angular variables, potential energy is invariant to relative $\varphi_1 \to \pm\varphi_2$, $\varphi_2 \to \pm\varphi_1$ replacement. In the result of calculations we are getting the following system of the nonlinear equations:

$$\varphi_1'' + \sin\varphi_1 + \lambda_1 \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - a\cos\varphi_1}{Q^3} + \lambda_2 \frac{\varphi_2''\cos\psi - \varphi_2'\psi'\sin\psi}{Q^5} +$$

$$+3\lambda_2 \frac{(\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{Q^5}\varphi_2'\cos\psi + \kappa\varphi_1'^3 + \frac{3\lambda_2 a}{2}\left[\frac{1}{Q_{12}^5} - \frac{1}{Q_{21}^5}\right](\varphi_1'\cos\varphi_1 - \varphi_2'\cos\varphi_2)\varphi_2'\cos\psi = 0,$$

$$\varphi_2'' + \sin\varphi_2 - \lambda_1 \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a\cos\varphi_1}{Q^3} + \lambda_2 \frac{\varphi_1''\cos\psi - \varphi_1'\psi'\sin\psi}{Q^5} +$$

$$+3\lambda_2 \frac{(\varphi_1' - \varphi_2')\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{Q^5}\varphi_2'\cos\psi + \kappa\varphi_2'^3 + \frac{3\lambda_2 a}{2}\left[\frac{1}{Q_{12}^5} - \frac{1}{Q_{21}^5}\right](\varphi_1'\cos\varphi_1 - \varphi_2'\cos\varphi_2)\varphi_1'\cos\psi = 0,$$

where the marks it means on dimensionless variable τ differentiation, $\lambda_1 = \omega_1^2/\omega_0^2$, $\tau = \omega_0 t$, κ — is the coefficient of electromagnetic radiation.

References

[1] T. Yamada, H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled–oscillator system. The mapping approach. Progr. Theor. Phys. 1983. V. 70. PP. 1240–1248.

[2] N.N. Verichev, A.G. Maximov. On synchronization of stochastic oscillations of parametrically excited nonlinear oscillators. News of Higher Educational Institutions. Radiophysics. 1989. V. 32. N. 8. PP. 962–965.

[3] L.M. Pecora, T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. PP. 821–824.

[4] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. PP. 4193–4196.

[5] I.I. Blechman. Synchronization in nature and technology. M.: Science. 1981. P. 320.

[6] V.N. Akimov, L.N. Belyustina, others. Systems of phase synchronization. M.: Radio and communication. 1982. P.288.

[7] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Electrodynamics of Continuous Media. V.8. M.: Science. 1982. P.620.

[8] L.E. Elsgolz. Differential equations and bases of the calculus of variations. M.: Fizmatlit. 1969. P. 424.

[9] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Mechanics. V.1. M.: Science. 1973. P. 207.

[10] S.O. Gladkov, M.I. Kaganov. To the theory of relaxation of nuclear spins in ferromagnets. JETP 1981. V. 80. № 4. PP. 1577–1585.

[11] A.I. Akhiyezer, V.G. Baryakhtar, S.V. Peletminsky. Spin waves. M.: Science. 1967. P. 368.

[12] R. White. Quantum theory of magnetism. M.: World. 1985. P. 303.

Simple boundary function singularities, symmetric matrices and the subgroups of Weyl groups B_μ, C_μ, F_4

Goryunov V. (UK, Liverpool)
University of Liverpool
goryunov@liverpool.ac.uk

In our paper from 15 years ago, Zakalyukin and myself related the Bruce-Tari classification of simple symmetric matrices depending on two parameters to certain subgroups X of the Weyl groups A_μ, D_μ, E_μ. These subgroups arise as monodromy groups of the determinantal curves, and their Dynkin diagrams are singled out by a straightforward rule as the subdiagrams of the affine ADE Dynkin diagrams. Bases of miniversal deformations of the matrix singularities turn out to be isomorphic to the quotients of the ADE configuration spaces by such subgroups X.

In the talk, I will consider similar constructions for the boundary version of the Bruce-Tari classification.

On the Topological Classification Of the Simplest Morse-Smale Flows with Heteroclinic Curves on the Sphere S^4

Gurevich E. (Russia, Nizhnii Novgorod)
NRU HSE
egurevich@hse.ru

A flow f^t on a closed smooth manifold M^n is called *Morse-Smale flow*, if its non-wandering set consists of finite number of hyperbolic equilibrium points and periodic trajectories, and invariant manifolds of equilibria and periodic trajectories have only transversal intersection.

We consider a class $G(S^4)$ of Morse-Smale flows on the sphere S^4 of dimension four such that for any flow $f \in G(S^4)$ its non-wandering set consists exactly of four equilibria: a source α, a sink ω and saddles σ_i, σ_j having unstable manifolds of dimension i, j correspondently. It follows from the Poincare-Hopf Theorem that the number $|j-i|$ is odd. Let $j > i$. It follows from the definition of transversality that the intersection $W^u_{\sigma_i} \cap W^s_{\sigma_j}$ of the unstable manifold $W^u_{\sigma_i}$ of the point σ_i and the stable manifold $W^s_{\sigma_j}$ of the point σ_j is empty. We provide the following result.

Proposition 1. *The intersection $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ is non-empty and consists of a finite number k_{f^t} of trajectories.*

It follows from S. Smale's theorem (see [1], Theorem 2.3) that a closure $cl\ W^u_{\sigma_i}$ ($cl\ W^s_{\sigma_j}$) of the manifold $W^u_{\sigma_i}$ ($W^s_{\sigma_j}$) consists of the union of the manifold $W^u_{\sigma_i}$ ($W^s_{\sigma_j}$) and the only one point ω (α). Then a set $A = cl\ W^u_{\sigma_i}$ ($R = cl\ W^s_{\sigma_j}$) is the sphere of dimension i ($n-j$) smoothly embedded in S^4 at every point apart the point ω (α). Remind that a closed manifold $X \subset M^n$ of dimension m is called *locally flat* at a point $x \in X$ if there exists a neighborhood $U_x \subset M^n$ of x and a homeomorphism $h : U_x \to \mathbb{R}^n$ such that $h(X \cap U_x)$ is a coordinate hyperplane $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$. If a manifold $X \subset M^n$ is not locally flat at some point, it is called *wild*.

Lemm 1. *Spheres A, R are locally flat at points ω, α.*

Denote that, due to the Theorem 6 of [2], there exist Morse-Smale flows on a four dimensional manifolds such that the closure of a two-dimensional invariant manifold of its saddle equilibrium is a wild sphere.

Theorem 1. *Flows $f^t, f'^t \in G(S^4)$ are topologically equivalent iff $k_{f^t} = k_{f'^t}$.*

The research is supported by RNF (project 17-11-01041).

References

[1] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. No. 6. P. 747–817.

[2] Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S. Morse-Smale systems with few non-wandering points // Topology and its Applications. 2013. Vol. 160. No. 3. P. 498–507.

Newton-Kantorovich method for construction of transversal doubly asymptotic trajectories of Lagrangian systems with turning points

Ivanov A.V. (Russia, Saint-Petersburg)
Saint-Petersburg State University
a.v.ivanov@spbu.ru

We study a singularly perturbed Lagrangian system with Lagrangian

$$L(q,\dot q,t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{2}|\dot q|^2-f(t)V(q),\ \ \varepsilon\ll 1 \tag{1}$$

on a compact Riemannian manifold $\mathcal{M}$. We assume the potential V is of class $C^2(\mathcal{M})$, f is periodic with period 1 and the system (1) has M turning points, i.e.
(A_1) there exist M different solutions $t_l\in\mathbf{T}, l=1,\dots,M$ of the equation $f(t)=0$;
(A_2) for each $l=1,\dots,M$ there exists a neighborhood of t_l where f can be represented as $f(t)=(t-t_l)^{\kappa_l}g_l(t)$ with $\kappa_l\in\mathbf{N}$ and some C^1-function g_l such that $g_l(t_l)\neq 0$.

In a vicinity of a turning point the system (1) can be approximated by the model system with Lagrangian

$$L(q,q',\zeta)=\frac{1}{2}|q'|^2-\zeta^{\kappa}V(q),\quad \kappa\in\mathbf{N},\quad q'=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\zeta}. \tag{2}$$

The existence of connecting trajectories for the model system was earlier established in [2] by variational methods. Let X_c denotes a subset of $\mathcal{M}$ at which $V(x)$ distinguishes its maximum or minimum. We assume that
(A_3) X_c consists of isolated nondegenerate critical points of V.
Under transversality assumption on the connecting orbits of the model system it was proved [3] the existence of doubly asymptotic trajectories for the system (1) which shadow the connecting orbits of the model system. In particular, it was proved the following

Theorem 1. *For any sequence $\{x_k\}_{k=1}^n\subset X_c$ and any $\rho>0$ there exists $\varepsilon_0>0$ and a subset $\mathcal{E}_h\subset(0,\varepsilon_0)$ such that*
1. for any $\varepsilon_1<\varepsilon_0$ the Lebesgue measure $leb\left((0,\varepsilon_1)\setminus\mathcal{E}_h\right)=O\left(\mathrm{e}^{-c/\varepsilon_1}\right)$ with some positive constant c;
2. for any $\varepsilon\in\mathcal{E}_h$ there exist infinitely many doubly asymptotic trajectories of the system (1) *which emanate from x_1, terminate at x_n and pass through balls of radii ρ centered at the points x_k in an order induced by the chain $(x_1,x_2,\dots,x_n)$.*

Fix points x_+ and x_- at which $V(x)$ distinguishes its maximum and minimum, respectively. In the present work we study the problem of existence of transversal connecting orbits for the model system (2) joining x_- and x_+. It can be shown that such orbits are in one-to-one correspondence with non-singular critical points of the action functional

$$I[q]=\int\limits_{\mathbb{R}}\left[L(q,q',\zeta)+\zeta^{\kappa}V(\chi(\zeta))\right]\mathrm{d}\zeta$$

defined on an infinite-dimensional Hilbert manifold

$$\mathfrak{M}=\left\{q\in AC(\mathbb{R},\mathcal{M}):\int\limits_{\mathbb{R}}\left(|\dot q(\zeta)|^2+\zeta^{\kappa}|q(\zeta)-\chi(\zeta)|^2\right)\mathrm{d}\zeta<\infty\right\},$$

where the function χ is the step-function:

$$\chi(\zeta)=\begin{cases}x_+,\ \zeta\geqslant 0,\\ x_-,\ \zeta<0.\end{cases}$$

We consider two sequences of expanding intervals $\Omega_k = [-T_k, T_k]$ and solutions $q_k : \Omega_k \to \mathcal{M}$ satisfying $q_k(\pm T_k) = x_\pm$. We adopt Newton-Kantorovich method [1] for the Riemannian manifold $\mathfrak{M}$ to construct q_k and check its transversality. For any $k \geqslant 1$ the solution q_{k-1} obtained on the previous step is used as initial approximation for q_k. While for q_0 a geodesic γ connecting x_- and x_+ is taken as initial approximation. Under additional assumptions on the upper bounds of the potential V and its first and second derivatives, curvature of $\mathcal{M}$ and non-degeneracy of γ, we prove that $q_k \to q$ as $k \to +\infty$, where q is a transversal connecting orbit joining x_- and x_+.

References

[1] Ferreira O. P., Svaiter B. F. Kantorovich's theorem on Newton's method in Riemannian manifolds // J. of Complexity. 2002. Vol. 18. No 1. P. 304–329.

[2] Ivanov A. V. Connecting orbits of Lagrangian systems in a non-stationary force field // Reg. & Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21. No. 5. P. 510–522.

[3] Ivanov A. V. Connecting orbits near the adiabatic limit of Lagrangian systems with turning points // Reg. & Chaotic Dyn. 2017. Vol. 22. No. 5. P. 479–501.

Curvature of ODEs, Lagrangian Systems, and Control Systems

Jakubczyk Bronisław (Poland)
Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences
jakubczy@impan.pl

Given a system of second order differential equations, one can associate to it an invariant called curvature operator or Jacobi endomorphism. For a scalar equation it is a scalar and its sign is responsible for existence of conjugate points of solutions. Its geometric interpretation is less obvious in the non-scalar case.

We will show that in the case of Euler-Lagrange equations of a variational problem the curvature still gives an information on conjugate points and on focusing properties of the trajectories. The curvature operator will be also defined for a class control systems including so called fully actuated systems. We will explain its role in existence of conjugate points. Examples of Lagrangian and control systems will also be discussed, including N-body equations.

Poisson-Lie algebras and singular symplectic forms

Stanislaw Janeczko (Poland)
Warsaw University of Technology
janeczko@impan.pl

A constraint submanifold in a symplectic space after P.A.M. Dirac is determined locally by geometric restriction of the symplectic form to the constraint. The natural symplectic invariant associated to this restriction is the space of Hamiltonian vector fields which uniquely restrict to the solvable Hamiltonian ones on a constraint. By investigation of solvability of generalized Hamiltonian systems we characterize the constraint invariants and find them explicitly in the generic cases. Moreover the Poisson-Lie algebra on submanifold is constructed and an example of the Hamiltonian vector fields on the 2-sphere in symplectic space is considered.

Figure-eight attractors in a multidimensional system with three equilibria

Kashcheeva O.N. (Russia, Nizhny Novgorod)
Volga state university of water transport
pakhareva@rambler.ru

We conceder a multidimensional system having the saddle-focus in the origin and two symmetric equilibria which can be as stable so unstable. The Chua 3-dimensional system can serve a prototype of such a system.

We derive and study a model Poincare map for this system. The sufficient conditions for regular attractor as well as for spiral Shilnikov attractor are obtained. The necessary conditions for the map to have wild attractor are derived.

This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (proj. 18-01-00556 A).

Exact Solutions of the Navier – Stokes Equations

Koptev A.V. (Russia, Saint-Petersburg)
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Alex.Koptev@mail.ru

1. Introduction.

Navier – Stokes equations describe motion of fluid and gase medium flow at presence of viscosity. In the case of incompressible medium flow the major unknowns are components of velocity u, v, w and pressure p. Equations of that type are of interest from pure mathematical point of view and have numerous applications to practical tasks.

To date many questions related to Navier – Stokes equations are worked out not sufficiently and require a deeper study. There is not proof of existence of smooth solution at smooth enough boundary and initial conditions, not investigated asymptotics of solution at large values of Reynolds number, there is not a clarity in understanding of mechanism of laminar-turbulent transition [1-2].

Construction of exact solutions is the important stage in theoretical study of Navier – Stokes equations. Every exact solution allows to produce research of smoothness, investigate influence of nonlinear terms, define dependence of solution on the Reynolds number, to educe the asymptotics of solution at large time.

The review of known exact solutions is given on [3]. Note that construction of exact solutions must be based on systematic approach. Particular interest is presented by not separate solutions, but classes of solutions with arbitrary selectable parametes and functions. On the paper under consideration we suggest positions for constructing some classes of exact solutions.

2. First Integral. We suggest first integral of the Navier – Stokes equations as useful statement for construction an exact solutions. It present nine equations of less order concerning the major unknown [4] and look as

$$p - p_0 = -\Phi - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - d - d_t, \tag{1}$$

$$u^2 - v^2 + \frac{2}{Re}(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial z^2} -$$
$$\frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial(\Psi_5 + \Psi_6)}{\partial z}\right], \tag{2}$$

$$v^2 - w^2 + \frac{2}{Re}(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) = \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y^2} +$$
$$\frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_1 + \Psi_2)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial z}\right], \tag{3}$$

$$uv + \frac{1}{Re}(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial x \partial z}\right) +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial(\Psi_8 + \Psi_9)}{\partial z}\right], \tag{4}$$

$$uw + \frac{1}{Re}(-\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) = \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial x \partial y}\right) +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_9 - \Psi_7)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right], \tag{5}$$

$$vw + \frac{1}{Re}(-\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_7 + \Psi_8)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right], \tag{6}$$

$$u = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_7}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right)\right], \tag{7}$$

$$v = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_7}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right)\right], \tag{8}$$

$$w = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right)\right]. \tag{9}$$

These ratios links basic unknowns u, v, w, p and the associated ones Ψ_j. Ratios (1-9) proposed to take as a basis for constructing an exact solutions of the Navier – Stokes equations.

3. Primary Generators of Solution. Analysis of (1-9) allows to build primary generators of exact solutions for various types of Navier — Stokes equations. Some of them are the next.

1). For 2D steady-state Navier — Stokes equations the prime generator of potential solutions is ordinary Riccati equation

$$-\frac{4}{Re}\frac{dU}{dz} + U^2 = F(z), \tag{10}$$

where $U = u - iv$ is function of complex varaible $z = x + iy$.

Asking different variants of right-hand part $F(z)$ in which the Riccati equation has an analytical solution we can obtain a class of exact solutions of Navier - Stokes equations.

2). For 2D non-steady Navier — Stokes equations the prime generator of solutions is

$$-u\Delta v + v\Delta u + \frac{1}{Re}(-\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial \Delta \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \Psi_2}{\partial x}) = 0. \tag{11}$$

Where Δ denotes two-dimensional Laplace operator in spatial coordinates. Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 are assosiated unknowns, so as the major unknowns u, v, p expressed in terms of them as

$$u = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}), \quad v = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}),$$

$$p = p_0 - \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y^2}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}).$$

As the result (11) represents one equation for two unknown Ψ_1, Ψ_2. It could consider as generator of solutions of 2D Navier — Stokes equations.

3). For 3D non-steady Navier — Stokes equations prime generator of solutions is two equations as the next

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_5}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_6}{\partial x \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_5}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_6}{\partial z^2} = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Where f_i denotes the sum of the members of the equations, respectively (2-6), does not contain associated unknown Ψ_k, $k = 1, 2, ..., 9$ [5]. Ratios (12) represents two equations with respect to nine unknown Ψ_1, Ψ_2, ... Ψ_9. It could consider as generator of solutions of 3D Navier — Stokes equations for incompressible medium flow. Some of the thus obtained solutions are given in the papers [6-7].

References

[1] O.A.Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid, – Gordon and Breach, New York, 1969.

[2] Charles L.Fefferman, Existence and Smoothness of the Navier — Stokes Equation, – Preprint, Princeton University, Math. Dept., Princeton, NJ, 2000. – P. 1-5.

[3] В.Г.Черняк, П.Е.Суэтин, Механика сплошных сред. — М.: Наука-Интерпериодика, 2006.

[4] A.V.Koptev, Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern. – Handbook on Navier — Stokes Equations. Theory and Applied Analysis. – Nova Science Publishers, – New York, 2017. – P. 443-459.

[5] А.В.Коптев, Как разрешить 3D уравнения Навье — Стокса. – Известия РГПУ им. Герцена, №173, 2015. – С. 7-15.

[6] A.V.Koptev, Generator of Solution of 2D Navier — Stokes Equations, – Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys., 7(3), 2014. – P. 324-330.

[7] A.V.Koptev, E.M.Pastushok, New Solutions of 2D Navier — Stokes Equations, – American Scientific Journal, №17, Vol.2, 2017. – P. 4-7.

Lefschetz trace formulas for flows on foliated manifolds[56]

Kordyukov Yu.A. (Russia, Ufa)
Ufa Federal Research Center, Institute of Mathematics
yurikor@mathem.anrb.ru

In this talk, we will discuss Lefschetz trace formulas for foliated flows on compact manifolds equipped with codimension one foliation. This study continues a previous investigation of Lefschetz trace formulas for nonsingular foliated flows [1] and is essentially motivated by Deninger's program to study zeta- and L-functions for algebraic schemes over the integers [2].

Let $\mathcal{F}$ be a smooth, transversely oriented, codimension one foliation on a compact smooth manifold M and let ϕ be a foliated flow on $(M,\mathcal{F})$ (that is, it takes any leaf of $\mathcal{F}$ to a leaf). Denote by $\mathrm{Fix}(\phi)$ the fixed point set of ϕ. Let M^0 be the $\mathcal{F}$-saturation of $\mathrm{Fix}(\phi)$, and $M^1 = M \setminus M^0$. We will assume that ϕ is simple, which means that:

- any closed orbit c of period l of ϕ is simple: $\det(\mathrm{id} - \phi^l_* : T_x\mathcal{F} \to T_x\mathcal{F}) \neq 0$, $x \in c$.
- any fixed point x of ϕ is simple: $\det(\mathrm{id} - \phi^t_* : T_xM \to T_xM) \neq 0$, $t \neq 0$.
- its orbits in M^1 are transverse to the leaves: $T_xM = \mathbb{R}\, Z(x) \oplus T_x\mathcal{F}$, $x \in M^1$, where Z is the infinitesimal generator of ϕ.

Then M^0 is a finite union of compact leaves, and M^1 has finitely many connected components, denoted by M_l. One can construct a bundle-like metric g^1 on the foliated manifold M^1 such that each M_l with respect to this metric is a manifold of bounded geometry, and the restriction $\mathcal{F}_l$ of $\mathcal{F}$ to M_l is a foliation of bounded geometry. In addition, g^1 has a particular form in a neighborhood of M^0.

For each M_l, denote by $d_{\mathcal{F}_l}$ and $\delta_{\mathcal{F}_l}$, respectively, the leafwise derivative and the leafwise coderivative, acting in $C^\infty(M_l; \bigwedge T\mathcal{F}_l{}^*)$, and set $D_{\mathcal{F}_l} = d_{\mathcal{F}_l} + \delta_{\mathcal{F}_l}$. For any $f \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ and $u \in \mathbb{R}$, consider the operator $P_{u,f} : C^\infty_c(M^1; \bigwedge T\mathcal{F}^{1*}) \to C^\infty(M^1; \bigwedge T\mathcal{F}^{1*})$, whose restriction to $C^\infty_c(M_l; \bigwedge T\mathcal{F}^*_l)$ is given by

$$P_{u,f;l} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{t*} e^{-D^2_{\mathcal{F}_l}} f(t)\, dt.$$

One can show that the Schwartz kernel of $P_{u,f}$ extends to a smooth function on $M \times M^1 \cap M^1 \times M$ and has singularity at $M^0 \times M^0$. In particular, the operator $P_{u,f}$ is not of trace class in $L^2(M; \bigwedge T\mathcal{F}^*)$.

[56]Supported by the Russian Foundation of Basic Research (grant 16-01-00312).

Now we use the notions and ideas of the pseudodifferential b-calculus on manifolds with boundary developed by R. Melrose. For each l, M_l is the interior of a connected compact manifold M_l^{c} with boundary and the foliation $\mathcal{F}_l$ extends to a smooth foliation $\mathcal{F}_l^{\mathrm{c}}$ on M_l^{c} tangent to the boundary. We prove that each $P_{u,f;l}$ defines an operator of the class $\Psi_{\mathrm{b}}^{-\infty}(M_l^{\mathrm{c}}; \bigwedge T\mathcal{F}_l^{\mathrm{c}*})$ of b-pseudodifferential operators of order $-\infty$. R. Melrose constructed an extension ${}^{\mathrm{b}}\mathrm{Tr}$ of the trace functional to $\Psi_{\mathrm{b}}^{-\infty}(M_l^{\mathrm{c}}; \bigwedge T\mathcal{F}_l^{\mathrm{c}*})$, called the *b*-trace. Using a further regularization of the *b*-trace, we are able to define the Lefschetz distribution of ϕ as a distribution $L(\phi)$ on the real line and study the associated trace formula. We prove the Lefschetz formula for a singular foliated flow with correct contributions of closed orbits given by the Guillemin-Sternberg formula. More precisely, it says that the restriction of the distribution $L(\phi)$ to the positive real line $\mathbb{R}_+$ is given by

$$L(\phi) = \sum_c l(c) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{kl(c)}(c) \cdot \delta_{kl(c)},$$

where c runs over all closed orbits of ϕ, $l(c)$ denotes the minimal period of c, and x is an arbitrary point of c. Here δ_l denotes the Dirac delta-function at $l \in \mathbb{R}$. We will also discuss Lefschetz formulas with correct contributions of fixed points.

This is joint work with Jesús A. Álvarez López and Eric Leichtnam.

References

[1] Álvarez López J. A., Kordyukov Yu. A. Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one // Foliations: Geometry and Dynamics (Warsaw, 2000), ed. P. Walczak et al. World Scientific, Singapore, 2002, P. 159–183.

[2] Deninger, Ch. Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces// Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, P. 163–186.

Spiral attractors as the root of a new type of "bursting activity" in the Rosenzweig-MacArthur model

Alexander Korotkov[1], Alexey Kazakov[1,2] (Russia, Nizhny Novgorod)
[1]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
[2]National Research University Higher School of Economics
koralg81@gmail.com, akazakov@hse.ru

Yulia Bakhanova, Tatiana Levanova (Russia, Nizhny Novgorod)
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
bakhanovayu@gmail.com, tatiana.levanova@itmm.unn.ru

We study the peculiarities of spiral attractors in the Rosenzweig-MacArthur model, that describes dynamics in a food chain "prey-predator-superpredator". It is well-known that spiral attractors having a "teacup" geometry are typical for this model at certain values of parameters for which the system can be considered as slow-fast system. We show that these attractors appear due to the Shilnikov scenario, the first step in which is associated with a supercritical Andronov-Hopf bifurcation and the last step leads to the appearance of a homoclinic attractor containing a homoclinic loop to a saddle-focus equilibrium with two-dimension unstable manifold. It is shown that the homoclinic spiral attractors together with the slow-fast behavior give rise to a new type of bursting activity in this system. Intervals of fast oscillations for such type of bursting alternate with slow motions of two types: small amplitude oscillations near a saddle-focus equilibrium and motions near a stable slow manifold of a fast subsystem. We demonstrate that such type of bursting activity can be either chaotic or regular.

Variational problems with variable regular bilateral obstacles in variable domains

Kovalevsky A.A. (Russia, Yekaterinburg)
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the RAS
and Ural Federal University
alexkvl71@mail.ru

We consider a sequence of convex integral functionals $F_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ and a sequence of weakly lower semicontinuous and, in general, non-integral functionals $G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, where $\{\Omega_s\}$ is a sequence of domains of $\mathbb{R}^n$ contained in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ and $p > 1$. Along with this, we consider the sequence of sets

$$V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : \varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s \text{ a.e. in } \Omega_s\},$$

where φ_s and ψ_s are functions in $W^{1,p}(\Omega_s)$ such that $\varphi_s \leqslant \psi_s$ a.e. in Ω_s. We give conditions for the convergence of minimizers and minimum values of the functionals $F_s + G_s$ on the sets V_s. Among these conditions are the strong connectedness of the spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ with the space $W^{1,p}(\Omega)$ and the Γ-convergence of the functionals F_s to a functional $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. A certain asymptotic behavior of the sequence $\{G_s\}$ is also required. However, in some sense, the functionals G_s play a subordinate role in relation to the functionals F_s. Concerning the obstacles φ_s and ψ_s, we assume the following conditions:

(a) the sequences of norms $\|\varphi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ and $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ are bounded;

(b) for every sequence of measurable sets $H_s \subset \Omega_s$ such that $\operatorname{meas} H_s \to 0$, we have

$$\int_{H_s} |\nabla \varphi_s|^p \, dx \to 0, \qquad \int_{H_s} |\nabla \psi_s|^p \, dx \to 0;$$

(c) there exists a positive function $\alpha \in L^1(\Omega)$ such that $\operatorname{meas}\{\psi_s - \varphi_s < \alpha\} \to 0$.

We show the importance of condition (c) for our convergence results.

On strange homoclinic attractors of three-dimensional flows

Kozlov A.D. (Russia)
National Research University High School of Economics
kozzzloff@list.ru

This report will be devoted to the problem of existence of strange homoclinic attractors in three-dimensional flows of the following type $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = Ax + By + Cz + g(x, y)$, $g(0, 0) = g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$, where C is a divergence and it is a constant for the considering type of systems. Homoclinic attractors are the strange attractors which contain only one (saddle) equilibrium point. The type of such attractors is defined by eigenvalues of the equilibrium point, which depend only on parameters A, B, and C. A method of saddle charts (two-parameter diagram in which regions with different eigenvalues are drawn with different colors) along with methods of colored charts of maximal Lyapunov exponent and charts of the distance between an attractor and a saddle point (to verify that a saddle point belongs to the attractor) are used for searching and classifying of homoclinic attractors in the described system. Using these methods we found strange attractors of Spiral and Shilnikov types. We also found a non-symmetrical Lorenz-like attractor in the extended class of systems where $\dot{x} = y + g_1(x, y, z)$, $\dot{y} = z + g_2(x, y, z)$, $\dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z)$, where $g(0, 0, 0) = g'_x(0, 0, 0) = g'_y(0, 0, 0) = g'_z(0, 0, 0) = 0$.

The work was supported by RSF grant 17-11-01041.

Numerical Cosmology Modelling at the Peta- and Exascale

Igor Kulikov, Igor Chernykh (Russia, Novosibirsk)
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS
kulikov@ssd.sscc.ru

Vladimir Prigarin (Russia, Novosibirsk)
Novosibirsk State Technical University

Daniil Parshin, Alexander Chupakhin (Russia, Novosibirsk)
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS

In this paper, a novel computation technique for numerical simulations of cosmology structures at the Peta- and Exascale supercomputers is described. The co-design of parallel numerical algorithms for astrophysical simulations is described in detail. The hydrodynamical numerical model for the cosmological modeling, numerical methods for solving the hyperbolic equations and brief description of parallel implementation of the CosmoPhi code are described. The results of numerical experiments of large-scale cosmological simulations are presented.

On multiperiodic solution of a nonlinear system with a differential operator in the direction of the main diagonal

Kulzhumiyeva A.A. (Republic of Kazakhstan, Uralsk)
M. Utemisov West-Kazakhstan State University
aiman-80@mail.ru
Sartabanov Zh.A. (Republic of Kazakhstan, Aktobe)
K. Zhubanov Aktobe Regional State University
sartabanov42@mail.ru

In the paper we investigate the problem of existence of a periodic in arguments $\tau \in (-\infty,+\infty) = R$, $t = (t_1,...,t_m) \in R \times ... \times R = R^m$ and $\sigma = t - e\tau$ solution $x(\tau,t,\sigma)$ of a system of the form

$$D_e x = A(\sigma)x + \mu f(\tau,t,\sigma,x,\mu) \tag{1}$$

with differential operator $D_e = \frac{\partial}{\partial\tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$ in the direction of the main diagonal of the space of time variables (τ,t) and a small parameter $\mu > 0$, where $\langle,\rangle$ – denotes the scalar product, $e = (1,...,1)$ an m-vector, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1},...,\frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ a vector, $A(\sigma)$ an $n\times n$-matrix, $f(\tau,t,\sigma,x,\mu)$ an n-vector function, $x = (x_1,...,x_n)$ an unknown vector.

Suppose that the following conditions are satisfied:

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(1)}(R^m), \tag{2}$$

$$f(\tau+\theta, t+k\omega, \sigma+k\omega, x,\mu) = f(\tau,t,\sigma,x,\mu) \in C^{(0,1,1,1,0)}_{\tau,t,\sigma,x,\mu}(R\times R^m \times R^m \times R^n \times I) \tag{3}$$

for any $k \in Z^m$, where Z^m is a set of integer vectors $k = (k_1,...,k_m)$, $k\omega = (k_1\omega_1,...,k_m\omega_m)$, $\omega = (\omega_1,...,\omega_m)$, $\omega_0 = \theta$, ω_1, ..., ω_m are rationally incommensurable periods, $I = [0,\mu_0]$, $\mu_0 = const > 0$.

We assume [1], [2] that a) for a fixed j the multiplicity n_j of the eigenvalue $\lambda_j(\sigma)$ does not depend on $\sigma \in R^m$, and $Re\lambda_j(\sigma)$, $Im\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1,n}$, $\sigma \in R^m$ have properties of differentiability, ω-periodicity and property of having fixed sign (or negative-valued, or identically zero, or positive-valued) and b) $det\,[E - X(\theta,\sigma)] \neq 0$, $\sigma \in R^m$ condition is satisfied, where E is the identity matrix, $X(\tau,\sigma)$ is the matriciant of homogeneous system.

Under conditions (2), a) and b), it is proved that the homogeneous system has only the zero (θ,ω)-periodic solution in (τ,σ) but the inhomogeneous system has unique (θ,ω,ω)-periodic solution in (τ,t,σ)

$$x^*(\tau,t,\sigma) = \int\limits_{\tau-\theta}^{\tau} G(\tau,s,\sigma)E_\theta f_*(s, t-e\tau+es,\sigma)ds,$$

where $G(\tau,s,\sigma)=\left[X^{-1}(\tau,\sigma)-X^{-1}(\tau-\theta,\sigma)\right]^{-1}X^{-1}(s,\sigma)$, $f_*(\tau,t,\sigma)$ satisfies the condition of the form (3), $E_\theta=S_\theta$ is a shift operator of the argument t of the function $f_*(s,t-e\tau+es,\sigma)$ on $e\theta$ for $\tau-\theta\xrightarrow{s}0$, $E_\theta=I$ is an identity operator for $0\xrightarrow{s}\tau$, the sign $\alpha\xrightarrow{s}\beta$ means change in s from α to β.

Further, under conditions (2), (3), a) and b) we consider the nonlinear operator equation $x=\mu Tx$,

$$Tx=\int\limits_{\tau-\theta}^{\tau}G(\tau,s,\sigma)E_\theta f(s,t-e\tau+es,\sigma,x(s,t-e\tau+es,\sigma,\mu),\mu)ds$$

and we prove that fixed point $x=x^*(\tau,t,\sigma)$ in the space C_* of smooth, (θ,ω,ω)-periodic on (τ,t,σ) functions $x=x(\tau,t,\sigma)$, bounded in norm $\|x\|\le\Delta=const>0$ for sufficiently small values of $\mu\le\mu_*$ is the solution of equation (1) from C_*.

References

[1] Kulzhumiyeva A. A., Sartabanov Zh. A. On reducibility of linear D_e-system with constant coefficients on the diagonal to D_e-system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. 2016. No (84). P. 88–93.

[2] Kulzhumiyeva A. A., Sartabanov Zh. A. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. 2017. v. 8. No 1. P. 67–75.

Divergence-free and Hamiltonian dynamics: interconnections

L.M. Lerman (Russia, Nizhny Novgorod)
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
lermanl@mm.unn.ru

E.I. Yakovlev (Russia, Nizhny Novgorod)
Lobachevsky State University, Higher School of Economics
evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru

It is a rather frequent case when the study of liquid flows in the Lagrangian description discovers structures characteristic for Hamiltonian dynamics. We show interrelations between these two types of dynamics and consider of divergence-free vector fields on an oriented smooth manifold (M,Ω) with the volume form Ω.

The investigations carried out show that if the flow generated by a divergence-free vector field (briefly DFVF) has a (possibly local) cross-section, then the related Poincaré map is symplectic and all known results on such maps are applicable. But, of course, it is not obligatory, when the flow has a global cross-section. For instance, the well known ABC flow most likely does not have global cross-section. On the other hand, majority of such flows have periodic orbits, hence local cross-sections exist.

If DFVF X on an oriented smooth 3-manifold (M,Ω) have a global cross-section, then M is diffeomorphic to the suspension over a diffeomorphism $P:N\to N$ with a roof function $F:N\to\mathbf{R}$ being the return time $F(x)$ for the orbit through $x\in N$. The constructions imply that the restriction $\omega=\Omega|_N$ is a symplectic 2-form such that P is a symplectic diffeomorphism w.r.t. $\omega: P^*\omega=\omega$. We show in this case

Theorem 1. *There is a smooth manifold $\tilde{M}$ of dimension four and a symplectic 2-form Λ on $\tilde{M}$ such that: 1) M is a smooth submanifold of $\tilde{M}$, 2) vector field X is extended till a Hamiltonian vector field $\tilde{X}$ on $(\tilde{M},\Lambda)$ with a smooth Hamiltonian $H:\tilde{M}\to\mathbb{R}$ and M is the level $H=c$ for some c.*

Remark that it is not the case if X have equilibria.

Now suppose a DVFV on M is *integrable*, that is, it has a smooth integral F which satisfies the identity $dF(X)\equiv 0$. Then M is foliated into levels of this function $F=c$.

Proposition. *If X has a discrete set of equilibria, then almost all nondegenerate compact levels of F are 2-tori. The flow on such a torus has not equilibria and preserves a smooth measure.*

Take a thin layer $F = c$, $|c - c_0| < \varepsilon$, where ε is small enough and positive. Then these levels of F are also smooth tori without equilibria of the vector fields. The flow in this layer preserves the volume. Let us introduce some smooth Riemannian metrics in this layer. Since Σ is two-sidedly imbedded, then a smooth field of normal vectors on Σ can be found. Choose such a field and denote $n(x) \in T_xM$ its normal vector at the point $x \in \Sigma$. Then a 2-form ω_n on Σ, $\omega_n(\cdot,\cdot) = \Omega(n(x),\cdot,\cdot)$ is defined.

Theorem 2. *A vector field of normals can be chosen in such a way that: i) 2-form ω_n on Σ is nondegenerate; ii) the restriction of X on the level $F = c_0$ defines the flow φ^t_Σ that preserves the form ω_n, $(\varphi^t_\Sigma)^*\omega_n = \omega_n$.*

Let us choose some angle variables (φ, ψ) on Σ. Then 2-form ω_n takes the form $a(\varphi,\psi)d\varphi\wedge d\psi$ with the smooth doubly periodic positive a and the vector field has the form $\dot\varphi = A(\varphi,\psi)$, $\dot\psi = B(\varphi,\psi)$, where $A^2 + B^2 \neq 0$ and both smooth functions A, B are doubly periodic. Measure preservation means the identity holds $\frac{\partial}{\partial\varphi}(aA) + \frac{\partial}{\partial\psi}(aB) = 0$. Denote

$$\lambda_1 = \int\limits_\Sigma A a d\varphi\wedge d\psi,\ \lambda_2 = \int\limits_\Sigma B a d\varphi\wedge d\psi.$$

The main role in the orbit dynamics on the torus Σ plays the number $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ called the Poincaré rotation number. As is known, if λ is rational or one of λ_i is equal to zero, then all orbits of the flow are periodic (this is because of the existence of a smooth invariant measure). But if λ is irrational and the flow is of smoothness C^2 then all orbits on the torus are transitive. More subtle effects of ergodicity of the flow are related with the arithmetic type of λ and a smoothness of functions A, B (Kolmogorov).

Remark. If DFVF X given on (M,Ω) is integrable and F is its smooth integral for which $dF \neq 0$, then there is a global classifying invariant similar to the case of an integrable Hamiltonian vector field X_H on a nondegenerate level of H (Fomenko).

Acknowledgement. L.L. acknowledges a financial support from the Russian Science Foundation (grant 14-41-00044) and Russian Ministry of Science and Education (project 1.3287.2017, target part), E.Y. does from RFBR (grant no. 16-01-00132) and the Basic Research Program at the Higher School of Economics in 2018 (project no. 95).

Game control problems for distributed systems

Vyacheslav Maksimov (Russia, Ekaterinburg)
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS
maksimov@imm.uran.ru

Last years, a part of mathematical control theory, namely, the theory of control for distributed systems, has been intensively developed. To a considerable degree, this is stimulated by the fact that a rather wide set of applied problems is described by such systems. At present, there exists a number of monographs devoted to control problems for distributed systems. In most of these works, the emphasis is on problems of program control in the case when all system's parameters are precisely specified. But the investigation of control problems for systems with uncontrollable disturbances (game control problems) is also natural. Similar problems have been less investigated; in our opinion, this is connected with the fact that the well-known Pontryagin maximum principle is not really suitable for solving such problems. In the early 70'es, N.N. Krasovskii, working in Ekaterinburg, suggested an effective approach to solving game control problems. This approach is based on the formalism of positional strategies and extremal shift methods. In the report, we discuss applications of the feedback control method developed by the Ekaterinburg school to investigating some game control problems for distributed systems. We considered a phase field equation of the form

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + l\frac{\partial}{\partial t}\varphi = k\Delta_L\psi + u - v \quad \text{in} \quad \Omega\times(t_0,\vartheta],$$
$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \xi^2\Delta_L\varphi + g(\varphi) + \psi$$

with the boundary condition $\frac{\partial}{\partial n}\psi = \frac{\partial}{\partial n}\varphi = 0$ on $\partial\Omega \times (t_0, \vartheta]$ and the initial condition $\psi(t_0) = \psi_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$ in Ω. Here, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with the sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, Δ_L is the Laplace operator, $\partial/\partial n$ is the outward normal derivative, and $g(z) = az + bz^2 - cz^3$. Also we consider a parabolic equation with memory

$$\frac{\partial}{\partial t}x - \Delta_L x + e^{-\eta t}R(e^{\eta t}x) + \eta x + \alpha K_\eta(t)x_{0,t}(\cdot) = u - v \quad \text{in } \Omega \times (t_0, \vartheta],$$

with the boundary condition $\frac{\partial}{\partial n}x = 0$ on $\partial\Omega \times (t_0, \vartheta]$ and the initial condition $x(t_0) = x_0$ in Ω. In this setting, α is a real number, R is a cubic polynomial $R(y) = k(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$ with given real numbers $k > 0$ and $y_1 < y_2 < y_3$, η is a sufficiently large real parameter. This equation includes the Schlögl and FItzhugh-Nagumo systems.

Sub-Riemannian geodesics on the group of motions of Euclidean space

Alexey Mashtakov (Russia, Pereslavl-Zalessky)
Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
alexey.mashtakov@gmail.com

We consider the sub-Riemannian problem on the Lie group $SE(3)$ of motions of three-dimensional Euclidean space. We prove Liouville integrability of the Hamiltonian system of the Pontryagin maximum principle, and present explicit formulas for the extremal controls in the particular case, important in applications. Next, we show a relationship between the sub-Riemannian problem in $SE(3)$ and problem **Pcurve** of minimizing the compromise between length and geodesic curvature for a curve in $\mathbb{R}^3$ with fixed boundary points and directions. We give explicit formulas for extremals in problem **Pcurve** and investigate their geometric properties.

The talk is based on joint works with R. Duits, A. Ghosh, T. Dela Haije and A. Popov.

References

[1] Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A. On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps // Journal of dynamical and control systems, 2016, Vol. 22, No. 4, P. 771–805.

[2] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, No. 8, P. 952–957.

Numerical analysis of one Painlevé problem. Rod falling down on rough surface.

Boris Miller (Russia, Moscow)
A. A. Kharkevich Institute for Infromation Transmission problems, RAS
bmiller@iitp.ru
Evgeny Rubinovich (Russia, Moscow)
V. A. Trapeznikov Institute of Control Problems, RAS
rubinvch@ipu.rssi.ru

We consider the impact motion in system with dry friction, where so-called paradox Painlevé could arise. The matter of the paradox is that the absolute rigid model for the impact between the rod and surface and the Coulomb law for the dry friction during the interaction phase lead to impossibility to determine velocities after the impact. As was noticed by Painlevé himself for the coefficient of friction greater than 4/3 the complementary approach does not give the solution for some angles of incidence [1].

In our recent article [2] we used the time-spatial singular transformation to avoid such difficulties for the case of planar rod's incidence. Here we extend this approach to the case of oblique incidence basing on the model suggested in [3]. The article presents the theoretical approach, establishes the existence of the limit solution for the rigidity coefficient tending to the infinity and demonstrate the similarity of the numerical solution for large coefficient of rigidity.

References

[1] P. Painlevé, Leçons sur le Frottement. Hermann, Paris, 1895.

[2] Miller B. M., Rubinovich E. Ya., and Bentsman J. Singular Space-Time Transformation. Towards one Method for Solving the Painleve Problem. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 219, No. 2,P.208-219. November, 2016 (DOI 10.1007/s10958-016-3098-1)

[3] Z. Zhao ea., The Painlevé paradox studied at a 3D slender rod, Multibody Syst. Dyn. (2008), 19, pp. 323–343.

On maximum principles for fractional Laplacians[57]

Nazarov A. I. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg Dept of Steklov Math Institute and St. Petersburg State University
al.il.nazarov@gmail.com

We give a unified approach to strong maximum principles for a large class of nonlocal operators of order $s \in (0, 1)$, that includes the Dirichlet, the Neumann Restricted (or Regional) and the Neumann Semirestricted Laplacians.

The talk is based on the joint work with Roberta Musina (Udine University, Italy).

References

[1] Musina R., Nazarov A. I. Strong maximum principles for fractional Laplacians // Preprint available at https://arxiv.org/abs/1612.01043. To appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.

To the question of mechanics of midwater trawl

Nedostup A.A., Razhev A.O. (Russia, Kaliningrad)
Kaliningrad State Technical University
nedostup@klgtu.ru, aor1974@mail.ru

When modeling the mechanics of midwater trawl shell with the use of systems of differential equations one of the tasks is to choose the finite-difference scheme. The main selection criteria are accuracy, convergence speed and stability. Implicit finite-delta schemes are more accurate, faster convergence and more stable than explicit. The problem of stability is especially important in the solution of rigid systems of differential equations, such as equations of motion taking into account tension forces, when during transient processes it is possible to spasmodic multiple changes in the strength of tension forces in ropes and threads. The article considers the method of solving the problem using the mathematical model of the interacting particles by the implicit finite-difference Euler method. Dependence of internal forces on displacement, their private derivatives on speed and displacement and dependence of hydrodynamic forces on speed are obtained. Methods of calculation of private derivatives of hydrodynamic forces on speed and displacement, linearization systems of differential equations of movement and solution of the received system of linear algebraic equations are offered.

References

[1] Nedostup A. A, Razhev A. O. A mathematical model of interaction of the trawl door with the aquatic environment. Marine Intelligent Technologies. 3(37) Vol.1. 2017. - p. 154-157.

[2] Nedostup A. A, Razhev A. O. Software to study hydrodynamics of the trawl doors. Marine Intelligent Technologies. 3(37) Vol.1. 2017. - p. 168-173.

[3] Nedostup A. A., Razhev A. O. A discrete model of gill nets for static and dynamic problems / 11th International workshop - Contributions on the theory of fishing gears and related marine systems DEMAT 2013. V. 8. 2013. Germany. Rostock. p. 13-22.

[57] Author's work was supported by RFBR grant N17-01-00678a.

[4] Babenko K. I. Fundamentals of numerical analysis. M.: Science. 1986.

[5] Euler L. Integral calculus. Vol.1. — M.: GITTL. 1956.

[6] Maksimov Yu. A. Algorithms of linear and discrete programming. — M.: MEPhI, 1980.

On long-term dynamics of slow-fast systems with passages through resonances

Anatoly Neishtadt (Moscow, Russia)
Space Research Institute of RAS, Loughborough University, Loughborough, UK
aneishta@iki.rssi.ru; a.neishtadt@lboro.ac.uk

Small perturbations imposed on an integrable nonlinear multifrequency oscillatory system cause a slow evolution. During this evolution the system may pass through resonant states. There are important phenomena related to such passages: capture into resonance and scattering on resonance. We will discuss the dynamics on long time intervals on which many passages through resonances occur.

Effects of passages through resonances can be considered as random events. Such effects separated by long time intervals can be treated as statistically independent. In this talk we describe model examples from charged particles dynamics that demonstrate these quasi-random effects. In particular, we present an analog of kinetic equation for description of such kind of dynamics.

The talk is based on papers [1 - 4].

References

[1] Artemyev A.V., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A., Mourenas D. Kinetic equation for nonlinear resonant wave-particle interaction. Physics of plasmas, **23**, 090701 (2016)

[2] Artemyev A.V., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A., Mourenas D. Probabilistic approach to nonlinear wave-particle resonant interaction. Phys. Rev. E, **95**, 023204 (2017)

[3] Artemyev A.V., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A., Mourenas D. Kinetic equation for systems with resonant captures and scatterings. arXiv:1710.04489 (2017)

[4] Neishtadt A.I. Averaging, passage through resonances, and capture into resonance in two-frequency systems. Russian Math. Surveys, **69**, 5, 771-843 (2014)

Homogenization and Biomathematics[58]

Panasenko G. (France, Saint-Etienne)
Univ Lyon, ICJ and MODMAD
grigory.panasenko@univ-st-etienne.fr

The talk is a review on the applications of the homogenization theory in multiscale mathematical modeling in biology with an accent at [2], [3], [12], [13], [11]. A large spectrum of biophysical models deals with viscous flows in porous media and in thin structures: blood flow in a network of vessels, blood flow through a fibrin binded RBC, network of capillaries (see [4] for rheology). In these models the standard homogenization techniques for the flows in porous medium can be applied. The most interesting problems concern the justified interface conditions between a Newtonian or non-Newtonian flow in some part of the domain and filtration in the porous part (see [10]). In particular in the Robin type junction conditions on the pressure was derived for the Stokes equation in a domain with periodic set of thin channels ([2]). On the other hand, modeling of the blood flow in a vessel needs to take into consideration the fluid-elastic (or viscoelastic) wall interaction, where the wall has a heterogeneous structure and can be homogenized (see [13]). Also the light absorption in a tissue is very different within blood vessels and out of vessels. Namely, it is

[58]The work is supported by the Russian Science Foundation, grant number 14-11-00306, executed by National Research University Moscow Power Engineering Institute.

much higher in vessels. This leads to a homogenization problem with contrasting coefficients, and the classical homogenization theory has limitations of applicability ([12]). Finally, complete asymptotic expansion of a solution was constructed in the case when classical homogenization doesn't work([3]). Modeling of wave propagation in the lungs via the homogenization is presented in [1], while for waves in the bones we refer to [5], [14]. An important direction is related to the multiscale modeling in electrophysiology with application to the heart motion. The main model there is the so called cable equation and it corresponds to a set of cells having conductive liquid part and weakly conductive but thin membrane. These problems were studied as formally [7] so that rigorously by means of Γ-convergence and two-scale convergence [15], [9], [6], [8]. Finally an important class of homogenization problems appears in application to the behaviour of cells, their nutrition, growth, death etc. Often the cells are modeled by discrete points, and so we deal with some differential equations with Dirac-like functions as the coefficients. One of such equations, diffusion discrete absorption (DDA) equation was homogenized in [11]. Currently this 1D equation is generalized for multiple dimensions.

References

[1] P.Cazeaux, C.Grandmont, Y.Maday, Homogenization of a model for the propagation of sound in the lungs. *SIAM Multiscale Model. Simul.,* 13(1), 2015, 43-71.

[2] C.DAngelo, G.Panasenko, A.Quarteroni, Asymptotic-numerical derivation of the Robin type coupling conditions for the macroscopic pressure at a reservoir-capillaries interface, *Applicable Analysis*, 2013, 91, 1,158-171, http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2011.601457.

[3] A.Elbert, G.Panasenko, Asymptotic analysis of the one-dimensional diffusion absorption equation with rapidly and strongly oscillating absorption coefficient, *SIAM Journal of Math. Anal.*, 2012, 44, 3, 2099-2119. http://dx.doi.org/10.1137/100817802.

[4] G.P.Galdi, R.Rannacher, A.M.Robertson, S.Turek, Hemodynamical Flows. Modeling, Analysis and Simulations 5oberwolfach Seminars. Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 2008.

[5] M.Fang, R.P.Gilbert, P.Rowe, A.Vasilic, Homogenization of time harmonic acoustics of bone: biphasic case. *International Journal of Evolution Equations*, **9**, 1, 2014, 71-98.

[6] C. Jerez-Hanckes, I.Pettersson, V.Rybalko, Multiscale analysis of myelinated axons, *Eighth International Conference and Summer School on the Multiscale Modeling and Methods: Application in Engineering, Biology and Medicine*, Santiago de Chile, January 8-12, 2018, Book of abstracts, Eds. D.Hurtado, A.Osses, G.Panasenko, p.7.

[7] P.E.Hand, C.S.Peskin, Homogenization of an electrophysiological model for a strand of cardiac myocytes with gap-junctional and electric-field coupling, *Bulletin of Mathematical Biology* (2010) 72: 14081424, DOI 10.1007/s11538-009-9499-2.

[8] P.E.Hand, B.E.Griffith, Empirical study of an adaptive multiscale model for simulating cardiac conduction, *Bull Math Biol* (2011) 73:30713089 DOI 10.1007/s11538-011-9661-5.

[9] D.Hurtado, S.Castro, A.Cizzi, Computational modeling of non-linear diffusion in cardiac electrophysiology: A novel porous-medium approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 300 (2016) 70-83.

[10] W.Jager, A.Mikelic On the interface boundary conditions by Beavers, Joseph and Saffman. *SIAM J. Appl. Math.* 60, (2000)1111-1127.

[11] P.Kurbatova, G.Panasenko, V.Volpert, Asymptotic-numerical analysis of the diffusion- discrete absorption equation, *Math. Methods in the Applied Sciences*, vol. 35, 2012, pp. 438-444. http://dx.doi.org/10.1002/mma.1572.

[12] S.Mottin, G.Panasenko, S.Sivaji Ganesh, Multiscale modeling of light absorption in tissues: limitations of classical homogenization approach, *PLoS ONE*, vol.5, 12, 2010, pp.1-9, e14350. http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0014350.

[13] G.Panasenko, R.Stavre, Viscous fluid thin elastic plate interaction: asymptotic analysis with respect to the rigidity and density of the plate, *Appl. Math. Optim.*, 2018, https://doi.org/10.1007/s00245-018-9480-2.

[14] W.J.Parnell, Q.Grimal, The influence of mesoscale porosity on cortical bone anisotropy. Investigations via asymptotic homogenization, *J. Royal Soc. Interface*, **6**, 2009, 97-109, doi:10.1098/rsif.2008.0255.

[15] M.Pennacchio, G.Savaré, P.Colli Franzone, Multiscale modeling for the bioelectric activity of the heart, *SIAM J. Math. An.*, **37**, 4, 2006,1333-1370.

On divergence of formal solutions to P3

Parusnikova A. V., Vasilyev A. V. (Russia, Moscow)
NRU HSE
parus-a@mail.ru

We present a family of values of the parameters of the third Painlevé equation (P3) such that Puiseux series formally satisfying this equation – considered as series of $z^{2/3}$ – are series of exact Gevrey order one. We prove the divergence of these series and provide analytic functions which are approximated by them in sectors with the vertices at infinity. The talk is based on our works [1, 2].

References

[1] A. V. Vasilyev, A. V. Parusnikova. Different approaches on finding asymptotics of solutions to the third Painlevé equation near infinity. Itogi Nauki i Techniki. Sovremennaya matematika i ee prilojeniya. Tematicheskie obzory 2017, (Russian). To be translated in "Journal of Mathematical Sciences".

[2] A. V. Parusnikova, A. V. Vasilyev, On Divergence of Puiseux Series Asymptotic Expansions of Solutions to the Third Painlevé Equation. arxiv.org No. 1702.05758v2.

Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\cdot)$-laplacian[59]

Pastukhova S. E. (Russia, Moscow)
MIREA – Russian Technological University
pas-se@yandex.ru
Yakubovich D. A. (Russia, Vladimir)
A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University
yakubovichfmf@mail.ru

We consider Galerkin approximations of solutions to the Dirichlet problem

$$Lu = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}A(x)\nabla u\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded Lipschitz domain. Assume that the exponent $p(x)$ is a measurable function satisfying the condition

$$1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty, \tag{2}$$

$A = A(x)$ is a measurable symmetric matrix such that $\nu|\xi|^2 \leqslant A\xi \cdot \xi \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ for some $\nu > 0$. The right-hand side f is a linear continuous functional on the Sobolev-Orlicz space $H \equiv H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, i.e., $f \in H'$, where H is the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in the Luxembourg norm

$$\|u\|_H = \|\nabla u\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(\lambda^{-1}u) \leqslant 1\right\}, \quad \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u) := \int\limits_\Omega |u|^p\,dx.$$

By a solution to the problem (1), we understand a function $u \in H$ such that

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}A(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H.$$

Assume additionally that

$$\inf_{x\in\Omega}\{p(x) - |p(x)-2|\mu(A(x))\} > 0, \qquad \text{where} \quad \mu(A) = \sup_{|\xi|=1}\frac{|A\xi|}{A\xi\cdot\xi}.$$

Then the unique solvability of the problem (1) holds.

[59]The authors were supported by the Grant of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (No 1.3270.2017/4.6)

Let $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$ is a sequence of expanding finite-dimensional subspaces of H such that their union $\bigcup_n H_n$ is dense in H. The Galerkin approximation is defined as the solution of the problem

$$u_n \in H_n, \quad \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_n. \tag{3}$$

Under the above conditions, problem (3) is uniquely solvable.

Our goal is to obtain estimates of the difference between the exact solution of problem (1) and its Galerkin approximation.

We use following notation: $\Omega^+ = \{x \in \Omega : \; p(x) \geqslant 2\}$, $\Omega^- = \{x \in \Omega : \; 1 < p(x) < 2\}$; $p'(x) = p(x)/(p(x)-1)$ is the Hölder-conjugate exponent.

Theorem. *Let u, u_n be solutions of (1) and (3). Then under the above conditions there hold the following estimates:*

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega^+)}(\nabla u - \nabla u_n) \leqslant C \operatorname{dist}(u, H_n), \quad \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega^-)}(\nabla u - \nabla u_n) \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

$$\varrho_{L^{p'(\cdot)}(\Omega^+)}(\xi - \xi_n) \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^{\frac{\beta'}{2}}, \quad \varrho_{L^{p'(\cdot)}(\Omega^-)}(\xi - \xi_n) \leqslant C \operatorname{dist}(u, H_n), \tag{5}$$

where $\xi = |\nabla u|^{p(\cdot)-2} A \nabla u$, $\xi_n = |\nabla u_n|^{p(\cdot)-2} A \nabla u_n$. The constant C depend on p, A and $\|f\|_{H'}$, this dependence can be specified exactly.

This result is proved in [1]. It extends the result of the paper [2] where the case of the pure p-Laplacian $Lu = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ with the constant exponent $p > 1$ was considered.

Convergence and error estimates of the type (4) and (5) can be obtained more exact if the bounds α and β from (2) lie at one side of the value 2 and, thereby, $p \leqslant 2$ everywhere in the domain Ω (singular case) or $p \geqslant 2$ everywhere in the domain Ω (degenerate case).

References

[1] Pastukhova S. E., Yakubovich D. A., "Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\cdot)$-Laplacian", Applicable Analysis, p. 1-17. Published online: 21 March 2018, DOI 10.1080/00036811.2018.1451641.

[2] Zhikov V. V., Yakubovich D. A., "Galerkin approximations in problems with p-Laplacian", Journal of Mathematical Sciences, **219**:1(2016), 99–111.

Approximation of stable manifolds for semilinear equations

S. Piskarev (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
piskarev@gmail.com

The Hartman-Grobman theorem states that the behavior of a dynamical system at a small neighborhood of a hyperbolic equilibrium point coincides qualitatively with the behavior of its linearization near this equilibrium point, where hyperbolicity means that there are no eigenvalue of the linearization on the imaginary axis. Therefore, when working with such dynamical systems, one can use the linearization of the system to analyze its behavior near a hyperbolic equilibrium point. The behavior of solutions of partial differential equations at a neighborhood of a hyperbolic equilibrium point, including fractional equations, is the special interest [1-3]. Such processes are encountered in a variety of models of physical phenomena, which caused a lot of publications on this subject. We have established the possibility of approximating stable manifolds of fractional differential semilinear equations at the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point. We investigated the numerical analysis of a semilinear fractional problem

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad t \geqslant 0, \quad u(0) = u^0,$$

in the Banach space E, where the operator A generates an analytic C_0 -semigroup, D_t^α is Caputo fractional derivative, and the function $f(\cdot)$ is sufficiently smooth. In the case of fractional derivatives, the resolution family of the problem does not decrease exponentially on any subspaces, which does not allow us to use the traditional analysis of the behavior of trajectories on manifolds. A general approach to establish a semidiscretization of stable manifolds is developed. The phase space in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point can be decomposed in such a way that the initial problem with the initial value reduces to a system of initial problems in invariant subspaces corresponding to positive and negative real parts of the spectrum. It is shown that such splitting of equation retains the same structure on the common approximation scheme. The basic assumption for our results is naturally satisfied, for example, for operators with compact resolvents and can be verified for the finite element method, as well as for the method of finite differences.

The research was partially supported by grants of Russian Foundation for Basic Research 15-01-00026_a, 16-01-00039_a, 17-51-53008_a and DAAD.

References

[1] Cong N. D., Doan T. S., Siegmund S., Tuan H. T. On stable manifolds for planar fractional differential equations // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 226. P. 157–168.

[2] Cong N. D., Doan T. S., Siegmund S., Tuan H. T. On stable manifolds for fractional differential equations in high-dimensional spaces // Nonlinear Dynam. 2016. Vol. 86. P. 1885–1894.

[3] Sayevand K., Pichaghchi K. Successive approximation: a survey on stable manifold of fractional differential systems // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. Vol. 18. P. 621–641.

Topological classification of Morse-Smale systems

Olga Pochinka (Russia, Nizhny Novgorod)
HSE
olga-pochinka@yandex.ru

Morse-Smale systems were introduced into dynamics by S. Smale [1] after the work of A. Andronov and L. Pontryagin [2], as applicants for the description of an everywhere dense class of structurally stable systems. The reality turned out to be much richer, surprising with a variety of rough systems. However, Morse-Smale diffeomorphisms and flows have unconditional value, as the simplest systems preserving their qualitative properties under small perturbations. The dynamics of these systems are called regular and it is closely related to the topology of the ambient manifold, realizing a variety of topological effects on it. A link, a knot, a wild embedding of submanifolds, all this can be illustrated on invariant sets of Morse-Smale systems. Hence it is clear that the classification of these simplest systems is not so trivial.

The report will review the existing achievements in the topological classification of Morse-Smale cascades and flows, as well as the results recently obtained, including by the author of the report [3], [4], [5].

Acknowledgement. The investigations were supported by the fundamental research program of the HSE in 2018.

References

[1] S. Smale. Morse inequalities for a dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. 43–49.

[2] A. Andronov, L. Pontryagin. Rough systems // DAN. 1937. V. 14. N. 5. 247–250.

[3] Pochinka O., Grines V., Van Strien S. A complete topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces: a kind of kneading theory in dimension two / Cornell University Library. 2017.

[4] Grines V., Pochinka O., Bonatti C. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Duke Mathematical Journal. 2018.

[5] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208. No. 1. P. 81-91.

Extremal Controls in the Sub-Riemannian problem on the group of motions of Euclidean space

Anton Popov (Russia, Pereslavl-Zalessky)
Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
Alexey Mashtakov (Russia, Pereslavl-Zalessky)
Ailamazyan Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences
alexey.mashtakov@gmail.com

The sub-Riemannian problem on the group of motions of Euclidean space is to find a Lipschitzian curve $\gamma : [0, t_1] \to \mathrm{SE}(3)$, such that

$$\dot{\gamma} = u_3\mathcal{A}_3 + u_4\mathcal{A}_4 + u_5\mathcal{A}_5, \qquad \gamma(0) = \mathrm{Id}, \quad \gamma(t_1) = g,$$
$$l(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{\xi^2 u_3^2 + u_4^2 + u_5^2}\, dt \to \min, \qquad (u_3, u_4, u_5) \in \mathbb{R}^3, \quad \xi > 0,$$

where $\mathcal{A}_i$ are left-invariant vector fields in SE(3), and terminal time $t_1 > 0$ is free.

The vertical part of the Hamiltonian system of PMP reads as follows:

$$\dot{u}_1 = -u_3u_5,\ \dot{u}_2 = u_3u_4,\ \dot{u}_3 = u_1u_5 - u_2u_4,\ \dot{u}_4 = \frac{u_2u_3}{\xi^2} - u_5u_6,\ \dot{u}_5 = u_4u_6 - \frac{u_1u_3}{\xi^2},\ \dot{u}_6 = 0.$$

We obtain explicit formulas for the extremal controls $u_1, \ldots, u_5$ in the case, when $u_6 = 0$. As was shown in [1], this case is the most important in applications: tracking of neural fibers and blood vessels in MRI and CT images of human brain; and in motion planning problem for an aircraft, that can move forward/backward.

The talk is based on work [2].

References

[1] Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A. On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps // Journal of dynamical and control systems, 2016, Vol. 22, No. 4, P. 771–805.

[2] Mashtakov A. P., Popov A. Yu. Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, No. 8, P. 952–957.

Domain decomposition method for models of fiber reinforced bodies described by variational inequalities

E.M. Rudoy (Russia, Novosibirsk)
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk State University
rem@hydro.nsc.ru

We consider a boundary value problem describing an equilibrium of an elastic body with a thin elastic inclusion (fiber). We use a model of a fiber-reinforced composite material proposed in [1,2]. It is supposed that the inclusion is modelled by a Bernoulli-Euler beam. It is located inside the body Moreover, there exists a delamination crack between the inclusion and elastic matrix. The nonpenetration conditions are imposed on the cracks faces. The equilibrium problem is formulated as a minimization problem of the energy functional over the set of kinematically admissible displacements.

The main goal of the talk is to construct and test a numerical algorithm for solving the problem. Since the problem considered in the paper is in fact a problem of couplingof different models (model of an elastic body and model of the Bernoulli-Euler beam) and described by some variational inequality, to construct a numerical algorithm naturally to use the domain decomposition method based on Uzawa's method of solving variational inequalities [3,4]. At each step of the iterative algorithm two problems are solved: an equilibrium problem of the elastic body without inclusions and an equilibrium problem of the Bernoulli-Euler beam. The solutions of such problems are "connected" with each other by Lagrange multipliers.

The suggested algorithm has advantages such as the simplicity of its realization, possibility of using non-matching meshes, parallelization of computing processes. Note that the manufacturing of a composite materials needs many inclusions. Due to the parallelization the algorithm allows to calculate deformation of each fiber without a significant increase in computational costs.

Various numerical examples illustrating the feasibility of the algorithm are presented.

References

[1] Khludnev A. M., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. Vol. 92. P. 341–354.

[2] Khludnev A. M., Leugering G. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Complex Systems. 2014. Vol. 2. P. 1–21.

[3] Rudoy E. M. Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // ESAIM-Math. Model. Num. 2016. Vol. 50. P. 995–1009.

[4] Cea J. Theorie et algorithms. Dunod, Gauthier-Villars Paris. 1971.

On the sharp constant in “magnetic” 1D embedding theorem[60]

Scheglova A.P. (Russia, Saint-Petersburg)
St. Petersburg Electrotechnical University
alexandra.scheglova@gmail.com

We consider the problem of finding the sharp (exact) constant in the “magnetic” embedding theorem

$$\min_u \frac{\|u' + iAu\|_{L_2}}{\|u\|_{L_q}} =: \mu_q(A), \tag{1}$$

where $A \in L_1(0, 2\pi)$, and minimum is taken over all 2π-periodic absolutely continuous functions.

By the proper substitution of function A the problem (1) is reduced to the problem

$$\mu_q^2(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{2}{q}} \cdot \min_u \int_0^{2\pi} |u' + i\alpha u|^2 \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} |u|^q \, dx = 2\pi, \tag{2}$$

with $\alpha \in \mathbb{R}$ and $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$.

Trivially the value $\mu_q(0) \equiv 0$ is attained by any constant function. Further, if $q \leqslant 2$ then due to the evident estimate $\|u\|_{L_q} \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \cdot \|u\|_{L_2}$ the constant function also is a minimizer of $\mu_q(\alpha)$, and $\mu_q(\alpha) = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \cdot |\alpha|$. Thus, the constant function is a natural candidate to the minimizers of $\mu_q(\alpha)$.

In what follows we assume $2 < q < \infty$.

Theorem 1. *Let $(q + 2)\alpha^2 > 1$. Then the function with $u \equiv 1$ cannot provide minimal value in the problem (2), and thus we have $\mu_q(\alpha) < (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \cdot |\alpha|$.*

Theorem 2. *Let $(q + 2)\alpha^2 \leqslant 1$. Then the function with $u \equiv 1$ provides minimal value in the problem (2), and thus we have $\mu_q(\alpha) = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \cdot |\alpha|$.*

The talk is based on joint work with A.I. Nazarov [1].

References

[1] Nazarov A. I., Scheglova A. P. On the sharp constant in “magnetic” 1D embedding theorem // to appear in RJMP, available at http://arxiv.org/abs/1712.08829.

[60] Authors’ work was supported by RFBR grant 17-01-00678a.

Topology of dynamics of a nonhomogeneous rotationally symmetric ellipsoid on a smooth plane

Sechkin Georgii (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
sechkinegor@gmail.com

Let us consider an ellipsoid of revolution moving on a smooth horizontal plane under the action of gravity. We construct topological invariants for this system and classify corresponding Liouville foliations up to Liouville equivalence. Two systems are called equivalent if they have the same closure of integral trajectories of systems' solutions. Suppose that the mass distribution in the ellipsoid is such that it has an axis of dynamical symmetry coinciding with the axis of geometric symmetry. Moments of inertia about principal axes of inertia perpendicular to symmetry axis are equal to each other. We also assume that the center of mass lies on this symmetry axis (as in the Lagrange top) at distance s from the geometric center of the body. Firstly this problem was considered by M.Ivochkin [1].

A free rigid body has six degrees of freedom. We need three coordinates to describe the position of an arbitrary point in the body (e.g., the center of mass) with respect to a fixed space frame, and three more coordinates to describe the orientation of principal axes.

In our case, there is one holonomic constraint: the height of the center of mass above the plane is determined by the orientation of principal axes. Thus, the number of degrees of freedom is reduced to five. Let us write the equation in Euler's form using $f' = \{f; H\}$, where H is the Hamiltonian, and $\{,\}$ is the Poisson bracket on $e(3)^*$. Then in standard (S, R) coordinates we get the following first integrals: $H = \frac{1}{2}\Sigma\frac{S_i^2}{A_i} + U$, where U is the potential energy and A is a constant, and $K = S_3$. Using the Fomenko-Zieshang invariants [2], we prove the following theorem.

Theorem 1. *The Liouville foliation associated with the above-described problem can be embedded in the foliation corresponding to the Zhukovsky system describing a heavy gyrostat.*

Note that N. E. Zhukovsky (1899) found a generalization of Euler's integrable case, with Hamiltonian $H = \frac{1}{2}\Sigma\frac{(S_i+\lambda_i)^2}{A_i}$. The additional integral is the same as in the Euler's case: $K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. See more in [2].

The work was supported by RFBR grant No. 16-01-00170
The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 16-01-00378-a) and the program "Leading Scientific Schools" (grant no. NSh-6399.2018.1).

References

[1] Ivochkin M. ,Yu. Topological analysis of the motion of an ellipsoid on a smooth plane // Sb. Math., 199:6 (2008), P.871-890.

[2] Bolsinov A. V. Fomenko A. T. Integrable Hamiltonian systems, Geometry, topology, classification. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004 .

On Homogenization for Locally Periodic Strongly Elliptic Operators

Senik N.N. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
N.N.Senik@gmail.com

In homogenization theory, one is interested in studying asymptotic properties of solutions to differential equations with rapidly oscillating coefficients. We will consider such a problem for a matrix strongly elliptic operator $\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon)\nabla$ on $\mathbb{R}^d$, where A is Hölder continuous of order $s \in [0, 1]$ in the first variable and periodic in the second. We do not require that $A^* = A$, so $\mathcal{A}^\varepsilon$ need not be self-adjoint. It is well known that the resolvent $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ converges, in some sense, as $\varepsilon \to 0$. In this talk, we will discuss results regarding convergence in the uniform operator topology on $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, i.e., the strongest type of operator convergence. We present the first two terms of an approximation for $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ and the first term of an approximation for $(-\Delta)^{s/2}(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$. Particular attention will be paid to the rates of approximation.

Asymptotic analysis of the explicit difference scheme for the Cauchy problem for the wave equation with localized initial data

Sergeev S.A. (Russia, Moscow)
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
SergeevSe1@yandex.ru

We consider the Cauchy problem for the wave equation with localized data

$$u_{tt} = c^2(x)u_{xx},\ u|_{t=0} = V(x/\mu),\ u_t|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbb{R},$$

where $V(y)$ is a smooth fast-decaing function with derivaions and the parametr $\mu \ll 1$ is the parametr of the localization, function $c(x)$ is smooth and bounded. The asymptotic solution of this problem can be constructed with the help of the Maslov's canonical operator.

On the other hands the solution of this problem can be obtianed via the numerical methods due to solving the difference scheme. The difference scheme can be written as a pseudo-deffirential operator due to shifting operator $Tu = e^{h\frac{\partial}{\partial x}}u$, where $h \ll 1$ is a step of discretisation in the scheme.

Thus the difference scheme can be also studied with the help of the Maslov's theory and the asymptotic solution of the difference scheme can be studied. We investigate the asymptotic solution of the explicit difference scheme. We compare the numerical solution and asymptotic solution of the difference scheme. Even the explicit scheme is unstable one can provide interesting results of such comparison depending the ratio between the step of the difference scheme h and parametr of localization μ.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project 16-11-10282).

References

[1] S.Yu. Dobrokhotov, V.E. Nazakinskii. Punctured Lagrangian manifolds and asymptotic solutions of the linear water wave equations with localized initial conditions. // Mathematical Notes, 2017, Volume 101, Issue 5-6, pp 1053-1060.

[2] V.G. Danilov, V.P. Maslov. Pontryagin's duality principle for calculation of an effect of Cherenkov's type in crystals and difference schemes. I // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1986, 166, 143-177.

[3] V.G. Danilov, V.P. Maslov. Pontryagin's duality principle for calculation of an effect of Cherenkov's type in crystals and difference schemes. II // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1986, 167, 103-116.

[4] V.G. Danilov, P.N. Zhevandrov. On Maslov's method for constructing combined asymptotics for h-pseudodifferential equations // Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1990, 34:2, 425-439.

[5] V.P. Maslov, Operator Methods (Operatornye metody), in Russian. Moscow: Nauka, 1973.

On crack propagation paths in elastic bodies

Viktor Shcherbakov (Russia, Novosibirsk)
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics and Novosibirsk State University
victor@hydro.nsc.ru

One of the frequently used approaches for describing quasistatic crack propagation in elastic bodies is the Griffith energy criterion. If the possible crack path is known a priori, the Griffith energy criterion can be formulated in terms of the energy release rate, which is the negative of the first right derivative of the potential deformation energy with respect to the crack length, and the fracture toughness. The talk is concerned with a model of linear elastostatics for a two-dimensional inhomogeneous anisotropic body weakened by a single straight crack. On the crack faces, nonpenetration conditions/Signorini conditions are imposed. Relying on a higher regularity result in Besov spaces for the displacement field in a neighborhood of the crack tip, we prove that the energy release rate is actually independent of the choice of a subsequent crack path (among the possible continuations of class H^3).

This is a joint work with A. M. Khludnev. The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 17-71-10171.

References

[1] Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. A note on crack propagation paths inside elastic bodies // Appl. Math. Lett. 2018. Vol. 79. P. 80–84.

Solutions of the generalized Euler–Poisson–Darboux equation and singular Klein–Gordon equation

Shishkina E. (Russia, Voronezh)
Voronezh State University
ilina_ dico@mail.ru

We apply Hankel transform method to solve the initial value problem

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u=c^2u,\quad u=u(x,t;k), \tag{1}$$

$$u(x,0;k)=f(x),\quad u_t(x,0;k)=0,\quad \gamma_i>0,\ x_i>0,\ i=1,...,n,\ t>0. \tag{2}$$

We will call (1) the **generalized Euler–Poisson–Darboux equation**. The distributional solution of (1)–(2) in convenient space was obtained. Besides, we give formulas for regular solution of (1)–(2) in particular case of k and of Cauchy the the singular Klein–Gordon equation.

We deal with the part of Euclidean space $R^n_+=\{x=(x_1,...,x_n)\in R^n,\ x_1>0,...,x_n>0\}$. Let

$$S_{ev}(R^n_+)=\left\{f\in C^\infty_{ev}:\sup_{x\in R^n_+}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|<\infty\quad\forall\alpha,\beta\in Z^n_+\right\},$$

where $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$, $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n$ are integer nonnegative numbers, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta=D^{\beta_1}_{x_1}...D^{\beta_n}_{x_n}$, $D_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}$. The set of continuous linear functionals is denoted by $S'_{ev}(R^n_+)$ is dual space of $S_{ev}(R^n_+)$.

Theorem 1. *The solution $u\in S'_{ev}(R^n_+)\times C^2(0,\infty)$ of the (1)–(2) for $k\neq-1,-3,-5,...$ is unique and defined by the formula*

$$u(x,t;k)=C(n,\gamma,k)\left(t^{1-k}(t^2-|x|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}j_{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}\left((t^2-|x|^2)_+^{\frac{1}{2}}\cdot c\right)*f(x)\right)_\gamma, \tag{3}$$

where

$$C(n,\gamma,k)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},$$

(For function j_ν see [1], for generalised convolution see [2].) In the case when $k<0$ of the (1)–(2) is not unique. When $k<0$ and $k\neq-1,-3,-5,...$ the difference between two arbitrary solutions is always of the form

$$At^{1-k}u(t,x;2-k),\qquad A=const, \tag{4}$$

where $u(t,x;2-k)$ is solution of the Cauchy problem

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2-k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u=c^2u,$$

$$u(x,0;2-k)=\psi(x),\qquad u_t(x,0;2-k)=0,$$

$\psi(x)$ is an arbitrary function or distribution belonging to S'_{ev}, When $k=-1,-3,-5,...$ a nonunique solution of the Cauchy problem (1)–(2) will contain a terms (4) and

$$\frac{e^{\pm\frac{1}{2}\pi ni}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-k+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t^{1-k}\left((t^2-|x|^2\pm i0)_\gamma^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}}*f(x)\right)_\gamma.$$

The solution $u\in S'_{ev}(R^n_+)\times C^2(0,\infty)$ of the following initial value problem for the singular Klein–Gordon equation

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]v=c^2v,\quad c>0,\quad v=v(x,t),\quad x\in R^n_+,\quad t>0. \tag{5}$$

$$v(x,0)=f(x),\qquad v_t(x,0)=0,\qquad f(x)\in S'_{ev} \tag{6}$$

is

$$v(x,t;k)=\frac{2^n\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-n-|\gamma|}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,t\,\left((t^2-|x|^2)_{+,\gamma}^{\frac{-n-|\gamma|-1}{2}}*f(x)\right)_\gamma. \tag{7}$$

This solution was obtained by letting k tend to 0 in (3).

The particular case of the problem (1)–(2) was studied in [2].

References

[1] Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L. On Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation // Differential Equations (Springer). 2014. Vol. 50. No 4. P. 513–525.

[2] Shishkina E. L., Sitnik S. M. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method // Electronic Journal of Differential Equations 2017. Vol. 2017. No 177. P. 1–20.

Evolution of solutions' support of NPE

Stiepanova K. V. (Ukraine, Kharkiv)
Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics
stepanova.ekaterina@hneu.net

Let $Q_T=(0,T)\times\Omega,\ 0<T<\infty, \Omega\subset\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>1\}$ be a bounded domain in $\mathbb{R}^n,\ n\geqslant 1$, with C^1–boundary $\partial\Omega=\partial_0\Omega\cup\partial_1\Omega$, where $\partial_0\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$, $\partial_1\Omega\subset\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>l\}, l=$ *const* >1. The aim of this brief communication is to investigate the behavior of weak solutions of the following initial-boundary problem:

$$u_t-\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(t,x,u,\nabla_x u)\big)_{x_i}+g(t,x)|u|^{q-1}u=0\ \text{ in }\ Q_T,\ \ 0<q<1; \tag{1}$$

$$u(t,x)=f(t,x)\ \text{ on }\ (0,T)\times\partial_0\Omega,\ \ u(t,x)=0\ \text{ on }\ (0,T)\times\partial_1\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,x)=0\qquad\forall x\in\Omega. \tag{3}$$

Here the functions $a_i(t,x,s,\xi)$ $(i=1,...,n)$ are continuous in all arguments and satisfy the following conditions for $(t,x,s,\xi)\in(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$: $|a_i(t,x,s,\xi)|\leq d_1|\xi|$,

$d_1 = const < \infty$, $\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(t,x,s,\xi) - a_i(t,x,s,\eta)\big)(\xi_i - \eta_i) \geq d_0|\xi-\eta|^2$, $d_0 = const > 0$. The absorption potential $g(t,x)$ is continuous nonnegative function such that $g(t,x) > 0$ $\forall (t,x) \in (0,T] \times \overline{\Omega}$; $g(0,x) = 0$ $\forall x \in \overline{\Omega}$. Following [1], by weak (or energy) solution of problem (1)–(3) we understand the function $u(t,\cdot) \in f(t,\cdot) + L_2\big(0,T;H^1(\Omega,\partial\Omega)\big)$ such that $u_t(t,\cdot) \in L_2\big(0,T;\big(H^1(\Omega,\partial\Omega)\big)^*\big)$, and u satisfies (2), (3) and the integral identity:

$$\int\limits_{(0,T)} \langle u_t,\ \xi\rangle\, dt + \int\limits_{(0,T)\times\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u,\nabla_x u)\xi_{x_i}\, dx\, dt + \int\limits_{(0,T)\times\Omega} g(t,x)|u|^{q-1}u\,\xi\, dx\, dt = 0$$

$\forall\ \xi \in L_2(0,T;H^1(\Omega,\partial\Omega))$.

We are interested in a phenomenon called "localization of solutions" for a wide classes of nonlinear parabolic equations with a degenerate absorption potential $g(t,x)$. It is well-known that in case of non-degenerate absorption potential: $g(t,x) \geq c_0 > 0$ $\forall (t,x) \in (0,T] \times \overline{\Omega}$, an arbitrary energy solution of the considered problem has the finite-speed propagation property for solution's support: $\zeta(t) := \sup\{|x| : x \in supp\ u(t,\cdot)\} < 1 + c(t)$, where $c(t) \to 0$ as $t \to 0$. In particular, this implies the localization of solution (see, e. g., [2]): $\zeta(t) := \sup\{|x| : x \in supp\ u(t,\cdot)\} < c_1 = c_1(T_1) < l$ $\forall\ t : 0 \leq t < T_1 = T_1(l) \leq T$. For various semi-linear parabolic equations, the localization of solutions' supports were studied by many authors (see [3] and references therein). A. S. Kalashnikov [4] was the first who investigated the localization property for the first initial-boundary problem for a 1-D heat equation. More precisely, he proved that solutions possess weak localization property for t separated from 0: $\sup\{\zeta(t) : 0 < \delta \leq t < T\} < c_1 = c_1(\delta) < \infty$ $\forall\ \delta > 0$. On the other hand, following G. I. Barenblatt's conjecture on an initial jump of the free boundary, A. S. Kalashnikov in [4] proved that $\inf\{\zeta(t) : 0 < t < t_*\} \geq c_2 = c_2(t_*) > 0$, if potential $g(t,x) = g_0(t)$ decreases fast enough when $t \to 0$.

The analysis of [4] concerns only the case of strongly degenerating boundary regimes $f(t)$. Also, note that the barrier technique of [4] can be applied only to equations that admit the comparison theorems. Our research involutes arbitrary $f(t)$, which are strongly degenerate, weakly degenerate as well as non-degenerate as $t \to 0$. We found sufficient conditions for the strong localization of solutions (that is continuous propagation of support near to $t = 0$). Note, that these conditions are formulated as a subordination of the boundary regime to the absorption potential. For an arbitrary boundary regime (without any subordination conditions), a certain type of weakened localization is obtained. Under some restriction from below on the degeneration of the potential, the strong localization holds for an arbitrary boundary regime (including regimes that do not satisfy any conditions of subordination).

Thus we would like to present the following results in this brief communication. With boundary regime $f(t,x)$, we associate the function, which will be used in statements:

$$F(t) := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \int\limits_{\Omega} f(s,x)^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \big(|\nabla_x f|^2 + g(t,x)|f(t,x)|^{q+1}\big) dx\, dt + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |f_t(t,x)|^2 dx\, dt.$$

Theorem 1. *Let the absorption potential g from equation (1) have a nonnegative monotonic minorant:*

$$g(t,x) \geq g_0(t) > 0\ \ \forall\, t > 0,\ \ g_0(0) = 0. \tag{4}$$

Let the function $F(\cdot)$ satisfies the following condition of subordination to g_0 from (4): there exists a function $S = S(t) > 0$ such that

$$F(t)^{\frac{(1-\psi)(1-q)}{2}} < S^2 \left(\int\limits_{\tau}^{t} g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2 + D_1 \int\limits_0^{\tau} g_0(t)^{2(1-\theta)} dt, \quad \forall\, \tau \in (0,t) \tag{5}$$

and

$$tS(t) \longrightarrow 0\ \ as\ \ t \longrightarrow 0, \tag{6}$$

where l from (2) and

$$0 < \theta := \frac{(q+1)+n(1-q)}{2(q+1)+n(1-q)} < 1, \quad 0 < \psi := \frac{n(1-q)}{2(q+1)+n(1-q)} < \theta < 1.$$

Then an arbitrary energy solution $u(t,x)$ of the problem (1)–(3) possesses the strong localization property and the following upper estimate holds:

$$\zeta(t) \leq 1 + c\, t\, S(t) \quad \forall t : 0 < t \leq T.$$

Remark. Also we give several simple conditions that guarantee (5), (6) – see [5].

Theorem 2. *Let the absorption potential g from equation (1) satisfies condition (4).*

Then an arbitrary energy solution $u(t,x)$ to problem (1)–(3) possesses the weakened localization property. That is, there exists $\zeta_1(t) \in C(0,\infty)$ such that

$$\zeta(t) \leq \min(\zeta_1(t), c\, L_1) \quad \textit{for all } t > 0,$$

where $\zeta(\cdot)$ the compactification radius and $L_1 = diam\ \Omega$.

Theorem 3. *Let the absorption potential g from equation (1) have a nonnegative monotonic minorant:*

$$g(t,x) \geq g_\omega(t) := \exp\left(-\frac{\omega(t)}{t}\right) \ \forall t > 0,$$

where $\omega(t)$ is a nonnegative nondecreasing function such that $\omega(t) \to 0$ as $t \to 0$.

Then an arbitrary energy solution $u(t,x)$ of the problem (1)–(3) possesses the strong localization property and the following upper estimate holds:

$$\zeta(t) \leq 1 + \frac{t}{2} + c_1 \left\{ t \ln\big(c_2\, F(t)\big) \ + \ c_3\, t \ln t^{-1} \ + \ c_4\, \omega\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ t < T.$$

Our approach is adaptation and combination of a variant of local energy method and an estimate method of Saint–Venant's principle type. These methods are the result of a long evolution of ideas coming from the theory of linear elliptic and parabolic equations. The essence of the energy method consists of special inequalities links different energy norms of solutions. This method was developed and used by J. I. Diaz, L. Veron, S. N. Antontsev, A. Shishkov, R. Kersner, Y. Belaud (see [2], [6], [7]). The second approach is a technique of parameter's introduction. This method was offered by G.A. Iosif'jan and O.A. Oleinik [8]. Note, that offered combined approach [9] can be applied also to higher order equations.

Acknowledgment. *Author is very grateful to organizers of the "DIFF-2018" for hospitality.*

References

[1] Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. 1983. 183:3. P. 311–341.

[2] Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations// Trans. Amer. Math. Soc. 1985. 290:2. P. 787–814.

[3] Kalashnikov A. S. Some problems of the qualitative theory of second-order nonlinear degenerate parabolic equations// Uspekhi Mat. Nauk. 1987. 42:2. No 254. P. 135–176.

[4] Kalashnikov A. S. On an initial jump of the free boundary in a boundary value problem for a semilinear heat equation with absorption// Uspekhi Mat. Nauk. 1997. 52:6. No 318. P. 1300–1301.

[5] Stiepanova K. V., Shishkov A. E. Strong and weakened localizations of solutions of quasilinear parabolic equations // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2013. No 7, P. 30–36.

[6] Antontsev S. N. On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations// Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1981. 260:6. P. 1289–1293.

[7] Kersner R., Shishkov A. Instantaneous Shrinking of the Support of Energy Solutions// J. Math. Anal. Appl. 1996. 198:3. P. 729–750.

[8] Iosif'jan G. A., Oleinik O. A. An analogue of the Saint-Venant principle for a second order elliptic equation, and the uniqueness of the solutions of boundary value problems in unbounded domains // Uspehi Mat. Nauk. 1976. Vol. 31:4. No 190. P. 261–262.

[9] Stepanova E. V., Shishkov A. E. Initial evolution of supports of solutions of quasilinear parabolic equations with degenerate absorption potential // Sbornik: Mathematics. 2013. Vol. 204. No 3. P. 383–410.

On orbital stability and bifurcation of long-periodic motions originating from hyperboloidal precession of a symmetric satellite in a resonant case

Sukhov E.A. (Russia, Moscow)
Moscow aviation institute (national state university)
sukhov.george@gmail.com

We consider motion of a dynamically symmetric rigid-body satellite relative to its center of mass. The satellite's motion takes place in a circular orbit in central Newtonian gravitational field. Assuming this, equations of motion possess a particular solution known as hyperboloidal precession. In case of hyperboloidal precession the satellite's figure axis lies in a plane perpendicular to its center of mass' radius-vector and remains at a constant angle to a normal vector of the orbital plane. If hyperboloidal precession is stable, there exist in its neighborhood two types of periodic motions: short-periodic motions with period close to $\frac{2\pi}{\omega_2}$ and long-periodic motions with period close to $\frac{2\pi}{\omega_2}$ where ω_1 и ω_2 are frequencies of the linearized system ($\omega_2 > \omega_1$).

In this work we study families of long-periodic motions originating from symmetric satellite's hyperboloidal precession in case of third-order resonance. The families' parameters are deviation of full mechanical energy of the system from its value for hyperboloidal precession, ratio of polar to equatorial moments of inertia and ratio of projection of satellite's absolute angular velocity on its figure axis to angular velocity of the satellite's center of mass. In works [1-3] for small values of energy in case of third- ($\omega_2 = 2\omega_1$) and fourth-order ($\omega_2 = 3\omega_1$) resonances aforementioned families of long-periodic motions were obtained analytically in form of converging small-parameter power series. In work [3] existence and linear orbital stability domains of long-periodic motions originating satellite's hyperboloidal precession in case of fourth-order resonance were constructed for all admissible values of parameters. In this work for all admissible parameters we construct domains of existence of long-periodic motions originating from hyperboloidal precession of a symmetric satellite in case of third-order resonance. A numerical method suggested in [4] was applied to compute existence domains in case of non-small values of energy. Following works [5, 6] we study bifurcations of said long-periodic motions. Domains of linear orbital stability of these periodic motions were obtained following work [7].

This research was carried out under state assignment (project Nr. 3.3858.2017/4.6).

References

[1] Sokolskiy A. G, Khovanskiy S. A. Periodic motions close to hyperboloidal precession of a symmetric satellite in circular orbit // Cosmic research. 1979. V. XVII. Issue 2. P. p. 208–217.

[2] Sukhov E. A., Bardin B. S. Numerical and analytical construction and stability study of periodic motions of a symmetric satellite. Engineering Journal: Science and Innovation, 2017, Nr. 11, 2017.

[3] Sukhov E. A. Analytical and Numerical Computation and Study of Long-Periodic Motions Originating from Hyperboloidal Precession of a Symmetric Satellite // AIP Conference Proceedings 1959, 040021 (2018).

[4] Karimov S. R., Sokolskiy A. G. Method of numerical continuation of natural families of periodic motions of Hamiltonian systems. Preprint of Institute of Theoretical Astronomy of the Academy of Sciences of the USSR. 1990. Nr. 9. 32 P.

[5] Markeev A. P. On nonlinear oscillations of a Hamiltonian system in case of 2:1 resonance // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63. Issue 5. P. p. 757–769.

[6] Bardin B. S, Chekin A. M. On nonlinear oscillations of a Hamiltonian system in case of 3:1 resonance // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. V. 73. Issue 3. P. p. 353–367.

[7] Sokolskiy A. G, Khovanskiy S. A. On numerical continuation of periodic motions of a Lagrangian system with two degrees of freedom // Cosmic Research. 1983. V. XXI. Issue 6. P. p. 851–860.

Homogenization of a stationary periodic Maxwell system in a bounded domain in the case of constant permeability

Suslina T.A. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
t.suslina@spbu.ru

Let $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ be a bounded domain of class $C^{1,1}$. In $\mathcal{O}$, we consider a stationary Maxwell system with the boundary conditions of ideal conductivity. The electric permittivity is given by a symmetric (3×3)-matrix-valued function $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) := \eta(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. We assume that $\eta(\mathbf{x})$ is bounded, positive definite, and periodic with respect to some lattice Γ. Let Ω be the cell of Γ. The magnetic permeability is given by a constant positive (3×3)-matrix μ_0. Suppose that $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ is the electric field, $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ is the electric displacement vector, $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ is the magnetic field, and $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ is the magnetic displacement vector. We write the Maxwell operator M_ε in terms of displacement vectors. It is defined by

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i \operatorname{rot} \mu_0^{-1} \\ -i \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consider the Maxwell system

$$(M_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon = 0,$$
$$[(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon]_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad [\mathbf{z}_\varepsilon]_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Here $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{r} = 0$; the symbols $[\cdot]_\tau$ and $[\cdot]_n$ stand for the tangential and normal components of a vector-valued function on the boundary.

The effective operator M^0 has coefficients η^0 and μ_0; here η^0 is the effective matrix. The homogenized system looks as follows

$$(M^0 - iI)\begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_0 = 0,$$
$$[(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0]_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad [\mathbf{z}_0]_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

We put $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$ and $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$.

By the classical results, the fields $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ converge weakly in L_2 to the homogenized fields $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$, respectively, as $\varepsilon \to 0$.

We assume that $\mathbf{q} = 0$. In this case, we improve the classical results and find approximations for the solutions in the L_2-norm.

Theorem 1. [1] *Suppose that $\mathbf{q} = 0$. Then the following is true.*
1) The fields $\mathbf{v}_\varepsilon$ and $\mathbf{z}_\varepsilon$ converge in the L_2-norm to $\mathbf{v}_0$ and $\mathbf{z}_0$, respectively. We have

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) The fields $\mathbf{v}_\varepsilon$ and $\mathbf{z}_\varepsilon$ are approximated in the H^1-norm:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon\mathbf{a}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon\mathbf{b}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Here $\mathbf{a}_\varepsilon$ and $\mathbf{b}_\varepsilon$ are certain correctors involving rapidly oscillating factors.
3) The fields $\mathbf{u}_\varepsilon$ and $\mathbf{w}_\varepsilon$ are approximated in the L_2-norm:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Xi^\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \varepsilon\Upsilon^\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Here Ξ and Υ are certain periodic matrix-valued functions defined in terms of the solutions of auxiliary problems on Ω.

The problem is reduced to the study of the model elliptic second order operator

$$L_\varepsilon = \mu_0^{-1/2} \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \operatorname{div} \mu_0^{1/2}$$

with the boundary conditions $(\mu_0^{1/2}\mathbf{f})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$, $\left((\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{f})\right)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. We find approximations for the resolvent $(L_\varepsilon + I)^{-1}$ in the $(L_2 \to L_2)$- and $(L_2 \to H^1)$-norms.

References

[1] Suslina T. A. Homogenization of a stationary periodic Maxwell system in a bounded domain in the case of constant permeability // Algebra i Analiz. 2018. Vol. 30. No 2.

Travelling waves in FPU lattices: the hard ball limit

Treschev D.V. (Russia, Moscow)
Mathematical Institute of the RAS
treschev@mi.ras.ru

Fermi-Pasta-Ulam lattice is a classical mechanical system of an infinite number of discrete particles on a line. Each particle is assumed to interact with the nearest left and right neighbors only. We construct travelling waves in the system assuming that the potential has a singularity at zero. The waves appear near the hard ball limit.

On attainability of the best constant in the Navier-type fractional Hardy – Sobolev inequalities[61]

Ustinov N. (Russia, St. Petersburg)
St. Petersburg State University
ustinns@yandex.ru

We consider the fractional Hardy—Sobolev inequality in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with $n \geq 2$ and $0 \in \partial\Omega$:

$$\||x|^{\sigma-s}v\|^2_{L_{2^*_\sigma}(\Omega)} \leq K[v]^2_{N,\tilde{H}^s(\Omega)} := K((-\Delta)^s_N v, v), \quad v \in \tilde{H}^s(\Omega) \tag{1}$$

where $0 < \sigma < s < 1$; $2^*_\sigma \equiv \frac{2n}{n-2\sigma}$. The space $\tilde{H}^s(\Omega)$ is defined by

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \left\{v \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(v) \subset \overline{\Omega}\right\}.$$

The Navier (spectral) fractional Laplacian $(-\Delta)^s_N$ in the right-hand side of (1) is the s-th power of conventional Dirichet Laplacian in the sense of spectral theory. Its quadratic form is defined by

$$((-\Delta)^s_N u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \phi_j)^2 \quad \text{for} \quad u \in \tilde{H}^s(\Omega)$$

where λ_j are eigenvalues and ϕ_j are ortonormal eigenfunctions of the Dirichet Laplacian.

We establish the attainability of the best constant in (1) under the following assumption: the boundary $\partial\Omega$ in a neighborhood of the origin is the graph of the function $y_n = F(y')$ and

$$f(r) := \int\limits_{S_r^{n-2}} F(y')dS_{y'} < 0 \quad \text{for small } r.$$

For $s = 1$ analogous result was established in [1].

[61] Author was supported by RFBR grant 17-01-00678

References

[1] Demyanov A. V., Nazarov A. I. On solvability of the Dirichlet problem to the semilinear Schrödinger equation with singular potential // Zap. nauch. sem. POMI, 336 (2006), 25-45 (in Russian); Journal of Mathematical Sciences, 143:2 (2007), 2857-2868. (in English)

On the Riemann-Hilbert Problem for Difference and q-Difference Systems

Ilya Vyugin (Russia, Moscow)
IITP RAS and HSE
vyugin@gmail.com

We study an analogue of the classical Riemann-Hilbert problem stated for the classes of difference and q-difference systems. A generalization of Birkhoff's existence theorem is presented. We prove that for any admissible set of characteristic constants there exists a system

$$Y(z+1) = A(z)Y(z) \text{ or } Y(qz) = Q(z)Y(z),$$

which has the given constants.

References

[1] Vyugin I., Levin R., On the Riemann–Hilbert problem for difference and q-difference systems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, V. 297, 297-313.

Parameterization of the Cauchy problem for reduction of overdetermined systems of differential equations

Zaytsev M. L. (Russia, Moscow)
Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences
vmlzaytsev@gmail.com

The report deals with the modification of the method of finding particular solutions for any overdetermined systems of differential equations by reduction to overdetermined systems of implicit equations. In the papers [1], [2] a method was proposed for finding particular solutions for overdetermined systems of partial differential equations. In this method, in order to find solutions one needs to solve systems of ordinary implicit equations. In this case, it can be shown that the solutions that we need can not depend on a continuous parameter, i.e. they are no more than countable. In advance, there is a need for such an overriding of systems of differential equations, so that their general solutions are no more than countable. Such an initial overdetermination is rather difficult to achieve. However, the proposed method also allows the reduction of overdetermined systems of differential equations not only up to systems of implicit equations, but also up to the systems of PDE of dimension less than that of the initial systems of PDE. In particular, under certain conditions, reduction to systems of ordinary differential equations (ODE) is possible. It turns out that it is possible to single out particular solutions for the overdetermined systems of PDE with the help of the parameterized Cauchy problem, which poses for parameterized ODE systems under certain conditions. In this report, one studies this Cauchy problem, as well as the parameterized Cauchy problem as a whole for arbitrary systems of PDE. It is shown that the Cauchy problem for the original overdetermined system of PDE can be solved if we solve the parameterized Cauchy problem for the ODE system obtained from the initial system of PDE. However, this problem can not be arbitrary, since in general it is specified for an overdetermined system of ODE. In this case, the solution not only exists and is unique, but will also depend on the initial data continuously, since this holds for ODE systems.

The general properties of systems of differential equations with parameterized solutions are also studied. It is shown that it is possible to find differential relations that hold on these solutions and are true in a space of variables of dimension greater than that of the solution space of the initial system of PDE. Thus, it is possible to find particular solutions for the systems of the PDE.

References

[1] Zaytsev M. L., Akkerman V. B. Hypothesis on reduction of overdetermined systems of differential equations and its application to equations of hydrodynamics // Vestnik VGU - Proceedings of VSU. 2015. No 2. P.5—27.

[2] Zaytsev M. L., Akkerman V. B. Another method for finding particular solutions of equations of mathematical physics // Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics. 2016. No 6(37). P.119—127.

On Periodic Solutions to Lagrangian Systems with Non-compact Configuration Space

Oleg Zubelevich (Russia, Moscow)
M. V. Lomonosov Moscow State University
ozubel@yandex.ru

Let $x = (x^1, \dots, x^m)$ and $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ be points of the standard $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$ respectively. Then let z stand for the point $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^{m+n}$. By $|\cdot|$ denote the standard Euclidean norm of $\mathbb{R}^k, \quad k = m, m+n$, that is $|x|^2 = \sum_{i=1}^k (x^i)^2$.

The main object of our study is the following Lagrangian system

$$L(t, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{z}^i \dot{z}^j + a_i \dot{z}^i - V, \quad z = (z^1, \dots, z^{m+n}).$$

The functions g_{ij}, a_i, V depend on (t, z) and belong to $C^2(\mathbb{R}^{m+n+1})$; moreover all these functions are $2\pi-$periodic in each variable φ^j and $\omega-$periodic in the variable $t, \quad \omega > 0$. For all $(t, z) \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ it follows that $g_{ij} = g_{ji}$.

We also assume that there are positive constants C, M, A, K such that for all (t, z) and $\xi \in \mathbb{R}^{m+n}$ we have

$$|a_i(t, z)| \leqslant C + M|x|, \quad V(t, z) \leqslant A|x|^2, \quad \frac{1}{2} g_{ij}(t, z) \xi^i \xi^j \geqslant K|\xi|^2.$$

Theorem 1. *Assume that in addition to imposed above conditions the following assumptions are fulfilled:*

1) all the functions are even:

$$g_{ij}(-t, -z) = g_{ij}(t, z), \quad a_i(-t, -z) = a_i(t, z), \quad V(-t, -z) = V(t, z);$$

2) the following inequality holds

$$K - \frac{M\omega}{\sqrt{2}} - \frac{A\omega^2}{2} > 0.$$

Then for each $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ *the Lagrangian system with Lagrangian* L *has a solution* $z(t) = (x(t), \varphi(t)) \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m+n})$ *such that*

1) the function z *is odd:* $z(-t) = -z(t)$;

2) $x(t + \omega) = x(t), \quad \varphi(t + \omega) = \varphi(t) + 2\pi\nu$.

Уравнения симметрического пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской в переменных Крокко

Булатова Р.Р. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
regina.bulatova@mech.math.msu.su
Самохин В.Н. (Россия, Москва)
Московский Политехнический университет
vnsamokhin@mtu-net.ru
Чечкин Г.А. (Россия, Москва)
МГУ им. М.В. Ломоносова
chechkin@mech.math.msu.su

В данной работе изучается поведение пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской. Мы применяем преобразование Крокко, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение. Другой подход для изучения системы уравнений пограничного слоя, а именно, замена переменных Мизеса, применен в [1], [2]. В отличие от замены Мизеса замена Крокко позволяет изучать как стационарные, так и нестационарные уравнения.

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений пограничного слоя имеет вид:

$$\nu u_{yy}(1+3d(u_y)^2) - uu_x - vu_y = -U(x)U'(x), \qquad u_x + v_y = 0. \tag{1}$$

Здесь ν, d — постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости предполагается равной единице, $U(x)$ — заданная функция, связаная с давлением $p(x)$ соотношением Бернулли $U^2(x) + 2p(x) = C = const$.

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = u_0(y), \quad u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x), \quad u(x,y) \to U(x) \quad \text{при} \quad y \to \infty. \tag{2}$$

Функции $u_0(y)$, $v_0(x)$ предполагаются заданными.

С помощью преобразования Крокко

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x,y)}{U(x)}, \qquad w(\xi,\eta) = \frac{u_y(x,y)}{U(x)}$$

система уравнений (1) с условиями (2) сводится к одному квазилинейному уравнению вида

$$\nu(1+3dU^2w^2)w^2 w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2-1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu d U^2 w_\eta^2 w^3 = 0 \tag{3}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi,1) = 0, \quad w(0,\eta) = w_0(\eta), \quad \big(\nu w w_\eta(1+3dU^2w^2) - v_0(\xi)w + U_\xi\big)\Big|_{\eta=0} = 0. \tag{4}$$

Эта задача решена методом прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (3) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказана теорема существования и единственности решения задачи (3), (4). А именно, имеет место утверждение.

Теорема 1. *Пусть $U(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $U_x > 0$, $U(0) = 0, U_x, v_0$ имеют ограниченную производную. Тогда задача* (3), (4) *имеет единственное решение w в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\ 0 < \eta < 1\}$, где $X > 0$ зависит только от U, v_0; это решение обладает следующими свойствами: $w, w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ непрерывны в Ω; $w_{\eta\eta} \le 0$, $w \ge 0$ в Ω; $w > 0$ при $\eta = 0$; w_η непрерывна по η при $0 \le \eta < 1$; пусть $\sigma := \sqrt{-\ln \mu(1-\eta)},\ 0 < \mu < 1$, тогда*

$$K_1(1-\eta)\sigma \le w \le K_2(1-\eta)\sigma; \quad -K_3\sigma \le w_\eta \le -K_4\sigma \quad \text{в} \quad \Omega;$$

$$|w_\xi| \le K_5(1-\eta)\sigma, \quad ww_{\eta\eta} < -K_6, \quad |w_{\eta\eta}| < K_7 \quad \textit{в} \quad \Omega.$$

В любой замкнутой подобласти, лежащей в Ω*, функция* w *и ее производные, входящие в уравнение* (3)*, удовлетворяют условию Гёльдера.*

References

[1] Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье – Стокса. Тр. семинара им. И.Г. Петровского, Т.28, 2011, С. 329–361.

[2] Самохин В. Н., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки. Тр. семинара им. И.Г. Петровского, Т.31, 2016, С. 158–176.

Анормальные траектории в субримановой $(2, 3, 5, 8)$-задаче

Сачкова Е.Ф. (Россия, Переславль-Залесский)
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук
efsachkova@mail.ru
Сачков Ю.Л. (Россия, Переславль-Залесский)
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук
yusachkov@gmail.com

Доклад посвящен исследованию вырожденных и невырожденных анормальных траекторий в субримановой задаче в вектором роста (2,3,5,8).

В случае вырожденных анормальных траекторий будет построен оптимальный синтез на подмногообразии [1].

В невырожденном случае будут описаны все анормальные управления. Будет доказана нестрогая анормальность круговых и постоянных управлений; доказана глобальная оптимальность круговых анормальных траекторий вплоть до первого витка спирали, являющейся проекцией этих траекторий на трехмерное подпространство; построен оптимальный синтез на подмногообразии в случае круговых анормальных управлений [2].

References

[1] Сачков Ю. Л., Сачкова Е. Ф. Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2,3,5,8) //Дифференциальные уравнения, 2017, том 53, № 3, с.362–374

[2] Сачкова Е.Ф. Решение задачи управления для нильпотентной системы // Дифференциальные уравнения, 2008, том 44, No. 12, с.1704-1707.

Endogenous growth model with anticipated population aging

Belyakov A.O. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
belyakov@mse-msu.ru
Kurbatsky A.A. (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
Prettner K. (Germany, Stuttgart)
University of Hohenheim

The population is time-varying with $n(\tau, t)$ denoting its size at time t of the cohort born at time τ. The dynamics of the cohort τ are defined by the time-dependent mortality coefficient $\mu(t)$ and by the integral renewal equation

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\tau,t) = -\mu(t)\, n(\tau,t), \quad n(t,t) = \int_{-\infty}^{t} n(\tau,t)\,\beta(t) d\tau, \quad n(\tau,0) = n_0(\tau),\, \forall \tau < 0,$$

where $\beta(t)$ is the time-dependent fertility coefficient. Functions μ, β, and the initial age profile n_0 are such that the problem has a solution. Since both mortality and fertility are assumed to be independent of age, the problem can be expressed via the number of agents $N(t) = \int_{-\infty}^{t} n(\tau, t)d\tau$ as follows

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \beta(t) - \mu(t), \quad N(0) = \int_{-\infty}^{0} n_0(\tau)d\tau, \quad n(\tau, t) = e^{-\int_\tau^t \mu(\theta)d\theta} N(\tau)\,\beta(\tau).$$

When both mortality and fertility decrease at the same value, when the difference $\beta(t) - \mu(t)$ is unchanged so is the dynamics of N, while the age profile n is shifting to older ages. This is called *population aging* – the issue for many industrialized countries.

We extend general equilibrium model in [1], assuming that fertility and mortality are time dependent, in order to study the effect of predicted population aging on economic growth.

We assume that an agent born at time τ maximizes her discounted life-time utility with respect to $c(\tau, t)$ for $t \in [\tau, \infty)$

$$u(\tau) \equiv \int_\tau^\infty e^{-\rho(t-\tau) - \int_\tau^t \mu(\theta)d\theta} \log[c(\tau, t)]\, dt,$$

where $c(\tau, t)$ denotes consumption at time t of the agent with her children. Each agent from cohort τ is endowed at time t with one unit of labor, which she inelastically supplies on the labor market to earn the going wage rate $w(t)$. We also assume that individuals are insured against the risk of dying with positive assets by a fair life insurance company that redistributes wealth of individuals who died amongst those who are still alive. Therefore the real rate of return $r(t)$ on assets $a(\tau, t)$ is augmented by the mortality rate $\mu(t)$. Taking final goods as numéraire, the wealth constraint of individuals belonging to cohort τ reads

$$\frac{\partial}{\partial t} a(\tau, t) = [r(t) + \mu(t)]\, a(\tau, t) + w(t) - c(\tau, t).$$

The solution to the optimization problem has to obey the no-bequest condition $a(\tau, \tau) = 0$ and the no-Ponzi game condition $\lim_{t\to\infty} e^{-\int_\tau^t [r(\theta)+\mu(\theta)]d\theta} a(\tau, t) \geq 0$.

The assumption that mortality depends only on time but not on age allows us to obtain analytical expressions for agent's optimal consumption profile $c(\tau, t)$ in the form similar to that for age profile presented above.

This research was supported by Russian Found for Basic Research (RFBR) under grant N 18-010-01169.

References

[1] Prettner, K. (2013) Population aging and endogenous economic growth. Journal of Population Economics 26(2), pp 811–834.

Научное издание

Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам

Тезисы докладов

Суздаль
6 — 11 июля 2018 г.

Печатается в авторской редакции

Рисунок на обложке Чупахиной О.М.

Подписано в печать 27.06.2018

Тираж 220 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Аркаим»
Владимир, ул. Б. Нижегородская, 1а
Тел.: 8 (4922) 32-49-52
e-mail: print@arkprint.ru
www.arkprint.ru