**АЛҒЫ СӨЗ**

Оқырмандар назарына ұсынылып отырған бұл оқу құралы автордың әл-Фараби атындағы Қазақ мемлекеттік ұлттық университетінің механика-математика факультетінің студенттеріне бірқатар жылдар бойы оқыған дәрістері негізінде жазылды және автордың ойға алған жоспары бойынша бірнеше бөлімнен тұруға тиісті жалпы ықтималдықтар теориясына арналған оқу құралдарының біріншісі (бірінші бөлімі) болып табылады.

Оқу құралы бес тараудан тұрады. Алғашқы тарау қалыптасқан дәстүр бойынша нәтижелер саны ақырлы немесе саналымды болатын тәжірибелердің ықтималдықтық модельдерін құрудан басталады да, осындай модельдер үшін дискретті элементар оқиғалар кеңістігі, элементар оқиға, оқиға, ықтималдық секілді ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарын енгізумен және аса маңызды кейбір классикалық модельдер мен үлестірімдерді қарастырумен аяқталады.

Екінші тарауда шартты ықтималдық, оқиғалар мен сынақтардың және бөліктеулер мен алгебралардың тәуелсіздігі секілді ұғымдар енгізіліп, толық ықтималдықтар және Байес формулалары дәлелденген және олардың қолдануларының көптеген мысалдары келтірілген.

Үшінші тараудың басында кездейсоқ шама мен оның үлестірім функциясының анықтамалары беріліп, олардың қарапайым қасиеттері келтірілген. Сонымен қатар бұл тараудың басым бөлігі кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын анықтап, зерттеуге және оларға байланысты кейбір маңызды теңсіздіктерді (Чебышев, Коши-Буняковский, Ляпунов т.б. теңсіздіктері) дәлелдеуге арналған. Бұл тарауда сонымен қатар орта квадраттық мағынадағы оптималды баға, Бернулли схемасы үшін үлкен сандар заңы, Бернулли схемасындағы белгісіз “табыс” ықтималдығын бағалау және ол үшін сенімділік интервалы секілді маңызды ұғымдардың да қарастырылып отырған дискретті ықтималдық кеңістігі тұрғысынан анықтамалары келтіріліп, олар үшін бірқатар тұжырымдар дәлелденген. Тарау ықтималдықтар теориясында аса маңызды рөл атқаратын бөліктеулерге байланысты шартты ықтималдықтар мен шартты математикалық күтімдерді анықтап, олардың қарапайым да терең қасиеттерін дәлелдеумен аяқталған.

Төртінші тарау Бернулли схемасындағы шектік теоремалар тақырыбына арналған. Мұнда Бернулли схемасы үшін үлкен сандар заңы, Муавр-Лапластың төңіректік (локальдық) және интегралдық теоремалары, Пуассон теоремасы тәрізді тұжырымдар келтіріліп, олардың дәлелдемелерімен қатар қолданулары да толық қарастырылған.

Оқулықтың соңғы бесінші тарауы туындатқыш функциялар тақырыбына арналған. Мұнда туындатқыш функцияның қарапайым қасиеттерімен қатар оның кейбір қолданулары (мәселен, Бернулли сынақтарындағы күту уақыттары мен бастапқы күйге оралу туралы есепке) туралы да сөз болады. Тараудың соңында үзіліссіздік теоремасы дәлелденіп, туындатқыш функциялар әдісінің кейбір қолдану мысалдары келтірілген.

Ықтималдықтар теориясынан қазақ тілінде жазылған есеп жинақтарының жоқтығын ескере отырып, оқу құралының әр параграфының соңында осы параграфта қарастырылған материалдарға байланысты бірқатар есептер келтірілген. Бұл есептердің кейбіреулерінде негізгі тексте келтірілген, бірақ дәлелденбеген тұжырымдарды дәлелдеу ұсынылса, екіншілері кейініректе пайдаланылатын, қажет болатын тұжырымдарды қамтиды; ал үшіншілері қосымша мәліметтер беруді көздесе, төртіншілері жәй әншейін жаттығулар ретінде берілген. Сонымен бірге оқу құралында әр тақырып бойынша жеткілікті түрде мысалдар келтіріліп, есеп шығару жолдары көрсетілген. Бұлар біздің оқулығымызды қосымша ықтималдықтар теориясынан есептер шығарудың әдістемелік құралы ретінде де, есептер жинағы ретінде де пайдалануға мүмкіндік береді ғой деп үміттенеміз.

Айта кететін тағы бір нәрсе, қазіргі қолданылып жүрген орыс тіліндегі есеп жинақтарының ішіндегі бізге құрылымы мен мағынасы жағынан ең жақыны, шамасы, А.М.Зубков, Б.А.Севастьянов және В.П.Чистяковтардың және А.В.Прохоров, В.Г.Ушаков пен Н.Г.Ушаковтардың жинақтары болар деп ойлаймыз. Сондықтан да оқырманға машықтану сабақтарында ретіне қарай біздің оқу құралымызға қосымша осы есеп жинақтарын пайдалануды ұсынамыз. Ал теориялық материалдарды баяндау барысында біз бұл оқу құралында негізінен В.Феллер (1-том), Б.В.Гнеденко, А.Н.Ширяев, А.Н.Боровков және де Б.А.Севастьяновтардың қалың қауым мойындаған белгілі оқулықтарын жетекшілікке алдық және де кейбір жеке тақырыптарды осы оқулықтар негізінде баяндадық.

Оқу құралында мынандай нөмірлеу және сілтеме жасау тәртібі қолданылған. Әрбір параграфтың өзінің өз ішіндегі (параграфты және тарауды көрсетусіз) теореманы, лемманы, формуланы, тұжырымды белгілейтін нөмірлеу тәртібі бар. Бір тараудың ішіндегі басқа параграфтағы сәйкес формулаға, теоремаға, леммаға т.б. сілтеме жасау үшін қос цифрмен нөмірлеу қолданылады (мәселен, 3.4 формуласына сілтеме жасау осы тараудағы 3-гі 4-формулаға сілтеме жасауды білдіреді). Басқа тараудағы нәтижеге сілтеме жасау үшін үш цифрдан тұратын нөмірлеу қолданылады (мәселен, 2.1.3 2-тараудың 1-гі 3-формуланы білдіреді).

Ендігі айта кететін жағдай- ол ықтималдықтар теориясы атауларының қазақшаға аударылу мәселесі. Осы уақытқа дейін ықтималдықтар теориясы бойынша жоғарғы оқу орындары студенттеріне арналған, қазақ тілінде жазылған бірнеше ғана оқу құралы (авторлары Б.Жаңбырбаев, К.Бектаев т.б.) баспадан жарық көріпті. Бірақ бұл оқулықтарда көптеген терминдердің қазақшаға аудармалары әртүрлі. Мәселен, “математическое ожидание”- математикалық үміт (Б.Жаңбырбаев), математикалық күтім (К.Бектаев) деп, ал “нормальное распределение”- қалыпты үлестірім (Б.Жаңбырбаев), нормал үлестірім (К.Бектаев) деп аударылған. ¦сынылып отырған оқу құралында автор негізінен Қазақстан Республикасының үкіметі жанындағы мемлекеттік терминология коммиссиясы бекіткен “Қазақша-орысша, орысша -қазақша сөздікті” (математика) (”Рауан” баспасы, Алматы, 1999ж) басшылыққа алды және де жоғарыда келтірілген қазақ тіліндегі оқулықтардың терминдерін өз көңіліне қонуына қарай пайдаланды, дегенмен терминдерге деген автор талғамына әріптестерінің, әсіресе студенттердің әсері өте мол болғанын атап өткен жөн.

Сөз соңында мүмкіндікті пайдаланып профессорлар М.Өтелбаевқа, Н.Т.Темірғалиевқа және доцент Н.Әренбаевқа пайдалы кеңестері және көптеген методологиялық мағынадағы талқылаулары үшін үлкен ризашылығымды білдіремін. Профессор Н.Т.Данаевқа осы оқу құралын жазуға себепкер болғаны, қолдағаны және көрсеткен көмектері үшін үлкен рахмет айтамын. Сонымен бірге оқулық жазу барысында қолдау көрсетіп, мүмкіндіктерінше өз көмектерін көрсеткендері үшін әл-Фараби атындағы ҚазМУ-дің механика-математика факультетінің функционалдық анализ және ықтималдықтар теориясы кафедрасында бірге істейтін барлық әріптестеріме ризашылыЄымды білдіремін және де көрсеткен жәрдемдері үшін кафедраның магистрлері мен аспиранттары С.Тәпееваға, С.Ыбырайымоваға, Н.Мекебаеваға, Ж.Файзуллаеваға, К.Алғазыға және А.Түймебаеваға да өз алғысымды айтамын. Аспирант З.Сүлейменованың көрсеткен қыруар көмегінсіз бұл оқулықтың жарық көруі екіталай болған болар еді, сондықтан оған да ерекше ризашылығымды білдіремін.

Сөз соңында қолжазбаны оқып пікір жазғандары және оқулықты жақсарту тұрғысындағы пайдалы ұсыныстары үшін ҚазМУ-дың кафедра меңгерушісі профессор Қ. Қасымов пен Т.Рысқұлов атындағы Қазақ мемлекеттік басқару академиясының кафедра меңгерушісі профессор Ў.Б.Тұңғатаровқа да үлкен рахметімді айтамын.

*Оқырман назарына.* Текстегі белгісі дәлелдеудің аяқталғандығын білдіреді.

**К І Р І С П Е**

1. Өткен ғасырдың соңы мен осы ғасырдың басында жаратылыс тану ғылымдарының қажеттіліктерінен туған әлдеқайда салиқалы сұранымдар математиканың бүгінде ықтималдықтар теориясы деп аталатын саласының тез дамуына әкеп соқты. Математиканың бұл саласы қазіргі уақытқа дейін қарқынды түрде даму үстінде.

Ықтималдықтар теориясының пайда болуын әдетте ХVІІ ғасырдың орта шеніне жатқызады және құмар ойындардың комбинаторикалық есептерімен байланыстырады. Әрине, құмар ойындарды қандай да бір ғылымның негізі бола алатындай негіз деп қарастыруға болмайды. Дегенмен де дәл осындай ойындар сол кездегі белгілі математикалық модельдердің қамтуына кірмейтін есептердің пайда болуына әкеп соққанын және жаңа идеялар, әдістер кіргізуге себепші болғандығын атап өту керек. Бұл жаңа элементтердің енгізілуі Гюйгенс, Паскаль, Ферма, Яков Бернулли секілді математиктердің аттарымен байланысты.

Мұнда әрине мынаған назар аударған жөн: жоғарыда аталған аса көрнекті математиктер құмар ойындар есептерімен айналыса отырып, кездейсоқ құбылыстарды зерттейтін ғылымның болашақтағы рөлін де болжай білді. Олар көп қайталанатын кездейсоқ құбылыстар негізінде белгілі бір заңдылықтар пайда болу мүмкіндігін де көре білді. Бірақ жаратылыстану ғылымдарының сол кездегі дамуының төмен деңгейлілігіне байланысты құмар ойындар мен сақтандыру және демография сұранымдары әлі де көп уақытқа дейін ықтималдықтар теориясының ұғымдары мен әдістері негізделген жеке салалар болып қала берді. Осыған байланысты ықтималдықтар теориясында пайда болған есептер де тек элементар-арифметикалық және комбинаторикалық әдістермен шешіліп отырды. Ықтималдықтар теориясының кейінгі дамуы және оның әдістерінің ғылымның сан саласына, әсіресе жаратылыстану ғылымдарына, оның ішінде физикаға кеңінен қолданылуы классикалық ұғымдар мен әдістердің осы күнге дейін өз орнын жоғалтпағандығын көрсетті.

Жаратылыстану ғылымдары тарапынан қойылған әлдеқайда терең сұранымдар (бақылаулардың қателіктері теориясы, атулар теориясының есептері, статистиканың проблемалары т.с.с) ықтималдықтар теориясын ары қарай дамыта түсуге, ол үшін әлдеқайда дамыған аналитикалық әдістерді қолдануға әкеп соқты. Ықтималдықтар теориясының аналитикалық әдістерін дамыту жолында ерекше рөл атқарған ғалымдар ретінде Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассондардың есімдерін атап өткен жөн.

XІX ғасырдың жартысынан бастап XX ғасырдың жиырмасыншы жылдары арасында ықтималдықтар теориясының дамуы көбіне П.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпунов секілді орыс ғалымдарының есімдерімен байланысты. Бұлардың жұмыстырының ықтималдықтар теориясы үшін ең маңыздылығы кездейсоқ шама ұғымын енгізуде болды.

Ықтималдықтар теориясының қазіргі дамуы әлемде оған деген қызығушылықтың өсуі мен оның қолдану аясының мейлінше кеңи түсушілігінде болып отыр. Ықтималдықтар теориясының дамуына іргелі үлес қосқан ғалымдардың ішінде АҚШ, Франция, Швеция, Италия, Жапония, Польша, Ұлыбритания, Венгрия және бұрынғы КСРО-ның көптеген ғалымдарының есімін атауға болар еді. Бұлардың ішінде әсіресе орыс ғалымдары С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров және А.Я.Хинчиннің алар орындары ерекше. Оның бір дәлелі ретінде қазіргі заманғы ықтималдықтар теориясы ұлы математик А.Н.Колмогоров енгізген аксиоматикаға негізделгенін айтса да жеткілікті.

Жоғарыда айтқанымыздай қазіргі заманғы жаратылыстану саласында ықтималдықтар теориясының атқаратын рөлі уақыт өткен сайын аса үлкен қарқынмен өсе түсуде. Жаратылыстану ғылымдарының, әсіресе физиканың даму барысы ықтималдықтар теориясының аппараты табиғаттың көптеген құбылыстарын зерттеуге ыңғайлы да пайдалы болатындығын көрсетті. Жаңа теориялық нәтижелер ықтималдықтар теориясы әдістерінің қолдануларына жаңа мүмкіндіктер ашуда, ал табиғат құбылыстарын жан- жақты зерттеу ықтималдықтар теориясын кездейсоқтықпен байланысты жаңа заңдылықтар іздеуге ұмтылдыруда. Қазіргі уақытта ықтималдықтар теориясы басқа ғылым салаларымен бірлесе отырып, даму үстінде.

Сонымен, жалпы айтсақ, ықтималдықтар теориясы- кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математиканың саласы. Сондықтан да табиғат туралы біздің біліміміздің өсе түсуі ықтималдықтар теориясының алдына алуан түрлі тың сұраулар қоя беретіндігі түсінікті, ал екінші жағынан бұлай болуы парадокс секілді көрінуі мүмкін. Себебі, ықтималдықтар теориясының негізгі объектісі кездейсоқтық немесе анықталмағандық, ал бұлар өз кезегінде біздің біліміміздің жеткіліксіздігіне байланысты. Мәселен, егер біз тиын лақтырсақ, онда тиын құлаған кездегі оған әсер ететін барлық факторларды толық ескеру өте қиын, тіптен мүмкін емес деуге де болады. Бірақ атап өтілген парадокс атүсті қарағанда ғана парадокс, шындығында табиғатта дәл анықталған мөлшерлік заңдар жоқ дерлік. Мәселен, физикадан белгілі газдың температурасының оның қысымына тәуелділігі туралы заң газ молекулаларының жылдамдықтары мен олардың ыдыс жақтауына соғылу сандарының арасындағы байланысты білдіретін ықтималдыққа тән қасиет. Бұл жерде пайда болатын кездейсоқ ауытқулар әдеттегі температуралар мен қысымдар облысында үлкен ықтималдықпен өте аз болады және де біздің құралдарымыз оларды тіркей де алмайды.

Анықталмағандық принципі бағытында да бір-екі ауыз сөз айта кетелік. Бұл принцип бойынша өзара байланысты кез келген екі физикалық сипаттама үшін оның біреуін бекітіп қою екіншісін анықтауға мүлдем мүмкіндік бермейді. Қарастырып отырған жағдайда кездейсоқтық біздің біліміміздің жеткіліксіздігінен емес, ол басқаша бір принципиалды құбылыс- заттар үшін табиғи құбылыс ретінде пайда болады. Мәселен радиоактивті ядроның өмір сүру уақыты негізінен кездейсоқ шама, ал бұл кездейсоқтық біздің біліміміздің жетіле түскенінен жөнделе қоятын нәрсе емес.

Сонымен, анықталмағандық таным процесінің басында тұрды және ол оның әрқашан алдында да тұра береді. Бұл ескертулер, әрине жалпы мағынадағы ескертулер. Бірақ қай кезде ықтималдықтар теориясының әдістерін қолдану керек, қай кезде қолданбау керек деген сұраққа жауапты, шамасы, әрқашан аталмыш құбылысты біз қандай дәлдікпен зерттейтініміз бен ол құбылыстың табиғаты туралы не білетіндігіміздің ара қатынасы арқылы беру керек.

2. Адам тіршілігінің барлық салаларында қандай да бір тәжірибелер немесе бақылаулар белгілі бір шарттар орындалғанда көптеген рет қайталанатын жағдайлар жиі кездесіп тұрады. Ықтималдықтар теориясы осындай эксперименттер кезінде нәтижелері тәжірибеден тәжірибеге өзгеріп отыратын оқиғаларды зерттеумен айналысады. Мұндай оқиғалар әдетте *кездейсоқ оқиғалар* деп аталады.

Мысал үшін біз симметриялы тиынды бір рет лақтырдық делік. Бұл эксперименттің тек екі ғана нәтижесі болуы мүмкін: не “герб” түседі не “цифр” түседі. Бірақ біз тәжірибенің нәтижесін алдын-ала дөп басып дәл айта алмаймыз, себебі біздің тиын құлаған кезде оған әсер ететін барлық факторларды ескере алатын мүмкіндігіміз жоқ. Сол сияқты қандай да бір аса күрделі механизмнің белгілі бір уақытқа дейін істен шығатынын не шықпайтындығын, немесе алынған лотерея билетінің ұтатын не ұтпайтындығын да біз алдын-ала дөп басып дәл айта алмаймыз. Бұдан шығатын қорытынды мынау: жеке тәжірибелердің нәтижелерін қарастыру арқылы қандай да бір заңдылықтарды байқау өте қиын, яғни нендей де бір теория құруға жеткілікті негіз жоқ.

Егер де мұндай тәжірибелерді көптеген рет қайталайтын болсақ мынандай заңдылықты байқауға болады екен: тәжірибенің жеке нәтижелері әрқилы болғанымен оның орташа нәтижелерінің *орнықтылық қасиеті* бар. Мысалы, тиынды бір рет лақтырған тәжірибемізді *n* рет қайталалық және  *nГ* деп осы *n*  тәжірибе кезіндегі гербтің түсу санын белгілейік. Мынандай график салалық: абсцисса осіне тәжірибе санын, ал ордината осіне гербтің түсу жиілігі - ді орналастыралық. Онда *n*  өскен сайын (*nГ,*, ) нүктелерін қосатын сызықтың = түзуіне өте жақындай беретіндігін байқауға болады екен. (Бұл айтылған қасиетті тексеру үшін ХІІІ ғасырда Ж. Бюффон тиынды 4040 рет лақтырып тәжірибе жасаған. Сонда герб 2048 рет түскен, яғни гербтің түсу жиілігі 0,508 болған. К. Пирсон тәжірибені 24000 рет қайталағанда герб 12012 рет түскен, яғни 0,5005 болЄан. (Қараңыз*. Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей*. М, Наука, 1969).

Байқалған құбылыс жалпы жағдайға да тән екен: бірдей шарттар орындалған жағдайда қайталанатын тәжірибенің саны мейлінше үлкен болғанда нәтиженің (оқиғаның) пайда болуының жиілігі қандай да бір  санына мейлінше жақындай түседі.

Әрине, бір қарағанда оқиғаның ықтималдығы деп осы оқиғаның жиілігі ұмтылатын *р* санын алу керек секілді (ықтималдықтың Мизес бойынша анықтамасы). Бірақ ықтималдықты бұлай анықтау ыңғайсыз, себебі оқиға үшін эксперименттің бір сериясындағы жиіліктер тізбегі екінші бір сериядағы жиіліктер тізбегінен әрқашан дерлік бөлек. Оның үстіне біз бүкіл жиіліктер тізбегін емес, оның тек ақырлы элементтерін ғана қарастыра аламыз (“шексіз” көп тәжірибе жүргізу мүмкін емес). Ендеше ықтималдықты жиіліктің жоғарыда айтылған қасиеті орындалатындай етіп басқаша анықтау керек, яғни тәжірибе саны *n* өскен сайын қарастырып отырған оқиғаның жиілігі оның ықтималдығына қандай да бір мағынада мейлінше жақын болуы (ұмтылуы) керек. Бұдан мынандай қорытынды жасауға болады: ықтималдық бола алатын *р* саны теріс емес, нөл мен бірдің арасында жатады  және ақиқат оқиғаның, яғни тәжірибе нәтижесінде міндетті тҮрде орындалатын оқиғаның ықтималдығы бірге тең деп алу керек.

Біз бұл оқу құралында ықтималдықты дискретті элементар оқиғалар кеңістігі деп аталатын қарапайым элементар оқиғалар кеңістігі негізінде анықтаймыз.