КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

К.Б.Джакупов

Вычислительная механика

Алматы-2014

УДК 532 (075.8)
ББК 22.253 я73
Д 40

Рекомендовано к изданию
Ученым Советом механико-математического факультета КазНУ им.Аль-Фараби

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук , профессор ***С.Я.Серовайский;***
доктор физико-математических наук , профессор ***С.Т.Мухамбетжанов***

Джакупов Кенес Бажженович
Д 40 Вычислительная механика-Алматы: 2014.-176с.
ISBN 978-601-247-148-9

В учебном пособии излагаются вычислительные методы решения фундаментальных уравнений динамики материальной точки, гидродинамики, теории упругости.

Рекомендована бакалаврам, магистрантам, аспирантам, докторантам специальности «механика»

ББК 22.253 я73

ISBN 978-601-247-148-9

© К.Б. Джакупов

Оглавление

Введение……...…...**7**

Глава 1. ТОЧНЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ……..……..8

1.1. Метод исключения *Гаусса* с выделением главного элемента……..…...8
1.2. Метод прогонок.....9
1.3. Метод простой итерации *Якоби*. Основные понятия итерационных методов.....10
1.4. Метод *Некрасова-Зейделя*.....… …….....12
1.5. Метод минимальных невязок *Красносельского- Крейна*……...14
1.6. Вычисление корней уравнения. Метод простой итерации. Метод половинного деления. *Метод Ньютона*. Метод хорд……16

Глава 2. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ..……...18

2.1. Сетки и сеточные функции…….…….....18
2.2. Элементарные разностные операторы……......19
2.3. Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод баланса в ячейке. Аппроксимация *Аллена-Саусвелла*……..…..21
2.4. Разностные конвективные члены с «аппроксимационной вязкостью». Аппроксимация *Булеева-Петрищева*……....26
2.5. Разностные конвективные члены без «аппроксимационной вязкости». Аппроксимация *Джакупова*.....27
2.6. Аппроксимации диссипативных членов.....30
2.7. Численное интегрирование. Формулы *Ньютон-Котеса*…….31
2.8. Интерполирование сплайнами промежуточных значение сеточной функции. Простая интерполяция.....32

Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ МЕТОДАМИ *РУНГЕ-КУТТА, ЭЙЛЕРА*……...38

3.1 Дифференциальные уравнения динамики точки.....38
3.2 Методы *Рунге-Кутта* 4-го порядка точности.....38
3.3 Методы *Эйлера*.....41

Глава 4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА.....….42

4.1 Уравнения динамики вязкой жидкости……....42
4.2 Уравнения *Гельмгольца*……....43
4.3 Уравнения теплопроводности…….……44
4.4 Уравнения диффузии…….....44
4.5 Уравнения распространения тепла газах…….....45
4.6 Уравнения *Бюргерса*…….....46

Глава 5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....47

5.1 Постановка задачи.....47
5.2 Семейство явных схем.....47
5.3 Теорема эквивалентности *Лакса-Рихтмайера*.....52
5.4 Явная схема уравнения теплопроводности.....53
5.5 Явные схемы одномерного уравнения диффузии.....53
5.6 Схема с центральной разностью для конвективного члена уравнения *Бюргерса*.....54
5.7 Явная схема с «аппроксимационной вязкостью».....55
5.8 Явная 2-ого порядка точности схема без «аппроксимационой вязкости».....56
5.9 Некоторые сведения из теории линейных операторов. Исследование устойчивости схем методом оценки нормы операторов перехода.....57
5.10 Неявные схемы.....60
5.11 Абсолютно устойчивые неявные схемы.....62
5.12 Монотонные схемы. Алгоритмы реализации.....64
5.13 Схемы при краевых условиях *Неймана*.....67
5.14 Метод первого дифференциального приближения.....68
5.15 Исследование устойчивости схем методом *фон Неймана.*.....69
5.16 Схема («ромб») *Дюфорта-Френкеля*.....71
5.17 Абсолютно неустойчивая схема (чехарда) *Ричардсона*.....71
5.18 Схема *Кранка-Николсона*.....72
5.19 Технология построения монотонных схем.....72
5.20 Сходимость схемы типа *Кранка-Николсона*. Леммы.....74
5.21 Консервативные схемы. Метод энергетических неравенств.....80

Глава 6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....85

6.1 Постановка задачи.....85
6.2 Явные монотонные схемы.....85
6.3 Явная неоднородная схема без «аппроксимационной вязкости».....87
6.4 Схема типа *Кранка-Николсона*.....87
6.5 Схема *Письмана-Ракфорда*.....88
6.6 Схема альтернативных направлений с граничными условиями *Кряквиной-Дьяконова*.....89
6.7 Схема альтернативных направлений типа *Самарского*.....91
6.8 Схема *Дугласа-Ракфорда.* Схема стабилизирующей поправки.....93
6.9 Схема расщепления *Яненко* 95
6.10 Метод факторизации *Марчука-Яненко*.....95
6.11 Схема расщепления с весами. Проблема определения граничных значений промежуточных величин.....101
6.12 Монотонные однородные схемы 2-ого порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с *постоянным* коэффициентом молекулярной диффузии.....103
6.13 Монотонные однородные схемы 2-ого порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с *переменным* коэффициентом молекулярной диффузии.. 104
6.14 Эффективная реализация неявных схем методом простой итерации *Якоби*.....106

Глава 7. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕПЛО-МАССОПЕРЕНОСА, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ.....110

7.1 Стационарные уравнения *Гельмгольца* для вихря скорости и функции тока.....110
7.2 Стационарные уравнения теплопроводности.....110
7.3 Уравнения потенциала скорости.....110
7.4 Уравнения гидродинамического давления.....111
7.5 Уравнение потенциала электростатического поля.....111

Глава 8. **РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ**…….113

8.1 Метод *Якоби*.....113
8.2 Метод *Либмана-Зейделя*.....114
8.3 Сходимость итерационного процесса.....116
8.4 Итерационный метод *Письмана-Ракфорда*.....117
8.5 Итерационный метод *Дугласа-Ракфорда*.....118
8.6 Метод верхней релаксации.....119
8.7 Параметрический метод..…….....120

Глава 9. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ…….123

9.1 Уравнения возмущений плотности, скорости и давления в одномерных течениях идеального газа…….....123
9.2 Уравнения акустики.....123
9.3 Уравнения теории упругости с симметричным тензором напряжений *Ламе* $(\mu^o = \mu)$ и с несимметричным тензором напряжений *Джакупова* $(\mu^o = 0)$ ….....124
9.4 Уравнения электродинамики…….124

Глава 10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ125

10.1 Явная схема. Критерий *Куранта*……125
10.2 Неявная схема…….....127
10.3 Явная схема новых уравнений теории упругости.....127
10.4. Полунеявная схема новых уравнений теории упругости.....129

Глава 11. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ……..……132

11.1 Постановка задачи продольного обтекания пластины…….....132
11.2 Технологии построения разностных схем уравнений динамики вязкой жидкости на одной сетке. Полунеявные разностные схемы *Джакупова*.……..…… ……..…..……..134
11.3 Алгоритм реализации полуявной схемы…….....136
11.4 Технология получения разностных уравнений для давления……138
11.5 Итерационные алгоритмы. Метод глобальных итераций……..142
11.6 Схема без «аппроксимационной вязкости» для конвективных членов…149
11.7 Полунеявная схема решения трехмерных уравнений динамики вязкой

несжимаемой жидкости……151
11.8 *Программа на TURBO-PASCAL*……155

Глава 12. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ *ГЕЛЬМГОЛЬЦА* ДЛЯ ВИХРЯ СКОРОСТИ И ФУНКЦИИ ТОКА……....159

12.1 Постановка задачи……...…...159
12.2 Явная схема……....162
12.3 Схема альтернативных направлений. Итерационный алгоритм……....164

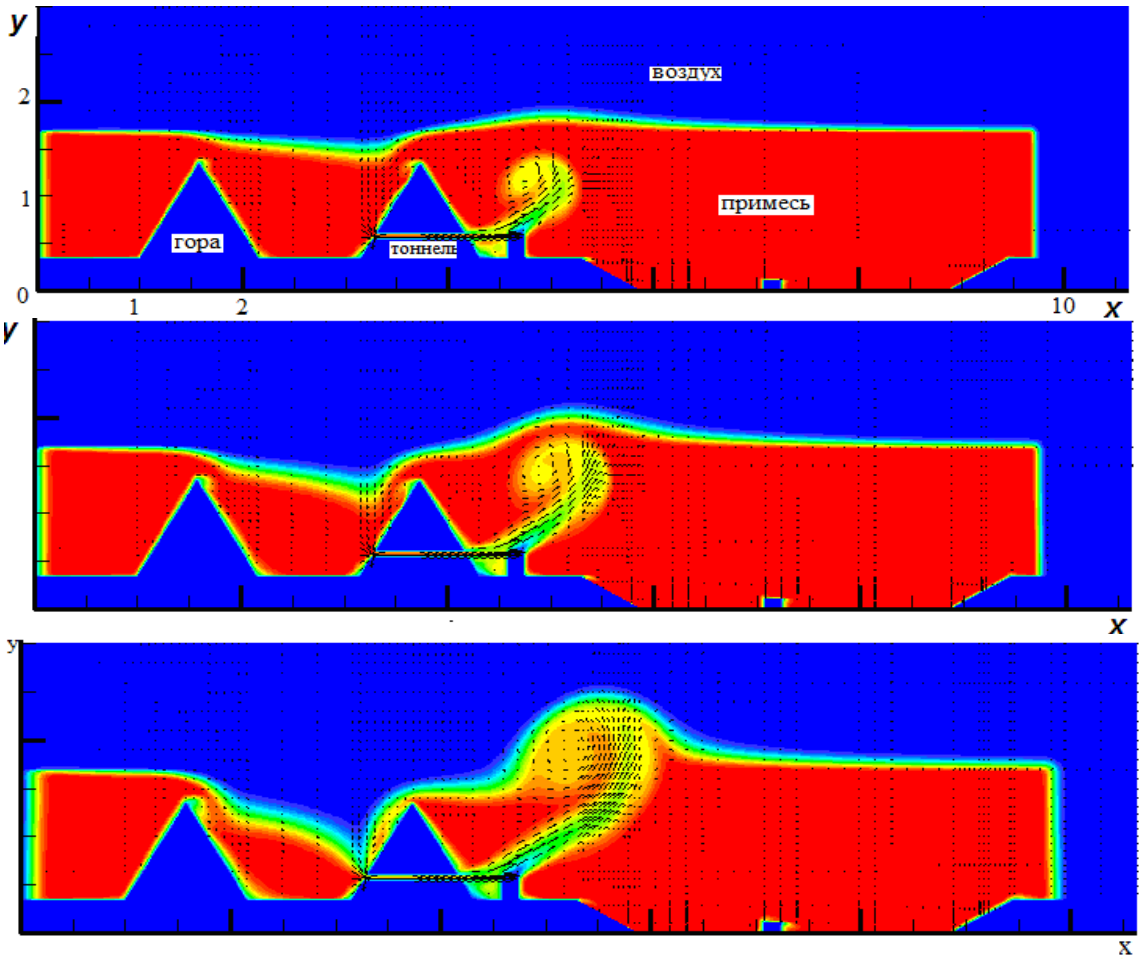
Глава 13. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ……..……...…..165

13.1 Разностная схема модели *Форцгеймера*……...…165
13.2 Корекция модели *Форцгеймера.* Разностная схема…… 169
13.3 Коррекция модели *Нумерова* фильтрации в насыщенных пористых средах……..……170

Глава 14. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ .171

14.1 Полуявная разностная схема *Джакупова*……171
14.2 Решение уравнений давления методом глобальных итераций…… 174

Библиография……...……175



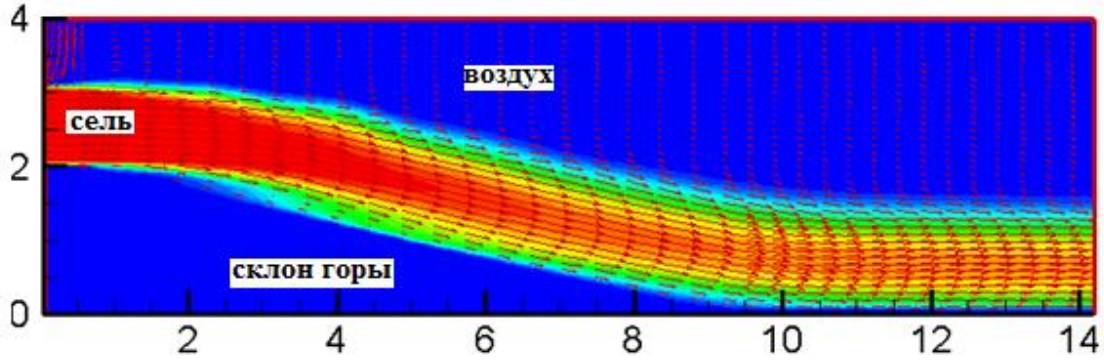
Влияние выдува из тоннели в правой горе на перенос примеси на моменты времени n=18400, n=31200, n=54800, сетка500x150, Re=80000, число Маха Mx=0.05, τ =0.0005

ВВЕДЕНИЕ

Содержание данного учебного пособия основано на материалах лекций, прочитанных автором в течение многих лет на кафедре механики механико-математического факультета Казахского Национального Университета им. *Аль -Фараби*. Соответственно специализации кафедры излагаются популярные методы решения алгебраических уравнений и их систем, классические методы численного дифференцирования, интегрирования, интерполирования, численные алгоритмы решения задачи *Коши* для основного уравнения динамики материальной точки, сеточные методы решения поставленных для фундаментальных уравнений гидромеханики, теории упругости, тепло-массопереноса начально-краевых задач.

Излагаются принципы конструирования явных, неявных и метода переменных направлений разностных схем уравнений в частных производных параболического, эллиптического и гиперболического типов и специфических уравнений механики сплошной среды, электродинамики. Основное внимание уделяется теоретическому обоснованию таких основополагающих аспектов численных методов, как устойчивость, сходимость разностных схем и итерационных алгоритмов, адекватная постановка граничных условий для промежуточных величин в схемах метода дробных шагов, выводу замкнутой системы разностных уравнений в задачах гидродинамики, теории упругости, электродинамики.

Автор поставил целью изложить только тот необходимый минимум, который, с его точки зрения, будет полезен учащимся бакалавриата, магистратуры, аспирантуры при использовании компьютерных методов в прикладных исследованиях, ограничиваясь рекомендацией для углубленного изучения методов вычислительной математики статьи и книги Н.Н.Яненко, Г.И.Марчука, А.А.Самарского, С.К.Годунова, Б.Г.Кузнецова, О.Ф.Васильева, Б.Л.Рождественского, А.Н.Коновалова, У.М.Султангазина, Ю.А.Березина, В.В.Пененко, В.П.Ильина, А.И.Толстых, В.М.Ковеня, В.А.Левина, С.Ф.Чекмарева, Ю.С.Завьялова, В.М.Пасконова, Е.С.Николаева, А.Н.Валиуллина, Ю.А.Кузнецова, И.К.Яушева, А.Ф.Воеводина, В.Н.Игнатьева, Г.Г.Черных, Л.Б.Чубарова, В.Д.Лисейкина, В.В.Остапенко, В.И. оловичева, В.Н.Берцуна и др.



Движение сели по наклонной горе

Глава 1. ТОЧНЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Метод исключения *Гаусса* с выделением главного элемента

Метод исключения *Гаусса* является *точным методом* решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Пусть определитель матрицы данной системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля: $\det[a_{ik}] \neq 0$. В методе *Гаусса* последовательно исключаются неизвестные, в результате чего система приводится к легко решаемому треугольному методу. Например, при $n=2$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

пусть главным элементом будет $|a_{22}| > |a_{21}|$. В этом случае идея *Гаусса* для системы (2) реализуется так:

$$\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}, x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}\left(\frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1\right) = b_1,$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}\dfrac{b_2}{a_{22}}}{a_{11} - a_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{22}}}, x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\cdot\frac{b_1 - a_{12}\dfrac{b_2}{a_{22}}}{a_{11} - a_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{22}}}$$

В знаменателе стоит определитель данной системы.

Пусть теперь в общем случае наибольшим по модулю элементом I-ой строки будет a_{Ik}. Для исключения неизвестной величины x_k из i-ой строки $(i \neq I)$, I-ая строка умножается на a_{ik}/a_{Ik} после чего вычитается из i- строки. Эта операция выполняется до тех пор, пока не образуется треугольная система

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_n &= \beta_n \end{aligned}$$

Для вычисления стоящих здесь искомых неизвестных используется матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}...\alpha_{1n} & | & \beta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \alpha_{23}...\alpha_{1n} & | & \beta_2 \\ ..... & & & | & ..... \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3}...\alpha_{nn} & | & \beta_n \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по рекуррентным формулам [23]:

$$\gamma_{i1} = a_{i1},\ (i = 1,2,...,n);\ \alpha_{1k} = a_{i1}a_{1k} / a_{11},\ (k = 2,3,...,n);$$

$$\gamma_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{ij}\alpha_{ik},\ (i,k = 2,3,...,n; i \geq k),$$

$$\alpha_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij}\alpha_{ik}) / \gamma_{ii},\ (i,k = 2,3,...,n; i < k);$$

$$\beta_1 = b_1 / a_{11}, \beta_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij}\beta_j) / \gamma_{ii}, (i = 2,3,...,n)$$

Определитель системы равен

$$\det[a_{ik}] = \gamma_{11}\gamma_{22}...\gamma_{nn}$$

Для симметрической матрицы $[a_{ik}]$ вычисления упрощаются

$$\alpha_{ik} = \gamma_{ki} / \gamma_{ii},\ (i,k = 2,3,...,n; i < k)$$

1.2. Метод прогонок

В разностных схемах имеют место быть трехдиагональные или пятидиагональные матрицы. Для решения систем уравнений в таких случаях эффективны методы прогонок, которые также являются точными методами.

Идея метода прогонок здесь излагается для *трехдиагональной* матрицы *A:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & ..... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В этом случае система (1) принимает специфическую форму:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} = b_i, i = 2,...,n-1,$$
$$a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n,$$

и ее решение ищется в виде связки

$$x_i = Z_i x_{i+1} + Y_i, i = n-1, n-2,...,1,$$

где по рекуррентным формулам прямой прогонки вычисляются Z_i, Y_i:

$$Z_1 = -a_{12}/a_{11}, Y_1 = b_1/a_{11}, Z_i = a_{ii+1}/(-a_{ii} - a_{ii-1}Z_{i-1}),$$
$$Y_i = (a_{ii-1}Y_{i-1} - b_i)/(-a_{ii} - a_{ii-1}Z_{i-1}), i = 2,..., n-1,$$

затем решается относительно x_{n-1}, x_n система из двух уравнений

$$a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n,$$
$$x_{n-1} - Z_{n-1}x_n = Y_{n-1},$$

откуда находится $x_n = (b_n - a_{nn-1}Y_{n-1})/(a_{nn} + a_{nn-1}Z_{n-1})$, после чего отыскиваются обратной прогонкой все остальные искомые

$$x_i = Z_i x_{i+1} + Y_i, i = n-1, n-2,...,1$$

В монографии «Методы решения сеточных уравнений» *Самарского А.А., Николаева Е.С.* приводятся уникальные теории и формулы матричных, векторных и других вариантов прогонок. В этой же книге обоснована корректность формул трехточечной прогонки при выполнении условий диагонального преобладания коэффициентов системы

$$|a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| \leq |a_{ii}|, i = 2,..., n-1$$

Алгоритмы трехточечной периодической прогонки разработаны в [11], пятиточечной периодической прогонки в [10].

1.3. Метод простой итерации *Якоби*. Основные понятия итерационных методов

Метод простой итерации *Якоби*

В этом методе в системе (1) производится перестановка строк таким образом, чтобы на левой главной диагонали стояли наибольшие по модулю элементы матрицы. После осуществления таких перестановок система (1) представляется в кратком виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, i = 1,..., n \qquad (3)$$

В итерационных методах начальное значение искомых неизвестных, т.е. *нулевая итерация или нулевое приближение* задается *произвольными числами*. Например,

$$x_k^0 = b_k, \ k = 1,..., n \text{ или } x_k^0 = 0, \ k = 1,..., n$$

Поскольку диагональные элементы определителя отличны от нуля: $a_{ii} \neq 0, i = 1,..., n$, следующие итерации x_k^j, $k = 1,..., n$, $j = 1,2,..., j^*$ находятся по алгоритму:

$$x_i^{j+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^j - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k^j), i = 1,..., n, j = 0,1,2,..., j^* \qquad (4)$$

На каждой итерации j вычисляются невязки

$$R_i^j = b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^j, i = 1,..., n \qquad (5)$$

Алгоритм (4) через невязки записывается в виде

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \frac{1}{a_{ii}}R_i^j, i = 1,..., n,$$

Очевидно, на точном решении системы (3) невязки равны нулю $R_i^j = 0, i = 1,...,n$, поэтому необходимо, чтобы в пределе эти невязки стремились к нулю $\lim\limits_{j\to\infty} R_i^j = 0, i = 1,...,n$. Имея это в виду, критерием прекращения итерационного процесса на приближении с номером j^* выбирают выполнение следующего неравенства

$$\max_{1\le i\le n} |R_i^{j^*}| \le \varepsilon, \quad \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \tag{6}$$

Данное неравенство называется критерием сходимости итераций.

Последние приближения $x_k^{j^*}$, $k = 1,...,n$ принимаются в качестве решения системы (3):

$$x_k \approx x_k^{j^*}, \ k = 1,...,n$$

Для доказательства сходимости итерационных алгоритмов вводится понятие *погрешности итераций*

$$\varepsilon_k^j = x_k^j - x_k, k = 1,...,n$$

Подставляя $x_k^j = \varepsilon_k^j + x_k$ в (4)

$$\varepsilon_i^{j+1} + x_i = \frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\varepsilon_k^j - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\varepsilon_k^j) + \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k), i = 1,...,n$$

и учитывая тот факт, что $x_k, k = 1,...,n$ является точным решением системы (3), для погрешности итераций получается система

$$\varepsilon_i^{j+1} = \frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\varepsilon_k^j - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\varepsilon_k^j), i = 1,...,n \tag{6'}$$

Сходимость итерационного алгоритма заключается в том, что в пределе должно быть стремление к точному решению

$$\lim_{j\to\infty} x_k^j = x_k, k = 1,...,n,$$

которое по смыслу эквивалентно стремлению погрешности итераций к нулю

$$\lim_{j\to\infty}(x_k^j - x_k) = \lim_{j\to\infty} \varepsilon_k^j = 0, k = 1,...,n$$

Следовательно, в любом итерационном процессе надо доказать выполнение предела $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_k^j = 0, k = 1,...,n$.

Теорема 1. *Для сходимости метода Якоби достаточно, чтобы коэффициенты матрицы в (3) обладали свойством диагонального преобладания*

$$\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| + \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}| < |a_{ii}|, i = 1,...,n \tag{*}$$

Доказательство. Возьмем по модулю от обеих частей (6')

$$|\varepsilon_i^{j+1}| = |\frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\varepsilon_k^j - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\varepsilon_k^j)| \le \frac{1}{|a_{ii}|}(\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}\| \varepsilon_k^j| + \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}\| \varepsilon_k^j| \le \tag{6''}$$

$$\le \frac{1}{|a_{ii}|}(\sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}| \max_{1\le k\le n} |\varepsilon_k^j| + \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}| \max_{1\le k\le n} |\varepsilon_k^j| \le$$

$$\le \frac{1}{|a_{ii}|}\{\sum_{k=1}^{i-1}|a_{ik}|+\sum_{k=i+1}^{n}|a_{ik}|\}\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k^j|<\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k^j|, i=1,...,n,$$

так как по условию (*) теоремы имеет место неравенство

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{k=1}^{i-1}|a_{ik}|+\sum_{k=i+1}^{n}|a_{ik}|<1,\ \ i=1,...,n$$

Неравенства (6’’), очевидно, имеют место и для $\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{j+1}|$:

$$\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{j+1}|<\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k^j|$$

Поменяв индекс “k” на индекс “i” , получаем монотонно убывающую последовательность положительных чисел, пределом которых, как известно, является 0:

$$\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{j+1}|<\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{j}|<\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{j-1}|<...<\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{2}|<\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{1}|<\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{0}|,$$

в силу чего $\lim_{j\to\infty}\max_{1\le i\le n}|\varepsilon_i^{j+1}|=0$, следовательно, метод *Якоби* сходится при указанном свойстве (*) элементов матрицы, ч.т.д.

Метод *Якоби* не сходится, если нет свойства (*).

Для произвольной, но разрешимой системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=b_i, i=1,...,n,$$

не обладающих диагональным преобладанием, метод *Якоби* применяется для симметризованной системы, полученной умножением на транспонированную матрицу $A^*=[a_{ik}^*=a_{ki}]$:

$$A^*Ax=A^*b,$$

где матрица $C=A^*A$ является уже симметрической положительно определенной матрицей. Для системы уравнений

$$Cx=d,\ d=A^*b,$$

$$C=[c_{ms}], d=[d_m], c_{ms}=\sum_{k=1}^{n}a_{mk}^*a_{ks}=\sum_{k=1}^{n}a_{km}a_{ks}, d_m=\sum_{k=1}^{n}a_{mk}^*b_k=\sum_{k=1}^{n}a_{km}b_k,$$

метод *Якоби* является сходящимся

$$x_i^{j+1}=\frac{1}{c_{ii}}(d_i-\sum_{k=1}^{i-1}c_{ik}x_k^j-\sum_{k=i+1}^{n}c_{ik}x_k^j), i=1,...,n,\ j=0,1,...,j^*,$$

эквивалентная запись которой

$$x_i^{j+1}=x_i^j+\frac{1}{c_{ii}}(d_i-\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k^j), i=1,...,n,\ j=0,1,2,...,j^*$$

через невязку $R^j=(d-Cx^j)$ имеет вид

$$R_i^j=(d_i-\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k^j), x_i^{j+1}=x_i^j+\frac{1}{c_{ii}}R_i^j, i=1,...,n,\ j=0,1,2,...,j^*$$

1.4. Метод *Некрасова-Зейделя*

Метод *Некрасова-Зейделя* реализуется по алгоритму

$$x_i^{j+1}=\frac{1}{a_{ii}}(b_k-\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}x_k^{j+1}-\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}x_k^j), i=1,...,n,\ \ j=0,1,2,...,j^*, \qquad (7)$$

тем самым используются насчитанные значения $x_k^{j+1}, k < i$. Итерации прекращаются при выполнении критерия (6).

В **1.3** метод простой итерации представлен в виде

$$x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^j), i = 1,...,n \quad (8)$$

В аналогичной форме записывается метод *Некрасова-Зейделя*

$$x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{j+1} - \sum_{k=i}^{n} a_{ik} x_k^j), i = 1,...,n \ , \quad (9)$$

В связи с записью (9) за критерий сходимости итераций выбирают

$$\lim_{j\to\infty}(x_i^{j+1} - x_i^j) = 0, i = 1,...,n \ ,$$

т.е. прекращение итерационного процесса на приближении с номером j^* производится при выполнении неравенства

$$\max_{1\le i\le n} | x_i^{j^*+1} - x_i^{j^*} | \le \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\varepsilon} \approx 0, \hat{\varepsilon} \ne 0 \quad (10)$$

Данный критерий является *опасным фальшивым* критерием. В самом деле, перепишем (8) с использованием невязки

$$x_i^{j+1} - x_i^j = \frac{1}{a_{ii}}(b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^j) = \frac{1}{a_{ii}} R_i^j, i = 1,...,n$$

По основному критерию (6) должно выполняться неравенство

$$\max_{1\le i\le n} | R_i^{j^*} | = \max_{1\le i\le n} | a_{ii}(x_i^{j^*+1} - x_i^{j^*}) | \le \varepsilon, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \ne 0 \quad (11)$$

Поэтому между (10) и (11) возникает такая связь

$$\hat{\varepsilon} \max_{1\le i\le n} | a_{ii} | \le \varepsilon \quad (12)$$

Если $\max_{1\le i\le n} | a_{ii} |$ будет очень большим числом, то $\hat{\varepsilon}$ несомненно должен быть соответственно малой величиной. В методе *Некрасова-Зейделя* также имеет место данное обстоятельство.

Теорема 2. *Для сходимости метода Некрасова-Зейделя достаточно, чтобы коэффициенты матрицы в (3) обладали свойством диагонального преобладания* (*).

Доказательство совершенно аналогично предыдущей теореме.

Для произвольной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, i = 1,...,n \ ,$$

не обладающих свойствами диагонального преобладания, метод *Некрасова-Зейделя* применяется для симметризованной системы, полученной умножением на транспонированную матрицу $A^* = [a_{ik}^* = a_{ki}]$:

$$A^* A x = A^* b \ ,$$

где матрица $C = A^* A$ является уже симметрической положительно определенной матрицей. Система уравнений

$$Cx = d, \quad d = A^* b \ ,$$

$$C=[c_{ms}], d=[d_m], c_{ms}=\sum_{k=1}^{n} a_{mk}^{*} a_{ks}=\sum_{k=1}^{n} a_{km} a_{ks}, d_m=\sum_{k=1}^{n} a_{mk}^{*} b_k=\sum_{k=1}^{n} a_{km} b_k,$$

решается методом *Некрасова-Зейделя*

$$x_i^{j+1}=\frac{1}{c_{ii}}(d_i-\sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} x_k^{j+1}-\sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k^{j}), i=1,...,n,\ j=0,1,...,j^{*}$$

1.5. Метод минимальных невязок *Красносельского-Крейна*

Метод, основанный на минимизации норм невязок, предложен в [14]. Система (1) представляется в матрично-векторном виде

$$Ax=b,$$

где $A=[a_{ik}]$-матрица и соответствующие вектора

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x^j=\begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ . \\ . \\ . \\ x_n^j \end{pmatrix}, \quad R^j=\begin{pmatrix} R_1^j \\ R_2^j \\ . \\ . \\ . \\ R_n^j \end{pmatrix}$$

Итерационный алгоритм

$$x^{j+1}=x^j+\theta(b-Ax^j)$$

через вектор невязки $R^j=(b-Ax^j)$ записывается в виде

$$x^{j+1}=x^j+\theta R^j, \qquad (13)$$

где θ=const - итерационный параметр, выбираемый из условия минимизации невязки. С этой целью обе части (13) слева умножаются на матрицу A после чего вычитается вектор b:

$$b-Ax^{j+1}=b-Ax^j-\theta AR^j, \qquad (14)$$

что эквивалентно следующему выражению

$$R^{j+1}=R^j-\theta AR^j \qquad (15)$$

Скалярное умножение (15) на вектор R^{j+1} дает:

$$(R^{j+1},R^{j+1})=(R^j-\theta AR^j,R^j-\theta AR^j), \qquad (16)$$

$$(R^{j+1},R^{j+1})=(R^j,R^j)-2\theta(AR^j,R^j)+\theta^2(AR^j,AR^j)$$

Запись (16) с помощью модуля вектора

$$\| R^{j+1} \|^2=\| R^j \|^2-2\theta(AR^j,R^j)+\theta^2 \| AR^j \|^2, \qquad (17)$$

где стоят нормы и скалярные произведения

$$\| R^{j+1} \|^2=\sum_{i=1}^{n}(R_i^{j+1})^2, (AR^j,R^j)=\sum_{i=1}^{n}(AR^j)_i R_i^j, \| AR^j \|^2=\sum_{i=1}^{n}(AR^j)_i^2$$

Точка минимума квадрата нормы невязки вычисляется из равенства нулю первой производной:

$$\frac{d\| R^{j+1} \|^2}{d\theta}=-2(AR^j,R^j)+2\theta\| AR^j \|^2=0,$$

откуда находится искомый параметр $\theta=\frac{(AR^j,R^j)}{\| AR^j \|^2}$, который используется в (13) для вычисления следующего приближения и

обеспечивает минимум функционала $\| R^{j+1} \|^2$, т.к. вторая производная положительна $\frac{d^2 \| R^{j+1} \|^2}{d\theta^2} = 2 \| AR^j \|^2 > 0$, если $AR^j \neq 0$.

Итерации прекращаются при выполнении критерия (6).

Подстановка значения θ в (17) образует выражение

$$\| R^{j+1} \|^2 = \| R^j \|^2 - 2\theta (AR^j, R^j) + \theta^2 \| AR^j \|^2 = = \| R^j \|^2 - 2\frac{(AR^j, R^j)}{\| AR^j \|^2}(AR^j, R^j) +$$

$$+ [\frac{(AR^j, R^j)}{\| AR^j \|^2}]^2 \| AR^j \|^2 = = \| R^j \|^2 - \frac{(AR^j, R^j)^2}{\| AR^j \|^2},$$

из которого следует убывание невязки, т.е. сходимость итераций $\| R^{j+1} \|^2 < \| R^j \|^2$, если $(AR^j, R^j)^2 \neq 0$, и несходимость алгоритма $\| R^{j+1} \|^2 = \| R^j \|^2$, если $(AR^j, R^j)^2 = 0$.

На первый взгляд может показаться, что метод *Красносельского-Крейна* обладает универсальностью, т.е. пригоден для решения *произвольных* систем линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей *A,* т.к. для сходимости итераций $\| R^{j+1} \|^2 < \| R^j \|^2$ требуется лишь выполнение $(AR^j, R^j)^2 \neq 0$.

Теорема 3. *Для сходимости метода Красносельского-Крейна достаточно, чтобы коэффициенты матрицы в (3) обладали свойством нестрогого диагонального преобладания*

$$\sum_{k=1}^{i-1} | a_{ik} | + \sum_{k=i+1}^{n} | a_{ik} | \leq | a_{ii} |, i = 1, ..., n$$

Теорема 4. *Для сходимости метода Красносельского-Крейна достаточно, чтобы матрица в (3) была симметрической* $a_{ik} = a_{ki}, i = 1, ..., n, k = 1, ..., n.$

Теорема 5. *Метод минимальных невязок не сходится для несимметрической матрицы* $A = [a_{ik}]$, *не обладающей свойством диагонального преобладания.*

Очевидно, в силу теоремы 4 решение разрешимой системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, i = 1, ..., n,$$

не обладающих свойствами диагонального преобладания или симметричности, можно найти методом *Красносельского-Крейна*, предварительно симметризовав ее путем умножения на транспонированную матрицу $A^* = [a_{ik}^* = a_{ki}]$:

$$A^* A x = A^* b,$$

где матрица $C = A^* A$ является уже симметрической положительно определенной матрицей. Методом минимальных невязок решается уравнение

$$Cx = d, \quad d = A^* b, \quad C = [c_{ms}], d = [d_m],$$

$$c_{ms} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^* a_{ks} = \sum_{k=1}^{n} a_{km} a_{ks}, d_m = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^* b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{km} b_k,$$

$$R^j = (d - Cx^j),\ \theta = \frac{(CR^j, R^j)}{\| CR^j \|^2},\ x^{j+1} = x^j + \theta R^j,\ j = 0,1..., j^*$$

1.6. Вычисление корней уравнения. Метод простой итерации. Метод половинного деления. Метод *Ньютона*. Метод хорд

Численному нахождению корней уравнения

$$f(z) = 0 \qquad (1)$$

должно быть предпослано исследование существования и положения искомых корней в конкретном интервале. Здесь широко используются теоретические предпосылки высшей алгебры. Пусть по теории или из иных соображений корень уравнения (1) находится в интервале $z \in [b,c]$. Очевидно, должно выполняться неравенство $f(b)f(c) < 0$, иначе в этом интервале нет корней. За исключением простейших уравнений корень находится численными итерационными методами.

Метод простой итерации

Первоначально уравнение (1) приво дится к виду

$$z = \varphi(z) \qquad (2)$$

Выбирая некоторое *начальное приближение* $j = 0, z^0 = b$, вычисляют *последовательные приближения* по алгоритму

$$z^{j+1} = \varphi(z^j),\ j = 0,1,2,..., j^* \qquad (3)$$

Вычисления (3) прекращаются при выполнении вполне понятного критерия

$$z^{j^*} - \varphi(z^{j^*}) \approx 0, \qquad (4)$$

или используется следующий критерий

$$\frac{| z^{j^*} - z^{j^*-1} |}{| z^{j^*} |} \le \varepsilon, \varepsilon \approx 0 \qquad (5)$$

Последняя итерация z^{j^*} берется в качестве корня уравнения.

Метод половинного деления

Интервал $[b,c]$ делится на два отрезка $[b,(c+b)/2],[(c+b)/2,c]$. Проверяются условия существования корня (1): $f(b)f((c+b)/2) < 0$, $f(c)f((c+b)/2) < 0$. При выполнении $f(b)f((c+b)/2) < 0$ делится пополам соответствующий отрезок $[b,(c+b)/2]$ и проверяется условие $f((b+(c+b)/2)/2)f((c+b)/2) < 0$, если в другом интервале, то проверяется условие $f((c+(c+b)/2)/2)f((c+b)/2) < 0$ и т.д. Данный алгоритм продолжается до выполнения соотношения $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$.

Метод *Ньютона* (метод касательных)

В этом методе используется производная и алгоритм вычислений

$$z^{j+1} = z^j - \frac{f(z^j)}{f'(z^j)},\ j = 0,1,2,\ldots,\ j^*$$

Итерации продолжаются до выполнения условия $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$.

Метод хорд

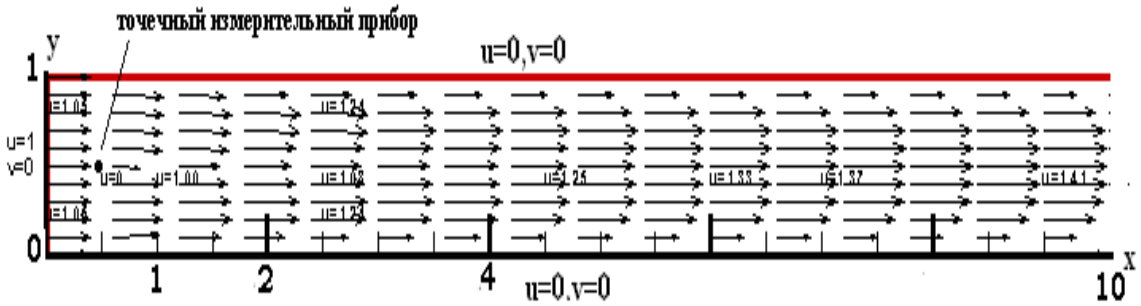
В этом методе требуются начальные приближения $j = 0, z^0 = b$, $j = 1, z^1 = c$. Следующие итерации вычисляются по алгоритму

$$z^{j+1} = z^j - \frac{z^j - z^{j-1}}{f(z^j) - f(z^{j-1})} f(z^j),\ j = 1,2,\ldots,\ j^*$$

Итерации прекращаются при выполнении условия $f(z^{j^*}) = \varepsilon \approx 0$ или же применяется *критерий (5).*

Вопросы

1. Применить метод исключения *Гаусса* для системы *n=3.*
2. Чем отличается метод *Якоби* от метода *Зейделя*?
3. Найти корень уравнения $15{,}132x^5 - 0{,}67x^4 + 9{,}34x^3 - x + 1 = 0$ в интервале $[-1,0]$. Положить $\varepsilon = 10^{-5}$. Сравнить между собой число итераций j^* в методе простой итерации, в методе половинного деления, в методе *Ньютона* и в методе хорд.
4. Написать в индексном виде выражение $\theta = (AR^j, R^j) / \| AR^j \|^2$.
5. Для каких систем сходится метод минимальных невязок?



Влияние одного точечного измерительного прибора на течение вязкой жидкости в канале

Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

2.1. Сетки и сеточные функции

В методе сеток для аппроксимации дифференциального уравнения соответствующей разностной схемой области непрерывного изменения аргументов заменяются сеточными областями, в которой аргументы изменяются дискретно. Пусть пространственные независимые переменные $\bar{x} = (x_1,...,x_m,...x_M)$, где $M \geq 1$- размерность пространства, изменяются в заданной области $\overline{\Omega} = \left\{0 \leq x_m \leq a_m, m = \overline{1,M}\right\}$; время $t \in [0,\bar{t}]$.

Прямоугольные сетки вводятся следующим образом:

$$\overline{\Omega}_h = \left\{x_{mi_m}, i_m = 0,1,2,..., N_m; x_{m_0} = 0, x_{mN_m} = a_m; m = \overline{1,M}\right\}, \overline{\Omega}_\tau = \left\{t_n, n = 0,1,..., N_\tau; \quad t_0 = 0, t_{N_\tau} = \bar{t}\right\}.$$

Соответственно образуются сеточные подобласти:

$$\Omega_h = \left\{x_{mi_m}, i_m = \overline{1, N_{m-1}}, m = \overline{1,M}\right\}, \Omega_{\tau_0} = \left\{t_n, n = 0,..., N_\tau - 1\right\}, \quad \Omega_{\tau_1} = \left\{t_n, n = \overline{1, N_\tau}\right\}.$$

Обозначаются S_h - множество граничных узлов сетки Ω_h, которым соответствуют индексы $i_m = 0, i_m = N_m, 0 \leq i_k \leq N_k, k = \overline{1,n}, k \neq m, m = \overline{1,M}$.

S_{mh} - узлы S_h, которым соответствуют индексы

$$i_m = 0,\ 1 \leq i_k \leq N_k - 1, k = \overline{1,M},\ k \neq m, m = \overline{1,M};$$

$\overline{S}_{mh}$ - узлы S_h, имеющие индексы

$$i_m = N_m, 1 \leq i_k \leq N_k - 1, k = \overline{1,M},\ k \neq m, m = \overline{1,M};$$

$$\Omega'_{hm} = \Omega_h US_{mh}, \Omega''_{hm} = \Omega_h U\overline{S}_{mh},\ m = \overline{1,M}$$

Отрезки $h_{mi_m} = x_{mi_m} - x_{mi_m - 1} > 0, i_m = \overline{1, N_m}$, $\hbar_{mi_m} = 0{,}5(h_{mi_m} + h_{mi_m+1})$ есть шаги сетки $\overline{\Omega}_h$ - по оси x_m, для равномерных шагов $h_{mi_m} = a_m / N_m = h_m, i_m = \overline{1, N_m}$;

$\tau_n = t_n - t_{n-1} > 0, n = \overline{1, N_\tau}$, - шаги сетки $\overline{\Omega}_\tau$ на отрезке времени $[0,t]$. Сетка $\overline{\Omega}_h$ называется равномерной, если она равномерно по всем осям $x_m, m = \overline{1,M}$. Функция $f = \left\{f(x_{1i_1},..., x_{Mi_M}, t_n), (x_{1i_1},..., x_{Mi_M}) \in \overline{\Omega}_h,\right\}$ $t_n \in \overline{\Omega}_\tau$ является сеточной функцией заданной на сетке $\overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$, если она определена в каждом узле $(x_{1i_1},..., x_{Mi_M}, t_n) \equiv (x,t) \in \overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$. Для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau$, применяются обозначения: индексные $f(x_{1i_1},..., x_{Mi_M}, t_n) \equiv f^n_{i_1...i_M}$, чаще безындексные

$$f(x_{1i_1},..., x_{Mi_M}, t_n) \equiv f(x,t) \equiv f^n(x), x = (x_{1i_1},..., x_{Mi_M}) \in \overline{\Omega}_h,\ t = t_n$$

Для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\Omega}_h$, $f = \left\{f(x), x \in \overline{\Omega}_h\right\}$ применяются обозначения $f(x_{1i_1},..., x_{Mi_M}) \equiv f_{i_1...i_M} \equiv f(x), x = (x_{1i_1},..., x_{Mi_M}) \in \overline{\Omega}_h$.

Сетки и сеточные функции в областях, составленных из M– мерных параллелепипедов (прямоугольников при $M = 2$) типа $\overline{\Omega}$ и имеющие общие грани (стороны при M=2), вводятся аналогичным образом.

2.2. Элементарные разностные операторы

Разностные соотношения, получающиеся при аппроксимации дифференциальных уравнений, удобно представлять в виде действия линейных разностных операторов на сеточную функцию, подобно тому, как квадратные матрицы действуют на многомерный вектор. Любой разностный оператор может быть сконструирован из элементарных разностных операторов, которыми являются: *тождественный или единичный* оператор E, операторы *сдвига*: T_m - в *положительном* и T_{-m} - в *отрицательном* направлениях оси x_m, $m=\overline{1,M}$. Тождественный оператор E действует на сеточную функцию так, что $(Ef^n)_{i_1..i_M} = f^n_{i_1..i_M}$ или $(Ef)_{i_1..i_M} = f_{i_1..i_M}$, поэтому $(Ef^n)_{i_1..i_M} \equiv Ef^n \equiv f^n$, $(Ef)_{i_1..i_M} \equiv Ef \equiv f$.

При M=1 единичный оператор E является квадратной матрицей порядка $(N_x-1)(N_x-1)$, элементы главной диагонали которой равны 1, и имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.....0 \\ 0 & 1 & 0.....0 \\ ..... & & \\ 0 & 0 & 0.....1 \end{pmatrix},$$

Операторы сдвига вперед T_{+m}, $m=\overline{1,M}$ определяются так:

$$(T_{+m}f^n)_{i_1..i_m..i_M} \equiv f^n_{i_1..i_m+1..i_M} = f(x_{1i_1},...,x_{mi_m}+h_{mi_m},...,x_{Mi_M},t_n)$$

Оператор T_{+1} при $M=1$ является квадратной матрицей порядка $(N_x-1)(N_x-1)$, над главной диагональю которой стоят 1:

$$T_{+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.....0 \\ 0 & 0 & 1.....0 \\ ..... & & \\ 0 & 0 & 0.....1 \\ 0 & 0 & 0.....0 \end{pmatrix}$$

Операторы сдвига назад $T_{-m}, m=\overline{1,M}$ определяются аналогично:

$$(T_{-m}f^n)_{i_1..i_m..i_M} \equiv f^n_{i_1..i_m-1..i_M} = f(x_{1i_1},...,x_{m_{i_m}}-h_{mi_m},...,x_{Mi_M},t_n)$$

Оператор T_{-1} при $M=1$ также является квадратной матрицей порядка $(N_x-1)(N_x-1)$, где 1 стоят под главной диагональю,

$$T_{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0.....0 & 0 \\ 1 & 0.....0 & 0 \\ ..... & & \\ 0 & 0.....1 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходя из этих определений записывают, опуская индексы:

$$(T_{+m}f)_{i_1\ldots i_m\ldots i_M}\equiv T_{+m}f,\quad (T_{-m}f)_{i_1\ldots i_m\ldots i_M}\equiv T_{-m}f,\ m=\overline{1,M}.$$

В разностных схемах наиболее часто применяются одномерные операторы, т.е. операторы, действующие только в одном из направлений x_m:

операторы образования разности вперед $\Delta_{+m}=T_{+m}-E,\ m=\overline{1,M}.$

Оператор разности вперед $\Delta_{+1}=T_{+1}-E$ при *M=1* является квадратной матрицей порядка $(N_x-1)(N_x-1)$ и имеет вид:

$$\Delta_{+1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0.....0 \\ 0 & -1 & 1.....0 \\ ..... & & \\ 0 & 0 & 0.....1 \\ 0 & 0 & 0...-1 \end{pmatrix}$$

Операторы образования разности назад $\Delta_{-m}=E-T_{-m},\quad m=\overline{1,M};$ оператор $\Delta_{-1}=E-T_{-1}$ при *M=1* является квадратной матрицей порядка $(N_x-1)(N_x-1)$ и имеет вид:

$$\Delta_{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0.....0 & 0 \\ -1 & 1.....0 & 0 \\ ..... & & \\ 0 & 0.....-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично вводятся о*ператоры центральной разности:*

$$\delta_m=(T_m-T_{-m}),\ m=\overline{1,M};$$

и *операторы симметричной разности*:

$$\Lambda_m=\Delta_m\Delta_{-m}=T_m-2E+T_{-m},\ m=\overline{1,M}\ .$$

Действия этих операторов в точке $x=(x_{1i_1},...,x_{mi_m},...,x_{Mi_M})$ на любую сеточную функцию $f=\{f(x),x\in\overline{\Omega}_h\}$ образуют разности значений

сеточной функции в соседних узлах, расположенных на оси x_m. В одномерном случае $M=1$ будет $m=1$, следовательно,

$$(\Delta_1 f)_{i_1} = f_{i_1+1} - f_{i_1}, (\Delta_{-1} f)_{i_1} = f_{i_1} - f_{i_1-1}, (\delta_1 f)_{i_1} = f_{i_1+1} - f_{i_1-1}$$

В двумерной задаче $M=2$ значения $m=1,2$, тогда

$$(\Delta_2 f)_{i_1 i_2} = f_{i_1 i_2+1} - f_{i_1 i_2}, (\Delta_{-2} f)_{i_1 i_2} = f_{i_1 i_2} - f_{i_1 i_2-1}$$

В трехмерном M=3 будет $m=1,2,3$ и

$$(\Delta_3 f)_{i_1 i_2 i_3} = f_{i_1 i_2 i_3+1} - f_{i_1 i_2 i_3}, (\Delta_{-3} f)_{i_1 i_2 i_3} = f_{i_1 i_2 i_3} - f_{i_1 i_2 i_3-1}$$

В дальнейшем используются операторы и их обозначения из этого параграфа; нижние индексы опускаются

$$(\Delta_m f)_{i_1..i_m..i_M} \equiv \Delta_m f, (\Delta_{-m} f)_{i_1..i_m..i_M} \equiv \Delta_{-m} f, m = \overline{1, M}.$$

2.3. Методы построения схем. Интегро-интерполяционный метод баланса в ячейке. Апроксимация *Аллена-Саусвелла*

1^0. Метод разложений в ряды *Тейлора*.

Универсальным методом построения разностных схем является разложение значений сеточной функции в ряд *Тейлора* в окрестности центрального узла $x=(x_{1i_1},...,x_{mi_m},...,x_{Mi_M}), t=t_n$. Приведем ряд примеров. Для производной $\frac{\partial \Re}{\partial t}$ применяются следующее разложение в ряд *Тейлора:*

$$\Re^{n-1} = \Re^n - \tau_n \left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n + O\left(\tau_n^2\right),$$

откуда получается схема $\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n \approx \frac{\Re^n - \Re^{n-1}}{\tau_n}$, имеющая погрешность $O(\tau_n)$.

Из аналогичного ряда *Тейлора* $\Re^{n+1} = \Re^n + \tau_{n+1}\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n + O\left(\tau_{n+1}^2\right)$, следует схема $\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n \approx \frac{\Re^{n+1} - \Re^n}{\tau_{n+1}}$, аппроксимирующая с погрешностью $O(\tau_{n+1})$.

Из разложений в ряды *Тейлора* с удержанием 2-ых производных

$$\Re^{n-1} = \Re^n - \tau_n \left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau_n^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Re}{\partial t^2}\right)^n + O\left(\tau_n^3\right),$$

$$\Re^{n+1} = \Re^n + \tau_{n+1}\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau_{n+1}^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Re}{\partial t^2}\right)^n + O\left(\tau_{n+1}^3\right),$$

$$\Re^{n+1} = \Re^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau_{n+1}}{2}\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau_{n+1}^2}{8}\left(\frac{\partial^2 \Re}{\partial t^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} + O\left(\tau_{n+1}^3\right),$$

$$\Re^{n} = \Re^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau_{n+1}}{2}\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau_{n+1}^2}{8}\left(\frac{\partial^2 \Re}{\partial t^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} + O\left(\tau_{n+1}^3\right),$$

вытекают разностные соотношения

$$\left(\frac{\partial \Re}{\partial t}\right)^n = \frac{\Re^{n+1} - \Re^{n-1}}{\tau_n + \tau_{n+1}} + O(\tau_{n+1} - \tau_n) + O(\tau_n^2) + O(\tau_{n+1}^2),$$

$$\frac{\Re^{n+1} - \Re^n}{\tau_{n+1}} = (\frac{\partial \Re}{\partial t})^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau_{n+1}^2), \frac{\Re^{n+1} + \Re^n}{2} = \Re^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau_{n+1}^2)$$

Вводятся обозначения разностных производных по времени

$$\frac{\Re^n - \Re^{n-1}}{\tau_n} \equiv \Re_{\bar{t}}^n \ , \ \frac{\Re^{n+1} - \Re^n}{\tau_{n+1}} \equiv \Re_t^n \equiv \Re_{\bar{t}}^{n+1}.$$

Из разложений в ряды *Тейлора* по пространственным переменным

$$T_{+m}\Re = \Re + h_{mi_m+1}\frac{\partial \Re}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m+1}^2}{2!}\frac{\partial^2 \Re}{\partial x_m{}^2} + \frac{h_{mi_m+1}^3}{3!}\frac{\partial^3 \Re}{\partial x_m{}^3} + O(h_{mi_m+1}^4),$$

$$T_{-m}\Re = \Re - h_{mi_m}\frac{\partial \Re}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m}^2}{2!}\frac{\partial^2 \Re}{\partial x_m{}^2} - \frac{h_{mi_m}^3}{3!}\frac{\partial^3 \Re}{\partial x_m{}^3} + O(h_{mi_m}^4),$$

исключением первой производной получается аппроксимация

$$\left(\frac{\partial^S \Re}{\partial x_m{}^S}\right)_{i_m} \approx \frac{2}{h_{mi_m+1} + h_{mi_m}}\left(\frac{\Re_{i_m+1}^n - \Re_{i_m}^n}{h_{mi_m+1}} - \frac{\Re_{i_m}^n - \Re_{i_m-1}^n}{h_{mi_m}}\right)$$

с погрешностью $O\left(h_{mi_m+1} - h_{mi_m}\right) + O(\hbar_m^2)$, которая на равномерной сетке $h_{mi_m} = h_{mi_m+1} = h_m$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 \Re}{\partial x_m^2}\right)^n = \frac{\Re_{i_m-1}^n - 2\Re_{i_m}^n + \Re_{i_m+1}^n}{h_m^2} + O(h_m^2).$$

Из более коротких разложений в ряды *Тейлора*

$$T_{+m}\Re = \Re + h_{mi_m+1}\frac{\partial \Re}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m+1}^2}{2!}\frac{\partial^2 \Re}{\partial x_m{}^2} + O(h_{mi_m+1}^3),$$

$$T_{-m}\Re = \Re - h_{mi_m}\frac{\partial \Re}{\partial x_m} + \frac{h_{mi_m}^2}{2!}\frac{\partial^2 \Re}{\partial x_m{}^2} + O(h_{mi_m}^3),$$

получается аппроксимация первой производной центральной разностью

$$\left(\frac{\partial \Re}{\partial x_m}\right)_{i_m} \approx \frac{\Re_{i_m+1}^n - \Re_{i_m-1}^n}{h_{mi_m+1} + h_{mi_m}}$$

с погрешностью $O(h_{mi_m+1} - h_{mi_m}) + O(\hbar_m^2)$.

Из простых разложений

$$T_{+m}\Re = \Re + h_{mi_m+1}\frac{\partial \Re}{\partial x_m} + O(h_{mi_m+1}^2),$$

$$T_{-m}\Re = \Re - h_{mi_m}\frac{\partial \Re}{\partial x_m} + O(h_{mi_m}^2),$$

следуют односторонние аппроксимации

$$\left(\frac{\partial \Re}{\partial x_m}\right)_{i_m} = \frac{\Re_{i_m+1}^n - \Re_{i_m}^n}{h_{mi_m+1}} + O(h_{mi_m+1}), \left(\frac{\partial \Re}{\partial x_m}\right)_{i_m} = \frac{\Re_{i_m}^n - \Re_{i_m-1}^n}{h_{mi_m}} + O(h_{mi_m}) \quad \text{и т.д.}$$

2^0. Интегро-интерполяционный метод баланса в ячейке. Аппроксимация *Аллена-Саусвелла.*

Идея этого метода демонстрируется на уравнении *Бюргерса* с переменными коэффициентами

$$\nu(y)\frac{d}{dy}[k(y)\cdot\frac{d\Phi}{dy}]-V(y)\frac{d\Phi}{dy}=f(y), \qquad (1)$$

которое очевидным образом при $\nu(y)\equiv 1, V(y)\equiv 0, \forall y$ и $\nu(y)\equiv 1, k(y)\equiv 1,$ $V(y)\equiv 0, \forall y$ переходит соответственно в одномерные уравнения тепло-проводности:

$$\frac{d}{dy}[k(y)\cdot\frac{d\Phi}{dy}]=f(y), \quad \frac{d^2\Phi}{dy^2}=f(y)$$

Пусть на оси y введена неравномерная сетка y_i, $i=0, \pm1, \pm2, \ldots,$ $h_i=y_i-y_{i-1}>0$, $\hbar_i=0.5\cdot(h_i+h_{i+1})$; $\Phi(y_i)=\Phi_i$

Обозначаются, ради краткости

$$\mu=k\exp(-\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}dy), \; F=f\cdot\nu^{-1}\exp(-\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}dy)$$

Уравнение (42) записывается в эквивалентном виде

$$\nu\exp(\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}dy)\cdot\frac{d}{dx}[k\exp(-\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}dy)\frac{d\Phi}{dy}]=f \qquad (2)$$

где y^0 – произвольная фиксированная точка оси y. С учетом обозначений уравнение (2) запишется короче

$$\frac{d}{dy}(\mu\frac{d\Phi}{dy})=F \qquad (3)$$

Уравнение (3) интегрируется на отрезках $[y_{i-\frac{1}{2}}, y]$, $[y_i, y_{i+\frac{1}{2}}]$, $y_{i-\frac{1}{2}}=y_i-h_i/2$, $y_{i+\frac{1}{2}}=y_i+h_{i+1}/2$:

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}(\frac{d\Phi}{dy})_{i+\frac{1}{2}}-\mu_i(\frac{d\Phi}{dy})_i=\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}}Fdy \qquad (4)$$

$$\mu_i(\frac{d\Phi}{dy})_i-\mu_{i-\frac{1}{2}}(\frac{d\Phi}{dy})_{i-\frac{1}{2}}=\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i}Fdy \qquad (5)$$

Сумма (4) с (5) дает

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}(\frac{d\Phi}{dy})_{i+\frac{1}{2}}-\mu_{i-\frac{1}{2}}(\frac{d\Phi}{dy})_{i-\frac{1}{2}}=\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}}Fdy \qquad (6)$$

Для функции $\Phi\in C^4(-\infty, \infty)$ имеют место формулы, вытекающие из разложений в ряды *Тейлора:*

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_{i+\frac{1}{2}}=\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}^2}{24}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_1)}{dy^3}, \; \xi_1\in[y_i, y_{i+\frac{1}{2}}], \qquad (7)$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i^2}{24}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_2)}{dy}, \ \xi_2 \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_i] \tag{8}$$

По теореме о среднем интеграла получается

$$\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} F dy = \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{f}{\nu}\exp(-\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}\cdot dy)dy = -\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{fk}{V} d\exp(-\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}\cdot dy) = \tag{9}$$

$$= -\frac{f(\eta)k(\eta)}{V(\eta)}\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} d\exp(-\int_{y^0}^{y}\frac{V}{k\nu}\cdot dy) = -\frac{f(\eta)k(\eta)}{V(\eta)} * [\exp(-\int_{y^0}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy) - \exp(-\int_{y^0}^{y_{i-\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy)],$$

где $\eta \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}]$. Теорема *Лагранжа* осуществляет связь

$$\frac{f(\eta)k(\eta)}{V(\eta)} = \frac{f_i k_i}{V_i} + (\eta - y_i)\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{f(\xi')k(\xi')}{V(\xi')}\right), \tag{10}$$

где $\xi' \in [y_i, \eta]$, если $\eta \geq y_i$, если $\eta < y_{i,\ mo}$ $\xi' \in [\eta, y_i]$, т.е.

$$|\eta - y_i| \leq \max\left\{\frac{h_i}{2}, \frac{h_{i+1}}{2}\right\} \leq c\hbar_i$$

на равномерной сетке $h_{i+1}=h_i=h$ имеет место $|\eta - y_i| \leq \frac{h}{2}$.

На основании (6), (7), (8), (9), (10) найдем

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i-1}} - \mu_{i-\frac{1}{2}}\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i} - \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}h_{i+1}^2}{24}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_i)}{dy^3} + \mu_{i-\frac{1}{2}}\frac{h_i^2}{24}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_2)}{dy^3} =$$

$$= \left[\frac{f_i k_i}{V_i} + (\eta - y_i)\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{f(\xi')k(\xi')}{V(\xi')}\right)\right]\cdot\left[\exp(-\int_{y^0}^{y_{i-\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy) - \exp(-\int_{y^0}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy)\right]$$

Обозначив

$$Q_1 = \exp(-\int_{y^0}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy), \ Q_2 = \exp(-\int_{y^0}^{y_{i-\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy),$$

преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{V_i}{k_i}\cdot\frac{Q_1 k_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}} - Q_2 k_{i-\frac{1}{2}}\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{Q_2 - Q_1} =$$

$$= f_i + \frac{V_i}{k_i}(\eta - y_i)\left[f(\xi')\frac{d}{dy}\left(\frac{k(\xi')}{V(\xi')}\right) + \frac{k(\xi')}{V(\xi')}\cdot\frac{df(\xi')}{dy}\right] + \tag{11}$$

$$+ \frac{\frac{V_i}{k_i}\left[\frac{h_{i+1}^2}{24}\cdot\mu_{i+\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_1)}{dy^3} - \frac{h_i^2\mu_{i-\frac{1}{2}}}{24}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_3)}{dy^3}\right]}{(Q_2 - Q_1)}$$

Отбросив в (11) погрешности

$$\frac{V_i}{k_i}(\eta - y_i)\left[f(\xi')\frac{d}{dy}\left(\frac{k(\xi')}{V(\xi')}\right) + \frac{k(\xi')}{V(\xi')}\cdot\frac{df(\xi')}{dy}\right] + \qquad (12)$$

$$+\frac{\frac{V_i}{k_i}[\frac{h_{i+1}^2}{24}\cdot\mu_{i+\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_1)}{dy^3} - \frac{h_i^2\mu_{i-\frac{1}{2}}}{24}\cdot\frac{d^3\Phi(\xi_3)}{dy^3}]}{(Q_2 - Q_1)},$$

получаем аппроксимацию левой части уравнения (1) в виде

$$\left[\nu(y)\frac{d}{dy}[k(y)\cdot\frac{d\Phi}{dy}] - V(y)\frac{d\Phi}{dy}\right]_i \approx\approx \frac{V_i}{k_i}\cdot\frac{Q_1 k_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}} - Q_2 k_{i-\frac{1}{2}}\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{Q_2 - Q_1} \qquad (13)$$

Анализ погрешности (12) показывает, что разностное соотношение аппроксимирует дифференциальный оператор в левой части (1) в классе достаточно гладких функций с локальной погрешностью $O((\eta - y_i) + \hbar_i^2)$ и **имеет «аппроксимационную вязкость»,** стоящей в квадратной скобке в правой части (12). Сокращая в (13) числитель и знаменатель на $\exp(-\int_{y^0}^{y_i}\frac{V}{k\nu}dy)$, получаем аппроксимацию *Аллена-Саусвелла*:

$$\frac{V_i}{k_i}\frac{k_{i+\frac{1}{2}}\exp(-\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy)\cdot\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}} - k_{i-\frac{1}{2}}\exp(-\int_{y_i}^{y_{i-\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy)\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{\exp(-\int_{y_i}^{y_{i-\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy) - \exp(-\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy)} = f_i, \text{i} = 1, 2, \ldots, \text{N} - 1$$

Если не удается точно вычислить интеграл, стоящий в показателе степени экспоненты, применяются приближенные формулы левого или правого прямоугольников:

$$\exp(-\int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy) = \exp(-\frac{h_{i+1}V_i}{2k_i\nu_i})\cdot\exp[O(h_{i+1}^2)],$$

$$\exp(-\int_{y_i}^{y_{i-\frac{1}{2}}}\frac{V}{k\nu}dy) = \exp(\frac{h_iV_i}{2k_i\nu_i})\cdot\exp[O(h_i^2)],,$$

где

$$O(h_{i+1}^2) = -\frac{h_{i+1}^2}{8}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{V(\xi_1)}{k(\xi_1)\nu(\xi_1)}\right),\ \xi_1\in[y_i, y_{i+\frac{1}{2}}], O(h_i^2) = \frac{h_i^2}{8}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{V(\xi_2)}{k(\xi_2)\nu(\xi_2)}\right), \xi_2\in[y_{i-\frac{1}{2}}, y_i]$$

После отбрасывания погрешностей схема принимает вид

$$\frac{V_i}{k_i}\frac{k_{i+\frac{1}{2}}\exp(-\frac{h_{i+1}V_i}{2k_i\nu_i})\cdot\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}} - k_{i-\frac{1}{2}}\exp(\frac{h_iV_i}{2k_i\nu_i})\cdot\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_i}}{\exp(\frac{h_iV_i}{2k_i\nu_i}) - \exp(-\frac{h_{i+1}V_i}{2k_i\nu_i})} = f_i \qquad (14)$$

На равномерной *сетке* $h_{i+1}=h_i=h$ *для* $k(y) = 1$, $\nu(y)=\nu=const$, $V(y)=V=const$ аппроксимация *Аллена-Сауссвелла* упрощается:

$$\frac{V}{h}\cdot\frac{e^{-\frac{Vh}{l\nu}}(U_{i+1}-U_i)-e^{\frac{Vh}{l\nu}}(U_i-U_{i-1})}{e^{\frac{Vh}{l\nu}}-e^{-\frac{Vh}{l\nu}}}=f_i, \qquad (15)$$

Для $\nu(y)\equiv 1, V(y)\equiv 0, \forall y$ из (14) после раскрытия неопределенности 0/0 по правилу *Лопиталя* вытекает аппроксимация

$$\frac{d}{dy}\left(k(y)\frac{d\Phi}{dy}\right)_i \approx \frac{k_{i+\frac{1}{2}}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}}-k_{i-\frac{1}{2}}\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{h_i}}{0.5(h_{i+1}+h_i)}, \qquad (16)$$

Заменяя в (16) $k_{i+\frac{1}{2}}=\frac{k_{i+1}+k_i}{2}+O(h_{i+1}^2), k_{i-\frac{1}{2}}=\frac{k_i+k_{i-1}}{2}+O(h_i^2)$, получаем аппроксимацию

$$\frac{d}{dy}\left(k(y)\cdot\frac{d\Phi}{dy}\right)_i \approx \frac{2}{(h_{i+1}+h_i)}\left(\frac{k_{i+1}+k_i}{2}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}}-\frac{k_i+k_{i-1}}{2}\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{h_i}\right),$$

которая справедлива и в случае разрывного коэффициента [6] , имеет погрешность $O(h_{i+1}-h_i)+O(\hbar_i^2)$. Для $k(y)\equiv 1, \forall y$ из (16) вытекает аппроксимация 2-ой производной на неравномерной сетке

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2}_i \approx \frac{2}{(h_{i+1}+h_i)}\left(\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{h_{i+1}}-\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{h_i}\right),$$

на равномерной сетке $\frac{d^2\Phi}{dy^2}_i \approx \frac{\Phi_{i+1}-2\Phi_i+\Phi_{i-1}}{h^2}$ и погрешность равна $O(h^2)$.

2.4. Разностные конвективные члены с «аппроксимационной вязкостью». Аппроксимация *Булеева-Петрищева*

В уравнения динамики жидкостей и газов входят члены конвективного переноса:

$$V_1\frac{\partial\Re}{\partial x_1}+\ldots+V_m\frac{\partial\Re}{\partial x_m}+\ldots+V_M\frac{\partial\Re}{\partial x_M}\equiv\sum_{k=1}^{M}V_k\frac{\partial\Re}{\partial x_k}$$

Аппроксимации входящих сюда производных $\frac{\partial\Re}{\partial x_m}, m=\overline{1,M},$ осуществляются различными способами. Отсюда вытекает многообразие разностных схем для уравнений *Эйлера, Навье* и аналогичных уравнений математической физики. Все аппроксимации выполняются в центральном узле $x=(x_{1i_1},\ldots,x_{mi_m},\ldots,x_{Mi_M})$.

1^0. Аппроксимация разностью вперед на двухточечном шаблоне $[x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$:

$$(V_m\frac{\partial\Re}{\partial x_m})^n_{i_m}=V_m^n\frac{\Delta_{+m}\Re^n}{h_{mi_m+1}}+O(h_{mi_m+1})=V_m^n\Re^n_{x_m}+O(h_{mi_m+1}),\ m=\overline{1,M}$$

Обозначается $\frac{\Delta_{+m}f^n}{h_{mi_m+1}}\equiv f^n_{x_m}$ - *разностная производная вперед*. Здесь

член $O(h_{mi_m+1}) = -\frac{1}{2} h_{mi_m+1} V_m^n \frac{\partial^2 \Re^n}{\partial x_m^2}$ образует *«аппроксимационную вязкость»* в схемах уравнений динамики вязких жидкостей.

2^0. Аппроксимация на двухточечном шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}]$ разностью назад:

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})_{i_m}^n = V_m^n \frac{\Delta_{-m} \Re^n}{h_{mi_m}} + O(h_{mi_m}) = V_m^n \Re_{\bar{x}_m}^n + O(h_{mi_m}), m = \overline{1, M}$$

Обозначается $\frac{\Delta_{-m} f^n}{h_{mi_m}} \equiv f_{\bar{x}_m}^n$ - *разностная производная назад*. Выражение $O(h_{mi_m}) = \frac{1}{2} h_{mi_m} V_m^n \frac{\partial^2 \Re^n}{\partial x_m^2}$ также образует *«аппроксимационную вязкость»*. Очевидно, применение таких схем аппроксимаций целесообразно в тех задачах, где истинная кинематическая вязкость жидкости есть б*о*льшая величина**:** $\nu > h_{mi_m} |V_m^j| / 2,$ или $\nu > h_{mi_m+1} |V_m^j| / 2$**,** т.е. **сеточное число** *Рейнольдса* **меньше двух:** $\mathrm{Re}_h = \frac{h}{\nu} |V_m^j| < 2$**.**

3^0. Построенная на основе **1^0** и **2^0** аппроксимация *Булеева-Петрищева* с направленными по знаку компоненты скорости разностями (другое название – *разности против потока*)

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})_{i_m}^n = \frac{|V_m^n| + V_m^n}{2} \Re_{\bar{x}_m}^n + \frac{V_m^n - |V_m^n|}{2} \Re_{x_m}^n + O(h_{mi_m}) + O(h_{mi_m+1}), m = \overline{1, M}$$

также имеет *«аппроксимационную вязкость».*

2.5. Разностные конвективные члены без «аппроксимационной вязкости». Аппроксимация *Джакупова*

1^0. Аппроксимация на трехточечном шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$:

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})_{i_m}^n = V_m^n \left[\frac{\delta_m \Re^n}{2\hbar_{mi_m}} - \frac{h_{mi_m+1} - h_{mi_m}}{2} \left(\frac{\Re_{x_m}^n - \Re_{\bar{x}_m}^n}{\hbar_{mi_m}} \right) \right] + O(\hbar_{mi_m}^2) \equiv$$

$$\equiv \Re_{\tilde{x}_m}^n + O(\hbar_{mi_m}^2), \hbar_{mi_m} = 0{,}5(h_{mi_m+1} + h_{mi_m}), m = \overline{1, M},$$

где $\frac{\delta_m f^n}{2\hbar_{mi_m}} - \frac{h_{mi_m+1} - h_{mi_m}}{2} \left(\frac{f_{x_m}^n - f_{\bar{x}_m}^n}{\hbar_{mi_m}} \right) \equiv f_{\tilde{x}_m}^n$ - *центральная разностная производная.* Она не содержит *«апроксимационной вязкости», но не рекомендуется для аппроксимаций конвективных членов,* т.к. при больших числах *Рейнольдса приводит к пилообразным решениям, дает неправильный результат.*

2^0. Разностная производная $\bar{f}_{\dot{x}_m}^n, m = \overline{1, M}$ вводится так: $\bar{f}_{\dot{x}_m}^n \equiv \frac{\Delta_{-m} \bar{f}^n}{\hbar_{mi_m}} \equiv \frac{\bar{f}^n - T_{-m} \bar{f}^n}{\hbar_{mi_m}}, m = \overline{1, M}.$ Предназначена для кратких записей

аппроксимации вторых производных. В частности, в аппроксимации предыдущего пункта, взяв $\bar{f}^n = f^n_{x_m}$, можно записать, что

$$\frac{f^n_{x_m} - f^n_{\bar{x}_m}}{\hbar_{mi_m}} = \frac{\Delta_{-m}(f^n_{x_m})}{\hbar_{mi_m}} = (f^n_{x_m})_{\dot{x}_m} = f^n_{x_m\dot{x}_m},\ T_{-m}(f^n_{x_m}) = f^n_{\bar{x}_m}$$

3^0. Аппроксимация на трехточечном шаблоне $[x_{mi_m}, x_{mi_m+1}, x_{mi_m+2}]$:

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = V^n_m\left[\Re^n_{x_m} - 0{,}5h_{mi_m+1}T_{+m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m})\right] + O(\hbar^2_m) =$$

$$= V^n_m \Re^n_{\overset{o}{x}_m} + O(\hbar^2_m),\ m = \overline{1, M},\ \hbar_m = \max_{i_m} h_{mi_m}, \qquad (1)$$

где $f^n_{x_m} - 0{,}5h_{mi_m+1}T_{+m}f^n_{x_m\dot{x}_m} \equiv f^n_{\overset{o}{x}_m}$ трехточечная разностная производная вперед. Данная аппроксимация **не содержит «аппроксимационной вязкости»,** имеет 2-й порядок точности и предназначена для использования при больших числах *Рейнольдса* только в тех узлах с индексами $1 \le i_m \le N_m - 2$, в которых $V^n_m \le 0$.

Здесь

$$T_{+m}\left(\Re^n_{x_m\dot{x}_m}\right) = \frac{2}{h_{mi_m+2} + h_{mi_m+1}}\left(\frac{\Re^n_{i_m+2} - \Re^n_{i_m+1}}{h_{mi_m+2}} - \frac{\Re^n_{i_m+1} - \Re^n_{i_m}}{h_{mi_m+1}}\right).$$

(Поскольку все индексы, кроме i_m, не меняются, они опущены).

4^0. Аппроксимация на трехточечном шаблоне $[x_{mi_m-2}, x_{mi_m-1}, x_{mi_m}]$:

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = V^n_m\left[\Re^n_{\bar{x}_m} + 0{,}5h_{mi_m}T_{-m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m})\right] + O(\hbar^2_m) = V^n_m \Re^n_{\overset{o}{\bar{x}}_m} + O(\hbar^2_m), \qquad (2)$$

где $f^n_{\bar{x}_m} + 0{,}5h_{mi_m}T_{-m}(f^n_{x_m\dot{x}_m}) \equiv f^n_{\bar{x}^0_m}$ - трехточечная разностная производная назад.

Не содержит «аппроксимационной вязкости»**,** имеет 2-ой порядок точности и предназначена для использования при больших числах *Рейнольдса* только в тех узлах с индексами $2 \le i_m \le N_m - 1$, в которых скорость неотрицательна $V^n_m \ge 0$. Здесь

$$T_{-m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m}) = \frac{2}{h_{mi_m} + h_{mi_m-1}}\left(\frac{\Re^n_{i_m} - \Re^n_{i_m-1}}{h_{mi_m}} - \frac{\Re^n_{i_m-1} - \Re^n_{i_m-2}}{h_{mi_m-1}}\right)$$

5^0. Аппроксимация на четырехточечном шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}, x_{mi_m+2}]$.

Если в приграничном узле $i_m = 1$ и скорость $V^n_m \le 0$, применяется аппроксимация **3^0**. Если же в этом узле $V^n_m \ge 0$, можно было бы использовать **4^0**, но там $V^n_{i_m-2} = V^n_{-1}$, что требует значения вне физической области $\overline{\Omega}$. Поэтому для узла $i_m = 1$ аппроксимация **4^0** непригодна. Можно было бы применить **2^0 2.4** однако она имеет «аппроксимационную вязкость» и 1-ый порядок точности. Нежелательно и применение **3^0 2.4.** Предлагается следующая аппроксимация в узле $i_m = 1$, но только для случая $\boldsymbol{V}^n_{i_m} \ge \mathbf{O}$:

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = V^n_m \left[\Re^n_{\bar{x}_m} + 0{,}5 h_{mi_m} T_{+m}(\Re^n_{x_m \dot{x}_m})\right] + O(\hbar^2_m) \qquad (3)$$

6^0. Аппроксимация на четырехточечном шаблоне $[x_{mi_m-2}, x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$.

Если в приграничном узле $i_m = N_m - 1$ имеет место случай $V^n_m \geq 0$ применяется аппроксимация **4^0**. Если же в этом узле $V^n_m \leq 0$ использование **3^0** из-за $V^n_{i_m+2} = V^n_{N_m+1}$, потребует значений вне физической области $\overline{\Omega}$. Поэтому, рассуждая, как в **5^0**, приходим к следующей аппроксимации в узле $i_m = N_m - 1$, но только для случая $V^n_m \leq 0$:

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = V^n_m \left[\Re^n_{x_m} - 0{,}5 h_{mi_m+1} T_{-m}(\Re^n_{x_m \dot{x}_m})\right] + O(\hbar^2_m). \qquad (4)$$

7^0. Многообразие двухточечных аппроксимаций задается на основании **1^0, 2^0 2.4** в виде

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = V^n_m \left[\alpha^n_m \Re^n_{\bar{x}_m} + \beta^n_m \Re^n_{x_m}\right] + O(\beta^n_m h_{mi_m+1} - \alpha^n_m h_{mi_m}) + O(\hbar^2_m),$$

где $\alpha^n_m = \{\alpha^n_m(x),\ x \in \overline{\Omega}_h\}$, $\beta^n_m = \{\beta^n_m(x),\ x \in \overline{\Omega}_h\}$- произвольные сеточные функции, такие, что $\alpha^n_m(x) + \beta^n_m(x) = 1,\ m = 1,...,M,\ x \in \overline{\Omega}_h$.

8^0. Многообразие пятиточечных аппроксимаций задается на основании **3^0, 4^0** в виде

$$(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = V^n_m \left[\alpha^n_m \Re^n_{\bar{x}^o_m} + \beta^n_m \Re^n_{x^o_m}\right] + O(\hbar^2_m),$$

где $\alpha^n_m,\ \beta^n_m = 1 - \alpha^n_m$ имеют тот же смысл, что и в **7^0** и выбирается самим пользователем из соображений точности аппросимаций и устойчивости схемы.

Направленные разностные производные **без «аппроксимационной вязкости»** (*Джакупов К.Б.* [3]) получаются при значениях коэффициентов:

$$\alpha^n_{mi_1 \ldots i_M} = \frac{1 + sign V^n_{mi_1 \ldots i_M}}{2},\ \beta^n_{mi_1 \ldots i_M} = 1 - \alpha^n_{mi_1 \ldots i_M} = \frac{1 - sign V^n_{mi_1 \ldots i_M}}{2},$$

что можно записать в объединенном виде, используя дискретную функцию сигнатуры (знака) (*Q=0,sign(Q)=0; Q>0,sign(Q)=1; Q<0,sign(Q)=-1)* :

$$\left(V_m \frac{\partial \Re}{\partial x_m}\right)^n_{i_m} = \frac{V^n_m + |V^n_m|}{2} \{\Re^n_{\bar{x}_m} + 0{,}5 h_{mi_m} [T_{-m}(\Re^n_{x_m \dot{x}_m}) \frac{1 + sign(i_m - 1.5)}{2} +$$

$$+ T_{+m}(\Re^n_{x_m \dot{x}_m}) \frac{1 - sign(i_m - 1.5)}{2}]\} + \frac{V^n_m - |V^n_m|}{2} \{\Re^n_{x_m} - 0{,}5 h_{mi_m+1} \times$$

$$\times [T_{+m}(\Re^n_{x_m \dot{x}_m}) \frac{1 - sign(i_m - N_m + 1.5)}{2} +$$

$$+ T_{-m}(\Re^n_{x_m \dot{x}_m}) \frac{1 + sign(i_m - N_m + 1.5)}{2}]\} + O(\hbar^2_{i_m}) \qquad (5)$$

Для упрощения записи в правой части (5) введем обозначения

$$\Re^n_{\bar{x}^0_m} \equiv \Re^n_{\bar{x}_m} + 0{,}5h_{mi_m}[T_{-m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m})\frac{1+sign(i_m-1.5)}{2} + T_{+m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m})\frac{1-sign(i_m-1.5)}{2}],$$

$$\Re^n_{x^0_m} \equiv \Re^n_{x_m} - 0{,}5h_{mi_m+1}[T_{+m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m})\frac{1-sign(i_m-N_m+1.5)}{2} +$$

$$+ T_{-m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m})\frac{1+sign(i_m-N_m+1.5)}{2}]$$

На основании этого (5) записывается кратко в виде

$$(V_m\frac{\partial\Re}{\partial x_m})^n_{i_m} = \frac{|V^n_m|+V^n_m}{2}\Re^n_{\bar{x}^0_m} + \frac{V^n_m-|V^n_m|}{2}\Re^n_{x^0_m} + O(\hbar^2_{mi_m}) \qquad (6)$$

2.6. Аппроксимации диссипативных членов

В уравнения вязких сред входят вторые производные. Для них применяются нижеследующие аппроксимации.

1^0. На трехточечном шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$ используется симметричная аппроксимация из 2.3:

$$\left(\frac{\partial^2\Re}{\partial x^2_m}\right)^n_{i_m} = \frac{\Re^n_{x_m}-\Re^n_{\bar{x}_m}}{\hbar_{mi_m}} = \Re^n_{x_m\dot{x}_m} + O(h_{mi_m+1}-h_{mi_m}) + O(\hbar^2_{mi_m})$$

где $\left(f^n_{x_m} - f^n_{\bar{x}_m}\right)\hbar^{-1}_{mi_m} \equiv f^n_{x_m\dot{x}_m}$ - разностная производная 2-го порядка. На равномерной сетке $h_{mi_m} = h_{mi_m+1} = h_m$:

$$\left(\frac{\partial^2\Re}{\partial x^2_m}\right)^n_{i_m} = \Re^n_{x_m\bar{x}_m} + O(h^2_m) = \frac{\Re^n_{i_m-1} - 2\Re^n_{i_m} + \Re^n_{i_m+1}}{h^2_m} + O(h^2_m)$$

2^0. На трехточечном шаблоне $[x_{mi_m}, x_{mi_m+1}, x_{mi_m+2}]$ используется несимметричная аппроксимация вперед

$$\left(\frac{\partial^2\Re}{\partial x^2_m}\right)^n_{i_m} = T_{+m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m}) + O(\hbar_{mi_m+1})$$

Имеет 1-ый порядок точности. Применен в **5^0 2.4.**

3^0. На трехточечном шаблоне $[x_{mi_m-2}, x_{mi_m-1}, x_{mi_m}]$ используется несимметричная аппроксимация назад

$$\left(\frac{\partial^2\Re}{\partial x^2_m}\right)^n_{i_m} = T_{-m}(\Re^n_{x_m\dot{x}_m}) + O(\hbar_{mi_m-1})$$

Имеет 1-ый порядок точности. Применен в **6^0 2.3**.

4^0. Аппроксимации производных от потоков на шаблоне $[x_{mi_m-1}, x_{mi_m}, x_{mi_m+1}]$. Имеет место

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\mu\frac{\partial\Re}{\partial x_m}\right)^n_{i_m} = \frac{(T_{+m}\mu^n+\mu^n)\Re^n_{x_m} - (\mu^n+T_{-m}\mu^n)\Re^n_{\bar{x}_m}}{2\hbar_{mi_m}} + O(h_{mi_m+1}-h_{mi_m}) +$$

$$+ O(\hbar^2_{mi_m}) \equiv [\frac{(T_{+m}\mu^n+\mu^n)}{2}\Re^n_{x_m}]_{\dot{x}_m} + O(h_{mi_m+1}-h_{mi_m}) + O(\hbar^2_{mi_m})$$

Для коэффициента $\mu \equiv 1$ отсюда получается **1^0.** Для определения погрешности аппроксимаций используются ряды *Тейлора:*

$$T_{+m}\Re = \Re + \sum_{S=1}^{\nu} \frac{h_{mi_m+1}^S}{S!} \frac{\partial^S \Re}{\partial x_m^S} + O(h_{mi_m+1}^{\nu+1}), \quad (1)$$

$$T_{-m}\Re^n = \Re^n + \sum_{S=1}^{\nu} (-1)^S \frac{h_{mi_m}^S}{S!} \frac{\partial^S \Re^n}{\partial x_m^S} + O(h_{mi_m}^{\nu+1}), \quad (2)$$

$$T_{+m}T_{+m}\Re^n = \Re^n + \sum_{S=1}^{\nu} \frac{(h_{mi_m+1} + h_{mi_m+2})^S}{S!} \frac{\partial^S \Re^n}{\partial x_m^S} + O((h_{mi_m+1} + h_{mi_m+2})^{\nu+1}), \quad (3)$$

$$T_{-m}T_{-m}\Re^n = \Re^n + \sum_{S=1}^{\nu} (-1)^S \frac{(h_{mi_m} + h_{mi_m-1})^S}{S!} \frac{\partial^S \Re^n}{\partial x_m^S} + O((h_{mi_m} + h_{mi_m-1})^{\nu+1}), \quad (4)$$

$$T_{+m}T_{+m}\Re^n \equiv \Re^n_{i_1..i_m+2..i_M} \equiv \Re(x_{1i_1},...,x_{mi_m} + h_{mi_m+1} + h_{mi_m+2},...,x_{ni_M},t_n),$$

$$T_{-m}T_{-m}\Re^n \equiv \Re^n_{i_1..i_m-2..i_M} \equiv \Re(x_{1i_1},...,x_{mi_m} - h_{mi_m} - h_{mi_m-1},...,x_{ni_M},t_n).$$

Для аппроксимаций **1^0, 2^0, 9^0 2.3** достаточно рядов (1), (2), надо положить в них $\nu = 1$, для проверки **3^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0, 10^0 2.4** - в (1)-(4) надо положить $\nu = 2$, в **2.5** $\nu = 3$.

Замечание. В дальнейшем в нужных местах будут использованы следующие обозначения:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k, h_{1i_1} = h_{xi},$$

$$h_{2i_2} = h_{yj}, h_{3i_3} = h_{zk}, N_1 = N_x, N_2 = N_y, N_3 = N_z$$

2.7. Численное интегрирование. Формулы *Ньютона-Котеса*

Для вычисления одномерного интеграла $\int_a^b y(x)dx$ численными методами интервал $x \in [a,b]$ разделяется на отрезки точками

$$x_i = a + ih, i = 0,1,..., N, x_0 = a, x_N = b, y(x_i) \equiv y_i$$

Формула *Ньютона-Котеса* имеет вид [1]:

$$\int_{x_0}^{x_0+ih} y(x)dx \approx \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_N y_N,$$

где $\alpha_k = \frac{(-1)^{i-k}}{i!(i-k)!} \int_0^i \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-i)}{\lambda-k} d\lambda, k = 0,1,..., N$

При i**=1** получается формула трапеции:

$\int_{x_0}^{x_0+h} y(x)dx \approx h\frac{(y_0+y_1)}{2}$ с точностью $O(h^3)$, или обобщая эту формулу на весь отрезок, вычисляют приближенно $\int_a^b y(x)dx \approx (b-a)\frac{y(a)+y(b)}{2}$ с погрешностью $O((b-a)^3)$,

$$\int_a^b y(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+Nh} y(x)dx \approx h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ...y_{N-1} + \frac{y_N}{2})$$

с погрешностью $O(h^3)$.

При i**=2** из формулы *Ньютона-Котеса* получается более высокого порядка точности $O(h^5)$ приближение

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y(x)dx \approx \frac{h}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Наиболее простая формула четырехугольника

$$\int_{a}^{b} y(x)dx \approx (b-a)y(\frac{a+b}{2})$$

имеет погрешность $O((b-a)^2)$.

2.8. Интерполирование сплайнами промежуточных значений сеточной функции. Простая интерполяция

Вычисленные по разностным схемам значения температуры, компонент скоростей, концентраций веществ, давления, плотности и других физических величин определяютя только в узлах сеточных областей. Необходимые значения этих функций в промежутке между узлами находятся приближенно с помощью интерполяционных формул.

Наиболее эффективным среди них является кубический многозвенник (сплайн) [14], теория которого здесь излагается для функции, заданной на отрезке [*a*,*b*], разделенной узлами $x_i, i = 0,1,...,n$ на n отрезочков:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Пусть в этих точках заданы значения $\{f_i\}_{i=o}^{n}$ некоторой сеточной или иной функции $f(x)$: $f_i = f(x_i)$, i=0, 1, …, n.

Функция $y=y(x)$ называется кубическим многозвенником или сплайном, если она обладает следующими свойствами:

1. $y(x)$ принадлежит классу $C^2([a, b]\}$, то есть непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;
2. на каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$, i=1, 2, …, n является кубическим полиномом.

$$y(x) = y_i(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} a_\alpha^{(i)}\left(x_i - x\right)^\alpha = a_3^{(i)}(x_i - x)^3 + a_2^{(i)}(x_i - x)^2 + a_1^{(i)}(x_i - x) + a_0^{(i)}, i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

Задача интерполирования функции $f(x)$ кубическим многозвенником $y(x)$ ставится так: в узлах они принимают значения интерполируемой функции

$$y(x_i) = f(x_i),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

на концах отрезка [*a*, *b*] удовлетворяются дополнительные усло- вия одного из следующих типов:

(a) $y'(x_i) = f'(x_i)$, i=0, $i = n$;
(b) $y''(x_i) = f''(x_i)$, i=0, $i = n$;
(c) на одном из концов выполняется условие (a), на другом (b);
(d) функция $f(x)$–периодическая с периодом $X = x_n - x_0$.

При последнем условии (d) функция $y(x)$ должна быть тоже периодической, что дает

$$y(a)=y(x_n),\ y'(x_0)=y'(x_n),\ y''(x_0)=y''(x_n)$$

Обозначаются шаги сетки $h_i=x_{i+1}-x_i$, i=1, 2, …, n–1. Из непрерывности $y(x)$ и ее первых двух производных в узлах x_i, i=1, 2, …, n-1, получается 3(n–1) уравнений;

(непрерывность $y(x)$): $y_{i+1}(x_i)=y_i(x_i)$ (3)

(непрерывность $y'(x)$): $y'_{i+1}(x_i)=y'_i(x_i)$ (4)

(непрерывность $y''(x)$): $y''_{i+1}(x_i)=y''_i(x_i)$ (5)

i=1, 2, …, n–1

Из (1) и (2) следуют

$$y_i(x_i)=a_0^{(i)}=f(x_i),\qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{6}$$

Из (1) и (3) следуют

$$a_3^{(i)}h_{i-1}^3+a_2^{(i)}h_{i-1}^2+a_1^{(i)}h_{i-1}+a_0^{(i)}=a_0^{(i-1)},\ \ i=1,\ \ldots,\ n \tag{7}$$

Отсюда в силу (6)

$$a_3^{(i)}h_{i-1}^3+a_2^{(i)}h_{i-1}^2+a_1^{(i)}h_{i-1}+f_i=f_{i-1},i=1,\ \ldots,\ n \tag{8}$$

Из (1) и (4) следуют

$$3a_3^{(i)}h_{i-1}^2+2a_2^{(i)}h_{i-1}+a_1^{(i)}=a_1^{(i-1)},i=1,\ 2\ \ldots,\ n \tag{9}$$

Из (1) и (5) следует

$$6a_3^{(i)}h_{i-1}+2a_2^{(i)}=2a_2^{(i-1)},i=1,\ 2\ \ldots,\ n \tag{10}$$

после сокращения на 2

$$3a_3^{(i)}h_{i-1}+a_2^{(i)}=a_2^{(i-1)},i=1,\ 2\ \ldots,\ n \tag{11}$$

Таким образом, для определения 3(n+1) неизвестных $\{a_1^{(i)}\}_{i=0}^n$, $\{a_2^{(i)}\}_{i=0}^n$, $\{a_3^{(i)}\}_{i=0}^n$ имеется n уравнений (8), n уравнений (9), n уравнений (11) – всего 3n уравнений.

Недостающие 3 уравнения должны быть получены из условий (a), (b), (c), (d). Допустим, имеет место условие (a). Тогда из (1) следуют

$$3a_3^{(1)}h_0^2+2a_2^{(1)}h_0+a_1^{(1)}=-f'(a), \tag{12}$$

$$a_1^{(n)}=-f'(b), \tag{13}$$

$$-a_1^{(0)}=-f'(a), \tag{13$^{\mathrm{I}}$}$$

Условия (b) дают

$$6a_3^{(1)}h_0+2a_2^{(1)}=f''(a), \tag{14}$$

$$a_2^{(n)}=\frac{f''(b)}{2}, \tag{15}$$

$$a_2^{(0)}=\frac{f''(a)}{2} \tag{15$^{\mathrm{I}}$}$$

Условия (c) дают

$$3a_3^{(1)}h_0^2+2a_2^{(1)}h_0+a_1^{(1)}=-f'(a), \tag{16}$$

$$a_2^{(n)}=\frac{f''(b)}{2}, \tag{17 }$$

$$a_1^{(0)}=-f'(a) \tag{17$^{\mathrm{I}}$}$$

или

$$6a_3^{(1)}h_0+2a_2^{(1)}=f''(a), \tag{18}$$

$$a_1^{(n)} = -f(b), \tag{19}$$

$$a_2^{(0)} = \frac{f''(a)}{2} \tag{19^I}$$

Из условия периодичности (d) следует

$$a_3^{(1)}h_0^3 + a_2^{(1)}h_0^2 + a_1^{(1)}h_0 + f_1 = f_n, \tag{20}$$

$$3a_3^{(1)}h_0^2 + 2a_2^{(1)}h_0 + a_1^{(1)} = a_1^{(n)}, \tag{21}$$

$$6a_3^{(1)}h_0 + 2a_2^{(1)} = 2a_2^{(n)} \tag{22}$$

Сопоставляя (22) с (11), (21) с (9), находим, что

$$a_2^{(0)} = a_2^{(n)}, \tag{23}$$

$$a_1^{(0)} = a_1^{(n)} \tag{24}$$

Так как из периодичности 1-ой производной вытекает равенство (24), то из условия периодичности 2-ой производной следуют

$$a_2^{(0)} = a_2^{(n)}, a_3^{(0)} = a_3^{(n)} \tag{25}$$

Таким образом, коэффициенты $a_\alpha^{(i)}$, α=0,1,2,3 в (1) периодичны, что позволяет при их вычислении организовать периодическую прогонку. Из (11) следуют

$$a_3^{(i)} = \frac{a_2^{(i-0)} - a_2^{(i)}}{3h_{i-1}}, i = 1, 2, \ldots, n \tag{26}$$

Из (8) и (26) следует

$$a_1^{(i)} = \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} - a_2^{(i)}h_{i-1} - a_3^{(i)}h_{i-1}^2 = \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} - \frac{2a_2^{(i)} + a_2^{(i-1)}}{3} \cdot h_{i-1}, i = 1,2,...,n, \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в (9), найдем

$$(a_2^{(i-1)} - a_2^{(i)})h_{i-1} + 2a_2^{(i)}h_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} - \frac{2a_2^{(i)} + a_2^{(i-1)}}{3}h_{i-1} =$$

$$= \frac{f_{i-2} - f_{i-1}}{h_{i-2}} - \frac{2a_2^{(i-1)} + a_2^{(i-2)}}{3}h_{i-2}, \ i = 2, \ldots, n \tag{28}$$

После приведения подобных (28) записывается для i+1

$$h_{i-1}a_2^{(i-1)} + 2(h_{i-1} + h_i)a_2^{(i)} + h_i a_2^{(i+1)} = 3(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}), i = 1,2,...,n-1, \tag{29}$$

Обозначается для дальнейшего

$$\Phi_i = 3(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}})$$

Для определения n+1 неизвестных $\{a_2^{(i)}\}_{i=0}^n$ получена система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. В случае (b) из (14) и (26) при i=1 также следует, что

$$a_2^{(0)} = \frac{f''(a)}{2} \tag{30}$$

Матрица системы (29) симметрична и со строгим диагональным преобладанием, отсюда вытекает, что коэффициенты $\{a_2^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ определяются однозначно, следовательно, по формулам (26) , (27) однозначно определяются и коэффициенты $\{a_3^{(i)}\}_{i=1}^n$ и $\{a_1^{(i)}\}_{i=1}^n$.

Решение системы (29) ищется методом прогонок. Для этого используется представление

$$a_2^{(i)} = \beta_i a_2^{(i+1)} + \gamma_i, i=n-1, n-2, \ldots, 1, 0 \quad (31)$$

Подставляя в (29)

$$a_2^{(i-1)} = \beta_{i-1} a_2^{(i)} + \gamma_{i-1} \quad (32)$$

легко получить формулы прямых прогонок

$$\beta_i = \frac{h_i}{-2(h_{i-1}+h_i) - h_{i-1}\beta_{i-1}}, \gamma_i = \frac{h_{i-1}\gamma_{i-1} - \Phi_i}{-2(h_{i-1}+h_i) - h_{i-1}\beta_{i-1}}, i = 1,2,\ldots,n-1, \quad (33)$$

Для счета по (33) необходимо знать β_0, γ_0. В случае (b) из сравнения (31) при $i=0$ с (30) следуют

$$\beta_0=0,\ \gamma_0 = \frac{1}{2} f''(a) \quad (34)$$

Из условия (15) известно $a_2^{(n)} = \frac{f''(b)}{2}$, следовательно, осуществляя обратную прогонку по (31) от $i=n-1$ до 1, вычисляются все $\{a_2^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$, затем по (26), (27), $\{a_3^{(1)}\}_{i=1}^{n}$, $\{a_1^{(i)}\}_{i=1}^{n}$. Несколько сложнее реализация условий (a), (12), (13). В силу (13^{I})

$$a_1^{(0)} = -f'(a) \quad (35)$$

Подставляя (36) и (27) при $i=1$ в (12), получаем условие для определения начальных коэффициентов β_0, γ_0:

$$h_0(a_2^{(0)} - a_2^{(1)}) + 2a_2^{(1)}h_0 + \frac{f_0 - f_1}{h_0} - \frac{2a_2^{(1)} + a_2^{(0)}}{3} h_0 = -f'(a) \quad (36)$$

Отсюда

$$a_2^{(0)} = -\frac{1}{2} a_2^{(1)} + \frac{3}{2h_0}[-f'(a) - \frac{f_0 - f_1}{h_0}] \quad (37)$$

Сопоставляя (37) с (31) при $i = 0$, находим, что

$$\beta_0 = -\frac{1}{2},\ \gamma_0 = \frac{3}{2h_0}[-f'(a) - \frac{f_0 - f_1}{h_0}] \quad (38)$$

Подставляя (27) в (13), получаем условие, необходимое для организации обратной прогонки (31):

$$\frac{f_{n-1} - f_n}{h_{n-1}} - \frac{2a_2^{(n)} + a_2^{(n-1)}}{3} h_{n-1} = -f'(b) \quad (39)$$

Отсюда

$$a_2^{(n-1)} = -2a_2^{(n)} + \frac{3}{h_{n-1}}[\frac{f_{n-1} - f_n}{h_{n-1}} + f'(b)] \quad (40)$$

Записывая (31) при $i=n-1$ **,** имеем

$$a_2^{(n-1)} = \beta_{n-1} a_2^{(n)} + \gamma_{n-1} \quad (41)$$

Вычитая (40) из (41), находим

$$a_2^{(n)} = \frac{\frac{3}{h_{n-1}}[\frac{f_{n-1} - f_n}{h_{n-1}} + f'(b)] - \gamma_{n-1}}{2 + \beta_{n-1}} \quad (42)$$

Далее осуществляется обратная прогонка (31).

Формулы периодической прогонки *Абрамова-Андреева*

Решение (29) в случае периодичности коэффициентов (23), (24), (25) ищется в виде

$$a_2^{(i)} = p_i + a_2^{(n)} q_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1, \tag{43}$$

где

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1},\ q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \tag{44}$$

$$i = n-2, n-3, \ldots, 2, 1,\ p_{n-1} = \beta_n,\ q_{n-1} = \alpha_n + \gamma_n, \tag{45}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{-h_i}{2(h_{i-1}+h_i)+h_{i-1}\alpha_i},\ i=2, 3, \ldots, n \tag{46}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\Phi_i - h_{i-1}\beta_i}{2(h_{i-1}+h_i)+h_{i-1}\alpha_{ii}},\ i=2, 3, \ldots, n \tag{47}$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{-h_{i-1}\gamma_i}{2(h_{i-1}+h_i)+h_{i-1}\alpha_i},\ i=2, 3, \ldots, n \tag{48}$$

$$\alpha_2 = \frac{-h_1}{2(h_1+h_0)},\ \beta_2 = \frac{\Phi_1}{2(h_1+h_0)},\ \gamma_2 = \frac{-h_0}{2(h_1+h_0)}, \tag{49}$$

$$a_2^{(n)} = \frac{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} p_1}{1 - \alpha_{n+1} q_1 - \gamma_{n+1}} \tag{50}$$

После вычисления $\{a_2^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ по формуле (43) из (26), (27) определяются $\{a_3^{(i)}\}_{i=1}^{n}$, $\{a_1^{(i)}\}_{i=1}^{n}$. На практике часто возникает случай, когда на концах отрезка [a, *b*] ни одно из условий (a), (b), (c), (d) не задано.

Некоторые авторы полагают $a_2^{(0)} = 0$, $a_2^{(n)} = 0$, т.е. приходят опять к случаю (a), положив приближенно

$$f'(a) \cong \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{(h_0+h_1)}\left[\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right] \tag{51}$$

с погрешностью $O((h_1^2 + h_0^2))$,

$$f'(b) \cong \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{(h_{n-1}+h_{n-2})}\left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}}\right) \tag{52}$$

с погрешностью $O((h_{n-1}^2 + h_{n-2}^2))$.

Для трижды непрерывно дифференцируемой функции *f(x) Ю.С.Завьяловым* получены следующие оценки точности интерполяции

$$|y(x) - f(x)| \le \frac{5}{2} H^3 \cdot E,\ |y'(x) - f'(x)| \le 5H^2 \cdot E, \tag{53}$$

$$|y''(x) - f''(x)| \le 5H \cdot E, \text{ где } H = \max_i h_i,\ E = \max_{x_0 \le \xi \le x_n} |f'''(\xi)|.$$

Применение. Пусть требуется найти приближенное значение функции $f(x^*)$ в точке x^*, находящейся в интервале $x_{i-1} < x^* < x_i$. В этом случае применяется сплайн с номером *i*, ку- да подставляется x^* для вычисления прибиженного значения:

$$f(x^*) = y_i(x^*) = a_3^{(i)}(x_i - x^*)^3 + a_2^{(i)}(x_i - x^*)^2 + a_1^{(i)}(x_i - x^*) + a_0^{(i)}$$

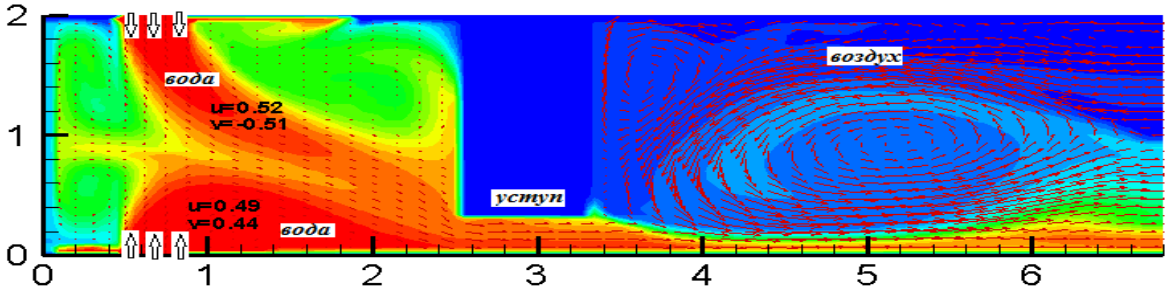
Простая интерполяция. Иной раз для вычисления $f(x^*)$ в точке $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$ можно воспользоваться пропорциональной формулой

$$f(x^*) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x^*) + f(x_i)(x^* - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})},$$

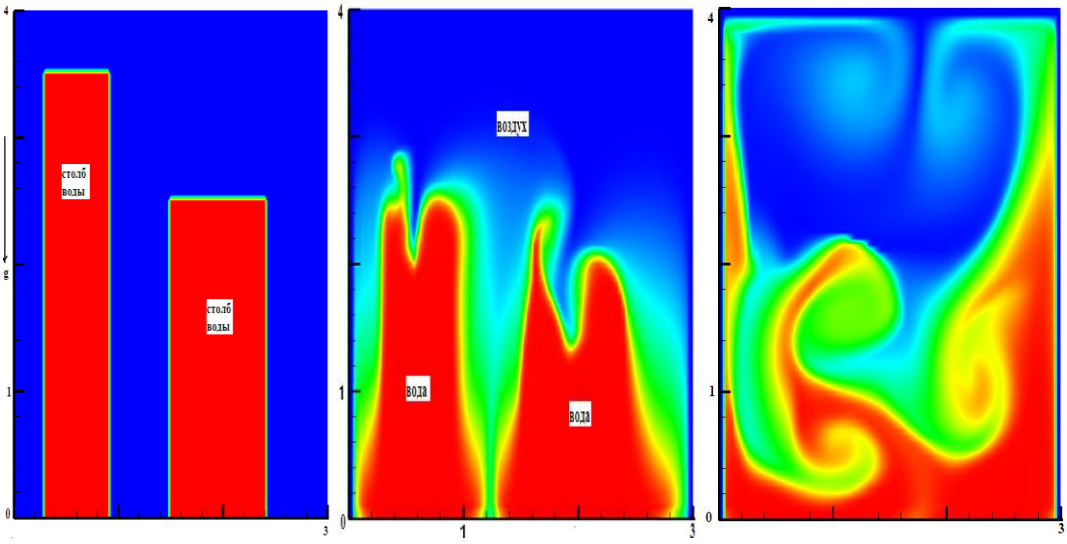
дающей погрешность $O(x_i - x_{i-1})$.

Вопросы

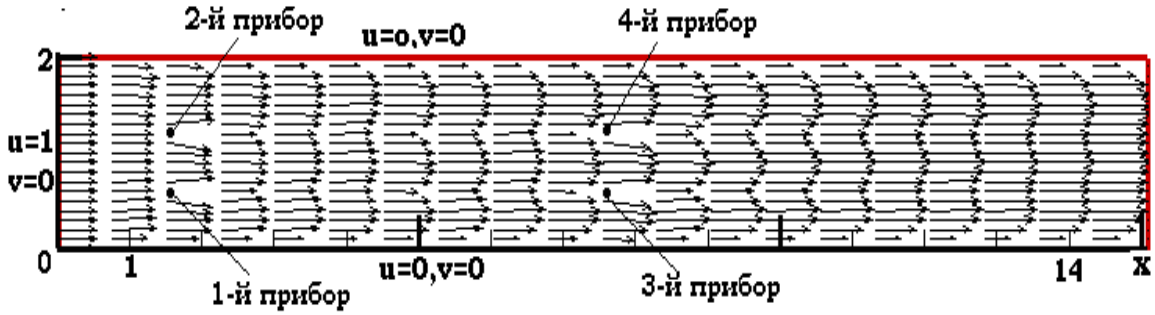
1. Написать в индексном виде выражение (1) в **2.5.**
2. Написать в индексном виде выражение (2) в **2.5.**
3. Доказать, что $T_{+m}T_{-m} = E$.
4. Написать в индексном виде выражение (1) в **2.6** .
5. Вывести погрешность формулы четырехугольника.



Обтекание уступа встречными струями воды



Падение двух столбов воды и струи через отверстие в замкнутом объеме воздуха под действием силы тяжести.



Влияние 4-х измерительных точечных приборов на течение вязкой жидкости в канале

Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТА, ЭЙЛЕРА

3.1. Дифференциальные уравнения динамики точки

Дифференциальное уравнение динамики точки вытекают из второго закона *Ньютона в* следующем виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F} \tag{1}$$

Проекции данного уравнения на оси координат *Oxyz* дают систему дифференциальных уравнений движения материальной точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x, m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\ \ m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z, \tag{2}$$

В общем случае система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}),\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=F_y(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}),\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=F_z(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}), \end{aligned} \tag{3}$$

В момент времени $t=t_0$ задаются координаты начального положения точки

$$x=x_0, y=y_0, z=z_0 \tag{4}$$

и начальная скорость

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}_0, \frac{dy}{dt}=\dot{y}_0, \frac{dz}{dt}=\dot{z}_0 \tag{5}$$

3.2. Методы *Рунге-Кутта* 4-го порядка точности

Первоначально система (3) приводится к системе пониженного порядка

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}&=F_x(t,x,y,z,u,v,w)/m,\\ \frac{dv}{dt}&=F_y(t,x,y,z,u,v,w)/m,\\ \frac{dw}{dt}&=F_z(t,x,y,z,u,v,w)/m,\\ \frac{dx}{dt}&=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w \end{aligned} \tag{6}$$

С момента $t=t_0$ во временном интервале с шагом τ располагаются узлы деления $t_n=t_0+n\tau,\quad n=0,1,2,3,\ldots,\ t_{n+1}=t_n+\tau$. В заданных узлах значения функций обозначаются нижним индексом

$$x(t_n)=x_n, y(t_n)=y_n, z(t_n)=z_n, u(t_n)=u_n, v(t_n)=v_n, w(t_n)=w_n$$

Метод *Рунге-Кутта* 4-го порядка точности:

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{6}(g_1+2g_2+2g_3+g_4),$$
$$v_{n+1}=v_n+\frac{1}{6}(f_1+2f_2+2f_3+f_4),$$
$$w_{n+1}=w_n+\frac{1}{6}(e_1+2e_2+2e_3+e_4),$$
$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \qquad (7)$$
$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(d_1+2d_2+2d_3+d_4),$$
$$z_{n+1}=z_n+\frac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4),$$

В силу начальных условий (5) даны

$$u_0=\dot{x}_0, v_0=\dot{y}_0, w_0=\dot{z}_0 \qquad (8)$$

Далее последовательно насчитываются коэффициенты в (7)

$$g_1=\tau F_x(t_n,x_n,y_n,z_n,u_n,v_n,w_n)/m,$$
$$f_1=\tau F_y(t_n,x_n,y_n,z_n,u_n,v_n,w_n)/m, \quad e_1=\tau F_z(t_n,x_n,y_n,z_n,u_n,v_n,w_n)/m,$$
$$k_1=\tau u_n, \quad m_1=\tau v_n, \quad l_1=\tau w_n,$$
$$g_2=\tau F_x(t_n+\frac{\tau}{2},x_n+\frac{k_1}{2},y_n+\frac{d_1}{2},z_n+\frac{l_1}{2},u_n+\frac{g_1}{2},v_n+\frac{f_1}{2},w_n+\frac{e_1}{2})/m,$$
$$f_2=\tau F_y(t_n+\frac{\tau}{2},x_n+\frac{k_1}{2},y_n+\frac{d_1}{2},z_n+\frac{l_1}{2},u_n+\frac{g_1}{2},v_n+\frac{f_1}{2},w_n+\frac{e_1}{2})/m,$$
$$e_2=\tau F_z(t_n+\frac{\tau}{2},x_n+\frac{k_1}{2},y_n+\frac{d_1}{2},z_n+\frac{l_1}{2},u_n+\frac{g_1}{2},v_n+\frac{f_1}{2},w_n+\frac{e_1}{2})/m,$$
$$k_2=\tau(u_n+\frac{g_1}{2}), \quad m_2=\tau(v_n+\frac{f_1}{2}), \quad l_2=\tau(w_n+\frac{e_1}{2}),$$
$$g_3=\tau F_x(t_n+\frac{\tau}{2},x_n+\frac{k_2}{2},y_n+\frac{d_2}{2},z_n+\frac{l_2}{2},u_n+\frac{g_2}{2},v_n+\frac{f_2}{2},w_n+\frac{e_2}{2})/m, \qquad (9)$$
$$f_3=\tau F_y(t_n+\frac{\tau}{2},x_n+\frac{k_2}{2},y_n+\frac{d_2}{2},z_n+\frac{l_2}{2},u_n+\frac{g_2}{2},v_n+\frac{f_2}{2},w_n+\frac{e_2}{2})/m,$$
$$e_3=\tau F_z(t_n+\frac{\tau}{2},x_n+\frac{k_2}{2},y_n+\frac{d_2}{2},z_n+\frac{l_2}{2},u_n+\frac{g_2}{2},v_n+\frac{f_2}{2},w_n+\frac{e_2}{2})/m, \; k_3=\tau(u_n+\frac{g_2}{2}),$$
$$m_3=\tau(v_n+\frac{f_2}{2}), \quad l_3=\tau(w_n+\frac{e_2}{2}),$$
$$g_4=\tau F_x(t_n+\tau,x_n+k_3,y_n+d_3,z_n+l_3,u_n+g_3,v_n+f_3,w_n+e_3)/m,$$
$$f_4=\tau F_y(t_n+\tau,x_n+k_3,y_n+d_3,z_n+l_3,u_n+g_3,v_n+f_3,w_n+e_3)/m,$$
$$e_4=\tau F_z(t_n+\tau,x_n+k_3,y_n+d_3,z_n+l_3,u_n+g_3,v_n+f_3,w_n+e_3)/m,$$
$$k_4=\tau(u_n+g_3), \quad m_4=\tau(v_n+f_3), \quad l_4=\tau(w_n+e_3), \; n=0,1,2,3,...$$

Второй метод *Рунге-Кутта* 4-го порядка точности

По начальным условиям (4) и (5) при $t=t_0$ имеем равенства:

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0\ \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0$$

Второй метод *Рунге-Кутта* реализуется по алгоритму:

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n\tau + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n\tau + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4),$$

$$z_{n+1} = z_n + \dot{z}_n\tau + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

$$k_1 = \tau F_x(t_n, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)/m,$$

$$d_1 = \tau F_y(t_n, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)/m,$$

$$l_1 = \tau F_z(t_n, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)/m,$$

$$k_2 = \tau F_x(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n\frac{\tau}{2}, y_n + \dot{y}_n\frac{\tau}{2},$$

$$z_n + \dot{z}_n\frac{\tau}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_1}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_1}{2})/m,$$

$$d_2 = \tau F_y(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n\frac{\tau}{2}, y_n + \dot{y}_n\frac{\tau}{2},$$

$$z_n + \dot{z}_n\frac{\tau}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_1}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_1}{2})/m,$$

$$l_2 = \tau F_z(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n\frac{\tau}{2}, y_n + \dot{y}_n\frac{\tau}{2},$$

$$z_n + \dot{z}_n\frac{\tau}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_1}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_1}{2})/m,$$

$$k_3 = \tau F_x(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n\frac{\tau}{2} + \frac{k_1}{4}\tau, y_n + \dot{y}_n\frac{\tau}{2} + \frac{d_1}{4},$$

$$z_n + \dot{z}_n\frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2})/m,$$

$$d_3 = \tau F_y(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n\frac{\tau}{2} + \frac{k_1}{4}\tau, y_n + \dot{y}_n\frac{\tau}{2} + \frac{d_1}{4},$$

$$z_n + \dot{z}_n\frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2})/m,$$

$$l_3 = \tau F_z(t_n + \frac{\tau}{2}, x_n + \dot{x}_n\frac{\tau}{2} + \frac{k_1}{4}\tau, y_n + \dot{y}_n\frac{\tau}{2} + \frac{d_1}{4},$$

$$z_n + \dot{z}_n\frac{\tau}{2} + \frac{l_1}{4}, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \dot{y}_n + \frac{d_2}{2}, \dot{z}_n + \frac{l_2}{2})/m,$$

$$k_4 = \tau F_x(t_n + \tau, x_n + \dot{x}_n\tau + \frac{k_2}{2}\tau, y_n + \dot{y}_n\tau + \frac{d_2}{2},$$

$$z_n + \dot{z}_n\tau + \frac{l_2}{2}, \dot{x}_n + k_3, \dot{y}_n + d_3, \dot{z}_n + l_3)/m,$$

$$d_4 = \tau F_y(t_n + \tau, x_n + \dot{x}_n\tau + \frac{k_2}{2}\tau, y_n + \dot{y}_n\tau + \frac{d_2}{2},$$

$$z_n + \dot{z}_n\tau + \frac{l_2}{2}, \dot{x}_n + k_3, \dot{y}_n + d_3, \dot{z}_n + l_3)/m,$$

$$l_4 = \tau F_z(t_n + \tau, x_n + \dot{x}_n\tau + \frac{k_2}{2}\tau, y_n + \dot{y}_n\tau + \frac{d_2}{2},$$

$$z_n + \dot{z}_n\tau + \frac{l_2}{2}, \dot{x}_n + k_3, \dot{y}_n + d_3, \dot{z}_n + l_3)/m, n = 0,1,2,3,...$$

3.3. Методы *Эйлера*

Для уравнения 1-го порядка

$$\frac{dQ}{dt} = \Re(t,Q), Q\Big|_{t=t_0} = Q_0$$

алгоритм 1-го порядка точности имеет вид

$$Q_{n+1} = Q_n + \tau\Re(t_n, Q_n), \quad n = 0,1,2,3,...$$

С использованием обозначений (9) данный метод реализуется для решения системы (6) в виде:

$$u_{n+1} = u_n + g_1, \quad v_{n+1} = v_n + f_1, \quad w_{n+1} = w_n + e_1,$$

$$x_{n+1} = x_n + k_1, \quad y_{n+1} = y_n + d_1, \quad z_{n+1} = z_n + l_1$$

Метод *Эйлера* 2-го порядка точности:

$$Q_{n+1} = Q_n + \tau\Re(t_n + \frac{\tau}{2}, Q_n + \Re(t_n, Q_n)\frac{\tau}{2}), \quad n = 0,1,2,3,...$$

Метод *Эйлера* 3-го порядка точности:

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{\tau}{2}[\Re(t_n, Q_n) + \Re(t_{n+1}, Q_n + \Re(t_n, Q_n)\tau)], n = 0,1,2,3,...$$

Вопросы

1. Для системы (6) написать методы *Эйлера* 2-го и 3-го порядков точности.
2. Используя другой метод *Рунге-Кутта* тоже 4-го порядка точности:

$$\frac{dQ}{dt} = \Re(t,Q), Q\Big|_{t=t_0} = Q_0,$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{8}(s_1 + 3s_2 + 3s_3 + s_4),$$

$$s_1 = \tau\Re(t_n, Q_n),\ s_2 = \tau\Re(t_n + \frac{\tau}{3}, Q_n + \frac{s_1}{3}), \qquad (10)$$

$$s_3 = \tau\Re(t_n + \frac{2\tau}{3}, Q_n - \frac{s_1}{3} + s_2),$$

$$s_4 = \tau\Re(t_n + \tau, Q_n + s_1 - s_2 + s_3),$$

$$n = 0,1,2,3,...$$

написать для численного решения системы (6) алгоритм, подобный (10).

3. Какой порядок погрешности имеют методы *Рунге-Кутта*?
4. Какой порядок погрешности имеют методы *Эйлера*?
5. Применить методы *Рунге-Кутта* для системы

$$y'' = 2,3y'^2 - e^{-x^3} + yz', z'' = \sin z' + 34\cos z^4 y',$$

$$при x = x_0, y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0, y'(x_0) = y'_0, z'(x_0) = z'_0.$$

Глава 4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

4.1. Уравнения динамики вязкой жидкости

В уравнениях *Навье* параболическому (более точно-квазипараболическому) типу принадлежат уравнения, вытекающие из закона об изменении импульса [1]:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial p}{\partial x}=\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})+\rho F_x,$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial p}{\partial y}=\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})+\rho F_y,\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

задаются начальные условия при $t=0$:

$$u(x,y,0)=d_u(x,y), v(x,y,0)=d_v(x,y),$$

и краевые условия на S:

$$u(x,y,t)\big|_S=\varphi_u(x,y,t), v(x,y,t)\big|_S=\varphi_v(x,y,t);$$

в трехмерных течениях [2]

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial x}=\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})+\rho F_x,$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial y}=\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})+\rho F_y,$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial z}=\mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})+\rho F_z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \rho=const>0, \mu=const>0,$$

начальные условия при $t=0$:

$$u(x,y,z,0)=d_u(x,y,z),\quad v(x,y,z,0)=d_v(x,y,z), w(x,y,z,0)=d_w(x,y,z),$$

краевые условия на S:

$$u(x,y,z,t)\big|_S=\varphi_u(x,y,z,t),\quad v(x,y,z,t)\big|_S=\varphi_v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)\big|_S=\varphi_w(x,y,z,t),$$

здесь $\vec{v}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$ - вектор скорости. Для переменных коэффициента вязкости μ и плотности ρ скорректированные уравнения динамики вязкого газа, обоснованные *Джакуповым К.Б.* в монографиях [3], [17] являются квазипараболическими:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial x}=div(\mu gradu)+\rho F_x,$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial y}=div(\mu gradv)+\rho F_y,$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})+\frac{\partial p}{\partial z}=div(\mu gradw)+\rho F_z,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0,\quad p=\rho RT,$$

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z})==\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})-pdiv\vec{v}+$$

$$+\mu[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial z})^2+(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2]$$

В данных уравнениях из-за невозможности определения второй вязкости μ' в [28] доказано равенство $\mu'=\frac{1}{3}\mu$, что значительно упрощает уравнения.

Задаются начальные условия при *t=0*:

$$\rho(x,y,z,0)=d_\rho(x,y,z),T(x,y,z,0)=d_T(x,y,z),u(x,y,z,0)=d_u(x,y,z),$$

$$v(x,y,z,0)=d_v(x,y,z),w(x,y,z,0)=d_w(x,y,z),$$

краевые условия *Дирихле* на *S:*

$$u(x,y,z,t)\big|_S=\varphi_u(x,y,z,t),\quad v(x,y,z,t)\big|_S=\varphi_v(x,y,z,t),w(x,y,z,t)\big|_S=\varphi_w(x,y,z,t),$$

$T(x,y,z,t)\big|_S=\varphi(x,y,z,t)$;

или краевые условия *Неймана* на *S:* $\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n}\big|_S=\varphi(x,y,z,t)$ - задается поток тепла.

4.2. Уравнения *Гельмгольца* для вихря скорости и функции тока

Получаются исключением давления из уравнений *Навье*

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}),\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\omega$$

Для них ставятся: начальное условие при *t=0* $\omega(x,y,0)=d_\omega(x,y)$ и краевые условия на *S:*

$$\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y}\big|_S=\varphi_u(x,y,t),\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}\big|_S=-\varphi_v(x,y,t)$$

В системе *Гельмгольца* уравнение для вихря скорости ω параболического типа**,** а уравнение для функция тока ψ эллиптического.

Пусть $\vec{n}=n_x\vec{i}+n_y\vec{j}$ - орт внешней нормали к границе *S*. Тогда имеют место соотношения

$$n_x=\frac{\partial x}{\partial n}=\cos(\vec{n};\vec{i}),n_y=\frac{\partial y}{\partial n}=\cos(\vec{n};\vec{j}),$$

на основании чего задается нормальная производная от ψ:

$$\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial n}\big|_S=\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}\Big|_S\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y}\big|_S\frac{\partial y}{\partial n}=$$

$$=\varphi_u(x,y,t)n_y-\varphi_v(x,y,t)n_x=\varphi_u(x,y,t)\cos(\vec{n};\vec{j})-\varphi_v(x,y,t)\cos(\vec{n};\vec{i})$$

Пусть $\vec{s}=s_x\vec{i}+s_y\vec{j}$ - орт касательной к границе *S*. Аналогично выводятся соотношения

$$s_x=\frac{\partial x}{\partial s}=\cos(\vec{s};\vec{i}),s_y=\frac{\partial y}{\partial s}=\cos(\vec{s};\vec{j}),$$

на основании чего задается касательная производная от ψ:

$$\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial s}\Big|_S=\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}\Big|_S\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y}\Big|_S\frac{\partial y}{\partial s}=$$

$$=\varphi_u(x,y,t)s_y-\varphi_v(x,y,t)s_x=\varphi_u(x,y,t)\cos(\vec{s};\vec{j})-\varphi_v(x,y,t)\cos(\vec{s};\vec{i})$$

Это выражение интегрируется вдоль дуги границы от некоторой заданной точки S_0 до произвольной точки S:

$$\int_{S_0}^{S}\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial s}ds=\int_{S_0}^{S}[\varphi_u(x,y,t)\cos(\vec{s};\vec{j})-\varphi_v(x,y,t)\cos(\vec{s};\vec{i})]ds$$

В результате получается краевое условие типа *Дирихле*:

$$\psi(x,y,t)\big|_S-\psi(x_0,y_0,t)\big|_{S_0}=\int_{S_0}^{S}[\varphi_u(x,y,t)\cos(\vec{s};\vec{j})-\varphi_v(x,y,t)\cos(\vec{s};\vec{i})]ds$$

Здесь (x_0,y_0) координаты точки отсчета S_0. В силу произвола в определении функции тока полагается $\psi(x_0,y_0,t)\big|_{S_0}=0.$

4.3. Уравнения теплопроводности

Параболическими являются уравнения распространения тепла в твердом теле или в неподвижной жидкости (газе) [1]:

одномерное $\rho c\ \frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$,

задаются начальное условие при *t=0*: $T(x,0)=d(x)$,

краевые условия на *S:* $T(0,t)\big|_S=\varphi_1(t), T(a_1,t)\big|_S=\varphi_2(t)$;

двумерное $\rho c\ \frac{\partial T}{\partial t}=\lambda(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2})$,

начальное условие при *t=0*: $T(x,y,0)=d(x,y)$,

краевое условие *Дирихле* на *S:* $T(x,y,t)\big|_S=\varphi(x,y,t)$;

трехмерное $\rho c\ \frac{\partial T}{\partial t}=\lambda(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2})$,

начальное условие при *t=0*: $T(x,y,z,0)=d(x,y,z)$,

краевое условие *Дирихле* на *S:* $T(x,y,z,t)\big|_S=\varphi(x,y,z,t)$; или

краевое условие *Неймана* на *S:* $\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n}\big|_S=\varphi(x,y,z,t)$,

$\lambda>0$ - коэффициент теплопроводности, c>0- коэффициент удельной теплоемкости.

4.4. Уравнения диффузии

Параболическими являются уравнения, описывающие диффузию субстанции C в среде, движущейся со скоростью $\vec{v}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$ [2]:

одномерное $\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}=D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$,

задаются начальное условие при $t=0$: $C(x,0)=d(x)$,
краевые условия на S: $C(0,t)\big|_S=\varphi_1(t), C(a_1,t)\big|_S=\varphi_2(t)$;

двумерное $$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}),$$

начальное условие при $t=0$: $C(x,y,0)=d(x,y)$,
краевое условие *Дирихле* на S: $C(x,y,t)\big|_S=\varphi(x,y,t)$;

трехмерное $$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}),$$

начальное условие при $t=0$: $C(x,y,z,0)=d(x,y,z)$,
краевое условие *Дирихле* на S: $C(x,y,z,t)\big|_S=\varphi(x,y,z,t)$; или
краевое условие *Неймана* на S: $\frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial n}\big|_S=\varphi(x,y,z,t)$,
коэффициент диффузии $D>0$.

4.5. Уравнения распространения тепла в газах

Параболическими являются уравнения распространения тепла в газах, движущихся со скоростями $\vec{v}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$ [3], [17]:

одномерное
$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})-p\frac{\partial u}{\partial x}+\mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2,$$

задаются начальное условие при $t=0$: $T(x,0)=d(x)$,
краевые условия на S: $T(0,t)\big|_S=\varphi_1(t), T(a_1,t)\big|_S=\varphi_2(t)$;

двумерное

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y})==\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y})-pdiv\vec{v}+$$
$$+\mu[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2],$$

начальное условие при $t=0$: $T(x,y,0)=d(x,y)$,
краевое условие *Дирихле* на S: $T(x,y,t)\big|_S=\varphi(x,y,t)$;

трехмерное

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z})==\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})-pdiv\vec{v}+$$
$$+\mu[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial z})^2+(\frac{\partial w}{\partial x})^2+(\frac{\partial w}{\partial y})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2]$$

начальное условие при $t=0$: $T(x,y,z,0)=d(x,y,z)$,

краевое условие *Дирихле* на S: $T(x,y,z,t)\big|_S = \varphi(x,y,z,t)$;

или краевое условие *Неймана* на S: $\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n}\big|_S = \varphi(x,y,z,t)$.

4.6. Уравнения *Бюргерса*

В монографии [4] разностные схемы приводятся для уравнений, названных уравнениями *Бюргерса:*

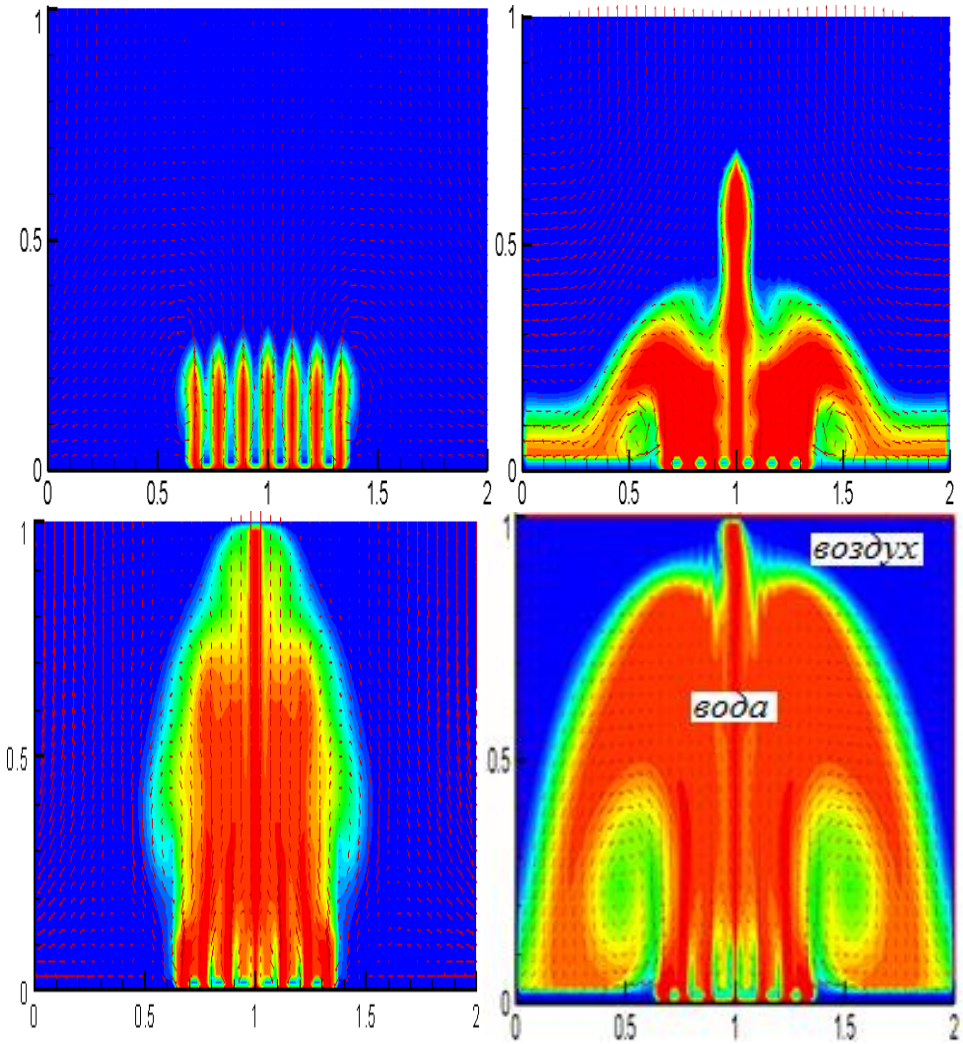
$$\frac{\partial \Re}{\partial t} + u\frac{\partial \Re}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 \Re}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ставятся начальное условие при $t=0$: $u(x,0) = d(x)$,

и краевые условия на S: $u(0,t)\big|_S = \varphi_1(t), u(a_1,t)\big|_S = \varphi_2(t)$.

Вопросы

1. Написать уравнения *Навье* для несжимаемой жидкости.
2. Написать уравнения *Гельмгольца.*
3. Написать уравнения распространения тепла в твердых телах.
4. Написать уравнения распространения тепла в газах.
5. Написать уравнения диффузии.



Развитие во времени шестиструйного фонтана воды в воздухе

Глава 5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

5.1. Постановка задачи

Рассматривается задача *Коши-Дирихле* для одномерного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + f(x,t), a^2 = const,$$
$$\Phi\Big|_{t=t_0} = d(x),\ \Phi\Big|_{x=0} = \varphi(0,t), \Phi\Big|_{x=a_1} = \varphi(a_1,t) \qquad (1)$$

5.2. Семейство явных схем

Частные производные в дифференциальном уравнении заменяются на приведенные в **главе 2** конечно-разностные соотношения. Исключение погрешностей аппроксимаций дает соответствующие разностные схемы.

Индексная запись явных схем имеет вид:

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n[\alpha \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}}] == a^2(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}} + f_i^n, \alpha + \beta = 1,$$
$$i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1, \qquad (2)$$
$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1,..., N_x - 1,\ \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0,1,2,..., N_\tau$$

Безындексная запись через разностные производные:

$$\Phi_t^n + u^n[\alpha \Phi_{\bar{x}}^n + \beta \Phi_x^n] = a^2 \Phi_{x\dot{x}}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$
$$\Phi^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (3)$$

Запись через разностные операторы:

$$\frac{E\Phi^{n+1} - E\Phi^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n[\alpha \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}}] == a^2(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}} + Ef^n, \alpha + \beta = 1, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$
$$\Phi^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau, \qquad (4)$$

где $\hbar_{xi} = 0.5(h_{xi+1} + h_{xi})$, параметры $\alpha = const, \beta = 1 - \alpha$ задаются из соображений точности и устойчивости схемы.

Аппроксимация. Вводится сеточная функция- *погрешность схемы*

$$Z^n(x) = \Phi^n(x) - \overline{\Phi}^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (5)$$

Здесь $\overline{\Phi}^n(x) = \overline{\Phi}(x,t_n)$, $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(x,t)$ точное решение задачи (1), обладающее необходимым числом непрерывных производных, входящих в ряды *Тейлора*. Считаются заранее заданными следующие функции

$$u = u(x,t),\ f = f(x,t), d = d(x), \varphi = \varphi(x,t)$$

Из (5) следует

$$\Phi^n(x) = Z^n(x) + \overline{\Phi}^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau, \qquad (6)$$

иначе $\Phi^n = Z^n + \overline{\Phi}^n, x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$, и подставляется в схему (3).

В результате получается аналогичная исходной разностная задача

$$Z_t^n + \overline{\Phi}_t^n + u^n[\alpha Z_{\bar{x}}^n + \beta Z_x^n] + u^n[\alpha\overline{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta\overline{\Phi}_x^n] = a^2 Z_{x\dot{x}}^n + a^2\overline{\Phi}_{x\dot{x}}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$Z^0 + \overline{\Phi}^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, Z^n\Big|_{S_h} + \overline{\Phi}^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (7)$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\psi^n(x) = a^2\overline{\Phi}_{x\dot{x}}^n - \overline{\Phi}_t^n - u^n[\alpha\overline{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta\overline{\Phi}_x^n] + f^n = \qquad (8)$$

$$= O(\tau_{n+1}) + O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2\hbar_{xi}^2), x \in \Omega_h, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$

Таким образом здесь введены два понятия теории разностных схем: первое - *погрешность схемы* $Z^n = Z(x, t_n)$**,** второе – *погрешность аппроксимации* $\psi^n = \psi(x, t_n)$. Точное решение удовлетворяет начальному и краевым условиям

$$\overline{\Phi}^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, \overline{\Phi}^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (9)$$

Поэтому для *погрешности схемы* из (7) вытекает задача

$$Z_t^n + u^n[\alpha Z_{\bar{x}}^n + \beta Z_x^n] = a^2 Z_{x\dot{x}}^n + \psi^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$Z^0 = 0, x \in \Omega_h, Z^n\Big|_{S_h} = 0, x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (10)$$

Укажем на прямое подобие систем (10) и (3). Это сходство вытекает из линейности исходной системы (1). В будущем, используя данное сходство, для погрешности схемы будет сразу же написана разностная задача типа (10).

Сходимость. Обусловливаются*, что схема является сходящейся, если при бесконечном сгущении узлов сеток, т.е. при стремлении шагов сетки к нулю, пределом решения разностной задачи является точное решение исходной дифференциальной задачи:*

$$\lim_{\tau\to 0, h\to 0} \Phi_i^n = \overline{\Phi}(x_i, t_n), \forall i, \forall n, \quad \tau = \max_n \tau_n, \quad h = \max_i h_{xi}$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{\tau\to 0, h\to 0} (\Phi_i^n - \overline{\Phi}(x_i, t_n)) = 0,$$

следовательно, согласно (5) *погрешность схемы* должна стремиться к нулю

$$\lim_{\tau\to 0, h\to 0} Z_i^n = 0 \forall i, \forall n, \quad \tau = \max_n \tau_n, \quad h = \max_i h_{xi} \qquad (11)$$

При доказательстве сходимости для любой схемы нужно показать выполнение предела (11).

Определение. *Разностная схема является сходящейся, если для нормы погрешности схемы имеет место оценка*

$$\| Z^{k+1} \| \le M_0 \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \psi^n \|, k = 01, ..., N_\tau - 1, \qquad (12)$$

где $M_0 > 0$ *- константа, не зависящая от сеток.*

Если для выполнения неравенств (12), требуются какие-либо условия, то схема называется *условно сходящейся,* если же (12)

выполняется без условий на шаги сетки, то схема объявляется *абсолютно сходящейся*.

Для доказательства *сходимости* явной схемы, предварительно группируются члены уравнения (10), записанного в индексном виде.

Получается следующее выражение:

$$Z_i^{n+1} = [1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]Z_i^n +$$

$$+\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})Z_{i-1}^n + \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})Z_{i+1}^n + \tau_{n+1}\psi_i^n, \quad (13)$$

$$\alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1,$$

$$Z_i^0 = 0, i=1,...,N_x-1, Z_0^n = 0, Z_{N_x}^n = 0, n=0,1,...,N_\tau \quad (14)$$

Теорема-1 (теорема о сходимости). *Явные схемы (2) сходятся со скоростью* $O(\tau_{n+1}) + O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi})) + O(a^2\hbar_{xi}^2)$ *при выполнении следующих условий:*

A) $[1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})] \ge 0,$

B) $\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \ge 0,$ C) $\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \ge 0; i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1$

Доказательство. Берется по модулю от обеих частей (13) и применяются правила оценок модулей

$$|Z_i^{n+1}| = |[1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]Z_i^n +$$

$$+\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})Z_{i-1}^n + \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})Z_{i+1}^n + \tau_{n+1}\psi_i^n| \le$$

$$\le |[1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]| \cdot |Z_i^n| +$$

$$+|\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})| \cdot |Z_{i-1}^n| + |\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})| \cdot |Z_{i+1}^n| + |\tau_{n+1}\psi_i^n|, \quad (15)$$

$$\alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1$$

При выполнении условий A), B), C) теоремы 1 и т.к. $\tau_{n+1} > 0$ в (15) знаки модули заменяются на круглые скобки, вследствие чего совершается переход к неравенствам

$$|Z_i^{n+1}| \le [1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})] \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_i^n| + \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}}) \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i-1}^n| +$$

$$+\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}) \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i+1}^n| + \tau_{n+1}\max_{1\le i\le N_x-1}|\psi_i^n|, \alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1 \quad (16)$$

В силу нулевых краевых условий (14) выполняются следующие неравенства

$$\max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i-1}^n| \le \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_i^n|, \quad \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i+1}^n| \le \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_i^n|, \forall n \quad (17)$$

На их основании из (16) вытекает неравенство

$$|Z_i^{n+1}| \le [1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})] \max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^n| +$$
$$+\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}}) \max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^n| + \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}) \max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^n| + \quad (18)$$
$$+\tau_{n+1} \max_{1\le i\le N_x-1} |\psi_i^n|, \alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1$$

После сокращений получается

$$|Z_i^{n+1}| \le \max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^n| + \tau_{n+1} \max_{1\le i\le N_x-1} |\psi_i^n|, \alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1 \quad (19)$$

Неравенства (19) имеют место для всех внутренних узлов сетки, в том числе в узлах, в которых достигается максимум модуля

$$\max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^{n+1}| \le \max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^n| + \tau_{n+1} \max_{1\le i\le N_x-1} |\psi_i^n|, n=0,1,2,...,N_\tau-1 \quad (20)$$

В теории разностных схем вводится понятие *С-нормы* или максимум нормы сеточной функции:

$$\| Z^n \| = \max_{1\le i\le N_x-1} |Z_i^n| \quad (21)$$

Норма любой сеточной функции обладает следующими свойствами:

1) $\| Z^n \| \ge 0, если Z^n = 0, то \| Z^n \| = 0,$

2) $\| cZ^n \| = |c| \| Z^n \|,$

3) $\| Z^n + U^n \| \le \| Z^n \| + \| U^n \|$

Поэтому (20) записывается экономно в нормах

$$\| Z^{n+1} \| \le \| Z^n \| + \tau_{n+1} \| \psi^n \|, n=0,1,...,N_\tau-1 \quad (22)$$

Сложение неравенств (22) дает

$$\sum_{n=0}^{k} \| Z^{n+1} \| \le \sum_{n=0}^{k} \| Z^n \| + \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \psi^n \|, k=0,1,...,N_\tau-1$$

После сокращений получается

$$\| Z^{k+1} \| \le \| Z^0 \| + \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \psi^n \|, k=0,1,...,N_\tau-1 \quad (23)$$

Начальное условие (14) дает $\| Z^0 \| = 0$, в силу чего

$$\| Z^{k+1} \| \le \| Z^0 \| + \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \psi^n \| = \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \psi^n \|, k=0,1,...,N_\tau-1$$

Далее следует цепочка неравенств

$$\| Z^{k+1} \| \le \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \psi^n \| \le \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \max_{0\le n\le k} \| \psi^n \| \le \max_{0\le n\le k} \| \psi^n \| \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1}$$

На основании очевидной оценки

$$\sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \le \bar{t} \quad (24)$$

вытекают неравенства

$$\| Z^{k+1} \| \le \bar{t} \max_{0\le n\le N_\tau-1} \| \psi^n \|, k=0,1,...,N_\tau-1, \quad (25)$$

где пределом погрешности аппроксимации является нуль

$$\| \psi^n \| = O(\tau_{n+1}) + \max_{1\le i\le N_x-1} [O(\beta h_{xi+1} - \alpha h_{xi}) + O(\hbar_{xi}^2) + O(a^2(h_{xi+1} - h_{xi})) + O(a^2\hbar_{xi}^2)] \to 0, \tau \to 0, \mathrm{h} \to 0$$

Поэтому *погрешность схемы* стремится к нулю

$$\| Z^{k+1} \| = \| \Phi^{k+1} - \overline{\Phi}^{k+1} \| \to 0, \Phi^{k+1} \to \overline{\Phi}^{k+1}$$

Теорема доказана.

Для доказательства данной теоремы потребовалось выполнение условий A), B), C), следовательно, явные схемы (2) являются *условно сходящимися* по определению.

Устойчивость. В процессе вычислений вкрадываются числовые погрешности, связанные с неточным заданием входных данных задачи, с округлением, с разрядностью представления числа в процессоре и т.д. При длительных вычислениях эти погрешности могут возрасти и исказить получаемое решение, если не предпринять специальных мер. Если указанные погрешности не портят решение, остаются при счете в указанных пределах, схема объявляется **устойчивой, в ином случае, когда погрешности могут бесконечно возрасти, неустойчивой.** Будем считать**,** что числовые погрешности $\varepsilon = \varepsilon(x)$ имеются при задании начального условия d, а погрешности $\delta = \delta(x,t)$ имеются в свободном члене f. Следовательно, на самом деле разностная задача содержит указанные включения и имеет вид

$$\hat{\Phi}_t^n + u^n[\alpha\hat{\Phi}_{\bar{x}}^n + \beta\hat{\Phi}_x^n] = a^2\hat{\Phi}_{x\dot{x}}^n + f^n + \delta^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$
$$\hat{\Phi}^0 = d\ (x) + \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{\Phi}^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (26)$$

Сеточная функция

$$\hat{Z}^n(x) = \hat{\Phi}^n(x) - \Phi^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau, \qquad (27)$$

где $\Phi^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$ есть точное решение исходной задачи (2), а $\hat{\Phi}^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$ - точное решение задачи (26), называется *возмущением* решения. Из (27) определяется

$$\hat{\Phi}^n(x) = \hat{Z}^n(x) + \Phi^n(x), x \in \overline{\Omega}_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (28)$$

и подставляется в (26)

$$\hat{Z}^0 + \Phi^0 = d\ (x) + \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{Z}^n\Big|_{S_h} + \Phi^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (29)$$

В силу соотношений (3) из (29) вытекают

$$\hat{Z}_t^n + u^n[\alpha\hat{Z}_{\bar{x}}^n + \beta\hat{Z}_x^n] = a^2\hat{Z}_{x\dot{x}}^n + \delta^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$
$$\hat{Z}^0 = \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{Z}^n\Big|_{S_h} = 0, x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (30)$$

Отметим подобие разностной задачи (30) для *возмущения* с разностной задачей (10) для *погрешности схемы*. Индексная запись (30) совершенно аналогична (13)-(14)

$$\hat{Z}_i^{n+1} = [1 - \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]\hat{Z}_i^n +$$
$$+ \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})\hat{Z}_{i-1}^n + \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})\hat{Z}_{i+1}^n + \tau_{n+1}\delta_i^n,$$
$$\alpha + \beta = 1, i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1, \qquad (31)$$
$$\hat{Z}_i^0 = \varepsilon_i, i = 1,..., N_x - 1, \hat{Z}_0^n = 0, \hat{Z}_{N_x}^n = 0, n = 0,1,..., N_\tau$$

Определение. *Разностная схема устойчива по начальному данному d и свободному члену f, если для нормы возмущения имеет место оценка*

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \le M_1 \| \varepsilon \| + M_2 \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \delta^n \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1 \qquad (32)$$

Здесь $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ - не зависящие от сеток константы.

Если для получения неравенств (32) требуются какие-либо условия, схема объявляется *условно устойчивой*, если не потребуются – *абсолютно или безусловно устойчивой*.

Теорема-2 **(теорема об устойчивости).** *Явные схемы (3) будут устойчивыми при выполнении следующих условий*:

A) $[1 - \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})] \ge 0,$

B) $\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \ge 0,$ C) $\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \ge 0; i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1$

Доказательство. При выполнении условий теоремы-2 над (31) совершаются действия, аналогичные (15)-(23). В результате получаются неравенства

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \le \| \hat{Z}^0 \| + \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \delta^n \| = \| \varepsilon \| \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \delta^n \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1$$

Используя (24), находим нужное неравенство

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \le \| \varepsilon \| + \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \delta^n \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1 \qquad (33)$$

Сравнение с определением (33) дает $M_1 = 1, M_2 = \bar{t}$. *Ч.т.д.*

Замечание. Нормы, стоящие в определениях сходимости и устойчивости, являются *С-нормами или «максимум нормами»*. Однако, указанные определения имеют место и в других сеточных нормах. Например, в [3] и [6] используется так называемая энергетическая норма типа $\| \Psi^n \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x - 1} \hbar_i (\Psi_i^n)^2}$.

Алгоритм решения. Из схемы (2) явным счетом вычисляются

$$\Phi_i^{n+1} = [1 - \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]\Phi_i^n +$$

$$+ \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})\Phi_{i-1}^n + \tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})\Phi_{i+1}^n + \tau_{n+1} f_i^n,$$

$$\alpha + \beta = 1, i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1,$$

$$\Phi_i^0 = 0, i = 1,..., N_x - 1, \Phi_0^n = 0, \Phi_{N_x}^n = 0, n = 0,1,..., N_\tau$$

5.3. Теорема эквивалентности *Лакса-Рихтмайера*

Как видно из теорем 1 и 2 условия сходимости и устойчивости одни и те же. Кроме этого имеет место очевидное сходство между оценками (25) и (33). На основании этого сформулирована:

Теорема эквивалентности *Лакса-Рихтмайера***.** *Из аппроксимации и устойчивости схемы вытекает ее сходимость.*

Доказательство. Аппроксимация схемы характеризуется погрешностью $\psi^n = \psi(x, t_n)$. Из устойчивости схемы следует оценка типа (33). Например, в сходном с (33) неравенстве производим очевидную замену $\hat{Z}^{k+1} \to Z^{k+1}, \delta^n \to \psi^n, \varepsilon \to Z^0 = 0$, тем самым устанавливаем неравенства типа (25)

$$\| Z^{k+1} \| \le \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \psi^n \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1,$$

откуда вытекает сходимость схемы.

Замечание. Теорема *Лакса-Рихтмайера* справедлива только для линейных уравнений типа вышеприведенных. Для нелинейных уравнений данная теорема используется как приближение.

5.4. Явная схема уравнения теплопроводности

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности твердого тела или неподвижного газа $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Для этого уравнения явная схема есть $\rho c T_t^n = \lambda T_{x\dot{x}}^n$.

Сопоставляя с вышеизложенным $\Phi = T, a^2 = \lambda / \rho c,\ u = 0,$

$f = 0$, воспользуемся результатами теорем 1 и 2. Тогда условия сходимости и устойчивости примут вид:

A) $[1 - \tau_{n+1}(\dfrac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \dfrac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}})] \ge 0,$ B) $\dfrac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} \ge 0,$

C) $\dfrac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} \ge 0;$ $i = 1,..., N_x - 1,$ $n = 0,1,2,..., N_\tau - 1$

В условиях B), C) нет необходимости, они выполняются всегда, а из условия A) вытекает ограничение на шаг по времени

$$\tau_{n+1} \le \frac{1}{a^2(\dfrac{1}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \dfrac{1}{h_{xi}\hbar_{xi}})}, i = 1,..., N_x - 1, \qquad (34)$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ условие (34) имеет вид

$$\tau_{n+1} \le \frac{h_x^2}{2a^2} \qquad (35)$$

5.5. Явные схемы одномерного уравнения диффузии

В одномерном течении в направлении x со скоростью u диффузия в газе или жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Сопоставление дает $\Phi = C, a^2 = D, f = 0$. Теоремы 1 и 2 содержат следующие условия сходимости и устойчивости явных схем для уравнения диффузии с конвективным переносом

A) $[1-\tau_{n+1}(\frac{D}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{D}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})] \geq 0,$

B) $\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0,$ C) $\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0; \quad i = 1,..., N_x - 1,\ n = 0,1,2,..., N_\tau - 1$

Здесь выполнение двух последних условий B),C) просто необходимо, иначе при их невыполнении получается неправильное пилообразное решение. Условия B), C) ставят ограничения сверху на пространственные шаги сетки:

$$\hbar_{xi} \leq \frac{D}{\beta u_i^n}, \hbar_{xi} \leq \frac{D}{-\alpha u_i^n}, i = 1,..., N_x - 1,\ n = 0,1,2,..., N_\tau - 1 \qquad (36)$$

Условие A) ограничивает сверху шаг по времени

$$\tau_{n+1} \leq (\frac{D}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{D}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})^{-1} i = 1,..., N_x - 1,\ \ n = 0,1,2,..., N_\tau - 1 \qquad (37)$$

5.6. Схема с центральной разностью для конвективного члена уравнения *Бюргерса*

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ для уравнения *Бюргерса*

$$\frac{\partial \Re}{\partial t} + u\frac{\partial \Re}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \Re}{\partial x^2}$$

схема с центральной разностью имеет вид

$$\frac{\Re_i^{n+1} - \Re_i^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n[\frac{\Re_{i+1}^n - \Re_{i-1}^n}{2h_x}] = \nu(\frac{\Re_{i+1}^n - 2\Re_i^n + \Re_{i-1}^n}{h_x{}^2}),\ \Re_i^0 = d_i, i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1,$$

$$\Re_0^n = \varphi_0^n, \quad \Re_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, \quad n = 0,1,2,..., N_\tau$$

Здесь $\frac{\Re_{i+1}^n - \Re_{i-1}^n}{2h_x} = \frac{1}{2}\frac{\Re_i^n - \Re_{i-1}^n}{h_x} + \frac{1}{2}\frac{\Re_{i+1}^n - \Re_i^n}{h_x}$, иначе, коэффициенты равны $\alpha = 0{,}5, \beta = 0{,}5,$ поэтому условия сходимости и устойчивости вытекают из теорем 1 и 2 в виде

A) $1 - \frac{2\nu\tau_{n+1}}{h_x^2} \geq 0,$ B) $\frac{\nu}{h_x} - \frac{u_i^n}{2} \geq 0,$ C) $\frac{\nu}{h_x} + \frac{u_i^n}{2} \geq 0; i = 1,..., N_x - 1,$

вследствие чего на шаги сеток возникают ограничения сверху

$$\tau_{n+1} \leq \frac{h_x^2}{2a^2},\ h_x \leq \frac{2\nu}{|u_i^n|} i = 1,..., N_x - 1$$

Из последнего неравенства вытекает, что для устойчивости и сходимости «сеточное число *Рейнольдса*» не должно превосходить двух:

$$\mathrm{Re}_h = \frac{|u_i^n|h_x}{\nu} \le 2, i = 1,..., N_x - 1$$

Если «сеточное число *Рейнольдса*» больше 2 $\mathrm{Re}_h = \frac{|u_i^n|h_x}{\nu} > 2, i = 1,..., N_x - 1$, схема становится немонотонной и получается неверное (пилообразное) решение.

5.7. Явная схема с «аппроксимационной вязкостью»

Схема считается *оптимальной*, если число условий сходимости и устойчивости минимально. Нетрудно вычислить, что условия B),C) не дадут ограничений на пространственные шаги сетки, т.е. выполняются безусловно и в них нет надобности, если параметры α и β положить равными

$$\alpha = \frac{1 + sign(u_i^n)}{2}, \beta = \frac{1 - sign(u_i^n)}{2}$$

или в эквивалентной записи

$$\alpha = \frac{1 + |u_i^n|/u_i^n}{2}, \beta = \frac{1 - |u_i^n|/u_i^n}{2}$$

После подстановки в схему получаются выражения

$$\alpha u_i^n = \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}, \beta u_i^n = \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \qquad (38)$$

Т.о. оптимальная явная схема 1-го порядка точности одномерного уравнения параболического типа запишется в виде

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau_{n+1}} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}\frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2}\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} =$$

$$= a^2\left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}} + f_i^n, \ i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1, \qquad (39)$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1,..., N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0,1,2,..., N_\tau$$

Безындексная запись в разностных производных:

$$\Phi_t^n + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}\Phi_{\bar{x}}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2}\Phi_x^n = a^2\Phi_{x\dot{x}}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$\Phi^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), \quad x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (40)$$

Запись через разностные операторы:

$$\frac{E\Phi^{n+1} - E\Phi^n}{\tau_{n+1}} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}\frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2}\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} =$$

$$= a^2\left(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}} + Ef^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$\Phi^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h} = \varphi^n(x), \quad x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (41)$$

Из условий сходимости и устойчивости A), B), C) остается только условие A):

$$1-\tau_{n+1}(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2h_{xi+1}}+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2h_{xi}})\geq 0, i=1,...,N_x-1,$$

потому что условия B), C) положительны всегда

B) $\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2h_{xi+1}}>0$, C) $\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2h_{xi}}>0; i=1,...,N_x-1,$

иначе говоря, на пространственные шаги сетки $\hbar_{xi}=(h_{xi+1}+h_{xi})/2$ нет ограничений сверху. Однако (39) обладает «схемной вязкостью» и имеет 1-й порядок точности. В оптимальной схеме (39) для конвективных членов использована аппроксимация *Булеева-Петрищева*.

5.8. Явная 2-го порядка точности схема без «аппроксимационной вязкости»

Построенная в **5.5 главы 2** без *«схемной вязкости»* аппроксимация *Джакупова К.Б.* записывается с использованием дискретной функции сигнатуры

$$u_i^n(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^n=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{\Phi_i^n-\Phi_{i-1}^n}{h_{xi}}+\frac{h_{xi}}{2}[(\frac{\Phi_i^n-\Phi_{i-1}^n}{h_{xi}}-\frac{\Phi_{i-1}^n-\Phi_{i-2}^n}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}+$$
$$+(\frac{\Phi_{i+2}^n-\Phi_{i+1}^n}{h_{xi+2}}-\frac{\Phi_{i+1}^n-\Phi_i^n}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}]\}+$$
$$+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\{\frac{\Phi_{i+1}^n-\Phi_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{h_{xi+1}}{2}[(\frac{\Phi_{i+2}^n-\Phi_{i+1}^n}{h_{xi+2}}-\frac{\Phi_{i+1}^n-\Phi_i^n}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+$$
$$+(\frac{\Phi_i^n-\Phi_{i-1}^n}{h_{xi}}-\frac{\Phi_{i-1}^n-\Phi_{i-2}^n}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}]\}+O(\hbar_{xi}^2)\equiv\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^n+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\Phi_{x^0}^n+O(\hbar_{xi}^2)$$

На основании (42) построена явная схема 2-го порядка точности с разностными конвективными членами, не содержащими *«аппроксимационной вязкости»:*

$$\Phi_t^n+\frac{u^n+|u^n|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^n+\frac{u^n-|u^n|}{2}\Phi_{x^0}^n=a^2\Phi_{x\dot{x}}^n+f^n, x\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0},$$
$$\Phi^0=d\ (x), x\in\Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x), x\in S_h, t\in\overline{\Omega}_\tau \qquad (43)$$

Условия сходимости и устойчивости явной схемы (43) накладывают ограничения на шаги по времени в следующем виде

$$1-\tau_{n+1}[\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2h_{xi+1}}\{1+\frac{h_{xi+1}}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+\frac{h_{xi+1}^2}{h_{xi}}\frac{1}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}\}+$$
$$+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2h_{xi}}\{1+\frac{h_{xi}}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}+ \qquad (44)$$
$$+\frac{h_{xi}^2}{h_{xi+1}}\frac{1}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}\}]\geq 0, i=1,...,N_x-1,\quad n=0,1,2,...,N_\tau-1$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ данные условия упрощаются

$$[1 - \tau_{n+1}(\frac{2a^2}{h_x^2} + \frac{3|u_i^n|}{2h_x})] \geq 0, i = 1,..., N_x - 1, \ n = 0,1,2,..., N_\tau - 1 \qquad (45)$$

Сходимость и устойчивость схемы (43) исследована в [3] методом энергетических неравенств.

Для одномерного уравнения баланса энергий

$$\rho c_v(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}) - p\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2,$$

аппроксимация «без схемной вязкости» имеет вид

$$\rho^n c_v(T_t^n + \frac{u^n + |u^n|}{2}T_{\breve{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2}T_{x^0}^n) =$$

$$= ((T_{+1}\lambda^n + \lambda^n)T_x^n)_{\dot{x}}/2 - p^n u_{\tilde{\breve{x}}}^n + 2/3(u_{\tilde{\breve{x}}}^n)^2, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$

5.9. Некоторые сведения из теории линейных операторов. Исследование устойчивости схем методом оценки нормы операторов перехода

Разностные операторы на самом деле являются квадратными матрицами. Поэтому при исследовании разностных схем широко используется теория линейных операторов (матриц). Пусть $A = \{a_{ik}\}, i = 1,..., N, k = 1,..., N\}$, $B = \{b_{ik}\}, i = 1,..., N, k = 1,..., N\}$ - суть квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{1N} \\ ..... \\ a_{N1}...a_{NN} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}...b_{1N} \\ ..... \\ b_{N1}...b_{NN} \end{pmatrix}$$

Нормы $\| A \|$ этих матриц даются в различных формах. В основном применяются две нормы, подчиненные вышеиспользованной максимум-норме сеточной функции:

$$\| A \|_I = \sup_i \sum_{k=1}^N | a_{ik} | , \quad \| A \|_{II} = \sup_k \sum_{i=1}^N | a_{ik} | \qquad (46)$$

Нормы обладают следующими свойствами

$$\| A \| \geq 0, \| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|, \| \gamma A \| = | \gamma | \| A \|, \| AB \| \leq \| A \| \| B \|$$

Также имеет место важное неравенство

$$\| A\vec{r} \| \leq \| A \| \| \vec{r} \|, \qquad (47)$$

где $\vec{r}$ -вектор:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ . \\ . \\ . \\ r_N \end{pmatrix}$$

Обозначим через R -пространство N-мерных векторов: $\vec{r} \in R$. Подчиненная норма матрицы (оператора) определяется так:

$$\| A \| = \sup_{\substack{\vec{r} \in R \\ \vec{r} \neq 0}} \frac{\| A\vec{r} \|}{\| \vec{r} \|}, \text{ или } \| A \| = \sup_{\|\vec{r}\|=1} \| A\vec{r} \| \qquad (48)$$

Лемма-1. *Если для всех элементов пространства R выполняется неравенство* $\| A\vec{r} \| \le m \| \vec{r} \|$, m=const>0, *имеет место оценка нормы сверху* $\| A \| \le m$.

Доказательство леммы дано в [7], [8]. Например, операторная запись схемы (4) приводится к следующей форме

$$E\Phi^{n+1} = E\Phi^n + \tau_{n+1}\left(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}\right)\Delta_{+1}\Phi^n -$$

$$- \tau_{n+1}\left(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}}\right)\Delta_{-1}\Phi^n + \tau_{n+1}Ef^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \qquad (49)$$

Обозначим коэффициенты при $\Delta_{\pm 1}\Phi^n$

$$c_{+1}^n = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}, \quad c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \qquad (50)$$

К этому же, операторную запись (41) приведем к форме

$$E\Phi^{n+1} = E\Phi^n + \tau_{n+1}\left(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2h_{xi+1}}\right)\Delta_{+1}\Phi^n -$$

$$- \tau_{n+1}\left(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2h_{xi}}\right)\Delta_{-1}\Phi^n + \tau_{n+1}Ef^n \qquad (51)$$

Аналогичные обозначения применим и для оптимальной схемы

$$c_{+1}^n = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| - u_i^n}{2h_{xi+1}}), \quad c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2h_{xi}}$$

В силу всего этого имеем право (49) и (51) записать в единообразном виде

$$E\Phi^{n+1} = E\Phi^n + \tau_{n+1}c_{+1}^n\Delta_{+1}\Phi^n - \tau_{n+1}c_{-1}^n\Delta_{-1}\Phi^n + \tau_{n+1}Ef^n$$

или, после приведения подобных

$$E\Phi^{n+1} = (E + \tau_{n+1}c_{+1}^n\Delta_{+1} - \tau_{n+1}c_{-1}^n\Delta_{-1})\Phi^n + \tau_{n+1}Ef^n \qquad (52)$$

Исходя из (52), оператор (матрица) $(E + \tau_{n+1}c_{+1}^n\Delta_{+1} - \tau_{n+1}c_{-1}^n\Delta_{-1})$ называется оператором перехода со слоя времени с номером n на слой $n+1$. При выполнении условий сходимости и устойчивости B), C) коэффициенты (50) будут неотрицательными

$$c_{+1}^n = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \ge 0, \quad c_{-1}^n = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \ge 0 \qquad (53)$$

и условие A) сходимости и устойчивости примет вид

$$A) 1 - \tau_{n+1}(c_{+1}^n + c_{-1}^n) \ge 0, i = 1,..., N_x - 1, \qquad (54)$$

Вводится пространство H сеточных функций, принимающих в граничных узлах $x \in S_h$ нулевые значения. Например, данному пространству принадлежат, т.е. являются его элементами, *погрешности схемы* $Z^n = Z(x,t_n) \in H, n = 0,1,..., N_\tau$, *возмущения схемы* $\hat{Z}^n = \hat{Z}(x,t_n) \in H$, $n = 0,1,..., N_\tau$ также являются элементами пространства H.

Для любой функции $\Psi \in H$ в силу (53), (54) , т.е. при выполнении условий A),B),C) справедливы следующие неравенства

$$\| (E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1})\Psi \| = \max_i | \Psi_i + \tau_{n+1}c^n_{+1i}\Delta_{+1}\Psi - \tau_{n+1}c^n_{-1i}\Delta_{-1}\Psi | \le$$

$$\le \max_i \{(1-\tau_{n+1}c^n_{+1i}-\tau_{n+1}c^n_{-1i}) | \Psi_i | + \tau_{n+1}c^n_{+1i} | T_{+1}\Psi | + \tau_{n+1}c^n_{-1i} | T_{-1}\Psi |\} \le$$

$$\le \max_i \{(1-\tau_{n+1}c^n_{+1i}-\tau_{n+1}c^n_{-1i}) \| \Psi \| + \tau_{n+1}c^n_{+1i} \| \Psi \| + \tau_{n+1}c^n_{-1i} \| \Psi \|\} = 1^* \| \Psi \|,$$

откуда вытекает

$$\| (E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1})\Psi \| \le 1 \cdot \| \Psi \|$$

По лемме-1 ($m=1$) находим, что норма оператора перехода не превосходит 1:

$$\| E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1} \| \le 1, \quad n=0,1,... \tag{55}$$

В дальнейшем, для компактной записи вводится оператор $\Lambda^n_1 = c^n_{+1}\Delta_{+1} - c^n_{-1}\Delta_{-1}$, тогда (55) примет вид

$$\| E+\tau_{n+1}\Lambda^n_1 \| \le 1, \quad n=0,1,... \tag{55'}$$

и явная схема запишется кратко:

$$\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^n}{\tau_{n+1}} = \Lambda^n_1\Phi^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

$$\Phi^0 = d\ (x), x \in \Omega_h, \Phi^n |_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$$

Покажем применение оценки (55) при исследовании устойчи- вости схемы. С этой целью (30) приводится к виду

$$E\hat{Z}^{n+1} = (E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1})\hat{Z}^n + \tau_{n+1}E\delta^n$$

По свойству единичного оператора $E\hat{Z}^{n+1} = \hat{Z}, E\delta^n = \delta^n$, в силу чего имеет место запись

$$\hat{Z}^{n+1} = (E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1})\hat{Z}^n + \tau_{n+1}\delta^n$$

Беря по норме от обеих частей (30), переходим к неравенствам

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| = \| (E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1})\hat{Z}^n + \tau_{n+1}\delta^n \| \le$$

$$\le \| (E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1})\hat{Z}^n \| + \| \tau_{n+1}\delta^n \| \le$$

$$\le \| E+\tau_{n+1}c^n_{+1}\Delta_{+1}-\tau_{n+1}c^n_{-1}\Delta_{-1} \| \| \hat{Z}^n \| + \tau_{n+1} \| \delta^n \| \tag{56}$$

При выполнении условий A), B), C) выполняется и (55). Следовательно, из (56) получаются неравенства

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| \le \| \hat{Z}^n \| + \tau_{n+1} \| \delta^n \|, n=0,1,..., N_\tau - 1,$$

из которых вытекает доказательство устойчивости

$$\| \hat{Z}^{k+1} \| \le \| \varepsilon \| + \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \delta^n \|, k=0,1,..., N_\tau - 1,$$

что совпадает с (33).

5.10. Неявные схемы

Принцип конструирования неявных схем совершенно аналогичен явным схемам, лишь производная по времени аппроксимируется разностью назад:

Индексная запись неявных схем имеет вид:

$$\frac{\Phi_i^n-\Phi_i^{n-1}}{\tau_n}+u_i^n[\alpha\frac{\Phi_i^n-\Phi_{i-1}^n}{h_{xi}}+\beta\frac{\Phi_{i+1}^n-\Phi_i^n}{h_{xi+1}}]=a^2(\frac{\Phi_{i+1}^n-\Phi_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{\Phi_i^n-\Phi_{i-1}^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+f_i^n,\alpha+\beta=1,$$

$$i=1,...,N_x-1,n=1,2,...,N_\tau,$$

$$\Phi_i^0=d_i,i=1,...,N_x-1,\Phi_0^n=\varphi_0^n,\Phi_{N_x}^n=\varphi_{N_x}^n,n=0,1,2,...,N_\tau, \qquad (57)$$

Безындексная запись через разностные производные:

$$\Phi_{\bar{t}}^n+u^n[\alpha\Phi_{\bar{x}}^n+\beta\Phi_x^n]=a^2\Phi_{x\dot{x}}^n+f^n,x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1},$$

$$\Phi^0=d\ (x),x\in\Omega_h,\Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x),x\in S_h,t\in\overline{\Omega}_\tau \qquad (58)$$

Запись в разностных операторах:

$$\frac{E\Phi^n-E\Phi^{n-1}}{\tau_n}+u_i^n[\alpha\frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}}+\beta\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}}]=$$

$$=a^2(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}}-\frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+Ef^n,\alpha+\beta=1,x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1}, \qquad (59)$$

$$\Phi^0=d\ (x),x\in\Omega_h,\ \Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x),x\in S_h,t\in\overline{\Omega}_\tau$$

Запись с помощью оператора $\Lambda_1^n=c_{+1}^n\Delta_{+1}-c_{-1}^n\Delta_{-1}$:

$$\frac{\Phi^n-\Phi^{n-1}}{\tau_n}=\Lambda_1^n\Phi^n+f^n,x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1},$$

$$\Phi^0=d\ (x),x\in\Omega_h,\Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x),\quad x\in S_h,t\in\overline{\Omega}_\tau$$

Аппроксимация. Вводится *погрешность схемы*

$$Z^n(x)=\Phi^n(x)-\overline{\Phi}^n(x),x\in\overline{\Omega}_h,t\in\overline{\Omega}_\tau,$$

для которой получается разностная аналогичная задача

$$Z_{\bar{t}}^n+u^n[\alpha Z_{\bar{x}}^n+\beta Z_x^n]=a^2Z_{x\dot{x}}^n+\psi^n,x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1},$$

$$Z^0=0,x\in\Omega_h,Z^n\Big|_{S_h}=0,\quad x\in S_h,t\in\overline{\Omega}_\tau \qquad (60)$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\psi^n(x)=a^2\overline{\Phi}_{x\dot{x}}^n-\overline{\Phi}_{\bar{t}}^n-u^n[\alpha\overline{\Phi}_{\bar{x}}^n+\beta\overline{\Phi}_x^n]+f^n=O(\tau_{n+1})+O(\beta h_{xi+1}-\alpha h_{xi})+O(\hbar_{xi}^2)+$$

$$+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(a^2\hbar_{xi}^2),x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1}$$

***Теорема-3* (теорема о сходимости).** *Неявные схемы (57) сходятся со скоростью* $O(\tau_{n+1})+O(\beta h_{xi+1}-\alpha h_{xi})+O(\hbar_{xi}^2)+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(a^2\hbar_{xi}^2)$

при выполнннии следующих условий:

B) $\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}\geq 0$, C) $\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}}\geq 0,i=1,...,N_x-1,\quad n=1,2,...,N_\tau$.

Доказательство. Приведя (60) к индексной записи, произведем соответствующую группировку членов

$$[1+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]Z_i^n = Z_i^{n-1} +$$

$$+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})Z_{i-1}^n+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})Z_{i+1}^n+\tau_n\psi_i^n,$$

$$\alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1, \qquad (61)$$

$$Z_i^0=0, i=1,...,N_x-1, Z_0^n=0, Z_{N_x}^n=0, n=0,1,...,N_\tau$$

Взяв по модулю от обеих частей (61), придем к неравенствам

$$|[1+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]Z_i^n| \le |Z_i^{n-1}| +$$

$$+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})Z_{i-1}^n+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})Z_{i+1}^n+\tau_n\psi_i^n| \le$$

$$\le |Z_i^{n-1}|+|\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})||Z_{i-1}^n|+|\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})||Z_{i+1}^n|+|\tau_n\psi_i^n|,$$

$$\alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1 \qquad (62)$$

При выполнении условий B),C) теоремы и в силу $\tau_{n+1}>0$ знаки модулей в (62) опускаются и совершается переход к неравенствам

$$[1+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]|Z_i^n| \le \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_i^{n-1}| +$$

$$+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})\max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i-1}^n|+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})\max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i+1}^n| +$$

$$+\tau_n\max_{1\le i\le N_x-1}|\psi_i^n|, \alpha+\beta=1, i=1,...,N_x-1, n=0,1,2,...,N_\tau-1 \qquad (63)$$

Нулевые краевые условия (60) приводят к неравенствам

$$\max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i-1}^n| \le \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_i^n| = \|Z^n\|, \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_{i+1}^n| \le \max_{1\le i\le N_x-1}|Z_i^n| = \|Z^n\|, \forall n$$

Неравенства (63) выполняются для всех номеров $i=1,...,N_x-1$, поэтому среди них найдется такой номер $i=i^*$, в котором достигается максимум модуля $|Z_{i^*}^n| = \|Z^n\|$:

$$[1+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})]\|Z^n\| \le \|Z^{n-1}\| +$$

$$+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}})\|Z^n\|+\tau_n(\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}-\frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}})\|Z^n\|+\tau_n\|\psi^n\|, \ i=i^*, n=0,1,2,...,N_\tau-1$$

После сокращений получается

$$\|Z^n\| \le \|Z^{n-1}\|+\tau_n\|\psi^n\|, n=0,1,...,N_\tau-1, \ \ \|Z^k\| \le \bar{t}\max_{1\le n\le N_\tau}\|\psi^n\|, k=1,...,N_\tau,$$

где

$$\|\psi^n\| = O(\tau_{n+1})+\max_{1\le i\le N_x-1}[O(\beta h_{xi+1}-\alpha h_{xi})+O(\hbar_{xi}^2)+$$

$$+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(a^2\hbar_{xi}^2)]\to 0, при\ \tau\to 0, \mathrm{h}\to 0$$

Поэтому погрешность схемы стремится к нулю, откуда вытекает сходимость

$$\|Z^{k+1}\| = \|\Phi^{k+1}-\overline{\Phi}^{k+1}\|\to 0, \Phi^{k+1}\to\overline{\Phi}^{k+1}$$

Теорема доказана.

5.11. Абсолютно устойчивые неявные схемы

В неявных схемах для возмущения получается разностная задача, аналогичная задаче (60):

$$\hat{Z}^n_{\bar{t}} + u^n[\alpha\hat{Z}^n_{\bar{x}} + \beta\hat{Z}^n_{x}] = a^2\hat{Z}^n_{x\dot{x}} + \delta^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$\hat{Z}^0 = \varepsilon(x), x \in \Omega_h, \hat{Z}^n\Big|_{S_h} = 0, \quad x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$$

При выполнении условий B), C) получаются неравенства

$$\| \hat{Z}^k \| \le \| \varepsilon \| + \bar{t} \max_{1 \le n \le N_\tau} \| \delta^n \|, k = 1,..., N_\tau$$

откуда по определению вытекает устойчивость схемы. Для доказательства покажем, что норма оператора перехода не превосходит 1 при выполнении условий B), C).

Лемма-2. *Если для всех элементов пространства R выполняется неравенство* $\| A\vec{r} \| \ge \| \vec{r} \|$, *норма обратной матрицы не превосходит 1:* $\| A^{-1} \| \le 1$.

Доказательство леммы в более общем виде дано в [7], [8].

Запишем уравнение для возмущений в операторном виде

$$(E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})\hat{Z}^n = \hat{Z}^{n-1} + \tau_n\delta^n, \qquad (63а)$$

где оператор перехода равен $(E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})$. При оценке нормы обратного этому оператора, используются нижеследующие неравенства, справедливые для произвольного $\Psi \in H$ при выполнении условий B), C) . Выберем узел с номером $i = i^*$ (таких номеров может быть несколько), в котором достигается максимум модуля $|\Psi_{i^*}|$: $|\Psi_{i^*}| = \max_{1 \le i \le N_x - 1} |\Psi_i| = \| \Psi \|$. Далее следуют: для $\Psi_{i^*} \ge 0$ выполняются неравенства $(\Delta_{+1}\Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*+1} - \Psi_{i^*} \le 0, (\Delta_{-1}\Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*} - \Psi_{i^*-1} \ge 0$, для $\Psi_{i^*} \le 0$ выполняются противоположные неравенства $(\Delta_{+1}\Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*+1} - \Psi_{i^*} \ge 0$, $(\Delta_{-1}\Psi)_{i^*} = \Psi_{i^*} - \Psi_{i^*-1} \le 0$, на основании которых и в силу выполнения по условиям B), C) неотрицательности коэффициентов $c^n_{+1} \ge 0, c^n_{-1} \ge 0$ имеет место неравенство

$$\| (E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})\Psi \| = \max_i |\Psi_i - \tau_n c^n_{+1i}\Delta_{+1}\Psi + \tau_n c^n_{-1i}\Delta_{-1}\Psi| \ge |\Psi_{i^*}| = \max_i |\Psi_i| = 1^* \| \Psi \|,$$

поэтому по лемме-2 норма обратного оператора не превосходит 1

$$\| (E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})^{-1} \| \le 1, \textit{ч.т.д.} \qquad (63б)$$

Подействуем на обе части (63а) обратным оператором

$$(E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})^{-1}(E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})\hat{Z}^n = (E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})^{-1}(\hat{Z}^{n-1} + \tau_n\delta^n)$$

Отсюда вытекает

$$\hat{Z}^n = (E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})^{-1}(\hat{Z}^{n-1} + \tau_n\delta^n), \qquad (63в)$$

потому как $(E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})^{-1}(E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1}) = E$

Беря по норме от обеих частей (63в) , учтем (63б):

$$\| \hat{Z}^n \| = \| (E - \tau_n c^n_{+1}\Delta_{+1} + \tau_n c^n_{-1}\Delta_{-1})^{-1}(\hat{Z}^{n-1} + \tau_n\delta^n) \| \le$$

$$\leq \| (E - \tau_n c_{+1}^n \Delta_{+1} + \tau_n c_{-1}^n \Delta_{-1})^{-1} \| \| (\hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n) \| \leq 1^* \| \hat{Z}^{n-1} + \tau_n \delta^n \| \leq \| \hat{Z}^{n-1} \| + \tau_n \| \delta^n \|,$$

откуда вытекают

$$\| \hat{Z}^n \| \leq \| \hat{Z}^{n-1} \| + \tau_n \| \delta^n \|, n = 1,..., N_\tau$$

и устойчивость неявных схем

$$\| \hat{Z}^k \| \leq \| \varepsilon \| + \bar{t} \max_{1 \leq n \leq N_\tau} \| \delta^n \|, k = 1,..., N_\tau$$

при выполнении условий B),C). *Т.о. доказана* следующая

***Теорема*-4 (теорема об устойчивости).** *Неявные схемы (57) устойчивы при выполнении условий:*

B) $\frac{a^2}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} \geq 0$, C) $\frac{a^2}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}} \geq 0, i = 1,..., N_x - 1, \quad n = 1,2,..., N_\tau$.

Обратим внимание на то, что условия B), C) имели место и в явных ных схемах, в неявных схемах ликвидировано только условие A) на шаги по времени.

В теореме о сходимости (теорема 3) и теореме об устойчивости (теорема-4) условия B), C) для произвольных параметров $\alpha, \beta = 1 - \alpha$ вызывают ограничения на пространственные шаги сетки в виде (36). Нет ограничений на пространственные шаги только для таких параметров, которые удовлетворяют равенства

$$\alpha u_i^n = \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2}, \beta u_i^n = \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2}$$

При этих соотношениях B), C) выполняются безусловно. В результате получается абсолютно устойчивая и абсолютно сходящаяся неявная схема

$$\frac{\Phi_i^n - \Phi_i^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2} \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} =$$

$$= a^2 \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} \right) \frac{2}{h_{xi+1} + h_{xi}} + f_i^n, \; i = 1,..., N_x - 1, n = 1,2,..., N_\tau,$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1,..., N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0,1,2,..., N_\tau,$$

Безындексная запись в разностных производных:

$$\Phi_{\bar{t}}^n + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \Phi_{\bar{x}}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_x^n = a^2 \Phi_{x\dot{x}}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t1},$$

$$\Phi^0 = d \; (x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (64)$$

Но схема (64) обладает **«аппроксимационной вязкостью».** Неявная схема, подобная схемам (43) и (64) и **не имеющая** «***аппроксимационной вязкости***»

$$\frac{\Phi^n - \Phi^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} \Phi_{\bar{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_{x^0}^n = a^2 \Phi_{x\dot{x}}^n + f^n, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{\tau 1},$$

$$\Phi^0 = d \; (x), x \in \Omega_h, \Phi^n \Big|_{S_h} = \varphi^n(x), x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau \qquad (65)$$

безусловно устойчива. Для одномерного уравнения баланса энергий

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

аналогичная неявная схема имеет вид

$$\rho^n c_v\left(\frac{T^n - T^{n-1}}{\tau_n} + \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2} T^n_{\bar{x}^0} + \frac{u^n - |u^n|}{2} T^n_{x^0}\right) = \left((T_{+1}\lambda^n + \lambda^n)T^n_x\right)_{\dot{x}}/2 - p^n u^n_{\tilde{x}} + 2/3(u^n_{\tilde{x}})^2$$

5.12. Монотонные схемы. Алгоритмы реализации

Для вычислений $\Phi_i^n, i = 1,..., N_x - 1$ из неявных разностных уравнений (57) применяется метод трехточечной прогонки [6], [9], [11], для вычислений $\Phi_i^n, i = 1,..., N_x - 1$ из неявных разностных уравнений «без аппроксимационной вязкости» (65) применяется метод пятиточечной прогонки [9], [10]. В методе трехточечной прогонки уравнения (57) приводятся к каноническому виду

$$A_i \Phi^n_{i-1} - B_i^n \Phi_i^n + C_i \Phi^n_{i+1} = D_i, i = 1,2,..., N_x - 1, \qquad (66)$$

решение которых ищется в виде

$$\Phi_i^n = X_i \Phi^n_{i+1} + Y_i, i = N_x - 1, N_x - 2,...,1,0 \qquad (67)$$

Используя (67) в точке $i-1$, $\Phi^n_{i-1} = X_{i-1}\Phi_i^n + Y_{i-1}$ подставляется в (66)

$$A_i(X_{i-1}\Phi_i^n + Y_{i-1}) - B_i^n \Phi_i^n + C_i \Phi^n_{i+1} = D_i,$$

$$\Phi_i^n = \frac{C_i}{B_i - A_i X_{i-1}} \Phi^n_{i+1} + \frac{A_i Y_{i-1} - D_i}{B_i - A_i X_{i-1}} \qquad (68)$$

Левые части (68) и (67) совпадают, поэтому должны быть равны соответствующие коэффициенты в правой части

$$X_i = \frac{C_i}{B_i - A_i X_{i-1}},\ Y_i = \frac{A_i Y_{i-1} - D_i}{B_i - A_i X_{i-1}},\ i = 1,2,..., N_x - 1 \qquad (69)$$

В (67) при i=0 стоит $\Phi_0^n = \varphi_0^n$, поэтому имеет место равенство $\Phi_0^n = X_0 \Phi_1^n + Y_0 = \varphi_0^n$, откуда вытекают начальные значения прогоночных коэффициентов (69) X_0=0, $Y_0 = \varphi_0^n$ и по рекуррентным формулам (69) вычисляются все X_i, Y_i, $i = 1,2,..., N_x - 1$, затем из (67), используя правое краевое условие $\Phi^n_{N_x} = \varphi^n_{N_x}$ находятся все искомые $\Phi_i^n, i = 1,..., N_x - 1$. Счет по формулам прямой прогонки (69) будет устойчивым при выполнении условий [6]:

$$|A_i| + |C_i| \le |B_i| \quad i = 1,2,..., N_x - 1 \qquad (70)$$

В неявных схемах (57) коэффициенты равны

$$A_i = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi}},\quad C_i = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}}, \qquad (71)$$

$$B_i = \frac{1}{\tau_n} + \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}} - \frac{\beta u_i^n}{h_{xi+1}} + \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{\alpha u_i^n}{h_{xi+1}}, D_i = -\frac{1}{\tau_n}\Phi_i^{n-1}$$

Из (71) следует $B_i = \frac{1}{\tau_n} + A_i + C_i$.

Схемы, в которых выполняются условия устойчивости прогонок (70), называются *монотонными схемами*, если данные условия не выполняются, *немонотонными*. Поэтому, вышеисследованные схемы,

удовлетворяющие условиям B), C), являются *монотонными*, схемы, не удовлетворяющие условиям B), C) будут *немонотонными* схемами.

Вычисления по немонотонным схемам приводят к неправильным результатам, потому что такие схемы являются несходящимися.

Для применения метода пятиточечных прогонок схема (65) группируется в следующем виде

$$A_i\Phi^n_{i-2} + B_i\Phi^n_{i-1} + C_i\Phi^n_i + D_i\Phi^n_{i+1} + E_i\Phi^n_{i+2} = F_i, i = 1,2,..., N_x - 1, \qquad (72)$$

где $E_{N_x-1} = 0$, $A_1 = 0$, потому как в схему не входят заграничные значения $\Phi^n_{N_x+1}, \Phi^n_{-1}$.

Решение уравнений (72) ищется в виде

$$\Phi^n_i = X_i\Phi^n_{i+1} + Y_i\Phi^n_{i+2} + Z_i, i = N_x - 2,...,1,0, \qquad (73)$$

откуда вытекают нужные формулы

$$\Phi^n_{i-1} = X_{i-1}\Phi^n_i + Y_{i-1}\Phi^n_{i+1} + Z_{i-1}, \Phi^n_{i-2} = X_{i-2}\Phi^n_{i-1} + Y_{i-2}\Phi^n_i + Z_{i-2},$$

которые подставляются в (63):

$$A_i[X_{i-2}(X_{i-1}\Phi^n_i + Y_{i-1}\Phi^n_{i+1} + Z_{i-1}) + Y_{i-2}\Phi^n_i + Z_{i-2}] +$$
$$+ B_i(X_{i-1}\Phi^n_i + Y_{i-1}\Phi^n_{i+1} + Z_{i-1}) + C_i\Phi^n_i + D_i\Phi^n_{i+1} + E_i\Phi^n_{i+2} = F_i,$$

и группируется

$$\Phi^n_i = -\frac{D_i + B_iY_{i-1} + A_iX_{i-2}Y_{i-1}}{C_i + A_iX_{i-2}X_{i-1} + A_iY_{i-2} + B_iX_{i-1}} \cdot \Phi^n_{i+1} - \qquad (74)$$
$$- \frac{E_i}{C_i + A_iX_{i-2}X_{i-1} + A_iY_{i-2} + B_iX_{i-1}} \cdot \Phi^n_{i+2} + \frac{F_i - B_iZ_{i-1} - A_iX_{i-2}Z_{i-1} - A_iZ_{i-2}}{C_i + A_iX_{i-2}X_{i-1} + A_iY_{i-2} + B_iX_{i-1}}$$

Сравнение (74) с (73) приводит к рекуррентным формулам для прогоночных коэффициентов

$$X_i = -\frac{D_i + (B_i + A_iX_{i-2})Y_{i-1}}{C_i + (A_iX_{i-2} + B_i)X_{i-1} + A_iY_{i-2}}, \; Y_i = \frac{-E_i}{C_i + (A_iX_{i-2} + B_i)X_{i-1} + A_iY_{i-2}},$$
$$Z_i = \frac{F_i - (B_i + A_iX_{i-2})Z_{i-1} - A_iZ_{i-2}}{C_i + (A_iX_{i-2} + B_i)X_{i-1} + A_iY_{i-2}}, \quad i = 2,..., N_x - 1 \qquad (75)$$

Для вычислений по формулам (75) необходимо задать начальные значения: X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1.

Полагая в (73) $i=0$, находим

$$\Phi^n_0 = X_0\Phi^n_1 + Y_0\Phi^n_2 + Z_0, \qquad (76)$$

откуда получаются $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = \Phi^n_0$. Записав (72) и (73) при $i = 1$ и, имея в виду $A_1 = 0$, приходим к системе

$$B_1\Phi^n_0 + C_1\Phi^n_1 + D_1\Phi^n_2 + E_1\Phi^n_3 = F_1, \qquad (77)$$
$$\Phi^n_1 = X_1\Phi^n_2 + Y_1\Phi^n_3 + Z_1 \qquad (78)$$

Преобразовав (77) к виду

$$\Phi^n_1 = -\frac{D_1}{C_1}\Phi^n_2 - \frac{E_1}{C_1}\Phi^n_3 + \frac{F_1 - B_1\Phi^n_0}{C_1}$$

и сравнивая с (78), находим

$$X_1 = -\frac{D_1}{C_1}, \; Y_1 = -\frac{E_1}{C_1}, \; Z_1 = \frac{F_1 - B_1\Phi^n_0}{C_1} \qquad (79)$$

Для обратной прогонки (73) необходимо предварительно вычислить $\Phi^n_{N_x-1}$, ибо правое краевое условие дает только $\Phi^n_{N_x}=\varphi^n_{N_x}$. Т.к. $E_{N_x-1}=0,$ то $Y_{N_x-1}=0$. На основании этого вычисляется искомое значение

$$\Phi^n_{N_x-1}=X_{N_x-1}\Phi^n_{N_x}+Z_{N_x-1}$$

При выполнении условий [10]:

$$|A_i+B_i|+|D_i+E_i|\le|C_i|\ \ i=1,2,...,N_x-1 \qquad (80)$$

счет по формулам пятиточечной прогонки будет устойчив. В схеме (65) коэффициенты (72) равны:

$$A_i=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\frac{h_{xi}}{2h_{xi-1}}\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}+$$

$$+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\frac{h_{xi+1}}{2}\frac{1}{h_{xi-1}}\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2};$$

$$B_i=-\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_{xi}}+\frac{h_{xi}}{2}[(\frac{1}{h_{xi}}+\frac{1}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}]\}-$$

$$-\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{h_{xi+1}}{2}[(\frac{1}{h_{xi}}+\frac{1}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}]\}-$$

$$-\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}};\ C_i=\frac{1}{\tau_n}+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_{xi}}+\frac{h_{xi}}{2}[\frac{1}{h_{xi}}\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1}{h_{xi+1}}\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}]\}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_{xi+1}}+$$

$$+\frac{h_{xi+1}}{2}[(\frac{1}{h_{xi+1}}\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1}{h_{xi}}\frac{2}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}]\}+\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}};$$

$$D_i=-\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{h_{xi}}{2}[(\frac{1}{h_{xi+2}}+\frac{1}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}]\}-$$

$$-\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{h_{xi+1}}{2}[(\frac{1}{h_{xi+2}}+\frac{1}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}]\}-$$

$$-\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}};\ E_i=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{h_{xi}}{2}[\frac{1}{h_{xi+2}}\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}]\}+$$

$$+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{h_{xi+1}}{2}[\frac{1}{h_{xi+2}}\frac{2}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}]\};$$

$$F_i=\frac{\Phi_i^{n-1}}{\tau_n}+f_i^n$$

На равномерной сетке $h_{xi+1}=h_{xi}=h_x$ они упрощаются:

$$A_i=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{2h_x}\frac{1+sign(i-1,5)}{2}\}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{1}{2h_x}\frac{1+sign(i-N_x+1,5)}{2}\},$$

$$B_i=-\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_x}+\frac{1}{h_x}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}\}-$$

$$-\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_x}\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}\}-\frac{a^2}{h_x^2},$$

$$C_i=\frac{1}{\tau_n}+\frac{3}{2h_x}|u_i^n|+\frac{2a^2}{h_x^2},\ D_i=-\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_x}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}\}-$$

$$D_i=-\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_x}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}\}-\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{1}{h_x}+\frac{1}{h_x}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}\}-\frac{a^2}{h_x^2},$$

$$E_i=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\{\frac{1}{2h_x}\frac{1-sign(i-1.5)}{2}\}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}\{\frac{1}{2h_x}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}\},$$

$$F_i=\frac{\Phi_i^{n-1}}{\tau_n}+f_i^n$$

5.13. Схемы при краевых условиях *Неймана*

Краевое условие типа $\Phi\big|_S=\varphi(x,t)$ в общем случае называется условием *Дирихле* или краевым условием 1-го рода. Задачи физики, в которых на границе задаются потоки (например, потоки тепла, потоки концентрации инородной субстанции), приводят к краевым условиям типа *Неймана* (краевое условие 2-ого рода):

$$(\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial n}+\gamma\Phi)\big|_S=\varphi,$$

здесь n означает нормальное к границе области направление. В одномерной задаче (1) $n=x$. Пусть условие *Неймана* задана на левой границе, где $i=0$. В этом случае простейшая аппроксимация для него имеет вид

$$(\lambda\frac{\Phi_1^n-\Phi_0^n}{h_{x1}}+\gamma\Phi_0^n)\big|_{S_h}=\varphi_0^n,$$

откуда в явных схемах вычисляется граничное значение

$$\Phi_0^n=(\varphi_0^n-\lambda\frac{\Phi_1^n}{h_{x1}})/(\gamma-\frac{\lambda}{h_{x1}})$$

В неявных схемах из этого выражения определяются начальные значения прогоночных коэффициентов. Например, в методе трехточечной прогонки они равны

$$X_0=-\frac{\lambda}{h_{x1}}/(\gamma-\frac{\lambda}{h_{x1}}),Y_0=\varphi_0^n/(\gamma-\frac{\lambda}{h_{x1}})$$

Аналогично и в пятиточечных прогонках. Пусть краевое условие 2-го рода имеет место на правой границе с индексом $i=N$.

Простейшая аппроксимация 1-го порядка точности для него

$$(\lambda\frac{\Phi_{N_x}^n-\Phi_{N_x-1}^n}{h_{x1}}+\gamma\Phi_{N_x}^n)\big|_{S_h}=\varphi_{N_x}^n,$$

откуда в явных схемах вычисляется граничное значение

$$\Phi_{N_x}^n=(\varphi_{N_x}^n+\lambda\frac{\Phi_{N_x-1}^n}{h_{x1}})/(\gamma+\frac{\lambda}{h_{x1}})$$

В неявных схемах это выражение используется для организации обратной прогонки. Выражение

$$\Phi^n_{N_x-1} = X_{N_x-1}\Phi^n_{N_x} + Y_{N_x-1},$$

подставляется в данную аппроксимацию

$$\Phi^n_{N_x} = (\varphi^n_{N_x} + \lambda\frac{X_{N_x-1}\Phi^n_{N_x} + Y_{N_x-1}}{h_{xN_x}})/(\gamma + \frac{\lambda}{h_{xN_x}})$$

после чего вычисляется необходимое для обратной прогонки значение

$$\Phi^n_{N_x} = (\varphi^n_{N_x} + \lambda\frac{Y_{N_x-1}}{h_{xN_x}})/[(\gamma + \frac{\lambda}{h_{xN_x}}) - \lambda\frac{X_{N_x-1}}{h_{xN_x}}]$$

5.14. Метод первого дифференциального приближения

Идея исследования свойств схем с помощью 1-го дифференциального приближения принадлежит академику *Н.Н.Яненко*.

Пусть уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

аппроксимируется схемой

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c\frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)}{h_x} = 0$$

Из разложений в ряды *Тейлора* получаются

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = (\frac{\partial u}{\partial t})^n + \frac{\tau}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^n + O(\tau^2), \frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)}{h_x} = (\frac{\partial u}{\partial x})^n + \frac{h_x}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n + O(h_x{}^2)$$

Данные выражения подставляются в вышенаписанную схему

$$(\frac{\partial u}{\partial t})^n + \frac{\tau}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^n + O(\tau^2) + c[(\frac{\partial u}{\partial x})^n + \frac{h_x}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n + O(h_x{}^2)] = 0$$

Из уравнения переноса следует

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^n = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})^n = -\frac{\partial}{\partial t}(c\frac{\partial u}{\partial x})^n = -c\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t})^n =$$

$$= -c\frac{\partial}{\partial x}(-c\frac{\partial u}{\partial x})^n = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n, (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^n = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n$$

Первым дифференциальным приближением называется выражение, где удержаны производные из рядов *Тейлора*:

$$(\frac{\partial u}{\partial t})^n + \frac{\tau}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^n + c[(\frac{\partial u}{\partial x})^n + \frac{h_x}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n] = 0,$$

получающееся после отбрасывания погрешности $O(\tau^2) + O(h_x{}^2)$.

Исследуем свойства полученного уравнения. Сделаем замену

$$(\frac{\partial u}{\partial t})^n + \frac{\tau}{2}c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n + c[(\frac{\partial u}{\partial x})^n + \frac{h_x}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n] = 0,$$

откуда вытекает

$$(\frac{\partial u}{\partial t})^n + c(\frac{\partial u}{\partial x})^n = -\frac{1}{2}(\tau c^2 + ch_x)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^n$$

Потребуем, чтобы это уравнение стало *параболического типа.* Для этого необходимо выполнение неравенства

$$c(\tau c + h_x) \le 0$$

В методе дифференциального приближения это неравенство берется за *условие устойчивости* вышенаписанной явной схемы. Исследуем возможности его выполнения. Если коэффициент переноса будет положительным *c>0,* очевидно, данное неравенство не удовлетворяется ни при каких шагах сеток, поэтому схема работает только в случае отрицательного коэффициента переноса *c<0* , но тогда должно быть $(\tau c + h_x) \ge 0$. Откуда условие устойчивости схемы берется в виде $1 \ge -\frac{\tau c}{h_x}$.

5.15. Исследование устойчивости методом *фон Неймана*

Методом *фон Неймана* возможно исследование устойчивости разностных схем в следующих случаях [12]: 1) на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$; 2) коэффициенты уравнения постоянные числа; 3) в уравнении отсутствует свободный член. Например, для исследования устойчивости явных схем с параметрами

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau_{n+1}} + u_i^n[\alpha \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}} + \beta \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}}] == a^2(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}} + f_i^n,$$

$$\alpha + \beta = 1, i = 1,..., N_x - 1, n = 0,1,2,..., N_\tau - 1,$$

$$\Phi_i^0 = d_i, i = 1,..., N_x - 1, \Phi_0^n = \varphi_0^n, \Phi_{N_x}^n = \varphi_{N_x}^n, n = 0,1,2,..., N_\tau,$$

метод *фон Неймана* не годится.

Условия 1), 2), 3) метода *фон Неймана* выполняются для явной схемы уравнения теплопроводности в твердом теле

$$\rho c T_t^n = \lambda T_{x\dot{x}}^n$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x$ данная схема примет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau_{n+1}} = a^2(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2}), \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho c} \qquad (81)$$

В методе *фон Неймана* решение ищется в виде кусочка тригонометрического ряда

$$T_i^n = p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x}, \quad \bar{i} = \sqrt{-1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2,... \qquad (82)$$

Здесь p - коэффициент, (n) - показатель степени. Данное обстоятельство учитывается при подстановке (82) в (81):

$$\frac{p^{(n+1)} e^{\bar{i} m i h_x} - p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x}}{\tau_{n+1}} = a^2(\frac{p^{(n)} e^{\bar{i} m (i+1) h_x} - 2p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x} + p^{(n)} e^{\bar{i} m (i-1) h_x}}{h_x^2})$$

После сокращений на $p^{(n)} e^{\bar{i} m i h_x}$ получается

$$\frac{p - 1}{\tau_{n+1}} = a^2(\frac{e^{\bar{i} m h_x} - 2 + e^{-\bar{i} m h_x}}{h_x^2}), \qquad (83)$$

По представлению комплексных чисел имеет место

$$e^{\bar{i}mh_x} = \cos mh_x + \bar{i}\sin mh_x, \quad e^{-\bar{i}mh_x} = \cos mh_x - \bar{i}\sin mh_x,$$

в силу чего в (83) мнимая часть сокращается

$$\frac{p\ -1}{\tau_{n+1}} = a^2(\frac{2\cos mh_x - 2}{h_x^2}), \tag{84}$$

Тригонометрическое соотношение

$$\sin\frac{mh_x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos mh_x}{2}},$$

подставленное в (84) дает

$$\frac{p\ -1}{\tau_{n+1}} = -\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2}, \quad p\ = 1-\tau_{n+1}\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} \tag{85}$$

В методе *фон Неймана* для того чтобы погрешности вычислений не возрастали (при их бесконечном возрастании решение будет искажено) необходимо выполнение очевидного неравенства

$$|\,p\,| \le 1 \tag{86}$$

Подстановка (85) в (86) дает:

$$|\,p\,| = |1-\tau_{n+1}\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2}| \le 1 \tag{87}$$

В общем случае для выполнения (87) достаточно следующих неравенств

$$\tau_{n+1}\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} \le 2, \quad m = 0,\pm1,\pm2,... \tag{88}$$

Максимальное значение синуса равно 1: $\max_m \sin^2\frac{mh_x}{2} = 1$, поэтому из (88) вытекает условие устойчивости явной схемы, совпадающее с ранее установленным (35): $\tau_{n+1} \le \frac{h_x^2}{2a^2}$.

Из вышеизложенного очевидно, что метод *фон Неймана* не годится для доказательства сходимости схемы. Исследуем методом *фон Неймана* устойчивость неявной схемы

$$\frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{\tau_n} = a^2(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2}) \tag{89}$$

С этой целью (82) подставляется в (89):

$$\frac{p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x} - p^{(n-1)}e^{\bar{i}mih_x}}{\tau_n} = a^2(\frac{p^{(n)}e^{\bar{i}m(i+1)h_x} - 2p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x} + p^{(n)}e^{\bar{i}m(i-1)h_x}}{h_x^2}),$$

после сокращения на $p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x}$

$$\frac{1\ - p^{-1}}{\tau_n} = a^2(\frac{e^{\bar{i}mh_x} - 2 + e^{-\bar{i}mh_x}}{h_x^2}),$$

$$\frac{1\ - p^{-1}}{\tau_n} = -\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2}, \quad p^{-1} = 1+\tau_n\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2},$$

откуда получается выражение

$$p = (1 + \tau_n \frac{4a^2}{h_x^2} \sin^2 \frac{mh_x}{2})^{-1} \le 1 \qquad (90)$$

Шаг по времени $\tau_n > 0$ положительный, поэтому неравенство (90) доказывает безусловную устойчивость неявной схемы.

5.16. Схема («ромб») *Дюфорта-Френкеля*

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ схема *Дюфорта-Френкеля* имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\tau} = a^2 (\frac{T_{i+1}^n - T_i^{n+1} - T_i^{n-1} + T_{i-1}^n}{h_x^2}), \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$$

После преобразований

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\tau} = a^2 (\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2}) - \frac{a^2\tau^2}{h_x^2} \frac{T_i^{n+1} - 2T_i^n + T_i^{n-1}}{\tau^2}$$

становится видным, что схема «ромб» условно аппроксимирует уравнение теплопроводности

$$\frac{a^2\tau^2}{h_x^2} \frac{T_i^{n+1} - 2T_i^n + T_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{a^2\tau^2}{h_x^2} [(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2})_i^n + O(\tau^2)]$$

Следовательно, погрешность аппроксимации равна

$$\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(\frac{a^2\tau^2}{h_x^2})$$

Для полной аппроксимации необходимо выполнение равенства $O(\frac{a^2\tau^2}{h_x^2}) = O(h_x^2)$, откуда вытекает условие на шаг по времени

$$a^2\tau^2 = h_x^4, \tau \le h_x^2 / a^2$$

При невыполнении этого неравенства схема *Дюфорта-Френкеля* аппроксимирует иное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \aleph^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad \aleph = \frac{a\tau}{h_x}$$

Схема *Дюфорта-Френкеля* безусловно устойчива, но *условно* аппроксимирует и требует задания двух начальных условий T_i^0 и $T_i^{-1}, i = 0,1,..., N_x$. По методу *фон Неймана* получается соотношение $p^2 - \frac{4r\cos mh_x}{1+2r} p + \frac{2r-1}{2r+1} = 0, r = \frac{a^2\tau}{h_x^2}$.

5.17. Абсолютно неустойчивая схема (чехарда) *Ричардсона*

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ схема *Ричардсона* записывается так

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\tau} = a^2 (\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2}),$$

Погрешность аппроксимации равна $\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2)$, т.е. схема 2-го порядка точности по всем переменным, однако она **абсолютно неустойчива.** Доказывается методом *фон Неймана,* по которому следует дисперсионное соотношение

$$p^2 + (8r\sin^2\frac{mh_x}{2})p - 1 = 0, \quad r = \frac{a^2\tau}{h_x^2}, \ |p| > 1$$

5.18. Схема *Кранка-Николсона*

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ схема имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{a^2}{2}(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2}),$$

Погрешность аппроксимации равна $\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2)$.

Метод *фон Неймана* дает дисперсионное соотношение

$$p = (1 - 2r\sin^2\frac{mh_x}{2})/(1 + 2r\sin^2\frac{mh_x}{2}), \quad r = \frac{a^2\tau}{h_x^2}, \quad |p| \le 1$$

Схема *Кранка-Николсона* - неявная схема, абсолютно устойчивая $|p| \le 1$, решение находится методом трехточечной прогонки.

5.19. Технология построения монотонных схем

Аппроксимация *Булеева-Петрищева* имеет 1-й порядок точности $O(h_x)$. Эффективная методика построения монотонных однородных схем с более высоким порядком аппроксимации младших производных предложена *Джакуповым К.Б.* в [20].

Рассматривается начально-краевая задача для одномерного уравнения с конвективным членом:

$$\rho(\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x}) = \mu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + f, \omega|_{t=0} = d, \qquad (1^*)$$

$$\omega(0,t) = \varphi_1(t), \omega(a,t) = \varphi_2(t), 0 \le x \le a, t \in [0,T]$$

Технология [1] заключается в использовании решения самого уравнения (1) следующим образом. Имеет место схема

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2}\left[\frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + O(h_{xi}^2)\right] + \qquad (2^*)$$

$$+ \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2}\left[\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + O(h_{xi}^2)\right] == \bar{\mu}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \bar{f}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho}, \bar{f} = \frac{f}{\rho}$$

В (2^*) делается замена из (1^*) $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{1}{\bar{\mu}}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} - \bar{f}\right\}$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{|u_i^n| + u_i^n}{2}\left[\frac{\omega_i^n - \omega_{i-1}^n}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2}\frac{1}{\bar{\mu}}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} - \bar{f}\right\} + O(h_{xi}^2)\right] + \qquad (3^*)$$

$$+ \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2}\left[\frac{\omega_{i+1}^n - \omega_i^n}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2}\frac{1}{\bar{\mu}}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} - \bar{f}\right\} + O(h_{xi+1}^2)\right] = \bar{\mu}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \bar{f},$$

после чего в (3*) используются аппроксимации

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\omega_i^{n+1}-\omega_i^n}{\tau_{n+1}}+O(\tau_{n+1})\equiv\omega_t^n+O(\tau_{n+1}),$$

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\left[\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}+O(h_{xi})\right]+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\left[\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}+O(h_{xi+1})\right],\qquad(4^*)$$

$$\bar{\mu}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{2\bar{\mu}}{h_{xi+1}+h_{xi}}\left(\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}\right)+O(\bar{\mu}(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(\bar{\mu}\hbar_{xi}^2)$$

Приведением подобных членов получается явная схема 2-го порядка погрешности аппроксимации конвективного члена

$$\rho\left(\omega_t^n+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}\right)=$$

$$=\frac{\mu}{1+\frac{\rho}{2\mu}\left(\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}h_{xi}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}h_{xi+1}\right)}\left(\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}}+f_i^n,\qquad(5^*)$$

В (4*) стоит аппроксимация 1-го порядка. По этой же *технологии,* используя в (3*) вместо (4*) аппросимацию 2-го порядка

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\left[\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}+\frac{h_{xi}}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+O(h_{xi}^2)\right]+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\left[\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{h_{xi+1}}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+O(h_{xi+1}^2)\right],\quad(6^*)$$

и далее, подставляя $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{1}{\bar{\mu}}\{\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}-\bar{f}\}$ в (6*) и приводя подобные члены, получаем схемы

$$\rho\left(\omega_{t'}^n+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}\right)=\frac{\mu}{\sum_{k=0}^{M}\left[\frac{\rho}{2\mu}\left(\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}h_{xi}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}h_{xi+1}\right)\right]^k}\omega_{x\dot{x}}^n+f_i^n,$$

$$\omega_i^0=d_i,i=1,...,N_x-1,\omega_0^n=\varphi_1^n,\omega_{N_x}^n=\varphi_2^n,\forall n,M=0,1,2,...,\qquad(7^*)$$

которые при $\omega_{t'}^n\equiv(\omega_i^{n+1}-\omega_i^n)/\tau$ являются явными схемами, сходящимися и устойчивыми в сеточной норме C при выполнении условий

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}}-\Big[\ \rho\left(\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2h_{xi}}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2h_{xi+1}}\right)+\frac{\mu}{\sum_{k=0}^{M}\left[\frac{\rho}{2\mu}\left(\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}h_{xi}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}h_{xi+1}\right)\right]^k}\frac{1}{\hbar_{x_i}}\left(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1}{h_{xi}}\right)\ \Big]\geq 0,\forall(i,n),$$

при $\omega_{t'}^n\equiv(\omega_i^n-\omega_i^{n-1})/\tau$ являются неявными схемами, безусловно сходящимися и абсолютно устойчивыми в той же норме C.

Погрешность схемы (7*) зависит от натурального $M\geq 0$. При $M=0$ схема (7*) имеет «аппроксимационную вязкость» и 1-й порядок точности и известна как схема *Булеева-Петрищева.*

Для $M=1$ имеет 2-й порядок погрешности аппроксимации конвективного члена [1]:

$$\psi_i^n=O(\tau_{n+1})+O(|u_i^n|(h_{xi}^2+h_{xi+1}^2)+O(\mu(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(\mu\hbar_{xi}^2)$$

Для *M=2* на равномерной сетке $h_{xi}=h_{xi+1}=\hbar_{xi}=h_x,\forall i$, *новая схема (7*)* принимает вид

$$\rho(\omega_t^n+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_x}+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_x})=\mu[1+\rho\frac{|u_i^n|}{2\mu}h_x+(\rho\frac{|u_i^n|}{2\mu}h_x)^{-2}](\frac{\omega_{i+1}^n-2\omega_i^n+\omega_{i-1}^n}{h_x^2})+f_i^n$$

Для *погрешности схемы* $z_i^n=\omega_i^n-\overline{\omega}_i^n$, где $\overline{\omega}=\overline{\omega}(x,t)$ – точное решение задачи (1^*), имеет место оценка

$$\| z^n \| \le T\max_{0\le k\le n}\| \psi^k \|, n=1,2,...,$$

откуда вытекает сходимость построенных монотонных схем (7^*) и также и устойчивость схем по начальному условию d и по свободному члену f, т.е. для возмущения схемы $\hat{\omega}^n=\omega^n-\breve{\omega}^n$ имеет место оценка

$$\| \hat{\omega}^n \| \le \| \varepsilon \| +T\max_{0\le k\le n}\| \xi^k \|, n=1,2,....$$

Обобщение данной технологии на уравнения в цилиндрической, сферической и других системах координат, а также на многомерные уравнения не вызывает особых затруднений.

Следует отметить, что в [3] для уравнения с младшей производной

$$(ku')'+r(x)u'-q(x)u=-f(x),$$

по *технологии Самарского А.А.* построена монотонная схема

$$\chi(ay_{\bar{x}})_x+b^+a^{(+1)}y_x+b^-ay_{\bar{x}}-dy=-\varphi,\chi=1/(1+R),R=0{,}5|r|h/k,$$

с погрешностью $O(h^2)$ на равномерной сетке.

5.20. Сходимость схемы типа *Кранка-Николсона*. Леммы

Неявная схема типа *Кранка-Николсона* с аппроксимацией *Джакупова К.Б.* [20] конвективного члена имеет вид

$$\Phi_{\dot{t}}^{n+1}+\frac{u^{n+\frac12}+|u^{n+\frac12}|}{2}\frac{\Phi_{\bar{x}}^{n+1}+\Phi_{\bar{x}}^n}{2}+\frac{u^{n+\frac12}-|u^{n+\frac12}|}{2}\frac{\Phi_x^{n+1}+\Phi_x^n}{2}=$$

$$=\frac{a^2}{2}[1+\frac{|u^{n+\frac12}|+u^{n+\frac12}}{2a^2}\frac{h_{xi}}{2}+\frac{|u^{n+\frac12}|-u^{n+\frac12}}{2a^2}\frac{h_{xi+1}}{2}]^{-1}(\Phi_{x\dot{x}}^{n+1}+\Phi_{x\dot{x}}^n)+f^{n+\frac12},\ x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t0},$$

$$\Phi^0=d\ (x),x\in\Omega_h,\Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x),x\in S_h,t\in\overline{\Omega}_\tau \qquad (91)$$

Здесь $u^{n+\frac12}=u(x,t_n+\tau/2)$, $f^{n+\frac12}=f(x,t_n+\tau/2)$. Погрешность аппроксимации в классе достаточно гладких функций равна

$$\psi^{n+\frac12}(x)=O(\tau_{n+1}^2)+O(\hbar_{xi}^2)+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi})),x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1}$$

Для исследования сходимости данной схемы методом оценки нормы оператора перехода применяются леммы в норме С, доказанные *Джакуповым К.Б.* в [13].

Вводится пространство H сеточных функций, принимающих нулевые значения в граничных узлах $x\in S_h$: т.е.сеточная функция $\Psi\in H$, если $\Psi(x)=0,x\in S_h$.

Лемма-3а. *Пусть операторы*

$$[E-\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})],m=1,...,M,$$

отображают пространство H в пространство H и коэффициенты $c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1,..., M$ *неотрицательны, кроме того выполняются условия*

$$0 < \tau \le 1/ \| c_{-m} + c_{+m} \| \qquad (92)$$

При этих условиях нормы операторов не превосходят единицы:

$$\| E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) \| \le 1$$

Доказательство леммы полностью совпадает с доказательством неравенства (55), лишь надо положить $M = 1, \tau_{n+1} = \tau$, $c^n_{\mp 1} = c_{\mp m}, m = 1$, условие (92) подобно (54).

Лемма-3б. *Пусть операторы*

$$[E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})], k \le M, k = 1,..., M$$

отображают пространство H в пространство H и коэффициенты $c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1,..., M$ *неотрицательны, кроме того выполняются условия*

$$0 < \tau \le 1/ \| \sum_{m=k}^{M} (c_{-m} + c_{+m}) \|$$

При этих условиях нормы операторов не превосходят единицы:

$$\| E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) \| \le 1$$

Доказательство аналогично доказательству леммы-3а, особой разницы нет, совпадает с доказательством (55).

Лемма-4а. *Пусть операторы*

$$[E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}, m = 1,..., M$$

отображают пространство H в пространство H и коэффициенты $\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1,..., M$ *неотрицательны.*

При этих условиях нормы операторов не превосходят единицы:

$$\| [E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \le 1, m = 1,..., M$$

Доказательство аналогично доказательству (63б), необходимо положить $M = 1, \tau_n = \tau, c^n_{\mp 1} = c_{\mp m}, m = 1$.

Лемма-4б. *Пусть операторы*

$$[E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}, k \le M, k = 1,..., M$$

отображают пространство H в пространство H и коэффициенты $\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1,..., M$ *неотрицательны.*

При этих условиях нормы операторов не превосходят единицы:

$$\| [E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \le 1$$

Доказательство аналогично доказательству леммы-4а и (63б).

Лемма-5а. *Пусть операторы*

$$[E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}, k \le M, k = 1,..., M$$

отображают пространство H в пространство H и коэффициенты $\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1,...,M$ *неотрицательны.*

При этих условиях нормы операторов не превосходят единицы:

$$\| [E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \le 1$$

Доказательство. По определению нормы линейного оператора

$$\| [E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| =$$

$$= \sup_{\substack{\Psi \in H \\ \|\Psi\|=1}} \| [E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \Psi \| \qquad (93)$$

Обозначим $B_M \equiv \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}), M = 1,2,3.$

По леммам-4а и 4б имеет место неравенство

$$\| [E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| = \| [E + \tau B_M]^{-1} \| \le 1 \qquad (94)$$

При выполнении условия (92) по лемме-3

$$\| E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) \| \le 1 \qquad (95)$$

На основании этих двух неравенств (94) и (95) вытекает доказательство леммы-5а

$$\| [E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \le$$

$$\le \| [E - \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})] \| \| [E + \tau \sum_{m=k}^{M} (c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \le 1$$

Здесь потребовалось выполнение условия (92). Лемма-5а наполовину доказана.

Пусть вместо (92) имеет место строгое неравенство

$$\tau > 1 / \| \sum_{m=k}^{M} (c_{-m} + c_{+m}) \| \qquad (96)$$

Докажем, что и в случае (96) лемма-5а справедлива, тем самым будет дано полное доказательство ее.

Введём сеточную функцию

$$\Phi = [E + \tau B_M]^{-1} \Psi, \quad \Phi \in H, \qquad (97)$$

откуда вытекает

$$\Psi = [E + \tau B_M] \Phi \qquad (98)$$

В силу (97) записывается

$$\| (E - \tau B_M)(E + \tau B_M)^{-1} \| = \sup_{\|\Psi\|=1} \| (E - \tau B_M)(E + \tau B_M)^{-1} \Psi \| =$$

$$= \sup_{\Phi \in H, \|(E+\tau B_M)\Phi\|=1} \| (E - \tau B_M)\Phi \| = \sup_{\Phi \in H, \|(E+\tau B_M)\Phi\|=1} \max_{x \in \Omega_h} | (E - \tau B_M)\Phi | \qquad (99)$$

Так как $\| \Psi \| = 1$, то на основании (94) получается

$$\| \Phi \| = \| [E + \tau B_M]^{-1} \Psi \| \le \| [E + \tau B_M]^{-1} \| \| \Psi \| \le 1, \quad \| \Phi \| \le 1 \qquad (100)$$

Используется очевидное условие

$$\| \Psi \| = \| (E + \tau B_M)\Phi \| = \max_{x \in \Omega_h} | (E + \tau B_M)\Phi | = 1 \qquad (101)$$

Необходимо доказать справедливость неравенства

$$\max_{x \in \Omega_h} | (E - \tau B_M)\Phi | \le 1 \qquad (102)$$

для произвольного элемента $\Phi \in H$, удовлетворяющего условия (100) и (101). Пусть $\max_{x \in \Omega_h} | (E - \tau B_M)\Phi |$ достигается в узле $x^* = (x_{1i_1^*}, ..., x_{Mi_M^*}) \in \Omega_h$.

Обозначив

$$\Phi(x^*) \equiv \Phi^*, c_{\mp m}(x^*) \equiv c^*_{\mp m}, m = 1, ..., M,$$

имеем возможность написать

$$\| (E - \tau B_M)\Phi \| = \max_{x \in \Omega_h} | (E - \tau B_M)\Phi | = | \Phi^* - \tau B_M \Phi^* | \qquad (103)$$

Очевидно для выполнения неравенства (102) необходимо и достаточно выполнения следующих двух неравенств

$$-\tau B_M \Phi^* \le 1 - \Phi^* \qquad (104)$$

$$\tau B_M \Phi^* \le 1 + \Phi^* \qquad (105)$$

Из данного условия (101) вытекает неравенство

$$| \Phi^* + \tau B_M \Phi^* | \le \max_{x \in \Omega_h} | (E + \tau B_M)\Phi | = 1$$

эквивалентное двум неравенствам

$$-\tau B_M \Phi^* \le 1 - \Phi^* \qquad (106)$$

$$\tau B_M \Phi^* \le 1 + \Phi^* \qquad (107)$$

Если имеет место следующее сочетание знаков

а) $\Phi^* < 0, \tau B_M \Phi^* \le 0$; *б)* $\Phi^* > 0, \tau B_M \Phi^* \ge 0$,

тогда из (106) и (107) непосредственно выполняются доказываемые (104) и (105), Рассмотрим другую пару сочетания знаков:

в) $\Phi^* \le 0, \tau B_M \Phi^* > 0$; *г)* $\Phi^* \ge 0, \tau B_M \Phi^* < 0$

Пусть выполняется *в)*. В этом случае неравенство $\tau B_M \Phi^* > 0$ приводит к следующим неравенствам

$$\sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} T_{-m} \Phi^* + c^*_{+m} T_{+m} \Phi^*) < \sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} + c^*_{+m}) \Phi^* \le 0, \qquad (108)$$

которые удобно преобразовать к виду

$$\frac{\sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} T_{-m} \Phi^* + c^*_{+m} T_{+m} \Phi^*)}{\sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} + c^*_{+m})} = \hat{\Phi}^* < \Phi^* \le 0 \qquad (109)$$

При выполнении условия *в)* знак модуля опускается

$$| \Phi^* - \tau B_M \Phi^* | = \tau B_M \Phi^* - \Phi^* = D(\Phi^*) \qquad (110)$$

Из (106) и (90) вытекают

$$0 < D(\Phi^*) = \tau B_M \Phi^* - \Phi^* \le 1 - \Phi^* - \Phi^* = 1 - 2\Phi^* \qquad (111)$$

При значении $\Phi^*=0$ на основании (111) имеем

$$0 < D(0) \le 1 \qquad (112)$$

Вычислим производную

$$\frac{dD(\Phi^*)}{d\Phi^*} = \tau \sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} + c^*_{+m}) - 1$$

При неравенствах

$$\tau > 1/\sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} + c^*_{+m}) \ge 1/\| \sum_{m=k}^{M} (c_{-m} + c_{+m}) \| \qquad (113)$$

производная будет положительной $\frac{dD(\Phi^*)}{d\Phi^*} > 0$, следовательно, $D(\Phi^*)$ есть возрастающая функция в интервале $\Phi^* \in (\hat{\Phi}^*, 0]$. Поэтому в силу (112)получается требуемое неравенство $D(\Phi^*) \le 1$.

Пусть вместо (113) выполняется противоположное неравенство

$$1/\| \sum_{m=k}^{M} (c_{-m} + c_{+m}) \| \le \tau \le 1/\sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} + c^*_{+m})$$

В этом случае прямые вычисления дают

$$D(\Phi^*) = | \Phi^* - \tau B_M \Phi^* | \le [1 - \tau \sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} + c^*_{+m})] | \Phi^* | + \tau \sum_{m=k}^{M} (c^*_{-m} | T_{-m} \Phi^* | + c^*_{+m} | T_{+m} \Phi^* |) \le 1,$$

потому как в силу (100) вытекают неравенства

$$| \Phi^* | \le 1, | T_{-m} \Phi^* | \le 1, | T_{+m} \Phi^* | \le 1, m = 1, ..., M$$

Таким образом, в обеих ситуациях выполняется доказываемое

$$| \Phi^* - \tau B_M \Phi^* | = D(\Phi^*) \le 1$$

Аналогично исследуется сочетание г), тем самым завершается полное доказательство леммы..

Лемма-5б. *Пусть операторы*

$$[E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}, m = 1, ..., M$$

отображают пространство H в пространство H и коэффициенты $\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1, ..., M$ *неотрицательны.*

При этих условиях нормы операторов не превосходят единицы:

$$\| [E - \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})][E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1} \| \le 1$$

Доказательство следует из леммы-5а, в которой надо положить последовательно положить $k = M, M = 1,2,3$.

Сходимость схемы типа *Кранка-Николсона*

Для погрешности данной схемы получается система,подобная (91):

$$Z^{n+1}_{\bar{t}} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} + |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{Z^{n+1}_{\bar{x}} + Z^n_{\bar{x}}}{2} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{Z^{n+1}_{x} + Z^n_{x}}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2(1 + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| + u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2} \frac{h_{xi}}{2} + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| - u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2} \frac{h_{xi+1}}{2})} (Z^{n+1}_{x\dot{x}} + Z^n_{x\dot{x}}) + \psi^{n+\frac{1}{2}}, x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}, \qquad (114)$$

$$Z^0 = 0, x \in \Omega_h, Z^n\Big|_{S_h} = 0, \quad x \in S_h, t \in \overline{\Omega}_\tau$$

Вводятся положительные коэффициенты

$$\Re = (1 + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| + u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2}\frac{h_{xi}}{2} + \frac{|u^{n+\frac{1}{2}}| - u^{n+\frac{1}{2}}}{2a^2}\frac{h_{xi+1}}{2}),$$

$$c_{+1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{2\Re h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^{n+\frac{1}{2}}| - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi+1}}, c_{-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{2\Re h_{xi}\hbar_{xi}} + \frac{|u_i^{n+\frac{1}{2}}| + u_i^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi}},$$

затем линейный оператор $\Lambda_1 = c_{+1}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{+1} - c_{-1}^{n+\frac{1}{2}}\Delta_{-1}$. С их помощью (114) записывается в операторном виде

$$\frac{Z^{n+1} - Z^n}{\tau_{n+1}} = \Lambda_1 \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} + \psi^{n+\frac{1}{2}}, \quad Z^n \in H \forall n$$

Данная схема преобразовывается к виду

$$(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^{n+1} = (E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^n + \tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}}$$

Умножая это выражение слева на обратный оператор

$$(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^{n+1} = (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^n + \tau_{n+1}(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}},$$

получаем

$$Z^{n+1} = (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^n + \tau_{n+1}(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}}$$

Далее при оценке норм используются лемма-4а и лемма -5б, условия которых здесь выполняются. Имеет место перестановочность операторов

$$(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1) = (E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1},$$

в силу чего находим

$$\| Z^{n+1} \| = \| (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)Z^n + \tau_{n+1}(E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}} \| \le$$

$$\le \| (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1}(E + \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1) \| \| Z^n \| + \tau_{n+1} \| (E - \frac{\tau_{n+1}}{2}\Lambda_1)^{-1} \| \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \| \le \| Z^n \| + \tau_{n+1} \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|$$

Таким образом получаются неравенства

$$\| Z^{n+1} \| \le \| Z^n \| + \tau_{n+1} \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, n = 0,1,..., N_\tau - 1,$$

из которых вытекает сходимость схемы (91):

$$\| Z^{k+1} \| \le \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1$$

Устойчивость схемы доказывается аналогично. Следует обратить внимание на то, что данная схема (91) абсолютно сходится и абсолютно устойчива. Следующая по типу *Кранка-Николсона* аппроксимация *«без аппроксимационной вязкости»*

$$\Phi_{\bar{t}}^{n+1}+\frac{u^{n+\frac{1}{2}}+|u^{n+\frac{1}{2}}|}{2}\frac{\Phi_{\bar{x}^0}^{n+1}+\Phi_{\bar{x}^0}^{n}}{2}+\frac{u^{n+\frac{1}{2}}-|u^{n+\frac{1}{2}}|}{2}\frac{\Phi_{x^0}^{n+1}+\Phi_{x^0}^{n}}{2}=\frac{a^2}{2}(\Phi_{x\dot{x}}^{n+1}+\Phi_{x\dot{x}}^{n})+f^{n+\frac{1}{2}},\ x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t0},$$

$$\Phi^0=d\ (x),x\in\Omega_h,\ \Phi^n\big|_{S_h}=\varphi^n(x),\quad x\in S_h,t\in\overline{\Omega}_\tau$$

тоже безусловно сходится и абсолютно устойчива.

5.21. Консервативные схемы. Метод энергетических неравенств

Разностные схемы, сохраняющие свойства дифференциального уравнения, называются *консервативными* схемами. Однородные консервативные схемы для уравнения теплопроводности исследованы *Самарским А.А.* в [6], семейства консервативных схем для уравнений *Навье-Стокса* построены и исследованы *Джакуповым К.Б.* в [3].

Идея консервативных схем поясняется здесь на уравнении *Бюргерса*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},u(x,0)=d(x),\ u(0,t)=0,u(1,t)=0$$

с нулевыми краевыми условиями на отрезке $0\le x\le 1$. Умножив уравнение на u, проинтегрируем на отрезке $0\le x\le 1$:

$$\int_0^1\frac{\partial u}{\partial t}udx+\int_0^1 c\frac{\partial u}{\partial x}udx=\int_0^1\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udx$$

В полученном интегральном тождестве имеют место следующие соотношения:

$$\int_0^1 c\frac{\partial u}{\partial x}udx=\frac{c}{2}\int_0^1\frac{\partial u^2}{\partial x}dx=\frac{c}{2}[u^2(1,t)-u^2(0,t)]=0,\int_0^1\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udx<0,$$

так как

$$\mu\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udx=\mu[\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}u)dx-\int_0^1(\frac{\partial u}{\partial x})^2dx]<0,$$

ибо $\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}u)dx=\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}u(1,t)-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}u(0,t)=0$.

Покажем, что *немонотонная* схема с *центральной* разностной производной для конвективного члена

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau_{n+1}}+c\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2h_x}=\mu\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2},u_i^0=d_i,1\le i\le N_x-1,u_0^{n+1}=0,u_{N_x}^{n+1}=0\qquad(*)$$

является *консервативной* схемой, т.е. обладает сеточными интегральными свойствами типа $\int_0^1 c\frac{\partial u}{\partial x}udx=0,\int_0^1\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udx<0$.

В предыдущих параграфах для сеточных функций типа $u^{n+1}=\{u_i^{n+1},i=0,1...,N_x\}\in H$ была использована максимум-норма $\|u^{n+1}\|=\max\limits_{1\le i\le N_x-1}u_i^{n+1}$. В методе энергетических неравенств, как было сказано, используется норма типа $\|u^{n+1}\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N_x-1}h_x(u_i^{n+1})^2}$, порожденная

скалярным произведением любых двух сеточных функций, например, $u^{n+1} \in H$ и $z^{n+1} = \{z_i^{n+1}, i = 0,1..., N_x\} \in H$:

$$(u^{n+1}, z^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} z_i^{n+1} = \sum_{x \in \Omega_h} h_x u^{n+1}(x) z^{n+1}(x),$$

в силу чего квадрат энергетической нормы равен $\| u^{n+1} \|^2 = (u^{n+1}, u^{n+1})$. По методу энергетических неравенств обе части уравнения (*) умножаются на $h_x u_i^{n+1}$ и суммируются по индексу $1 \le i \le N_x - 1$. В результате получается так называемое энергетическое тождество:

$$\sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} + \sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = \sum_{i=1}^{N_x - 1} \mu h_x u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2},$$

в котором в силу нулевых краевых условий 2-ой и 3-й члены равны нулю. В самом деле, имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = c(u^{n+1}, u_{\tilde{x}}^{n+1}) = c/2 * [u_1^{n+1}(u_2^{n+1} - u_0^{n+1}) +$$

$$+ u_2^{n+1}(u_3^{n+1} - u_1^{n+1}) + u_3^{n+1}(u_4^{n+1} - u_2^{n+1}) + ... + u_{N_x - 2}^{n+1}(u_{N_x - 1}^{n+1} - u_{N_x - 3}^{n+1}) + u_{N_x - 1}^{n+1}(u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x - 2}^{n+1})] = 0,$$

так как $u_0^{n+1} = 0, u_{N_x}^{n+1} = 0$,

$$\mu \sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} = \mu(u^{n+1}, u_{x\bar{x}}^{n+1}) =$$

$$= \mu / h_x * [u_1^{n+1}(u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_0^{n+1}) + u_2^{n+1}(u_3^{n+1} - 2u_2^{n+1} + u_1^{n+1}) +$$

$$+ u_3^{n+1}(u_4^{n+1} - 2u_3^{n+1} + u_2^{n+1}) + ... + u_{N_x - 2}^{n+1}(u_{N_x - 1}^{n+1} - 2u_{N_x - 2}^{n+1} + u_{N_x - 3}^{n+1}) + u_{N_x - 1}^{n+1}(u_{N_x}^{n+1} - 2u_{N_x - 1}^{n+1} + u_{N_x - 2}^{n+1})] =$$

$$= \mu / h_x * [-u_1^{n+1} u_1^{n+1} - (u_2^{n+1} - u_1^{n+1})^2 - (u_3^{n+1} - u_2^{n+1})^2 - (u_4^{n+1} - u_3^{n+1}) - ... - (u_{N_x - 1}^{n+1} - u_{N_x - 2}^{n+1})^2 - u_{N_x - 1}^{n+1} u_{N_x - 1}^{n+1}] < 0$$

Поскольку имеют место приближения

$$\int_0^1 c \frac{\partial u}{\partial x} u dx \approx \sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = 0, \int_0^1 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx \approx \mu \sum_{i=1}^{N_x - 1} h_x u_i^{n+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} < 0,$$

то *консервативность немонотонной* схемы (*) доказана.

Для получения априорных оценок используются неравенство Коши, ε – неравенство и леммы.

<u>Неравенство</u> *<u>Коши</u>* $\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2}$

Имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{N} (a_i z + b_i)^2 \ge 0$. Для того чтобы выполнялось это очевидное соотношение дискриминант квадратного уравнения

$$(\sum_{i=1}^{N} a_i^2) z^2 + 2(\sum_{i=1}^{N} a_i b_i) z + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 = 0$$

должен быть неположительным: $\Delta = [2\sum_{i=1}^{N} a_i b_i]^2 - 4\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \sum_{i=1}^{N} b_i^2 \le 0$.

Сокращая на 4 и извлекая корень получаем неравенство *Коши.*

ε – **<u>неравенство</u>** $|cd| \le \varepsilon c^2 + \frac{1}{4\varepsilon} d^2, \varepsilon > 0$

Вытекает из неравенства $\pm 2ab \le a^2 + b^2$, если в нем переобозначить $a = c\sqrt{\varepsilon}, d = b/(2\sqrt{\varepsilon})$.

Вводятся скалярные произведения сеточных функций в областях, определенных в **2.1 главы 2**. На сетке Ω_h скалярное произведение введно выше. Аналогично вводятся скалярные произведения: на сетке $\Omega'_{hm} = \Omega_h US_{mh},\ m=1$:

$$[u^{n+1}, z^{n+1}) = \sum_{i=0}^{N_x-1} h_x u_i^{n+1} z_i^{n+1} = \sum_{x\in\Omega'_{h1}} h_x u^{n+1}(x) z^{n+1}(x)$$

и на сетке $\Omega''_{hm} = \Omega_h \overline{US}_{mh}, m=1$:

$$(u^{n+1}, z^{n+1}] = \sum_{i=1}^{N_x} h_x u_i^{n+1} z_i^{n+1} = \sum_{x\in\Omega''_{h1}} h_x u^{n+1}(x) z^{n+1}(x)$$

Им соответствуют нормы

$$|[z^{n+1}\|^2 = [z^{n+1}, z^{n+1}) = \sum_{i=0}^{N_x-1} h_x z_i^{n+1} z_i^{n+1},\ \|z^{n+1}]|^2 = (z^{n+1}, z^{n+1}] = \sum_{i=1}^{N_x} h_x z_i^{n+1} z_i^{n+1}$$

Лемма-А. Для $z^{n+1}\in H$, т.е. $z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0$, имеет место равенство $(Cz^{n+1}, z_{\bar{x}}^{n+1}) = (Ch_x/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2], C=const$.

Доказательство. В скалярном произведении с учетом $z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0$ совершается дополнение до полного квадрата

$$(Cz^{n+1}, z_{\bar{x}}^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x Cz_i^{n+1} \frac{z_i^{n+1}-z_{i-1}^{n+1}}{h_x} = \sum_{i=1}^{N_x} h_x \frac{Ch_x}{2}\left(\frac{z_i^{n+1}-z_{i-1}^{n+1}}{h_x}\right)^2 = \left(\frac{Ch_x}{2}, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2\right]$$

Лемма-В. Для $z^{n+1}\in H$, т.е. $z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0$, имеет место равенство $(Cz^{n+1}, z_x^{n+1}) = [-Ch_x/2, (z_x^{n+1})^2), C=const$.

Доказательство. В скалярном произведении с учетом $z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0$ совершается аналогичное дополнение до полного квадрата

$$(Cz^{n+1}, z_x^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} h_x Cz_i^{n+1} \frac{z_{i+1}^{n+1}-z_i^{n+1}}{h_x} = -\sum_{i=1}^{N_x} h_x \frac{Ch_x}{2}\left(\frac{z_{i+1}^{n+1}-z_i^{n+1}}{h_x}\right)^2 = \left[-\frac{Ch_x}{2}, (z_x^{n+1})^2\right)$$

Лемма-С. Для $z^{n+1}\in H$, т.е. $z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0$, имеет место равенство $(\mu z^{n+1}, z_{x\bar{x}}^{n+1}) = [-\mu/2, (z_x^{n+1})^2) + (-\mu/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2], \mu=const$.

Доказательство. Благодаря леммам-А и –В, где надо положить $C=\mu/h_x$ и имея в виду равенство $z_{x\bar{x}}^{n+1} = (z_x^{n+1} - z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x$ находим

$$(\mu z^{n+1}, z_{x\bar{x}}^{n+1}) = (\mu z^{n+1}, (z_x^{n+1} - z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x) = (Cz^{n+1}, z_x^{n+1}) - (Cz^{n+1}, z_{\bar{x}}^{n+1}) =$$

$$= [-Ch_x/2, (z_x^{n+1})^2) + (-Ch_x/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2] = [-\mu/2, (z_x^{n+1})^2) + (-\mu/2, (z_{\bar{x}}^{n+1})^2],$$

ч.т.д.

Для погрешности консервативной схемы имеет место разностная задача

$$\frac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau_{n+1}} + c\frac{z_{i+1}^{n+1}-z_{i-1}^{n+1}}{2h_x} = \mu\frac{z_{i+1}^{n+1}-2z_i^{n+1}+z_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + \psi_i^{n+1}, z_i^0 = 0, \qquad (**)$$

$$1\le i\le N_x-1, z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0,$$

что может быть записано в разностных производных в форме

$$z_{\bar{t}}^{n+1} + cz_{\tilde{x}}^{n+1} = \mu z_{x\bar{x}}^{n+1} + \psi^{n+1}, z^0 = 0, x\in\Omega_h,\ z_0^{n+1}=0, z_{N_x}^{n+1}=0, \qquad (***)$$

где погрешность аппроксимации равна $\psi^{n+1}(x) = O(\tau_{n+1}) + O(h_x^2)$.

Умножая обе части уравнения (***) скалярно на $\tau_{n+1}z^{n+1}$, в результате получаем энергетическое тождество

$$(z^{n+1}-z^n,z^n)+\tau_{n+1}(cz_{\tilde{x}}^{n+1},z^{n+1})=\tau_{n+1}(\mu z_{x\bar{x}}^{n+1},z^{n+1})+\tau_{n+1}(\psi^{n+1},z^{n+1}),$$

где

$$(cz_{\tilde{x}}^{n+1},z^{n+1})=(c/2*(z_x^{n+1}+z_{\bar{x}}^{n+1}),z^{n+1}),\ (\mu z_{x\bar{x}}^{n+1},z^{n+1})=(\mu(z_x^{n+1}-z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x,z^{n+1}),$$

в силу чего энергетическое тождество принимает вид

$$(z^{n+1}-z^n,z^{n+1})+\tau_{n+1}(c/2*(z_x^{n+1}+z_{\bar{x}}^{n+1}),z^{n+1})=\tau_{n+1}(\mu(z_x^{n+1}-z_{\bar{x}}^{n+1})/h_x,z^{n+1})+\tau_{n+1}(\psi^{n+1},z^{n+1}),$$

или после приведения подобных

$$(z^{n+1}-z^n,z^{n+1})-\tau_{n+1}((\frac{\mu}{h_x}-\frac{c}{2})z_x^{n+1},z^{n+1})+\tau_{n+1}((\frac{\mu}{h_x}+\frac{c}{2})z_{\bar{x}}^{n+1},z^{n+1})=\tau_{n+1}(\psi^{n+1},z^{n+1})$$

На основании лемм -А и –В это тождество преобразуется к виду:

$$(z^{n+1},z^{n+1})+\tau_{n+1}[(\frac{\mu}{h_x}-\frac{c}{2})\frac{h_x}{2},(z_x^{n+1})^2)+\tau_{n+1}((\frac{\mu}{h_x}+\frac{c}{2})\frac{h_x}{2},(z_{\bar{x}}^{n+1})^2)=(z^n,z^{n+1})+\tau_{n+1}(\psi^{n+1},z^{n+1})$$

По неравенству *Коши*

$$(z^n,z^{n+1})=\sum_{i=1}^{N_x-1}h_x z_i^n z_i^{n+1}=\sum_{i=1}^{N_x-1}(\sqrt{h_x}z_i^n)(\sqrt{h_x}z_i^{n+1})\le\sum_{i=1}^{N_x-1}(\sqrt{h_x}z_i^n)^2\sum_{i=1}^{N_x-1}(\sqrt{h_x}z_i^{n+1})^2=\|z^n\|\|z^{n+1}\|,$$

выводится аналогичное неравенство

$$(\psi^{n+1},z^{n+1})=\sum_{i=1}^{N_x-1}h_x\psi_i^{n+1}z_i^{n+1}=\sum_{i=1}^{N_x-1}(\sqrt{h_x}\psi_i^{n+1})(\sqrt{h_x}z_i^{n+1})\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{N_x-1}(\sqrt{h_x}\psi_i^{n+1})^2\sum_{i=1}^{N_x-1}(\sqrt{h_x}z_i^{n+1})^2=\|\psi^{n+1}\|\cdot\|z^{n+1}\|$$

В результате тождество переходит в энергетическое неравенство

$$\|z^{n+1}\|^2+\tau_{n+1}[(\frac{\mu}{h_x}-\frac{c}{2})\frac{h_x}{2},(z_x^{n+1})^2)+\tau_{n+1}((\frac{\mu}{h_x}+\frac{c}{2})\frac{h_x}{2},(z_{\bar{x}}^{n+1})^2)=$$

$$=(z^n,z^{n+1})+\tau_{n+1}(\psi^{n+1},z^{n+1})\le\|z^n\|\cdot\|z^{n+1}\|+\tau_{n+1}\|\psi^{n+1}\|\cdot\|z^{n+1}\|$$

Потребуем выполнения известных неравенств $(\frac{\mu}{h_x}\mp\frac{c}{2})\ge 0$, использованных ранее в максимум-норме С. Тогда в левой части второй и третий члены становятся неотрицательными числами и, отбрасывая их, только усилим данное неравенство

$$\|z^{n+1}\|^2\le\|z^n\|\|z^{n+1}\|+\tau_{n+1}\|\psi^{n+1}\|\|z^{n+1}\|,n=0,1,...,N_\tau-1$$

Сокращая на $\|z^{n+1}\|$, получаем

$$\|z^{n+1}\|\le\|z^n\|+\tau_{n+1}\|\psi^{n+1}\|,n=0,1,...,N_\tau-1,$$

Данные неравенства суммируются, как обычно,

$$\sum_{n=0}^{k}\|z^{n+1}\|\le\sum_{n=0}^{k}\|z^n\|+\sum_{n=0}^{k}\tau_{n+1}\|\psi^{n=1}\|,k=0,1,...,N_\tau-1$$

После сокращений получается

$$\|z^{k+1}\|\le\|z^0\|+\sum_{n=0}^{k}\tau_{n+1}\|\psi^{n+1}\|,k=0,1,...,N_\tau-1$$

Начальное условие дает $\|z^0\|=0$, в силу чего

$$\|z^{k+1}\|\le\|z^0\|+\sum_{n=0}^{k}\tau_{n+1}\|\psi^{n+1}\|=\sum_{n=0}^{k}\tau_{n+1}\|\psi^{n+1}\|,k=0,1,...,N_\tau-1$$

Далее производится оценка

$$\| z^{k+1} \| \le \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \| \psi^n \| \le \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \max_{0 \le n \le k} \| \psi^n \| \le \max_{0 \le n \le k} \| \psi^n \| \sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1}$$

На основании очевидного неравенства $\sum_{n=0}^{k} \tau_{n+1} \le \bar{t}$ находим

$$\| z^{k+1} \| \le \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \psi^{n+1} \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1,$$

где пределом погрешности аппроксимации является нуль

$$\| \psi^n \| = O(\tau_{n+1}) + O(h_x^2) \to 0$$

при сгущении узлов сеточных областей $\tau_{n+1} \to 0, h_x \to 0.$

Сходимость *консервативной* схемы здесь доказана *методом энергетических неравенств.* Ранее устойчивость и сходимость таких схем была исследована в сеточной максимум-норме С.

Консервативные схемы *немонотонны*, сходятся и устойчивы при выполнении ограничения на шаги пространственной сетки $(\frac{\mu}{h_x} \mp \frac{c}{2}) \ge 0$, эти же условия являются условиями устойчивости метода трехточечной прогонки, поэтому консервативные схемы *неэффективны*.

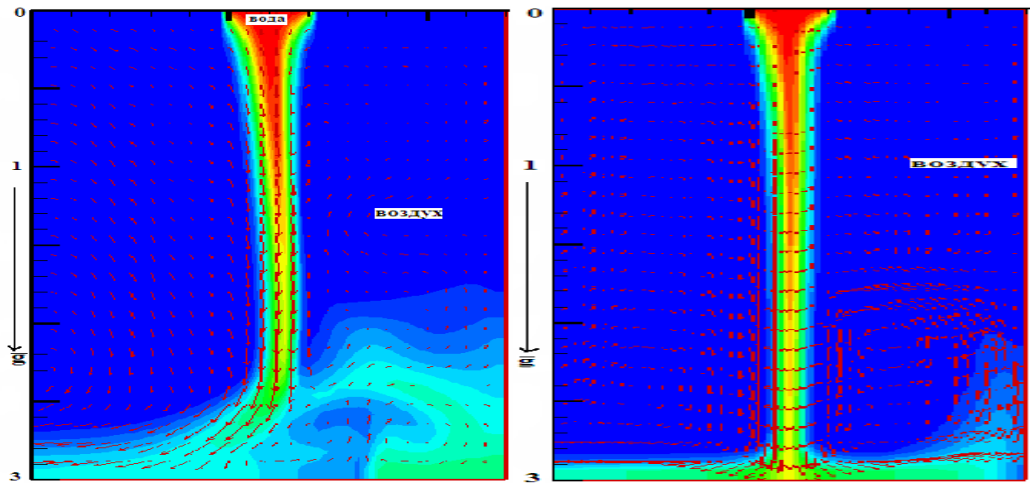
Вопросы

1. Каким свойством обладают консервативные схемы?
2. В схеме *Ричардсона* доказать, что корни дисперсионного квадратичного уравнения по модулю строго больше 1: $| p | > 1$, тем самым будет показана абсолютная неустойчивость схемы *Ричардсона.*
3. Для аппроксимаций 2-го порядка точности граничных условий *Неймана*

$$(\lambda \frac{-3\Phi_0^n + 4\Phi_1^n - \Phi_2^n}{2h_x} + \gamma \Phi_0^n)\Big|_{S_h} = \varphi_0^n, \ (\lambda \frac{3\Phi_{N_x}^n - 4\Phi_{N_x-1}^n + \Phi_{N_x-2}^n}{2h_x} + \gamma \Phi_{N_x}^n)\Big|_{S_h} = \varphi_{N_x}^n$$

написать формулы трехточечных прогонок; то же самое выполнить для формул пятиточечной прогонки.

4. Доказать в схема *Дюфорта-Франкеля* выполнение неравенства $| p | \le 1$.



Численное моделирование свободного падения струи воды в замкнутый объем воздуха

Глава 6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

6.1. Постановка задачи

Рассматривается задача *Коши-Дирихле* для двумерного параболического уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u(x,y,t)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+v(x,y,t)\frac{\partial \Phi}{\partial y}=a^2(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2})+f(x,y,t), \qquad (1)$$

$$a^2=const, \Phi\Big|_{t=t_0}=d(x,y), \Phi\Big|_S=\varphi(x,y,t)$$

6.2. Явные монотонные схемы

Явная монотонная схема 1-го порядка аппроксимации конвективных членов

По теории **главы 3** явная монотонная схема

$$\Phi_t^n+[\frac{u^n+|u^n|}{2}\Phi_{\bar{x}}^n+\frac{u^n-|u^n|}{2}\Phi_x^n]+[\frac{|v^n|+v^n}{2}\Phi_{\bar{y}}^n+\frac{v^n-|v^n|}{2}\Phi_y^n]=$$

$$=a^2(\Phi_{x\dot{x}}^n+\Phi_{y\dot{y}}^n)+f^n, (x,y)\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0}, \qquad (2)$$

$$\Phi^0=d\ (x,y), (x,y)\in\Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x,y), (x,y)\in S_h, t\in\overline{\Omega}_\tau,$$

использующая аппроксимацию *Булеева-Петрищева,* имеет «аппроксимационную вязкость» и 1-й порядок точности.

Через разностные операторы схема (2) *записывается в виде*

$$\frac{\Phi_{ij}^{n+1}-\Phi_{ij}^n}{\tau_{n+1}}+[\frac{u_{ij}^n+|u_{ij}^n|}{2}\frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}}+\frac{u_{ij}^n-|u_{ij}^n|}{2}\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}}]+[\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2}\frac{\Delta_{-2}\Phi^n}{h_{yj}}+\frac{v_{ij}^n-|v_{ij}^n|}{2}\frac{\Delta_{+2}\Phi^n}{h_{yj+1}}]=$$

$$=a^2[(\frac{\Delta_{+1}\Phi^n}{h_{xi+1}}-\frac{\Delta_{-1}\Phi^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+(\frac{\Delta_{+2}\Phi^n}{h_{yj+1}}-\frac{\Delta_{-2}\Phi^n}{h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yj}}]+f_{ij}^n, x\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0},$$

$$\Phi^0=d\ (x_i,y_j), (x_i,y_j)\in\Omega_h, \Phi^n\Big|_{S_h}=\varphi^n(x_i,y_j), (x_i,y_j)\in S_h, t\in\overline{\Omega}_\tau$$

Вводятся краткие обозначения коэффициентов при операторах

$$c_{+1}^n=\frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ij}^n|-u_{ij}^n}{2h_{xi+1}}, c_{-1}^n=\frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2}^n=\frac{a^2}{h_{yj+1}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ij}^n|-v_{ij}^n}{2h_{yj+1}}, c_{-2}^n=\frac{a^2}{h_{yj}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2h_{yj}}, \qquad (3)$$

$$\Lambda_1^n=c_{+1}^n\Delta_{+1}-c_{-1}^n\Delta_{-1}, \Lambda_2^n=c_{+2}^n\Delta_{+2}-c_{-2}^n\Delta_{-2}$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\psi^n(x_i,y_j)=O(\tau_{n+1})+O(\hbar_{xi})+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(a^2\hbar_{xi}^2)+$$

$$+O(\hbar_{yj})+O(a^2(h_{yj+1}-h_{yj}))+O(a^2\hbar_{yj}^2), (x,y)\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0}$$

Явная монотонная схема 2-го порядка аппроксимации конвективных членов

Конструкция такой схемы (*Джакупов К.Б.* [20]) имеет вид:

$$\frac{\Phi_{ij}^{n+1}-\Phi_{ij}^{n}}{\tau_{n+1}}+\frac{|u_{ij}^{n}|+u_{ij}^{n}}{2}\Phi_{\bar{x}}^{n}+\frac{u_{ij}^{n}-|u_{ij}^{n}|}{2}\Phi_{x}^{n}+\frac{|v_{ij}^{n}|+v_{ij}^{n}}{2}\Phi_{\bar{y}}^{n}+\frac{v_{ij}^{n}-|v_{ij}^{n}|}{2}\Phi_{y}^{n}=$$

$$=\frac{a_x^{v(n)}}{\hbar_{xi}}(\Phi_x^n-\Phi_{\bar{x}}^n)+\frac{a_y^{u(n)}}{\hbar_{yj}}(\Phi_y^n-\Phi_{\bar{y}}^n)+f_{ij}^n,\ i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1, \qquad (4)$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q=[1+\frac{|u_{ij}^{n}|+u_{ij}^{n}}{4a^2}h_{xi}+\frac{|u_{ij}^{n}|-u_{ij}^{n}}{4a^2}h_{xi+1}+\frac{|v_{ij}^{n}|+v_{ij}^{n}}{4a^2}h_{yj}+\frac{|v_{ij}^{n}|-v_{ij}^{n}}{4a^2}h_{yj+1}],$$

$$a_x^{v(n)}=[a^2+\frac{|v_{ij}^{n}|+v_{ij}^{n}}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ij}^{n}|-v_{ij}^{n}}{4}h_{yj+1}]/Q,\ a_y^{u(n)}=[a^2+\frac{|u_{ij}^{n}|+u_{ij}^{n}}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ij}^{n}|-u_{ij}^{n}}{4}h_{xi+1}]/Q$$

Погрешность аппроксимации равна

$$\psi^n(x_i,y_j)=O(\tau_{n+1})+O(\hbar_{xi}^2)+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(a^2\hbar_{xi}^2)+$$
$$+O(\hbar_{yj}^2)+O(a^2(h_{yj+1}-h_{yj}))+O(a^2\hbar_{yj}^2),(x,y)\in\Omega_h,t\in\Omega_{t0}$$

Здесь коэффициенты при операторах равны

$$c_{+1}^n=\frac{a_x^{v(n)}}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ij}^{n}|-u_{ij}^{n}}{2h_{xi+1}}>0,\ c_{-1}^n=\frac{a_x^{v(n)}}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ij}^{n}|+u_{ij}^{n}}{2h_{xi}}>0,$$

$$c_{+2}^n=\frac{a_y^{u(n)}}{h_{yj+1}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ij}^{n}|-v_{ij}^{n}}{2h_{yj+1}}>0,c_{-2}^n=\frac{a_y^{u(n)}}{h_{yj}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ij}^{n}|+v_{ij}^{n}}{2h_{yj}}>0,$$

$$\Lambda_1^n=c_{+1}^n\Delta_{+1}-c_{-1}^n\Delta_{-1},\quad \Lambda_2^n=c_{+2}^n\Delta_{+2}-c_{-2}^n\Delta_{-2}$$

С их применением монотонные схемы (2) и (4) записываются в едином операторном виде

$$\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^n}{\tau_{n+1}}=(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)\Phi^n+f^n \qquad (5)$$

Сходимость. Для *погрешности обеих схем* получается задача

$$\frac{Z^{n+1}-Z^n}{\tau_{n+1}}=(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)Z^n+\psi^n,Z^0=0,\quad Z^n\big|_{S_h}=0$$

Преобразуем ее к виду

$$Z^{n+1}=Z^n+\tau_{n+1}(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)Z^n+\tau_{n+1}\psi^n,$$
$$Z^{n+1}=[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)]Z^n+\tau_{n+1}\psi^n \qquad (6)$$

По лемме-4б должно быть выполнено условие

$$0<\tau_{n+1}\le 1/\|\sum_{m=1}^{2}(c_{-m}^n+c_{+m}^n)\|,n=0,...,N_\tau-1, \qquad (7)$$

тогда $\|[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)]\|\le 1$, вследствие чего получаются неравенства

$$\|Z^{n+1}\|=\|[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)]Z^n+\tau_{n+1}\psi^n\|\le$$
$$\le\|[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^n+\Lambda_2^n)]\|\|Z^n\|+\tau_{n+1}\|\psi^n\|\le\|Z^n\|+\tau_{n+1}\|\psi^n\|,$$

$$\| Z^{k+1} \| \le \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \psi^n \|, k = 0,1,..., N_\tau - 1$$

откуда вытекает сходимость монотонных явных схем (2) и (4).

6.3. Явная неоднородная схема без «аппроксимационной вязкости»

В этой схеме для конвективных членов используется аппроксимация *Джакупова К.Б.*, имеющая 2-й порядок точности как на равномерной так и на неравномерной сетках, и имеет вид в принятых обозначениях:

$$\Phi_t^n + [\frac{u^n + |u^n|}{2} \Phi_{\bar{x}^0}^n + \frac{u^n - |u^n|}{2} \Phi_{x^0}^n] + [\frac{v^n + |v^n|}{2} \Phi_{\bar{y}^0}^n + \frac{v^n - |v^n|}{2} \Phi_{y^0}^n] =$$
$$= a^2 (\Phi_{x\dot{x}}^n + \Phi_{y\dot{y}}^n) + f^n, (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0},$$

Условие устойчивости этой схемы принимает наиболее простой вид на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y$:

$$[1 - \tau_{n+1} (\frac{2a^2}{h_x^2} + \frac{3|u_{ij}^n|}{2h_x} + \frac{2a^2}{h_y^2} + \frac{3|v_{ij}^n|}{2h_y})] \ge 0, i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1,$$

6.4. Схема типа *Кранка-Николсона*

Схема типа *Кранка-Николсона*, использующая аппроксимацию *Джакупова К.Б.* [20], имеет вид

$$\Phi_t^n + [\frac{u^{n+\frac{1}{2}} + |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{\bar{x}}^{n+1} + \Phi_{\bar{x}}^n}{2} + \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - |u^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_x^{n+1} + \Phi_x^n}{2}] +$$
$$+ [\frac{v^{n+\frac{1}{2}} + |v^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_{\bar{y}}^{n+1} + \Phi_{\bar{y}}^n}{2} + \frac{v^{n+\frac{1}{2}} - |v^{n+\frac{1}{2}}|}{2} \frac{\Phi_y^{n+1} + \Phi_y^n}{2}] =$$
$$= a_x^{v(n+\frac{1}{2})} \frac{\Phi_{x\dot{x}}^{n+1} + \Phi_{x\dot{x}}^n}{2} + a_y^{u(n+\frac{1}{2})} \frac{\Phi_{y\dot{y}}^{n+1} + \Phi_{y\dot{y}}^n}{2} + f^{n+\frac{1}{2}}, (x, y) \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$

Погрешность аппроксимации имеет 2-й порядок и равна

$$\psi^{n+\frac{1}{2}}(x_i, y_j) = O(\tau_{n+1}^2) + O(\hbar_{xi}^2) + O(\hbar_{yj}^2) + O(a^2 (h_{xi+1} - h_{xi})) +$$
$$+ O(a^2 \hbar_{xi}^2) + O(a^2 (h_{yj+1} - h_{yj})) + O(a^2 \hbar_{yj}^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$

С помощью обозначений

$$c_{+1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_x^{v(n+\frac{1}{2})}}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} + \frac{|u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi+1}}, c_{-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_x^{v(n+\frac{1}{2})}}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{|u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| + u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{xi}},$$
$$c_{+2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_y^{u(n+\frac{1}{2})}}{h_{yj+1} \hbar_{yj}} + \frac{|v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| - v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{yj+1}}, c_{-2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{a_y^{u(n+\frac{1}{2})}}{h_{yj} \hbar_{yj}} + \frac{|v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}| + v_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_{yj}},$$
$$\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} = c_{+1}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_{+1} - c_{-1}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_{-1}, \quad \Lambda_1^{n+\frac{1}{2}} = c_{+2}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_{+2} - c_{-2}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_{-2}$$

схема записывается кратко

$$\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^n}{\tau_{n+1}}=(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})\frac{\Phi^{n+1}+\Phi^n}{2}+f^{n+\frac{1}{2}}$$

Сходимость. Для *погрешности схемы получается задача*

$$\frac{Z^{n+1}-Z^n}{\tau_{n+1}}=(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})\frac{Z^{n+1}+Z^n}{2}+\psi^{n+\frac{1}{2}},Z^0=0,\quad Z^n\Big|_{S_h}=0$$

Преобразуем это выражение к виду

$$[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^{n+1}=[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n+\tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}},$$

$$Z^{n+1}=[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}\{[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n+\tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}}\},$$

$$\|Z^{n+1}\|=\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}\{[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n+\tau_{n+1}\psi^{n+\frac{1}{2}}\}\|\le \quad (8)$$

$$\le\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]Z^n\|+\tau_{n+1}\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}}\|\le$$

$$\le\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]\|\|Z^n\|+\tau_{n+1}\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}\|\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|$$

По леммам-4б и -5а имеют место оценки

$$\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}\|\le 1,\|[E-\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]^{-1}[E+\tau_{n+1}(\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+\frac{1}{2}})]\|\le 1,$$

в силу чего из вытекает

$$\|Z^{n+1}\|\le\|Z^n\|+\tau_{n+1}\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,n=0,1,...,N_\tau-1,\ \|Z^{k+1}\|\le\bar{t}\max_{0\le n\le N_\tau-1}\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,k=0,1,...,N_\tau-1$$

сходимость схемы типа *Кранка-Николсона,* ч.т.д. Устойчивость схемы доказывается аналогично.

Монотонная неявная схема имеет вид

$$\Phi_{\bar{t}}^n+[\frac{u^n+|u^n|}{2}\Phi_{\bar{x}}^n+\frac{u^n-|u^n|}{2}\Phi_x^n]+[\frac{v^n+|v^n|}{2}\Phi_{\bar{y}}^n+\frac{v^n-|v^n|}{2}\Phi_y^n]=$$

$$=\frac{a_x^{v(n)}}{\hbar_{xi}}(\Phi_x^n-\Phi_{\bar{x}}^n)+\frac{a_y^{u(n)}}{\hbar_{yj}}(\Phi_y^n-\Phi_{\bar{y}}^n)+f^n,(x,y)\in\Omega_h,t\in\Omega_{t1},$$

Погрешность аппроксимации 1-го порядка по времени и равна

$$\psi^n(x_i,y_j)=O(\tau_{n+1})+O(\hbar_{xi}^2)+O(\hbar_{yj}^2)+O(a^2(h_{xi+1}-h_{xi}))+O(a^2\hbar_{xi}^2)+$$

$$+O(a^2(h_{yj+1}-h_{yj}))+O(a^2\hbar_{yj}^2),x\in\Omega_h,t\in\Omega_{t0}$$

Схема абсолютно устойчива, сходимость доказывается с помощью леммы -4б.

В схеме типа *Кранка-Николсона* и неявной схеме Φ^{n+1} вычисляется либо матричной прогонкой либо итерациями (можно методом простой итерации *Якоби*).

6.5. Схема *Письмана-Ракфорда*

Письман, Ракфорд, а также одновременно *Дуглас* в 1955г. уравнение теплопроводности [12]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}),a^2=const,T\Big|_{t=t_0}=d(x,y),T\Big|_S=\varphi(x,y,t)$$

предложили аппроксимировать разностной схемой альтернативных направлений

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}}-T^{n}}{0.5\tau}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^{n}, \tag{9}$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^{n+1}, T^0=d, \tag{10}$$

на равномерной сетке $h_{xi+1}=h_{xi}=h_x, h_{yj+1}=h_{yj}=h_y$,

$$A_1=\frac{a^2}{h_x^2}(\Delta_{+1}-\Delta_{-1}), A_2=\frac{a^2}{h_y^2}(\Delta_{+2}-\Delta_{-2}),$$

Краевые условия *Письманом-Ракфордом, Дугласом* взяты в виде

$$T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h}=\varphi^{n+\frac{1}{2}}, \quad T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi^{n+1} \tag{11}$$

При краевых условиях (11) *погрешность аппроксимации равна*

$$\psi^{n+\frac{1}{2}}(x_i,y_j)=O(\tau\ )+O(h_x^2\ )+O(h_y^2\ ), x\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0} \tag{12}$$

Трехточечными прогонками по направлению x вычисляется поле $T^{n+\frac{1}{2}}$ с использованием краевого условия $T^{n+\frac{1}{2}}=\varphi^{n+\frac{1}{2}}$, трехточечными прогонками по направлению y вычисляется поле T^{n+1} с использованием краевого условия $T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi^{n+1}$. Схема *Письмана-Ракфорда* абсолютно устойчива [12].

6.6. Схема альтернативных направлений с граничными условиями *Кряквиной-Дьяконова*

Точность схемы *Письмана-Ракфорда и Дугласа* по времени 1-го порядка (12). *Кряквина Т.М., Дьяконов Е.Г.* для повышения точности использовали следующий прием.

Из (9) и (10) исключается $A_1T^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{2T^{n+\frac{1}{2}}-T^{n}-T^{n+1}}{0.5\tau}=A_2T^{n}-A_2T^{n+1}, x\in\Omega_h,$$

откуда вытекает

$$T^{n+\frac{1}{2}}=\frac{T^{n}+T^{n+1}}{2}+\frac{\tau}{4}(A_2T^{n}-A_2T^{n+1}), x\in\Omega_h \tag{13}$$

Данное выражение, очевидно, имеет место во всех внутренних узлах $x\in\Omega_h$ без исключения. Именно поэтому логично требовать выполнения данного равенства и в граничных узлах S_h:

$$T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h}=\frac{T^{n}+T^{n+1}}{2}\Big|_{S_h}+\frac{\tau}{4}(A_2T^{n}-A_2T^{n+1})\Big|_{S_h}, x\in S_h \tag{14}$$

На границе $T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi^{n+1}$, в силу чего из (14) получается нужное:

$$T^{n+\frac{1}{2}}|_{S_h\left(\begin{smallmatrix}x=0\\x=a_1\end{smallmatrix}\right)}=\frac{\varphi^n+\varphi^{n+1}}{2}+\frac{\tau}{4}(A_2\varphi^n-A_2\varphi^{n+1}) \qquad (15)$$

Схема

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}}-T^n}{0.5\tau}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^n, \qquad (16)$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^{n+1}, T^0=d, \qquad (17)$$

имеет следующие граничные условия

$$T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi^{n+1}, \qquad (18)$$

$$T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h\left(\begin{smallmatrix}x=0\\x=a_1\end{smallmatrix}\right)}=\frac{\varphi^n+\varphi^{n+1}}{2}+\frac{\tau}{4}(A_2\varphi^n-A_2\varphi^{n+1}), \qquad (19)$$

Граничное условие (19) позволяет исключить $T^{n+\frac{1}{2}}$ из (16)-(17), поэтому дано название - *схема переменных направлений* [6]. В то время как условие *Письмана-Ракфорда* $T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h}=\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ не дает такой возможности, т.е. из (9)-(10) нельзя исключить $T^{n+\frac{1}{2}}$. Исключение $T^{n+\frac{1}{2}}$ производится следующими действиями. Система (16)-(17) приводится к виду

$$(E-0.5\tau A_1)T^{n+\frac{1}{2}}=(E+0.5\tau A_2)T^n, \qquad (20)$$

$$(E-0.5\tau A_2)T^{n+1}=(E+0.5\tau A_1)T^{n+\frac{1}{2}} \qquad (21)$$

Уравнение (20) умножается слева на матрицу $(E+0.5\tau A_1)$, (21) – на $(E-0.5\tau A_1)$ и производится сложение систем для исключения $T^{n+\frac{1}{2}}$.

Получается схема в целых шагах

$$(E-0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_2)T^{n+1}=(E+0.5\tau A_1)(E+0.5\tau A_2)T^n \qquad (22)$$

Выражение (22) преобразуется к виду

$$\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}=(A_1+A_2)\frac{T^{n+1}+T^n}{2}-\frac{1}{4}\tau^2A_1A_2\left(\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}\right) \qquad (23)$$

Из разложений в ряды *Тейлора*

$$T^n=T^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^2T}{\partial t^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}+O(\tau^3),\ T^{n+1}=T^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^2T}{\partial t^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}+O(\tau^3),$$

следуют

$$\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}+O(\tau^2),\ \frac{T^{n+1}+T^n}{2}=T^{n+\frac{1}{2}}+O(\tau^2) \qquad (24)$$

В силу (24) *погрешность аппроксимации* схемы (16)-(19) равна

$$\psi^{n+\frac{1}{2}}(x_i,y_j)=O(\tau^2)+O(h_x^2)+O(h_y^2),\ x\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0},$$

следовательно, имеет более высокий порядок точности.

Устойчивость. Записав аналогично **(**22) уравнение для возмущения

схемы,умножим его на обратный оператор $(E-0.5\tau A_2)^{-1}(E-0.5\tau A_1)^{-1}$.

Получается:

$$\hat{Z}^{n+1}=(E-0.5\tau A_2)^{-1}(E-0.5\tau A_1)^{-1}(E+0.5\tau A_1)(E+0.5\tau A_2)\hat{Z}^n \qquad (25)$$

Операторы составлены из постоянных коэффициентов, поэтому возможна их перестановка в (25)

$$\hat{Z}^{n+1}=(E+0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_1)^{-1}(E+0.5\tau A_2)(E-0.5\tau A_2)^{-1}\hat{Z}^n \qquad (26)$$

По лемме-5б нормы операторов не превосходят 1:

$$\| (E+0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_1)^{-1}(E+0.5\tau A_2)(E-0.5\tau A_2)^{-1} \| \le$$

$$\le \| (E+0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_1)^{-1} \| \cdot \| (E+0.5\tau A_2)(E-0.5\tau A_2)^{-1} \| \le 1$$

Взяв по норме от обеих частей (26), воспользуемся данной оценкой

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| = \| (E+0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_1)^{-1}(E+0.5\tau A_2)(E-0.5\tau A_2)^{-1}\hat{Z}^n \| \le$$

$$\le \| (E+0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_1)^{-1}(E+0.5\tau A_2)(E-0.5\tau A_2)^{-1} \| \| \hat{Z}^n \| \le \| \hat{Z}^n \|, \quad n=0,1,...,N_\tau-1,$$

откуда вытекает

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| \le \| \hat{Z}^n \|, \| \hat{Z}^{n+1} \| \le \| \hat{Z}^0 \|, \ n=0,1,...,N_\tau-1$$

Таким образом, доказана абсолютная устойчивость схемы переменных направлений, потому как имеют место неравенства

$$\| \hat{Z}^{n+1} \| \le \| \varepsilon \|, n=0,1,...,N_\tau-1$$

6.7. Схема альтернативных направлений типа *Самарского*

Применяя обозначения 6.4 напишем схему переменных направлений двумерного уравнения диффузии**,** следуя конструкции *Самарского А.А.:*

$$\frac{C^{n+\frac{1}{2}}-C^n}{0.5\tau}=\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}C^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^nC^n+f^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (27)$$

$$\frac{C^{n+1}-C^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}=\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}C^{n+\frac{1}{2}}+\Lambda_2^{n+1}C^{n+1}+f^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда получается после исключения $\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}C^{n+\frac{1}{2}}$

$$C^{n+\frac{1}{2}}=\frac{C^n+C^{n+1}}{2}+\frac{\tau}{4}(\Lambda_2^nC^n-\Lambda_2^{n+1}C^{n+1}), x\in\Omega_h,$$

что позволяет поставить граничные условия по *Дьяконову Е.Г.*

$$C^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h\left(\substack{x=0\\x=a_1}\right)}=\frac{\varphi^n+\varphi^{n+1}}{2}+\frac{\tau}{4}(\Lambda_2^n\varphi^n-\Lambda_2^{n+1}\varphi^{n+1}) \qquad (29)$$

Перепишем (27)-(28) в виде

$$(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})C^{n+\frac{1}{2}}=(E+0.5\tau\Lambda_2^n)C^n+0.5\tau f^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (30)$$

$$(E-0.5\tau\Lambda_2^n)C^{n+1}=(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}}A_1)C^{n+\frac{1}{2}}+0.5\tau f^{n+\frac{1}{2}} \qquad (31)$$

Умножив (30) на $(E+0.5\tau\Lambda_1^n)$, (31) на $(E-0.5\tau\Lambda_1^n)$ и сложим их с целью исключения $C^{n+\frac{1}{2}}$. Получается

$$(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})C^{n+1}=(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})C^{n}+\tau f^{n+\frac{1}{2}}$$

Подействуем слева обратным оператором $(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}$:

$$(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})C^{n+1}=(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})C^{n}+\tau(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}f^{n+\frac{1}{2}}$$

По лемме-4а $\|(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}\|\le 1$, а по лемме-5б

$$\|(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})\|=\|(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}\|\le 1$$

Для погрешности схемы вытекает

$$(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1}=(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}+\tau(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}}$$

Беря по норме и используя оценки норм операторов, находим

$$\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1}\|=\|(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}+$$

$$+\tau(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}\psi^{n+\frac{1}{2}}\|\le\|(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(E+0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})\|\cdot$$

$$\cdot\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\|+\tau\|(E-0.5\tau\Lambda_1^{n+\frac{1}{2}})^{-1}\|\cdot\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|\le\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\|+\tau\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,$$

что дает неравенства

$$\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1}\|\le\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\|+\tau\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,\quad n=0,1,...,N_\tau-1 \qquad (32)$$

По лемме-5б

$$\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})^{-1}(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})\|=\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})^{-1}\|\le 1$$

По определению нормы линейного оператора и лемме-5б

$$\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})^{-1}\|=\sup_{\Psi\in H}\frac{\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})^{-1}\Psi\|}{\|\Psi\|}=\sup_{Z\in H}\frac{\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z\|}{\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})\ Z\|}\le 1 \qquad (33)$$

Из (33) вытекает

$$\|(E+0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\|\le\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\| \qquad (34)$$

На основании (34) переходим от (32) к следующему неравенству

$$\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1}\|\le\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\|+\tau\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,\ n=0,1,...,N_\tau-1$$

Суммируем

$$\sum_{n=0}^{k}\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n+1})Z^{n+1}\|\le\sum_{n=0}^{k}\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{n})Z^{n}\|+\sum_{n=0}^{k}\tau\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,\ k=0,1,...,N_\tau-1$$

После сокращений находим

$$\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{k+1})Z^{k+1}\|\le\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{0})Z^{0}\|+\sum_{n=0}^{k}\tau\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,\quad k=0,1,...,N_\tau-1 \qquad (35)$$

Начальная погрешность схемы равна нулю: $Z^0=0$ и имеют место неравенства

$$\sum_{n=0}^{k}\tau\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|\le\bar{t}\max_{0\le n\le N_\tau-1}\|\psi^{n+\frac{1}{2}}\|,\|(E-0.5\tau\Lambda_2^{k+1})Z^{k+1}\|\ge\|Z^{k+1}\|$$

Поэтому из (35) следует сходимость схемы переменных направлений

$$\| Z^{k+1} \| \le \bar{t} \max_{0 \le n \le N_\tau - 1} \| \psi^{n+\frac{1}{2}} \|, \quad k = 0,1,..., N_\tau - 1$$

6.8. Схема *Дугласа-Ракфорда*

Дуглас и Ракфорд [12] в 1955г. уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}), a^2 = const, T\Big|_{t=t_0} = d(x,y), T\Big|_S = \varphi(x,y,t)$$

аппроксимировали схемой со стабилизирующей поправкой

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}} + A_2 T^n, \tag{36}$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = A_2 (T^{n+1} - T^n), T^0 = d, \tag{37}$$

на равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y$,

$$A_1 = \frac{a^2}{h_x^2}(T_{+1} - 2E + T_{-1}) = \frac{a^2}{h_x^2}(\Delta_{+1} - \Delta_{-1}),$$

$$A_2 = \frac{a^2}{h_y^2}(T_{+2} - 2E + T_{-2}) = \frac{a^2}{h_y^2}(\Delta_{+2} - \Delta_{-2})$$

Граничные условия *Дуглас и Ракфорд* поставили в виде

$$T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{1}{2}}, \quad T^{n+1}\Big|_{S_h} = \varphi^{n+1} \tag{38}$$

По теории *Е.Г.Дьяконова* из (37) вытекает правильное граничное условие

$$T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h\left(\substack{x=o \\ x=a_1}\right)} = \varphi^n + (E - \tau A_2)(\varphi^{n+1} - \varphi^n) \tag{39}$$

Только на основании (39) можно исключить $T^{n+\frac{1}{2}}$ из (36)-(37), в результате чего схема *Дугласа-Ракфорда* становится эквивалентной схеме в целых шагах

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2)\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = A_1 T^n + A_2 T^n, \tag{40}$$

В данном случае *погрешность аппроксимации* равна

$$\psi^n(x_i, y_j) = O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0} \tag{41}$$

Обратно, для получения (36)-(37) из (40) обозначают

$$(E - \tau A_2)\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} \tag{42}$$

Очевидно (40) и (42) дают схему *Дугласа-Ракфорда* (36)-(37). Алгоритм решения прост. Трехточечными прогонками по направлению *x вычисляются* $T^{n+\frac{1}{2}}$ с использованием граничного условия (39), аналогично, трехточечными прогонками по направлению *y вычисляются* T^{n+1} с использованием граничного

условия $T^{n+1}\big|_{S_h}=\varphi^{n+1}$. Схема абсолютно устойчива. В трехмерной задаче

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), a^2=const,$$

$$T\big|_{t=t_0}=d(x,y,z), T\big|_S=\varphi(x,y,z,t) \qquad (43)$$

на равномерной сетке

$$h_{xi+1}=h_{xi}=h_x, h_{yj+1}=h_{yj}=h_y, h_{zk+1}=h_{zk}=h_z$$

используются операторы

$$A_1=\frac{a^2}{h_x^2}(\Delta_{+1}-\Delta_{-1}), A_2=\frac{a^2}{h_y^2}(\Delta_{+2}-\Delta_{-2}), A_3=\frac{a^2}{h_z^2}(\Delta_{+3}-\Delta_{-3}),$$

и схема *Дугласа-Ракфорда* имеет конструкцию

$$\frac{T^{n+\frac{1}{3}}-T^n}{\tau}=A_1T^{n+\frac{1}{3}}+A_2T^n+A_3T^n, \qquad (44)$$

$$\frac{T^{n+\frac{2}{3}}-T^{n+\frac{1}{3}}}{\tau}=A_2(T^{n+\frac{2}{3}}-T^n),$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n+\frac{2}{3}}}{\tau}=A_3(T^{n+1}-T^n),\ T^0=d,\ T^{n+1}\big|_{S_h}=\varphi^{n+1}$$

По теории *Дьяконова* из (44) вытекают граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{3}}\big|_{S_h\left(\substack{x=o\\x=a_1}\right)}=\varphi^n+(E-\tau A_2)(E-\tau A_3)(\varphi^{n+1}-\varphi^n), \qquad (45)$$

$$T^{n+\frac{2}{3}}\big|_{S_h\left(\substack{y=o\\y=a_2}\right)}=\varphi^n+(E-\tau A_3)(\varphi^{n+1}-\varphi^n) \qquad (46)$$

Только на основании (45)-(46) из системы (44) можно исключить $T^{n+\frac{1}{3}}, T^{n+\frac{2}{3}}$ и тем самым получить схему в целых шагах, эквивалентную схеме *Дугласа-Ракфорда:*

$$(E-\tau A_1)(E-\tau A_2)(E-\tau A_3)\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}=A_1T^n+A_2T^n+A_3T^n, \qquad (47)$$

В данном случае *погрешность аппроксимации* равна $\psi^n(x_i,y_j,z_k)=O(\tau\ )+O(h_x^2\ )+O(h_y^2\ )+O(h_z^2\ ), x\in\Omega_h, t\in\Omega_{t0}$.

Обратно, для получения схемы (44) в (47) вводят обозначения

$$(E-\tau A_2)(E-\tau A_3)\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}=\frac{T^{n+\frac{1}{3}}-T^n}{\tau}, \qquad (48)$$

$$(E-\tau A_3)\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}=\frac{T^{n+\frac{2}{3}}-T^n}{\tau} \qquad (49)$$

Очевидно, из (47),(48), (49) получается схема *Дугласа-Ракфорда* (44). Алгоритм реализации простой. Трехточечными прогонками по направлению *x вычисляются* $T^{n+\frac{1}{3}}$ с использованием граничного условия (45), трехточечными прогонками по направлению *y*

вычисляются $T^{n+\frac{2}{3}}$ с использованием граничного условия (46), аналогично, трехточечными прогонками по направлению *z* *вычисляются* T^{n+1} с использованием граничного условия $T^{n+1}\big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$. Схема *Дугласа-Ракфорда* абсолютно устойчива.

6.9. Схема расщепления *Яненко*

В 1959г. *Н.Н.Яненко* предложил схему расщепления [12]:

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} = A_1 T^{n+\frac{1}{2}}, \tag{50}$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = A_2 T^{n+1}, T^0 = d, T^{n+1}\big|_{S_h} = \varphi^{n+1} \tag{51}$$

По теории *Дьяконова Е.Г.* из (51) вытекает правильное граничное условие

$$T^{n+\frac{1}{2}}\big|_{S_h\left(\substack{x=o \\ x=a_1}\right)} = (E - \tau A_2)\varphi^{n+1}$$

Только в этом случае схема (50)-(51) будет эквивалентна схеме в целых шагах

$$(E - \tau A_1)(E - \tau A_2)T^{n+1} = T^n,$$

и в данном случае *погрешность аппроксимации* равна

$$\psi^n(x_i, y_j) = O(\tau\ ) + O(h_x^2\ ) + O(h_y^2\ ), x \in \Omega_h, t \in \Omega_{t0}$$

Схема устойчива, ибо

$$T^{n+1} = (E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1}T^n,$$

и по лемме-4а норма оператора перехода не превосходит 1:

$$\| (E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1} \| \le \| (E - \tau A_2)^{-1} \| \| (E - \tau A_1)^{-1} \| \le 1,$$

следовательно, имеют место неравенства, доказывающие абсолютную устойчивость схемы *Н.Н.Яненко*

$$\| T^{n+1} \| = \| (E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1}T^n \| \le \| (E - \tau A_2)^{-1}(E - \tau A_1)^{-1} \| \| T^n \| \le \| T^n \|,$$

$$\| T^{n+1} \| \le \| T^n \| \le \| T^{n-1} \| \le \ldots \le \| T^0 \|$$

6.10. Метод факторизации *Марчука-Яненко*

Идея метода излагается на следующих примерах. Введем обобщенные одномерные разностные операторы $\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3$.

Пусть имеет место неявная схема

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^{n+1} + \hat{\Lambda}_2 C^{n+1} + f^n,$$

эквивалентная следующей схеме

$$[E - \tau_{n+1}(\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2)]\frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + f^n, \tag{52}$$

В методе факторизации суммарный оператор заменяется приближенно на произведение одномерных операторов

$$[E-\tau_{n+1}(\hat{\Lambda}_1+\hat{\Lambda}_2)]\approx\ (E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2) \qquad (53)$$

Очевидно погрешность такой замены $O(\tau_{n+1}^2)$. В (52) суммарный оператор заменяется на (53), в результате получается схема с факторизованным оператором в левой части

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=\hat{\Lambda}_1C^n+\hat{\Lambda}_2C^n+f^n, \qquad (54)$$

которая легко реализуется. Вводится промежуточная величина

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=C^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (55)$$

которая подставляется в (54):

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)C^{n+\frac{1}{2}}=\hat{\Lambda}_1C^n+\hat{\Lambda}_2C^n+f^n, \qquad (56)$$

По теории *Дьяконова Е.Г.* из (55) вытекает граничное условие

$$C^{n+\frac{1}{2}}|_{S_h\left(\begin{smallmatrix}x=o\\x=a_1\end{smallmatrix}\right)}=(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau_{n+1}}\varphi^{n+1} \qquad (57)$$

Из (56) находится $C^{n+\frac{1}{2}}$, затем из (55) вычисляется искомая величина C^{n+1}. Если ввести промежуточную величину по другому

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=\frac{C^{n+\frac{1}{2}}-C^n}{\tau_{n+1}},$$

то можно сконструировать схему, подобную вышеизложенной схеме *Дугласа-Ракфорда.*

Рассмотрим трехмерную схему

$$\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=\hat{\Lambda}_1C^{n+1}+\hat{\Lambda}_2C^{n+1}+\hat{\Lambda}_3C^{n+1}+f^n \qquad (58)$$

в эквивалентной форме

$$[E-\tau_{n+1}(\hat{\Lambda}_1+\hat{\Lambda}_2+\hat{\Lambda}_3)]\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=\hat{\Lambda}_1C^n+\hat{\Lambda}_2C^n+\hat{\Lambda}_3C^n+f^n \qquad (59)$$

Суммарный оператор факторизуется произведением одномерных

$$[E-\tau_{n+1}(\hat{\Lambda}_1+\hat{\Lambda}_2+\hat{\Lambda}_3)]\approx(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3) \qquad (60)$$

Погрешность здесь $O(\tau_{n+1}^2)$. На основании замены (60) из (59) вытекает

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=\hat{\Lambda}_1C^n+\hat{\Lambda}_2C^n+\hat{\Lambda}_3C^n+f^n \qquad (61)$$

Вводится промежуточная величина

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=C^{n+\frac{1}{3}} \qquad (62)$$

Подставляя в (61), получаем 1-й дробный шаг

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_1)C^{n+\frac{1}{3}}=\hat{\Lambda}_1C^n+\hat{\Lambda}_2C^n+\hat{\Lambda}_3C^n+f^n \qquad (63)$$

В (62) обозначим

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=C^{n+\frac{2}{3}} \qquad (64)$$

После подстановки в (62) получается 2-ой дробный шаг

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)C^{n+\frac{2}{3}}=C^{n+\frac{1}{3}} \qquad (65)$$

3-им дробным шагом будет (64)

$$(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3)\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau_{n+1}}=C^{n+\frac{2}{3}} \qquad (66)$$

По *Дьяконову Е.Г.* правильные граничные условия будут такими:

$$C^{n+\frac{1}{3}}\Big|_{S_h\left(\substack{x=o\\x=a_1}\right)}=(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_2)(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3)\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau_{n+1}},$$

$$C^{n+\frac{2}{3}}\Big|_{S_h\left(\substack{y=o\\y=a_2}\right)}=\quad(E-\tau_{n+1}\hat{\Lambda}_3)\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau_{n+1}} \qquad (67)$$

Из (63) вычисляется $C^{n+\frac{1}{3}}$, затем из (65) определяется $C^{n+\frac{2}{3}}$, лишь потом находится из (66) C^{n+1}. Далее применяются леммы в норме С, доказанные *Джакуповым К.Б.* в [13].

Лемма-6а. *Если линейные операторы, отображающие прос - транство H в пространство H,* $k\le M, k=1,...,M$ *имеют неотрицательные коэффициенты*

$$E-\tau[\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1},$$

$$\tau>0, c_{\mp m}=\{c_{\mp m}(x)\ge 0, x\in\overline{\Omega}_h\}, m=1,...,M,$$

то их С-норма не превосходит 1:

$$\| E-\tau[\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\|\le 1$$

Доказательство. По определению нормы линейного оператора

$$\| E-\tau[\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\|=$$

$$=\sup_{\substack{\Psi\in H\\\|\Psi\|=1}}\| E-\tau[\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\Psi\|$$

Обозначив $\Lambda_m\equiv-(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})$, перепишем в виде

$$\| E+\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\|=\sup_{\substack{\Psi\in H\\\|\Psi\|=1}}\| E+\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\Psi\| \qquad (68)$$

Вводятся сеточные функции

$$\Phi=\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\Psi, \Phi\in H,\ \Psi=\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]\Phi,$$

в силу чего (68) примет вид

$$\| E+\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\|=\sup_{\substack{\Psi\in H\\\|\Psi\|=1}}\|\{\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\ +\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\Psi|$$

С помощью данного элемента (68) записывается в С-норме

$$\| E+\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\|=\sup_{\substack{\Phi\in H\\ \|\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\Phi\|=1}}\max_{x\in\Omega_h}|\{\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\ +\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\Phi| \quad (69)$$

Так как норма $\|\Psi\|=1$, то по лемме-4а имеет место

$$\|\Phi\|=\|\prod_{m=M}^{k}[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\Psi\|\le\prod_{m=M}^{k}\|[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\Psi\|\le$$

$$\le\prod_{m=M}^{k}\|[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\|\,\|\Psi\|=\prod_{m=M}^{k}\|[E+\tau(c_{-m}\Delta_{-m}-c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}\|\le 1,$$

откуда вытекает условие

$$\|\Phi\|\le 1 \quad (70)$$

Кроме этого, имеется еще одно заданное условие

$$\|\Psi\|=\|\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]\Phi\|=1 \quad (71)$$

Необходимо доказать для произвольного $\Phi\in H$, удовлетворяющего условиям (70)-(71), что при выполнении условий леммы-6а вытекает неравенство

$$\max_{x\in\Omega_h}|\{\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\ +\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\Phi|\le 1 \quad (72)$$

Пусть максимум модуля в (72) достигается в некоторой точке $x^0\in\Omega_h$(ясно, что таких точек может быть больше одной). Обозначается $\Phi(x^0)\equiv\Phi^0, c_{\pm m}(x^0)\equiv c_{\pm m}^0$. В этом случае доказываемое неравенство (72)

$$|\{\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\ +\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\Phi^0|\le 1 \quad (73)$$

будет эквивалентно двум неравенствам

$$-1\le\{\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\ +\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\Phi^0\le 1$$

Введем функцию $D_1(\Phi^0)\equiv\{\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\ +\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\Phi^0$,

$$D_1(\Phi^0)\equiv\{\prod_{m=k}^{M}[E+\tau c_{-m}^0(\Phi^0-T_{-m}\Phi^0)-\tau c_{+m}^0(T_{+m}\Phi^0-\Phi^0)]-\tau\sum_{m=k}^{M}[c_{-m}^0(\Phi^0-T_{-m}\Phi^0)-c_{+m}^0(T_{+m}\Phi^0-\Phi^0)]\}$$

В силу (73) необходимо доказать выполнение неравенств

$$-1\le D_1(\Phi^0)\le 1 \quad (74)$$

Вводятся сеточные функции $D_1(\Phi^0)=D_2(\Phi^0)+D_3(\Phi^0)$, где

$$D_2(\Phi^0)\equiv\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\Phi^0,\quad D_3(\Phi^0)\equiv\tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\Phi^0.$$

Тогда (74) запишется в виде суммы

$$-1\le D_1(\Phi^0)=D_2(\Phi^0)+D_3(\Phi^0)\le 1 \quad (75)$$

Из (71) вытекают два опорных неравенства

$$-1 \le D_2(\Phi^0) \equiv \prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\Phi^0 \le 1 \qquad (76)$$

Рассмотрим возможные два случая: 1) $D_1(\Phi^0) \ge 0$, 2) $D_1(\Phi^0) \le 0$. Если в случае 1) $D_1(\Phi^0) \ge 0$ выполняется также неравенство $D_3(\Phi^0) \equiv \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\Phi^0 \le 0$, то при таком сочетании (75) выполняется из-за (76), тем самым выполняется (73), т.е. лемма-6а справедлива. Пусть теперь в первом случае имеет место противоположное: $D_3(\Phi^0) \equiv \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\Phi^0 \ge 0$. Тогда из этого неравенства вытекает

$$\Phi^0 \le \frac{\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}^0 T_{-m}\Phi^0 + c_{+m}^0 T_{+m}\Phi^0)}{\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}^0 + c_{+m}^0)} \equiv \tilde{\Phi}^0 \qquad (77)$$

В случае 1) функция $D_1(\Phi^0) \ge 0$ есть строго возрастающая функция, потому что ее производная положительна

$$\frac{dD_1(\Phi^0)}{d\Phi^0} = \frac{dD_2(\Phi^0)}{d\Phi^0} + \frac{dD_3(\Phi^0)}{d\Phi^0} = 1 + \tau\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}^0 + c_{+m}^0) +$$

$$+\tau^2\sum_{m=k}^{M}\sum_{\substack{n=k \\ m\ne n}}^{m}(c_{-m}^0 + c_{+m}^0)(c_{-n}^0 + c_{+n}^0) + \ldots + \tau^{M-k}\prod_{m=k}^{M}(c_{-m}^0 + c_{+m}^0) - \tau\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}^0 + c_{+m}^0) > 0$$

Согласно (77) при достижении верхней границы $\Phi^0 = \tilde{\Phi}^0$ функция обращается в нуль: $D_3(\tilde{\Phi}^0) = 0$, поэтому в силу (76) вытекает $0 \le D_1(\tilde{\Phi}^0) = D_2(\tilde{\Phi}^0) + 0 \le 1$, а по (77) аргумент $\Phi^0 \le \tilde{\Phi}^0$, следовательно, для строго возрастающей функции имеет место неравенство $0 \le D_1(\Phi^0) \le D_1(\tilde{\Phi}^0) \le 1$, лемма-6а доказана еще раз. Во втором случае 2) $D_1(\Phi^0) \le 0$ доказательство проводится аналогично, тем самым завершается полное доказательство леммы.

Лемма-6б. *Если линейные операторы, отображающие пространство H в пространство H,*

$$E - \tau\prod_{m=M}^{k}[E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}[\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})],\ k \le M, k = 1,\ldots,M$$

имеют неотрицательные коэффициенты

$$\tau > 0, c_{\mp m} = \{c_{\mp m}(x) \ge 0, x \in \overline{\Omega}_h\}, m = 1,\ldots,M,$$

то их C-норма не превосходит 1:

$$\| E - \tau\prod_{m=M}^{k}[E + \tau(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]^{-1}[\sum_{m=k}^{M}(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})]\| \le 1$$

Несложное доказательсто леммы-6б вытекает из теории матриц. Квадратные матрицы $A, \tilde{A}$ эквивалентны друг другу, если существует такая невырожденная матрица *T, что имеют место равенства* $A = T\tilde{A}T^{-1}, \tilde{A} = T^{-1}AT$. Эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранг, след и определители.

Обозначим, как и ранее $\Lambda_m \equiv -(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m})$. Тогда из

$$\mathrm{A} = E + \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}, \tilde{\mathrm{A}} = E + \tau\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m,$$

$$T^{-1} = \prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}, T = \prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m],$$

вытекает эквивалентность между собой $\mathrm{A}, \tilde{\mathrm{A}}$. В самом деле

$$E + \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1} =$$

$$= \prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\{E + \tau\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}, \qquad (78)$$

$$E + \tau\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m =$$

$$= \prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\{E + \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\}\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]$$

Следовательно, в лемме-6а и лемме-6б оцениваются нормы эквивалентных операторов. Доказательство леммы-6б следует из (78).

Умножая (78) справа на оператор $\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}$, устанавливаем

$$\{E + \tau\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1} == \prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\{E + \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\}, (79)$$

потому как

$$\prod_{m=k}^{M}[E-\tau\Lambda_m]\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1} = E$$

При оценке нормы (79) примем во внимание леммы-4а и -6а

$$\| \{E + \tau\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\}\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1} \| = \| \prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\{E + \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\} \| \le$$

$$\le \prod_{m=M}^{k}\| [E-\tau\Lambda_m]^{-1} \| \| \{E + \tau\sum_{m=k}^{M}\Lambda_m\prod_{m=M}^{k}[E-\tau\Lambda_m]^{-1}\} \| \le 1, \text{ч.т.д.}$$

Для доказательства устойчивости схемы (47)

$$(E-\tau A_1)(E-\tau A_2)(E-\tau A_3)\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau} = A_1T^n + A_2T^n + A_3T^n, \qquad (80)$$

воспользуемся этими леммами -4а и -6а, сделав сопоставление:

$$\Lambda_m = -(c_{-m}\Delta_{-m} - c_{+m}\Delta_{+m}) = A_m, m = 1,2,3, c_{\pm1} = a^2/h_x^2, c_{\pm2} = a^2/h_y^2, c_{\pm3} = a^2/h_z^2,$$

на неравномерной сетке коэффициенты равны

$$c_{+1} = \frac{a^2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}, c_{-1} = \frac{a^2}{h_{xi}\hbar_{xi}}, c_{+2} = \frac{a^2}{h_{yj+1}\hbar_{yj}}, c_{-2} = \frac{a^2}{h_{yj}\hbar_{yj}}, c_{+3} = \frac{a^2}{h_{zk+1}\hbar_{zk}}, c_{-3} = \frac{a^2}{h_{zk}\hbar_{zk}}$$

Сведем (80) к форме с факторизованным оператором

$$(E-\tau A_1)(E-\tau A_2)(E-\tau A_3)\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau} = A_1T^n + A_2T^n + A_3T^n,$$

$$T^{n+1} = [E + (E-\tau A_3)^{-1}(E-\tau A_2)^{-1}(E-\tau A_1)^{-1}\tau(A_1+A_2+A_3)]T^n,$$

что в краткой записи имеет вид

$$T^{n+1} = [E + \tau\prod_{m=3}^{1}(E-\tau A_m)^{-1}\sum_{m=1}^{3}A_m]T^n$$

Операторы A_m удовлетворяют условиям лемм-6а и -6б, поэтому

$$\| [E + \tau \prod_{m=3}^{1} (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^{3} A_m] \| \le 1,$$

$$\| T^{n+1} \| \le \| [E + \tau \prod_{m=3}^{1} (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^{3} A_m] T^n \| \le \| [E + \tau \prod_{m=3}^{1} (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^{3} A_m] \| \| T^n \| \le 1^* \| T^n \|,$$

$$\| T^{n+1} \| \le \| T^n \|, \quad n = 0,1,2,...,$$

откуда следует устойчивость: $\| T^{n+1} \| \le \| T^0 \|, n = 0,1,2,...$

Следовательно, схема *Дугласа-Ракфорда* (47) абсолютно устойчива. Операторы A_m перестановочны: $A_m A_k = A_k A_m$, поэтому, можно использовать лемму-6а, потому как

$$E + \tau \prod_{m=3}^{1} (E - \tau A_m)^{-1} \sum_{m=1}^{3} A_m = E + \tau \sum_{m=1}^{3} A_m \prod_{m=3}^{1} (E - \tau A_m)^{-1}$$

Устойчивость факторизованной схемы

$$(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_1)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_2)(E - \tau_{n+1} \hat{\Lambda}_3) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau_{n+1}} = = \hat{\Lambda}_1 C^n + \hat{\Lambda}_2 C^n + \hat{\Lambda}_3 C^n + f^n,$$

вытекает из данных лемм. В обшем случае неперестановочных операторов необходимо воспользоваться леммой-6б:

$$\Lambda_m = -(c_{-m} \Delta_{-m} - c_{+m} \Delta_{+m}) = \hat{\Lambda}_m, m = 1,2,3,$$

$$c_{+1} = \frac{D}{h_{xi+1} \hbar_{xi}} + \frac{|u_{ijk}| - u_{ijk}}{2h_{xi+1}}, c_{-1} = \frac{D}{h_{xi} \hbar_{xi}} + \frac{|u_{ijk}| + u_{ijk}}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2} = \frac{D}{h_{yj+1} \hbar_{yj}} + \frac{|v_{ijk}| - v_{ijk}}{2h_{yj+1}}, c_{-2} = \frac{D}{h_{yj} \hbar_{yj}} + \frac{|v_{ijk}| + v_{ijk}}{2h_{yj}},$$

$$c_{+3} = \frac{D}{h_{zk+1} \hbar_{zk}} + \frac{|w_{ijk}| - w_{ijk}}{2h_{zk+1}}, c_{-3} = \frac{D}{h_{zk} \hbar_{zk}} + \frac{|w_{ijk}| + w_{ijk}}{2h_{zk}}$$

6.11. Схема расщепления с весами. Проблема определения граничных значений промежуточных величин

Для численного решения уравнений типа

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 (\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}), a^2 = const, \tag{80}$$

$$p\Big|_{t=t_0} = d(x,y,z), p\Big|_S = \varphi(x,y,z,t) \tag{81}$$

по схеме расщепления с весами $\alpha, 1-\alpha$

$$\frac{p^{n+\frac{1}{3}} - p^n}{\tau} = \Lambda_1 [\alpha p^{n+\frac{1}{3}} + (1-\alpha) p^n], \ x \in \Omega_h, \tag{82}$$

$$\frac{p^{n+\frac{2}{3}} - p^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 [\alpha p^{n+\frac{2}{3}} + (1-\alpha) p^{n+\frac{1}{3}}], \ x \in \Omega_h, \tag{83}$$

$$\frac{p^{n+1} - p^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 [\alpha p^{n+1} + (1-\alpha) p^{n+\frac{2}{3}}], \ x \in \Omega_h, \tag{84}$$

$$p^0 = d, p^{n+1}\Big|_{S_h} = \varphi^{n+1} \tag{85}$$

необходимы краевые условия для промежуточных величин $p^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{2}{3}}$. Известно *(Самарский А.А.),* что в этой схеме принципиально *невозможно* поставить граничные условия для $p^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{2}{3}}$, тем более для граничных условий 2-го или 3-го родов. Граничные условия типа $p^{n+\frac{1}{3}}|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{2}{3}}|_{S_h} = \varphi^{n+\frac{2}{3}}$ здесь нельзя применять, потому как по теории *Дьяконова Е.Г.* из (84), преобразованного к виду

$$p^{n+1} - \tau\alpha\Lambda_3 p^{n+1} = p^{n+\frac{2}{3}} + \tau(1-\alpha)\Lambda_3 p^{n+\frac{2}{3}},$$

$$(E - \tau\alpha\Lambda_3)p^{n+1} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]p^{n+\frac{2}{3}}, x \in \Omega_h$$

вытекает формула точного вычисления граничного условия для $p^{n+\frac{2}{3}}$:

$$p^{n+\frac{2}{3}}\Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_3)p^{n+1}\Big|_{S_h} \qquad (86)$$

Для краевого условия *Дирихле* $p^{n+1}\Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$ (86) принимает вид

$$p^{n+\frac{2}{3}}\Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_3)\varphi^{n+1} \qquad (87)$$

Возникает *неразрешимая* проблема нахождения обратного оператора $[E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}$ в (87) при $\alpha \neq 1$. Для краевого условия *Неймана* $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n}\Big|_{S_h} = \varphi^{n+1}$ проблема постановки граничного условия $p^{n+\frac{2}{3}}\Big|_{S_h}$ становится еще более неразрешимой даже при $\alpha = 1$ не только в данной схеме с весами, но и в других схемах метода переменных направлений.

Граничные значения другой промежуточной величины $p^{n+\frac{1}{3}}\Big|_{S_h}$ определяются из схемы (83), преобразованной к виду

$$(E - \tau\alpha\Lambda_2)p^{n+\frac{2}{3}} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2]p^{n+\frac{1}{3}}, x \in \Omega_h,$$

$$p^{n+\frac{1}{3}}\Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_2)p^{n+\frac{2}{3}}\Big|_{S_h} \qquad (88)$$

Подставляя (87) в (88)

$$p^{n+\frac{1}{3}}\Big|_{S_h} = [E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_2)[E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}(E - \tau\alpha\Lambda_3)\varphi^{n+1},$$

убеждаемся в невозможности определения граничных условий для промежуточных сеточных функций $p^{n+\frac{1}{3}}\Big|_{S_h}$ и $p^{n+\frac{2}{3}}\Big|_{S_h}$ даже для краевых условий *Дирихле*, не говоря о краевых условиях типа *Неймана***,** так как для вычисления обратных операторов $[E + \tau(1-\alpha)\Lambda_2]^{-1}$ и $[E + \tau(1-\alpha)\Lambda_3]^{-1}$ при $\alpha \neq 1$ не существует простых алгоритмов.

6.12. Монотонные однородные схемы 2-го порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с *постоянным коэффициентом* молекулярного переноса

Для построения монотонных однородных схем 2-го порядка аппроксимации конвективных членов в многомерных уравнениях вязкой жидкости используется методика [20], примененная в главе 5.

Для двумерного уравнения параболического типа

$$\rho(\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y})=\mu(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2})+f,\omega|_{t=0}=d,\omega\Big|_S=\varphi,$$

монотонная явная схема имеет вид

$$\rho(\frac{\omega_{ij}^{n+1}-\omega_{ij}^n}{\tau_{n+1}}+\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2}\omega_{\bar{x}}^n+\frac{u_{ij}^n-|u_{ij}^n|}{2}\omega_x^n+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2}\omega_{\bar{y}}^n+\frac{v_{ij}^n-|v_{ij}^n|}{2}\omega_y^n)=$$

$$=\frac{2\mu_x^v}{h_{xi+1}+h_{xi}}(\omega_x^n-\omega_{\bar{x}}^n)+\frac{2\mu_y^u}{h_{yj+1}+h_{yj}}(\omega_y^n-\omega_{\bar{y}}^n)+f_{ij}^n,$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q=1+\frac{\rho}{\mu}(\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ij}^n|-u_{ij}^n}{4}h_{xi+1}+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ij}^n|-v_{ij}^n}{4}h_{yj+1}),$$

$$\mu_x^v=[\mu+\rho(\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ij}^n|-v_{ij}^n}{4}h_{yj+1})]/Q,\ \ \mu_y^u=[\mu+\rho(\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ij}^n|-u_{ij}^n}{4}h_{xi+1})]/Q,$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1$$

На равномерной сетке $h_{yj+1}=h_{yj}=h_y,\forall j,h_{xi+1}=h_{xi}=h_x,\forall i$ данные коэффициенты упрощаются

$$\mu_x^v=(\mu+\rho\frac{|v_{ij}^n|h_y}{2})/[1+\rho(\frac{|u_{ij}^n|h_x}{2\mu}+\frac{|v_{ij}^n|h_y}{2\mu})],\ \mu_y^u=(\mu+\rho\frac{|u_{ij}^n|h_x}{2})/[1+\rho(\frac{|u_{ij}^n|h_x}{2\mu}+\frac{|v_{ij}^n|h_y}{2\mu})]$$

Схема устойчива и сходится в норме C при выполнении условия

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}}-[\ \rho(\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2h_{xi}}+\frac{|u_{ij}^n|-u_{ij}^n}{2h_{xi+1}}+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2h_{yj}}+\frac{|v_{ij}^n|-v_{ij}^n}{2h_{yj+1}})+$$

$$+\frac{2\mu_x^v}{h_{xi+1}+h_{xi}}(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1}{h_{xi}})+\frac{2\mu_y^u}{h_{yj+1}+h_{yj}}(\frac{1}{h_{yj+1}}+\frac{1}{h_{yj}})\ ]\geq 0,\ \ \forall(i,j,n)$$

Нетрудно построить по данной методике безусловно сходящиеся и устойчивые схемы типа *Кранка-Николсона* или схемы метода дробных шагов. Именно в работе [20] аналогичная аппроксимация применена для уравнений *Гельмгольца*.

Для трехмерного уравнения параболического типа

$$\rho(\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}+w\frac{\partial \omega}{\partial z})=\mu(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2})+f,$$

монотонная однородная явная схема имеет вид

$$\rho(\frac{\omega_{ijk}^{n+1}-\omega_{ijk}^n}{\tau_{n+1}}+\frac{|u_{ijk}^n|+u_{ijk}^n}{2}\omega_{\bar{x}}^n+\frac{u_{ijk}^n-|u_{ijk}^n|}{2}\omega_x^n+\frac{|v_{ijk}^n|+v_{ijk}^n}{2}\omega_{\bar{y}}^n+\frac{v_{ijk}^n-|v_{ijk}^n|}{2}\omega_y^n+$$

$$+\frac{|w^n_{ijk}|+w^n_{ijk}}{2}\omega^n_{\bar z}+\frac{w^n_{ijk}-|w^n_{ijk}|}{2}\omega^n_z)=\frac{2\mu^{vw}_x}{h_{xi+1}+h_{xi}}(\omega^n_x-\omega^n_{\bar x})+\frac{2\mu^{wu}_y}{h_{yj+1}+h_{yj}}(\omega^n_y-\omega^n_{\bar y})+$$

$$+\frac{2\mu^{uv}_z}{h_{zk+1}+h_{zk}}(\omega^n_z-\omega^n_{\bar z})+f^n_{ijk}, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1,$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q=1+\frac{\rho}{\mu}(\frac{|u^n_{ijk}|+u^n_{ijk}}{4}h_{xi}+\frac{|u^n_{ijk}|-u^n_{ijk}}{4}h_{xi+1}+\frac{|v^n_{ijk}|+v^n_{ijk}}{4}h_{yj}+\frac{|v^n_{ijk}|-v^n_{ijk}}{4}h_{yj+1}++\frac{|w^n_{ijk}|+w^n_{ijk}}{4}h_{zk}+\frac{|w^n_{ijk}|-w^n_{ijk}}{4}h_{zk+1}),$$

$$\mu^{vw}_x=[\mu+\rho(\frac{|v^n_{ijk}|+v^n_{ijk}}{4}h_{yj}+\frac{|v^n_{ijk}|-v^n_{ijk}}{4}h_{yj+1}+\frac{|w^n_{ijk}|+w^n_{ijk}}{4}h_{zk}+\frac{|w^n_{ijk}|-w^n_{ijk}}{4}h_{zk+1})]/Q,$$

$$\mu^{wu}_y=[\mu+\rho(\frac{|w^n_{ijk}|+w^n_{ijk}}{4}h_{zk}+\frac{|w^n_{ijk}|-w^n_{ijk}}{4}h_{zk+1}+\frac{|u^n_{ijk}|+u^n_{ijk}}{4}h_{xi}+\frac{|u^n_{ijk}|-u^n_{ijk}}{4}h_{xi+1})]/Q,$$

$$\mu^{uv}_z=[\mu+\rho(\frac{|u^n_{ijk}|+u^n_{ijk}}{4}h_{xi}+\frac{|u^n_{ijk}|-u^n_{ijk}}{4}h_{xi+1}+\frac{|v^n_{ijk}|+v^n_{ijk}}{4}h_{yj}+\frac{|v^n_{ijk}|-v^n_{ijk}}{4}h_{yj+1})]/Q$$

На равномерной сетке $h_{xi+1}=h_{xi}=h_x, h_{yj+1}=h_{yj}=h_y, h_{zk+1}=h_{zk}=h_z$:

$$Q=1+\frac{\rho}{\mu}(\frac{|u^n_{ijk}|}{2}h_x+\frac{|v^n_{ijk}|}{2}h_y+\frac{|w^n_{ijk}|}{2}h_z), \mu^{vw}_x=[\mu+\rho(\frac{|v^n_{ijk}|}{2}h_y+\frac{|w^n_{ijk}|}{2}h_z)]/Q,$$

$$\mu^{wu}_y=[\mu+\rho(\frac{|w^n_{ijk}|}{2}h_z+\frac{|u^n_{ijk}|}{2}h_x)]/Q,\ \mu^{uv}_z=[\mu+\rho(\frac{|u^n_{ijk}|}{2}h_x+\frac{|v^n_{ijk}|}{2}h_y)]/Q$$

Условие устойчивости и сходимости в норме C:

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}}-[\ \rho(\frac{|u^n_{ijk}|+u^n_{ijk}}{2h_{xi}}+\frac{|u^n_{ijk}|-u^n_{ijk}}{2h_{xi+1}}+\frac{|v^n_{ijk}|+v^n_{ijk}}{2h_{yj}}+\frac{|v^n_{ijk}|-v^n_{ijk}}{2h_{yj+1}}+$$

$$+\frac{|w^n_{ijk}|+w^n_{ijk}}{2h_{zk}}+\frac{|w^n_{ijk}|-w^n_{ijk}}{2h_{zk+1}})+\frac{2\mu^{vw}_x}{h_{xi+1}+h_{xi}}(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1}{h_{xi}})+$$

$$+\frac{2\mu^{wu}_y}{h_{yj+1}+h_{yj}}(\frac{1}{h_{yj+1}}+\frac{1}{h_{yj}})+\frac{2\mu^{uv}_z}{h_{zk+1}+h_{zk}}(\frac{1}{h_{zk+1}}+\frac{1}{h_{zk}})\ ]\ge 0,\ \ \forall(i,j,k,n)$$

6.13. Монотонные однородные схемы 2-го порядка аппроксимации конвективных членов в уравнениях с *переменным коэффициентом* молекулярного переноса

Методика **[**20] применима и для уравнений с переменным коэффициентом в диссипативной части.

Рассмотрим одномерное уравнение с переменным коэффициентом молекулярного переноса $\mu=\mu(x,t)>0$:

$$\rho(\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x})+f,$$

$$\omega|_{t=0}=d, \omega(0,t)=\varphi_1(t), \omega(a,t)=\varphi_2(t), 0\le x\le a, t\in[0,T]$$

Для дифференцируемой функции $\mu=\mu(x,t)$ зто уравнение можно преобразовать к виду

$$\rho\frac{\partial\omega}{\partial t}+(\rho u-\frac{\partial\mu}{\partial x})\frac{\partial\omega}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+f$$

и построить для него монотонную схему **6.12.** Такой подход применен менен для уравнений метеорологии в [3]**.** В случае разрывного не дифференцируемого коэффициента $\mu=\mu(x,t)$, очевидно, данное преобразование неприемлемо. Здесь технология построения монотонных схем 2-ого порядка аппроксимации конвективных членов применяется к эквивалентному уравнению

$$\rho(\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}[(\mu-\mu_{\min})\frac{\partial\omega}{\partial x}]+\mu_{\min}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+f\ ,$$

где $\mu_{\min}$ минимальное значение функции $\mu(x,t)\geq\mu_{\min}=const$. По технологии [20] получаются монотонные схемы эквивалентного уравнения для *k>1*

$$\rho(\omega_t^n+\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}}+\frac{u_i^n-|u_i^n|}{2}\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}})=$$

$$=\{\ \frac{\mu_{\min}}{\sum_{k=0}^{M}[\frac{\rho}{2\mu_{\min}}(\frac{|u_i^n|+u_i^n}{2}h_{xi}+\frac{|u_i^n|-u_i^n}{2}h_{xi+1})]^k}-\mu_{\min}\ \}\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{i+1}^n+\mu_i^n}{2}\frac{\omega_{i+1}^n-\omega_i^n}{h_{xi+1}}-\frac{\mu_i^n+\mu_{i-1}^n}{2}\frac{\omega_i^n-\omega_{i-1}^n}{h_{xi}})+f_i^n,$$

с аппроксимацией 2-го порядка и выше конвективного члена.

Для двумерного уравнения параболического типа

$$\rho(\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial y})+f$$

монотонные схемы аналогичны по конструкции:

$$\rho(\frac{\omega_{ij}^{n+1}-\omega_{ij}^n}{\tau_{n+1}}+\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2}\omega_{\bar{x}}^n+\frac{u_{ij}^n-|u_{ij}^n|}{2}\omega_x^n+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2}\omega_{\bar{y}}^n+\frac{v_{ij}^n-|v_{ij}^n|}{2}\omega_y^n)=$$

$$=(\mu_{uxv}^v-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{xi}}(\omega_x^n-\omega_{\bar{x}}^n)+(\mu_{vyu}^u-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{yj}}(\omega_y^n-\omega_{\bar{y}}^n)+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{i+1j}^n+\mu_{ij}^n}{2}\omega_x^n-\frac{\mu_{ij}^n+\mu_{i-1j}^n}{2}\omega_{\bar{x}}^n)+\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{\mu_{ij+1}^n+\mu_{ij}^n}{2}\omega_y^n-\frac{\mu_{ij}^n+\mu_{ij-1}^n}{2}\omega_{\bar{y}}^n)+f_{ij}^n,$$

где коэффициенты имеют вид

$$Q=1+\frac{\rho}{\mu_{\min}}(\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ij}^n|-u_{ij}^n}{4}h_{xi+1}+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ij}^n|-v_{ij}^n}{4}h_{yj+1}),$$

$$\mu_x^v=[\mu_{\min}+\rho(\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ij}^n|-v_{ij}^n}{4}h_{yj+1})]/Q,\ \mu_y^u=[\mu_{\min}+\rho(\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ij}^n|-u_{ij}^n}{4}h_{xi+1})]/Q$$

Для трехмерного уравнения параболического типа

$$\rho(\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}+w\frac{\partial\omega}{\partial z})=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial\omega}{\partial z})+f,$$

монотонные схемы аналогичны предыдущим:

$$\rho(\frac{\omega_{ijk}^{n+1}-\omega_{ijk}^{n}}{\tau_{n+1}}+\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{2}\omega_{\bar{x}}^{n}+\frac{u_{ijk}^{n}-|u_{ijk}^{n}|}{2}\omega_{x}^{n}+\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{2}\omega_{\bar{y}}^{n}+\frac{v_{ijk}^{n}-|v_{ijk}^{n}|}{2}\omega_{y}^{n}+$$

$$+\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{2}\omega_{\bar{z}}^{n}+\frac{w_{ijk}^{n}-|w_{ijk}^{n}|}{2}\omega_{z}^{n})=(\mu_{x}^{vw}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{xi}}(\omega_{x}^{n}-\omega_{\bar{x}}^{n})+$$

$$+(\mu_{y}^{wu}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{yj}}(\omega_{y}^{n}-\omega_{\bar{y}}^{n})+(\mu_{z}^{uv}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{zk}}(\omega_{z}^{n}-\omega_{\bar{z}}^{n})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{i+1jk}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{x}^{n}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{i-1jk}^{n}}{2}\omega_{\bar{x}}^{n})+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{ij+1k}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{y}^{n}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ij-1k}^{n}}{2}\omega_{\bar{y}}^{n})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{ijk+1}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{z}^{n}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ijk-1}^{n}}{2}\omega_{\bar{z}}^{n})+f_{ijk}^{n},$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,k=1,...,N_z-1,$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$Q=1+\frac{\rho}{\mu_{\min}}(\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ijk}^{n}|-u_{ijk}^{n}}{4}h_{xi+1}+\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ijk}^{n}|-v_{ijk}^{n}}{4}h_{yj+1}+\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{4}h_{zk}+\frac{|w_{ijk}^{n}|-w_{ijk}^{n}}{4}h_{zk+1}),$$

$$\mu_{x}^{vw}=[\mu_{\min}+\rho(\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ijk}^{n}|-v_{ijk}^{n}}{4}h_{yj+1}+\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{4}h_{zk}+\frac{|w_{ijk}^{n}|-w_{ijk}^{n}}{4}h_{zk+1})]/Q,$$

$$\mu_{y}^{wu}=[\mu_{\min}+\rho(\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{4}h_{zk}+\frac{|w_{ijk}^{n}|-w_{ijk}^{n}}{4}h_{zk+1}+\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ijk}^{n}|-u_{ijk}^{n}}{4}h_{xi+1})]/Q,$$

$$\mu_{z}^{uv}=[\mu_{\min}+\rho(\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{4}h_{xi}+\frac{|u_{ijk}^{n}|-u_{ijk}^{n}}{4}h_{xi+1}+\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{4}h_{yj}+\frac{|v_{ijk}^{n}|-v_{ijk}^{n}}{4}h_{yj+1})]/Q$$

Условие устойчивости явной схемы

$$\frac{\rho}{\tau_{n+1}}-[\ \rho(\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{2h_{xi}}+\frac{|u_{ijk}^{n}|-u_{ijk}^{n}}{2h_{xi+1}}+\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{2h_{yj}}+\frac{|v_{ijk}^{n}|-v_{ijk}^{n}}{2h_{yj+1}}+$$

$$+\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{2h_{zk}}+\frac{|w_{ijk}^{n}|-w_{ijk}^{n}}{2h_{zk+1}})+(\mu_{x}^{vw}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1}{h_{xi}})+$$

$$+(\mu_{y}^{wu}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{1}{h_{yj+1}}+\frac{1}{h_{yj}})+(\mu_{y}^{uv}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{zk}}(\frac{1}{h_{zk+1}}+\frac{1}{h_{zk}})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{i+1jk}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2h_{xi+1}}+\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{i-1jk}^{n}}{2h_{xi}})+\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{\mu_{ij+1k}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2h_{yj+1}}+\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ij-1k}^{n}}{2h_{yj}})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{zk}}(\frac{\mu_{ijk+1}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2h_{zk+1}}+\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ijk-1}^{n}}{2h_{zk}})\ ]\geq 0,\quad \forall(i,j,k,n)$$

6.14. Эффективная реализация неявных схем методом *Якоби*

Проблемы постановки граничных условий для промежуточных сеточных функций типа $T^{n+\frac{1}{3}},T^{n+\frac{2}{3}}$ и т.п. усугубляются для краевых условий 2-ого или 3-ого родов, тем более в областях с криволинейной границей, кроме того трехточечные или пятиточечные и прочие виды методов прогонок занимают много времени при программировании и

счете. С этой точки зрения экономичным является применение абсолютно устойчивых неявных схем типа

$$\rho(\frac{\omega_{ijk}^{n+1}-\omega_{ijk}^{n}}{\tau_{n+1}}+\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{2}\omega_{\bar{x}}^{n+1}+\frac{u_{ijk}^{n}-|u_{ijk}^{n}|}{2}\omega_{x}^{n+1}+\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{2}\omega_{\bar{y}}^{n+1}+\frac{v_{ijk}^{n}-|v_{ijk}^{n}|}{2}\omega_{y}^{n+1}+$$

$$+\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{2}\omega_{\bar{z}}^{n+1}+\frac{w_{ijk}^{n}-|w_{ijk}^{n}|}{2}\omega_{z}^{n+1})=(\mu_{x}^{vw}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{xi}}(\omega_{x}^{n+1}-\omega_{\bar{x}}^{n+1})+$$

$$+(\mu_{y}^{wu}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{yj}}(\omega_{y}^{n+1}-\omega_{\bar{y}}^{n+1})+(\mu_{z}^{uv}-\mu_{\min})\frac{1}{\hbar_{zk}}(\omega_{z}^{n+1}-\omega_{\bar{z}}^{n+1})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{i+1jk}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{x}^{n+1}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{i-1jk}^{n}}{2}\omega_{\bar{x}}^{n+1})+\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{\mu_{ij+1k}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{y}^{n+1}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ij-1k}^{n}}{2}\omega_{\bar{y}}^{n+1})+ \quad (1)$$

$$+\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{\mu_{i+1jk}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{x}^{n+1}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{i-1jk}^{n}}{2}\omega_{\bar{x}}^{n+1})+\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{\mu_{ij+1k}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{y}^{n+1}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ij-1k}^{n}}{2}\omega_{\bar{y}}^{n+1})+$$

$$+\frac{1}{\hbar_{zk}}(\frac{\mu_{ijk+1}^{n}+\mu_{ijk}^{n}}{2}\omega_{z}^{n+1}-\frac{\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ijk-1}^{n}}{2}\omega_{\bar{z}}^{n+1})+f_{ijk}^{n+1},\quad i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,k=1,...,N_z-1,$$

$$\omega^{0}=d,\omega^{n+1}\big|_{S_h}=\varphi^{n+1}$$

Данная неявная схема, как и другие неявные схемы, рассмотренные ранее, в том числе и схемы типа *Кранка-Николсона*, представляют собою систему линейных алгебраических уравнений относительно величин, взятых на верхнем слое времени типа здесь стоящих $\omega_{ijk}^{n+1}, i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,k=1,...,N_z-1$.

Причем эти системы имеют *строгое диагональное преобладание* из-за присутствия членов вида $\frac{\rho\omega_{ijk}^{n+1}}{\tau_{n+1}}$, следовательно, выполняется условие сходимости итерационного метода *Якоби*.

В схеме (1) вводятся коэффициенты

$$c_{+1}^{n}=\frac{1}{\rho}\frac{(\mu_{x}^{vw}-\mu_{\min})+(\mu_{i+1jk}^{n}+\mu_{ijk}^{n})/2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ijk}^{n}|-u_{ijk}^{n}}{2h_{xi+1}},$$

$$c_{-1}^{n}=\frac{1}{\rho}\frac{(\mu_{x}^{vw}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk}^{n}+\mu_{i-1jk}^{n})/2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ijk}^{n}|+u_{ijk}^{n}}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2}^{n}=\frac{1}{\rho}\frac{(\mu_{y}^{wu}-\mu_{\min})+(\mu_{ij+1k}^{n}+\mu_{ijk}^{n})/2}{h_{yj+1}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ijk}^{n}|-v_{ijk}^{n}}{2h_{yj+1}},$$

$$c_{-2}^{n}=\frac{1}{\rho}\frac{(\mu_{y}^{wu}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ij-1k}^{n})/2}{h_{yj}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ijk}^{n}|+v_{ijk}^{n}}{2h_{yj}}, \quad (2)$$

$$c_{+3}^{n}=\frac{1}{\rho}\frac{(\mu_{z}^{uv}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk+1}^{n}+\mu_{ijk}^{n})/2}{h_{zk+1}\hbar_{zk}}+\frac{|w_{ijk}^{n}|-w_{ijk}^{n}}{2h_{zk+1}},$$

$$c_{-3}^{n}=\frac{1}{\rho}\frac{(\mu_{z}^{uv}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk}^{n}+\mu_{ijk-1}^{n})/2}{h_{zk}\hbar_{zk}}+\frac{|w_{ijk}^{n}|+w_{ijk}^{n}}{2h_{zk}},$$

$$\Lambda_{1}^{n}=c_{+1}^{n}\Delta_{+1}-c_{-1}^{n}\Delta_{-1},\ \Lambda_{2}^{n}=c_{+2}^{n}\Delta_{+2}-c_{-2}^{n}\Delta_{-2},\ \Lambda_{3}^{n}=c_{+3}^{n}\Delta_{+3}-c_{-3}^{n}\Delta_{-3},$$

затем представляются в компактном виде

$$\frac{\omega_{ijk}^{n+1}-\omega_{ijk}^{n}}{\tau_{n+1}}=(c_{+1}^{n}\Delta_{+1}-c_{-1}^{n}\Delta_{-1})\omega^{n+1}+(c_{+2}^{n}\Delta_{+2}-c_{-2}^{n}\Delta_{-2})\omega^{n+1}+(c_{+3}^{n}\Delta_{+3}-c_{-3}^{n}\Delta_{-3})\omega^{n+1}+\frac{1}{\rho}f_{ijk}^{n+1},(3)$$

$$i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1,\ \omega_{ijk}^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk}^{n+1},\ n=0,1,...,N_\tau$$

Итерация с номером m обозначается $\omega_{ijk}^{n+1^m}$. В пределе для сходящегося итерационного процесса *Якоби* имеет место $\lim\limits_{m\to\infty}\omega_{ijk}^{n+1^m}=\omega_{ijk}^{n+1}$.

Вводится невязка m-итерации R_{ijk}^{m}:

$$R_{ijk}^{m}=\frac{\omega_{ijk}^{n+1^m}-\omega_{ijk}^{n}}{\tau_{n+1}}-(c_{+1}^{n}\Delta_{+1}-c_{-1}^{n}\Delta_{-1})\omega^{n+1^m}-(c_{+2}^{n}\Delta_{+2}-c_{-2}^{n}\Delta_{-2})\omega^{n+1^m}-$$

$$-(c_{+3}^{n}\Delta_{+3}-c_{-3}^{n}\Delta_{-3})\omega^{n+1^m}-\frac{1}{\rho}f_{ijk}^{n+1},\qquad(4)$$

$$i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1,\ \omega_{ijk}^{n+1^m}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk}^{n+1},$$

$$R_{ijk}^{m}\Big|_{S_h}=\omega_{ijk}^{n+1^m}\Big|_{S_h}-\varphi_{ijk}^{n+1}=0, m=0,1,...,m^*$$

В системе (4) коэффициенты при $\omega_{ijk}^{n+1^m}$ группируются, имея ввиду операторы разностей $\Delta_{+l}=T_{+l}-E, \Delta_{-l}=E-T_{-l}, l=1,2,3$:

$$R_{ijk}^{m}=(\frac{1}{\tau_{n+1}}+c_{+1}^{n}+c_{-1}^{n}+c_{+2}^{n}+c_{-2}^{n}+c_{+3}^{n}+c_{-3}^{n})\omega_{ijk}^{n+1^m}-\frac{\omega_{ijk}^{n}}{\tau_{n+1}}--(c_{+1}^{n}T_{+1}+c_{-1}^{n}T_{-1})\omega^{n+1^m}$$

$$-(c_{+2}^{n}T_{+2}+c_{-2}^{n}T_{-2})\omega^{n+1^m}-(c_{+3}^{n}T_{+3}+c_{-3}^{n}T_{-3})\omega^{n+1^m}-\frac{1}{\rho}f_{ijk}^{n+1},$$

$$i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1$$

В методе *Якоби* используется алгоритм:

$$(\frac{1}{\tau_{n+1}}+c_{+1}^{n}+c_{-1}^{n}+c_{+2}^{n}+c_{-2}^{n}+c_{+3}^{n}+c_{-3}^{n})\omega_{ijk}^{n+1^{m+1}}=\frac{\omega_{ijk}^{n}}{\tau_{n+1}}+(c_{+1}^{n}T_{+1}+c_{-1}^{n}T_{-1})\omega^{n+1^m}+$$

$$+(c_{+2}^{n}T_{+2}+c_{-2}^{n}T_{-2})\omega^{n+1^m}+(c_{+3}^{n}T_{+3}+c_{-3}^{n}T_{-3})\omega^{n+1^m}+\frac{1}{\rho}f_{ijk}^{n+1},\ i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1,$$

эквивалентная запись которой имеет вид

$$(\frac{1}{\tau_{n+1}}+c_{+1}^{n}+c_{-1}^{n}+c_{+2}^{n}+c_{-2}^{n}+c_{+3}^{n}+c_{-3}^{n})\omega_{ijk}^{n+1^{m+1}}=$$

$$=(\frac{1}{\tau_{n+1}}+c_{+1}^{n}+c_{-1}^{n}+c_{+2}^{n}+c_{-2}^{n}+c_{+3}^{n}+c_{-3}^{n})\omega_{ijk}^{n+1^m}-R_{ijk}^{m}, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1$$

Вычисляется $m+1$- итерация $\omega_{ijk}^{n+1^{m+1}}$ по формуле:

$$\omega_{ijk}^{n+1^{m+1}}=\omega_{ijk}^{n+1^m}-R_{ijk}^{m}/(\frac{1}{\tau_{n+1}}+c_{+1}^{n}+c_{-1}^{n}+c_{+2}^{n}+c_{-2}^{n}+c_{+3}^{n}+c_{-3}^{n}),$$

$$i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1, \omega_{ijk}^{n+1^{m+1}}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk}^{n+1}$$

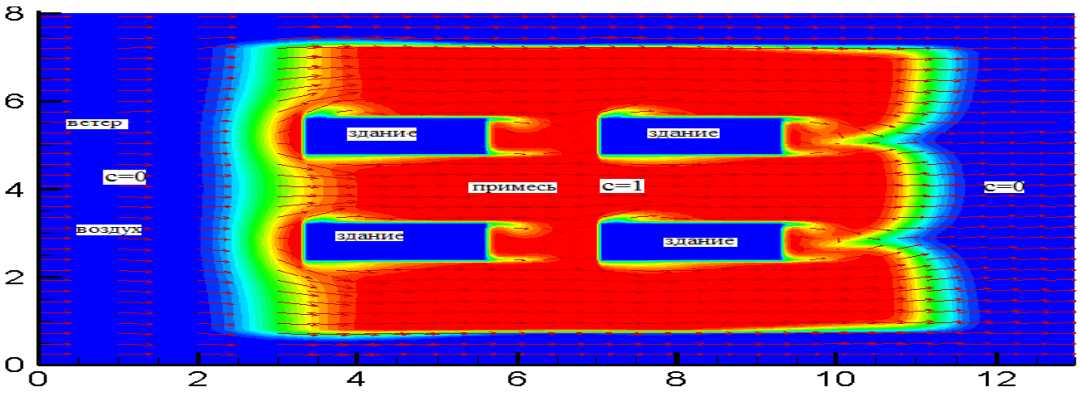
Итерации прекращаются при выполнении критерия сходимости итераций из главы 1

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\1\le j\le N_y-1\\1\le k\le N_k-1}}|\ R_{ijk}^{m^*}\ |\le\varepsilon,\qquad \varepsilon\approx 0, \varepsilon\neq 0$$

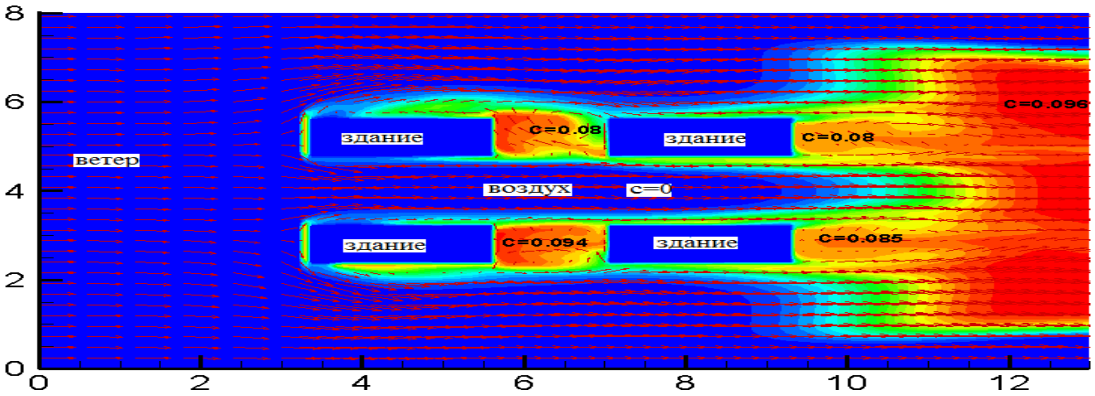
Итак, на каждом слое времени.

Вопросы

1. Используя лемму-4а доказать сходимость схемы *Яненко*.
2. Вычислить погрешность аппроксимации схемы *Писмана-Ракфорда*.
3. Вычислить погрешность аппроксимации схемы *Дугласа-Ракфорда*.
4. Вычислить погрешность аппроксимации схемы *Яненко*.
5. Доказать в сеточной норме С абсолютную устойчивость монотонных неявных схем типа изложенных в 6.12, 6.13.
6. Определить для *k=2,k=3,k=4* погрешности аппроксимаций монотонных схем одномерных уравнений.



Состояние переноса примеси (красный цвет) ветром около четырех зданий (вид сверху) в начальный момент времени. Поле вектора скорости показано стрелками



Состояние почти полного сноса примеси (красный цвет) ветром, дующим с левой стороны зданий. Видны остатки примеси между зданиями.

Глава 7. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

7.1. Стационарные уравнения *Гельмгольца*

В стационарных течениях вязкой несжимаемой жидкости уравнения *Гельмгольца* принадлежат эллиптическому типу

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}),\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\omega,$$

с естественными краевыми условиями на границе *S:*

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\Big|_S=\varphi_u(x,y),\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\Big|_S=-\varphi_v(x,y),$$

которые сводятся к краевым условиям *Неймана* и *Дирихле*

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial n}\Big|_S=\varphi_u(x,y)\cos(\vec{n};\vec{j})-\varphi_v(x,y)\cos(\vec{n};\vec{i}),$$

$$\psi(x,y)\big|_S=\int_{S_0}^{S}[\varphi_u(x,y)\cos(\vec{s};\vec{j})-\varphi_v(x,y)\cos(\vec{s};\vec{i})]ds$$

7.2. Стационарные уравнения теплопроводности

Процессы распространения тепла в твердом теле описываются уравнениями эллиптического типа:

двумерное $\lambda(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2})+F(x,y)=0,$

с краевым условием *Дирихле* на *S:* $T(x,y)\big|_S=\varphi(x,y)$;

трехмерное $\lambda(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2})+F(x,y,z)=0,$

краевым условием *Дирихле* на *S:* $T(x,y,z)\big|_S=\varphi(x,y,z),$

или с краевыми условиями *Неймана* на *S:*

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S=\chi(x,y)$$

7.3. Уравнения потенциала скорости

Безвихревые течения идеальной жидкости называются потенциальными. Компоненты скорости и потенциал скорости $\varphi=\varphi(x,y,z)$ связаны формулами

$$\vec{v}=grad\varphi,\quad u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Подстановка $\vec{v}=grad\varphi$ в уравнение неразрывности несжимаемой

$$div\vec{v}=0,divgrad\varphi=0$$

приводит к уравнениям эллиптического типа:

двумерное $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$

с краевым условием *Неймана* на *S:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = \chi(x,y),$$

трехмерное

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

с краевым условием *Неймана* на *S:*

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial n}\Big|_S = \chi(x,y,z).$$

Потенциальные течения суть безвихревые течения, потому как

$$\vec{\omega} = rot\vec{v} = rotgrad\varphi \equiv 0,$$

следовательно, в двумерных течениях $\omega_z = \omega = 0$ и уравнение для функции тока тоже будет эллиптического типа

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

с краевым условием *Дирихле* на *S:*

$$\psi(x,y)\big|_S = \vartheta(x,y)$$

7.4. Уравнения гидродинамического давления

В течениях несжимаемой жидкости комбинация уравнений динамики с уравнением неразрывности приводит к уравнению эллиптического типа для давления

$$\Delta p + (\nabla,(\vec{v},\nabla)\vec{v}) - (\nabla,\rho\vec{F}) = 0$$

В плоских течениях при $\rho = const, \vec{F} = const$, оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y})=0,$$

в пространственных течениях

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=0$$

7.5. Уравнения потенциала электростатического поля

По теореме *Гаусса* для вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля получается уравнение:

$$div\varepsilon_0\varepsilon\vec{E} = \rho,$$

где ε_0 - электрическая постоянная, ε - диэлектрическая проницаемость среды (в вакууме ε=1), ρ - объемная плотность зарядов. Потенциал φ электрического поля связан с вектором напряженности формулой $\vec{E} = -grad\varphi$ или в декартовых проекциях

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

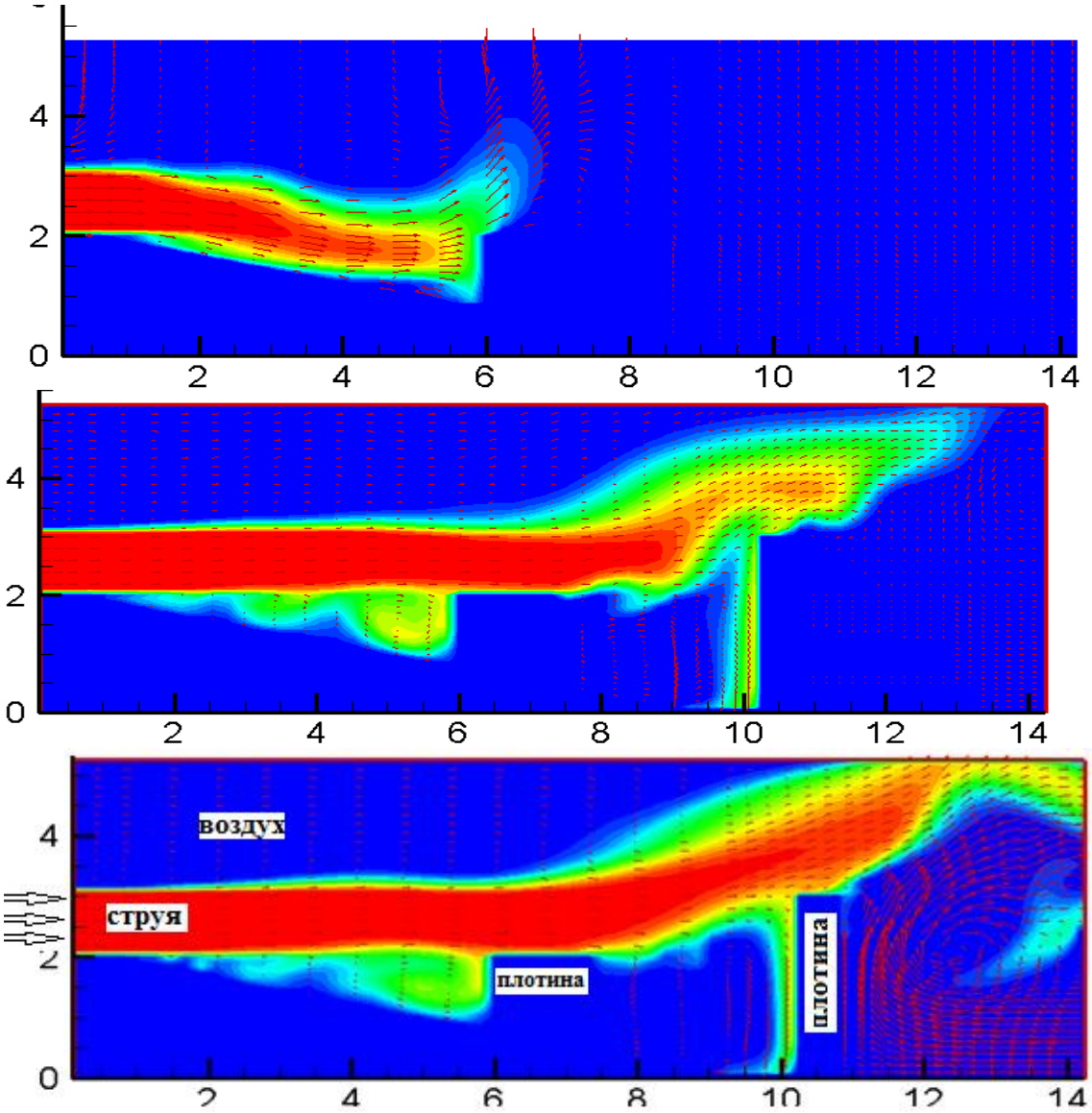
Подстановка в уравнение $div\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \rho$ приводит к уравнению эллиптического типа

$$divgrad\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

что в декартовой системе имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

для которого могут иметь место краевые условия типа *Неймана* $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{S_1} = \chi$ или *Дирихле* $\varphi\big|_{S_2} = \vartheta,\ S_1 \cup S_2 = S$.



Обтекание струей воды двух плотин

Глава 8. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

8.1. Метод простой итерации *Якоби*

В двумерной задаче

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+f(x,y)=0,\ T\big|_S=\varphi$$

данное уравнение аппроксимируется канонической схемой

$$\left(\frac{T_{i+1j}-T_{ij}}{h_{xi+1}}-\frac{T_{ij}-T_{i-1j}}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}}+\left(\frac{T_{ij+1}-T_{ij}}{h_{yj+1}}-\frac{T_{ij}-T_{ij-1}}{h_{yj}}\right)\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}=0,$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,\quad T_{ij}\big|_{S_h}=\varphi_{ij} \tag{1}$$

Метод *Якоби* используется так: задается произвольное начальное приближение $T_{ij}^0=f_{ij}$, или $T_{ij}^0=0$, последующие приближения (итерации) вычисляются по алгоритму

$$\left(\frac{T_{i+1j}^n-T_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}-\frac{T_{ij}^{n+1}-T_{i-1j}^n}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}}+\left(\frac{T_{ij+1}^n-T_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}-\frac{T_{ij}^{n+1}-T_{ij-1}^n}{h_{yj}}\right)\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}=0,$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1, T_{ij}^n\big|_{S_h}=\varphi_{ij},\ n=0,1,2,...,n^\bullet \tag{2}$$

Из (2) находятся последующие приближения к решению

$$T_{ij}^{n+1}=\left[\frac{1}{\hbar_{xi}}\left(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1}{h_{xi}}\right)+\frac{1}{\hbar_{yi}}\left(\frac{1}{h_{yj+1}}+\frac{1}{h_{yj}}\right)\right]^{-1}\left[\left(\frac{T_{i+1j}^n}{h_{xi+1}}+\frac{T_{i-1j}^n}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}}+\left(\frac{T_{ij+1}^n}{h_{yj+1}}+\frac{T_{ij-1}^n}{h_{yj}}\right)\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}\right]$$

Вычисляются невязки n-итерации

$$R_{ij}^n=\left(\frac{T_{i+1j}^n-T_{ij}^n}{h_{xi+1}}-\frac{T_{ij}^n-T_{i-1j}^n}{h_{xi}}\right)\frac{1}{\hbar_{xi}}+\left(\frac{T_{ij+1}^n-T_{ij}^n}{h_{yj+1}}-\frac{T_{ij}^n-T_{ij-1}^n}{h_{yj}}\right)\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}, \tag{3}$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1, n=0,1,2,...,n^\bullet, R_{ij}^n\big|_{S_h}=0$$

На точном решении $T_{ij}^*, i=0,...,N_x, j=0,...,N_y$ системы алгебраических уравнений (1) невязки равны нулю $R_{ij}^*=0, i=0,...,N_x, j=0,...,N_y$. Следовательно, при сходимости итераций пределом невязок должен быть нуль $\lim\limits_{n\to\infty}R_{ij}^n=0$. На основании этого критерием прекращения итерационного процесса является такой номер $n^\bullet$, при котором выполняется неравенство

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}}|R_{ij}^{n^\bullet}|\le\varepsilon,\quad \varepsilon\approx 0,\varepsilon\ne 0 \tag{4}$$

Это основной критерий сходимости итераций. Последнее $T_{ij}^{n^\bullet}$ используется в качестве решения системы: $T_{ij}\approx T_{ij}^{n^\bullet}, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1$. Метод *Якоби* – сходящийся метод.

Установилось *мнение*, что вместо критерия (4) надо пользоваться следующим признаком сходимости итераций

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}} | T_{ij}^{n^{\bullet}+1} - T_{ij}^{n^{\bullet}} | \le \varepsilon^o, \quad \varepsilon^o \approx 0, \varepsilon^o \neq 0 \tag{5}$$

Проведем согласование данного признака с основным критерием (4). С этой целью приведем систему (2) к форме

$$(\frac{T_{i+1j}^n - T_{ij}^n}{h_{xi+1}} - \frac{T_{ij}^n - T_{i-1j}^n}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}} + (\frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^n}{h_{yj+1}} - \frac{T_{ij}^n - T_{ij-1}^n}{h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yi}} + f_{ij} =$$

$$= (\frac{1}{\hbar_{xi}h_{xi+1}} + \frac{1}{\hbar_{xi}h_{xi}} + \frac{1}{\hbar_{yi}h_{yi+1}} + \frac{1}{\hbar_{yi}h_{yi}})(T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n), \tag{6}$$

Сравнивая с (3) находим, что невязку можно вычислять по следующей формуле

$$R_{ij}^n = (\frac{1}{\hbar_{xi}h_{xi+1}} + \frac{1}{\hbar_{xi}h_{xi}} + \frac{1}{\hbar_{yi}h_{yi+1}} + \frac{1}{\hbar_{yi}h_{yi}})(T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n) \tag{7}$$

Из (7) получается связь между критерием (4) и признаком (5):

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}} | R_{ij}^{n^*} | = \max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}} [(\frac{1}{\hbar_{xi}h_{xi+1}} + \frac{1}{\hbar_{xi}h_{xi}} + \frac{1}{\hbar_{yi}h_{yi+1}} + \frac{1}{\hbar_{yi}h_{yi}}) | (T_{ij}^{n^*+1} - T_{ij}^{n^*}) |] \le \varepsilon \tag{8}$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i, h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j$ из (8) вытекает связь между (4) и (5) в виде

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}} | R_{ij}^{n^*} | = (\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) \max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}} | (T_{ij}^{n^*+1} - T_{ij}^{n^*}) | \le \varepsilon,$$

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\ 1\le i\le N_y-1}} | (T_{ij}^{n^*+1} - T_{ij}^{n^*}) | \le \varepsilon \frac{h_x^2 h_y^2)}{2(h_x^2 + h_y^2)},$$

поэтому при сходимости должно быть выполнено равенство

$$\varepsilon^o = \varepsilon \frac{h_x^2 h_y^2)}{2(h_x^2 + h_y^2)} \tag{9}$$

На квадратной сетке $h_x = h_y = h, \forall (i, j)$ особенно наглядно видно

$$\varepsilon^o = \varepsilon h^2 / 4 \quad \textit{или} \quad \varepsilon = 4\varepsilon^o / h^2 \tag{10}$$

На кубической сетке в трехмерных задачах $\varepsilon^o = \varepsilon h^2 / 6$.

Рассмотрим применение итерационного метода *Якоби* при граничном условии 3-его рода $(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \gamma T)\big|_S = \varphi$ (здесь n означает нормальное (перпендикулярное к границе) направление. В одномерной задаче $n = x$) . Пусть краевое условие 3-ого рода поставлено на левой границе $i = 0$. Тогда оно может быть аппроксимировано в виде

$$(\lambda \frac{T_{1j}^n - T_{0j}^n}{h_{x1}} + \gamma T_{0j}^n)\Big|_{S_h} = \varphi_{0j}, \quad j = 1,..., N_y - 1$$

На границе итерация вычисляется по формуле

$$T_{0j}^n = (\varphi_{0j} - \lambda \frac{T_{1j}^n}{h_{x1}}) / (\gamma - \frac{\lambda}{h_{x1}}), \ j = 1,..., N_y - 1 \tag{11}$$

Невязка на границе равна

$$R_{0j}^{n}=(\lambda\frac{T_{1j}^{n}-T_{0j}^{n}}{h_{x1}}+\gamma T_{0j}^{n})\Big|_{S_h}-\varphi_{0j},\quad j=1,...,N_y-1$$

8.2. Метод *Либмана-Зейделя*

В этом методе при определении T_{ij}^{n+1} сразу же используются уже вычисленные значения $T_{i-1j}^{n+1},T_{ij-1}^{n+1}$ в конструкции:

$$(\frac{T_{i+1j}^{n}-T_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}-\frac{T_{ij}^{n+1}-T_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+(\frac{T_{ij+1}^{n}-T_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}-\frac{T_{ij}^{n+1}-T_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}=0,\qquad(12)$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,\quad T_{ij}^{n}\Big|_{S_h}=\varphi_{ij}\ ,T_{ij}^{0}=f_{ij},\ n=0,1,2,...,n^{\bullet}$$

Из (12) вычисляется последующее приближение к решению

$$T_{ij}^{n+1}=[\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1}{h_{xi}})+\frac{1}{\hbar_{yi}}(\frac{1}{h_{yj+1}}+\frac{1}{h_{yj}})]^{-1}[(\frac{T_{i+1j}^{n}}{h_{xi+1}}+\frac{T_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+(\frac{T_{ij+1}^{n}}{h_{yj+1}}+\frac{T_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}\ ]$$

Можно по другому алгоритму, но используя $T_{ij+1}^{n+1},T_{i+1j}^{n+1}$:

$$(\frac{T_{i+1j}^{n+1}-T_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}-\frac{T_{ij}^{n+1}-T_{i-1j}^{n}}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+(\frac{T_{ij+1}^{n+1}-T_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}-\frac{T_{ij}^{n+1}-T_{ij-1}^{n}}{h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yi}}+f_{ij}=0,\qquad(13)$$

$$i=N_x-1,N_x-2,...,1,\ j=N_y-1,N_y-2,...,1,\quad T_{ij}^{n}\Big|_{S_h}=\varphi_{ij}$$

Итерации прекращаются при выполнении критерия (4)

$$\max_{\substack{1\le i\le N_x-1\\1\le i\le N_y-1}}|\ R_{ij}^{n^{\bullet}}\ |\le\varepsilon,\qquad\varepsilon\approx 0,\varepsilon\neq 0$$

На равномерной сетке метод *Либмана-Зейделя* (12) упрощается:

$$T_{ij}^{n+1}=(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2})^{-2}(\frac{T_{i-1j}^{n+1}+T_{i+1j}^{n}}{h_x^2}+\frac{T_{ij-1}^{n+1}+T_{ij+1}^{n}}{h_y^2}+f_{ij}),\qquad(14)$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,\quad T_{ij}^{n}\Big|_{S_h}=\varphi_{ij}\ ,n=0,1,2,...,n^{\bullet}$$

Пусть уравнение с конвективными членами

$$u(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y})+f(x,y),\lambda=\lambda(x,y)>0,\Phi\Big|_S=\varphi(x,y)\quad(15)$$

аппроксимируется схемой

$$\frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}}+\frac{u-|u|}{2}\Phi_{x}+\frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}}+\frac{v-|v|}{2}\Phi_{y}\ ]=$$

$$=([T_{+1}\lambda+\lambda]/2\Phi_x)_{\dot{x}}+([T_{+2}\lambda+\lambda]/2\Phi_y)_{\dot{y}}+f\ ,(x,y)\in\Omega_h,\qquad(16)$$

имеющей «аппроксимационную вязкость».

Метод *Либмана-Зейделя* для (16) подобен (12):

$$\frac{u_{ij}+|u_{ij}|}{2}\frac{(\Phi^{n+1}-T_{-1}\Phi^{n+1})}{h_{xi}}+\frac{u_{ij}-|u_{ij}|}{2}\frac{(T_{+1}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})}{h_{xi+1}}+$$

$$+\frac{v_{ij}+|v_{ij}|}{2}\frac{(\Phi^{n+1}-T_{-2}\Phi^{n+1})}{h_{yj}}+\frac{v_{ij}-|v_{ij}|}{2}\frac{(T_{+2}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})}{h_{yj+1}}]=$$

$$=(\frac{[T_{+1}\lambda+\lambda](T_{+1}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})}{2h_{xi+1}}-\frac{[\lambda+T_{-1}\lambda](\Phi^{n+1}-T_{-1}\Phi^{n+1})}{2h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+$$

$$+(\frac{[T_{+2}\lambda+\lambda](T_{+2}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})}{2h_{yj+1}}-\frac{[\lambda+T_{-2}\lambda](\Phi^{n+1}-T_{-2}\Phi^{n+1})}{2h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yj}}]+f_{ij}^{n}, \qquad (17)$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,\quad \Phi_{ij}^{n}\big|_{S_h}=\varphi_{ij}\ ,n=0,1,2,...,n^{*}$$

Для монотонной схемы «без аппроксимационной вязкости»

$$\frac{u\ +|u\ |}{2}\Phi_{\bar{x}^0}+\frac{u\ -|u\ |}{2}\Phi_{x^0}+\frac{v\ +|v\ |}{2}\Phi_{\bar{y}^0}+\frac{v\ -|v\ |}{2}\Phi_{y^0}]=$$

$$=([T_{+1}\lambda+\lambda]/2\Phi_x)_{\dot{x}}+([T_{+2}\lambda+\lambda]/2\Phi_y)_{\dot{y}}+f\ ,(x,y)\in\Omega_h \qquad (18)$$

алгоритм *Либмана-Зейделя* используется аналогично.

8.3. Сходимость итерационного процесса

Основные принципы доказательства сходимости итерационных алгоритмов приведем на примере метода простой итерации для системы разностных уравнений (16), записанной в операторах:

$$c_{+1}\Delta_{+1}\Phi-c_{-1}\Delta_{-1}\Phi+c_{+2}\Delta_{+2}\Phi-c_{-2}\Delta_{-2}\Phi+f=0,(x,y)\in\Omega_h, \qquad (19)$$

где

$$c_{+1}=\frac{\lambda_{i+1j}+\lambda_{ij}}{2h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ij}|-u_{ij}}{2h_{xi+1}},\quad c_{-1}=\frac{\lambda_{ij}+\lambda_{i-1j}}{2h_{xi}\hbar_{xi}}+\frac{|u_{ij}|+u_{ij}}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2}=\frac{\lambda_{ij+1}+\lambda_{ij}}{2h_{yj+1}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ij}|-v_{ij}}{2h_{yj+1}},c_{-2}=\frac{\lambda_{ij}+\lambda_{ij-1}}{2h_{yj}\hbar_{yj}}+\frac{|v_{ij}|+v_{ij}}{2h_{yj}} \qquad (20)$$

Метод *Якоби* для (19) имеет вид

$$c_{+1}(T_{+1}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-1}(\Phi^{n+1}-T_{-1}\Phi^{n})+c_{+2}(T_{+2}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-2}(\Phi^{n+1}-T_{-2}\Phi^{n})+f=0,(x,y)\in\Omega_h,$$

$$\Phi_{ij}^{n}\big|_{S_h}=\Phi_{ij}^{n+1}\big|_{S_h}=\varphi_{ij}\ ,\ \Phi_{ij}^{0}=f_{ij},\ n=0,1,2,...,n^{*} \qquad (21)$$

Вводится сеточная функция *погрешности итераций*

$$\hat{\Phi}^{n}=\Phi^{n}-\Phi,\quad \hat{\Phi}_{ij}^{n}=\Phi_{ij}^{n}-\Phi_{ij},\quad \hat{\Phi}_{ij}^{n}\big|_{S_h}=\hat{\Phi}_{ij}^{n+1}\big|_{S_h}=0,\forall n$$

Подстановка $\Phi^{n}=\hat{\Phi}^{n}+\Phi$ в (21) образует выражение

$$c_{+1}(T_{+1}\hat{\Phi}^{n}-\hat{\Phi}^{n+1})-c_{-1}(\hat{\Phi}^{n+1}-T_{-1}\hat{\Phi}^{n})+c_{+2}(T_{+2}\hat{\Phi}^{n}-\hat{\Phi}^{n+1})-c_{-2}(\hat{\Phi}^{n+1}-T_{-2}\hat{\Phi}^{n})=0,(x,y)\in\Omega_h,$$

$$\hat{\Phi}_{ij}^{n}\Big|_{S_h}=\hat{\Phi}_{ij}^{n+1}\Big|_{S_h}=0,\ \Phi_{ij}^{0}=\varepsilon_{ij},\ n=0,1,2,...,n^{*} \qquad (22)$$

Из (22) вытекает

$$(c_{+1}+c_{-1}+c_{+2}+c_{-2})\hat{\Phi}^{n+1}=c_{+1}T_{+1}\hat{\Phi}^{n}+c_{-1}T_{-1}\hat{\Phi}^{n}+c_{+2}T_{+2}\hat{\Phi}^{n}+c_{-2}T_{-2}\hat{\Phi}^{n},(x,y)\in\Omega_h$$

Беря по модулю от обеих частей данного выражения и имея в виду положительность коэффициентов $c_{\pm m}>0, m=1,2$, выводим неравенства

$$(c_{+1}+c_{-1}+c_{+2}+c_{-2})\,|\,\hat{\Phi}^{n+1}\,|=|\,c_{+1}T_{+1}\hat{\Phi}^{n}+c_{-1}T_{-1}\hat{\Phi}^{n}+c_{+2}T_{+2}\hat{\Phi}^{n}+$$

$$+c_{-2}T_{-2}\hat{\Phi}^{n}\,|\le c_{+1}\,|\,T_{+1}\hat{\Phi}^{n}\,|+c_{-1}\,|\,T_{-1}\hat{\Phi}^{n}\,|+c_{+2}\,|\,T_{+2}\hat{\Phi}^{n}\,|+$$

$$+c_{-2}\,|\,T_{-2}\hat{\Phi}^{n}\,|\le c_{+1}\,\|\,T_{+1}\hat{\Phi}^{n}\,\|+c_{-1}\,\|\,T_{-1}\hat{\Phi}^{n}\,\|+c_{+2}\,\|\,T_{+2}\hat{\Phi}^{n}\,\|+$$

$$+c_{-2}\,\|\,T_{-2}\hat{\Phi}^{n}\,\|\le c_{+1}\,\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|+c_{-1}\,\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|+c_{+2}\,\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|+$$

$$+c_{-2}\,\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|=(c_{+1}+c_{-1}+c_{+2}+c_{-2})\,\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|,(x,y)\in\Omega_h,\forall n,$$

откуда получается

$$(c_{+1}+c_{-1}+c_{+2}+c_{-2})\,|\,\hat{\Phi}^{n+1}\,|\le(c_{+1}+c_{-1}+c_{+2}+c_{-2})\,\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|,\ (x,y)\in\Omega_h,\forall n$$

Сокращая множители и принимая во внимание, что данное неравенство имеет место и для максимума модуля $\max\limits_{\Omega_h}|\,\hat{\Phi}^{n+1}\,|\le\|\,\hat{\Phi}^{n+1}\,\|$,

$$\|\,\hat{\Phi}^{n+1}\,\|\le\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|,\ n=0,1,2,...,$$

получаем монотонно невозрастающую последовательность

$$\|\,\hat{\Phi}^{n+1}\,\|\le\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|\le\|\,\hat{\Phi}^{n-1}\,\|\le\|\,\hat{\Phi}^{n-2}\,\|\le...\le\|\,\hat{\Phi}^{1}\,\|\le\|\,\hat{\Phi}^{0}\,\|,\ n=0,1,2,...$$

пределом которой будет $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|=0$. В результате приходим к следующему результату

$$\lim_{n\to\infty}\|\,\hat{\Phi}^{n}\,\|=\lim_{n\to\infty}\|\,\Phi^{n}-\Phi\,\|=0,$$

откуда вытекает выполнение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi^{n}=\Phi$.

Сходимость метода простой итерации доказана. Аналогичным образом доказывается сходимость метода *Либмана-Зейделя*

$$c_{+1}(T_{+1}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-1}(\Phi^{n+1}-T_{-1}\Phi^{n+1})+c_{+2}(T_{+2}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-2}(\Phi^{n+1}-T_{-2}\Phi^{n+1})+f=0,(x,y)\in\Omega_h,$$

$$\left|\Phi_{ij}^{n}\right|_{S_h}=\Phi_{ij}^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi_{ij},\ \Phi_{ij}^{0}=f_{ij},\ n=0,1,2,...,n^{*} \qquad (23)$$

8.4. Итерационный метод *Письмана-Ракфорда*

В итерационном алгоритме *Письмана-Ракфорда*

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}}-T^{n}}{\theta}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^{n}+f,\ \frac{T^{n+1}-T^{n+\frac{1}{2}}}{\theta}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^{n+1}+f,T^{0}=f,n=0,1,...,n^{*}$$

граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h}=\varphi\ ,\quad T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi\ ,$$

подтверждаются теорией *Дьяконова.*

Здесь $0<\theta<1$ – итерационный параметр, оптимальный выбор которого обсуждается в [9], [14], операторы

$$A_1=\frac{a^2}{\hbar_{xi}}\left(\frac{\Delta_{+1}}{h_{xi+1}}-\frac{\Delta_{-1}}{h_{xi}}\right), A_2=\frac{a^2}{\hbar_{yj}}\left(\frac{\Delta_{+2}}{h_{yj+1}}-\frac{\Delta_{-2}}{h_{yj}}\right),$$

на равномерной сетке $h_{xi+1}=h_{xi}=h_x, h_{yj+1}=h_{yj}=h_y$ имеют вид

$$A_1=\frac{a^2}{h_x^2}(T_{+1}-2E+T_{-1})=\frac{a^2}{h_x^2}(\Delta_{+1}-\Delta_{-1}), A_2=\frac{a^2}{h_y^2}(T_{+2}-2E+T_{-2})=\frac{a^2}{h_y^2}(\Delta_{+2}-\Delta_{-2})$$

Трехточечными прогонками с граничным условием $T^{n+\frac{1}{2}}=\varphi$ по x вычисляются $T^{n+\frac{1}{2}}$, при $T^{n+1}\big|_{S_h}=\varphi$ трехточечными прогонками по y находятся T^{n+1}. С коэффициентами $c_{\pm m}>0, m=1,2$ операторы в методе *Письмана-Ракфорда* будут такие

$$A_m=c_{+m}\Delta_{+m}-c_{-m}\Delta_{-m}, m=1,2$$

Для монотонной схемы «без аппроксимационной вязкости»

$$\frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}+\frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0}+\frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0}+\frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0}=$$

$$=([T_{+1}\lambda+\lambda]/2\Phi_x)_{\dot{x}}+([T_{+2}\lambda+\lambda]/2\Phi_y)_{\dot{y}}+f\ ,(x,y)\in\Omega_h \qquad (24)$$

идея метода *Письмана-Ракфорда* используется аналогично:

$$\frac{\Phi^{n+\frac{1}{2}}-\Phi^n}{\theta}+\frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0}^{n}+\frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0}^{n}=$$

$$=([T_{+1}\lambda+\lambda]/2\Phi_x^{n+\frac{1}{2}})_{\dot{x}}+([T_{+2}\lambda+\lambda]/2\Phi_y^{n})_{\dot{y}}+f\ ,(x,y)\in\Omega_h,$$

$$\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^{n+\frac{1}{2}}}{\theta}+\frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0}^{n+1}+\frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0}^{n+1}=$$

$$=([T_{+1}\lambda+\lambda]/2\Phi_x^{n+\frac{1}{2}})_{\dot{x}}+([T_{+2}\lambda+\lambda]/2\Phi_y^{n+1})_{\dot{y}}+f\ ,(x,y)\in\Omega_h$$

Пятиточечными прогонками по x вычисляются $\Phi^{n+\frac{1}{2}}$ с граничным условием $\Phi^{n+\frac{1}{2}}=\varphi$, пятиточечными прогонками по y находится Φ^{n+1} при $\Phi^{n+1}\big|_{S_h}=\varphi$. Сходящийся метод.

8.5. Итерационный метод *Дугласа-Ракфорда*

В итерационном алгоритме *Дугласа-Ракфорда,* которая названа *Н.Н.Яненко* [12], методом стабилизирующей поправки,

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}}-T^n}{\theta}=A_1T^{n+\frac{1}{2}}+A_2T^n+f,$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n+\frac{1}{2}}}{\theta}=A_2(T^{n+1}-T^n),T^0=f,n=0,1,...,n^*$$

Дугласом и Ракфордом изначально поставлены граничные условия $T^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h}=\varphi$, $T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi$, которые подтверждаются теорией *Дьяконова.*

Здесь также $0<\theta<1-$итерационный параметр, выбираемый зачастую экспериментально из соображений минимизации числа итераций n^*.

Метод *Дугласа-Ракфорда* является сходящимся методом [12]. Для решения трехмерных задач схема *Дугласа-Ракфорда* имеет вид

$$\frac{T^{n+\frac{1}{3}}-T^n}{\theta}=A_1T^{n+\frac{1}{3}}+A_2T^n+A_3T^n+f,\ \frac{T^{n+\frac{2}{3}}-T^{n+\frac{1}{3}}}{\theta}=A_2(T^{n+\frac{2}{3}}-T^n),$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n+\frac{2}{3}}}{\theta}=A_3(T^{n+1}-T^n),\ T^0=f,\ T^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi$$

По методу *Дьяконова* ставятся граничные условия

$$T^{n+\frac{1}{3}}|_{S_h\left(\substack{x=o\\x=a_1}\right)}=\varphi\ +(E-\tau A_2)(E-\tau A_3)(\varphi\ -\varphi\ )=\varphi,$$

$$T^{n+\frac{2}{3}}|_{S_h\left(\substack{y=o\\y=a_2}\right)}=\varphi\ +(E-\tau A_3)(\varphi\ -\varphi\ )=\varphi$$

Такие же граничные условия для промежуточных величин были поставлены *Дугласом и Ракфордом* в 1956г. до появления теоретических предпосылок *Дьяконова.* Итерации сходятся [12].

8.6. Метод верхней релаксации

Алгоритм метода верхней релаксации состоит из двух этапов**.** Первый этап совпадает с методом *Либмана-Зейделя:*

$$T^*_{ijk}=(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_z^2})^{-1}(\frac{T^{n+1}_{i-1jk}+T^n_{i+1jk}}{h_x^2}+\frac{T^{n+1}_{ij-1k}+T^n_{ij+1k}}{h_y^2}+ \tag{26}$$

$$+\frac{T^{n+1}_{ijk-1}+T^n_{ijk+1}}{h_z^2}+f_{ijk}),i=\overline{1,N_x-1},j=\overline{1,N_y-1},k=\overline{1,N_y-1},\ T^n_{ijk}\Big|_{S_h}=T^{n+1}_{ijk}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk}\ ,T^0_{ijk}=f_{ijk},$$

второй этап комбинированный:

$$T^{n+1}_{ijk}=(1-\theta)T^n_{ijk}+\theta T^*_{ijk}, \tag{27}$$

$$i=\overline{1,N_x-1},\ j=\overline{1,N_y-1},k=\overline{1,N_y-1},T^{n+1}_{ijk}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk},n=0,1,2,...,n^*$$

Здесь θ- параметр итерации, при $0<\theta<1-$ нижняя релаксация, при $1<\theta<2-$верхняя релаксация.

Подставляя (26) в (27) получаем итерационный алгоритм

$$T_{ijk}^{n+1}=(1-\theta)T_{ijk}^{n}+(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_z^2})^{-1}(\frac{T_{i-1jk}^{n+1}+T_{i+1jk}^{n}}{h_x^2}+\frac{T_{ij-1k}^{n+1}+T_{ij+1k}^{n}}{h_y^2}+$$

$$+\frac{T_{ijk-1}^{n+1}+T_{ijk+1}^{n}}{h_z^2}+f_{ijk}),i=\overline{1,N_x-1},j=\overline{1,N_y-1},k=\overline{1,N_y-1}, \qquad (28)$$

При $\theta=1$ очевидно (28) переходит в метод *Либмана-Зейделя.*Параметр θ выбирается из интервала $1<\theta<2$, соответственно этому название - верхняя релаксация.

8.7. Параметрический итерационный процесс

Для примера рассмотрим трехмерное уравнение

$$\rho[u(x,y,z)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v(x,y,z)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w(x,y,z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}]= \qquad (29)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial\Phi}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial\Phi}{\partial z})+f(x,y,z),\ \ \mu=\mu(x,y,z)>0,\Phi\big|_S=\varphi(x,y,z),$$

которое аппроксимируется монотонной схемой *Джакупова*

$$\rho[\frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}}+\frac{u-|u|}{2}\Phi_x+\frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}}+\frac{v-|v|}{2}\Phi_y+\frac{w+|w|}{2}\Phi_{\bar{z}}+\frac{w-|w|}{2}\Phi_z]=$$

$$=([T_{+1}\mu+\mu]/2\Phi_x)_{\dot{x}}+(\mu_x^{vw}-\mu_{\min})\Phi_{x\dot{x}}+([T_{+2}\mu+\mu]/2\Phi_y)_{\dot{y}}+ \qquad (30)$$

$$+(\mu_y^{wu}-\mu_{\min})\Phi_{y\dot{y}}+([T_{+3}\mu+\mu]/2\Phi_z)_{\dot{z}}+(\mu_z^{uv}-\mu_{\min})\Phi_{z\dot{z}}+f\ \ ,(x,y,z)\in\Omega_h$$

Приведем (30) к следующей операторной форме

$$c_{+1}\Delta_{+1}\Phi-c_{-1}\Delta_{-1}\Phi+c_{+2}\Delta_{+2}\Phi-c_{-2}\Delta_{-2}\Phi+c_{+3}\Delta_{+3}\Phi-c_{-3}\Delta_{-3}\Phi+f=0,(x,y,z)\in\Omega_h,\Phi\big|_{S_h}=\varphi, \qquad (31)$$

где коэффициенты равны

$$c_{+1}^{n+1}=\frac{(\mu_x^{vw}-\mu_{\min})+(\mu_{i+1jk}^{n+1}+\mu_{ijk}^{n+1})/2}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}+\rho\frac{|u_{ijk}^{n+1}|-u_{ijk}^{n+1}}{2h_{xi+1}},$$

$$c_{-1}^{n+1}=\frac{(\mu_x^{vw}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk}^{n+1}+\mu_{i-1jk}^{n+1})/2}{h_{xi}\hbar_{xi}}+\rho\frac{|u_{ijk}^{n+1}|+u_{ijk}^{n+1}}{2h_{xi}},$$

$$c_{+2}^{n+1}=\frac{(\mu_y^{wu}-\mu_{\min})+(\mu_{ij+1k}^{n+1}+\mu_{ijk}^{n+1})/2}{h_{yj+1}\hbar_{yj}}+\rho\frac{|v_{ijk}^{n+1}|-v_{ijk}^{n+1}}{2h_{yj+1}},$$

$$c_{-2}^{n+1}=\frac{(\mu_y^{wu}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk}^{n+1}+\mu_{ij-1k}^{n+1})/2}{h_{yj}\hbar_{yj}}+\rho\frac{|v_{ijk}^{n+1}|+v_{ijk}^{n+1}}{2h_{yj}},$$

$$c_{+3}^{n+1}=\frac{(\mu_z^{uv}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk+1}^{n+1}+\mu_{ijk}^{n+1})/2}{h_{zk+1}\hbar_{zk}}+\rho\frac{|w_{ijk}^{n+1}|-w_{ijk}^{n+1}}{2h_{zk+1}},$$

$$c_{-3}^{n+1}=\frac{(\mu_z^{uv}-\mu_{\min})+(\mu_{ijk}^{n+1}+\mu_{ijk-1}^{n+1})/2}{h_{zk}\hbar_{zk}}+\rho\frac{|w_{ijk}^{n+1}|+w_{ijk}^{n+1}}{2h_{zk}}$$

В 1-м варианте при краевом условии *Дирихле* для решения (31) параметрический итерационный процесс применяется по аналогу с

параметрический итерационный процесс применяется по аналогу с методом *Либмана-Зейделя:*

$$\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^{n}}{\theta}=c_{+1}(T_{+1}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-1}(\Phi^{n+1}-T_{-1}\Phi^{n+1})+$$

$$+c_{+2}(T_{+2}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-2}(\Phi^{n+1}-T_{-2}\Phi^{n+1})+c_{+3}(T_{+3}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-$$

$$-c_{-3}(\Phi^{n+1}-T_{-3}\Phi^{n+1})+f, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1,$$

$$\Phi_{ij}^{n}\Big|_{S_h}=\Phi_{ij}^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi_{ij},\ \Phi_{ij}^{0}=f_{ij},\ n=0,1,2,...,n^{*}.$$

Во 2-ом варианте, если имеет место краевое условие типа *Неймана,* параметрический итерационный процесс применяется по аналогу с методом *Якоби:*

$$\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^{n}}{\theta}=c_{+1}(T_{+1}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-1}(\Phi^{n+1}-T_{-1}\Phi^{n})+c_{+2}(T_{+2}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-$$

$$-c_{-2}(\Phi^{n+1}-T_{-2}\Phi^{n})+c_{+3}(T_{+3}\Phi^{n}-\Phi^{n+1})-c_{-3}(\Phi^{n+1}-T_{-3}\Phi^{n})+f,$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,\ k=1,...,N_z-1,$$

$$\Phi_{ijk}^{n}\Big|_{S_h}=\Phi_{ijk}^{n+1}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk},\ \Phi_{ijk}^{0}=f_{ijk},\ n=0,1,2,...,n^{*},$$

где $0<\theta<1-$итерационный параметр, подбирается экспериментально с целью минимизации числа итераций n^{*} . Данный алгоритм является сходящимся итерационным процессом.

Для схемы без «аппроксимационной вязкости»

$$\frac{u+|u|}{2}\Phi_{\bar{x}^0}+\frac{u-|u|}{2}\Phi_{x^0}+\frac{v+|v|}{2}\Phi_{\bar{y}^0}+\frac{v-|v|}{2}\Phi_{y^0}]+\frac{w+|w|}{2}\Phi_{\bar{z}^0}+\frac{w-|w|}{2}\Phi_{z^0}]=$$

$$=([T_{+1}\lambda+\lambda]/2\Phi_x)_{\dot{x}}++([T_{+2}\lambda+\lambda]/2\Phi_y)_{\dot{y}}+([T_{+3}\lambda+\lambda]/2\Phi_z)_{\dot{z}}+f\ ,(x,y,z)\in\Omega_h$$

параметрический процесс применяется аналогично.

При решении трехмерного уравнения теплопроводности параметрический итерационный процесс выглядит так:

$$\frac{T_{ijk}^{n+1}-T_{ijk}^{n}}{\theta}=(\frac{T_{i+1jk}^{n}-T_{ijk}^{n+1}}{h_{xi+1}}-\frac{T_{ijk}^{n+1}-T_{i-1jk}^{n+1}}{h_{xi}})\frac{1}{\hbar_{xi}}+$$

$$+(\frac{T_{ij+1k}^{n}-T_{ijk}^{n+1}}{h_{yj+1}}-\frac{T_{ijk}^{n+1}-T_{ij-1k}^{n+1}}{h_{yj}})\frac{1}{\hbar_{yi}}+(\frac{T_{ijk+1}^{n}-T_{ijk}^{n+1}}{h_{zk+1}}-\frac{T_{ijk}^{n+1}-T_{ijk-1}^{n+1}}{h_{zk}})\frac{1}{\hbar_{zk}}+f_{ijk},$$

$$T_{ijk}^{0}=f_{ijk}, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1, T_{ijk}^{n}\Big|_{S_h}=\varphi_{ijk}\ , n=0,1,2,...,n^{*}$$

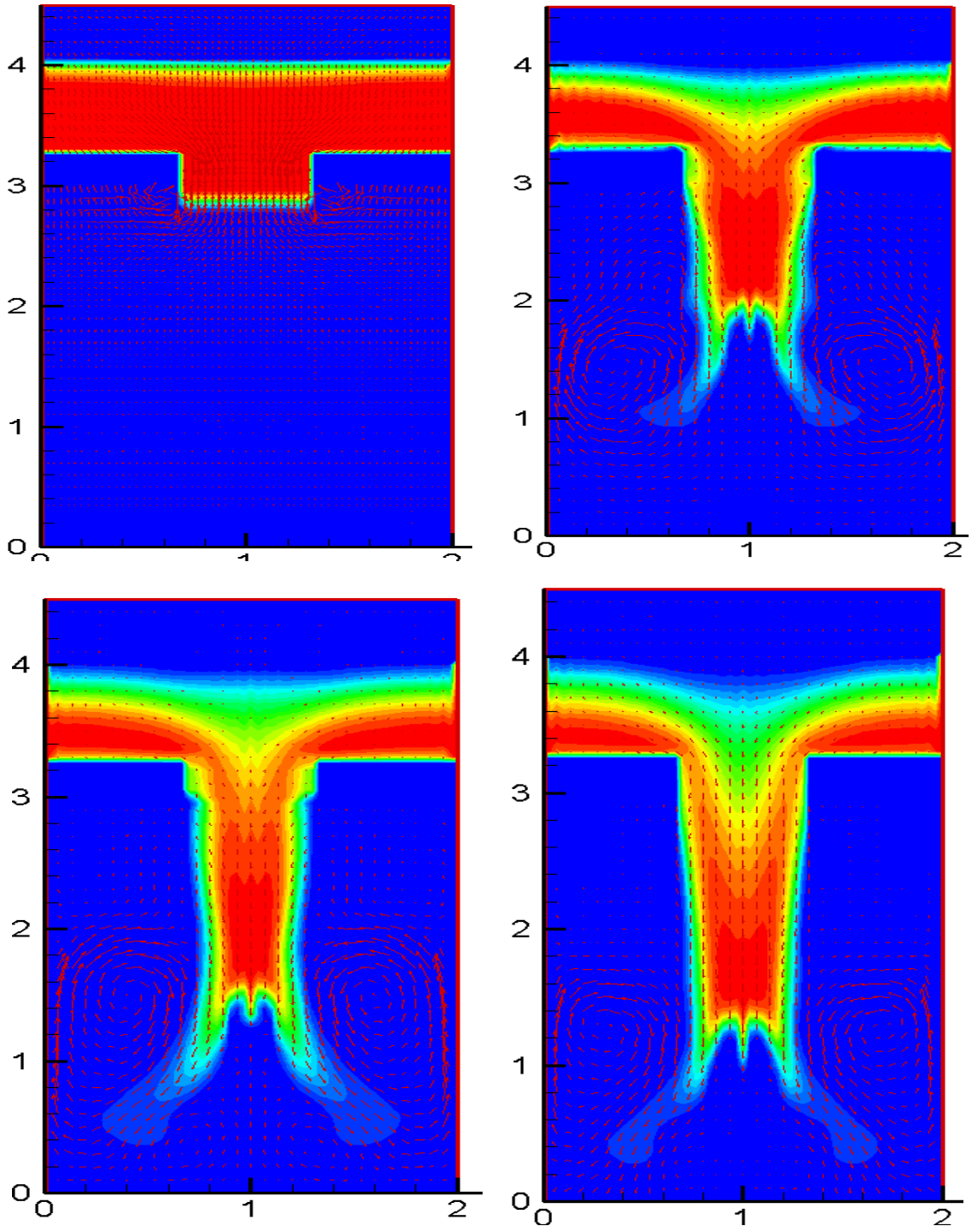
При краевых условий типа *Неймана*, например на гранях параллелепипеда $x=0,\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=\psi_1$ и $x=a_1,\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=a_1}=\psi_2$, итерации находятся по алгоритмам

$$\frac{-3T_{0jk}^{n+1}+4T_{1jk}^{n}-T_{2jk}^{n}}{2h_{x1}}=\psi_{10jk},\frac{3T_{N_xjk}^{n+1}-4T_{N_x-1jk}^{n}+T_{N_x-2jk}^{n}}{2h_{xN_x}}=\psi_{10jk},\ j=1,...,N_y-1,k=1,...,N_z-1$$

Формулы написаны для равных приграничных шагов $h_{x1} = h_{x2}, h_{xN_x} = h_{xN_x-1}$.

Вопросы.

1. Написать для системы (18) метод *Либмана-Зейделя*.
2. Написать параметрический метод в индексном виде.
3. Доказать сходимость параметрического итерационного процесса.
4. Применить метод верхней релаксации для трехмерного уравнения.
5. Написать аппроксимации краевых условий *Неймана* на неравномерной сетке.



Стекание струи воды в замкнутый объем воздуха под действием силы тяжести

Глава 9. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ, ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

9.1. Уравнения возмущений плотности, скорости и давления в одномерных течениях идеального газа

Пусть идеальный газ до момента времени $t < t_0$ находится в состоянии покоя с параметрами $u = u_0 = 0,\ \rho = \rho_0 = const,\ p = p_0 = const$. В момент времени $t = t_0$ в газ вносятся малые возмущения скорости, плотности и давления $u(x,t_0) = u_0 + u'(x,t_0),\ \rho(x,t_0) = \rho_0 + \rho'(x,t_0),\ p(x,t_0) = p_0 + p'(x,t_0)$. В силу их малости $|u'(x,t_0)| \approx 0, |\rho'(x,t_0)| \approx 0, |p'(x,t_0)| \approx 0$ для возмущений плотности ρ', скорости u' и давления p' получаются уравнения гиперболического типа [2]:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2},$$

здесь $a_0 = \sqrt{(\frac{\partial p}{\partial \rho})_0}$ - скорость звука.

9.2. Уравнения акустики

Одномерные уравнения *Эйлера*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ p = R\rho T,\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$

$$c_v(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u T}{\partial x}) = -p\frac{\partial u}{\partial x},\ u\big|_{t=0} = u^0,\ T\big|_{t=0} = T^0,\ \rho\big|_{t=0} = \rho^0.$$

в лагранжевых массовых переменных $s = \int_{x_0}^{x} \rho(x,t)dx,\ x_0 = const$, $t_л = t,$ записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t_л} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial \rho}{\partial t_л} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial}{\partial t_л}(c_v T + \frac{u^2}{2}) = -\frac{\partial (pu)}{\partial s},\ p = R\rho T,$$

Благодаря скорости звука $a^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})$ имеет место $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial s} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s}$.

В результате уравнения динамики получают форму

$$\frac{\partial u}{\partial t_л} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial \rho}{\partial t_л} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

Исключением из данной системы скорости u получается уравнение гиперболического типа для плотности

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t_л^2} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial s}(a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s}) + \frac{\partial \ln \rho^2}{\partial t_л}\frac{\partial \rho}{\partial t_л},$$

Исключением из системы плотности ρ получается гиперболическое уравнение для скорости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_л^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial s}(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial s}) + \frac{\partial \ln a^2}{\partial t_л} \frac{\partial u}{\partial t_л}$$

9.3. Уравнения теории упругости. Уравнение *Ламе* с симметричным тензором напряжений ($\mu^o = \mu$) и уравнение *Джакупова* ($\mu^o = 0$) с несимметричным тензором напряжений

В теории упругости из 2-го закона *Ньютона* в изотропном теле выводится уравнение *Ламе* для перемещений, основанное на ошибочном предположении о **симметричности тензора напряжений** [1]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) grad div \vec{w} + \mu \Delta \vec{w}$$

Доказана (*см.Джакупов К.Б.* [17]) **несимметричность** тензора напряжений в сплошной среде, чему соответствует уравнение гиперболического типа

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda grad div \vec{w} + \mu \Delta \vec{w}$$

Здесь $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$ - перемещение, $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ - массовая сила, поэтому в проекциях на оси координат получается система из 3-х скалярных гиперболических уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}) + \mu(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} = \rho_0 F_y + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}) + \mu(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + (\lambda + \mu^o) \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}) + \mu(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2})$$

Из данной системы уравнения *Ламе* получаются при $\mu^o = \mu$, уравнения *Джакупова* при $\mu^o = 0$.

9.4. Уравнения электродинамики

Из системы уравнений *Максвелла:*

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, div\vec{D} = \rho, rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, div\vec{B} = 0, \vec{j} = \delta \vec{E}, \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

для напряженности $\vec{E}$ электрического поля получается уравнение гиперболического типа

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \Delta \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \mu} grad\, div \vec{E}$$

Глава 10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

10.1. Явная схема. Критерий *Куранта*

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, a^2 = const, \tag{1}$$

$$\Phi\Big|_{t=t_0} = d_0(x), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = d(x), \Phi\Big|_{x=0} = \varphi(0,t), \Phi\Big|_{x=a_1} = \varphi(a_1,t)$$

На равномерной сетке $h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \tau_{n+1} = \tau_n = \tau$ явная схема имеет вид в индексной записи

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - 2\Phi_i^n + \Phi_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2\left(\frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{h_x^2}\right), n = 1,..., N_\tau - 1,$$

$$\Phi_i^0 = d_{0i}, \Phi_i^1 = \Phi_i^0 + \pi d_i + \tau^2/2\left(a^2\frac{d^2 d_0}{dx^2}\right)_i, i = 1,..., N_x - 1 \tag{2}$$

Погрешность аппроксимации схемы (2) равна

$$\psi_i^n = O(\tau^2) + O(h_x^2), \ \ i = 1,..., N_x - 1$$

Исследование устойчивости проводится методом *фон Неймана*

$$\Phi_i^n = p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x}, \quad \bar{i} = \sqrt{-1}, \quad m = 0,\pm1,\pm2,... \tag{3}$$

С этой целью (3) подставляется в (2), имея в виду, что в выражении $p^{(n)}$ стоит коэффициент p, а (n)- показатель степени:

$$\frac{p^{(n+1)}e^{\bar{i}mih_x} - 2p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x} + p^{(n-1)}e^{\bar{i}mih_x}}{\tau^2} = a^2\left(\frac{p^{(n)}e^{\bar{i}m(i+1)h_x} - 2p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x} + p^{(n)}e^{\bar{i}m(i-1)h_x}}{h_x^2}\right)$$

После очевидных сокращений $p^{(n)}e^{\bar{i}mih_x}$ вытекает

$$\frac{p\ -2+p^{-1}}{\tau^2} = a^2\left(\frac{e^{\bar{i}mh_x} - 2 + e^{-\bar{i}mh_x}}{h_x^2}\right), \tag{4}$$

По свойству комплексной экспоненты

$$e^{imh_x} = \cos mh_x + i\sin mh_x, \quad e^{-\bar{i}mh_x} = \cos mh_x - i\sin mh_x,$$

в силу которых в (4) исключаются мнимые числа

$$\frac{p-2+p^{-1}}{\tau^2} = a^2\left(\frac{2\cos mh_x - 2}{h_x^2}\right), \tag{5}$$

Тригонометрическая формула половинного аргумента

$$\sin\frac{mh_x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos mh_x}{2}}$$

использованное в (5), дает дисперсионное соотношение

$$\frac{p-2+p^{-1}}{\tau^2} = -\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2}, p^2 + (\tau^2\ \frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} - 2)p + 1 = 0$$

По теореме *Виетта* корни данного уравнения равны

$$p_{1,2} = -(\tau^2 \ \frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} - 2)/2 \pm \sqrt{[(\tau^2 \ \frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} - 2)/2]^2 - 1}$$

По методу *фон Неймана* для того чтобы числовые погрешности бесконечно не возрастали (иначе они могут испортить решение) необходимо выполнение неравенства

$$|p| \le 1 \qquad (6)$$

Если дискриминант уравнения положителен, то $|p| > 1$, следовательно, схема будет неустойчивой. Поэтому дискриминант должен быть неположительным, что будет иметь при выполнении неравенства

$$|(\tau^2 \ \frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} - 2)/2| \le 1$$

Ограничение (6) будет выполнено для модуля комплексного числа. Из данного неравенства вытекают два неравенства

$$\tau^2\frac{4a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} \le 4, \tau^2\frac{a^2}{h_x^2}\sin^2\frac{mh_x}{2} \le 1, m = 0,\pm1,\pm2,... \qquad (7)$$

Максимальное значение синуса равно 1: $\max_m \sin^2\frac{mh_x}{2} = 1$. По этой причине из (7) получается условие устойчивости явной схемы (2) по методу *фон Неймана* в виде неравенства $\tau^2\frac{a^2}{h_x^2} \le 1$. Выражение $Cu = \tau\frac{a}{h_x} -$ называется критерием *Куранта*. Для устойчивости явной схемы критерий *Куранта* не должен превосходить единицу.

Для двумерной начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}), a^2 = const,$$

$$\Phi\Big|_{t=t_0} = d_0(x,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = d(x,y), \ \Phi\big|_S = \varphi(x,y,t)$$

явная схема

$$\frac{\Phi_{ij}^{n+1} - 2\Phi_{ij}^n + \Phi_{ij}^{n-1}}{\tau^2} = a^2(\frac{\Phi_{i+1j}^n - 2\Phi_{ij}^n + \Phi_{i-1j}^n}{h_x^2} +$$

$$+\frac{\Phi_{ij+1}^n - 2\Phi_{ij}^n + \Phi_{ij-1}^n}{h_y^2}), i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1, n = 1,..., N_\tau - 1,$$

$$\Phi_{ij}^0 = d_{0ij}, \Phi_{ij}^1 = \Phi_{ij}^0 + \pi d_{ij} + \tau^2/2a^2(\frac{\partial^2 d_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_0}{\partial y^2})_{ij},$$

$$i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1, \quad \Phi_{ij}^n\Big|_{S_h} = \varphi^n, \forall n$$

аппроксимирует с погрешностью $\psi_{ij}^n = O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2)$. Явная схема является устойчивым при выполнении условия

$$\tau^2 a^2(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}) \le 1$$

10.2. Неявная схема

Неявная схема имеет вид

$$\frac{\Phi_i^{n+1}-2\Phi_i^n+\Phi_i^{n-1}}{\tau^2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\Phi_{i+1}^{n+1}-2\Phi_i^{n+1}+\Phi_{i-1}^{n+1}}{h_x^2}+\frac{\Phi_{i+1}^{n-1}-2\Phi_i^{n-1}+\Phi_{i-1}^{n-1}}{h_x^2}\right),$$

$$i=1,\ldots,N_x-1, n=1,\ldots,N_\tau-1,$$

$$\Phi_i^0=d_{0i}, \Phi_i^1=\Phi_i^0+\tau d_i+\tau^2/2\left(a^2\frac{d^2d_0}{dx^2}\right)_i, i=1,\ldots,N_x-1,$$

абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации

$$\psi_i^n=O(\tau^2)+O(h_x^2),\ \ i=1,\ldots,N_x-1$$

10.3. Явная схема новых уравнений теории упругости

Рассматривается задача *Коши-Дирихле* для уравнений *Джакупова* теории упругости

$$\rho_0\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\rho_0F_x+\lambda\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho_0\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=\rho_0F_y+\lambda\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho_0\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=\rho_0F_x+\lambda\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}\right),$$

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

с начальными условиями при $t=0$:

$$u\big|_{t=0}=d_0(x,y,z), v\big|_{t=0}=\hat{d}_0(x,y,z), w\big|_{t=0}=\hat{\hat{d}}_0(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=d(x,y,z), \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\hat{d}(x,y,z), \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\hat{\hat{d}}(x,y,z),$$

и краевыми условиями на границе S:

$$u\big|_S=\varphi_0(x,y,z,t), v\big|_S=\hat{\varphi}_0(x,y,z,t), w\big|_S=\hat{\hat{\varphi}}_0(x,y,z,t)$$

В области интегрирвания задается равномерная сетка

$$\overline{\Omega}_h=\left\{(x_i=ih_x, y_j=jh_y, z_m=mh_z), i=0,\ldots,N_x; j=0,\ldots,N_y; m=0,\ldots,N_z\right\}$$

с внутренними

$$\Omega_h=\left\{(x_i=ih_x, y_j=jh_y, z_m=mh_z), i=1,\ldots,N_x-1; j=1,\ldots,N_y-1; m=1,\ldots,N_z-1\right\}$$

и граничными узлами

$$S_h=\{i=0, i=N_x, j=\overline{0,N_y}, m=\overline{0,N_z}; j=0, j=N_y, i=\overline{0,N_x}, m=\overline{0,N_z}; m=0, m=N_z, j=\overline{0,N_y}, i=\overline{0,N_x}\},$$

$$\overline{\Omega}_h=\Omega_h\cup S_h$$

Начальные условия задаются на сетке Ω_h:

$$u_{ijm}^0=d_{0ijm}, v_{ijm}^0=\hat{d}_{0ijm}, w_{ijm}^0=\hat{\hat{d}}_{0ijm}, u_{ijm}^1=d_{0ijm}+\tau d_{ijm}, v_{ijm}^1=\hat{d}_{0ijm}+\tau\hat{d}_{ijm}, w_{ijm}^1=\hat{\hat{d}}_{0ijm}+\tau\hat{\hat{d}}_{ijm},$$

$$i=\overline{1,N_x-1}, j=\overline{1,N_y-1}, m=\overline{1,N_z-1},$$

граничные условия 1-ого рода в узлах сетки S_h:

$$x=0, u_{0jm}^{n+1}=\varphi_{0jm}^{n+1}, v_{0jm}^{n+1}=\hat{\varphi}_{0jm}^{n+1}, w_{0jm}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{0jm}^{n+1},$$

$$x = a_1, u_{N_x jm}^{n+1} = \varphi_{N_x jm}^{n+1}, v_{N_x jm}^{n+1} = \hat{\varphi}_{N_x jm}^{n+1}, w_{N_x jm}^{n+1} = \hat{\hat{\varphi}}_{N_x jm}^{n+1},$$
$$j = \overline{0, N_y}, m = \overline{0, N_z},$$
$$y = 0, u_{i0m}^{n+1} = \varphi_{i0m}^{n+1}, v_{i0m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}, w_{i0m}^{n+1} = \hat{\hat{\varphi}}_{i0m}^{n+1},$$
$$y = a_2, u_{iN_y m}^{n+1} = \varphi_{iN_y m}^{n+1}, v_{iN_y m}^{n+1} = \hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}, w_{iN_y m}^{n+1} = \hat{\hat{\varphi}}_{iN_y m}^{n+1},$$
$$i = \overline{0, N_x}, m = \overline{0, N_z},$$
$$z = 0, u_{ij0}^{n+1} = \varphi_{ij0}^{n+1}, v_{ij0}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ij0}^{n+1}, w_{ij0}^{n+1} = \hat{\hat{\varphi}}_{ij0}^{n+1},$$
$$z = a_3, u_{ijN_z}^{n+1} = \varphi_{ijN_z}^{n+1}, v_{ijN_z}^{n+1} = \hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1}, w_{ijN_z}^{n+1} = \hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1},$$
$$i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}$$

Явная разностная схема имеет вид:

$$Q_{uijm}^n = \mu[\frac{u_{i+1jm}^n - 2u_{ijm}^n + u_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1m}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \frac{u_{ijm+1}^n - 2u_{ijm}^n + u_{ijm-1}^n}{h_z^2}] + \rho_0 F_{xijm},$$

$$Q_{vijm}^n = \mu[\frac{v_{i+1jm}^n - 2v_{ijm}^n + v_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1m}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \frac{v_{ijm+1}^n - 2v_{ijm}^n + v_{ijm-1}^n}{h_z^2}] + \rho_0 F_{yijm},$$

$$Q_{uijm}^n = \mu[\frac{w_{i+1jm}^n - 2w_{ijm}^n + w_{i-1jm}^n}{h_x^2} + \frac{w_{ij+1m}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ij-1m}^n}{h_y^2} + \frac{w_{ijm+1}^n - 2w_{ijm}^n + w_{ijm-1}^n}{h_z^2}] + \rho_0 F_{zijm},$$

$$\rho_0 \frac{u_{ijm}^{n+1} - 2u_{ijm}^n + u_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijm}^n + \lambda \frac{p_{i+1jm}^n - p_{i-1jm}^n}{2h_x},$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijm}^{n+1} - 2v_{ijm}^n + v_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijm}^n + \lambda \frac{p_{ij+1m}^n - p_{ij-1m}^n}{2h_y},$$

$$\rho_0 \frac{w_{ijm}^{n+1} - 2w_{ijm}^n + w_{ijm}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{wijm}^n + \lambda \frac{p_{ijm+1}^n - p_{ijm-1}^n}{2h_z},$$

$$p_{ijm}^n = \frac{u_{i+1jm}^n - u_{i-1jm}^n}{2h_x} + \frac{v_{ij+1m}^n - v_{ij-1m}^n}{2h_y} + \frac{w_{ijm+1}^n - m_{ijm-1}^n}{2h_z},$$

$$i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_m - 1,$$

в граничных узлах S_h:

$$i = 0, p_{0jm}^n = \frac{4u_{1jm}^n - 3\varphi_{0jm}^n - u_{2jm}^n}{2h_x} + (\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y})_{0jm}^n + (\frac{\partial \ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{0jm}^n,$$

$$i = N_x, p_{N_x jm}^n = \frac{3\varphi_{N_x jm}^n - 4u_{N_x - 1jm}^n + u_{N_x - 2jm}^n}{2h_x} + (\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y})_{N_x jm}^n + (\frac{\partial \ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{N_x jm}^n;$$

$$j = 0, p_{i0m}^n = (\frac{\partial \varphi}{\partial x})_{i0m}^n + \frac{4v_{i1m}^n - 3\hat{\varphi}_{i0m}^n - v_{i2m}^n}{2h_y} + (\frac{\partial \hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{i0m}^n,$$

$$j = N_y, p_{iN_y m}^n = (\frac{\partial \varphi}{\partial x})_{iN_y m}^n + \frac{3\hat{\varphi}_{iN_y m}^n - 4v_{iN_y - 1m}^n + v_{iN_y - 2m}^n}{2h_y} + (\frac{\partial \hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{iN_y m}^n;$$

$$m=0,\ p^n_{ij0}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^n_{ij0}+\frac{4w^n_{ij1}-3\hat{\hat{\varphi}}^n_{ij0}-w^n_{ij2}}{2h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})^n_{ij0},$$

$$m=N_z,\ p^n_{ijN_z}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^n_{ijN_z}+\frac{3\hat{\hat{\varphi}}^n_{ijN_z}-4w^n_{ijN_z-1}+w^n_{ijN_z-2}}{2h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})^n_{ijN_z}$$

Данная явная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным $O(\tau^2)+O(h_x^2)+O(h_y^2)+O(h_z^2)$. В качестве условия устойчивости схемы можно принять неравенство

$$\frac{\tau^2\mu}{h_x^2+h_y^2+h_z^2}\le 1$$

10.4. Полунеявная схема новых уравнений теории упругости

Полунеявная разностная схема имеет вид:

$$Q^n_{uijm}=\mu[\frac{u^n_{i+1jm}-2u^n_{ijm}+u^n_{i-1jm}}{h_x^2}+\frac{u^n_{ij+1m}-2u^n_{ijm}+u^n_{ij-1m}}{h_y^2}+\frac{u^n_{ijm+1}-2u^n_{ijm}+u^n_{ijm-1}}{h_z^2}]+\rho_0F_{xijm},$$

$$Q^n_{vijm}=\mu[\frac{v^n_{i+1jm}-2v^n_{ijm}+v^n_{i-1jm}}{h_x^2}+\frac{v^n_{ij+1m}-2v^n_{ijm}+v^n_{ij-1m}}{h_y^2}+\frac{v^n_{ijm+1}-2v^n_{ijm}+v^n_{ijm-1}}{h_z^2}]+\rho_0F_{yijm},$$

$$Q^n_{uijm}=\mu[\frac{w^n_{i+1jm}-2w^n_{ijm}+w^n_{i-1jm}}{h_x^2}+\frac{w^n_{ij+1m}-2w^n_{ijm}+w^n_{ij-1m}}{h_y^2}+\frac{w^n_{ijm+1}-2w^n_{ijm}+w^n_{ijm-1}}{h_z^2}]+\rho_0F_{zijm},$$

$$\rho_0\frac{u^{n+1}_{ijm}-2u^n_{ijm}+u^{n-1}_{ijm}}{\tau^2}=Q^n_{uijm}+\frac{\lambda}{2}(\frac{p^{n+1}_{i+1jm}-p^{n+1}_{i-1jm}}{h_{xi+1}+h_{xi}}+\frac{p^{n-1}_{i+1jm}-p^{n-1}_{i-1jm}}{2h_x}),$$

$$\rho_0\frac{v^{n+1}_{ijm}-2v^n_{ijm}+v^{n-1}_{ijm}}{\tau^2}=Q^n_{vijm}+\frac{\lambda}{2}(\frac{p^{n+1}_{ij+1m}-p^{n+1}_{ij-1m}}{2h_y}+\frac{p^{n-1}_{ij+1m}-p^{n-1}_{ij-1m}}{2h_y}),$$

$$\rho_0\frac{w^{n+1}_{ijm}-2w^n_{ijm}+w^{n-1}_{ijm}}{\tau^2}=Q^n_{wijm}+\frac{\lambda}{2}(\frac{p^{n+1}_{ijm+1}-p^{n+1}_{ijm-1}}{2h_z}+\frac{p^{n-1}_{ijm+1}-p^{n-1}_{ijm-1}}{2h_z}),$$

$$\frac{u^{n+1}_{i+1jm}-u^{n+1}_{i-1jm}}{2h_x}+\frac{v^{n+1}_{ij+1m}-v^{n+1}_{ij-1m}}{2h_y}+\frac{w^{n+1}_{ijm+1}-w^{n+1}_{ijm-1}}{2h_z}=p^{n+1}_{ijm},$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,m=1,...,N_m-1,$$

в граничных узлах S_h:

$$i=0,\frac{u^{n+1}_{1jm}-\varphi^{n+1}_{0jm}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{0jm}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{0jm}=p^{n+1}_{0jm},\ i=N_x,\frac{\varphi^{n+1}_{N_xjm}-u^{n+1}_{N_x-1jm}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{N_xjm}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{N_xjm}=p^{n+1}_{N_xjm};$$

$$j=0,(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^{n+1}_{i0m}+\frac{v^{n+1}_{i1m}-\hat{\varphi}^{n+1}_{i0m}}{h_y}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{i0m}=p^{n+1}_{i0m},\ j=N_y,(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^{n+1}_{iN_ym}+\frac{\hat{\varphi}^{n+1}_{iN_ym}-v^{n+1}_{iN_y-1m}}{h_y}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{iN_ym}=p^{n+1}_{iN_ym};$$

$$m=0,(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^{n+1}_{ij0}+\frac{w^{n+1}_{ij1}-\hat{\hat{\varphi}}^{n+1}_{ij0}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{ij0}=p^{n+1}_{ij0},m=N_z,(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^{n+1}_{ijN_z}+\frac{\hat{\hat{\varphi}}^{n+1}_{ijN_z}-w^{n+1}_{ijN_z-1}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{ijN_z}=p^{n+1}_{ijN_z}$$

Вычисление $u_{ijm}^{n+1}, v_{ijm}^{n+1}, w_{ijm}^{n+1}, p_{ijm}^{n+1}$ в данной схеме осуществляется в **глобальном итерационном процессе,** где дополнительный верхний индекс k соответствует номеру итерации: $u_{ijm}^{n+1,k}, v_{ijm}^{n+1,k}, w_{ijm}^{n+1,k}, p_{ijm}^{n+1,k}$. Нулевые итерации при $k=0$ приравниваются значениям с предыдущего слоя времени $u_{ijm}^{n+1,0}=u_{ijm}^{n}, v_{ijm}^{n+1,0}=v_{ijm}^{n}, w_{ijm}^{n+1,0}=w_{ijm}^{n}, p_{ijm}^{n+1,0}=p_{ijm}^{n}$.

Реализуется параметрический алгоритм с параметром θ:

$$F_{uijm}^{n}=2u_{ijm}^{n}-u_{ijm}^{n-1}+\frac{\tau^2}{\rho_0}[Q_{uijm}^{n}+\frac{\lambda}{2}(\frac{p_{i+1jm}^{n-1}-p_{i-1jm}^{n-1}}{2h_x})],$$

$$F_{vijm}^{n}=2v_{ijm}^{n}-v_{ijm}^{n-1}+\frac{\tau^2}{\rho_0}[Q_{vijm}^{n}+\frac{\lambda}{2}(\frac{p_{ij+1m}^{n-1}-p_{ij-1m}^{n-1}}{2h_y})],$$

$$F_{wijm}^{n}=2w_{ijm}^{n}-w_{ijm}^{n-1}+\frac{\tau^2}{\rho_0}[Q_{wijm}^{n}+\frac{\lambda}{2}(\frac{p_{ijm+1}^{n-1}-p_{ijm-1}^{n-1}}{2h_z})],$$

$$u_{ijm}^{n+1,k}=F_{uijm}^{n}+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{p_{i+1jm}^{n+1,k}-p_{i-1jm}^{n+1,k}}{2h_x},$$

$$v_{ijm}^{n+1,k}=F_{vijm}^{n}+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{p_{ij+1m}^{n+1,k}-p_{ij-1m}^{n+1,k}}{2h_y},$$

$$w_{ijm}^{n+1,k}=F_{wijm}^{n}+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{p_{ijm+1}^{n+1,k}-p_{ijm-1}^{n+1,k}}{2h_z},$$

$$1\le i\le N_x-1, 1\le j\le N_y-1, 1\le m\le N_z-1,$$

$$(1+A_{ijm}\theta)\frac{p_{ijm}^{n+1,k+1}-p_{ijm}^{n+1,k}}{\theta}=\frac{u_{i+1jm}^{n+1,k}-u_{i-1jm}^{n+1,k}}{2h_x}+\frac{v_{ij+1m}^{n+1,k}-v_{ij-1m}^{n+1,k}}{2h_y}+\frac{w_{ijm+1}^{n+1,k}-m_{ijm-1}^{n+1,k}}{2h_z}-p_{ijm}^{n+1,k},$$

$$1\le i\le N_x-1, 1\le j\le N_y-1, 1\le m\le N_z-1,$$

$$(1+A_{N_x jm}\theta)\frac{p_{N_x jm}^{n+1,k+1}-p_{N_x jm}^{n+1,k}}{\theta}=\frac{\varphi_{N_x jm}^{n+1}-u_{N_x-1jm}^{n+1,k}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{N_x jm}^{n+1}+(\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{N_x jm}^{n+1}-p_{N_x jm}^{n+1,k},$$

$$(1+A_{0jm}\theta)\frac{p_{0jm}^{n+1,k+1}-p_{0jm}^{n+1,k}}{\theta}=\frac{u_{1jm}^{n+1,k}-\varphi_{0jm}^{n+1}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{0jm}^{n+1}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{0jm}^{n+1}-p_{0jm}^{n+1,k},$$

$$1\le j\le N_y-1, 1\le m\le N_z-1,$$

$$(1+A_{iN_y m}\theta)\frac{p_{iN_y m}^{n+1,k+1}-p_{iN_y m}^{n+1,k}}{\theta}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{iN_y m}^{n+1}+\frac{\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}-v_{iN_y-1m}^{n+1,k}}{h_y}+(\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{iN_y m}^{n+1}-p_{iN_y m}^{n+1,k},$$

$$(1+A_{i0m}\theta)\frac{p_{i0m}^{n+1,k+1}-p_{i0m}^{n+1,k}}{\theta}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{i0m}^{n+1}+\frac{v_{i1m}^{n+1}-\hat{\varphi}_{i0m}^{n+1,k}}{h_y}+(\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{i0m}^{n+1}-p_{i0m}^{n+1,k},$$

$$1\le i\le N_x-1, 1\le m\le N_z-1,$$

$$(1+A_{ijN_z}\theta)\frac{p_{ijN_z}^{n+1,k+1}-p_{ijN_z}^{n+1,k}}{\theta}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+\frac{\hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1}-w_{ijN_z-1}^{n+1,k}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}-p_{ijN_z}^{n+1,k},$$

$$(1+A_{ij0}\theta)\frac{p_{ij0}^{n+1,k+1}-p_{ij0}^{n+1,k}}{\theta}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ij0}^{n+1}+\frac{w_{ij1}^{n+1}-\hat{\hat{\varphi}}_{ij0}^{n+1,k}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ij0}^{n+1}-p_{ij0}^{n+1,k},$$

$1\le i\le N_x-1, 1\le j\le N_y-1,$ где

$$A_{ijm}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\{\frac{1}{2h_x}[\frac{1}{2h_x}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2h_x}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}]+\frac{1}{2h_y}[\frac{1}{2h_y}\frac{1-sign(j-N_y+1.5)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2h_y}\frac{1+sign(j-1.5)}{2}]+\frac{1}{2h_z}[\frac{1}{2h_z}\frac{1-sign(m-N_z+1.5)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2h_z}\frac{1+sign(m-1.5)}{2}]\}, i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1, m=1,...,N_z-1;$$

$$A_{N_x jm}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{1}{2h_x^2}, A_{0jm}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{1}{2h_x^2},\quad j=1,...,N_y-1, m=1,...,N_z-1;$$

$$A_{iN_y m}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{1}{2h_y^2}, A_{i0m}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{1}{2h_y^2},\ i=1,...,N_x-1, m=1,...,N_z-1;$$

$$A_{ijN_z}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{1}{2h_z^2}, A_{ij0}=1+\frac{\tau^2}{\rho_0}\lambda\frac{1}{2h_z^2},\ i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1$$

Параметр $\theta>0$ выбирается из интервала $0<\theta\le 1/2$. Вычисления останавливаются на таком номере итераций k^*, при котором выполняется неравенство для невязки $\max\limits_{0\le i\le N_x, 0\le i\le N_y, 0\le m\le N_z}|R_{ijm}^{k^*}|\le\varepsilon, \varepsilon\approx 0, \varepsilon\ne 0$

При выполнении данного критерия последние приближения $p_{ijm}^{n+1,k^*}, u_{ijm}^{n+1,k^*}, v_{ijm}^{n+1,k^*}, w_{ijm}^{n+1,k^*}$, берутся в качестве решения

$$p_{ijm}^{n+1,k^*}\approx p_{ijm}^{n+1}, u_{ijm}^{n+1,k^*}\approx u_{ijm}^{n+1}, v_{ijm}^{n+1,k^*}\approx v_{ijm}^{n+1}, w_{ijm}^{n+1,k^*}\approx w_{ijm}^{n+1}, i=0,...,N_x,\ j=0,...,N_y, m=0,...,N_z$$

Условие устойчивости полунеявной схемы: $\dfrac{\tau^2\mu}{h_x^2+h_y^2+h_z^2}\le 1.$

Примечание. Из данных явных и полунеявных схем автоматически вытекают численные алгоритмы решения двумерных уравнений. При стационарных краевых условиях в пределе получается решение задачи упругого равновесия.

Вопросы

1. Методом *фон Неймана* исследовать устойчивость неявной схемы.
2. Методом *фон Неймана* исследовать устойчивость явной схемы.
3. Написать явную схему уравнений теории упругости для аппроксимации $\dfrac{u_{i+1j}^{n+1}-u_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}+\dfrac{v_{ij}^{n+1}-v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}=p_{ij}^{n+1}.$
4. Написать явную схему для аппроксимации $\dfrac{u_{ij}^{n+1}-u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}+\dfrac{v_{ij+1}^{n+1}-v_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}=p_{ij}^{n+1}.$

Глава 11. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ

Численные методы решения уравнений динамики вязкой жидкости в естественных физических переменных «скорость-давление» излагается на примере расчета конкретной двумерной задачи обтекания пластины.

11.1. Постановка задачи продольного обтекания пластины

Для расчета двумерного продольного обтекания пластины используется система уравнений, предложенная *Джакуповым К.Б.* в [17], [19]:

$$\rho[\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t}+\sum_j \overline{v}_j\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j}+\sum_j\frac{\partial v'_j v'_i}{\partial x_j}-\frac{t^o}{2}\sum_j\frac{\partial^2 v'_j v'_i}{\partial t\partial x_j}]+\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}=\rho\overline{F}_i+\mu\Delta\overline{v}_i,\ i=1,2, \quad (1)$$

$$\sum_i\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i}=0, \quad (2)$$

$$\rho[\frac{\partial v'_i}{\partial t}+\sum_j(\overline{v}_j\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}+v'_j\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j})+\frac{t^o}{2}\sum_j\frac{\partial^2 v'_j v'_i}{\partial t\partial x_j}]+\frac{\partial p'}{\partial x_i}=\rho F'_i+\mu\Delta v'_i,\ i=1,2, \quad (3)$$

$$\sum_i\frac{\partial v'_i}{\partial x_i}=0, \quad (4)$$

$$\overline{v}_i\Big|_\sigma=\overline{\varphi}_i,\overline{v}_i\Big|_{t=0}=\overline{v}_i^0,\ v'_i\Big|_\sigma=\varphi'_i,v'_i\Big|_{t=0}=v'^0_i \quad (5)$$

для моделирования как ламинарного $(v'_i\equiv 0,i=1,2,3)$ так и турбулентного $(v'_i\neq 0,i=1,2,3)$ режимов (перемежающийся режим учитывается автоматически) обтекания пластины и других объектов. В обозначениях

$$\overline{v}_1\equiv u,\overline{v}_2\equiv v,\overline{p}\equiv p,\overline{F}_1\equiv F_x,\overline{F}_2\equiv F_y,v'_1\equiv u',v'_2\equiv v'$$

система принимает вид

$$\rho\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial u'v'}{\partial y}-\frac{t^o}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial u'v'}{\partial y})\}+\frac{\partial p}{\partial x}=\rho F_x+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \quad (6)$$

$$\rho\{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u'v'}{\partial x}+\frac{\partial v'^2}{\partial y}-\frac{t^o}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'v'}{\partial x}+\frac{\partial v'^2}{\partial y})\}+\frac{\partial p}{\partial y}=\rho F_y+\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad (8)$$

$$\rho\{\frac{\partial u'}{\partial t}+u\frac{\partial u'}{\partial x}+v\frac{\partial u'}{\partial y}+u'\frac{\partial u}{\partial x}+v'\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{t^o}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial u'v'}{\partial y})\}+\frac{\partial p'}{\partial x}=\rho F'_x+\mu(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}), \quad (9)$$

$$\rho\{\frac{\partial v'}{\partial t}+u\frac{\partial v'}{\partial x}+v\frac{\partial v'}{\partial y}+u'\frac{\partial v}{\partial x}+v'\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{t^o}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'v'}{\partial x}+\frac{\partial v'^2}{\partial y})]\}+\frac{\partial p'}{\partial y}=\rho F'_y+\mu(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0, \qquad (11)$$

Уравнения (6), (7), (8) при пульсациях, равных нулю $u'\equiv 0, v'\equiv 0,$ переходят в уравнения *Навье* несжимаемой жидкости.

В начальный момент времени $t=0$ жидкость находится в состоянии покоя:

$$u(x,y,0)=0,\ v(x,y,0)=0, 0\le x\le L+2l, 0\le y\le H,$$

в некоторый момент времени $t^*=t_{n*}$ на течение, полученное на этот момент времени численным методом, *накладывается* "случайное" возмущение, т.е. в узлах сетки в этот момент полагаются

$$u_{ij}^{n\,*}=u_{ij}^n+\varsigma_{ij}, v_{ij}^{n\,*}=v_{ij}^n+\xi_{ij}, i=1,..,N_x-1, j=1,...,N_y-1,$$

где $\varsigma_{ij}=\varsigma(x_i,y_j)$ и $\xi_{ij}=\xi(x_i,y_j)$ близкие к нулю случайные функции, имитирующие начальные возмущения в потоке (их можно задавать с помощью датчика случайных чисел).

Краевые условия: набегающий поток имеет скорости:

$$x=0, u(0,y,t)=U_\infty \exp(-b'/t), v(0,y,t)=0, u'(0,y,t)=\zeta(y,t),\quad v'(0,y,t)=\xi(y,t), \qquad (12)$$
$$0\le y\le H, b'=const>0,\quad |\zeta(y,t)|<<U_\infty \text{ и т.д.},$$

где $\zeta(y,t),\ v'(0,y,t)=\xi(y,t)$ *– случайные функции*;

на пластине - условия прилипания и непроницаемости:

$$y=0,\ u(x,0,t)=0, u'(x,0,t)=0\ v(x,0,t)=0, v'(x,0,t)=0, l\le x\le L+l, \qquad (13)$$

на выходе потока ставятся «мягкие граничные условия»:

$$x=L+2l, \frac{\partial^2 u(L+2l,y,t)}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 u'(L+2l,y,t)}{\partial x^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 v(L+2l,y,t)}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 v'(L+2l,y,t)}{\partial x^2}=0, 0\le y\le H, \qquad (14)$$

в верхней части потока условия экстремума:

$$y=H, \frac{\partial u(x,H,t)}{\partial y}=0, \frac{\partial u'(x,H,t)}{\partial y}=0, \frac{\partial v(x,H,t)}{\partial y}=0, \frac{\partial v'(x,H,t)}{\partial y}=0, 0\le x\le L+2l \qquad (15)$$

До начала пластины и после пластины ставятся условия симметричного обтекания:

$$y=0, \frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0, v(x,0,t)=0, \frac{\partial u'(x,0,t)}{\partial y}=0, v'(x,0,t)=0,$$
$$0<x<l, L+l<x\le L+2l$$

Переход к безразмерным переменным

Для перехода к безразмерным переменным за масштабы выбираются: скорость набегающего потока U_∞, длина пластины L, время L/U_∞, давление ρU_∞^2. В безразмерных величинах $\hat t=tU_\infty/L, \hat x=x/L, \hat y=y/L,$

$\hat u=u/U_\infty, \hat v=v/U_\infty, \hat p=p/(\rho U_\infty^2), Dg=t^o U_\infty/L, \hat F_x=F_x/g,$

$\hat{F}_y = F_y / g, Fr = U_\infty^2/(gL) - число \quad Фруда, \mathrm{Re} = \rho U_\infty L/\mu - \quad число\ Рейнольдса$

система (6), (7), (8) (значки опущены) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial u'v'}{\partial y}-\frac{Dg}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial u'v'}{\partial y})+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{F_x}{Fr}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u'v'}{\partial x}+\frac{\partial v'^2}{\partial y}-\frac{Dg}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'v'}{\partial x}+\frac{\partial v'^2}{\partial y})+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{F_y}{Fr}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}), \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (18)$$

В аналогичную безразмерную форму переходят и уравнения для возмущений (пульсаций) (9), (10), (11):

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+u\frac{\partial u'}{\partial x}+v\frac{\partial u'}{\partial y}+u'\frac{\partial u}{\partial x}+v'\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Dg}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial u'v'}{\partial y})+\frac{\partial p'}{\partial x}=\frac{F_x'}{Fr}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}), \quad (19)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+u\frac{\partial v'}{\partial x}+v\frac{\partial v'}{\partial y}+u'\frac{\partial v}{\partial x}+v'\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{Dg}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u'v'}{\partial x}+\frac{\partial v'^2}{\partial y})+\frac{\partial p'}{\partial y}=\frac{F_y'}{Fr}+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}), \quad (20)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \quad (21)$$

Граничные условия (12)-(15) переходят к виду:

$$x=0, u(0,y,t)=\exp(-b^o/t),\ v(0,y,t)=0, 0\le y\le H/L, b^o=const>0;$$

$$x=1+2l/L, \frac{\partial^2 u(1+2l/L,y,t)}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 v(1+2l/L,y,t)}{\partial x^2}=0, 0\le y\le H/L;$$

$$y=0,\ u(x,0,t)=0,\ v(x,0,t)=0, l/L\le x\le 1+l/L;$$

$$y=H/L, \frac{\partial u(x,H/L,t)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v(x,H/L,t)}{\partial y}=0, 0\le x\le 1+2l/L;$$

$$y=0, \frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0, v(x,0,t)=0, 0<x<l/L, 1+l/L<x\le 1+2l/L$$

Аналогичные безразмерные граничные условия имеют место и для пульсационных уравнений.

Начально-краевая задача для (16)-(21) решается теоретически обоснованными разностными методами (см. *Джакупов К.Б.* [3]).

11.2. Технология построения разностных схем уравнений динамики вязкой жидкости на одной сетке. Полунеявные разностные схемы *Джакупова*

Для изложения принципов построения и алгоритма реализации разностных схем для уравнений динамики вязкой жидкости на одной сетке, наиболее подходящим является семейство параметрических полунеявных схем из [3] ($\bar{\alpha}=0, \bar{\beta}=1$), которое излагается на примере уравнений (16), (17), (18).

В безразмерную область $0\le x\le 1+2l/L, 0\le y\le H/L$ вводится сетка $\overline{\Omega}_h=\{x_i, i=0,...,N_x; y_j, j=0,1,...,N_y\}$ и сетка по времени $\Omega_{\tau 0}=\{t_n, n=0,1,...,N_\tau\}$

с шагами $h_{xi} = x_i - x_{i-1} > 0, i = 1,..., N_x, h_{yj} = y_j - y_{j-1} > 0,\ j = 1,..., N_y,$

$x_0 = 0, y_0 = 0, x_{N_x} = 1 + 2l / L,$

$y_{N_y} = H / L, \tau_n = t_n - t_{n-1} > 0, n = 1,..., N_\tau$.

Используются обозначения сеточных функций: $f_{ij}^n \equiv f(x_i, y_j, t_n)$.

Вводятся разностные производные:

$$f_x \equiv \frac{f_{i+1j}^n - f_{ij}^n}{h_{xi+1}}, f_{\bar{x}} \equiv \frac{f_{ij}^n - f_{i-1j}^n}{h_{xi}}, f_{\tilde{x}} \equiv \frac{f_{i+1j}^n - f_{i-1j}^n}{h_{xi+1} + h_{xi}},\ f_y \equiv \frac{f_{ij+1}^n - f_{ij}^n}{h_{yj+1}}, f_{\bar{y}} \equiv \frac{f_{ij}^n - f_{ij-1}^n}{h_{yj}}, f_{\tilde{y}} \equiv \frac{f_{ij+1}^n - f_{ij-1}^n}{h_{yj+1} + h_{yj}}$$

Применяется монотонная схема, аппроксимирующая конвективные члены со 2-м порядком точности (*Джакупов К.Б.* [20]). Схема полунеявная по времени в силу того, что давление и уравнение неразрывности взяты на верхнем слое времени:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} u_{\bar{x}}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} u_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} u_{\bar{y}}^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} u_y^n +$$

$$+ \{(u'^2)_{\tilde{x}}^n + (u'v')_{\tilde{y}}^n - \frac{Dg}{2}[(u'^2)_{\tilde{x}}^n + (u'v')_{\tilde{y}}^n - (u'^2)_{\tilde{x}}^{n-1} - (u'v')_{\tilde{y}}^{n-1}] / \tau_{n+1}\} +$$

$$+ \frac{p_{i+1j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}} = \frac{F_x}{Fr} + \frac{2\mu_{uxv}^v}{h_{xi+1} + h_{xi}}(u_x^n - u_{\bar{x}}^n) + \frac{2\mu_{vyu}^u}{h_{yj+1} + h_{yj}}(u_y^n - u_{\bar{y}}^n), \qquad (22)$$

$$\frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} v_{\bar{x}}^n + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} v_x^n + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} v_{\bar{y}}^n + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} v_y^n +$$

$$+ \{(u'v')_{\tilde{x}}^n + (v'^2)_{\tilde{y}}^n - \frac{Dg}{2}[(u'v')_{\tilde{x}}^n + (v'^2)_{\tilde{y}}^n - (u'v')_{\tilde{x}}^{n-1} - (v'^2)_{\tilde{y}}^{n-1}] / \tau_{n+1}\} + \qquad (23)$$

$$+ \frac{p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}} = \frac{F_y}{Fr} + \frac{2\mu_{uxv}^v}{h_{xi+1} + h_{xi}}(v_x^n - v_{\bar{x}}^n) + \frac{2\mu_{vyu}^u}{h_{yj+1} + h_{yj}}(v_y^n - v_{\bar{y}}^n),$$

$$i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1;$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} = 0,\ i = 1,..., N_x,\ j = 1,..., N_y;\ \ n = \overline{0, N_\tau}\ , \qquad (24)$$

где коэффициенты при диссипативных членах равны

$$\mu_{uxv}^v = [\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1}] / [1 + \mathrm{Re}(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1})],$$

$$\mu_{vyu}^u = [\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1}] / [1 + \mathrm{Re}(\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{4} h_{xi} + \frac{|u_{ij}^n| - u_{ij}^n}{4} h_{xi+1} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{4} h_{yj} + \frac{|v_{ij}^n| - v_{ij}^n}{4} h_{yj+1})],$$

На равномерной сетке $h_{yj+1} = h_{yj} = h_y, \forall j, h_{xi+1} = h_{xi} = h_x, \forall i$ данные коэффициенты упрощаются

$$\mu_{uxv}^v = [\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2}] / [1 + \mathrm{Re}(\frac{|u_{ij}^n| h_x}{2} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2})],\ \mu_{vyu}^u = [\frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{|u_{ij}^n| h_x}{2}] / [1 + \mathrm{Re}(\frac{|u_{ij}^n| h_x}{2} + \frac{|v_{ij}^n| h_y}{2})]$$

При значениях $\mu_{uxv}^v = \frac{1}{\mathrm{Re}}$, $\mu_{vyu}^u = \frac{1}{\mathrm{Re}}$ схема имеет 1-ый порядок точности.

Начальные условия задаются на сетке $\Omega_h = \{x_i, i = 1,..., N_x - 1; y_j, \ j = 1,..., N_y - 1\}$:

$$u_{ij}^0 = 0, v_{ij}^0 = 0, i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1} \qquad (25)$$

Краевые условия (18)-(21) задаются в граничных узлах:

$$S_h = \{i = 0, i = N_x, j = \overline{0, N_y}, j = 0, j = N_y, i = \overline{0, N_x}\}, \overline{\Omega}_h = \Omega_h \bigcup S_h;$$

$$x = 0, u_{0j}^{n+1} = e^{-\frac{b^o}{t_{n+1}}}, v_{0j}^{n+1} = 0, \ j = \overline{0, N_y - 1}, \qquad (26)$$

$$x = 1 + 2l / L, u_{N_x j}^{n+1} = 2u_{N_x - 1 j}^{n+1} - u_{N_x - 2 j}^{n+1}, v_{N_x j}^{n+1} = 2v_{N_x - 1 j}^{n+1} - v_{N_x - 2 j}^{n+1}, \ 0 \le j \le N_y, \qquad (27)$$

здесь положено $h_{xN_x} = h_{xN_x - 1}$;

на пластине

$$u_{i0}^{n+1} = 0, v_{i0}^{n+1} = 0, mk \le i \le mkk, \qquad (28)$$

до начала и после конца пластины условие симметрии:

$$y = 0, u_{i0}^{n+1} = (4u_{i1}^{n+1} - u_{i2}^{n+1})/3, v_{i0}^{n+1} = 0, \text{здесь} \ \ h_{x1} = h_{x2}, 1 \le i \le mk - 1, mkk + 1 \le i \le N_x,$$

$$y = H / L, u_{iN_y}^{n+1} = (4u_{iN_y - 1}^{n+1} - u_{iN_y - 2}^{n+1})/3, v_{iN_y}^{n+1} = (4v_{iN_y - 1}^{n+1} - v_{iN_y - 2}^{n+1})/3, h_{yN_y} = h_{yN_y - 1} \qquad (29)$$

Аналогичная схема для пульсационных уравнений имеет вид:

$$\frac{u'^{n+1}_{ij} - u'^{n}_{ij}}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} u'^{n}_{\bar{x}} + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} u'^{n}_{x} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} u'^{n}_{\bar{y}} + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} u'^{n}_{y} +$$

$$+ u'^{n}_{ij} u^n_{\tilde{x}} + v'^{n}_{ij} u^n_{\tilde{y}} + \frac{Dg}{2}[(u'^2)^n_{\tilde{x}} + (u'v')^n_{\tilde{y}} - (u'^2)^{n-1}_{\tilde{x}} - (u'v')^{n-1}_{\tilde{y}}]/\tau_{n+1} +$$

$$+ \frac{p'^{n+1}_{i+1j} - p'^{n+1}_{ij}}{h_{xi+1}} = \frac{F_x'}{Fr} + \frac{2\mu^v_{uxv}}{h_{xi+1} + h_{xi}}(u'^{n}_{x} - u'^{n}_{\bar{x}}) + \frac{2\mu^u_{vyu}}{h_{yj+1} + h_{yj}}(u'^{n}_{y} - u'^{n}_{\bar{y}})],$$

$$\frac{v'^{n+1}_{ij} - v'^{n}_{ij}}{\tau_{n+1}} + \frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2} v'^{n}_{\bar{x}} + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} v'^{n}_{x} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2} v'^{n}_{\bar{y}} + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} v'^{n}_{y} +$$

$$+ u'^{n}_{ij} v^n_{\tilde{x}} + v'^{n}_{ij} v^n_{\tilde{y}} + \frac{Dg}{2}[(u'v')^n_{\tilde{x}} + (v'^2)^n_{\tilde{y}} - (u'v')^{n-1}_{\tilde{x}} - (v'^2)^{n-1}_{\tilde{y}}]/\tau_{n+1} +$$

$$+ \frac{p'^{n+1}_{ij+1} - p'^{n+1}_{ij}}{h_{yj+1}} = \frac{F_y'}{Fr} + \frac{2\mu^v_{uxv}}{h_{xi+1} + h_{xi}}(v'^{n}_{x} - v'^{n}_{\bar{x}}) + \frac{2\mu^u_{vyu}}{h_{yj+1} + h_{yj}}(v'^{n}_{y} - v'^{n}_{\bar{y}})],$$

$$i = 1,..., N_x - 1, \ j = 1,..., N_y - 1;$$

$$\frac{u'^{n+1}_{ij} - u'^{n+1}_{i-1j}}{h_{xi}} + \frac{v'^{n+1}_{ij} - v'^{n+1}_{ij-1}}{h_{yj}} = 0, \quad i = 1,..., N_x, j = 1,..., N_y; \quad n = \overline{0, N_\tau}$$

11.3. Алгоритм реализации полуявной схемы

Алгоритм реализации схемы (22)-(29) значительно упрощается, если ввести обозначения алгебраических сумм конвективных и диссипативных членов в (22),(23):

$$Q^n_{uij} = [\frac{2\mu^v_x}{h_{xi+1} + h_{xi}}(\frac{u^n_{i+1j} - u^n_{ij}}{h_{xi+1}} - \frac{u^n_{ij} - u^n_{i-1j}}{h_{xi}}) + \frac{2\mu^u_y}{h_{yj+1} + h_{yj}}(\frac{u^n_{ij+1} - u^n_{ij}}{h_{yj+1}} - \frac{u^n_{ij} - u^n_{ij-1}}{h_{yj}})] -$$

$$-[\frac{|u_{ij}^n| + u_{ij}^n}{2}\frac{u^n_{ij} - u^n_{i-1j}}{h_{xi}} + \frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2}\frac{u^n_{i+1j} - u^n_{ij}}{h_{xi+1}} + \frac{|v_{ij}^n| + v_{ij}^n}{2}\frac{u^n_{ij} - u^n_{ij-1}}{h_{yj}} + \frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2}\frac{u^n_{ij+1} - u^n_{ij}}{h_{yj+1}}], \qquad (30)$$

$$Q^n_{vij}=[\frac{2\mu^v_x}{h_{xi+1}+h_{xi}}(\frac{v^n_{i+1j}-v^n_{ij}}{h_{xi+1}}-\frac{v^n_{ij}-v^n_{i-1j}}{h_{xi}})+\frac{2\mu^u_y}{h_{yj+1}+h_{yj}}(\frac{v^n_{ij+1}-v^n_{ij}}{h_{yj+1}}-\frac{v^n_{ij}-v^n_{ij-1}}{h_{yj}})]-$$

$$-[\frac{|u^n_{ij}|+u^n_{ij}}{2}\frac{v^n_{ij}-v^n_{i-1j}}{h_{xi}}+\frac{u^n_{ij}-|u^n_{ij}|}{2}\frac{v^n_{i+1j}-v^n_{ij}}{h_{xi+1}}+\frac{|v^n_{ij}|+v^n_{ij}}{2}\frac{v^n_{ij}-v^n_{ij-1}}{h_{yj}}+\frac{v^n_{ij}-|v^n_{ij}|}{2}\frac{v^n_{ij+1}-v^n_{ij}}{h_{yj+1}}] \quad (31)$$

Схемы (22), (23) приводятся к стандартной форме

$$\frac{u^{n+1}_{ij}-u^n_{ij}}{\tau_{n+1}}=\overline{Q}^n_{uij}-\frac{p^{n+1}_{i+1j}-p^{n+1}_{ij}}{h_{xi+1}}, \quad (32)$$

$$\frac{v^{n+1}_{ij}-v^n_{ij}}{\tau_{n+1}}=\overline{Q}^n_{vij}-\frac{p^{n+1}_{ij+1}-p^{n+1}_{ij}}{h_{yj+1}}, \quad (33)$$

$$\overline{Q}^n_{uij}=Q^n_{uij}+\frac{F_x}{Fr}-\{(u'^2)^n_{\tilde{x}}+(u'v')^n_{\tilde{y}}-\frac{Dg}{2}[(u'^2)^n_{\tilde{x}}+(u'v')^n_{\tilde{y}}-(u'^2)^{n-1}_{\tilde{x}}-(u'v')^{n-1}_{\tilde{y}}]/\tau_n\}, \quad (34)$$

$$\overline{Q}^n_{vij}=Q^n_{vij}+\frac{F_y}{Fr}-\{(u'v')^n_{\tilde{x}}+(v'^2)^n_{\tilde{y}}-\frac{Dg}{2}[(u'v')^n_{\tilde{x}}+(v'^2)^n_{\tilde{y}}-(u'v')^{n-1}_{\tilde{x}}-(v'^2)^{n-1}_{\tilde{y}}]/\tau_n\} \quad (35)$$

Обе части (32),(33) умножаются на τ_{n+1} и приводятся к виду

$$u^{n+1}_{ij}=u^n_{ij}+\tau_{n+1}\overline{Q}^n_{uij}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i+1j}-p^{n+1}_{ij}}{h_{xi+1}}, \quad (36)$$

$$v^{n+1}_{ij}=v^n_{ij}+\tau_{n+1}\overline{Q}^n_{vij}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{ij+1}-p^{n+1}_{ij}}{h_{yj+1}} \quad (37)$$

В (36) и (37) полагается, ради краткости,

$$F^n_{uij}=u^n_{ij}+\tau_{n+1}\overline{Q}^n_{uij},\ F^n_{vij}=v^n_{ij}+\tau_{n+1}\overline{Q}^n_{vij}\quad , \quad (38)$$

$$u^{n+1}_{ij}=F^n_{uij}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i+1j}-p^{n+1}_{ij}}{h_{xi+1}}, \quad (39)$$

$$v^{n+1}_{ij}=F^n_{vij}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{ij+1}-p^{n+1}_{ij}}{h_{yj+1}} \quad (40)$$

Совершенно аналогичные (30) - (40) выражения получаются и для схемы пульсационных уравнений (19), (20), (21):

$$\frac{u'^{n+1}_{ij}-u'^n_{ij}}{\tau_{n+1}}=\overline{Q}'^n_{uij}-\frac{p'^{n+1}_{i+1j}-p'^{n+1}_{ij}}{h_{xi+1}},\ \frac{v'^{n+1}_{ij}-v'^n_{ij}}{\tau_{n+1}}=\overline{Q}'^n_{vij}-\frac{p'^{n+1}_{ij+1}-p'^{n+1}_{ij}}{h_{yj+1}},$$

$$\overline{Q}'^n_{uij}=Q'^n_{uij}+\frac{F'_x}{Fr}-u'^n_{ij}u^n_{\tilde{x}}-v'^n_{ij}u^n_{\tilde{y}}-\frac{Dg}{2}[(u'^2)^n_{\tilde{x}}+(u'v')^n_{\tilde{y}}-(u'^2)^{n-1}_{\tilde{x}}-(u'v')^{n-1}_{\tilde{y}}]/\tau_n,$$

$$\overline{Q}'^n_{vij}=Q'^n_{vij}+\frac{F'_y}{Fr}-u'^n_{ij}v^n_{\tilde{x}}-v'^n_{ij}v^n_{\tilde{y}}-\frac{Dg}{2}[(u'v')^n_{\tilde{x}}+(v'^2)^n_{\tilde{y}}-(u'v')^{n-1}_{\tilde{x}}-(v'^2)^{n-1}_{\tilde{y}}]/\tau_n$$

Обозначив

$$F'^n_{uij}=u'^n_{ij}+\tau_{n+1}\overline{Q}'^n_{uij},\ F'^n_{vij}=v'^n_{ij}+\tau_{n+1}\overline{Q}'^n_{vij},$$

делаем стандартное представление

$$u'^{n+1}_{ij}=F'^n_{uij}-\tau_{n+1}\frac{p'^{n+1}_{i+1j}-p'^{n+1}_{ij}}{h_{xi+1}},\ v'^{n+1}_{ij}=F'^n_{vij}-\tau_{n+1}\frac{p'^{n+1}_{ij+1}-p'^{n+1}_{ij}}{h_{yj+1}}$$

Имеет место фундаментальный принцип реализации закона сохранения массы через функцию давления. По этому принципу поле

давления p_{ij}^{n+1} определяется из требования, чтобы для стоящих в (39) и (40) $u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}$ выполнялось уравнение неразрывности (24). С этой целью (39),(40) подставляются в (24), в результате получается замкнутая система разностных уравнений для давления p_{ij}^{n+1}.

11.4. Технология получения разностных уравнений для давления при краевых условиях

Дирихле $u|_\sigma = \varphi_u(x,y,t), v|_\sigma = \varphi_v(x,y,t))$

Схема 1 ($\bar{\alpha}=0, \bar{\beta}=1$ /3/) ***- разностные производные назад в уравнении неразрывности*** $\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}+\frac{v_{ij}^{n+1}-v_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}}=0,$ ***разностные производные давления вперед в уравнении динамики***

$$u_{ij}^{n+1} = F_{uij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{i+1j}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}},\ v_{ij}^{n+1} = F_{vij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}$$

1°. Подстановка (39) и (40) в (24) в узлах с номерами $2 \le i \le N_x - 1, 2 \le j \le N_y - 1$ дает систему линейных уравнений

$$\frac{1}{h_{xi}}\{(F_{uij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{i+1j}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}) - (F_{ui-1j}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{i-1j}^{n+1}})\} + \quad (41)$$

$$+\frac{1}{h_{yj}}\{(F_{vij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}) - (F_{vij-1}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{ij-1}^{n+1}})\} = 0,$$

$$2 \le i \le N_x - 1, 2 \le j \le N_y - 1$$

2° . Подстановка (39) и (40) в (24) в узлах с индексами $i=1;$ $2 \le j \le N_y - 1$. В этих узлах уравнение (24) имеет вид:

$$\frac{u_{1j}^{n+1}-u_{0j}^{n+1}}{h_{x1}}+\frac{v_{1j}^{n+1}-v_{1j-1}^{n+1}}{h_{yj}}=0,\ 2 \le j \le N_y - 1, \quad (42)$$

где граничное условие $u_{0j}^{n+1} = \varphi_{u0j}^{n+1}$ задано. После подстановки получается:

$$\frac{1}{h_{x1}}\{(F_{u1j}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{2j}^{n+1}-p_{1j}^{n+1}}{h_{x2}}) - u_{0j}^{n+1}\} + \frac{1}{h_{yj}}\{(F_{v1j}^n - \quad (43)$$

$$-\tau_{n+1}\frac{p_{1j+1}^{n+1}-p_{1j}^{n+1}}{h_{yj+1}}) - (F_{v1j-1}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{1j}^{n+1}-p_{1j-1}^{n+1}})\} = 0, 2 \le j \le N_y - 1$$

3°. Аналогичная подстановка (39) и (40) в (24) осуществляется в узлах с индексами $j=1;\ 2 \le i \le N_x - 1,$ где (24) имеет вид

$$\frac{u_{i1}^{n+1}-u_{i-11}^{n+1}}{h_{xi}}+\frac{v_{i1}^{n+1}-v_{i0}^{n+1}}{h_{y1}}=0,\ 2 \le i \le N_x - 1, \quad (44)$$

здесь по граничному условию задано $v_{i0}^{n+1} = \varphi_{vi0}^{n+1}$. В результате

$$\frac{1}{h_{xi}}\{\Big(F^n_{ui1} - \tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i+11} - p^{n+1}_{i1}}{h_{xi+1}}\Big) - \Big(F^n_{ui-11} - \tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i1} - p^{n+1}_{i-11}}{h_{xi}}\Big)\} +$$

$$+\frac{1}{h_{y1}}\{(F^n_{vi1} - \tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i2} - p^{n+1}_{i1}}{h_{y2}}) - v^{n+1}_{i0}\ \} = 0, \quad 2 \le i \le N_x - 1 \qquad (45)$$

4°. Подстановка (39) и(40) в (24) в угловом узле с индексами $i = 1;\ \ j = 1;$ где (24) имеет вид

$$\frac{u^{n+1}_{11} - u^{n+1}_{01}}{h_{x1}} + \frac{v^{n+1}_{11} - v^{n+1}_{10}}{h_{y1}} = 0,$$

приводит к выражению:

$$\frac{1}{h_{x1}}\Big\{\ F^n_{u11} - \tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{21} - p^{n+1}_{11}}{h_{x2}}) - u^{n+1}_{01}\ \Big\} + \frac{1}{h_{y1}}\Big\{\ (F^n_{v11} - \tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{12} - p^{n+1}_{11}}{h_{y2}}) - v^{n+1}_{10}\ \Big\} = 0 \qquad (46)$$

В (41), (43), (45), (46) произведена подстановка во внутренних узлах Ω_h, полученная при этом система линейных уравнений для p^{n+1}_{ij} является незамкнутой. Для замыкания этой системы привлекается уравнение неразрывности (24) в граничных узлах γ_h с индексами $i = N_x,\ 1 \le j \le N_y - 1$: $j = N_y,\ 2 \le i \le N_x - 1.$

5°. В граничных узлах $i = N_x,\ 1 \le j \le N_y - 1$ уравнение неразрывности (24) имеет вид

$$\frac{u^{n+1}_{N_x j} - u^{n+1}_{N_x - 1 j}}{h_{xN_x}} + \frac{v^{n+1}_{N_x j} - v^{n+1}_{N_x j-1}}{h_{yj}} = 0,\ 1 \le j \le N_y - 1, \qquad (47)$$

где по граничным условиям считаются известными

$$u^{n+1}_{N_x j} = \varphi^{n+1}_{uN_x j}, v^{n+1}_{N_x j} = \varphi^{n+1}_{vN_x j}, v^{n+1}_{N_x j-1} = \varphi^{n+1}_{vN_x j-1}, j = \overline{0, N_y - 1},$$

следовательно, только (39) подставляется вместо $u^{n+1}_{N_x - 1 j}$.

В результате получается краевое условие для давления на правой границе прямоугольника

$$\frac{1}{h_{xN_x}}\Big\{\ u^{n+1}_{N_x j} - (F - \tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{N_x j} - p^{n+1}_{N_x - 1 j}}{h_{xN_x}})\ \Big\} + \frac{v^{n+1}_{N_x j} - v^{n+1}_{N_x j-1}}{h_{yj}} = 0, \quad 1 \le j \le N_y - 1 \qquad (48)$$

6°. В граничных узлах $j = N_y,\ 1 \le i \le N_x - 1$ уравнение неразрывности (24) имеет вид

$$\frac{u^{n+1}_{iN_y} - u^{n+1}_{i-1N_y}}{h_{xi}} + \frac{v^{n+1}_{iN_y} - v^{n+1}_{iN_y - 1}}{h_{yN_y}} = 0, \quad 1 \le i \le N_x - 1,$$

где по граничным условиям считаются известными

$$u^{n+1}_{iN_y} = \varphi^{n+1}_{uiN_y}, v^{n+1}_{iN_y} = \varphi^{n+1}_{viN_y}, u^{n+1}_{i-1N_y} = \varphi^{n+1}_{ui-1N_y}, i = 0,..., N_x,$$

поэтому выражение (40) подставляется вместо $v^{n+1}_{iN_y - 1}$. В результате получается краевое условие на верхней границе |

$$\frac{u_{iN_y}^{n+1}-u_{i-1N_y}^{n+1}}{h_{xi}}+\frac{1}{h_{yN_y}}\{v_{iN_y}^{n+1}-(F_{viN_y-1}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{iN_y}^{n+1}-p_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{yj}})\}=0,\ 1\le i\le N_x-1 \qquad (49)$$

Разностные уравнения (48) и (49) являются *естественными граничными условиями для давления*. Система (41), (43), (45), (46), (48), (49) является замкнутой системой, которая решается итерационным методом, для применения которого удобно записать уравнения (41), (43), (45), (46) одной формулой, используя функцию сигнатуры $sign(x)$:
$sign(x)=1$ для $x>0$, $sign(x)=0$ для $x=0$, $sign(x)=-1$ для $x<0$,

$$\frac{1}{h_{xi}}\{(F_{uij}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{i+1j}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}})-\frac{1+sign(i-1.5)}{2}(F_{ui-1j}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}})-\frac{1-sign(i-1.5)}{2}u_{0j}^{n+1}\}+$$
$$+\frac{1}{h_{yj}}\{(F_{vij}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}})-\frac{1+sign(j-1.5)}{2}(F_{vij-1}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}})-$$
$$-\frac{1-sign(j-1.5)}{2}v_{i0}^{n+1}\}=0,\ 1\le i\le N_x-1, 1\le j\le N_y-1 \qquad (50)$$

Система (50) решается относительно p_{ij}^{n+1} при граничных условиях (48), (49).

Схема 2 с разностными производными вперед в уравнении неразрывности ($\bar{\alpha}=1,\bar{\beta}=0$ [3]):

$$\frac{u_{i+1j}^{n+1}-u_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}}+\frac{v_{ij+1}^{n+1}-v_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}}=0,\ 0\le i\le N_x-1, 0\le j\le N_y-1 \qquad (51)$$

В этом случае градиенты давления в уравнениях (16) и (17), [2], необходимо аппроксимировать *разностями назад:*

$$u_{ij}^{n+1}=F_{uij}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}}, \qquad (52)$$

$$v_{ij}^{n+1}=F_{vij}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}} \qquad (53)$$

В результате аналогичных ***1°,2°,3°,4°,5°,6°*** подстановок (52) и (53) в (51) получается система уравнений для давления.

Уравнения для p_{ij}^{n+1} получаются аналогичным способом:

$$\{(F_{ui+1j}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{i+1j}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{xi+1}})\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+$$
$$+\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}u_{N_xj}^{n+1}-(F_{ui-1j}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{i-1j}^{n+1}}{h_{xi}})\}\frac{1}{h_{xi+1}}-\{\frac{1+sign(j-N_y+1.5)}{2}v_{iN_y}^{n+1}+$$
$$+(F_{vij+1}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^{n+1}-p_{ij}^{n+1}}{h_{yj+1}})\frac{1-sign(j-N_y+1.5)}{2}-(F_{vij-1}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{ij-1}^{n+1}}{h_{yj}})\}\frac{1}{h_{yj+1}}=0,$$
$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1;$$

граничные условия для давления получаются из (51):

$$\frac{1}{h_{x1}}\{(F^n_{u1j}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{1j}-p^{n+1}_{0j}}{h_{x1}})-\varphi^{n+1}_{u0j}\}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{0j}=0,\ \ i=0,\ j=1,...,N_y-1;$$

$$(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{i0}+\frac{1}{h_{y1}}\{(F^n_{vi1}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i1}-p^{n+1}_{i0}}{h_{y1}})-\varphi^{n+1}_{vi0}\ \}=0, j=0, i=\overline{1,N_x-1}$$

Схема 3 с центральными разностными производными в уравнении неразрывности

$$\frac{u^{n+1}_{i+1j}-u^{n+1}_{i-1j}}{h_{xi+1}+h_{xi}}+\frac{v^{n+1}_{ij+1}-v^{n+1}_{ij-1}}{h_{yj+1}+h_{yj}}=0, 1\le i\le N_x-1, 1\le j\le N_y-1 \qquad (54)$$

В граничных узлах применяются схемы

$$\frac{u^{n+1}_{1j}-u^{n+1}_{0j}}{h_{x1}}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{0j}=0,\ \frac{u^{n+1}_{N_xj}-u^{n+1}_{N_x-1j}}{h_{xN_x}}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{N_xj}=0, \qquad (55)$$

$$\frac{v^{n+1}_{i1}-v^{n+1}_{i0}}{h_{y1}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{i0}=0,\frac{v^{n+1}_{iN_y}-v^{n+1}_{iN_y-1}}{h_{yN_y}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{iN_y}=0,$$

по принципу взаимосогласованной аппроксимации [3] для давления применяются *центральные разности*

$$u^{n+1}_{ij}=F^n_{uij}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i+1j}-p^{n+1}_{i-1j}}{h_{xi+1}+h_{xi}}, \qquad (56)$$

$$v^{n+1}_{ij}=F^n_{vij}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{ij+1}-p^{n+1}_{ij-1}}{h_{yj+1}+h_{yj}} \qquad (57)$$

Уравнения для p^{n+1}_{ij} получаются аналогичным способом:

$$\{(F^n_{ui+1j}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i+2j}-p^{n+1}_{ij}}{h_{xi+2}+h_{xi+1}})\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1+sign(i-N_x+1.5)}{2}u^{n+1}_{N_xj}-\frac{1+sign(i-1.5)}{2}(F^n_{ui-1j}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{ij}-p^{n+1}_{i-2j}}{h_{xi}+h_{xi-1}})-$$

$$-\frac{1-sign(i-1.5)}{2}u^{n+1}_{0j}\}\frac{1}{h_{xi}+h_{xi+1}}+\{\frac{1+sign(j-N_y+1.5)}{2}v^{n+1}_{iN_y}+$$

$$+(F^n_{vij+1}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{ij+2}-p^{n+1}_{ij}}{h_{yj+2}+h_{yj+1}})\frac{1-sign(j-N_y+1.5)}{2}-$$

$$-(F^n_{vij-1}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{ij}-p^{n+1}_{ij-2}}{h_{yj}+h_{yj-1}})\frac{1+sign(j-1.5)}{2}-$$

$$-\frac{1-sign(j-1.5)}{2}v^{n+1}_{i0}\}\frac{1}{h_{yj}+h_{yj+1}}=0, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1;$$

граничные условия для давления получаются из (55):

$$\frac{1}{h_{xN_x}}\{\varphi^{n+1}_{uN_xj}-(F^n_{uN_x-1j}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{N_xj}-p^{n+1}_{N_x-2j}}{h_{xN_x}+h_{xN_x-1}})\}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{N_xj}=0,\ i=N_x,\ j=1,...,N_y-1;$$

$$\frac{1}{h_{x1}}\{(F^n_{u1j}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{2j}-p^{n+1}_{0j}}{h_{x2}+h_{x1}})-\varphi^{n+1}_{u0j}\}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{0j}=0,\ i=0,\ j=1,...,N_y-1;$$

$$(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{iN_y}+\frac{1}{h_{yN_y}}\{\varphi^{n+1}_{viN_y}-(F^n_{viN_y-1}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{iN_y}-p^{n+1}_{iN_y-2}}{h_{yN_y}+h_{yN_y-1}})\}=0,\ j=N_y,\ i=1,...,N_x-1;$$

$$(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{i0}+\frac{1}{h_{y1}}\{(F^n_{vi1}-\tau_{n+1}\frac{p^{n+1}_{i2}-p^{n+1}_{i0}}{h_{y2}+h_{y1}})-\varphi^{n+1}_{vi0}\}=0,\ j=0,\ i=1,...,N_x-1$$

11.5. Итерационные алгоритмы. Методы глобальных итераций

Решение p^{n+1}_{ij} системы линейных алгебраических уравнений (48), (49), (50) можно найти модифицированным итерационным методом с параметром $\theta>0$. Для упрощения изложения алгоритма верхний ин декс "$n+1$" у p^{n+1}_{ij} опускается: $p_{ij}=p^{n+1}_{ij}$. Номер *к*-итерации обозначается p^k_{ij}. Для сходящегося итерационного процесса

$$\lim_{k\to\infty} p^k_{ij}=p^{n+1}_{ij},\ \forall(i,j) \tag{58}$$

Нулевая итерация p^0_{ij} при $k=0$ на каждом слое времени t_{n+1} равно значению давления на предыдущем слое времени t_n:

$$p^0_{ij}=p^n_{ij},\quad \forall(i,j) \tag{59}$$

$$\frac{p^{k+1}_{ij}-p^k_{ij}}{\theta}+\frac{1}{h_{xi}}\{(F^n_{uij}-\tau_{n+1}\frac{p^k_{i+1j}-p^{k+1}_{ij}}{h_{xi+1}})-\frac{1+sign(i-1.5)}{2}(F^n_{ui-1j}-$$

$$-\tau_{n+1}\frac{p^{k+1}_{ij}-p^k_{i-1j}}{h_{xi}})-\frac{1-sign(i-1.5)}{2}u^{n+1}_{0j}\}+\frac{1}{h_{yj}}\{(F^n_{vij}-\tau_{n+1}\frac{p^k_{ij+1}-p^{k+1}_{ij}}{h_{yj+1}})-$$

$$-\frac{1+sign(j-1.5)}{2}(F^n_{vij-1}-\tau_{n+1}\frac{p^{k+1}_{ij}-p^k_{ij-1}}{h_{yj}})- \tag{60}$$

$$-\frac{1-sign(j-1.5)}{2}v^{n+1}_{i0}\}=0,\quad 1\le i\le N_x-1,1\le j\le N_y-1$$

Итерационный алгоритм для граничного условия (49):

$$\frac{p^{k+1}_{iN_y}-p^k_{iN_y}}{\theta}+\frac{u^{n+1}_{iN_y}-u^{n+1}_{i-1N_y}}{h_{xi}}+\frac{1}{h_{yN_y}}\{v^{n+1}_{iN_y}-(F^n_{viN_y-1}-$$

$$-\tau_{n+1}\frac{p^{k+1}_{iN_y}-p^k_{iN_y-1}}{h_{yN_y}})\}=0,\ 1\le i\le N_x-1, \tag{61}$$

где коэффициент при $p^{k+1}_{iN_y}$ равен $1/\theta+A^n_{iN_y}$, $A^n_{iN_y}=\tau_{n+1}/h^2_{yN_y}$.

Итерационный алгоритм для граничного условия (48):

$$\frac{p_{N_x j}^{k+1}-p_{N_x j}^{k}}{\theta}+\frac{1}{h_{xN_x}}\left\{(u_{N_x j}^{n+1}-(\ F_{uN_x-1\,j}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{N_x j}^{k+1}-p_{N_x-1\,j}^{k}}{h_{xN_x}})\ \right\}+\frac{v_{N_x j}^{n+1}-v_{N_x j-1}^{n+1}}{h_{yj}}=0,\quad (62)$$

$$1\le j\le N_y-1,$$

где коэффициент при $p_{N_x j}^{k+1}$ равен $1/\theta+A_{N_x j}^{n}, A_{N_x j}^{n}=\tau_{n+1}/h_{xN_x}^{2}$.

Здесь $0<\theta<1-$ итерационный параметр. В (60) собираются коэффициенты при p_{ij}^{k+1} в виде

$$A_{ij}^{n}=\tau_{n+1}\{\left[\frac{1}{h_{xi}}\left(\frac{1}{h_{xi+1}}+\frac{1+sign(i-1.5)}{2h_{xi}}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{h_{yj}}\left(\frac{1}{h_{yj+1}}+\frac{1+sign(j-1.5)}{2h_{yj}}\right)\right]\} \quad (63)$$

для явного определения в узлах $1\le i\le N_x-1, 1\le j\le N_y-1$

$$p_{ij}^{k+1}=\frac{1}{\frac{1}{\theta}+A_{ij}^{n}}\left\langle\frac{p_{ij}^{k}}{\theta}-\frac{1}{h_{xi}}\{(\ F_{uij}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{i+1\,j}^{k}}{h_{xi+1}})-\right.$$

$$-\frac{1+sign(i-1.5)}{2}(F_{ui-1\,j}^{n}+\tau_{n+1}\frac{p_{i-1\,j}^{k}}{h_{xi}})-\frac{1-sign(i-1.5)}{2}u_{0j}^{n+1}\ \}-$$

$$-\frac{1}{h_{yj}}\{(\ F_{vij}^{n}-\tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^{k}}{h_{yj+1}}\ )-\frac{1+sign(j-1.5)}{2}\ *\quad (64)$$

$$\left.*(F_{vij-1}^{n}+\tau_{n+1}[\frac{-p_{ij-1}^{k}}{h_{yj}}])-\frac{1-sign(j-1.5)}{2}v_{i0}^{n+1}\}\right\rangle,$$

Аналогично из (61) и (62) вычисляются

$$p_{iN_y}^{k+1}=\frac{1}{\frac{1}{\theta}+A_{iN_y}^{n}}\left\{\frac{p_{iN_y}^{k}}{\theta}-\frac{u_{iN_y}^{n+1}-u_{iN_y-1}^{n+1}}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{yN_y}}[v_{iN_y}^{n+1}-(F_{viN_y-1}^{n}+\tau_{n+1}\frac{p_{iN_y-1}^{k}}{h_{yN_y}})]\right\},\ 1\le i\le N_x-1\ ,(65)$$

$$p_{N_x j}^{k+1}=\frac{1}{\frac{1}{\theta}+A_{N_x j}^{n}}\left\{\frac{p_{N_x j}^{k}}{\theta}-\frac{1}{h_{xN_x}}[(u_{N_x j}^{n+1}-(F_{uN_x-1\,j}^{n}+\tau_{n+1}\frac{p_{N_x-1\,j}^{k}}{h_{xN_x}})]-\frac{v_{N_x j}^{n+1}-v_{N_x-1\,j}^{n+1}}{h_{yj}}\right\},1\le j\le N_y-1 \quad (66)$$

Итерации (64),(65),(66) продолжаются до выполнения с точностью $\varepsilon\approx 0$ уравнения неразрывности (24). Очевидно, уравнения (24) и (50) эквивалентны друг другу в силу представлений (39) и (40), т.е. уравнение (50) тоже есть уравнение неразрывности, только записанное иначе. Данное обстоятельство позволяет значительно упростить процедуру итерационного алгоритма для вычисления p_{ij}^{n+1}.

С этой целью (60) с использованием коэффициента A_{ij}^{n} переписывается в виде

$$(1+\theta A_{ij}^n)\frac{p_{ij}^{k+1}-p_{ij}^k}{\theta}+\Big\langle\ \frac{1}{h_{xi}}\{(F_{uij}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{i+1j}^k-p_{ij}^k}{h_{xi+1}})-$$
$$-\frac{1+sign(i-1.5)}{2}(F_{ui-1j}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^k-p_{i-1j}^k}{h_{xi}})-\frac{1-sign(i-1.5)}{2}u_{0j}^{n+1}\}+$$
$$+\frac{1}{h_{yj}}\{(F_{vij}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^k-p_{ij}^k}{h_{yj+1}})- \qquad (67)$$
$$-\frac{1+sign(j-1.5)}{2}(F_{vij-1}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{ij}^k-p_{ij-1}^k}{h_{yj}})-\frac{1-sign(j-1.5)}{2}v_{i0}^{n+1}\}\Big\rangle=0$$

Метод глобальных итераций для схемы 1 (24),(39),(40)

Очевидно, выражение в левой части (67), стоящее в скобках $\langle\ \dots\ \rangle$, совпадает с (50), а (50) совпадает с уравнением неразрывности (24). Исходя из этого, удобно ввести сеточные функции $u_{ij}^{n+1^k}, v_{ij}^{n+1^k}$ по аналогии с (39),(40):

$$u_{ij}^{n+1^k}=F_{uij}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{i+1j}^k-p_{ij}^k}{h_{xi+1}}, \qquad (68)$$

$$v_{ij}^{n+1^k}=F_{vij}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^k-p_{ij}^k}{h_{yj+1}}, \qquad (69)$$

при этом $u_{ij}^{n+1^k}, v_{ij}^{n+1^k}$ являются k – итерациями, соответственно $u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}$, то есть в пределе имеют место

$$\lim_{k\to\infty} u_{ij}^{n+1^k}=u_{ij}^{n+1},\ \lim_{k\to\infty} v_{ij}^{n+1^k}=v_{ij}^{n+1},$$

так как при сходимости итераций (64),(65),(66)

$$\lim_{k\to\infty} p_{ij}^k=p_{ij}^{n+1},\forall(i,j)$$

В силу указанного выше соответствия выражения в левой части (67), стоящего в скобках $\langle\ \dots\ \rangle$ с (50), а (50) с уравнением неразрывности (24), содержимое $\langle\ \dots\ \rangle$ в (67) заменяется на итерационное уравнение

$$(1+\theta A_{ij}^n)\frac{p_{ij}^{k+1}-p_{ij}^k}{\theta}+\frac{u_{ij}^{n+1^k}-u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi}}+\frac{v_{ij}^{n+1^k}-v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj}}=0,\ 1\le i\le N_x, 1\le j\le N_y \qquad (70)$$

Система (70) эквивалентна (67) и краевым условиям (65) и (66), решается относительно p_{ij}^{k+1}, где по граничным условиям (26), (27), (28), (29):

$$x=1+2l/L, u_{N_x j}^{n+1^k}=2u_{N_x-1 j}^{n+1^k}-u_{N_x-2 j}^{n+1^k}, v_{N_x j}^{n+1^k}=2v_{N_x-1 j}^{n+1^k}-v_{N_x-2 j}^{n+1^k}, 0\le j\le N_y; \quad (71)$$

$$\textit{на пластине} \quad y=0, u_{i0}^{n+1^k}=0, v_{i0}^{n+1^k}=0, mk\le i\le mkk,$$

до начала и после конца пластины

$$y=0, u_{i0}^{n+1^k}=(4u_{i1}^{n+1^k}-u_{i2}^{n+1^k})/3, v_{i0}^{n+1^k}=0, 1\le i\le mk-1, mkk+1\le i\le N_x,$$

$$y=H/L: \quad u_{iN_y}^{n+1^k}=(4u_{iN_y-1}^{n+1^k}-u_{iN_y-2}^{n+1^k})/3, \; v_{iN_y}^{n+1^k}=(4v_{iN_y-1}^{n+1^k}-v_{iN_y-2}^{n+1^k})/3, i=\overline{0,N_x}$$

Итерационный процесс (68)-(71-73) абсолютно идентичен (64), (65), (66) и реализуется все вместе до такого значения $k=\bar{k}$, при котором уравнение неразрывности (24) в узлах сетки выполняется с заданной точностью $\varepsilon\approx 0$:

$$\left|\frac{u_{ij}^{n+1^{\bar{k}}}-u_{i-1 j}^{n+1^{\bar{k}}}}{h_{xi}}+\frac{v_{ij}^{n+1^{\bar{k}}}-v_{ij-1}^{n+1^{\bar{k}}}}{h_{yj}}\right|\le\varepsilon,, \forall(i,j) \quad (72)$$

Итерационный процесс реализуется до выполнения критерия (72). Во всех случаях при удовлетворении неравенств (72) за решение на слое времени t_{n+1} берется

$$p_{ij}^{\bar{k}+1}=p_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1^{\bar{k}}}=u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1^{\bar{k}}}=v_{ij}^{n+1}, \forall(i,j).$$

Метод глобальных итераций для схемы 3 (54)-(55)-(56)-(57)

Группируются коэффициенты при p_{ij}^{n+1}:

$$A_{ij}^n=\tau_{n+1}\{\frac{1}{h_{xi+1}+h_{xi}}[\frac{1}{h_{xi+2}+h_{xi+1}}\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1}{h_{xi}+h_{xi-1}}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}]+\frac{1}{h_{yj+1}+h_{yj}}[\frac{1}{h_{yj+2}+h_{yj+1}}\frac{1-sign(j-N_y+1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1}{h_{yj}+h_{yj-1}}\frac{1+sign(j-1.5)}{2}]\}, i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1;$$

$$A_{N_x j}^n=\tau_{n+1}\frac{1}{h_{xN_x}(h_{xN_x}+h_{xN_x-1})}, A_{0j}^n=\tau_{n+1}\frac{1}{h_{x1}(h_{x2}+h_{x1})}, j=1,...,N_y-1;$$

$$A_{iN_y}^n=\tau_{n+1}\frac{1}{h_{yN_y}(h_{yN_y}+h_{yN_y-1})}, A_{i0}^n=\tau_{n+1}\frac{1}{h_{y1}(h_{y2}+h_{y1})}, i=1,...,N_x-1$$

Глобальный итерационный процесс:

$$u_{ij}^{n+1^k}=F_{uij}^n-\tau_{n+1}\frac{p_{i+1 j}^k-p_{i-1 j}^k}{h_{xi+1}+h_{xi}},$$

$$v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij+1}^k - p_{ij-1}^k}{h_{yj+1}+h_{yj}}, i = 1,...,N_x - 1,\ j = 1,...,N_y - 1;$$

$$(1+A_{ij}^n\theta)\frac{p_{ij}^{k+1}-p_{ij}^k}{\theta} + \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi+1}+h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj+1}+h_{yj}} = 0,\ 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1,$$

$$(1+A_{N_x j}^n\theta)\frac{p_{N_x j}^{k+1}-p_{N_x j}^k}{\theta} + \frac{\varphi_{uN_x j}^{n+1} - u_{N_x-1 j}^{n+1^k}}{h_{xN_x}} + (\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})_{N_x j}^{n+1} = 0,$$

$$(1+A_{0j}^n\theta)\frac{p_{0j}^{k+1}-p_{0j}^k}{\theta} + \frac{u_{1j}^{n+1^k} - \varphi_{u0j}^{n+1}}{h_{x1}} + (\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})_{0j}^{n+1} = 0, 1 \le j \le N_y - 1;$$

$$(1+A_{iN_y}^n\theta)\frac{p_{iN_y}^{k+1}-p_{iN_y}^k}{\theta} + (\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})_{iN_y}^{n+1} + \frac{\varphi_{viN_y}^{n+1} - v_{iN_y-1}^{n+1,k}}{h_{yN_y}} = 0,$$

$$(1+A_{i0}^n\theta)\frac{p_{i0}^{k+1}-p_{i0}^k}{\theta} + (\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k} - \varphi_{vi0}^{n+1}}{h_{y1}} = 0, 1 \le i \le N_x - 1$$

Итерационный процесс останавливается при выполнении условия для уравнения неразрывности

$$|\frac{u_{i+1j}^{n+1^{\bar{k}}} - u_{i-1j}^{n+1^{\bar{k}}}}{h_{xi+1}+h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^{\bar{k}}} - v_{ij-1}^{n+1^{\bar{k}}}}{h_{yj+1}+h_{yj}}| \le \varepsilon,, \forall(i,j),$$

после чего последние приближения $p_{ij}^{n+1,\bar{k}}, u_{ij}^{n+1,\bar{k}}, v_{ij}^{n+1,\bar{k}}$ принимаются в качестве решений $p_{ij}^{\bar{k}} \approx p_{ij}^{n+1}, u_{ij}^{n+1^{\bar{k}}} \approx u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1^{\bar{k}}} \approx v_{ij}^{n+1}$. Итерационный параметр $\theta > 0$ может принимать любые значения из промежутка $0 < \theta \le 1/2.$

Глобальные итерации для схемы 1 (24),(39),(40) по методу минимальных невязок Красносельского – Крейна

При вычислении поля давления быструю сходимость итераций обеспечивает метод *Красносельского – Крейна.* Преимущество этого метода перед модифицированным методом заключается в том, что нет необходимости в коэффициентах A_{ij}^n. В областях со сложной геометрией определение A_{ij}^n является трудоемким процессом, что подтверждается присутствием в них выражений вида $\frac{1-sign(i-N_x+1.5)}{2}, \frac{1-sign(i+1.5)}{2}$, …, поэтому изложению данного метода здесь уделяется значительное внимание, так как в силу *неоднородности разностных уравнений для давления* применение других методов, использующих трехточечные или пятиточечные прогонки, не представляется возможным.

В методе *Красносельского–Крейна* решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,..., N ,$$

находится по итерационному алгоритму

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \theta_k R_i^k, i = 1,..., N , k = 0,1,..., k^*,$$

где R_i^k - вектор невязки k-итерации

$$R_i^k = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j^k - b_i, i = 1,..., N ,$$

θ_k=const - итерационный параметр, выбирается из условия минимизации невязки $k+1$-итерации $\sum_{i=1}^{n} (R_i^{k+1})^2$ и равно

$$\theta_k = -\sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{N} a_{ij} R_j^k) R_i^k / \sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{N} a_{ij} R_j^k)^2$$

Итерации прекращаются при выполнении условия $\max_{1 \le i \le N} \left| R_i^{\bar{k}} \right| \le \varepsilon$, где $0 < \varepsilon$ - достаточно малое число.

Согласно м.м.н. по (39), (40) вычисляются невязки k-итерации

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{ij}^k}{h_{xi+1}}, v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij}^k}{h_{yj+1}}, i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1;$$

$$R_{ij}^k = \frac{u_{ij}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj}}, i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1;$$

$$R_{N_x j}^k = \frac{\varphi_{uN_x j}^{n+1} - u_{N_x - 1j}^{n+1^k}}{h_{xN_x}} + (\frac{\partial \varphi_v}{\partial y})_{N_x j}^{n+1}, 1 \le j \le N_y - 1, \; R_{iN_y}^k = (\frac{\partial \varphi_u}{\partial x})_{iN_y}^{n+1} + \frac{\varphi_{viN_y}^{n+1} - v_{iN_y - 1}^{n+1,k}}{h_{yN_y}}, 1 \le i \le N_x - 1,$$

Благодаря специфике задачи вычисляются соответственно

$$R_{uij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{i+1j}^k - R_{ij}^k}{h_{xi+1}}, \; R_{vij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{ij+1}^k - R_{ij}^k}{h_{yj+1}}, \; i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ij}^k = \frac{R_{uij}^k - R_{ui-1j}^k}{h_{xi}} + \frac{R_{vij}^k - R_{vij-1}^k}{h_{yj}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1,$$

$$AR_{N_x j}^k = \frac{-R_{uN_x - 1j}^k}{h_{xN_x}}, 1 \le j \le N_y - 1, \; AR_{iN_y}^k = \frac{-R_{viN_y - 1}^k}{h_{yN_y}}, 1 \le i \le N_x - 1,$$

Вычисляется параметр итерации

$$\theta_k = -(\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} AR_{ij}^k \cdot R_{ij}^k) / \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (AR_{ij}^k)^2,$$

и далее $p_{ij}^{k+1} = p_{ij}^k + \theta_k R_{ij}^k, i = 1,..., N_x, j = 1,..., N_y$.

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$| R_{ij}^{\bar{k}} |=| \frac{u_{ij}^{n+1^{\bar{k}}} - u_{i-1j}^{n+1^{\bar{k}}}}{h_{xi}} + \frac{v_{ij}^{n+1^{\bar{k}}} - v_{ij-1}^{n+1^{\bar{k}}}}{h_{yj}} | \le \varepsilon, \forall i, j$$

Глобальные итерации для схемы 3 (54)-(55)-(56)-(57) по методу минимальных невязок Красносельского- Крейна

Согласно м.м.н. по (54)-(55) вычисляются невязки *k*-итерации

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{i+1j}^k - p_{i-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}},$$

$$v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1} \frac{p_{ij+1}^k - p_{ij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}}, i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1;$$

$$R_{ij}^k = \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{i-1j}^{n+1^k}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij-1}^{n+1^k}}{h_{yj+1} + h_{yj}}, i = 1,..., N_x - 1, j = 1,..., N_y - 1;$$

$$R_{N_x j}^k = \frac{\varphi_{uN_x j}^{n+1} - u_{N_x - 1j}^{n+1^k}}{h_{xN_x}} + (\frac{\partial \varphi_v}{\partial y})_{N_x j}^{n+1}, R_{0j}^k = \frac{u_{1j}^{n+1^k} - \varphi_{u0j}^{n+1}}{h_{x1}} + (\frac{\partial \varphi_v}{\partial y})_{0j}^{n+1}, 1 \le j \le N_y - 1,$$

$$R_{iN_y}^k = (\frac{\partial \varphi_u}{\partial x})_{iN_y}^{n+1} + \frac{\varphi_{viN_y}^{n+1} - v_{iN_y - 1}^{n+1,k}}{h_{yN_y}}, R_{i0}^k = (\frac{\partial \varphi_u}{\partial x})_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k} - \varphi_{vi0}^{n+1}}{h_{y1}}, 1 \le i \le N_x - 1,$$

Соответственно вычисляются

$$R_{uij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{i+1j}^k - R_{i-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \quad R_{vij}^k = -\tau_{n+1} \frac{R_{ij+1}^k - R_{ij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}}, \; i = 1,..., N_x - 1, \; j = 1,..., N_y - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ij}^k = \frac{R_{ui+1j}^k - R_{ui-1j}^k}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{R_{vij+1}^k - R_{vij-1}^k}{h_{yj+1} + h_{yj}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1,$$

$$AR_{N_x j}^k = \frac{-R_{uN_x - 1j}^k}{h_{xN_x}}, \quad AR_{0j}^k = \frac{R_{u1j}^k}{h_{x1}}, 1 \le j \le N_y - 1,$$

$$AR_{iN_y}^k = \frac{-R_{viN_y - 1}^k}{h_{yN_y}}, \quad AR_{i0}^k = \frac{R_{vi1}^k}{h_{y1}}, 1 \le i \le N_x - 1$$

Вычисляется параметр итерации

$$\theta_k = -(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} AR_{ij}^k \cdot R_{ij}^k) \Big/ \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (AR_{ij}^k)^2,$$

и далее $p_{ij}^{k+1} = p_{ij}^k + \theta_k R_{ij}^k, i = 0,..., N_x, j = 0,..., N_y$.

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$| R_{ij}^{\bar{k}} |= \left| (u_{i+1j}^{n+1^{\bar{k}}} - u_{i-1j}^{n+1^{\bar{k}}}) \Big/ (h_{xi+1} + h_{xi}) + (v_{ij+1}^{n+1^{\bar{k}}} - v_{ij-1}^{n+1^{\bar{k}}}) \Big/ (h_{yj+1} + h_{yj}) \right| \le \varepsilon, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1$$

Методы глобальных итераций для схемы 2 (51),(52),(53)

Идентичны вышеизложенным алгоритмам:

$$u_{ij}^{n+1^k} = F_{uij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij}^k - p_{i-1j}^k}{h_{xi}}, v_{ij}^{n+1^k} = F_{vij}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij}^k - p_{ij-1}^k}{h_{yj}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1;$$

$$A_{ij}^n = [\frac{\tau_{n+1}}{h_{xi+1}}\frac{1 - sign(i - N_x + 1.5)}{2} + \frac{\tau_{n+1}}{h_{xi}}]\frac{1}{h_{xi+1}} + [\frac{\tau_{n+1}}{h_{yj+1}}\frac{1 - sign(j - N_y + 1.5)}{2} + \frac{\tau_{n+1}}{h_{yj}}]\frac{1}{h_{yj+1}},$$

$$\mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{N}_x - \mathbf{1}, \mathbf{1} \le \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{N}_y - \mathbf{1};$$

$$A_{oj}^n = \frac{\tau_{n+1}}{h_{x1}h_{x1}}, 1 \le j \le N_y - 1, A_{i0}^n = \frac{\tau_{n+1}}{h_{y1}h_{y1}}, 1 \le i \le N_x - 1;$$

$$(1 + A_{ij}^n\theta)\frac{p_{ij}^{k+1} - p_{ij}^k}{\theta} + \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{ij}^{n+1^k}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij}^{n+1^k}}{h_{yj+1}} = 0,\ 0 \le i \le N_x - 1, 0 \le j \le N_y - 1$$

Метод минимальных невязок

$$R_{ij}^k = \frac{u_{i+1j}^{n+1^k} - u_{ij}^{n+1^k}}{h_{xi+1}} + \frac{v_{ij+1}^{n+1^k} - v_{ij}^{n+1^k}}{h_{yj+1}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1,$$

$$R_{0j}^k = \frac{u_{1j}^{n+1^k} - \varphi_{u0j}^{n+1}}{h_{x1}} + (\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})_{0j}^{n+1}, 1 \le j \le N_y - 1,\ R_{i0}^k = (\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})_{i0}^{n+1} + \frac{v_{i1}^{n+1,k} - \varphi_{vi0}^{n+1}}{h_{y1}}, 1 \le i \le N_x - 1$$

По специфике задачи вычисляются соответственно

$$R_{uij}^k = -\tau_{n+1}\frac{R_{ij}^k - R_{i-1j}^k}{h_{xi}},\ R_{vij}^k = -\tau_{n+1}\frac{R_{ij}^k - R_{ij-1}^k}{h_{yj}},\ i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1;$$

после чего определяются

$$AR_{ij}^k = \frac{R_{ui+1j}^k - R_{uij}^k}{h_{xi+1}} + \frac{R_{vij+1}^k - R_{vij}^k}{h_{yj+1}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1$$

$$AR_{0j}^k = \frac{R_{u1j}^k}{h_{x1}}, 1 \le j \le N_y - 1,\ AR_{i0}^k = \frac{R_{vi1}^k}{h_{y1}}, 1 \le i \le N_x - 1,$$

$$\theta_k = -(\sum_{i=0}^{N_x-1}\sum_{j=0}^{N_y-1} AR_{ij}^k \cdot R_{ij}^k) / \sum_{i=0}^{N_x-1}\sum_{j=0}^{N_y-1}(AR_{ij}^k)^2,$$

$$p_{ij}^{k+1} = p_{ij}^k + \theta_k R_{ij}^k, i = 0,..., N_x - 1,\ j = 0,..., N_y - 1$$

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$|R_{ij}^{\bar{k}}| = |(u_{i+1j}^{n+1^{\bar{k}}} - u_{ij}^{n+1^{\bar{k}}})/h_{xi+1} + (v_{ij+1}^{n+1^{\bar{k}}} - v_{ij}^{n+1^{\bar{k}}})/h_{yj+1}| \le \varepsilon$$

11.6. Схема без «аппроксимационной вязкости» для конвективных членов

Универсальным является многоточечная аппроксимация конвективного члена, не содержащая «схемной вязкости», (см. *Джакупов К.Б.* [3]), идея которой заключается в следующем.

Из разложения в ряд *Тейлора*

$$\Phi^n_{i-1j} = \Phi^n_{ij} - h_{xi}\,(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^n_{ij} + \frac{h^2_{xi}}{2}\,(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} + O(h^2_{xi})$$

вытекает аппроксимация

$$(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^n_{ij} = \frac{\Phi^n_{ij} - \Phi^n_{i-1j}}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2}\,(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} + O(h^2_{xi})$$

Стоящая здесь вторая производная аппроксимируется в приграничном узле $i = 1$ по формуле

$$(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} = (\frac{\Phi^n_{i+2j} - \Phi^n_{i+1j}}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi^n_{i+1j} - \Phi^n_{ij}}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} + O(h_{xi+2} + h_{xi+1}),$$

В остальных узлах $i = 2,..., N_x - 1$ по другой формуле

$$(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} = (\frac{\Phi^n_{ij} - \Phi^n_{i-1j}}{h_{xi}} - \frac{\Phi^n_{i-1j} - \Phi^n_{i-2j}}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} + O(h_{xi-1} + h_{xi})$$

Данные аппроксимации применяются в случае неотрицательного коэффициента $u^n_{ij} \geq 0$. Из аналогичного разложения в ряд *Тейлора*

$$\Phi^n_{i+1j} = \Phi^n_{ij} + h_{xi+1}\,(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^n_{ij} + \frac{h^2_{xi+1}}{2}\,(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} + O(h^2_{xi+1})$$

получается

$$(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^n_{ij} = \frac{\Phi^n_{i+1j} - \Phi^n_{ij}}{h_{xi+1}} - \frac{h_{xi+1}}{2}\,(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} + O(h^2_{xi+1})$$

Стоящая здесь вторая производная аппроксимируется в узлах $i = 1,..., N_x - 2$ по формуле

$$(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} = (\frac{\Phi^n_{i+2j} - \Phi^n_{i+1j}}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi^n_{i+1j} - \Phi^n_{ij}}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}} + O(h_{xi+2} + h_{xi+1}),$$

в приграничном узле $i = N_x - 1$ по другой формуле

$$(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})^n_{ij} = (\frac{\Phi^n_{ij} - \Phi^n_{i-1j}}{h_{xi}} - \frac{\Phi^n_{i-1j} - \Phi^n_{i-2j}}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}} + O(h_{xi-1} + h_{xi})$$

Данные аппроксимации применяются в случае неположительного коэффициента $u^n_{ij} \leq 0$. Дискретная функция *sign:*

$$для\ \ A < 0, signA = -1, для\ \ A = 0, signA = 0, для\ \ A > 0, signA = +1$$

позволяет написать аппроксимации, не содержашие «схемной вязкости», в виде одной формулы

$$\begin{aligned} u^n_{ij}(\frac{\partial\Phi}{\partial x})^n_{ij} &= \frac{|u^n_{ij}| + u^n_{ij}}{2}\{\frac{\Phi^n_{ij} - \Phi^n_{i-1j}}{h_{xi}} + \frac{h_{xi}}{2}[(\frac{\Phi^n_{ij} - \Phi^n_{i-1j}}{h_{xi}} - \frac{\Phi^n_{i-1j} - \Phi^n_{i-2j}}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}}\frac{1 + sign(i - 1.5)}{2} + \\ &+ (\frac{\Phi^n_{i+2j} - \Phi^n_{i+1j}}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi^n_{i+1j} - \Phi^n_{ij}}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}}\frac{1 - sign(i\ - 1.5)}{2}]\} + \frac{u^n_{ij} - |u^n_{ij}|}{2}\{\frac{\Phi^n_{i+1j} - \Phi^n_{ij}}{h_{xi+1}} - \\ &- \frac{h_{xi+1}}{2}[(\frac{\Phi^n_{i+2j} - \Phi^n_{i+1j}}{h_{xi+2}} - \frac{\Phi^n_{i+1j} - \Phi^n_{ij}}{h_{xi+1}})\frac{2}{h_{xi+2} + h_{xi+1}}\frac{1 - sign(i\ - N_x + 1.5)}{2} + \\ &+ (\frac{\Phi^n_{ij} - \Phi^n_{i-1j}}{h_{xi}} - \frac{\Phi^n_{i-1j} - \Phi^n_{i-2j}}{h_{xi-1}})\frac{2}{h_{xi} + h_{xi-1}}\frac{1 + sign(i\ - N_x + 1.5)}{2}]\} + O(\hbar^2_{xi}) \equiv \end{aligned} \qquad (73)$$

$$\equiv \frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2}\Phi_{\bar{x}^0}^n + \frac{u_{ij}^n-|u_{ij}^n|}{2}\Phi_{x^0}^n + O(\hbar_{xi}^2)$$

Аналогичная аппроксимация 2-го порядка точности применяется и для других конвективных членов. Условия сходимости и устойчивости явной схемы накладывают ограничения на шаги по времени

$$[1-\tau_{n+1}(\frac{2}{\mathrm{Re}\,h_x^2}+\frac{3|u_{ji}^n|}{2h_x}+\frac{2}{\mathrm{Re}\,h_y^2}+\frac{3|v_{ji}^n|}{2h_y})]\geq 0, h_x=\min_i h_{xi}, h_y=\min_j h_{yj},$$

$$i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,\ \ n=0,1,2,...,N_\tau-1$$

В алгоритмах реализаций вышеприведенных полуявных схем в случае аппроксимаций конвективных членов без «схемной вязкости» изменится лишь форма Q_{uij}^n, Q_{vij}^n, входящих в F_{uij}^n, F_{vij}^n:

$$Q_{uij}^n=\frac{1}{\mathrm{Re}}[\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{u_{i+1j}^n-u_{ij}^n}{h_{xi+1}}-\frac{u_{ij}^n-u_{i-1j}^n}{h_{xi}})+\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{u_{ij+1}^n-u_{ij}^n}{h_{yj+1}}-\frac{u_{ij}^n-u_{ij-1}^n}{h_{yj}})]-$$

$$-\{\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2}u_{\bar{x}^0}^n+\frac{u_{ij}^n-|u_{ij}^n|}{2}u_{x^0}^n+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2}u_{\bar{y}^0}^n+\frac{v_{ij}^n-|v_{ij}^n|}{2}u_{y^0}^n\},$$

$$Q_{uij}^n=\frac{1}{\mathrm{Re}}[\frac{1}{\hbar_{xi}}(\frac{v_{i+1j}^n-v_{ij}^n}{h_{xi+1}}-\frac{v_{ij}^n-v_{i-1j}^n}{h_{xi}})+\frac{1}{\hbar_{yj}}(\frac{v_{ij+1}^n-v_{ij}^n}{h_{yj+1}}-\frac{v_{ij}^n-v_{ij-1}^n}{h_{yj}})]-$$

$$-\{\frac{|u_{ij}^n|+u_{ij}^n}{2}v_{\bar{x}^0}^n+\frac{u_{ij}^n-|u_{ij}^n|}{2}v_{x^0}^n+\frac{|v_{ij}^n|+v_{ij}^n}{2}v_{\bar{y}^0}^n+\frac{v_{ij}^n-|v_{ij}^n|}{2}v_{y^0}^n\}$$

11.7. Полунеявная схема решения трехмерных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости

Для трехмерных уравнений, предложенных в [28], [29] для моделирования низкоскоростных (ламинарных при *k=1*, закон трения *Ньютона*) и высокоскоростных (турбулентных *k=3,k=5,k=7,k=9,* степенные законы трения *Джакупова*) течений несжимаемой жидкости

$$\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=\rho F_x+\frac{\partial}{\partial x}(\mu_k\frac{\partial u^k}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu_k\frac{\partial u^k}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu_k\frac{\partial u^k}{\partial z}),$$

$$\rho\frac{dv}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}=\rho F_y+\frac{\partial}{\partial x}(\mu_k\frac{\partial v^k}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu_k\frac{\partial v^k}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu_k\frac{\partial v^k}{\partial z}),$$

$$\rho\frac{dw}{dt}+\frac{\partial p}{\partial z}=\rho F_z+\frac{\partial}{\partial x}(\mu_k\frac{\partial w^k}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu_k\frac{\partial w^k}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu_k\frac{\partial w^k}{\partial z}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z},$$

при предельных условиях

$$u|_{t=0}=d_u(x,y,z), v|_{t=0}=d_v(x,y,z), w|_{t=0}=\varphi_w(x,y,z),$$

$$u|_S=\varphi_u(x,y,z,t), v|_S=\varphi_v(x,y,z,t), w|_S=\varphi_w(x,y,z,t)$$

легко обобщаются приведенные выше схемы и методы глобальных итераций**.** По аналогии с направлениями *x,y* вводятся узлы по оси *z:*

$$z_m, m = 0,1,...N_z, h_{zm} = z_m - z_{m-1}, m = 1,..., N_z,\ f(x_i, y_j, z_m, t_n) \equiv f_{ijm}^n,$$
$$\overline{\Omega}_h = \{x_i, i = 0,1,..., N_x, y_j, j = 0,1,..., N_y, z_m, m = 0,1,...N_z\},$$
$$\Omega_h = \{x_i, i = 1,..., N_x - 1, y_j, j = 1,..., N_y - 1, z_m, m = 1,...N_z - 1\}.$$

Конвективные члены в общем случае пусть будут аппроксимированы по универсальной формуле типа (73), т.е. без «аппроксимационной вязкости» и в качестве образца выбирается двумерная схема (56)-(57).

Вводится краткое обозначение коэффициента при p_{ijm}^{n+1} в схеме с центральными разностями для градиента давления и уравнения неразрывности:

$$A_{ijm} = \tau_{n+1}\{\frac{1}{h_{xi+1} + h_{xi}}[\frac{1}{h_{xi+2} + h_{xi+1}}\frac{1 - sign(i - N_x + 1.5)}{2} + \frac{1}{h_{xi} + h_{xi-1}}\frac{1 + sign(i - 1.5)}{2}] +$$
$$+ \frac{1}{h_{yj+1} + h_{yj}}[\frac{1}{h_{yj+2} + h_{yj+1}}\frac{1 - sign(j - N_y + 1.5)}{2} + \frac{1}{h_{yj} + h_{yj-1}}\frac{1 + sign(j - 1.5)}{2}] +$$
$$+ \frac{1}{h_{zm+1} + h_{zm}}[\frac{1}{h_{zm+2} + h_{zm+1}}\frac{1 - sign(m - N_z + 1.5)}{2} + \frac{1}{h_{zm} + h_{zm-1}}\frac{1 + sign(m - 1.5)}{2}]\},$$
$$i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_z - 1;$$

$$A_{N_x jm} = \tau_{n+1}\frac{1}{h_{xN_x}(h_{xN_x} + h_{xN_x-1})},\ A_{0jm} = \tau_{n+1}\frac{1}{h_{x1}(h_{x2} + h_{x1})},\ j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_z - 1;$$

$$A_{iN_y m} = \tau_{n+1}\frac{1}{h_{yN_y}(h_{yN_y} + h_{yN_y-1})},\ A_{i0m} = \tau_{n+1}\frac{1}{h_{y1}(h_{y2} + h_{y1})}, i = 1,..., N_x - 1, m = 1,..., N_z - 1,$$

$$A_{ijN_z} = \tau_{n+1}\frac{1}{h_{zN_z}(h_{zN_z} + h_{zN_z-1})},\ A_{ij0} = \tau_{n+1}\frac{1}{h_{z1}(h_{z2} + h_{z1})}, i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1$$

Глобальный итерационный процесс вычисления давления

$$u_{ijm}^{n+1^S} = F_{uijm}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{i+1jm}^s - p_{i-1jm}^s}{h_{xi+1} + h_{xi}}, \quad (74)$$

$$v_{ijm}^{n+1^S} = F_{vijm}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ij+1m}^s - p_{ij-1m}^s}{h_{yj+1} + h_{yj}}, \quad (75)$$

$$w_{ijm}^{n+1^S} = F_{wijm}^n - \tau_{n+1}\frac{p_{ijm+1}^s - p_{ijm-1}^s}{h_{zm+1} + h_{zm}}, \quad (76)$$

$$i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_z - 1;$$

$$(1 + A_{ijm}\theta)\frac{p_{ijm}^{s+1} - p_{ijm}^s}{\theta} + \frac{u_{i+1jm}^{n+1^S} - u_{i-1jm}^{n+1^S}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{v_{ij+1m}^{n+1^S} - v_{ij-1m}^{n+1^S}}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{w_{ijm+1}^{n+1^S} - w_{ijm-1}^{n+1^S}}{h_{zm+1} + h_{zm}} = 0,$$
$$i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_z - 1;$$

$$(1+A_{N_x jm}\theta)\frac{p^{s+1}_{N_x jm}-p^{s}_{N_x jm}}{\theta}+\frac{\varphi^{n+1}_{uN_x jm}-u^{n+1^S}_{N_x-1\,jm}}{h_{xN_x}}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{N_x jm}+(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z})^{n+1}_{N_x jm}=0,$$

$$(1+A_{0\,jm}\theta)\frac{p^{s+1}_{0\,jm}-p^{s}_{0\,jm}}{\theta}+\frac{u^{n+1^S}_{1\,jm}-\varphi^{n+1}_{u0\,jm}}{h_{x1}}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{0\,jm}+(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z})^{n+1}_{0\,jm}=0,$$

$$1\le j\le N_y-1,1\le m\le N_z-1;$$

$$(1+A_{iN_y m}\theta)\frac{p^{s+1}_{iN_y m}-p^{s}_{iN_y m}}{\theta}+\frac{\varphi^{n+1}_{viN_y m}-v^{n+1^S}_{iN_y-1m}}{h_{yN_y}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{iN_y m}+(\frac{\partial\varphi_w}{\partial z})^{n+1}_{iN_y m}=0,$$

$$(1+A_{i0m}\theta)\frac{p^{s+1}_{i0m}-p^{s}_{i0m}}{\theta}+\frac{v^{n+1^S}_{i1m}-\varphi^{n+1}_{vi0m}}{h_{y1}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{i0m}+(\frac{\partial\varphi_w}{\partial z})^{n+1}_{i0m}=0,$$

$$1\le i\le N_x-1,1\le m\le N_z-1;$$

$$(1+A_{ijN_z}\theta)\frac{p^{s+1}_{ijN_z}-p^{s}_{ijN_z}}{\theta}+\frac{\varphi^{n+1}_{wijN_z}-w^{n+1^S}_{ijN_z-1}}{h_{zN_z}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{ijN_z}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{ijN_z}=0,$$

$$(1+A_{ij0}\theta)\frac{p^{s+1}_{ij0}-p^{s}_{ij0}}{\theta}+\frac{w^{n+1^S}_{ij1}-\varphi^{n+1}_{wij0}}{h_{z1}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{ij0}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{ij0}=0,$$

$$1\le i\le N_x-1,1\le j\le N_y-1$$

Глобальные итерации нахождения давления по методу минимальных невязок Красносельского – Крейна

По уравнениям (74) - (75) - (76) вычисляются 3 компоненты $u^{n+1^S}_{ijm}, v^{n+1^S}_{ijm}, w^{n+1^S}_{ijm}$, после чего невязки s-итерации:

$$R^s_{ijm}=\frac{u^{n+1^S}_{i+1\,jm}-u^{n+1^S}_{i-1\,jm}}{h_{xi+1}+h_{xi}}+\frac{v^{n+1^S}_{ij+1m}-v^{n+1^S}_{ij-1m}}{h_{yj+1}+h_{yj}}+\frac{w^{n+1^S}_{ijm+1}-w^{n+1^S}_{ijm-1}}{h_{zm+1}+h_{zm}},\ i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,m=1,...,N_z-1;$$

$$R^s_{N_x jm}=\frac{\varphi^{n+1}_{uN_x jm}-u^{n+1^S}_{N_x-1\,jm}}{h_{xN_x}}+\ (\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{N_x jm}+(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z})^{n+1}_{N_x jm},$$

$$R^s_{0\,jm}=\frac{u^{n+1^S}_{1\,jm}-\varphi^{n+1}_{u0\,jm}}{h_{x1}}+(\frac{\partial\varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{0\,jm}+(\frac{\partial\varphi_z}{\partial z})^{n+1}_{0\,jm},1\le j\le N_y-1,1\le m\le N_z-1;$$

$$R^s_{iN_y m}=\frac{\varphi^{n+1}_{viN_y m}-v^{n+1^S}_{iN_y-1m}}{h_{yN_y}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{iN_y m}+(\frac{\partial\varphi_w}{\partial z})^{n+1}_{iN_y m}=0,$$

$$R^s_{i0m}=\frac{v^{n+1^S}_{i1m}-\varphi^{n+1}_{vi0m}}{h_{y1}}+(\frac{\partial\varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{i0m}+(\frac{\partial\varphi_w}{\partial z})^{n+1}_{i0m}=0,1\le i\le N_x-1,1\le m\le N_z-1;$$

$$R^s_{ijN_z} = \frac{\varphi^{n+1}_{wijN_z} - w^{n+1^S}_{ijN_z-1}}{h_{zN_z}} + (\frac{\partial \varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{ijN_z} + (\frac{\partial \varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{ijN_z},$$

$$R^s_{ij0} = \frac{w^{n+1^S}_{ij1} - \varphi^{n+1}_{wij0}}{h_{z1}} + (\frac{\partial \varphi_u}{\partial x})^{n+1}_{ij0} + (\frac{\partial \varphi_v}{\partial y})^{n+1}_{ij0}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1$$

Благодаря специфике задачи вычисляются соответственно

$$R^s_{uijm} = -\tau_{n+1} \frac{R^s_{i+1jm} - R^s_{i-1jm}}{h_{xi+1} + h_{xi}},\ R^s_{vijm} = -\tau_{n+1} \frac{R^s_{ij+1m} - R^s_{ij-1m}}{h_{yj+1} + h_{yj}},\ R^s_{wijm} = -\tau_{n+1} \frac{R^s_{ijm+1} - R^s_{ijm-1}}{h_{zm+1} + h_{zm}},$$

$$i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_z - 1;$$

после чего определяются

$$AR^s_{ijm} = \frac{R^s_{ui+1jm} - R^s_{ui-1jm}}{h_{xi+1} + h_{xi}} + \frac{R^s_{vij+1m} - R^s_{vij-1m}}{h_{yj+1} + h_{yj}} + \frac{R^s_{wijm+1} - R^s_{vijm-1}}{h_{zm+1} + h_{zm}},$$

$$i = 1,..., N_x - 1,\ j = 1,..., N_y - 1, m = 1,..., N_z - 1;$$

$$AR^s_{N_x jm} = \frac{-R^s_{uN_x-1jm}}{h_{xN_x}}, AR^s_{0jm} = \frac{R^s_{u1jm}}{h_{x1}}, 1 \le j \le N_y - 1, 1 \le m \le N_m - 1;$$

$$AR^s_{i0m} = \frac{R^s_{vi1m}}{h_{y1}}, AR^s_{iN_y m} = \frac{-R^s_{viN_y-1m}}{h_{yN_y}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le m \le N_m - 1,$$

$$AR^s_{ij0} = \frac{R^s_{wij1}}{h_{z1}}, AR^s_{ijN_z} = \frac{-R^s_{wijN_z-1}}{h_{zN_z}}, 1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1$$

Вычисляется параметр итерации

$$\theta_s = -(\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}\sum_{m=0}^{N_z} AR^s_{ijm} \cdot R^s_{ijm}) / \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}\sum_{m=0}^{N_z} (AR^s_{ijm})^2,$$

и далее

$$p^{s+1}_{ijm} = p^s_{ijm} + \theta_s R^s_{ijm}, i = 0,..., N_x, j = 0,..., N_y, k = 0,..., N_z$$

Итерации прекращаются при выполнении неравенств

$$| R^{s^*}_{ijm} | \le \varepsilon, i = 0,..., N_x, j = 0,..., N_y, m = 0,..., N_z$$

Последние приближения $p^{s^*}_{ijm}, u^{n+1^{s^*}}_{ijm}, v^{n+1^{s^*}}_{ijm}, w^{n+1^{s^*}}_{ijm}$ принимаются в качестве решений $p^{s^*}_{ijm} \approx p^{n+1}_{ijm}, u^{n+1^{s^*}}_{ijm} \approx u^{n+1}_{ijm}, v^{n+1^{s^*}}_{ijm} \approx v^{n+1}_{ijm}, w^{n+1^{s^*}}_{ijm} \approx w^{n+1}_{ijm}$.

Разностные аппроксимации выражений

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_k \frac{\partial u^k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_k \frac{\partial u^k}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu_k \frac{\partial u^k}{\partial z}), \frac{\partial}{\partial x}(\mu_k \frac{\partial v^k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_k \frac{\partial v^k}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu_k \frac{\partial v^k}{\partial z}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_k \frac{\partial w^k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_k \frac{\partial w^k}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu_k \frac{\partial w^k}{\partial z})$$

включаются соответствующим образом в $F^n_{uijm}, F^n_{vijm}, F^n_{wijm}$, и аппроксимируются по каноническим формулам $\Phi = u^k, \Phi = v^k, \Phi = w^k, \lambda = \mu_k$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^n_{ijm} = \frac{2}{h_{xi+1}+h_{xi}}\left[\frac{(\lambda^n_{i+1jm}+\lambda^n_{ijm})(\Phi^n_{i+1jm}-\Phi^n_{ijm})}{2h_{xi+1}} - \frac{(\lambda^n_{ijm}+\lambda^n_{i-1jm})(\Phi^n_{ijm}-\Phi^n_{i-1jm}}{2h_{xi}}\right] + O(h_{xi+1}-h_{xi}) + O(\hbar^2_{xi}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]^n_{ijm} = \frac{2}{h_{yj+1}+h_{yj}}\left[\frac{(\lambda^n_{ij+1m}+\lambda^n_{ijm})(\Phi^n_{ij+1m}-\Phi^n_{ijm})}{2h_{yj+1}} - \frac{(\lambda^n_{ijm}+\lambda^n_{ij-1m})(\Phi^n_{ijm}-\Phi^n_{ij-1m})}{2h_{yj}}\right] + O(h_{yj+1}-h_{yj}) + O(\hbar^2_{yj}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right]^n_{ijm} = \frac{2}{h_{zm+1}+h_{zm}}\left[\frac{(\lambda^n_{ijm+1}+\lambda^n_{ijm})(\Phi^n_{ijm+1}-\Phi^n_{ijm})}{2h_{zm+1}} - \frac{(\lambda^n_{ijm}+\lambda^n_{ijm-1})(\Phi^n_{ijm}-\Phi^n_{ijm-1})}{2h_{zm}}\right] + O(h_{zm+1}-h_{zm}) + O(\hbar^2_{zm})$$

Данные аппроксимации пригодны и для разрывных коэффициентов.

Примечание. Обобщение изложенных итерационных алгоритмов на трехмерные задачи в цилиндрических, сферческих и др. системах координат не вызывает особых затруднений и проводится аналогично вышеизложенным.

11.*8. Программа на TURBO-PASCAL*

Основные этапы программирования

1*. Описания массивов:

$u^n_{ij} \equiv UN[i,j], u^{n+1}_{ij} \equiv UN1[i,j],\ v^n_{ij} \equiv VN[i,j], v^{n+1}_{ij} \equiv VN1[i,j],$

$p^n_{ij} \equiv PN[i,j], p^{n+1}_{ij} \equiv PN1[i,j],\ p^k_{ij} \equiv PK[i,j], p^{k+1}_{ij} \equiv PK1[i,j],$

$h_{xi} \equiv HX[i], h_{yj} \equiv HY[j], A^n_{ij} \equiv AN[i,j].$

2*. Задание параметров сетки N_x, N_y, h_{xi}, $i=1,...,N_x$, h_{yj}, $j=1,...,N_y$, τ_{n+1} ,входящих в уравнения констант Re, k, b^0, L.

3*. Задание начальных условий (25) в цикле по i,j.

4*. Задание во внешнем (глобальном) цикле по времени

$t_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} \tau_{m+1}$ краевых условий (26),(27),(28),(29) и вычисление в цикле по i,j

$\overline{Q}^n_{uij}, \overline{Q}^n_{vij}, F^n_{uij}, F^n_{vij}$.

5*. Программирование итерационного алгоритма (71),(72), (73),(74),(75),(76),(77).

6*. Засылка насчитанных полей

$p^{\bar{k}+1}_{ij} = p^{n+1}_{ij}, u^{n+1\bar{k}}_{ij} = u^{n+1}_{ij}, v^{n+1\bar{k}}_{ij} = v^{n+1}_{ij}, \forall(i,j).$

Программа расчета методом глобальной итерации продольного обтекания пластины с выступом вязкой несжимаемой жидкостью

PROGRAM plastina;

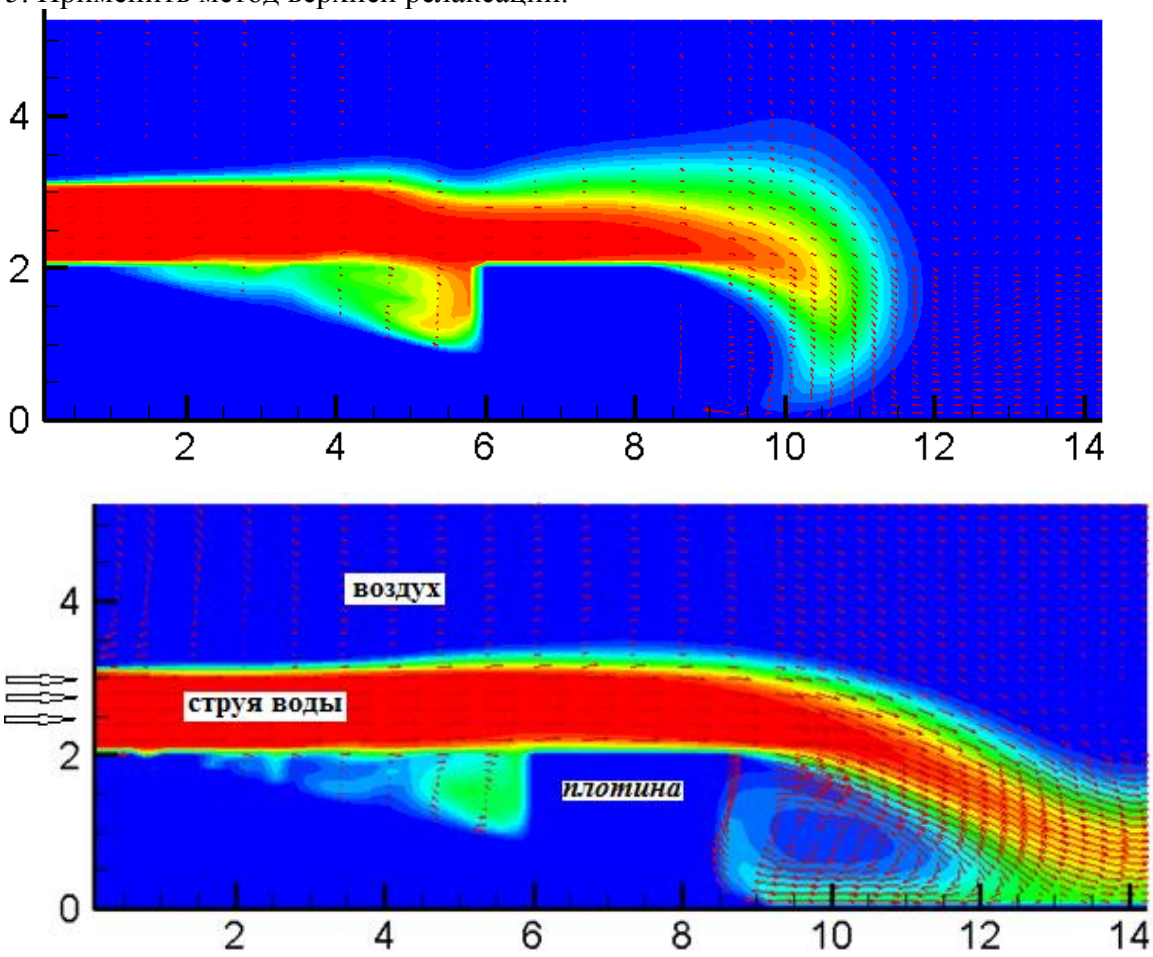
```
USES crt; CONST NX=160; NY=100;nx1=40;nx2=50;ny1=10;k=3; RE=1844;
LABEL met, metk,met2,met4,met6,mettt,METPSI,MMM,SSS,TTT ;
VAR      out1, out2, out3: text;
UN,UN1,UK,VN,VN1,VK,PK,PK1,PN,PN1,AN,FUN, FVN,PSI:  array[0..NX,0..NY]
of real;
HX: array[0..NX] of real; HY: array[0..NY] of real;
KJ,  i, j, KK, n, MK: integer; NN: real;
HK, AM,AX, EPSILON, T, QNUij, QNVij, TAY, S, TET,
 B0, HL, AMAX, UMAX, VMAX, PMAX, AU, AV, konu, konv, unn, aunn, vnn, avnn:
real;
begin
assign(out1,'ainur1.pas'); assign(out2,'ainur2.pas');
rewrite(out1); rewrite(out2);
          TET:=0.01;  B0:=0.1; HL:=0.05/NY; EPSILON:=0.05; NN:=1;
MK:=5;Writeln('hx[i] ');
for i:=1to NX do begin  HX[i]:=1./(NX-2*MK); Writeln('i= ', i, HX[i]:9:4);end;
Writeln('hy[j] ');
for j:=1 to NY do begin HY[j]:=HL/NY; Writeln('j= ', j, HY[j]:9:4);
end;
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do begin UN[i,j]:=0; VN[i,j]:=0;
PN[i,j]:=0;
UN1[i,j]:= UN[i,j]; VN1[i,j]:= VN[i,j]; PN1[i,j[:=0; UK[i,j]:=0; VK[i,j]:=0; PK[i,j[:=0;
PK1[i,j]:=0;
end;        TAY:= 0.0001;
n:=0; t:=0;met: n:=n+1; t:=(n+1)*TAY;
for j:=0 to NY do begin UN1[0,j]:=exp(-B0/t); VN1[0,j]:=0; UK[0,j]:= UN1[0,j];
VK[0,j]:=0; VN[0,j]:=0end;for i:=0 to NX do begin VN1[i,0]:=0; VK[i,0]:=0;end;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1do begin
if(i>=nx1.and.i=<nx2.and.j=<ny1) goto MMM;unn:= UN[i,j];
vnn:=VN[i,j];aunn:=ABS(unn); avnn:=ABS(vnn);
konu:= ( aunn+unn)/2*( unn- UN[i-1,j])/ HX[i]+(unn-aunn)/2*(UN[i+1,j]-
unn)/HX[i+1]
+(avnn+vnn)/2*(unn- UN[i,j-1])/ Hy[j]+(vnn-avnn)/2*( UN[i,j+1]-unn)/ Hy[j+1];
QNUij:=1/RE*(2/(HX[i+1]+HX[i])*((UN[i+1,j]**k-unn**k)/HX[i+1]-(unn**k- UN[i-
1,j]**k)/ HX[i])+2/(Hy[j+1]+Hy[j])*((UN[i,j+1]**k-unn**k)/Hy[j+1]-(unn**k-UN[i,j-
1]**k)/ Hy[j])) – konu;
konv:= ( aunn+unn)/2*( vnn-VN[i-1,j])/ HX[i]+(unn-aunn)/2*(VN[i+1,j]-
vnn)/HX[i+1]
+(avnn+vnn)/2*(vnn- VN[i,j-1])/ Hy[j]+(vnn-avnn)/2*( VN[i,j+1]-vnn)/ Hy[j+1];
QNVij:=1/RE*(2/(HX[i+1]+HX[i])*((VN[i+1,j]-vnn)/HX[i+1]-(vnn- VN[i-1,j])/
HX[i])+
2/(Hy[j+1]+Hy[j])*(( VN[i,j+1]-vnn)/Hy[j+1]-(vnn-VN[i,j-1])/ Hy[j]))-konv;
FUN[i,j]:=unn+TAY*QNUij;
FVN[i,j]:=vnn+TAY*QNVij;MMM:end;
if  n>1 then goto mettt;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1do begin AN[i,j]:=TAY/HX[i+1]*(1/HX[i]+(1-(i-
NX+1.5)/ABS(i-NX+1.5))/(2*HX(i+1))+
TAY/HY[j+1]*(1/HY[j]+(1-(j-NY+1.5)/ABS(j-NY+1.5))/(2*HY(j+1));end;
for i:=1 to NX-1 do begin AN[i, 0]:= TAY/HY[1]/ HY[1]; end;
for j:=1 to NY -1do begin AN[0,j]:=TAY/HX[1]/ HX[1]; end;mettt:
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do
begin PK[i,j[:=PN[i,j[; end;
```

```
KK:=0; metk:  KK:=KK+1
for j:=0 to NY do begin UK[0,j]:= UN1[0,j];  VK[0,j]:=0; end;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1do begin if(i>=nx1.and.i=<nx2.and.j=<ny1) goto
SSS;UK[i,j]:= FUN[i,j]-TAY*((PK[i+1,j]-PK[i,j])/HX[i+1]); VK[i,j]:= FVN[i,j]-
TAY*((PK[i,j+1]-PK[i,j])/HY[j+1]); SSS:end;
                                                    AMAX:=0;
for i:=1 to NX-1 do for j:=1 to NY -1do begin if(i>=nx1.and.i<nx2.and.j<ny1) goto
TTT;S:=(UK[i,j]- UK[i-1,j])/HX[i]+ (VK[i,j]- VK[i,j-1])/HY[j]; PK1[i,j]:= PK[i,j]-
TET*S/(1+TET*AN[i,j]);
if ABS(S)>AMAX then
                                    AMAX:=ABS(S); TTT:end;
for j:=1 to NY do begin
UK[NX,j]:=2* UK[NX-1,j]- UK[NX-2,j];
 VK[NX,j]:=2* VK[NX-1,j]- VK[NX-2,j];end;
for j:=0 to NY do begin   PK1[NX,j]:= PK1[NX-1,j];end;
 for i:=1 to NX do begin
if i<MK  then UK[I,0]:=(4* UK[I,1]- UK[I,2])/3) ;
 if i>(NX-MK)  then UK[I,0]:=(4* UK[I,1]- UK[I,2])/3) ;
UK[I,NY]:=(4* UK[I,NY-1]- UK[I,NY-2])/3;
VK[I,NY]:=(4* VK[I,NY-1]- VK[I,NY-2])/3;End;
For i:=0 to NX do begin
PK1[I,NY]:=2*PK1[I,NY-1]-PK1[I,NY-2];end;
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do begin
PK[i,j]:= PK1[i,j]; UN1[i,j]:= UK[i,j];VN1[i,j]:= VK[i,j]; end;

If  AMAX>EPSILON then goto metk;

UMAX:=0; PMAX:=0;
for i:=0 to NX do for j:=0 to NY do begin AU:=ABS(UN1[i,j]-UN[i,j]);
AV:=ABS(VN1[i,j]-VN[i,j]);

UMAX:= UMAX+AU+AV;
PN[i,j]:=PK1[i,j]; if  ABS(PK1[i,j])>PMAX then PMAX := ABS(PK1[i,j]);  UN[i,j]:=
UN1[i,j];VN[i,j]:= VN1[i,j]; end;
                                    UMAX:= UMAX/(NX*NY);

writeln (out2, 'номер слоя времени N=',N:9:0, ' AMAX=' , AMAX, 'KK=' , KK );

if  N<500  then goto met; if  N=1500  then goto met6;

met4:  NN:=NN+1;  {17 comment: Вывод  на печать через каждые  1000 слоев

времени} if  NN<>1000 then goto met2;

met6:  writeln (out1, 'номер слоя времени N=',N:9:0, ' AMAX=' , AMAX, 'KK=' ,

KK );writeln (out2, 'номер слоя времени N=',N:9:0, ' AMAX=' , AMAX, 'KK=' ,

KK );

writeln (' N= ', N:9:0);

writeln ( 'Невязка=' ,  UMAX, ' AMAX=' , AMAX, 'KK=' , KK );

writeln (out1, 'UN='); writeln (out2, 'PN=');
for KJ:=0 to NY do begin j:=NY-KJ; write (out1, 'j=' , j);
for i:=0 to NX do
                    write (out1, '   ', UN[i,j]:9:4);writeln (out1); end;
```

```
writeln (out1, '**********'); writeln (out1, 'VN=');
for KJ:=0 to NY do begin j:=NY-KJ; write (out1, 'j=' , j);
for i:=0 to NX do
                    write (out1, '  ', VN[i,j]:9:4);writeln (out1);end;

writeln (out2, 'PN=');
for KJ:=0 to NY do begin j:=NY-KJ; write (out2, 'j=' , j);
for i:=0 to NX do begin PK1[i,j]:= PK1[i,j]/PMAX;

write (out2, '  ', PK1[i,j]:9:4);writeln (out2);

end;end;  met2:  if  NN=1000 then  NN:=0;

if   UMAX>0.01 then goto met;

close (out1);

 close (out2);

end.
```

Вопросы

1. Чем отличается полуявная схема от неявной?
2. Написать схему без аппроксимационной вязкости типа (51), (52), (53).
3. Написать для схемы (51), (52), (53) систему разностных уравнений.
4. Для полученной системы написать итерационный алгоритм с параметром.
5. Применить метод верхней релаксации.

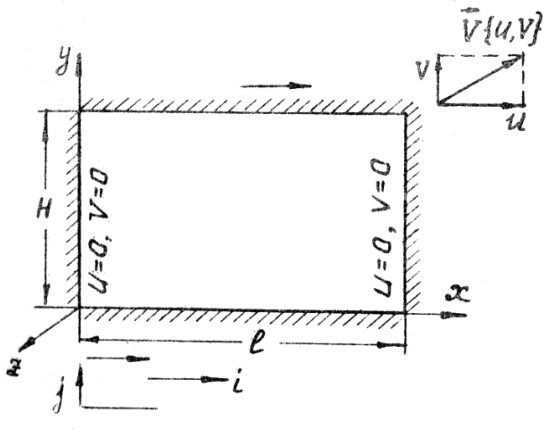


Обтекание струей воды (красный цвет) плотины

Глава 12. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВИХРЯ СКОРОСТИ И ФУНКЦИИ ТОКА

12.1. Постановка задачи

Имеется заполненная вязкой несжимаемой жидкостью прямоугольная каверна с основанием длиной l и высотой H, боковые грани которого непроницаемы и неподвижны, а твердые непроницаемые основания могут двигаться с различными скоростями в своих плоскостях:



Обозначаются: x, y - координаты частиц жидкости в выбранной системе координат, t – время, $p = p(x,y,t)$ – давление в точке x, y на момент времени t, $\vec{v} = u(x,y,t)\vec{i} + v(x,y,t)\vec{j}$ – вектор скорости, $u = u(x,y,t)$ -продольная, $v = v(x,y,t)$ – поперечная компоненты вектора скорости; ρ = const – плотность несжимаемой жидкости, μ – коэффициент динамической вязкости, $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

В международной системе единиц измерения указанные величины имеют следующие размерности:

$$[x] = м, [y] = м, [\vec{v}] = \frac{м}{сек}, [u] = \frac{м}{сек}, [v] = \frac{м}{сек}, [p] = \frac{н}{м^2}, [\rho] = \frac{кг}{м^3}, [\mu] = \frac{кг}{м \cdot сек}, [\nu] = \frac{м^2}{сек}.$$

Математической моделью низкоскоростных течений вязкой жидкости являются уравнения *Навье*, которые для данной задачи о течении в каверне применяются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Начальные условия для уравнений (1), (2), (3): в момент времени t=0 жидкость покоится, движение отсутствует $\vec{v}(x,y,0) = 0$, следовательно, равны нулю обе компоненты скорости

$$u(x,y,0) = 0, \quad (4)$$

$$v(x,y,0) = 0 \quad (5)$$

Граничные условия для уравнений (1), (2), (3): боковые стенки непроницаемы и неподвижны, имеет место прилипание к твердой поверхности, поэтому на боковых стенках скорости равны нулю:

$$u(0,y,t) = u(l,y,t) = 0, \quad (6)$$

$$v(0,y,t) = v(l,y,t) = 0 \quad (7)$$

Верхняя стенка движется в своей плоскости, в силу прилипания на ней частицы жидкости имеют скорость, равную скорости движения этой поверхности. Пусть эта стенка движется со скоростью, равной $u_1 e^{-a^2/t}$, где u_1 и $a^2 > 0$ некоторые постоянные.

Тогда в силу сказанного имеют место:

$$u(x,H,t) = u_1 e^{-a^2/t}, \quad (8)$$

условие непроницаемости

$$v(x,H,t) = 0 \quad (9)$$

Аналогично, если нижнее основание движется со скоростью $u_2 e^{-a^2/t}$, то

$$u(x,0,t) = u_2 e^{-a^2/t}, \quad u_2 = \text{const}, \quad (10)$$

а также условие непроницаемости

$$v(x,0,t) = 0 \quad (11)$$

Для численного решения задачи (1)–(11) совершается переход к уравнениям для безразмерных переменных.

Безразмерные переменные вводятся следующим образом. Выбираются характерные размеры: для длины, например, l, для скорости u_1, которую будет иметь при $t \to \infty$ верхняя стенка, для времени берется l/u_1, для давления ρu_1^2. Безразмерные величины обозначаются со штрихами: $x' = \frac{x}{l}$, $y' = \frac{y}{l}$, $u' = \frac{u}{u_1}$, $v' = \frac{v}{u_1}$, $p' = \frac{p}{\rho u_1^2}$, $t' = \frac{t}{l/u_1}$.

Используя правила дифференцирования, от уравнений (1)-(3) совершается переход к уравнениям в безразмерных переменных

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\nu}{u_1 l}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial y'} = \frac{\nu}{u_1 l}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \quad (15)$$

Начальные и граничные условия в безразмерных переменных

$$u'\big|_{t'=0} = 0; \; v'\big|_{t'=0} = 0; \quad (16)$$

$$u'(0,y',t') = u'(1,y',t') = 0, \quad (17)$$

$$v'(0,y',t') = v'(1,y',t') = 0, \quad (18)$$

$$u'(x',H/l,t') = e^{-b^2/t'}, b^2 = au_1/l, \quad (19)$$

$$v'(x',H/l,t') = 0, \quad (20)$$

$$u'(x',0,t') = u_2 / u_1 e^{-b^2/t}, \quad (21)$$

$$v'(x',0,t') = 0 \quad (22)$$

Безразмерное число *Рейнольдса* равно $\mathrm{Re} = u_1 l / \nu$. Вводится функция тока $\psi' = \psi'(x',y',t')$ соотношениями

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}, v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (23)$$

В силу (23) уравнение неразрывности (15) интегрируется точно. Из (13), (14) исключается давление p'. Получается в результате

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) + u' \cdot \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) + v' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) == \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2} + \frac{\partial \omega'}{\partial y'^2}\right]. \quad (24)$$

Через вихрь скорости

$$\omega' = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \quad (25)$$

уравнение (24) записывается в форме *Гельмгольца:*

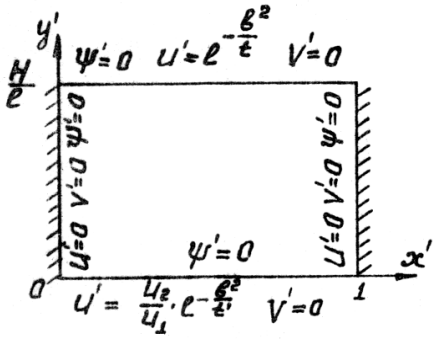
$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial y'} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y'^2}\right) \quad (26)$$

Начальные и граничные условия для ψ' и ω выводятся из условий (4)–(11). Из-за наличия в системе (25), (26) только пространственных производных от ψ', функция тока определяется с точностью до произвольной функции от времени t', которой распоряжаются следующим образом.

Фиксируется произвольное значение ψ' в какой-либо точке области течения. Например, полагается для любого момента времени t' значение ψ' в точке $x = 0$, $y = 0$ равным нулю $\psi'(0,0,t') = 0$.

Учитывая, что из условий (20), (22) на горизонтальных стенках $v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = 0$, а из условий (17) на вертикальных стенках $u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 0$, проинтегрировав соответствующим образом найдем, что на всех четырех стенках $\psi' = 0$, что будет первым граничным условием для ψ'.

Второе граничное условие получается из условий (18), (19), (21).



Поэтому из (18) вытекают два граничных условия

$$\frac{\partial \psi'(0, y', t)}{\partial x'} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \psi'(1, y', t')}{\partial x'} = 0, \quad (28)$$

а из (19), (21) получаются условия на движущихся плоскостях

$$\frac{\partial\psi'(x',0,t')}{\partial y'}=\frac{u_2}{u_1}\cdot e^{-b^2/t'}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\psi'(x',\frac{H}{l},t')}{\partial y'}=e^{-b^2/t'}, \tag{30}$$

Начальное условие для ω′ получается из начальных условий (16)

$$\omega'\big|_{t'=0}=\frac{\partial v'}{\partial x'}\big|_{t'=0}-\frac{\partial u'}{\partial y'}\big|_{t'=0}=0$$

Отсюда из (25) с учетом нулевого краевого условия $\psi' = 0$ получаются нулевые начальные условия для обеих функций

$$\omega'\big|_{t'=0}=0;\qquad \psi'\big|_{t'=0}=0 \tag{31}$$

Кроме этих условий, на стенках в качестве краевого условия для вихря скорости привлекается уравнение (25), что вполне логично. Численное решение задачи (25)–(31) возможно разностными методами, теория которых изложена в [3].

12.2. Явная разностная схема

Область $\{0\le x'\le 1,\ 0\le y'\le H/l\}$ разбивается на сетку точками $x'_i=ih_1$, N_1 – число отрезков $h_1=\frac{1}{N_1}$, на которые делится промежуток [0, 1], точками $y' = jh_2$, N_2 – число отрезков $h_2=\frac{H/l}{N_2},$, на которые делится промежуток $[0,H/l]$. Целочисленные индексы i, j соответствуют номерам узлов $i = 0,1,2,\ldots,N_1$; $j = 0,1,2,\ldots,N_2$. Сетка по времени образуется с шагом $\tau>0, t_n=n\tau, n=0,1,\ldots$.

Обозначаются: $\psi'(x'_j,y'_i,t'_n)=\psi'^n_{ij}$, $\omega'(x'_j,y'_i,t'_n)=\omega'^n_{ij}$.

Явная конечно-разностная схема *Джакупова К.Б.* [20] для решения уравнений (25)–(26) имеет вид:

$$u'^{n+1}_{ij}=\frac{\psi'^{n+1}_{ij+1}-\psi'^{n+1}_{ij-1}}{2h_2}, v'^{n+1}_{ij}=-\frac{\psi'^{n+1}_{i+1j}-\psi'^{n+1}_{i-1j}}{2h_1},$$

$$\frac{\omega'^{n+1}_{ij}-\omega'^{n}_{ij}}{\tau}+\frac{|u'^{n+1}_{ij}|+u'^{n+1}_{ij}}{2}\cdot\frac{\omega'^{n}_{ij}-\omega'^{n}_{i-1j}}{h_1}+\frac{u'^{n+1}_{ij}-|u'^{n+1}_{ij}|}{2}\cdot\frac{\omega'^{n}_{i+1j}-\omega'^{n}_{ij}}{h_1}+$$

$$+\frac{|v'^{n+1}_{ij}|+v'^{n+1}_{ij}}{2}\cdot\frac{\omega'^{n}_{ij}-\omega'^{n}_{ij-1}}{h_2}+\frac{v'^{n+1}_{ij}-|v'^{n+1}_{ij}|}{2}\cdot\frac{\omega'^{n}_{ij+1}-\omega'^{n}_{ij}}{h_2}= \tag{32}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{|v^{n+1}_{ij}|h_y}{2}}{1+\mathrm{Re}(\frac{|u^{n+1}_{ij}|h_x}{2}+\frac{|v^{n+1}_{ij}|h_y}{2})}\frac{\omega'^{n}_{i+1j}-2\omega'^{n}_{ij}+\omega'^{n}_{i-1j}}{h_1^2}+\frac{\frac{1}{\mathrm{Re}}+\frac{|u^{n+1}_{ij}|h_x}{2}}{1+\mathrm{Re}(\frac{|u^{n+1}_{ij}|h_x}{2}+\frac{|v^{n+1}_{ij}|h_y}{2})}\frac{\omega'^{n}_{ij+1}-2\omega'^{n}_{ij}+\omega'^{n}_{ij-1}}{h_2^2},$$

$$1\le i\le N_1\text{-}1,\ 1\le j\le N_2\text{-}1$$

При $n=0$ значения $\psi'^{0}_{i,j}$, $\omega'^{0}_{i,j}, \omega'^{-1}_{i,j}$ для всех $0 \le i \le N_1, 0 \le j \le N_2$ известны из (31) и равны 0.

По формулам 2-го порядка точности насчитываются значения $\omega'^{n+1}_{i,j}$ на стенках:

$$\omega'^{n+1}_{0j} = \frac{-3v'^{n+1}_{0j} + 4v'^{n+1}_{1j} - v'^{n+1}_{2j}}{2h_1}, \quad \text{где} \quad v'^{n+1}_{ij} = -\frac{\psi'^{n+1}_{i+1j} - \psi'^{n+1}_{i-1j}}{2h_1}, i=1, i=2, 0 \le j \le N_2; \qquad (33)$$

$$\omega'^{n+1}_{N_1 j} = \frac{3v'^{n+1}_{N_1 j} - 4v'^{n+1}_{N_1-1 j} + v'^{n+1}_{N_1-2 j}}{2h_1}, \quad \text{где} \quad v'^{n+1}_{ij} = -\frac{\psi'^{n+1}_{i+1j} - \psi'^{n+1}_{i-1j}}{2h_1}, i=N_1-1, i=N_1-2, 0 \le j \le N_2; \qquad (34)$$

$$\omega'^{n+1}_{i0} = -\frac{-3u'^{n+1}_{i0} + 4u'^{n+1}_{i1} - u'^{n+1}_{i2}}{2h_2}, \quad \text{где} \quad u'^{n+1}_{ij} = \frac{\psi'^{n+1}_{ij+1} - \psi'^{n+1}_{ij-1}}{2h_2}, j=1, j=2, 0 < i < N_1; \qquad (35)$$

$$\omega'^{n+1}_{iN_2} = -\frac{3u'^{n+1}_{iN_2} - 4u'^{n+1}_{iN_2-1} + u'^{n+1}_{iN_2-2}}{2h_2}, \quad \text{где} \quad u'^{n+1}_{ij} = \frac{\psi'^{n+1}_{ij+1} - \psi'^{n+1}_{ij-1}}{2h_2}, j=N_2-1, i=N_2-2, 0 < i < N_1, \qquad (36)$$

$$u'^{n+1}_{i0} = \frac{u_2}{u_1} e^{-\frac{b^2}{(n+1)\tau}}, u'^{n+1}_{iN_2} = e^{-\frac{b^2}{(n+1)\tau}}, 0 \le i \le N_1$$

Можно воспользоваться формулами *Кусковой:*

$$\omega'^{n+1}_{0j} = -\frac{8\psi'^{n+1}_{1j} - \psi'^{n+1}_{2j}}{2h_1^2}, \quad 0 \le j \le N_2, \quad \omega'^{n+1}_{N_1 j} = -\frac{8\psi'^{n+1}_{N_1-1 j} - \psi'^{n+1}_{N_1-2 j}}{2h_1^2}, \quad 0 \le j \le N_2,$$

$$\omega'^{n+1}_{i0} = -\frac{8\psi'^{n+1}_{i1} - \psi'^{n+1}_{i2} - 6h_2 \frac{u_2}{u_1} e^{-\frac{b^2}{(n+1)\tau}}}{2h_2^2}, \quad \omega'^{n+1}_{iN_2} = -\frac{8\psi'^{n+1}_{iN_2-1} - \psi'^{n+1}_{iN_2-2} + 6h_2 e^{-\frac{b^2}{(n+1)\tau}}}{2h_2^2}, 0 \le i \le N_1$$

Для реализации (32)-(36) предварительно решается относительно ψ'^{n+1} разностный аналог уравнения (25) :

$$\frac{\psi'^{n+1}_{i+1j} - 2\psi'^{n+1}_{ij} + \psi'^{n+1}_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{\psi'^{n+1}_{ij+1} - 2\psi'^{n+1}_{ij} + \psi'^{n+1}_{ij-1}}{h_2^2} = -2\omega'^{n}_{ij} + \omega'^{n-1}_{ij}, 1 < i < N_1 - 1, 1 < j < N_2 - 1 \qquad (37)$$

На стенках $\psi' = 0$, что записывается в граничных узлах в виде

$$\psi'^{n+1}_{0j} = \psi'^{n+1}_{N_1 j} = 0, \qquad 0 \le j \le N_2; \qquad (38)$$

$$\psi'^{n+1}_{i0} = \psi'^{n+1}_{iN_2} = 0, \qquad 0 \le i \le N_1 \qquad (39)$$

Уравнения (37) при условиях (38), (39) можно решать каким-либо итерационным методом. Ради удобства обозначается ψ'^{n+1}_{ij} через $\overline{\psi}_{ij}$.

Применяется параметрический процесс:

$$\frac{\overline{\psi}^{k+1}_{ij} - \overline{\psi}^{k}_{ij}}{\theta} = \frac{\overline{\psi}^{k}_{i+1j} - 2\overline{\psi}^{k+1}_{ij} + \overline{\psi}^{k+1}_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{\overline{\psi}^{k}_{i+1j} - 2\overline{\psi}^{k+1}_{ij} + \overline{\psi}^{k+1}_{ij-1}}{h_2^2} + 2\omega'^{n}_{ij} - \omega'^{n-1}_{ij}, \qquad (40)$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \quad 1 \le j \le N_2 - 1.$$

На стенках $\overline{\psi}^{k+1} = 0$, $\theta > 0$ – итерационный параметр. Из (40) вытекает

$$\overline{\psi}^{k+1}_{ij} = \frac{\frac{\overline{\psi}^{k}_{ij}}{\theta} + \frac{\overline{\psi}^{k}_{i+1} + \overline{\psi}^{k+1}_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{\overline{\psi}^{k}_{ij+1} + \overline{\psi}^{k+1}_{ij-1}}{h_2^2} + 2\omega'^{n}_{ij} - \omega'^{n-1}_{ij}}{(\frac{1}{\theta} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2})}, 1 \le i \le N_1 - 1, 1 \le j \le N_2 - 1, \qquad (41)$$

Итерации прекращаются при выполнении условия для невязки

$$\max_{i,j} \left| \frac{\overline{\psi}_{i+1}^{k+1} - 2\overline{\psi}_{ij}^{k+1} + \overline{\psi}_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{\overline{\psi}_{ij+1}^{k+1} - 2\overline{\psi}_{ij}^{k+1} + \overline{\psi}_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + 2\omega_{ij}'^{n} - \omega_{ij}'^{n-1} \right| \le \varepsilon \qquad (42)$$

Последние итерации $\overline{\psi}_{ij}^{k+1}$ принимаются за значения $\psi_{ij}'^{n+1}$. Для следующего шага по времени весь процесс вычислений повторяется, начиная с (32), кончая (41).

Для получения физической картины течения вязкой жидкости в зазоре в сеточной области нужно построить изолинии функции тока, вихря скорости.

12.3. Схема альтернативных направлений. Итерационный алгоритм

Определив функцию тока $\psi_{ij}'^{n+1}$ по алгоритму (41) легко организовать схему переменных направлений *специфического вида:*

$$\frac{\omega'^{n+\frac{1}{2}} - \omega'^{n}}{0.5\tau} = \Lambda_1^{n+1}\omega'^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+1}\omega'^{n}, x \in \Omega_h, \qquad (43)$$

$$\frac{\omega'^{n+1} - \omega'^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1^{n+1}\omega'^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2^{n+1}\omega'^{n+1}, x \in \Omega_h, \qquad (44)$$

откуда получается после исключения $\Lambda_1^{n+1}\omega'^{n+\frac{1}{2}}$ выражение

$$\omega'^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\omega'^{n} + \omega'^{n+1}}{2} + \frac{\tau}{4}\Lambda_2^{n+1}(\omega'^{n} - \omega'^{n+1}), x \in \Omega_h,$$

что позволяет поставить граничные условия по *Дьяконову*

$$\omega'^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{S_h\left(\substack{x=0\\x=a_1}\right)} = \frac{\omega'^{n} + \omega'^{n+1}}{2}\Big|_{S_h\left(\substack{x=0\\x=a_1}\right)} + \frac{\tau}{4}\Lambda_2^{n+1}(\omega'^{n} - \omega'^{n+1})\Big|_{S_h\left(\substack{x=0\\x=a_1}\right)}$$

Примечание. При стационарных краевых условиях схема (43), (44) может служить в качестве итерационного алгоритма для нахождения решения стационарных уравнений *Гельмгольца.*

Вопросы

1. Для аппроксимации конвективных членов применить схему без «аппроксимационной вязкости» .
2. Применить метод минимальных невязок для вычисления $\overline{\psi}_{ij}^{k+1}$.
3. Конвективные члены аппроксимировать направленными разностями *Булеева-Петрищева.*
4. Применить метод последовательной верхней релаксации для вычисления $\overline{\psi}_{ij}^{k+1}$.
5. Написать условие устойчивости явной схемы для аппроксимации *Булеева-Петрищева.*

Глава 13. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

13.1. Разностная схема модели *Форцгеймера*

В уравнениях «закона *Дарси*» теории фильтрации

$$k\vec{v} = -gradp + \rho\vec{F}\ ,\ div\vec{v} = 0$$

есть силы $-gradp + \rho\vec{F}$, но нет вызванных этими силами *ускорений* $\frac{d\vec{v}}{dt}$ частиц, что противоречит 2-му закону *Ньютона*, поэтому уравнения «закона *Дарси*» не могут служить моделью динамики фильтруемой жидкости (*см.Джакупов К.Б.* [17]).

Модель *Форцгеймера* [24] , в отличие от «закона *Дарси*», содержит локальное ускорение $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ и имеет вид

$$\rho_f \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\varphi[\nabla(p+\rho_f gz) + \rho_f \frac{\nu}{K}\vec{v} + \rho_f c_f K^{-\frac{1}{2}} |\vec{v}|\vec{v}],\ div\vec{v} = 0$$

Здесь φ коэффициент пористости среды, K – коэффициент проницаемости, ρ_f плотность жидкости, c_f безразмерный коэффициент трения *Форцгеймера*. Учтена также вязкость жидкости, поскольку входит коэффициент кинематической вязкости ν.

Численные решения данных уравнений при соответствующих физической постановке задачи начальных и граничных условиях могут быть получены по схемам, технология построения которых приведена в глава 11.

Напишем уравнения *Форцгеймера* в проекциях

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial x} + \varphi[\frac{\nu}{K}u + c_f K^{-\frac{1}{2}}(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}u],\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial y} + \varphi[\frac{\nu}{K}v + c_f K^{-\frac{1}{2}}(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}v],\\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial z} + \varphi[\frac{\nu}{K}w + c_f K^{-\frac{1}{2}}(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}w - g],\\
\frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

Вводится равномерная сетка

$$\Omega_h = \{(x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_m = mh_z), i = 1,...,N_x - 1;\ j = 1,...,N_y - 1; m = 1,...,N_z - 1\},$$

с граничными узлами

$$S_h = \{i = 0, i = N_x, j = \overline{0,N_y}, m = \overline{0,N_z};\ j = 0, j = N_y, i = \overline{0,N_x}, m = \overline{0,N_z}; m = 0, m = N_z, j = \overline{0,N_y}, i = \overline{0,N_x}\},$$

Начальные условия задаются на сетке Ω_h:

$$u^0_{ijm} = d_{0ijm}, v^0_{ijm} = \hat{d}_{0ijm}, w^0_{ijm} = \hat{\hat{d}}_{0ijm},\ i = \overline{1,N_x - 1}, j = \overline{1,N_y - 1}, m = \overline{1,N_z - 1}$$

Допустим, что на сетке S_h имеют место граничные условия для скоростей типа следущих:

$$x=0, u_{0jm}^{n+1}=\varphi_{0jm}^{n+1}, v_{0jm}^{n+1}=\hat{\varphi}_{0jm}^{n+1}, w_{0jm}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{0jm}^{n+1},$$

$$x=a_1, u_{N_x jm}^{n+1}=\varphi_{N_x jm}^{n+1}, v_{N_x jm}^{n+1}=\hat{\varphi}_{N_x jm}^{n+1}, w_{N_x jm}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{N_x jm}^{n+1},$$

$$j=\overline{0, N_y}, m=\overline{0, N_z},$$

$$y=0, u_{i0m}^{n+1}=\varphi_{i0m}^{n+1}, v_{i0m}^{n+1}=\hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}, w_{i0m}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{i0m}^{n+1},$$

$$y=a_2, u_{iN_y m}^{n+1}=\varphi_{iN_y m}^{n+1}, v_{iN_y m}^{n+1}=\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}, w_{iN_y m}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{iN_y m}^{n+1},$$

$$i=\overline{0, N_x}, m=\overline{0, N_z},$$

$$z=0, u_{ij0}^{n+1}=\varphi_{ij0}^{n+1}, v_{ij0}^{n+1}=\hat{\varphi}_{ij0}^{n+1}, w_{ij0}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{ij0}^{n+1},$$

$$z=a_3, u_{ijN_z}^{n+1}=\varphi_{ijN_z}^{n+1}, v_{ijN_z}^{n+1}=\hat{\varphi}_{ijN_z}^{n+1}, w_{ijN_z}^{n+1}=\hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1},$$

$$i=\overline{0, N_x}, j=\overline{0, N_y}$$

Полуявная разностная схема имеет вид:

$$Q_{uijm}^n=\varphi[\frac{\nu}{K}u_{ijm}^n+c_f K^{-\frac{1}{2}}(u_{ijm}^{n2}+v_{ijm}^{n2}+w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}}u_{ijm}^n],$$

$$Q_{vijm}^n=\varphi[\frac{\nu}{K}v_{ijm}^n+c_f K^{-\frac{1}{2}}(u_{ijm}^{n2}+v_{ijm}^{n2}+w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}}v_{ijm}^n],$$

$$Q_{wijm}^n=\varphi[\frac{\nu}{K}w_{ijm}^n+c_f K^{-\frac{1}{2}}(u_{ijm}^{n2}+v_{ijm}^{n2}+w_{ijm}^{n2})^{\frac{1}{2}}w_{ijm}^n-g],$$

$$\frac{u_{ijm}^{n+1}-u_{ijm}^n}{\tau}=Q_{uijm}^n-\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{p_{i+1jm}^{n+1}-p_{i-1jm}^{n+1}}{2h_x},$$

$$\frac{v_{ijm}^{n+1}-v_{ijm}^n}{\tau}=Q_{vijm}^n-\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{p_{ij+1m}^{n+1}-p_{ij-1m}^{n+1}}{2h_y},$$

$$\frac{w_{ijm}^{n+1}-w_{ijm}^n}{\tau}=Q_{vijm}^n-\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{p_{ijm+1}^{n+1}-p_{ijm-1}^{n+1}}{2h_z},$$

$$\frac{u_{i+1jm}^{n+1}-u_{i-1jm}^{n+1}}{2h_x}+\frac{v_{ij+1m}^{n+1}-v_{ij-1m}^{n+1}}{2h_y}+\frac{w_{ijm+1}^{n+1}-m_{ijm-1}^{n+1}}{2h_z}=0,$$

$$i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, m=1,...,N_m-1,$$

в граничных узлах S_h:

$$i=0, \frac{u_{1jm}^{n+1}-\varphi_{0jm}^{n+1}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{0jm}^{n+1}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{0jm}^{n+1}=0, i=N_x, \frac{\varphi_{N_x jm}^{n+1}-u_{N_x-1jm}^{n+1}}{h_x}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{N_x jm}^{n+1}+(\frac{\partial\ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{N_x jm}^{n+1}=0;$$

$$j=0, (\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{i0m}^{n+1}+\frac{v_{i1m}^{n+1}-\hat{\varphi}_{i0m}^{n+1}}{h_y}+(\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{i0m}^{n+1}=0, j=N_y, (\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{iN_y m}^{n+1}+\frac{\hat{\varphi}_{iN_y m}^{n+1}-v_{iN_y-1m}^{n+1}}{h_y}+(\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})_{iN_y m}^{n+1}=0;$$

$$m=0, (\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ij0}^{n+1}+\frac{w_{ij1}^{n+1}-\hat{\hat{\varphi}}_{ij0}^{n+1}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ij0}^{n+1}=0, m=N_z, (\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+\frac{\hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1}-w_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}=0$$

Глобальный итерационный процесс

$$F^n_{uijm} = u^n_{ijm} + \tau Q^n_{ijm}, F^n_{vijm} = v^n_{ijm} + \tau Q^n_{ijm}, F^n_{wijm} = w^n_{ijm} + \tau Q^n_{ijm},$$

$$u^{n+1,k}_{ijm} = F^n_{uijm} - \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{p^{n+1,k}_{i+1jm} - p^{n+1,k}_{i-1jm}}{2h_x},$$

$$v^{n+1,k}_{ijm} = F^n_{vijm} - \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{p^{n+1,k}_{ij+1m} - p^{n+1,k}_{ij-1m}}{2h_y},$$

$$w^{n+1,k}_{ijm} = F^n_{wijm} - \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{p^{n+1,k}_{ijm+1} - p^{n+1,k}_{ijm-1}}{2h_z},$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1, 1 \le m \le N_z - 1,$$

$$(1 + A_{ijm}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{ijm} - p^{n+1,k}_{ijm}}{\theta} + \frac{u^{n+1,k}_{i+1jm} - u^{n+1,k}_{i-1jm}}{2h_x} + \frac{v^{n+1,k}_{ij+1m} - v^{n+1,k}_{ij-1m}}{2h_y} + \frac{w^{n+1,k}_{ijm+1} - m^{n+1,k}_{ijm-1}}{2h_z} = 0,$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1, 1 \le m \le N_z - 1,$$

$$(1 + A_{N_x jm}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{N_x jm} - p^{n+1,k}_{N_x jm}}{\theta} + \frac{\varphi^{n+1}_{N_x jm} - u^{n+1,k}_{N_x - 1jm}}{h_x} + (\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{N_x jm} + (\frac{\partial \hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{N_x jm} = 0,$$

$$(1 + A_{0jm}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{0jm} - p^{n+1,k}_{0jm}}{\theta} + \frac{u^{n+1,k}_{1jm} - \varphi^{n+1}_{0jm}}{h_x} + (\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{0jm} + (\frac{\partial \ddot{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{0jm} = 0,$$

$$1 \le j \le N_y - 1, 1 \le m \le N_z - 1,$$

$$(1 + A_{iN_y m}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{iN_y m} - p^{n+1,k}_{iN_y m}}{\theta} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1}_{iN_y m} + \frac{\hat{\varphi}^{n+1}_{iN_y m} - v^{n+1,k}_{iN_y - 1m}}{h_y} + (\frac{\partial \hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{iN_y m} = 0,$$

$$(1 + A_{i0m}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{i0m} - p^{n+1,k}_{i0m}}{\theta} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1}_{i0m} + \frac{v^{n+1}_{i1m} - \hat{\varphi}^{n+1,k}_{i0m}}{h_y} + (\frac{\partial \hat{\hat{\varphi}}}{\partial z})^{n+1}_{i0m} = 0,$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le m \le N_z - 1,$$

$$(1 + A_{ijN_z}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{ijN_z} - p^{n+1,k}_{ijN_z}}{\theta} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1}_{ijN_z} + \frac{\hat{\hat{\varphi}}^{n+1}_{ijN_z} - w^{n+1,k}_{ijN_z - 1}}{h_z} + (\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{ijN_z} = 0,$$

$$(1 + A_{ij0}\theta) \frac{p^{n+1,k+1}_{ij0} - p^{n+1,k}_{ij0}}{\theta} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1}_{ij0} + \frac{w^{n+1}_{ij1} - \hat{\hat{\varphi}}^{n+1,k}_{ij0}}{h_z} + (\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y})^{n+1}_{ij0} = 0,$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$A_{ijm} = 1 + \tau \frac{\varphi}{\rho_f} \{ \frac{1}{2h_x} [\frac{1}{2h_x} \frac{1 - sign(i - N_x + 1.5)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2h_x}\frac{1+sign(i-1.5)}{2}]+\frac{1}{2h_y}[\frac{1}{2h_y}\frac{1-sign(j-N_y+1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2h_y}\frac{1+sign(j-1.5)}{2}]+\frac{1}{2h_z}[\frac{1}{2h_z}\frac{1-sign(m-N_z+1.5)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2h_z}\frac{1+sign(m-1.5)}{2}]\},i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,m=1,...,N_z-1;$$

$$A_{N_x jm}=1+\tau\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{1}{2h_x^2},A_{0jm}=1+\tau\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{1}{2h_x^2},\ j=1,...,N_y-1,m=1,...,N_z-1;$$

$$A_{iN_y m}=1+\tau\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{1}{2h_y^2},A_{i0m}=1+\tau\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{1}{2h_y^2},\ i=1,...,N_x-1,m=1,...,N_z-1;$$

$$A_{ijN_z}=1+\tau\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{1}{2h_z^2},A_{ij0}=1+\tau\frac{\varphi}{\rho_f}\frac{1}{2h_z^2},\ i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1$$

Если вместо граничного условия

$$m=N_z,(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+\frac{\hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1}-w_{ijN_z-1}^{n+1}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}=0,\ i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,$$

задается давление $p_{ijN_z}^{n+1}=\phi_{ijN_z}^{n+1},i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,$, то *уравнение неразрывности*

$$(1+A_{ijN_z}\theta)\frac{p_{ijN_z}^{n+1,k+1}-p_{ijN_z}^{n+1,k}}{\theta}+(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+\frac{\hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1}-w_{ijN_z-1}^{n+1,k}}{h_z}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}=0,$$

в итерационном алгоритме не применяется. Из данного уравнения неразрывности вычисляется компонента скорости

$$m=N_z,\hat{\hat{\varphi}}_{ijN_z}^{n+1}=w_{ijN_z-1}^{n+1}-h_z[(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}],\ i=1,...,N_x-1,\ j=1,...,N_y-1,$$

при необходимости производные в них $(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}+(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}$ заменяются разностными соотношениями

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial x})_{ijN_z}^{n+1}\approx\frac{u_{i+1jN_z}^{n+1}-u_{i-1jN_z}^{n+1}}{2h_x},(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y})_{ijN_z}^{n+1}\approx\frac{v_{ij+1N_z}^{n+1}-v_{ij-1N_z}^{n+1}}{2h_y}$$

Параметр $\theta>0$ выбирается из интервала $0<\theta\le 1/2.$ Процесс вычисле- ний останавливается на таком номере итераций k^*, при котором вы-
полняется неравенство для невязки

$$\max_{0\le i\le N_x,0\le i\le N_y,0\le m\le N_z}|R_{ijm}^{k^*}|\le\varepsilon,\varepsilon\approx 0,\varepsilon\ne 0$$

При выполнении данного критерия последние приближения $p_{ijm}^{n+1,k^*},u_{ijm}^{n+1,k^*},v_{ijm}^{n+1,k^*},w_{ijm}^{n+1,k^*}$ используются в качестве искомого решения $p_{ijm}^{n+1,k^*}\approx p_{ijm}^{n+1},u_{ijm}^{n+1,k^*}\approx u_{ijm}^{n+1},v_{ijm}^{n+1,k^*}\approx v_{ijm}^{n+1},w_{ijm}^{n+1,k^*}\approx w_{ijm}^{n+1},\ i=0,...,N_x,\ j=0,...,N_y,m=0,...,N_z$

13.2. Коррекция модели *Форцгеймера.* Разностная схема

Локальное ускорение $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ не учитывает переноса частиц. По второму закону *Ньютона* в уравнения динамики должно входить **полное ускорение** $\frac{d\vec{v}}{dt}$ и учитываться закон трения *Ньютона* $\mu\Delta\vec{v}, m=1, \mu=\mu_1$ для низкоскоростных течений или законы трения *Джакупова*: $\mu_m\Delta\vec{v}^m, m=7, m=9$ для высокоскоростных и $\mu_m\Delta\vec{v}^m, m=3, m=5$ для среднескоростных течений. В результате получается система уравнений, идентичная уравнениям *Навье* вязкой несжимаемой жидкости в случае закона трения *Ньютона* $\mu\Delta\vec{v}$:

$$\rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = -\varphi[\nabla(p+\rho_f gz) + \rho_f \frac{\nu}{K}\vec{v} + \rho_f c_f K^{-\frac{1}{2}} |\vec{v}|\vec{v} + \mu\Delta\vec{v}],\ \boldsymbol{div\vec{v}} = 0 \quad (2)$$

или система уравнений

$$\rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = -\varphi[\nabla(p+\rho_f gz) + \rho_f \frac{\nu}{K}\vec{v} + \rho_f c_f K^{-\frac{1}{2}} |\vec{v}|\vec{v} + \mu_m\Delta\vec{v}^m],\ \boldsymbol{div\vec{v}} = 0 \quad (2^*)$$

для законов трения *Джакупова* (*см.*[28]).

Численное решение начально-краевых задач для систем (2) и (2^*) производится методами, развитыми для уравнений вязкой жидкости [3] в **главах 6,11.**

Поэтому для получения готового алгоритма для численного решения системы (2) в схеме **13.1** достаточно положить:

$$Q^n_{uijm} = \varphi[\frac{\nu}{K}u^n_{ijm} + c_f K^{-\frac{1}{2}}(u^{n2}_{ijm}+v^{n2}_{ijm}+w^{n2}_{ijm})^{\frac{1}{2}}u^n_{ijm} + (\mu^{vw}_x u^n_{x\bar{x}} + \mu^{wu}_y u^n_{y\bar{y}} + \mu^{uv}_z u^n_{z\bar{z}})] -$$
$$-0{,}5(|u^n_{ijm}|+u^n_{ijm})u^n_{\bar{x}} - 0{,}5(u^n_{ijm}-|u^n_{ijm}|)u^n_x -$$
$$-0{,}5(|v^n_{ijm}|+v^n_{ijm})u^n_{\bar{y}} - 0{,}5(v^n_{ijm}-|v^n_{ijm}|)u^n_y - 0{,}5(|w^n_{ijm}|+w^n_{ijm})u^n_{\bar{z}} - 0{,}5(w^n_{ijm}-|w^n_{ijm}|)u^n_z,$$
$$Q^n_{vijm} = \varphi[\frac{\nu}{K}v^n_{ijm} + c_f K^{-\frac{1}{2}}(u^{n2}_{ijm}+v^{n2}_{ijm}+w^{n2}_{ijm})^{\frac{1}{2}}v^n_{ijm} + (\mu^{vw}_x v^n_{x\bar{x}} + \mu^{wu}_y v^n_{y\bar{y}} + \mu^{uv}_z v^n_{z\bar{z}})] -$$
$$-0{,}5(|u^n_{ijm}|+u^n_{ijm})v^n_{\bar{x}} - 0{,}5(u^n_{ijm}-|u^n_{ijm}|)v^n_x -$$
$$-0{,}5(|v^n_{ijm}|+v^n_{ijm})v^n_{\bar{y}} - 0{,}5(v^n_{ijm}-|v^n_{ijm}|)v^n_y - 0{,}5(|w^n_{ijm}|+w^n_{ijm})v^n_{\bar{z}} - 0{,}5(w^n_{ijm}-|w^n_{ijm}|)v^n_z,$$
$$Q^n_{wijm} = \varphi[\frac{\nu}{K}w^n_{ijm} + c_f K^{-\frac{1}{2}}(u^{n2}_{ijm}+v^{n2}_{ijm}+w^{n2}_{ijm})^{\frac{1}{2}}w^n_{ijm} - g + (\mu^{vw}_x w^n_{x\bar{x}} + \mu^{wu}_y w^n_{y\bar{y}} + \mu^{uv}_z w^n_{z\bar{z}})] -$$
$$-0{,}5(|u^n_{ijm}|+u^n_{ijm})w^n_{\bar{x}} - 0{,}5(u^n_{ijm}-|u^n_{ijm}|)w^n_x -$$
$$-0{,}5(|v^n_{ijm}|+v^n_{ijm})w^n_{\bar{y}} - 0{,}5(v^n_{ijm}-|v^n_{ijm}|)w^n_y - 0{,}5(|w^n_{ijm}|+w^n_{ijm})w^n_{\bar{z}} - 0{,}5(w^n_{ijm}-|w^n_{ijm}|)w^n_z$$

с соответствующим оформлением коэффициентов $\mu^{vw}_x, \mu^{wu}_y, \mu^{uv}_z$, так как уравнения предварительно умножены на $\frac{1}{\rho_f}$.

13.3. Коррекция модели *Нумерова* фильтрации в насыщенных пористых средах

Нумеров С.Н. еще в 1968г. обратил внимание на необходимость учета сил инерции в основных уравнениях теории фильтрации и предложил в [25] использовать следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{g\sigma}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{g\sigma^2}(\vec{v},\nabla)\vec{v}+gradh+f(\vec{v})\vec{v}=0,\quad div\vec{v}=0$$

Тем самым *Нумеров С.Н.* впервые обратил внимание исследователей на недопустимость нарушений законов *Ньютона*, которые гласят: «масса на ускорение равно силе», если ускорение равно нулю, то тело совершает *прямолинейное* движение с постоянной скоростью.

Коррекция модели *Нумерова* заключается в использовании закона трения *Ньютона* $\mu\Delta\vec{v}$ и формулы полного ускорения $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}$:

$$\frac{1}{\sigma}[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}]+g\sigma gradh+g\sigma f(\vec{v})\vec{v}=\frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{v},div\vec{v}=0$$

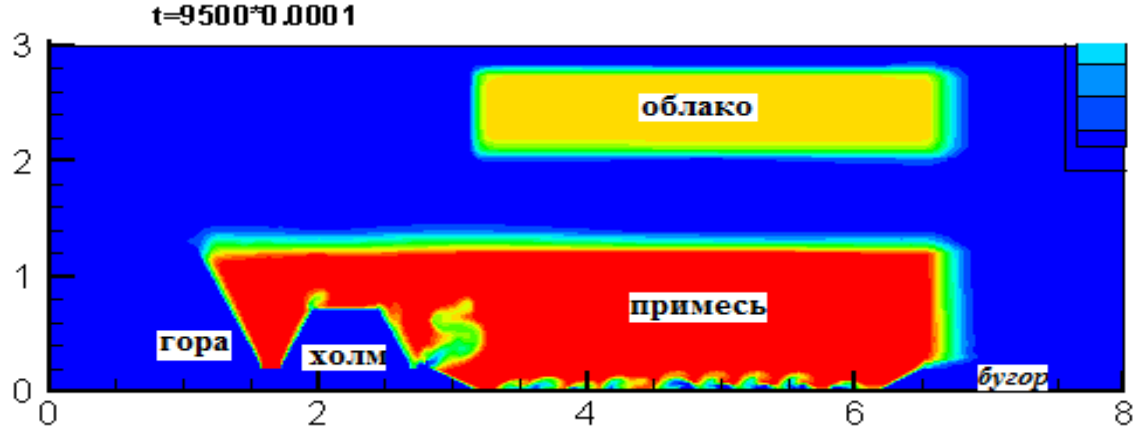
или законов трения *Джакупова*

$$\frac{1}{\sigma}[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}]+g\sigma gradh+g\sigma f(\vec{v})\vec{v}=\frac{\mu_m}{\rho}\Delta\vec{v}^m,div\vec{v}=0$$

Численная реализация соответствующих начально-краевых задач для уравнений коррекций модели *Нумерова* производится по алгоритму предыдущего параграфа, т.е. применяется монотонная схема типа **глав 6,11.**

Вопросы

1. Для конвективных членов применить схему без «аппроксимационной вязкости»
2. Применить метод минимальных невязок для вычисления давления.
3. Конвективные члены аппроксимировать направленными разностями *Булеева-Петрищева.*
4. Применить метод последовательной верхней релаксации.



Выдув примеси из ямы в гористой местности

Глава 14. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Проблема построения эффективных алгоритмов численного решения уравнений метеорологии поставлена *Г.И. Марчуком* [26].

Во многих работах для вычисления плотности газа используется уравнение неразрывности, причем в расщепленном виде. Как показывает практика вычислений, алгоритмы такого типа приводят к *осцилляциям* решения, к *отрицательным и нулевым* значениям плотности газа, что противоречит сущности плотности, как сугубо положительной физической величины. В монографии [3] предложен принципиально новый подход к построению численных алгоритмов решения уравнений атмосферной гидротермодинамики, свободной от указан- ных недостатков. Отличительной чертой данного подхода является то, что уравнение неразрывности не расщепляется, а служит для получения замкнутой системы разностных уравнений для давления (*см.***главу 11**), при этом плотность газа вычисляется из уравнения состояния.

14.1. Полунеявная разностная схема *Джакупова*

В системе координат, выбранной так, что ось x направлена на восток, ось y - на север, а ось z – вертикально вверх, уравнения гидротермодинамики атмосферных процессов на плоской земле имеют вид [26] :

$$\rho[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+(w-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(v\rho)}{\partial z})\frac{\partial u}{\partial z}]+\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\mu\Delta u+v\rho\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\rho\omega(v\cdot\cos\theta-w\sin\theta), \quad (1)$$

$$\rho[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+(w-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(v\rho)}{\partial z})\frac{\partial v}{\partial z}]+\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\mu\Delta v+v\rho\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\rho\omega u\cos\theta, \quad (2)$$

$$\rho[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+(w-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(v\rho)}{\partial z})\frac{\partial w}{\partial z}]+\frac{\partial p}{\partial z}=\rho\mu\Delta w+v\rho\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2\rho\omega u\sin\theta-\rho g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0,\ p=R\rho T,\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$\rho[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+(w-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(v\rho)}{\partial z})\frac{\partial T}{\partial z}]=\rho\mu\Delta T+v\rho\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\rho\varepsilon}{C_p}+\frac{\gamma_a}{g}(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}) \quad (5)$$

Для уравнений (1)-(5) ставятся следующие начальные и граничные условия

$$u\big|_{t=0}=v_1^0(\vec{r}),v\big|_{t=0}=v_2^0(\vec{r}),w\big|_{t=0}=v_3^0(\vec{r}),T\big|_{t=0}=T^0(\vec{r}),\rho\big|_{t=0}=\rho^0(\vec{r}), \quad (6)$$

$$x=0,x=a_1,y=0,y=a_2,u\big|_S=\varphi_1,v\big|_S=\varphi_2,w\big|_S=\varphi_3,T\big|_S=\varphi_4,$$

$$z=0,u\big|_S=\varphi_1=0,v\big|_S=\varphi_2=0,w\big|_S=\varphi_3=0_3,\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_S=0, \quad (7)$$

$$z = a_3, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_S = 0, \left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_S = 0, \left.\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|_S = 0, \left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_S = 0. \qquad (8)$$

Для упрощения дальнейших записей удобно применять индексные обозначения $x = x_1, y = x_2, z = x_3, u = v_1, v = v_2, w = v_3, i = i_1, j = i_2, k = i_3$.

Систему (1)-(5) в новых обозначениях имеет компактный вид

$$\rho(\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} \bar{v}_m \frac{\partial v_k}{\partial x_m}) + \frac{\partial p}{\partial x_k} = \rho\mu\Delta v_k + \nu\rho\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_3^2} + f_k,\ k = 1,2,3, \qquad (9)$$

$$f_1 = 2\rho\omega(v_2 \cdot \cos\theta - v_3 \cdot \sin\theta),\ f_2 = -2\rho\omega v_1 \cdot \cos\theta,\ \ f_3 = 2\rho\omega v_1 \sin\theta - \rho g, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0,\ p = R\rho T,$$

$$\rho(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} \bar{v}_m \frac{\partial T}{\partial x_m}) = \rho\mu\Delta T + \nu\rho\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\rho\varepsilon}{C_p} +$$

$$+ \frac{\gamma_a}{g}(\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} v_m \frac{\partial p}{\partial x_m}),\ \bar{v}_1 = v_1, \bar{v}_2 = v_2, \bar{v}_3 = v_3 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\nu\rho)}{\partial x_3} \qquad (11)$$

Схема строится по методике, разработанной в **главах 6,11.** При этом соблюдается принцип взаимосогласованной аппроксимации градиентов давления и уравнения неразрывности; градиент давления и компоненты скорости в уравнении неразрывности берутся на верхнем слое времени, а все остальные члены уравнений (9)-(11) на нижнем слое:

$$\rho^n[\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau_{n+1}} + 0{,}5\sum_{m=1}^{3}\{(\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|)v_{k\bar{x}_m}^n + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|)v_{kx_m}^n\}] + \qquad (12)$$

$$+ \bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1} + \bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1} = \sum_{m=1}^{3} \nu_m^n v_{kx_m\dot{x}_m}^n + f_k^n, k = 1,2,3,\ x \in \Omega_h,$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_{n+1}} + \sum_{k=1}^{3}[\bar{\alpha}_k(\rho^n v_k^{n+1})_{x_k} + \bar{\beta}_k(\rho^n v_k^{n+1})_{\bar{x}_k}] = 0, x \in \Omega_h, \qquad (13)$$

$$\bar{\alpha}_k[\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_{n+1}} + (\rho^n v_k^{n+1})_{x_k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{3} \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} = 0, x \in S_{kh}, k = 1,2,3, \qquad (14)$$

$$\bar{\beta}_k[\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_{n+1}} + (\rho^n v_k^{n+1})_{\bar{x}_k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{3} \frac{\partial \rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m} = 0, x \in \bar{S}_{kh}, k = 1,2,3, \qquad (15)$$

$$\rho^n[T_{\bar{t}} + 0{,}5\sum_{m=1}^{3}\{(\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|)T_{k\bar{x}_m}^n + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|)T_{kx_m}^n\}] =$$

$$= \sum_{m=1}^{3} \nu_m^n T_{x_m\dot{x}_m}^n + C_p^{-1}\varepsilon + g^{-1}\gamma_a(p_{\bar{t}} + \sum_{m=1}^{3} v_m^n p_{\tilde{x}_m}^n), x \in \Omega_h, \qquad (16)$$

$$\rho^{n+1} = (RT^{n+1})^{-1} p^{n+1}, \quad x \in \overline{\Omega}_h, \quad t \in \Omega_{\tau 0},$$

где по методике **главы 6**

$$Q = 1 + \frac{1}{4\rho^n\mu}\sum_{m=1}^{2}[(\bar{v}_m^n + |\bar{v}_m^n|)h_{mi_m} + (\bar{v}_m^n - |\bar{v}_m^n|)h_{mi_m+1}] + \frac{1}{4\rho^n\nu^n}[(\bar{v}_3^n + |\bar{v}_3^n|)h_{3i_3} + (\bar{v}_3^n - |\bar{v}_3^n|)h_{3i_3+1}],$$

$$\nu_m^n = \frac{1}{Q}[\rho^n\mu + \frac{1}{4}\{(|\bar{v}_k^n| + \bar{v}_k^n)h_{ki_k} + (|\bar{v}_k^n| - \bar{v}_k^n)h_{ki_k+1}\} +$$

$$+\frac{1}{4\rho^n\nu}\{(|\bar{v}_3^n|+\bar{v}_3^n)h_{3i_3}+(|\bar{v}_3^n|-\bar{v}_3^n)h_{3i_3+1}\}],k=3-m,m=1,2,$$

$$\nu_3^n=\frac{1}{Q}[\rho^n\nu+\frac{\rho^n\nu}{4\rho^n\mu}\sum_{k=1}^{2}\{(|\bar{v}_k^n|+\bar{v}_k^n)h_{ki_k}+(|\bar{v}_k^n|-\bar{v}_k^n)h_{ki_k+1}\}]$$

Конвективные члены в (12), (15) аппроксимированы со вторым порядком погрешности $O([h_{mi_m}+h_{mi_m+1}]^2)$, диссипативные члены с погрешностью $O(\mu\sum_{m=1}^{2}[|h_{mi_m}-h_{mi_m+1}|+(h_{mi_m}+h_{mi_m+1})^2]+\nu[|h_{3i_3}-h_{3i_3+1}|+(h_{3i_3}+h_{3i_3+1})^2])$, градиент давления и уравнение неразрывности - $O(\sum_{k=1}^{3}[|\alpha_k h_{ki_k}-\beta_k h_{ki_k+1}|+(h_{ki_k}+h_{ki_k+1})^2])$.

По времени схема имеет 1-й порядок аппроксимации. В силу граничных условий (7) и (8) в (14), (15) при $k=1$ $(x=0,x=a_1)$ и $k=2$ $(y=a_2)$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m}=\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^n\varphi_m^{n+1}}{\partial x_m},\qquad(17)$$

При $k=3$ $(z=0)$ $\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m}=0$, а (15) при $k=3$ $(z=a_3)$ в силу условий (8) рассматривается с использованием аппроксимации граничного условия

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}=0:R_{i_1i_2N_3}^{n+1}=2R_{i_1i_2N_3-1}^{n+1}-R_{i_1i_2N_3-2}^{n+1},x\in\bar{S}_{3h},R=(u,v,w,T),\qquad h_{3N_3}=h_{3N_3-1}.\qquad(18)$$

Принципиальное отличие предлагаемых здесь разностных методов от приведенных в [26] заключается, помимо вышеизложенных, в алгоритмах их реализаций. В частности, схема (12)-(18) реализуется в следующем порядке. Уравнения (12) представляются в виде [3], [27]:

$$Q_k^j=-\tau_{n+1}^{-1}\rho^n v_k^n+0{,}5\rho^n\sum_{m=1}^{3}\{(\bar{v}_m^n+|\bar{v}_m^n|)v_{k\bar{x}_m}^n+(\bar{v}_m^n-|\bar{v}_m^n|)v_{kx_m}^n\}-\sum_{m=1}^{3}\nu_m^n v_{kx_m\dot{x}_m}^n-f_k^n,\qquad(19)$$

$$\rho^n v_k^{n+1}=(-\bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}-\bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}-Q_k^n)\tau_{n+1},k=1,2,3,x\in\Omega_h,\qquad(20)$$

затем (20) и (16) подставляются в уравнения неразрывности (13)-(15) и в результате получается система разностных уравнений для давления.

Во внутренних узлах Ω_h, которым соответствуют индексы $1\le i_k\le N_k-1,k=1,2,3$, система получается в виде:

$$\frac{1}{\tau_{n+1}}(\frac{p^{n+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n)+0{,}5\sum_{k=1}^{3}\{\bar{\alpha}_k[1-sign(i_k-N_k+1{,}5)]\cdot\Big[-\tau_{j+1}\Big(Q_k^n+$$

$$+\bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}+\bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}\Big)\Big]_{x_k}+\bar{\alpha}_k[1+sign(i_k-N_k+1{,}5)]\Big[(\rho^n\varphi_k^{n+1})\big|_{\bar{S}_{kh}}+$$

$$+\tau_{n+1}\Big(Q_k^n+\bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}+\bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}\Big)\Big]h_{ki_k+1}^{-1}+\bar{\beta}_k[1+sign(i_k-1{,}5)]\cdot$$

$$\cdot\Big[-\tau_{n+1}\Big(Q_k^n+\bar{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}+\bar{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}\Big)\Big]_{\bar{x}_k}+\bar{\beta}_k[1-sign(i_k-1{,}5)]\cdot\qquad(21)$$

. $$\cdot\left[-\tau_{n+1}\left(Q_k^n+\overline{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}+\overline{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}\right)-\left(\rho^n\varphi_k^{n+1}\right)\Big|_{S_{kh}}\right]h_{ki_k}^{-1}\Big\}=0, x\in\Omega_h,$$

в граничных узлах S_{kh}, которым соответствуют индексы $i_k=0$:

$$\overline{\alpha}_k\left\{\frac{1}{\tau_{n+1}}\left(\frac{p^{n+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n\right)+\left[(-\tau_{n+1})T_k\left(Q_k^n+\overline{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}+\overline{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\rho^n\varphi_k^{n+1}\right]h_{ki_k+1}^{-1}+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m}\right\}=0, x\in S_{kh}, k=1,2,3, \qquad (22)$$

в граничных узлах $\overline{S}_{kh}$, которым соответствуют индексы $i_k=N_k$:

$$\overline{\beta}_k\left\{\frac{1}{\tau_{n+1}}\left(\frac{p^{n+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n\right)+\left[\rho^j\varphi_k^{j+1}\Big|_{\overline{S}_{kh}}+\tau_{n+1}T_{-k}\left(Q_k^n+\overline{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^{n+1}+\overline{\beta}_k p_{x_k}^{n+1}\right)\right]h_{ki_k}^{-1}+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^n v_m^{n+1}}{\partial x_m}\right\}=0,$$

$$x\in\overline{S}_{kh}, k=1,2,3 \qquad (23)$$

При $k=3$ в (23) подставляются (18), затем (20).

Уравнения (22), (23), а также (18) являются разностными граничными условиями для давления. Система (18), (21)-(23) является замкнутой.

14.2. Решение уравнений для давления методом глобальных итераций

Применяется модифицированный итерационный метод с параметром $\theta>0$. В этом случае в принципе можно не проводить подробную запись (21), (22), (23) и весь процесс итерирования можно записать в экономичном виде: s – номер итерации, верхний индекс $n+1$ опускается $\lim\limits_{s\to\infty}v_k^s=v_k^{n+1}, k=1,2,3, \lim\limits_{s\to\infty}p^s=p^{n+1},$ за нулевые итерации берутся $v_k^0=v_k^n, k=1,2,3, \quad p^0=p^n, x\in\overline{\Omega}_h.$ По вычисленным v_k^s, p^s следующая итерация v_k^{s+1}, p^{s+1} находится по явному алгоритму

$$\rho^n v_k^{s+1}=(-\overline{\alpha}_k p_{\bar{x}_k}^s-\overline{\beta}_k p_{x_k}^s-Q_k^n)\tau_{n+1}, x\in\Omega_h, v_k^{s+1}\Big|_{S_h}=\varphi_k^{n+1}, \qquad (1)$$

$$(1+A^n\theta)\frac{p^{s+1}-p^s}{\theta}+\frac{1}{\tau_{n+1}}\left(\frac{p^{s+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n\right)+\sum_{k=1}^{3}\left[\overline{\alpha}_k(\rho^n v_k^{s+1})_{x_k}+\overline{\beta}_k(\rho^n v_k^{s+1})_{\bar{x}_k}\right]=0, x\in\Omega_h, \qquad (2)$$

$$\overline{\alpha}_k[(1+A^n\theta)\frac{p^{s+1}-p^s}{\theta}+\frac{1}{\tau_{n+1}}\left(\frac{p^{s+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n\right)+$$

$$+(\rho^j v_k^{n+1})_{x_k}+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^j\varphi_m^{j+1}}{\partial x_m}]=0, x\in S_{kh}, k=1,2,3, \qquad (3)$$

$$\overline{\beta}_k[(1+A^n\theta)\frac{p^{s+1}-p^s}{\theta}+\frac{1}{\tau_{n+1}}\left(\frac{p^{s+1}}{RT^{n+1}}-\rho^n\right)+$$

$$+(\rho^n v_k^{s+1})_{\bar{x}_k}+\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{3}\frac{\partial\rho^n\varphi_m^{n+1}}{\partial x_m}]=0, x\in\overline{S}_{kh}, k=1,2, \qquad (4)$$

$$p^{s+1}_{i_1 i_2 N_3} = p^{s+1}_{i_1 i_2 N_3 - 1}, x \in \overline{S}_{3h}, \forall (i_1, i_2),\ s = 0,1,..., s^*; \qquad (5)$$

Итерации выполняются до номера s^*, для которого имеют место неравенства для уравнения неразрывности

$$\left| \frac{1}{\tau_{n+1}} \left(\frac{p^{s^*+1}}{RT^{n+1}} - \rho^n \right) + \sum_{k=1}^{3} \left[\overline{\alpha}_k (\rho^n v_k^{s^*+1})_{x_k} + \overline{\beta}_k (\rho^n v_k^{s^*+1})_{\bar{x}_k} \right] \right| \le \varepsilon, \varepsilon \approx 0, x \in \Omega_h$$

Параметр θ выбирается из интервала $0 < \theta < 0{,}5$. Коэффициенты при $p^{n+1}_{i_1 i_2 i_3}$ равны:

$$A^n = \tau_{n+1} \overline{\alpha}_k h^{-2}_{ki_k+1},\ x \in S_{kh},\ k = 1,2,3; \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} A^n = 0{,}5 \sum_{k=1}^{3} \{ & \overline{\alpha}_k (1 - sign(i_k - N_k + 1{,}5)) \left[\overline{\alpha}_k h^{-1}_{ki_k+1} \left(h^{-1}_{ki_k+1} + h^{-1}_{ki_k} \right) - \right. \\ & \left. - \overline{\beta}_k h^{-2}_{ki_k+1} \right] + \overline{\alpha}_k (1 + sign(i_k - N_k + 1{,}5)) h^{-1}_{ki_k+1} \left(\overline{\alpha}_k h^{-1}_{ki_k} - \overline{\beta}_k h^{-1}_{ki_k+1} \right) + \\ & + \overline{\beta}_k (1 + sign(i_k - 1{,}5)) \left[\overline{\beta}_k h^{-1}_{ki_k} \left(h^{-1}_{ki_k+1} + h^{-1}_{ki_k} \right) - \overline{\alpha}_k h^{-2}_{ki_k} \right] + \\ & + \overline{\beta}_k (1 - sign(i_k - 1{,}5)) h^{-1}_{ki_k} \left(\overline{\beta}_k h^{-1}_{ki_k+1} - \overline{\alpha}_k h^{-1}_{ki_k} \right) \} \cdot \tau_{j+1}; \end{aligned} \qquad (7)$$

$$A^n = \tau_{n+1} \overline{\beta}_k h^{-2}_{ki_k},\ x \in \overline{S}_{kh},\ k = 1,2,3 \qquad (8)$$

Краевые условия (8) из 14.1 для $v_k^{j+1}, k = 1,2,3$ реализуются в процессе (1)-(5) по одной из следующих разностных формул $v^{n+1}_{ki_1 i_2 N_3} = v^{n+1}_{ki_1 i_2 N_3 - 1}$, $v^{n+1}_{ki_1 i_2 N_3} = (4 v^{n+1}_{ki_1 i_2 N_3 - 1} - v^{n+1}_{ki_1 i_2 N_3 - 2})/3,\ x \in \overline{S}_{3h}$.

Примечание. Уравнения (1), (2), (3), (5) соответствуют низкоскоростным течениям газа с законом трения *Ньютона.* Для моделирования турбулентных (высокоскоростных) атмосферных течений следует воспользоваться уравнениями, основанными на законах трения *Джакупова* (*см.*[28], [29]).

Вопросы.

1. Для аппроксимации конвективных членов применить схему без «аппроксимационной вязкости» .
2. Применить метод минимальных невязок для вычисления давления.
3. Написать в индексном виде схему (21), (22), (23).
4. Применить метод последовательной верхней релаксации.

Библиография

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды.Т.1,2. - М.: «Наука»,1973.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.- М., Физматгиз,1978г., с.764.
3. Джакупов К.Б.. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэротермодинамики. - Алматы, изд-во КазНУ им.аль-Фараби, 2004г.,с.246.
4. Андерсон, Дейл, Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1, 2.- М.: “Мир”, 1982.С.723.
5. Джакупов К.Б.. О новых уравнениях динамики вязкой жидкости // Тезисы докл. междунар. науч. конф. “Пробл. теор. и прикл. механики”, Алматы, Казахстан, 1-2 марта, 2006.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.:»Наука»,1972.
7. Гантмахер Ф.Р..Теория матриц. -М.: «Наука»,1966.
8. Данфорд Н. и Шварц Л.. Линейные операторы.-М: ИЛ,1962.

9. Джакупов К.Б. Лабораторный практикум по вычислительной гидродинамике.- Алматы, изд-во КазНУ им.аль- Фараби, 2004г., с.224.
10. Джакупов К.Б. Циклическая пятиточечная прогонка // Известия АН КазССР, сер. физ.-мат.н. ,1977, №1, с.19-24.
11. Абрамов А.А., Андреев В.Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // ЖВММФ, том 3, №2,стр.377.
12. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных уравнений математической физики.- Новосибирск, «Сиб.отд. изд-ва Наука»,1967.
13. Джакупов К.Б. К исследованию устойчивости в С двуслойных разностных схем метода дробных шагов // Числ.мет.мех. спл.среды. Том 8, №7, 1977.
14. Марчук Г.И.Методы вычислительной математики. - Новосибирск, «Сиб.отд. изд-ва Наука»,1967.
15. Дьяконов Е.Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач//ЖВММФ,1962,Т.4,№2.
16. Гантмахер. Теория матриц. М., Физматгиз,1967г., с.964.
17. Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - Алматы, Типография «К-2», 2009г., с.270.
18. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайн-функций и ее приложения. - М.: «Мир», 1971.
19. Джакупов К.Б.Численный расчет турбулентного обтекания пластины с применением уравнений для пульсаций // Известия СО АН СССР. Сер.техн.н. , вып.1. 1985г.с.61-67.
20. Джакупов К.Б. О некоторых разностных схемах для уравнений Навье-Стокса // Чис.мет.мех.спл.ср., ВЦ СО АН СССР, №1,т.2, 1971.С.17-26.
21. Джакупов К.Б.Численный расчет ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в кожухе с вращающимися дисками // Известия СО АН СССР, сер.техн.н.вып.1, №3, 1977, с.18-28.
22. Устименко Б.П., Джакупов К.Б., Кроль В.О. Численное моделирование аэродинамики и теплообмена в топочных и технологических устройствах.- Алма-Ата: изд-во «Наука», 1986. С.221.
23. Корн Г.А. Справочник по математике для научных работников.-Спб., 2003.
24. Nied D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. N. Y. etc: Springer, 1992. 408p.
25. Нумеров С.Н. О необходимости учета сил инерции в основных уравнениях теории фильтрации // В сб.: Вопросы прикладной математики и геометрического моделирования. Ленингр.инж.-стр. ин-т, 1962, с.18-21.
26. Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды.-Л.Гидрометеоролог, 1967.С.365.
27. Джакупов К.Б., Гончаров А.И. Численное моделирование диффузионного горения в закрученных потоках двухфакельной топки // Сибирский физико-технический журнал. 1991, вып.6/91, с.83-93.
28. Джакупов К.Б. О гипотезе Стокса и реологических законах – Алматы: Типография «Ғылым Ордасы», 2014. С.152.
29. Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат. 1.2014.
30. Джакупов К.Б.Численное моделирование влияния пульсаций на вихревые следы за пластинами // Вестник Томского государственного университета математика и механика №4(20) 2012, с.80-87.

Джакупов Кенес Бажкенович окончил с красным дипломом в 1966г. механико-математический факультет Томского государственного университета им.В.В.Куйбышева. С 1966г. по 1969г. аспирант ВЦ СОАН СССР Академгородок г. Новосибирск. Защитил в 1970г. кандидатскую, в 1990г. докторскую диссертации в Институте теплофизики им. С.С.Кутателадзе СОАН СССР. Автор 5 монографий, 9 учебных пособий и около 100 работ в области механики жидкости и газа и вычислительной математики. Профессор механики, доктор физико-математических наук. С 1969г. работает на механико-математическом факультете Казахского Национального Университета им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан.

Адрес: Тел. +7 727 2518172, +7 701 667 88 56.
E-mail: jakupovKB@mail.ru.