



Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігі  
Семей қаласының Шәкәрім атындағы мемлекеттік университеті  
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті  
РФА В.А.Стеклов атындағы математикалық институты  
ҚР БҒМ математика және математикалық моделдеу институты  
Әл-Фараби атындағы ҚҰУ жанындағы математика және механика ҒЗИ  
ҚР БҒМ ҒК «Қолданбалы математика институты», Қарағанды қ.

Қазақ ССР Ғылым Академиясының корреспондент мүшесі,  
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор  
Төлеубай Ыдрысұлы Амановтың  
туғанына 90 жыл толуына арналған

## «ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ, ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ»

Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының

# МАТЕРИАЛДАРЫ



# МАТЕРИАЛЫ

Международной научно-практической конференции

## «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

посвященной 90-летию со дня рождения  
члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук,  
профессора Толеубая Идрисовича Аманова

*1-том*

3 – 5 қазан 2013 ж.  
Семей



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

<b>А. Тунгатаров</b> Об одном классе нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	132
<b>С.А. Айсагалиев, А.П. Белогуров</b> Применение принципа погружения к решению задачи оптимального быстрогодействия	136
<b>М.М. Амангалиева, М.Т. Дженалиев, М.Т. Космакова, М.И. Рамазанов</b> О существовании нетривиального решения для однородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода	139
<b>К.Н. Оспанов</b> Теоремы разделимости для системы типа Бельтрами и их приложения	144
<b>Ж.А. Токибетов, С.З. Сапакова</b> Об одной краевой задаче для обобщенной системы Мойсила - теодереско	145
<b>А.М. Сарсенби</b> Критерии безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов второго порядка	151
<b>Б.Е. Кангужин, А.А. Аниязров, Д.Б. Нурахметов</b> Спектральные свойства корректных внутренне краевых задач для уравнения Гельмгольца	152
<b>Д.Э. Эубэкір, Е.Д. Эзен</b> Соно-люми-термомолекулярлық синтез – Ранк-Хилш арқандық-құйындық көпіршік-атар үдерісінің негізі	155
<b>А.Б. Тунгатаров, Г.К. Рзаева</b> Об одном классе эллиптических систем второго порядка на плоскостях с сингулярными коэффициентами	163
<b>З. Куралбаев, А.А. Ержан</b> Алгоритм решения задачи компьютерного анализа переходного процесса в электронной РС-цепи	165
<b>А.Н. Азанова, М.К. Дауылбаев</b> Об асимптотическом поведении решений трехточечной краевой задачи интегродифференциальных уравнений с малым параметром	168
<b>М.Б. Муратбеков</b> О дискретности спектра сингулярных дифференциальных операторов гиперболического типа	175
<b>Б.Д. Кошанов</b> О разрешимости и о построении корректных краевых задач для неоднородных полигармонических уравнений в ограниченной области	176
<b>Г.Е. Берикханова</b> Дифференциальные уравнения всевозможных корректных динамических задач с точечными связями	177
<b>М.М. Байбурын</b> О собственных значениях одного дифференциального оператора	181
<b>Т.Ж. Елдесбай</b> Об одной задаче для вырождающегося гипербола-параболического уравнения	185
<b>А.К. Сейтханов, Н.А. Испулов, К.Р. Досумбеков, Ж.Д. Оспанова</b> Система дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая распространение термоупругих волн в анизотропных средах	190
<b>Ж.Х. Жунусова</b> Об интегрируемости (2+1)-мерного нелинейного уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди	193
<b>Zh. Zhunussova</b> Geometrical roots of cosmological mode	197
<b>А.Т. Абдрахманов</b> Об корректирующем управлении манипуляционного робота	200
<b>Е.С. Алимжанов</b> Решение модельной задачи Веригина с малым параметром в пространстве Гельдера	206



<b>Н.Т. Орумбаева</b>	212
Об одном методе решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений	
<b>Т.Т. Коржымбаев</b>	219
Дифференциальные уравнения магнитогидродинамического течения вязкой несжимаемой жидкости во внешнем слое ядра	
<b>М.М. Алдажарова, Т.М. Алдибеков</b>	225
Коэффициентный признак устойчивости по первому приближению в критических случаях характеристических показателей Ляпунова	
<b>Ф.Х. Вильданова, А.К. Ерденова, Г.Б. Кенжебаева</b>	227
О приводимости по Ляпунову	
<b>З. Камбарова, Эбдісалам А. Сэрсенбі</b>	228
Системы состоящие из синусов и косинусов и их полнота	
<b>Т.Ш. Иманқұл, Э. Сұлтанбаева</b>	229
Фазалық және интегралдық шектеулер қойылғандағы математикалық маятникті басқарудың тәсілі	
<b>Е.М. Мұхаметов, А.П. Мұстафаев</b>	233
Екінші ретті гиперболалық типтегі тендеулер жүйесіне коши есебінің шешімі	
<b>Ә.П. Мұстафаев, А.Е. Бейсенова</b>	235
Қайсыбір тұрақты коэффициентті параболалық типті тендеудің қарапайым шешімдерін табу жолы	
<b>У.У. Абылқайров, С.Е. Айтжанов, Х. Хомпыш</b>	236
Однозначная разрешимость обратной задачи протекания для уравнений Навье-Стокса	
<b>М.А. Сахауева</b>	237
Об одной модели движения вязкой жидкости в трубе. Сведение задачи со свободными границами к задаче в фиксированных областях	
<b>Е. Аринов</b>	240
Решение дифференциальных уравнений упругих колебаний для возмущений в сферической системе координат	
<b>Н.Г. Нугманова, Г.К. Мамырбекова</b>	244
Об одном обобщении уравнения Ландау-Лифшица с потенциалом	
<b>Д.С. Каратаева, А.П. Мұстафаев</b>	248
Обобщенный метод характеристик для биволнового уравнения	
<b>И.А. Рыжова</b>	249
Фрактальные изображения	
<b>Т.Р. Аманбаев, Б. Мамешов</b>	253
Кинетика роста зародышей дисперсной фазы в переохлажденном паре	
<b>Т.Ж. Елдесбай, Р.М. Капарова, М.У. Турсынбекова</b>	254
О первой задаче Дарбу для гиперболического уравнения с вырождением порядка	
<b>С.С. Жуматов</b>	259
Неустойчивость нелинейных систем управления в окрестности программного многообразия в критическом случае	
<b>Алдай Мақтагүл</b>	264
Екінші ретті жартылай сызықты айырымдық тендеудің тербелімділік және тербелімсіздігінің Кнезерлік тәріздес шарттары	
<b>А.Х. Бегматов, Г.М. Джайков</b>	266
Задача интегральной геометрии на семействе полуокружностей	
<b>А.Х. Бегматов, А.К. Сеидуллаев</b>	270
Численное решение одной слабо некорректной задачи интегральной геометрии	
<b>А.Х. Бегматов, А.О. Пиримбетов</b>	275
Численное решение задачи интегральной геометрии на семействе ломанных в полосе	



<b>Н.М. Темирбеков</b>	282
Об одном методе приближенного решения уравнений Навье-Стокса	
<b>М.Н. Калимолдаев, Г.А. Амирханова</b>	285
Оценка областей притяжения фазовых систем второго порядка	
<b>М.Е. Ескалиев</b>	287
Численное моделирование предельных зон для различных условий пластичности в анизотропном массиве с полостью	
<b>Д.Ж. Ахмед-Заки, М.Е. Мансурова, Б. Маткерим, Б.А. Кумалаков</b>	292
Применение технологии MAPREDUCE HADOOP для решения задач нефтедобычи	
<b>У.У. Абылкаиров, С.Е. Айтжанов</b>	296
Навье-Стокс жүйесіне локалді емес қосымша шартпен қойылған кері есептің шешімділігі	
<b>Б.Д. Дыбыспаев, Н.Ш. Дыбыспаева, М.Д. Дыбыспаева</b>	300
Вокруг задачи Аполлония	
<b>К.С. Бактыбеков, Б.Э. Бекмухамедов, М.М. Муратбеков, С.А. Алтынбек</b>	306
Моделирование возможных чрезвычайных ситуаций связанных с разливом рек с помощью методов нейронных сетей	
<b>Б.Р. Исмаилов, А. Урматова, С.К. Мельдебекова</b>	308
Об одной математической модели распространения примеси в атмосфере с локальной концентрационной неоднородностью	
<b>А.Д. Кожуховский, О.А. Кожуховская</b>	311
Модели оценивания операционных рисков страхового шахрайства	
<b>М.А. Ахметова, А.А. Таурбекова</b>	318
Жасанды нейрон желілері есептерінің ерекшеліктері	
<b>М.Е. Мансурова, Б. Маткерим, Ж.Е. Темирбекова, А.С. Шоманов</b>	321
Қашықтықтан зондалған бейнелерді өңдеудің параллелді алгоритмдері	
<b>Б.Р. Исмаилов, А. Урматова, С.К. Мельдебекова</b>	325
Моделирование и расчет динамических характеристик газа в многоступенчатых каналах	
<b>М.А. Ахметова, А.А. Таурбекова</b>	328
Функционалдық программалау есептерінің маңыздылығы	
<b>Б.А. Кокенов, Г.К. Оспанова, Н.Ж. Мукажанов</b>	331
3D принтеры и его области применения	
<b>Ж.З. Зейнелғаби</b>	337
Біртекті тор құрудағы дифференциалдық әдіс	
<b>З.Т. Рахматуллина, Л.С. Сыздыкова</b>	340
Обзор современных программ в области создания мультимедийных продуктов учебного назначения	
<b>А.Ш. Кажикенова, Д.Б. Алибиев, К.М. Турдыбекова, К.М. Турдыбеков</b>	346
Сравнительный анализ температурной зависимости вязкости рубидия на основе единой кластерной модели	
<b>М.К. Нуризинов, Р.К. Тюлюберегенев, Н.Г. Хисамиев</b>	351
Вычислимые нильпотентные группы без кручения конечных размерностей	
<b>Д.З. Абельмажинова, Н.Б. Закариянова, С.А. Мустафин</b>	356
О задачах анализа и обработки изображений	
<b>К.Ч. Койбагаров, Р.Р. Мусабаев, Т.Р. Мусабаев</b>	358
Оценка применимости методов семантической обработки текстов для казахского языка	



1. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов. Под ред. В.П. Бакалова. – 2-е изд. – М.: Радио и связь, 2000. – 592с.ил.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 624с.
3. Информационные технологии в радиотехнических сигналах. Под ред. И.Б. Федорова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 768с.ил.
4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984 – 296с.

УДК 517.948.34

А.Н.Азанова, М.К.Дауылбаев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Механико-математический факультет

050040, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. аль-Фараби 71, корпус 13

[alina\\_azanova@mail.ru](mailto:alina_azanova@mail.ru), [dmk57@mail.ru](mailto:dmk57@mail.ru)

### ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В работе рассматривается на отрезке  $[0,1]$  линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром  $\varepsilon > 0$  при старшей производной:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon \cdot y''' + A(t) \cdot y'' + B(t) \cdot y' + C(t) \cdot y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^2 H_0(t, x) y^{(i)}(x, \varepsilon) dx \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$h_1 y(t, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^1 \alpha_i y^{(i)}(0, \varepsilon) = a, \quad h_2 y(t, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^1 \beta_i y^{(i)}(t_0, \varepsilon) = b, \quad h_3 y(t, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^1 \gamma_i y^{(i)}(1, \varepsilon) = c, \quad (2)$$

где,  $a, b, c$  - некоторые известные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ , а  $0 < t_0 < 1$ .

Предположим, что выполнены следующие условия:

I Функции  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  и  $F(t)$  будем считать достаточно гладкими на отрезке  $0 \leq t \leq 1$ , а  $H_0(t, x)$ ,  $H_1(t, x)$ ,  $H_2(t, x)$  - в области  $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ , т. е. дифференцируемыми столько раз, сколько потребуется в ходе рассуждений.

II Функция  $A(t)$  удовлетворяет неравенству  $A(t) \geq \bar{\gamma} = \text{const} > 0, \quad 0 \leq t \leq 1$ .

В настоящей работе получена аналитическая формула решения задачи (1), (2) и доказана при определенных условиях теорема об асимптотических по малому параметру оценках решения.

Рассмотрим сингулярно возмущенное линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1):

$$L_\varepsilon y(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot y''' + A(t) \cdot y'' + B(t) \cdot y' + C(t) \cdot y = 0 \quad (3)$$

**Лемма 1.** Пусть справедливы условия I и II. Тогда для фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения (3) на отрезке  $[0,1]$  справедливы следующие асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представления [1]:

$$y_i^{(j)}(t, \varepsilon) = \bar{y}_i^{(j)}(t) + O(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4)$$

$$y_3^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} (\mu(t)^j y_{30}(t) + O(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2,$$

где  $\mu(t) = -A(t)$ , функции  $\bar{y}_i(t)$ ,  $i=1, 2$  образуют фундаментальную систему решений невозмущенного линейного однородного дифференциального уравнения

$$L_0 \bar{y}(t) \equiv A(t) \cdot \bar{y}'' + B(t) \cdot \bar{y}' + C(t) \cdot \bar{y} = 0, \quad (5)$$

а  $y_{30}(t)$  - решение задачи

$$A^2(t)y'_{30}(t) + (2A(t)A'(t) - A(t)B(t))y_{30}(t) = 0, \quad y_{30}(0) = 1.$$

Пусть функция  $K(t, s, \varepsilon)$ ,  $0 \leq s \leq t \leq 1$  является функцией Коши, т. е. решением следующей задачи:

$$\varepsilon K''' + A(t) \cdot K'' + B(t) \cdot K' + C(t) \cdot K = 0, \quad (6)$$

$$K(s, s, \varepsilon) = 0, \quad K'(s, s, \varepsilon) = 0, \quad K''(s, s, \varepsilon) = 1. \quad (7)$$

**Лемма 2.** Если справедливы условия I и II, то решение  $K(t, s, \varepsilon)$  задачи (6), (7) на  $[0, 1]$  при  $s \leq t$  существует, единственно и выражается формулой [32]:

$$K(t, s, \varepsilon) = \frac{W(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)}, \quad (8)$$

где  $W(s, \varepsilon)$  - определитель Вронского, составленный из фундаментальной системы решений  $y_1(s, \varepsilon)$ ,  $y_2(s, \varepsilon)$ ,  $y_3(s, \varepsilon)$  уравнения (3), а  $W(t, s, \varepsilon)$  - определитель, полученный заменой третьей строки определителя  $W(s, \varepsilon)$  на фундаментальную систему решений  $y_1(t, \varepsilon)$ ,  $y_2(t, \varepsilon)$ ,  $y_3(t, \varepsilon)$ .

Для функции Коши  $K(t, s, \varepsilon)$ , из (8) с учетом (4), при  $0 \leq s \leq t \leq 1$  справедливы следующие асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представления:

$$K(t, s, \varepsilon) = \varepsilon \left[ -\frac{\bar{W}(t, s)}{\bar{W}(s)\mu(s)} + O(\varepsilon) \right],$$

$$K'(t, s, \varepsilon) = \varepsilon \left[ -\frac{\bar{W}'(t, s)}{\bar{W}(s)\mu(s)} + \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx} y_{30}(t)\mu(t)}{y_{30}(s)\mu^2(s)} + O(\varepsilon) \right], \quad (9)$$

$$K''(t, s, \varepsilon) = -\varepsilon \cdot \frac{\bar{W}''(t, s)}{\bar{W}(s)\mu(s)} + \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx} y_{30}(t)\mu^2(t)}{y_{30}(s)\mu^2(s)} + O(\varepsilon^2 + \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}),$$

где  $\bar{W}(s)$  - определитель Вронского, составленный из фундаментальной системы решений  $\bar{y}_1(s)$ ,  $\bar{y}_2(s)$  невозмущенного уравнения (5), а  $\bar{W}(t, s)$  - определитель полученный заменой второй строки определителя  $\bar{W}(s)$  на фундаментальную систему решений  $\bar{y}_1(t)$ ,  $\bar{y}_2(t)$  уравнения (5).

Пусть функции  $\Phi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $0 \leq t \leq 1$  являются решениями однородного дифференциального уравнения

$$\varepsilon \cdot \Phi_i''' + A(t) \cdot \Phi_i'' + B(t) \cdot \Phi_i' + C(t) \cdot \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

с краевыми условиями



$$h_k \Phi_i(t, \varepsilon) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k. \end{cases} \quad k, i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Функции  $\Phi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , являющиеся решениями задачи (10), (11), назовем граничными функциями.

Составим следующий определитель:

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t, \varepsilon) & h_1 y_2(t, \varepsilon) & h_1 y_3(t, \varepsilon) \\ h_2 y_1(t, \varepsilon) & h_2 y_2(t, \varepsilon) & h_2 y_3(t, \varepsilon) \\ h_3 y_1(t, \varepsilon) & h_3 y_2(t, \varepsilon) & h_3 y_3(t, \varepsilon) \end{vmatrix}$$

Для определителя  $\Delta(\varepsilon)$  с учетом (4) справедливо асимптотическое представление:

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \alpha_1 \mu(0) \bar{\Delta} + O(\varepsilon), \text{ где}$$

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} h_2 \bar{y}_1(t) & h_2 \bar{y}_2(t) \\ h_3 \bar{y}_1(t) & h_3 \bar{y}_2(t) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

III. Пусть  $\bar{\Delta} \neq 0$ .

Тогда справедлива следующая

**Лемма 3.** Если справедливы условия I - III, то граничные функции  $\Phi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$  на  $[0, 1]$  существуют, единственны и выражаются формулами:

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = \frac{\Delta_i(t, \varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где  $\Delta_i(t, \varepsilon)$  - определитель, полученный из  $\Delta(\varepsilon)$  заменой его  $i$ -ой строки на фундаментальную систему решений  $y_1(t, \varepsilon)$ ,  $y_2(t, \varepsilon)$ ,  $y_3(t, \varepsilon)$  уравнения (3).

Для граничных функций  $\Phi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , справедливы из (13) следующие асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представления:

$$\Phi_1^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} \cdot \frac{\mu^j(t) y_{30}(t)}{\alpha_1 \mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} [1 + O(\varepsilon)], \quad j = 0, 1, 2, \quad (14)$$

$$\Phi_i^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\bar{\Delta}} \cdot \left[ \bar{\Delta}_{i1}^{(j)}(t) + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} \cdot \frac{(-1)^{i-1} y_{30}(t) \mu^j(t) \bar{\Delta}_{ii}}{\alpha_1 \mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} + O(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}) \right],$$

$$i = 2, 3, \quad j = 0, 1, 2$$

Здесь  $\bar{\Delta}$  имеет вид (12), а

$$\bar{\Delta}_{21}(t) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1(t) & \bar{y}_2(t) \\ h_3 \bar{y}_1(t) & h_3 \bar{y}_2(t) \end{vmatrix}, \quad \bar{\Delta}_{31}(t) = \begin{vmatrix} h_2 \bar{y}_1(t) & h_2 \bar{y}_2(t) \\ \bar{y}_1(t) & \bar{y}_2(t) \end{vmatrix}, \quad \bar{\Delta}_{22} = \begin{vmatrix} h_3 \bar{y}_1(t) & h_3 \bar{y}_2(t) \\ h_2 \bar{y}_1(t) & h_2 \bar{y}_2(t) \end{vmatrix}, \quad \bar{\Delta}_{33} = \begin{vmatrix} h_2 \bar{y}_1(t) & h_2 \bar{y}_2(t) \\ h_3 \bar{y}_1(t) & h_3 \bar{y}_2(t) \end{vmatrix}.$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$y(t, \varepsilon) = C_1 \Phi_1(t, \varepsilon) + C_2 \Phi_2(t, \varepsilon) + C_3 \Phi_3(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds \quad (15)$$

Здесь  $C_i, i = 1, 2, 3$  - неизвестные постоянные, а  $z(t, \varepsilon)$  - неизвестная функция, подлежащие определению.

Подставляя формулу (15) в уравнение (1) и учитывая, что функция Коши и граничные функции удовлетворяют однородному уравнению (3), относительно  $z(t, \varepsilon)$  получим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$z(t, \varepsilon) = F(t) + \sum_{i=1}^3 C_i \varphi_i(t, \varepsilon) + \int_0^1 H(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (16)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_i(t, \varepsilon) &= \int_0^1 (H_0(t, x) \Phi_i(x, \varepsilon) + H_1(t, x) \Phi_i'(x, \varepsilon) + H_2(t, x) \Phi_i''(x, \varepsilon)) dx, \quad i = 1, 2, 3, \\ H(t, s, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 (H_0(t, x) K(x, s, \varepsilon) + H_1(t, x) K'(x, s, \varepsilon) + H_2(t, x) K''(x, s, \varepsilon)) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом (9) ядро  $H(t, s, \varepsilon)$  интегрального уравнения (16) можно представить асимптотической формулой:

$$H(t, s, \varepsilon) = \bar{H}(t, s) + \frac{H_2(t, 1) y_{30}(1) \mu(1)}{y_{30}(s) \mu^2(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \mu(x) dx} + O(\varepsilon),$$

где  $\bar{H}(t, s)$  имеет вид:

$$\bar{H}(t, s) = \frac{H_2(t, s)}{A(s)} + \int_s^1 \frac{1}{A(s) \bar{W}(s)} \sum_{i=0}^2 H_i(t, x) \bar{W}^{(i)}(x, s) dx. \quad (18)$$

Предположим, что выполнено условие:

IV. Число 1 не является собственным значением ядра  $H(t, s, \varepsilon)$ .

Тогда интегральное уравнение (16) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) F(s) ds + \sum_{i=1}^3 C_i \left[ \varphi_i(t, \varepsilon) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) \varphi_i(s, \varepsilon) ds \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

где  $R(t, s, \varepsilon)$  - резольвента ядра  $H(t, s, \varepsilon)$ .

Подставляя (19) в правую часть (15), получим следующее представление для решения задачи (1), (2):

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^3 C_i Q_i(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (20)$$

где

$$Q_i(t, \varepsilon) = \Phi_i(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \left[ \varphi_i(s, \varepsilon) + \int_0^1 R(s, p, \varepsilon) \varphi_i(p, \varepsilon) dp \right] ds, \quad i = 1, 2, 3, \quad (21)$$

$$P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \left[ F(s) + \int_0^1 R(s, p, \varepsilon) F(p) dp \right] ds.$$



Для функций  $Q_i(t, \varepsilon)$  и  $P(t, \varepsilon)$ , определяющихся по формуле (21), с учетом (9), (14) и (17) получаем следующие асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представления:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(j)}(t, \varepsilon) &= \frac{H_2^{(j)}(t)}{\alpha_1} + \frac{\varepsilon^{1-j} y_{30}(t) \mu^j(t)}{\alpha_1 \mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}\right), \quad j = 0, 1, \\
 Q_1''(t, \varepsilon) &= \frac{\bar{H}_2''(t)}{\alpha_1} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{y_{30}(t) \mu^2(t)}{\alpha_1 \mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} + O\left(\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}\right), \\
 Q_i^{(j)}(t, \varepsilon) &= \frac{T_i^{(j)}(t)}{\bar{\Delta}} + \frac{(-1)^{i-1} H_2^{(j)}(t) \bar{\Delta}_{ii}}{\alpha_1 \bar{\Delta}} + \frac{(-1)^{i-1} \mu^j(t) y_{30}(t) \bar{\Delta}_{ii}}{\varepsilon^{j-1} \alpha_1 \mu(0) \bar{\Delta}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{2-j} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}\right), \quad i = 2, 3, j = 0, 1, \\
 Q_i''(t, \varepsilon) &= \frac{\bar{T}_i''(t)}{\bar{\Delta}} + (-1)^{i-1} \frac{\bar{H}_2''(t) \bar{\Delta}_{ii}}{\alpha_1 \bar{\Delta}} + \frac{(-1)^{i-1} \mu^2(t) y_{30}(t) \bar{\Delta}_{ii}}{\varepsilon \alpha_1 \mu(0) \bar{\Delta}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} + O\left(\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}\right), \quad i = 2, 3, \\
 P^{(j)}(t, \varepsilon) &= -\int_0^t \frac{\bar{W}^{(j)}(t, s)}{\bar{W}(s) \mu(s)} \left( F(s) + \int_0^1 \bar{R}(s, p) F(p) dp \right) ds + O(\varepsilon), \quad j = 0, 1, \\
 P''(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\mu(t)} \left( F(t) + \int_0^1 \bar{R}(t, s) F(s) ds \right) - \int_0^t \frac{\bar{W}''(t, s)}{\bar{W}(s) \mu(s)} \left( F(s) + \int_0^1 \bar{R}(s, p) F(p) dp \right) ds + O(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{22}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 H_2^{(j)}(t) &= \int_0^t \frac{\bar{W}^{(j)}(t, s)}{\bar{W}(s) \mu(s)} \cdot \bar{H}_2(s, 0) ds, \quad j = 0, 1, 2, \\
 \bar{H}_2''(t) &= H_2''(t) - \frac{\bar{H}_2(t, 0)}{\mu(t)}, \\
 T_i^{(j)}(t) &= \bar{\Delta}_{ii}^{(j)}(t) - \int_0^t \frac{\bar{W}^{(j)}(t, s)}{\bar{W}(s) \mu(s)} \int_0^1 [\bar{H}_0(s, x) \cdot \bar{\Delta}_{ii}(x) + \bar{H}_1(s, x) \bar{\Delta}_{ii}'(x) + \bar{H}_2(s, x) \cdot \bar{\Delta}_{ii}''(x)] dx ds, \quad i = 2, 3, j = 0, 1, \\
 \bar{T}_i''(t) &= T_i''(t) - \frac{1}{\mu(t)} \int_0^1 [\bar{H}_0(s, x) \cdot \bar{\Delta}_{ii}(x) + \bar{H}_1(s, x) \bar{\Delta}_{ii}'(x)] dx, \quad i = 2, 3 \\
 \bar{H}_2(t, 0) &= H_2(t, 0) + \int_0^1 \bar{R}(t, s) H_2(s, 0) ds,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$\bar{R}(t, s)$  - не зависящая от  $\varepsilon$  часть резольвенты  $R(t, s, \varepsilon)$ .

Теперь определим неизвестные постоянные  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Для этого подчиним решение  $y(t, \varepsilon)$  из (20) крайним условиям (2). Тогда получаем относительно  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 C_1 \cdot h_1 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 \cdot h_1 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 \cdot h_1 Q_3(t, \varepsilon) &= a - h_1 P(t, \varepsilon), \\
 C_1 \cdot h_2 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 \cdot h_2 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 \cdot h_2 Q_3(t, \varepsilon) &= b - h_2 P(t, \varepsilon), \\
 C_1 \cdot h_3 Q_1(t, \varepsilon) + C_2 \cdot h_3 Q_2(t, \varepsilon) + C_3 \cdot h_3 Q_3(t, \varepsilon) &= c - h_3 P(t, \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Для главного определителя системы (24)



$$\omega(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 Q_1(t, \varepsilon) & h_1 Q_2(t, \varepsilon) & h_1 Q_3(t, \varepsilon) \\ h_2 Q_1(t, \varepsilon) & h_2 Q_2(t, \varepsilon) & h_2 Q_3(t, \varepsilon) \\ h_3 Q_1(t, \varepsilon) & h_3 Q_2(t, \varepsilon) & h_3 Q_3(t, \varepsilon) \end{vmatrix}, \quad (25)$$

пользуясь представлениями (22), получим асимптотическое представление:

$$\omega(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha_1 \Delta^2} (\bar{\omega} + O(\varepsilon)), \quad (26)$$

где

$$\bar{\omega} = \begin{vmatrix} h_1 H_2(t) + \alpha_1 & h_1 T_2(t) & h_1 T_3(t) \\ h_2 H_2(t) & h_2 T_2(t) & h_2 T_3(t) \\ h_3 H_2(t) & h_3 T_2(t) & h_3 T_3(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (27)$$

функции  $H_2(t)$ ,  $T_i(t)$ ,  $i = 2, 3$  выражаются формулами (23).

Предположим, что:

$$\forall \bar{\omega} \neq 0.$$

Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  определитель  $\omega(\varepsilon)$  отличен от нуля, и из системы (24) однозначно определяются коэффициенты  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Подставив их в (20) получаем, окончательно, решение задачи (1), (2) в виде следующей формулы:

$$y(t, \varepsilon) = (a - h_1 P(t, \varepsilon)) \Psi_1(t, \varepsilon) + (b - h_2 P(t, \varepsilon)) \Psi_2(t, \varepsilon) + (c - h_3 P(t, \varepsilon)) \Psi_3(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (28)$$

где функции  $\Psi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$  выражаются формулами:

$$\Psi_i(t, \varepsilon) = \frac{\omega_i(t, \varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (29)$$

в которой  $\omega(\varepsilon)$  имеет вид (25),  $\omega_i(t, \varepsilon)$  - определитель, полученный из  $\omega(\varepsilon)$  заменой его  $i$ -ой строки строкой  $Q_1(t, \varepsilon)$ ,  $Q_2(t, \varepsilon)$ ,  $Q_3(t, \varepsilon)$ .

Тем самым, доказана следующая

**Теорема 1.** Если справедливы условия I - V, то решение  $y(t, \varepsilon)$  краевой задачи (1), (2) на отрезке  $[0, 1]$  существует, единственно и представимо в виде (28), где  $\Psi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$  выражаются формулой (29), а  $P(t, \varepsilon)$  имеют вид (21).

Следует заметить, что функции  $\Psi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$  являются решениями однородного сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения:

$$L_\varepsilon \Psi_i = \int_0^1 (H_0(t, x) \Psi_i(x, \varepsilon) + H_1(t, x) \Psi_i'(x, \varepsilon) + H_2(t, x) \Psi_i''(x, \varepsilon)) dx, \quad i = 1, 2, 3$$

с краевыми условиями  $h_k \Psi_i(t, \varepsilon) = \delta_{ki}$ ,  $k, i = 1, 2, 3$ .

Для  $\Psi_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$  по формуле (29) с учетом (22), (26) можно получить следующие асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представления:



$$\Psi_i^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{\bar{\omega}_i^{(j)}(t)}{\bar{\omega}} + \frac{\mu^j(t) y_{30}(t) A_{11}}{\varepsilon^{j-1} \bar{\omega} \mu(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx} + O\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{j-2}} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx}\right), \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, \quad (30)$$

где  $\bar{\omega}$  имеет вид (27),  $\bar{\omega}_i^{(j)}(t)$  - определитель, получаемый из  $\bar{\omega}$  заменой его  $i$ -ой строки на строку  $H_2^{(j)}(t), T_2^{(j)}(t), T_3^{(j)}(t)$  при  $j = 0, 1$ , и на строку  $\bar{H}_2''(t), \bar{T}_2''(t), \bar{T}_3''(t)$  при  $j = 2$ , а  $A_{11}$  - алгебраическое дополнение элемента, стоящего в  $i$ -ой строке 1-го столбца определителя  $\bar{\omega}$ .

**Теорема 2.** Пусть справедливы условия I - V. Тогда для решения сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) и его производных на отрезке  $[0, 1]$  имеют место асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оценки:

$$\begin{aligned} |y(t, \varepsilon)| &\leq \frac{C}{\bar{\omega}} \left[ (|a| + |b| + |c| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|) \left( \max_{0 \leq t \leq 1} |H_2(t, 0)| + \varepsilon e^{-\bar{\gamma} \frac{t}{\varepsilon}} \right) + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right], \\ |y'(t, \varepsilon)| &\leq \frac{C}{\bar{\omega}} \left[ (|a| + |b| + |c| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|) \left( \max_{0 \leq t \leq 1} |H_2(t, 0)| + e^{-\bar{\gamma} \frac{t}{\varepsilon}} \right) + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right], \\ |y''(t, \varepsilon)| &\leq \frac{C}{\varepsilon \bar{\omega}} \left[ (|a| + |b| + |c| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|) \left( \varepsilon \max_{0 \leq t \leq 1} |H_2(t, 0)| + e^{-\bar{\gamma} \frac{t}{\varepsilon}} \right) + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где  $C > 0, \bar{\gamma} > 0$  - некоторые постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

Доказательство теоремы непосредственно следует из формулы (28), с учетом асимптотических представлений (30) и (22) для функций  $\Psi_i(t, \varepsilon), i = 1, 2, 3$  и  $P(t, \varepsilon)$ .

**Определение.** Будем говорить, что решение  $y(t, \varepsilon)$  интегро-дифференциальной задачи обладает явлением начального скачка  $m$ -го порядка в точке  $t = 0$ , если оно в этой точке имеет следующий порядок роста:

$$\begin{aligned} y^{(i)}(0, \varepsilon) &= O(1), \quad i = 0, 1, \dots, m \\ y^{(m+1)}(0, \varepsilon) &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y^{(m+2)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-m}}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда согласно определению из оценок (31) теоремы 2 следует, что решение  $y(t, \varepsilon)$  сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) в точке  $t = 0$  обладает явлением начального скачка первого порядка, т.е.

$$y(0, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad y'(0, \varepsilon) = O(1), \quad y''(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат А.Б. Краевые задачи с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. // УМН 1962, т. XVII, Вып 1 (103), С.235-241.



$$\begin{aligned}
& -|a_{12}|^2 \left[ \frac{e^{-i\mu} - 1}{\mu} i + \frac{y_1(1)e^{-i\mu} - 1}{1 - y_1(1)} \right] \left[ \frac{e^{-i\mu} - 1}{\mu} i + \frac{y_2(1)e^{-i\mu} - 1}{1 - y_2(1)} \right] + \\
& + \left\{ \frac{z_1(0, \mu) - z_1(1, \mu)}{y_1(0) - y_1(1)} - a_{11} \left[ \frac{e^{-i\mu} - 1}{\mu} i + \frac{y_1(1)e^{-i\mu} - 1}{1 - y_1(1)} \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \frac{z_2(0, \mu) - z_2(1, \mu)}{y_2(0) - y_2(1)} - a_{22} \left[ \frac{e^{-i\mu} - 1}{\mu} i + \frac{y_2(1)e^{-i\mu} - 1}{1 - y_2(1)} \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

Из (15) получаем, что

$$z_j(t, \mu) = y_j(t) e^{-i\mu t} = e^{-i\mu t} e^{i \int_0^t q_j(\eta) d\eta}$$

Тогда

$$\frac{z_j(0, \mu) - z_j(1, \mu)}{y_j(0) - y_j(1)} = \frac{1 - y_j(1) e^{-i\mu}}{1 - y_j(1)}$$

Обозначим  $y_j(1) = e^{id_j}$

Таким образом, если  $a_{jj}, d_j, j = (1, 2)$  действительные числа и  $d_j \neq 2k\pi$  для любого целого числа  $k$ , а  $a_{12}$  -любое комплексное число, при этом выполняется условие (9),  $a_{21} = \bar{a}_{12}$  то уравнение

$$\prod_{j=1}^2 \left[ (1 + a_{jj}) \frac{1 - e^{i(d_j - \mu)}}{1 - e^{id_j}} - a_{jj} \frac{e^{-i\mu} - 1}{\mu} i \right] - |a_{12}|^2 \prod_{j=1}^2 \left[ \frac{1 - e^{i(d_j - \mu)}}{1 - e^{id_j}} - \frac{e^{-i\mu} - 1}{\mu} i \right] = 0$$

имеет действительные корни.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кокебаев Б., Отелбаев М., Шыныбеков А., К вопросам расширения и сужения операторов. // ДАН СССР .-271, №6.1983, с.1307-1311.

УДК 517.956

**Т.Ж. Елдесбай**

г.Алматы, Казахский национальный университет имени аль-Фараби)

E-mail: [yeldesbay@mail.ru](mailto:yeldesbay@mail.ru)

#### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛО - ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , где  $\Omega_1 = \{(x, t): -1 \leq x \leq 0, t > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x, t): 0 < x < 1, t > 0\}$  рассмотрим уравнение смешанного гиперболо - параболического типа

$$0 = \begin{cases} t^m u_{tt} - u_{xx} + c_1(x)u, & -1 < x < 0, t > 0, 0 < m < 1, \\ t^\alpha u_t - u_{xx} + c_2(x)u, & 0 < x < 1, t > 0, 0 < \alpha < 1, \end{cases} \quad (1)$$

решение которого обращаются в нуль при  $t \rightarrow +\infty$  и удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{x \rightarrow 0-} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0+} u(x, t), t > 0,$$

$$\forall t > 0 \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx < +\infty, \forall t > 0 -\infty < \int_{-1}^0 |u(x, t)|^2 dx < +\infty. \quad (*)$$