Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов, Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным, *Матем. заметки*, 2017, том 101, выпуск 3, 413–424

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm11094

Математические заметки

Том 101 выпуск 3 март 2017

УДК 510.67

Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным

Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов

Исследуются понятия почти ω-категоричности и 1-локальной ω-категоричности. В частности, найдены необходимые и достаточные условия их эквивалентности при дополнительных предположениях. Доказана теорема, устанавливающая эренфойхтовость 1-локальной ω-категоричной теории на плотных линейных порядках. Установлена почти ω-категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий, являющихся бинарными.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: линейный порядок, почти ω-категоричность, 1-локальная ω-категоричность, эренфойхтова теория, слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, бинарная теория, ранг выпуклости.

DOI: 10.4213/mzm11094

Проблема классификации счетных моделей полных теорий является одной из основных проблем современной теории моделей, при этом существенная роль отводится изучению синтаксиса и семантики счетных теорий и их счетных моделей. В этой связи следует отметить как общие классификационные результаты [1]–[5], так и их применения к различным естественным классам теорий [6]–[17]. Актуальность полученных результатов определяется развитием общей теории моделей для упорядоченных теорий, в том числе подходов к решению вышеназванной проблемы.

В настоящей работе исследуются понятия почти ω-категоричности и 1-локальной ω-категоричности. В п. 1 найдены необходимые и достаточные условия их эквивалентности при дополнительных предположениях (теорема 1.8). В п. 2 доказана эренфойхтовость 1-локальной ω-категоричной теории на плотных линейных порядках (теоремы 2.1 и 2.2). В п. 3 доказана почти ω-категоричность эренфойхтовых бинарных вполне о-минимальных теорий (теорема 3.7). Также установлена эквивалентность понятий эренфойхтовости и почти ω-категоричности бинарных вполне о-минимальных теорий при условии конечности размерности множества неизолированных типов из $S_1(\varnothing)$ (следствие 3.10).

1. Почти ω-категоричность и 1-локальная ω-категоричность. Пусть L – счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье, если не оговорено противное, мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 0830/ГФ4).

бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах.

Пусть A, B – произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ (соответственно $b < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Если f – функция на M, то мы обозначаем через $\mathrm{Dom}(f)$ область определения функции f, а через $\mathrm{Range}(f)$ – ее область значений. Теория T является *бинарной*, если любая формула теории T эквивалентна в T булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных. Теория T называется *эренфойхтовой*, если $1 < I(T,\omega) < \omega$, т.е. T имеет конечное, но большее единицы число попарно неизоморфных счетных моделей. Будем говорить, что теория T имеет λ счетных моделей, если T имеет λ счетных попарно неизоморфных моделей.

Пример 1.1. Пусть

$$M = \left\langle M; <, P_1^1, \ldots, P_k^1, \ldots, E_{2,1}^2, E_{3,1}^2, E_{3,2}^2, \ldots, E_{k,1}^2, \ldots, E_{k,k-1}^2, \ldots \right\rangle_{k\in\omega}$$

– линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_k, $k \in \omega$, при этом $P_k(M) < P_{k+1}(M)$ для всех $k \in \omega$. Мы отождествляем каждую интерпретацию P_k, $1 \leqslant k < \omega$, с множеством $\mathbb{Q}^k$, упорядоченном лексикографически. Для каждого $2 \leqslant k < \omega$ интерпретации бинарных предикатов $E_{k,1}^2, \ldots, E_{k,k-1}^2$ – это отношения эквивалентности на $P_k(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k), y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{Q}^k$ и для любого $1 \leqslant j \leqslant k-1$

$$E_{k,j}(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_{k-j} = y_{k-j}.$$

Подобно примеру Эренфойхта теория $T = Th(M)$ имеет три счетные модели, поскольку для единственного неглавного 1-типа $p_\infty(x)$, изолируемого множеством формул $\exists\, y\, (P_k(y) \wedge y < x) \wedge \forall\, z\, (P_k(z) \to z < x)$, $k \in \omega$, имеют место лишь следующие возможности, определяющие типы изоморфизмов счетных моделей:

1) тип $p_\infty(x)$ опускается в модели теории T;
2) в модели теории T, ограниченной на множество реализаций типа $p_\infty(x)$, имеется наименьший элемент;
3) в модели теории T не выполняются условия 1), 2) и при этом для ограничения этой модели на множество реализаций типа $p_\infty(x)$ не существует наименьшего элемента.

Отметим, что значение $I(T,\omega) = 3$ в приведенном примере вытекает из общих утверждений, приводимых ниже.

В оставшейся части этого раздела рассматриваются произвольные счетные полные теории, не имеющие конечных моделей.

Определение 1.2 [6], [5]. Пусть $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)$ — 1-типы из $S(T)$ с дизъюнктными множествами свободных переменных. Тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S(T)$ называется *$(p_1, \ldots, p_n)$-типом*, если $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^n p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T обозначается через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω-категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S(T)$ существует лишь конечное число типов

$$q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T).$$

В работе [6] доказано, что если T – почти ω-категоричная теория с условием $I(T,\omega)=3$, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок.

Теория T из примера 1.1 является почти ω-категоричной. Поскольку в этом примере $I(T,\omega)=3$, данный пример иллюстрирует основной результат работы [6].

Напомним, что теория T называется *малой*, если T имеет счетное число типов, т.е. $|S(T)|=\omega$.

Известно, что любая счетная теория, имеющая меньше 2^ω счетных моделей, (и, в частности, любая ω-категоричная теория и любая эренфойхтова теория) является малой.

Предложение 1.3. *Любая почти ω-категоричная теория T мала тогда и только тогда, когда $|S_1(T)|\leqslant\omega$.*

Доказательство. Очевидно, что из малости теории T всегда следует оценка $|S_1(T)|\leqslant\omega$. Предположим, что $|S_1(T)|\leqslant\omega$. Поскольку по определению почти ω-категоричной теории каждое объединение $p_1(x_1)\cup\dots\cup p_n(x_n)$ 1-типов имеет конечное число пополнений из $S_{p_1,\dots,p_n}(T)$, получаем следующую оценку для числа полных типов теории T:

$$|S(T)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\omega^n\cdot\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega^{n+1}=\omega,$$

т.е. T – малая теория.

Предложение 1.3 допускает следующее обобщение, дающее характеризацию малости теории.

Предложение 1.4. *Любая счетная теория T мала тогда и только тогда, когда $|S_1(T)|\leqslant\omega$ и для любых типов $p_1(x_1),\dots,p_n(x_n)\in S_1(T)$ множество $S_{p_1,\dots,p_n}(T)$ не более чем счетно.*

Доказательство повторяет доказательство предложения 1.3.

Из теоремы Рыль-Нардзевского [7] вытекает следующее уточнение предложения 1.4.

Предложение 1.5. *Любая счетная теория T ω-категорична тогда и только тогда, когда $|S_1(T)|<\omega$ и для любых типов $p_1(x_1),\dots,p_n(x_n)\in S_1(T)$ множество $S_{p_1,\dots,p_n}(T)$ конечно.*

Определение 1.6 [8]–[10]. Счетная теория T предикатной сигнатуры называется 1-*локально счетно категоричной* (или 1-*локально ω-категоричной*) или для краткости LCC1-*теорией*, если T имеет лишь конечное число неглавных 1-типов $p_1,\dots,p_n$, и при этом для любых формул $\varphi_i(x)\in p_i(x)$, $i=1,\dots,n$, и любого кортежа $\overline{a}$, каждая координата которого реализует некоторый тип p_i, структура, определяемая формулами с параметрами из $\overline{a}$, на множестве, определяемом формулой $\neg\varphi_1(x)\wedge\dots\wedge\neg\varphi_n(x)$, ω-категорична.

Замечание 1.7. Отметим, что любая теория одноместных предикатов (с конечным или бесконечным числом неглавных 1-типов) является почти ω-категоричной. Вместе с тем, 1-локально счетно категоричными являются теории одноместных предикатов, имеющие лишь конечное число неглавных типов. Тем самым, существуют почти ω-категоричные теории предикатной сигнатуры, не являющиеся LCC1-теориями. Пример LCC1-теории, не являющейся почти ω-категоричной, также привести несложно, моделируя бесконечное множество $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$ для неглавных 1-типов $p_1,\ldots,p_n$. Достаточно построить граф с 1-локально счетно категоричной теорией, у которого лишь на множестве реализаций единственного неглавного типа будет бесконечный диаметр. В качестве такого графа можно рассмотреть неориентированный граф, состоящий из вершин степени 2 таких, что для каждого натурального $n \geqslant 3$ имеется единственный цикл длины n, а также существуют бесконечные компоненты связности.

Следующая теорема показывает, что причины, описанные в замечании 1.7, по существу исчерпывают различия между классами почти ω-категоричных теорий и LCC1-теорий.

Теорема 1.8. *Пусть T – счетная теория предикатной сигнатуры и с конечным числом неизолированных типов $p_1,\ldots,p_n \in S_1(\varnothing)$, и при этом множество $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$ конечно. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *теория T почти ω-категорична*;

(2) *теория T 1-локально ω-категорична.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть T – почти ω-категоричная теория, и предположим, что T не является 1-локально счетно категоричной. Тогда для некоторых формул $\varphi_i(x) \in p_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$, и некоторого кортежа $\overline{a}$, каждая координата которого реализует некоторый тип p_i, структура $\mathcal{M}$, определяемая формулами с параметрами из $\overline{a}$, на некотором множестве M, определяемом формулой $\neg\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_n(x)$, не является ω-категоричной. По теореме Рыль-Нардзевского это означает, что для некоторого m является бесконечным множество X m-типов из $S(\overline{a})$, реализуемых в M. Так как $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ – все неглавные 1-типы теории T, то в M реализуется лишь конечное число 1-типов и, тем самым, имеется бесконечное число m-типов $q(x_1,\ldots,x_m,\overline{a})$ из X, содержащих одни и те же 1-типы $r_{i_1}(x_1),\ldots,r_{i_m}(x_m)$. Считая, что $\overline{a} = (a_1,\ldots,a_k)$ и $\models p_{j_s}(a_s)$, $s \in \{1,\ldots,k\}$, получаем бесконечное множество $S_{r_{i_1},\ldots,r_{i_m},p_{j_1},\ldots,p_{j_k}}(T)$, что противоречит почти ω-категоричности теории T.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть теперь T – LCC1-теория. Рассмотрим произвольное множество

$$X \rightleftharpoons S_{r_{i_1},\ldots,r_{i_m},p_{j_1},\ldots,p_{j_k}}(T),$$

где $r_{i_1},\ldots,r_{i_m}$ – типы, отличные от $p_1,\ldots,p_n$. Если $m = 0$, то по условию это множество конечно. Предполагая, что $m > 0$, найдем формулы $\varphi_1(x) \in p_1(x),\ldots,\varphi_n(x) \in p_n(x)$, отделяющие $r_{i_1},\ldots,r_{i_m}$ от $p_1,\ldots,p_n$ так, чтобы на некотором множестве M, определяемом формулой $\psi(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_n(x)$, реализовывались все типы $r_{i_1},\ldots,r_{i_m}$ и не реализовывался ни один из типов $p_1,\ldots,p_n$. Тогда каждый тип из X содержит формулу $\psi(x)$. По условию для любого кортежа $\overline{a}$, каждая координата которого реализует некоторый тип p_i, структура, определяемая формулами с параметрами из $\overline{a}$, на множестве M, ω-категорична. По теореме Рыль-Нардзевского получаем, что каждый из элементов множества $S_{p_{j_1},\ldots,p_{j_k}}(T)$ имеет конечное множество расширений из X. Так как по условию $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$ конечно, а значит и $S_{p_{j_1},\ldots,p_{j_k}}(T)$ конечно, множество X также конечно. Поскольку множество X выбрано произвольным, теория T почти ω-категорична.

На основании предложения 1.4 и доказательства теоремы 1.8 справедливо следующее

Предложение 1.9. *Пусть T – LCC1-теория с конечным числом неглавных 1-типов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$. Тогда теория T мала если и только если множество $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$ не более чем счетно.*

Напомним [5], [11], что тип p теории T называется *властным*, если из реализуемости в модели $\mathcal{M}$ теории T типа p следует реализуемость в $\mathcal{M}$ любого типа теории T.

Определение 1.10 [8], [9]. Пусть $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – некоторые 1-типы LCC1-теории T. Тип $q \in S(T)$ называется $(p_1, \ldots, p_n)$-*властным*, если в любой модели $\mathcal{M} \models T$, реализующей тип q, реализуются все типы $r(\overline{y}) \in S(T)$, у которых для каждой переменной $y_l \in \overline{y}$ некоторый тип $p_i(y_l)$ содержится в $r(\overline{y})$. Тип $p(x)$ называется *внутренне властным*, если $p(x)$ – p-властный тип.

Напомним [11], что любая эренфойхтова теория имеет неглавный властный тип.

Теорема 1.11 [8], [9]. *Если $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – все неглавные 1-типы LCC1-теории T, то любой $(p_1, \ldots, p_n)$-властный тип $q \in S(T)$ является властным.*

Непосредственно из теоремы 1.11 вытекает

Следствие 1.12 [8], [9]. *Если $p(x)$ – единственный неглавный 1-тип LCC1-теории T и $p(x)$ – внутренне властный тип, то тип $p(x)$ является властным.*

Теория из примера 1.1 является LCC1-теорией, имеющей единственный неглавный 1-тип $p_\infty(x)$. Этот тип является властным в силу следствия 1.12.

2. 1-Локально счетно категоричные теории на плотных линейных порядках.

Теорема 2.1. *Пусть T – LCC1-теория со строгим плотным линейным порядком $<$ и единственным неглавным 1-типом $p(x)$ таким, что*

1) *если $a \not\models p(x)$ и $b \models p(x)$, то $a < b$;*
2) *каждый предикат, отличный от $<$, не имеет ни одного набора, у которого хотя бы одна координата реализует тип $p(x)$.*

Тогда $I(T, \omega) = 3$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n(x) \mid n \in \omega\}$ – множество формул, изолирующее тип $p(x)$. По теореме об опускании типа найдется счетная модель $\mathcal{M}_0 \models T$, опускающая тип p, и, следовательно, состоящая из элементов, принадлежащих множествам решений формул $\neg\varphi_n(x)$. В силу 1-локально счетной категоричности теории T модель $\mathcal{M}_0$ проста. Из условия 1) вытекает, что модель $\mathcal{M}_0$ имеет два счетных элементарных расширения $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, первое из которых имеет наименьшую реализацию типа $p(x)$, а второе, реализуя тип $p(x)$, не имеет такой наименьшей реализации. В силу условия 2) любая счетная модель теории T изоморфна одной из моделей $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$. Тем самым, $I(T, \omega) = 3$.

Значение $I(T, \omega) = 3$ имеет место в примере 1.1 на основании теоремы 2.1.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть T – LCC1-теория со строгим плотным линейным порядком $<$ и конечным множеством неглавных 1-типов $p_0(x),\ldots,p_m(x)$ таким, что*

1) *множества реализаций каждого из типов p_i являются выпуклыми;*
2) *каждый предикат, отличный от $<$ и некоторого конечного множества одноместных предикатов $P_1,\ldots,P_k$, не имеет ни одного набора, у которого хотя бы одна координата реализует хотя бы один тип $p_i(x)$;*
3) *каждый $(p_1,\ldots,p_m)$-тип изолируется типами $p_1,\ldots,p_m$, а также некоторым множеством формул вида $(x\approx y)^\delta$, $x<y$, $P_j^\delta(x)$, $\delta\in\{0,1\}$, $j\in\{1,\ldots,k\}$.*

Тогда теория T является эренфойхтовой.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_{in}(x)\mid n\in\omega\}$ – множество формул, изолирующее тип $p_i(x)$. По теореме об опускании типа найдется счетная модель $\mathcal{M}_0\models T$, опускающая все типы p_i, и следовательно, состоящая из элементов, принадлежащих множествам решений формул $\neg\varphi_{1n}(x)\wedge\cdots\wedge\neg\varphi_{mn}(x)$. В силу 1-локально счетной категоричности теории T модель $\mathcal{M}_0$ проста. Из условия 1) вытекает, что модель $\mathcal{M}_0$ имеет конечное множество счетных элементарных расширений, реализующих некоторые типы p_i и имеющих или не имеющих наименьшие/наибольшие реализации среди реализаций этих типов. Дополнительно к этому для наибольших/наименьших реализаций имеется лишь конечное число возможностей для выполнения $P_j(x)$ и $\neg P_j(x)$. Тем самым, в силу условий 2) и 3) имеется лишь конечное число возможностей для типов наибольших/наименьших элементов. Эти типы, а также условия реализуемости и опускания типов p_i определяют типы изоморфизма счетных моделей. Таким образом, T – эренфойхтова теория.

Иллюстрацией теоремы 2.2 служат приводимые ниже известные модификации [12] примера Эренфойхта, удовлетворяющие условиям этой теоремы.

Пример 2.3. Пусть T_n – теория системы $\mathcal{M}^n$, полученной из системы $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ добавлением констант c_k, $c_k<c_{k+1}$, $k\in\omega$, таких, что $\lim_{k\to\infty}c_k=\infty$, а также добавлением одноместных предикатов $P_0,\ldots,P_{n-3}$, образующих разбиение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с условиями

$$\models\forall x,y\,((x<y)\to\exists z\,((x<z)\wedge(z<y)\wedge P_i(z))),\qquad i=0,\ldots,n-3.$$

Теория T_n имеет ровно n попарно неизоморфных счетных моделей:

а) простую модель $\mathcal{M}^n$ ($\lim_{k\to\infty}c_k=\infty$);
б) простые модели $\mathcal{M}_i^n$ над реализациями властных типов $p_i(x)\in S^1(\varnothing)$, определяемых множествами формул $\{c_k<x\mid k\in\omega\}\cup\{P_i(x)\}$, $i=0,\ldots,n-3$ ($\lim_{k\to\infty}c_k\in P_i$);
в) насыщенную модель $\overline{\mathcal{M}}^n$ (предел $\lim_{k\to\infty}c_k$ иррационален).

Замечание 2.4. Теорема 2.2 остается справедливой при выполнении одного или обоих из следующих преобразований:

1) элементы линейно упорядоченного множества заменены на равномощные антицепи, образующие отношение эквивалентности $E_\leqslant=\leqslant\cap\geqslant$;
2) на множестве реализаций каждого из типов $p_1,\ldots,p_m$ определено конечное множество последовательно вложенных плотно упорядоченных отношений

эквивалентности E, имеющих выпуклые классы и задающих конечный ранг выпуклости; при этом каждый $(p_1, \ldots, p_m)$-тип изолируется, помимо формул, указанных в теореме 2.2, формулами вида $E^\delta(x, y)$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Определение 2.5. Два типа $p, q \in S_1(T)$ называются (*связанными*) *копиями*, если для любой (некоторой) модели $\mathcal{M} \models T$, реализующей типы p и q, изоморфны индуцированные структуры на множествах $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ реализаций типов p и q соответственно.

Очевидно, что отношение

$$E_{\rm cc}(T) \rightleftharpoons \bigl\{(p, q) \in S_1(T) \times S_1(T) \mid p \text{ и } q \text{ являются связанными копиями}\bigr\}$$

есть отношение эквивалентности.

Заметим, что неалгебраические копии $p, q \in S_1(T)$ превращаются в связанные копии введением определимой биекции f, связывающей некоторые формульные надмножества для $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ и свидетельствующей о том, что индуцированные структуры на множествах $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ изоморфны.

Замечание 2.6. Теорема 2.2 выполняется, если в ее формулировке заменить 1-локальную счетную категоричность на почти ω-категоричность и потребовать, чтобы на множестве всех неглавных 1-типов теории T отношение $E_{\rm cc}(T)$ имело лишь конечное число классов эквивалентности.

3. Почти ω-категоричность вполне о-минимальных теорий. Настоящий пункт касается понятия *вполне о-минимальности*, введенного в [13]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Определение 3.1 [14]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots\rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В следующих определениях M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические типы.

Определение 3.2 (Байжанов, [15]). Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Лемма 3.3 [15; следствие 34 (iii)]. *Отношение не слабой ортогональности* $\not\perp^w$ *является отношением эквивалентности на* $S_1(A)$.

Определение 3.4 [13] . Будем говорить, что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f\colon p(M) \to q(M)$. Будем говорить, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Определение 3.5 [16]. Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ – произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x)) \geqslant 1$, если $\phi(M)$ бесконечно;
2) $RC(\phi(x)) \geqslant \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечная последовательность элементов b_i, $i \in \omega$, такие, что:
   - для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$, мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;
   - для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geqslant \alpha$ и $E(M, b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M)$;
3) $RC(\phi(x)) \geqslant \delta$, если $RC(\phi(x)) \geqslant \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geqslant \alpha$ для всех α) мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Рангом $RC(p)$ выпуклости 1*-типа p* называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

Вернемся к примеру 1.1. Может быть доказано, что $T = Th(M)$ является вполне о-минимальной теорией. Для каждого $1 \leqslant k < \omega$ справедливо $RC(P_k(x)) = k$, т.е. $RC(p_k) < \omega$ для каждого неалгебраического 1-типа $p_k \in S_1(\varnothing)$, изолируемого формулой $P_k(x)$. Поскольку для каждого $k \in \omega$ выполняется $RC(x = x) \geqslant k$, теория T имеет бесконечный ранг выпуклости.

Таким образом, установлено следующее

Предложение 3.6. *Существует эренфойхтова вполне о-минимальная теория, имеющая бесконечный ранг выпуклости.*

Теорема 3.7. *Любая эренфойхтова бинарная вполне о-минимальная теория является почти ω-категоричной.*

Доказательство. Пусть T – эренфойхтова бинарная вполне о-минимальная теория. Рассмотрим произвольный неалгебраический $p \in S_1(\varnothing)$. Докажем, что $RC(p) < \omega$. Если это не так, то существует бесконечное число $\varnothing$-определимых отношений эквивалентности $\{E_k(x, y) \mid k \in \omega\}$ такое, что для любого $a \in p(M)$,

$$E_1(M, a) \subset E_2(M, a) \subset \cdots \subset E_k(M, a) \subset \cdots$$
$$(\text{или} \quad E_1(M, a) \supset E_2(M, a) \supset \cdots \supset E_k(M, a) \supset \cdots).$$

Тогда существует неизолированный $p' \in S_1(\{a\})$, расширяющий множество $p(x) \cup \{x > a\} \cup \{\neg E_k(x, a) \mid k \in \omega\}$ (или $p(x) \cup \{x > a\} \cup \{E_k(x, a) \mid k \in \omega\}$). В этом случае $T(a)$, а следовательно и T, имеет бесконечное число счетных моделей, что противоречит эренфойхтовости T. Следовательно, для некоторого $n_p < \omega$, $RC(p) = n_p$, откуда в силу бинарности T существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x, y), \ldots, E_{n_p-1}^p(x, y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$, $E_1^p(M, a) \subset \cdots \subset E_{n_p-1}^p(M, a)$.

Докажем индукцией по $n \geqslant 2$, что для любого семейства неалгебраических $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\varnothing)$ существует лишь конечное число $(p_1, \ldots, p_n)$-типов.

Шаг $n = 2$.

Случай 1: $p_1 \perp^w p_2$. Тогда множество $p_1(x_1) \cup p_2(x_2)$ определяет полный 2-тип над $\varnothing$.

Случай 2: $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда в силу вполне о-минимальности существует $\varnothing$-определимая биекция $f_{1,2} \colon p_1(M) \to p_2(M)$, откуда $RC(p_1) = RC(p_2)$ (обозначим через n_p их ранг выпуклости). Поймем, что других $\varnothing$-определимых функций из $p_1(M)$

в $p_2(M)$ нет. Если это не так, то для некоторых $b_1, b_2 \in p_2(M)$ мы имеем $b_2 \in \mathrm{dcl}(\{b_1\})$, т.е. существует $\varnothing$-определимая функция $f\colon p_2(M) \to p_2(M)$ с условием $f(b_1) = b_2$. Но тогда существует неизолированный тип $p_2' \in S_1(\{b_1\})$, расширяющий множество формул $\{p_2(x)\} \cup \{x > f^k(b_1) \mid k \in \omega\}$, откуда $T(b_1)$ имеет бесконечное число счетных моделей, противореча эренфойхтовости T. Тогда утверждаем, что единственно возможными расширениями множества $p_1(x_1) \cup p_2(x_2)$ являются

$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) = x_2\},$$
$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) < x_2 \wedge E_1^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2)\},$$
$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) < x_2 \wedge E_{i+1}^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2) \wedge \neg E_i^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2)\},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n_p - 2,$$
$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) < x_2 \wedge \neg E_{n_p-1}^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2)\},$$
$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) > x_2 \wedge E_1^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2)\},$$
$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) > x_2 \wedge E_{i+1}^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2) \wedge \neg E_i^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2)\},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n_p - 2,$$
$$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{f_{1,2}(x_1) > x_2 \wedge \neg E_{n_p-1}^{p_2}(f_{1,2}(x_1), x_2)\}.$$

Таким образом, существует ровно $2n_p + 1$ (p_1, p_2)-типов.

Предположим, что мы уже установили конечность числа $(p_1, \dots, p_k)$-типов для всех $k \leqslant n$ и докажем это для $n + 1$.

Шаг $n + 1$. Возьмем произвольные неалгебраические типы $p_1, \dots, p_n, p_{n+1} \in S_1(\varnothing)$.

Случай 1: $p_{n+1} \perp^w p_i$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. В этом случае число $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$-типов совпадает с числом $(p_1, \dots, p_n)$-типов.

Случай 2: $p_{n+1} \not\perp^w p_i$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $RC(p_1) = \dots = RC(p_{n+1})$ (обозначим через n_p их ранг выпуклости) и существует единственная $\varnothing$-определимая биекция $f_{n,n+1} : p_n(M) \to p_{n+1}(M)$. Поэтому возможными расширениями множества $p_1(x_1) \cup \dots \cup p_n(x_n) \cup p_{n+1}(x_{n+1})$ является присоединение к нему следующих $2n_p + 1$ формул:

$$f_{n,n+1}(x_n) = x_{n+1}, \qquad f_{n,n+1}(x_n) < x_{n+1} \wedge E_1^{p_{n+1}}(f_{n,n+1}(x_n), x_{n+1}),$$
$$f_{n,n+1}(x_n) < x_{n+1} \wedge E_{i+1}^{p_{n+1}}(f_{n,n+1}(x_n), x_{n+1}) \wedge \neg E_i^{p_{n+1}}(f_{n,n+1}(x_n), x_{n+1}),$$
$$1 \leqslant i \leqslant n_p - 2,$$
$$f_{n,n+1}(x_n) < x_{n+1} \wedge \neg E_{n_p-1}^{p_{n+1}}(f_{n,n+1}(x_n), x_{n+1}) \quad (\text{и аналогично с } f_{n,n+1}(x_n) > x_{n+1}).$$

В силу индукционного предположения число $(p_1, \dots, p_n)$-типов конечно (обозначим его через $S_{p_1,\dots,p_n}$). Тогда утверждаем, что число $(p_1, \dots, p_{n+1})$-типов равно произведению $S_{p_1,\dots,p_n}$ на $2n_p + 1$.

Случай 3: $p_{n+1} \not\perp^w p_i$ и $p_{n+1} \perp^w p_j$ для некоторых $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Тогда существуют (если необходимо) некоторая перенумерация p_i-х и некоторый $1 \leqslant k < n$ такие, что $p_{n+1} \perp^w p_j$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k$ и $p_{n+1} \not\perp^w p_l$ для всех $k + 1 \leqslant l \leqslant n$. В силу индукционного предположения как число $(p_1, \dots, p_k, p_{n+1})$-типов, так и число $(p_{k+1}, \dots, p_n, p_{n+1})$-типов являются конечными, при этом число $(p_1, \dots, p_k, p_{n+1})$-типов совпадает с числом $(p_1, \dots, p_k)$-типов. Обозначим эти числа через $S_{p_1,\dots,p_k}$ и

$S_{p_{k+1},\dots,p_n,p_{n+1}}$ соответственно. Тогда утверждаем, что число $(p_1,\dots,p_{n+1})$-типов равно произведению $S_{p_1,\dots,p_k}$ и $S_{p_{k+1},\dots,p_n,p_{n+1}}$.

Из теорем 1.8 и 3.7 вытекает

Следствие 3.8. *Любая эренфойхтова бинарная вполне о-минимальная теория предикатной сигнатуры и с конечным числом неизолированных* 1*-типов из* $S_1(\varnothing)$ *является* LCC1*-теорией.*

В общем случае обращение теоремы 3.7 неверно. Примером почти ω-категоричной бинарной вполне о-минимальной теории, не являющейся эренфойхтовой, является теория, состоящая из дизъюнктного объединения счетного числа копий произвольной эренфойхтовой бинарной вполне о-минимальной теории, упорядоченных по типу ω. Если же в этом примере дополнительно соединим каждые две копии строго монотонной биекцией, то получим почти ω-категоричную эренфойхтову вполне о-минимальную теорию, не являющуюся LCC1-теорией.

Тем не менее, при некотором дополнительном условии обращение данной теоремы верно. Для этого нам понадобится еще одно утверждение.

Предложение 3.9. *Пусть T – почти ω-категоричная вполне о-минимальная теория. Тогда в любой модели теории T имеет место принцип замены для алгебраического замыкания.*

Доказательство. Допустим противное: существуют $M \models T$ и $a, b, \bar{c} \in M$ такие, что $a \in \mathrm{dcl}(b,\bar{c}) \setminus \mathrm{dcl}(\bar{c})$, но $b \notin \mathrm{dcl}(a,\bar{c})$. Тогда очевидно, что $b \notin \mathrm{dcl}(\bar{c})$. Пусть $p := tp(a/\bar{c})$, $q := tp(b/\bar{c})$. Очевидно, что p и q – неалгебраические типы. Не умаляя общности, предположим, что $b < a$. Также пусть $\bar{c} = \langle c_1,\dots,c_m\rangle$. Без ограничения общности, можем считать, что $c_i \notin \mathrm{dcl}(\varnothing)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть $p_i := tp(c_i/\varnothing)$, где $1 \leqslant i \leqslant m$.

Случай 1: $p = q$. В этом случае нетрудно понять, что существует бесконечное число $(p, p, p_1,\dots,p_m)$-типов, что противоречит почти ω-категоричности теории T.

Случай 2: $p \neq q$. Так как $a \in \mathrm{dcl}(b,\bar{c})$, то $p \not\perp^w q$, и в силу вполне о-минимальности теории T существует $\bar{c}$-определимая биекция $f : q(M) \to p(M)$. Если $f(b) = a$, то $b \in \mathrm{dcl}(a,\bar{c})$, что противоречит нашему допущению. Если $f(b) = a' \neq a$, то $a \in \mathrm{dcl}(a',\bar{c})$, причем $tp(a/\bar{c}) = tp(a'/\bar{c})$. Если $a' \notin \mathrm{dcl}(a,\bar{c})$, то приходим к случаю 1. Следовательно, $a' \in \mathrm{dcl}(a,\bar{c})$, откуда $b \in \mathrm{dcl}(a,\bar{c})$, что опять противоречит нашему допущению.

Будем говорить, что множество $\Gamma \subseteq S_1(\varnothing)$ *независимо*, если для любого множества Γ', состоящего ровно из одной реализации каждого типа в Γ, для каждого $c' \in \Gamma'$ имеет место $c' \notin \mathrm{dcl}(\Gamma' \setminus \{c'\})$. Будем говорить, что $p \in S_1(\varnothing)$ *зависит от* Γ (или p и Γ *зависимы*), если $\Gamma \cup \{p\}$ не является независимым. *Размерностью* множества $\Gamma \subseteq S_1(\varnothing)$ (обозначаем через $\dim(\Gamma)$) назовем мощность максимально независимого подмножества множества Γ.

Следствие 3.10. *Пусть T – бинарная вполне о-минимальная теория, Γ – множество всех неизолированных типов из $S_1(\varnothing)$. Предположим, что $1 \leqslant \dim(\Gamma) < \omega$. Тогда T эренфойхтова $\Leftrightarrow$ T почти ω-категорична.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из теоремы 3.7.

($\Leftarrow$) В силу предложения 3.9 размерность множества 1-типов определяется корректно. Поскольку $\dim(\Gamma) \geqslant 1$, существует хотя бы один неизолированный $p \in S_1(\varnothing)$, откуда T не является ω-категоричной. Далее, если T не является эренфойхтовой, то существует $p \in \Gamma$, имеющий бесконечный диаметр. Но тогда число (p_1, p_2)-типов бесконечно, где $p_i(x_i) := p(x_i)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant 2$. Последнее противоречит почти ω-категоричности.

Замечание 3.11. Вопрос о существовании эренфойхтовой линейно упорядоченной теории, не являющейся почти ω-категоричной, решается положительно с использованием техники синтаксических генерических конструкций, развитой в [2]–[5], [17]. С целью построения такой теории T рассматривается генерический класс, состоящий из конечных структур, каждая из которых линейно упорядочена отношением $<$ и обогащена графовыми надстройками, образующими c-графы (с упорядоченными по типу $\omega+1$ цветами вершин и неограниченными длинами кратчайших маршрутов, влекущими не почти ω-категоричность), которые посредством свободного, над отношением $<$, амальгамирования при переходе к генерическому пределу образуют плотный линейный порядок с сигнатурной надстройкой, определяющей заданное число неглавных 1-типов с отношением подчинения $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ и функцией распределения f так, что отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ между этими типами индуцирует предпорядок Рудин–Кейслера на множестве типов изоморфизма простых над кортежами моделей, а функция f – функцию распределения числа предельных моделей над типами. Суммарное значение числа типов изоморфизма простых над кортежами моделей и предельных моделей определяет заданное конечное число $I(T, \omega) \geqslant 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Справочная книга по математической логике*. Ч. 1. *Теория моделей*, Наука, М., 1982.

[2] С. В. Судоплатов, “Полные теории с конечным числом счетных моделей. I”, *Алгебра и логика*, **43**:1 (2004), 110–124.

[3] С. В. Судоплатов, “Полные теории с конечным числом счётных моделей. II”, *Алгебра и логика*, **45**:3 (2006), 314–353.

[4] С. В. Судоплатов, “О числе счетных моделей полных теорий с конечными предпорядками Рудина–Кейслера”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:2 (2007), 417–422.

[5] С. В. Судоплатов, *Классификация счетных моделей полных теорий*, Ч. 1, 2, НГТУ, Новосибирск, 2014.

[6] K. Ikeda, A. Pillay, A. Tsuboi, “On theories having three countable models”, *Math. Logic Quart.*, **44**:2 (1998), 161–166.

[7] C. Ryll-Nardzewski, “On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.*, **7** (1959), 545–548.

[8] С. В. Судоплатов, “Об обогащениях и расширениях властных орграфов”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:3 (2009), 625–630.

[9] С. В. Судоплатов, *Полигонометрии групп*, НГТУ, Новосибирск, 2011.

[10] S. V. Sudoplatov, “Models of cubic theories”, *Bull. Sect. Logic Univ. Łódź*, **43**:1-2 (2014), 19–34.

[11] M. Benda, “Remarks on countable models”, *Fund. Math.*, **81**:2 (1974), 107–119.

[12] R. L. Vaught, “Denumerable models of complete theories”, *Infinistic Methods*, Pergamon, Oxford, 1961, 303–321.

[13] Б. Ш. Кулпешов, “Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях”, *Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем.*, **227** (2003), 26–31.

[14] D. Macpherson, D. Marker, C. Steinhorn, “Weakly o-minimal structures and real closed fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:12 (2000), 5435–5483.
[15] B. S. Baizhanov, “Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates”, *J. Symbolic Logic*, **66**:3 (2001), 1382–1414.
[16] B. Sh. Kulpeshov, “Weakly o-minimal structures and some of their properties”, *J. Symbolic Logic*, **63**:4 (1998), 1511–1528.
[17] С. В. Судоплатов, “Синтаксический подход к построению генерических моделей”, *Алгебра и логика*, **46**:2 (2007), 244–268.

Б. Ш. Кулпешов
Международный университет информационных технологий, г. Алматы;
Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан, г. Алматы
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Поступило
07.01.2016

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск;
Новосибирский государственный технический университет;
Новосибирский государственный университет;
Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан, г. Алматы
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru