Международная конференция

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

27 мая – 2 июня 1996 года

Новосибирск – 1996

Программа Конференции включает:

- пленарные заседания;
- стендовые доклады секции A
  "Численные методы в механике деформируемого твердого тела";
- секционные и стендовые доклады секции B
  "Численные методы в динамике вязкой жидкости";
- секционные и стендовые доклады секции C
  "Комплексы программ математической физики".

Адрес Оргкомитета:

630090, г. Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, 6
Телефон (3832) 35–00–50 Факс: (3832) 35–12–42
E-mail: ict@adm.ict.nsk.su

Разностные схемы для уравнений электрогазодинамики

Г. Даирбаева, Н. Тунгатаров

Корректность краевых задач для дифференциальных уравнений электрогазодинамики исследована в работах [1], [2].

В настоящей работе рассматриваются разностные схемы для уравнений электрогазодинамики и исследуется их устойчивость.

1. Для дифференциальных уравнений баротропного вязкого газа в электрическом поле [1] в области $\mathbf{Q} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{0}, \mathbf{T}), \mathbf{\Omega} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ построена следующая разностная схема

$$v^{n+1}_{i-1/2\bar{t}} = u^{n+1}_{i\bar{x}}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$u^{n+1}_{i\bar{t}} = \nu\left(\frac{1}{v^{n+1}_{i-1/2}} u^{n+1}_{i\bar{x}}\right)_x - \left(P\left(v^{n+1}_{i-1/2}\right)\right)_x + \frac{\varepsilon_1}{2}\left(E^{n+1}_{i+1} + E^{n+1}_i\right) E^{n+1}_{ix},$$

$$E^{n+1}_{i\bar{t}} = -\frac{b}{2v^n_{i-1/2}}\left(\left(E^{n+1}_{i+1}\right)^2 + E^{n+1}_i E^{n+1}_{i-1} + \left(E^{n+1}_{i-1}\right)^2\right)_x + \qquad (1)$$

$$+\frac{D}{v^n_{i-1/2}}\left(\frac{1}{v^{n+1}_{i-1/2}} E^{n+1}_{i\bar{x}}\right)_x + j^n, \quad i = \overline{1, N-1}; \; n = \overline{1, M-1},$$

$$P\left(v^{n+1}_{i-1/2}\right) = \left(v^{n+1}_{i-1/2}\right)^{-\gamma}, \qquad \gamma > 1,$$

$$u^{n+1}_o = u^{n+1}_N = 0, \quad E^{n+1}_o = E^{n+1}_N = 0, \quad n = \overline{0, M},$$

$$u^o_i = u_o(x_i), \quad v^o_{i-1/2} = v_0(x_{i-1/2}), \quad E^o_i = E_o(x_i),$$

$$0 < m_o \le v^o_{i-1/2} \le M_0 < \infty,$$

где $Nh = 1, M\Delta t = T;\ \nu, \varepsilon_1, b, D$ — положительные константы.

Теорема 1. Пусть

$$u^o, E^o \in \mathbf{W^1_{2h}}(\mathbf{\Omega_h}), \mathbf{v^o} \in \mathbf{W^1_{2h}}(\mathbf{\Omega^1_h}), \mathbf{j} \in \mathbf{L_{2\Delta t}}(\mathbf{\Omega_{\Delta t}}),$$

тогда для разностного решения (u, v, E) задачи (1) имеют место неравенства $0 < m_1 \leq v_{i-1/2}^n \leq M_1 < \infty, i = \overline{1, N}, n = \overline{1, M}$,

$$\max_{1 \leq n \leq M} \left(\|u_{\bar{x}}^n\|^2 + \|v_{\bar{x}}^n\|^2 + \|E_{\bar{x}}^n\|^2 \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{M} \left(\|u_{\bar{t}}^n\|^2 + \|E_{\bar{t}}^n\|^2 + \|u_{x\bar{x}}^n\|^2 + \|E_{x\bar{x}}^n\|^2 \right) \Delta t \leq C < \infty.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда разностная схема (1) устойчива по начальным данным u^o, v^o, E^o, так что справедлива оценка

$$\max_{1 \leq n \leq M} \left(\|u^n - \tilde{u}^n\|^2 + \|v^n - \tilde{v}^n\|^2 + \|E^n - \tilde{E}^n\|^2 \right) \leq$$

$$\leq C \left(\|u^o - \tilde{u}^o\|^2 + \|v^o - \tilde{v}^o\|^2 + \|E^o - \tilde{E}^o\|^2 \right),$$

где $(u, v, E), \left(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}\right)$ — соответственно решения задачи (1) и возмущенной задачи для (1). Здесь $\|\|$ — сеточный аналог нормы в $\mathbf{L_2(\Omega)}$.

2. Для дифференциальных уравнений теплопроводного вязкого газа в электрическом поле [2] в области $\mathbf{Q}$ построена разностная схема

$$v_{i-1/2\bar{t}}^{n+1} = u_{i\bar{x}}^{n+1}, i = \overline{1, N},$$

$$u_{i\bar{t}}^{n+1} = \mu \left(\frac{u_{i\bar{x}}^{n+1}}{v_{i-1/2}^{n+1}} \right)_x - k \left(\frac{\theta_{i-1/2}^{n+1}}{v_{i-1/2}^{n+1}} \right)_x + \frac{\varepsilon}{2} \left(E_{i+1}^{n+1} + E_i^{n+1} \right) E_{ix}^{n+1},$$

$$\theta_{i-1/2\bar{t}}^{n+1} = \lambda \left(\frac{\theta_{i-1/2\bar{x}}^{n+1}}{\hat{v}_{i-1/2}^{n+1}} \right)_x - k \frac{\theta_{i-1/2}^{n+1}}{v_{i-1/2}^{n+1}} u_{i\bar{x}}^{n+1} + \mu \frac{\left(u_{i\bar{x}}^{n+1}\right)^2}{v_{i-1/2}^{n+1}} + \tag{2}$$

$$+ \frac{b\varepsilon}{2} v_{i-1/2}^n \left(E_i^{n+1} + E_i^n \right) E_i^{n+1} E_{i\bar{x}}^{n+1},$$

$$E_{i\bar{t}}^{n+1} = -b E_i^{n+1} E_{i\bar{x}}^{n+1}, \quad i = \overline{1, N-1}; \; n = \overline{0, M-1},$$

$$u_o^n = u_N^n = 0, \quad E_o^n = 0, \quad \theta_{1/2\bar{x}}^n = \theta_{N+1/2\bar{x}}^n = 0, \quad n = \overline{0, M},$$

$$u_i^o = u_o(x_i), v_{i-1/2}^o = v_o(x_{i-1/2}), \theta_{i-1/2}^o = \theta_o(x_{i-1/2}), E_i^o = E_o(x_i),$$

$$0 < m_o \leq \left(v_{i-1/2}^o, \theta_{i-1/2}^o \right) \leq M_o < \infty,$$

причем $\sum_{i=1}^{N} v_{i-1/2}^0 h = 1$. Здесь $\hat{v}_{i-1/2}^{n+1} = \frac{v_{i-1/2}^{n+1} + v_{i-1/2}^n}{2}$.

Теорема 3. Пусть $u^o, E^o \in \mathbf{W}^1_{2h}\Big(\mathbf{\Omega_h}\Big)$, $v^o, \theta^o \in \mathbf{W}^1_{2h}\Big(\mathbf{\Omega^1_h}\Big)$, $E^0_{i\bar{x}} \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, тогда для разностного решения (u, v, θ, E) задачи (2) имеют место неравенства $0 < m_1 \leq v^n_{i-1/2} \leq M_1 < \infty$, $0 < m_2 < \theta^n_{i-1/2} \leq M_2 < \infty$; $i = \overline{1, N}$, $n = \overline{1, M}$,

$$\max_{1 \leq n \leq M} \left(\|u^n_{\bar{x}}\|^2 + \|v^n_{\bar{x}}\|^2 + \|\theta^n_{\bar{x}}\|^2 + \|E^n_{\bar{x}}\|^2\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{M} \Big(\|u^n_{\bar{t}}\|^2 + (\|\theta^n_{\bar{t}}\|^2 + \|u^n_{x\bar{x}}\|^2 + + \|\theta^n_{x\bar{x}}\|^2 \Big) \Delta t \leq C < \infty$$

и разностная схема (2) устойчива по начальным данным u^0, v^0, θ^0, E^0, так что выполняется оценка, аналогичная оценке из теоремы 2.

[1] Файзуллина Н.Т. О разрешимости краевой задачи для уравнений электрогазодинамики. – Дин.сплошной среды, 91. – 1989.– С. 135-148.

[2] Файзуллина Н.Т. Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа. – Мат.проб.мех.спл.среды. Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1990, вып.97.

Казахстан, Алматы

УДК

Математические модели и численные методы механики сплошных сред. Тезисы докладов международной конференции / Под редакцией Ю.И. Шокина. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. — 544 с.

ISBN 5–7692–0013–8

В книге представлены тезисы докладов Международной конференции, посвященной 75-летию выдающегося математика и механика, организатора науки академика Николая Николаевича Яненко. Содержание докладов определяется тематикой исследований, проводившихся академиком Яненко лично и под его руководством. Среди них работы по вопросам построения математических моделей гидро- и аэродинамики, фильтрации, лазерной физики, механики твердого деформируемого тела, по проблемам теории уравнений в частных производных, по разработке и исследованию конечно-разностных схем.