

**Нұрсдық АКАНБАЙ
Зоя СҮЛЕЙМЕНОВА
Самал ТАПЕЕВА**

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАРЫ

Оқу құралы

Алматы 2013

*Н. Ақанбай, З.І. Сүлейменова,
С.Қ. Тапеева*

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАРЫ

Оқу құралы

Алматы
«Қазақ университеті»
2013

УДК 519
ББК 22.1 я 73
А 37

Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультетінің Ғылыми кеңесі және Редакциялық-баспа кеңесі ұсынған

Пікір жазғандар:

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **Қ.Қ.Шакенов**
Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **С.Т.Мухамбетжанов**
Физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент **Б.Ж.Жақашбаев**

Ақанбай Н., Сүлейменова З.І., Тапеева С.Қ.

А 37 Ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары: Электрондық оқу құралы – Алматы.: Қазақ университеті, 2013.– 320 бет.

ISBN 9965-29-512-3

Оқу құралы авторлардың бірқатар жылдар бойы әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің механика-математика факультетінің әртүрлі мамандық студенттері мен магистрлеріне таңдау курстары бойынша оқыған дәрістері негізінде жазылып, "Қазақ университеті" баспасынан 2010 жылы осы атпен жарық көрген оқу құралының түзетілген және толықтырылған электрондық нұсқасы. Оқу құралында ықтималдықтар теориясының қолданымдылық бағыттағы аса маңызды бөлімдерінің бірі – ықтималдықтар теориясының шектік теоремаларының классикалық нәтижелері оқытудың кредиттік технологиясы талаптарына сәйкестендіріле отырып баяндалған.

Оқу құралында қамтылған материалдарды жоғары оқу орындарының математика және математикамен тығыз байланысқан басқа да мамандықтар студенттері мен магистрлері үшін ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика пәніне негізделген арнайы таңдау курстарын даярлау үшін пайдалануға болады.

УДК 519

ББК 22.1 я 73

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....	7
Кіріспе.....	10

I ТАРАУ. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ: ҚЫСҚАША МАҒЛҰМАТТАР

§1. Ықтималдықтар теориясының аксиомалары.	
Жалпы ықтималдық кеңістігі.....	25
1.1. $(R, \beta(R))$ кеңістігі. Үлестірім функциясы.....	30
1.1.1. Дискретті ықтималдықтық өлшемдер.....	34
1.1.2. Абсолютті үзіліссіз ықтималдықтық өлшемдер.....	35
1.2. $(R^n, \beta(R^n))$ кеңістігі. Көп өлшемді үлестірім функциясы.....	37
1.3. Шартты ықтималдық. Тәуелсіздік.....	39
1.3.1. Толық ықтималдықтар және Байес формулалары.....	42
§2. Кездейсоқ шамалар және олардың үлестірімдері.....	44
2.1. Дискретті кездейсоқ шамалар.....	45
2.2. Абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамалар.....	47
2.3. Көп өлшемді кездейсоқ шамалар.....	50
2.4. Кездейсоқ шамалардың тәуелсіздігі.....	54
2.5. Шартты үлестірімдер.....	56
§3. Математикалық күтім.....	58
3.1. Математикалық күтімнің қарапайым қасиеттері. ...	59
3.1.1. Мультипликативтік қасиет.....	59
3.2. Ақиқат дерлік қасиеттері.....	59
3.3. Жинақталу қасиеттері.....	60
3.4. Математикалық күтімді есептеу формулалары.....	61
3.5. Дисперсия.....	62
3.6. Кейбір маңызды кездейсоқ шамалардың математикалық күтімдері мен дисперсиялары.....	63
3.7. Математикалық күтімге байланысты кейбір маңызды теңсіздіктер.....	64
§4. Сипаттамалық функция.....	66
4.1. Сипаттамалық функцияның қарапайым қасиеттері.....	71
4.1.1. Қасиеттерден шығатын қарапайым салдарлар.....	73
4.2. Жалғыздық теоремасы.....	74
4.3. Сипаттамалық функцияның Лебегтік жіктеуі.....	75
4.4. Композиция формуласы.....	77
4.5. Кейбір қосымша қасиеттер.....	79
§5. Кездейсоқ шамалар мен үлестірімдердің жинақталулары.....	85
5.1. Кездейсоқ шамалардың әртүрлі жинақталулары және олардың арасындағы байланыстар.....	85
5.1.1. Үзіліссіздік теоремалары.....	92
5.2. Үзіліссіздік теоремасын Пуассон теоремасын дәлелдеуге қолдану.....	94

II ТАРАУ. БЕРНУЛЛИ СХЕМАСЫ ҮШІН ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАР

§1. Үлкен сандар заңдары.....	98
§2. Муавр-Лапласың шектік теоремалары.....	102
2.1. Муавр-Лапласың төңіректік теоремасы.....	102

2.2. Муавр-Лапласстың интегралдық теоремасы.....	107
2.2.1. Салыстырмалы жиіліктің табыс ықтималдығынан ауытқуы.....	112
2.2.2. Табыстар санының аралықта жату ықтималдығы.....	115
§3. Пуассон теоремалары.....	123
§4. “Бернулли схемасы үшін шектік теоремалар” тақырыбы бойынша оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар.....	132

III ТАРАУ. ТӘУЕЛСІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ТІЗБЕКТЕРІ ҮШІН ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАР

§1. Сипаттамалық функциялар әдісі және шектік теоремалар.....	138
§2. Кейбір қарапайым шектік теоремалар.....	139
2.1. Үлкен сандар заңы.....	139
2.2. Тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі үшін орталық шектік теорема.....	141
2.3. Бірдей үлестірілген тәуелсіз векторлық кездейсоқ шамалар тізбегі үшін орталық шектік теорема.....	147
§3. Әртүрлі үлестірілген тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі үшін орталық шектік теорема.....	148
§4. Төңіректік шектік теорема.....	161
§5. «Тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбектері үшін шектік теоремалар» тақырыбы бойынша оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар.....	165

IV ТАРАУ. ОРНЫҚТЫ ЖӘНЕ ШЕКАРАСЫЗ БӨЛІНБЕЛІ ҮЛЕСТІРІМДЕР ЖӘНЕ ОЛАРҒА БАЙЛАНЫСТЫ КЕЙБІР ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАР

§1. Симметриялы орнықты үлестірімдер және шектік теоремалар.....	168
§2. Шекарасыз бөлінбелі үлестірімдер және шектік теоремалар.....	185
2.1. Шекарасыз бөлінбелі үлестірімдер және олардың қарапайым қасиеттері.....	185
2.2. Шекарасыз бөлінбелі үлестірімнің сипаттамалық функциясының жазылу түрі.....	197
2.3. Шекарасыз бөлінбелі үлестірімдер үшін жинақталу шарттары.....	211
§3. L класының үлестірімдері.....	214
3.1. L класының үлестірімдерінің канондық жазылу түрі.....	220
3.2. L класы үлестірімдерінің біртөбелігі.....	222
§4. «Орнықты және шекарасыз бөлінбелі үлестірімдер және оларға байланысты кейбір шектік теоремалар» тақырыбы бойынша оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар.....	227

V ТАРАУ. «НӨЛ НЕМЕСЕ БІР» ЗАҢДАРЫ. ТӘУЕЛСІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ҚАТАРЛАРЫ

§1. «0 немесе 1» заңдары.....	231
1.1. Колмогоровтың «0 немесе 1» заңы.....	233
§2. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қатарларының жинақталулары.....	236
2.1. Колмогоров теңсіздігі. Колмогоров-Хинчин теоремасы.....	236

2.2. «Екі қатар» және «үш қатар» туралы теоремалар....	241
§3. «Нөл немесе бір» заңдары. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қатарлары» тақырыбы бойынша оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар.....	248

VI ТАРАУ. ҮЛКЕН САНДАР ЗАҢДАРЫ

§1. Әлсіз үлкен сандар заңы.....	253
1.1. Үлкен сандар заңы үшін қажетті және жеткілікті шарт.....	257
§2. Күшейтілген үлкен сандар заңы.....	261
§3. «Үлкен сандар заңдары» тақырыбы бойынша оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар.....	275

VII ТАРАУ. ҚАЙТАЛАМА ЛОГАРИФМДЕР ЗАҢЫ

§1. Гаусдорф бағасы.....	279
§2. Харди-Литтльвуд бағасы.....	282
§3. Хинчин бағалары.....	285
§4. «Қайталама логарифмдер заңы» тақырыбы бойынша оқушының өз бетімен орындауына арналған тапсырмалар.....	289

Қосымшалар.....

1-қосымша. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ функциясы мәндерінің кестесі.....	290
--	-----

2-қосымша. $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ функциясы мәндерінің кестесі.....	291
---	-----

3-қосымша. $\pi_k(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ Пуассон үлестірімі мәндерінің кестесі.....	293
--	-----

Қолданылған әйәәәәәәәәәәә әііііі.....

Алғы сөз

Елімізде соңғы жылдары білім берудің барлық салаларында, оның ішінде жоғары оқу орындарында әртүрлі деңгейдегі көптеген реформалар іске асырылуда. Олардың ішінде ең маңыздыларының бірі – ол білім беруді толықтай кредиттік технология бойынша оқыту үрдісіне көшіру. Осыған орай бүгінгі күні білім беру саласында бұған дейін қолданылып келген ресми құжаттарға, оның ішінде мамандықтардың жалпыға міндетті білім стандарттарына заман талабына сай қажетті өзгерістер енгізу, қажет болса түгелдей жаңарту мәселелері пайда болуда. Аталған бағыттардағы алға қойған мақсаттарды іске асыру үшін ҚР БҒМ-нің атқарушы органдарына ғана емес, Республикамыздағы жетекші жоғары оқу орындарына, олардың ішінде әсіресе ҚР ЖОО-ларының флагманы болып отырған әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетіне қойылатын талап та, жүктелетін жүк те ерекше.

Айта кетелік, қойылған тапсырмаларды ҚазҰУ ұжымы абыроймен орындап, басқаларға үлгі көрсетуде, ҚР ЖОО-ларының шын мәніндегі көшбасшысы екендігін күннен-күнге еселеп дәлелдей түсуде: 2008-2009 оқу жылынан бастап ҚазҰУ-де оқу үрдісі толықтай кредиттік технология бойынша оқытуға көшірілді, жаңа мамандықтар ашылуда, басқарудың жаңа формалары енгізілуде, дамудың жоғары сатысындағы шетелдердің жетекші университеттерімен көптеген жаңа инновациялық жобалар бойынша байланыстар орнатылып, тәуелсіз Қазақстан үшін қажетті мамандар дайындауға қол жеткізілуде т.с.с.

Кредиттік технология бойынша оқыту үрдісінің негізгі талаптарының бірі – ол оқушының (студенттің, магистранттың, PhD докторанттың) өз бетімен орындайтын жұмыс көлемінің жалпы жұмыс көлеміне қатысты үлесінің бұрынғыға қарағанда күрт өсуі, оқушыға өз оқу траекториясын қалауынша таңдап алу мүмкіндігінің берілуі. Айтылған жайт жоғары оқу орны оқытушы-профессорлар құрамына осы уақытқа дейінгі қалыптасқан дәстүрлі міндеттерден басқа да бірқатар қосымша талаптар жүктейтіні түсінікті – енді олар оқушыларға мамандықтардың жалпыға міндетті білім стандарттарында қарастырылған, бірақ жалпы саны бұрынғыдан әлдеқайда азайтылған міндетті пәндерден басқа заман талабына сай білгір де білімді маман болып шығу үшін меңгерілуі тиісті жаңа таңдау (элективті) курстарын құрастырып, ұсынулары қажет. Өз кезегінде оқушының өзіне қажет курсты оқытушы-профессорлар құрастырып ұсынған элективті курстардың ішінен таңдап алу хұқы болғандықтан енді оқытушы мен оқушы арасындағы қатынас мүлдем басқаша сипатқа ие болады – іс жүзінде оқушы оқытушыны жұмыспен қамтамасыздан-дырушыға, яғни жұмыс берушіге айналады. Екінші жағынан таңдап алған болашақ мамандығы саласы бойынша білімді маман болуға қажетті біліктілік алу үшін оқушы да өз оқу траекториясын таңдау барысында қандай да бір шектеулерге бағынуға мәжбүр – таңдау курстары болашақ қызметке қатысты нендей де бір шарттарға байланысты таңдалуы тиіс.

Ықтималдықтар теориясы математиканың теориялық та, қолданбалылық та бағытта аса бір қарқынды түрде даму үстіндегі жаңа салаларының бірі, ал шектік теоремалар оның қолданбалылық бағытының ең маңызды бөлігі екендігі бүгінде жаппай мойындалған жайт. Ықтималдықтар теориясының туған жылы ретінде ғалымдардың бұл теорияның ең бірінші шектік теоремасы – Бернуллдің үлкен сандар заңы жарияланған 1713 жылды алып жүргендігі де айтылғанның бір айғағы.

Ықтималдықтар теориясының классикалық шектік теоремаларымен танысып, оларды жекелеген практикалық есептер шығаруға қолдана білу теоретик–математикке қаншалық қажет болса, инженерге де, экономистке де, жаратылыстану ғылымы саласы қызметкерлеріне де, қаржылық және актуарлық математика салалары мамандарына да соншалық қажеттілігін аталған ғылымдардың даму тарихтары көрсетіп берді, уақыт дәлелдеді. Бұл жерде біз мысал ретінде тек орталық шектік теоремалар деп аталып кеткен теоремалардың эконометриканың негізгі регрессиялық теңдеулерін құрудағы және негіздеудегі атқаратын рөлдерін айтсақ та жеткілікті.

Жоғарыда айтылғандар бізге ҚазҰУ-дың механика-математика факультетінің әртүрлі мамандықтары үшін «Ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары» деген атпен құрастырылып, оқу үрдісіне біраз жылдан бері таңдау курсы ретінде енгізіліп келе жатқан пән математика ғана емес, басқа бірқатар жаңа, заман талабына сай қажеттіліктерден пайда болған мамандық иелері үшін де аса пайдалы таңдау курсы болады деп тұжырымдауға негіз болады ғой деп ойлаймыз.

Бұл оқу құралын құрастырып, жарыққа шығарудағы біздің басты мақсатымыз – ол қазақ тілді оқырманды ықтималдықтар теориясының классикалық шектік теоремаларына қатысты негізгі нәтижелермен және қолданылу мысалдарымен оларды қатаң математикалық тұрғыдан негіздей отырып таныстыру, басқа да қолданылу мүмкіндіктеріне қатысты кеңестер беру, жөн сілтеу.

Оқу құралына енгізілген материалдарды авторлар өз талғамдарына және кітап көлемінің көтеруіне байланысты екшеледі. Оқу құралын жазу барысында кітап соңында келтірілген әдебиеттердің бірқатар материалдары, әсіресе осы оқу құралы авторларының біріншісінің бұрындары жарық көрген кітаптарының материалдары пайдаланылды.

Оқу құралын баспаға даярлау барысында авторларға ҚазҰУ-дың механика-математика факультетінің ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика кафедрасында бірге жұмыс жасайтын барлық әріптестерінің және пікір жазған Қ.Қ.Шакенов, С.Т.Мухамбетжанов, Б.Ж.Жақашбаевтардың көмектері зор болды – олар қолжазбаны оқыды, пайдалы кеңестер берді, тексті редакциялауға көмектесті, тілге, терминдерге байланысты ойларымен бөлісті т.с.с. Кітаптың компьютерлік теруін С.М. Нарбаева, Г.К. Бухарбаева және А.Ж.Рахымжановалар орындады.

Аты аталған-аталмаған барлық әріптестерімізге көрсеткен көмектері үшін шын ниетпен рахмет айтамыз.