

РГП «ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ»
КОМИТЕТА ПО НАУКЕ ПРИ МИНИСТЕРСТВЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

К.Б.Джакупов

О ГИПОТЕЗЕ СТОКСА

и реологических законах

Алматы
2014

УДК 533
ББК 22.553
Д 40

*Рекомендовано к изданию
РГП «Институт математики и математического моделирования»*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
С.Т.Мухамбетжанов;
доктор физико-математических наук **Н.И.Мартынов**

Джакупов Кенес Бажкенович

Д 40 О гипотезе Стокса и реологических законах.-Алматы:
Типография «Ғылым ордасы», 2014. -163с.

ISBN 978-601-278-674-3

Анализируются теоретические положения механики сплошной среды, приведшие к ошибочным гипотезам Стокса и Навье-Коши-Ламе. Доказана несимметричность тензора напряжений сплошной среды, обоснованы новые реологические законы и соответствующие им уравнения динамики вязкого газа и жидкости, теории упругости. Сформулированы новые подходы к моделированию турбулентных течений и определению скорости распространения света от источника.

Книга будет полезна бакалаврам, магистрантам, докторантам, а также исследователям, специализирующимся в области механики сплошной среды.

ББК 22.253

ISBN 978-601-278-674-3

© Джакупов К.Б.

© Типография «Ғылым ордасы»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
Глава 1. ОБОСНОВАНИЕ ОШИБОЧНОСТИ ГИПОТЕЗЫ	
Стокса в ТЕОРИИ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ.....	8
1.1. Парадоксы формул <i>Эйлера, Лейбница</i>	8
1.2. Парадоксы деформационного движения элементарного объема сплошной среды.....	13
1.3. Парадоксы интегрального вывода уравнений динамики сплошной среды.....	19
1.4. Индуктивный метод.....	23
1.5. Парадоксы первой теоремы <i>Гельмгольца</i>	28
1.6. Парадоксы гипотезы <i>Стокса</i>	35
1.7. <i>Несимметричный</i> тензор напряжений <i>Ньютона</i> . Парадоксы определения вязких нормальных напряжений связаны с гипотезами о давлении и с законом <i>Паскаля</i> для идеальных жидкостей.....	44
1.8. Предпосылки <i>ошибочного</i> вывода о симметричности тензора напряжений.....	51
1.9. Из теоремы об изменении момента импульса не следует симметричность тензора напряжений.....	56
1.10. Тензор напряжений сплошной среды не симметричен	60
1.11. Парадоксы <i>Бэтчелора</i>	68
1.12. <i>Аналог гипотезы Стокса</i> . Антисимметричный тензор напряжений.....	73
1.13. О неправильном применении теоремы об изменении момента импульса. <i>Ошибочность уравнений Стокса</i>	75
Глава 2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С	
НЕСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ	
<i>Ньютона</i> $\pi_n = -[p + (\mu/3 - \mu')\text{div}\vec{v}]E + \mu\bar{S}$	80
2.1. Уравнения в декартовых координатах.....	80
2.2. Уравнения в цилиндрических координатах.....	83
2.3. Уравнения в сферических координатах.....	85
Глава 3. НОВЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ	
ЖИДКОСТИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ.....	88
3.1. О парадоксе формулы осреднения <i>Рейнольдса</i>	90
3.2. Приближенное вычисление интегралов осреднения.....	91
3.3. Применение уравнений пульсаций для замыкания уравнений <i>Рейнольдса</i>	93
3.4. О неэффективности закона трения <i>Ньютона</i> в моделировании турбулентных течений.....	98
3.5. Уравнения динамики, соответствующие квадратичному закону	

трения $\vec{F}_{mp} = -k_2 v^2 \vec{e}_v$. О вязкой составляющей нормального напряжения.....	101
3.6. Уравнения динамики, соответствующие законам трения с нечетными показателями степеней	
$\vec{F}_{mp} = -k_3 v^3 \vec{e}_v, \vec{F}_{mp} = -k_5 v^5 \vec{e}_v, \vec{F}_{mp} = -k_7 v^7 \vec{e}_v, \vec{F}_{mp} = -k_9 v^9 \vec{e}_v$	107
3.7. Сравнения с экспериментальным профилем осредненной скорости турбулентного течения в круглой трубе и областях применимости степенных реологических законов	110
3.8. Уравнения осредненных по времени скоростей и пульсаций.	113
3.9. Адекватное моделирование течений вязкой жидкости требует вычисления компонент тензора напряжений по закону трения, соответствующему скорости в данной точке потока.	115
3.10. Универсальная модель динамики жидкости и газа.....	122
3.11. Математические модели турбулентных течений, соответствующие законам трения в каждой точке потока.....	123
1^o. Уравнения Рейнольдса не являются математическими моделями турбулентных течений	124
2 ^o . Моделирование пульсаций в турбулентных течениях.....	126
3.12. Нефизичность и абсурдность $k - \varepsilon$ моделей турбулентности.	131
Глава 4. ОБОСНОВАНИЕ ОШИБОЧНОСТИ ГИПОТЕЗЫ Навье-Коши-Ламе. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ.	
НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	137
4.1. Парадоксы теории деформаций.....	137
4.2. Альтернативное представление относительного перемещени.....	139
4.3. Парадоксы гипотезы <i>Навье-Коши-Ламе</i>	141
4.4. Парадоксы закона <i>Гука</i> для <i>симметричного</i> тензора напряжений <i>Навье-Коши-Ламе</i>	148
4.5. Уравнения теории упругости для <i>несимметричного</i> тензора напряжений.....	150
Глава 5. УРАВНЕНИЯ Эйлера О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА	
ОТ ИСТОЧНИКА и формуле Эйнштейна $E = mc^2$	152
5.1. О формуле Эйнштейна $E = mc^2$ и энергии фотонов.....	152
5.2. О дальности распространения света вокруг источника.....	155
5.3. О постоянстве скорости фотонов вне гравитационного поля при нулевом градиенте давления.....	157
5.4. Переменность скорости фотонов вдоль луча в гравитационном поле.....	158
5.5. Уравнения Эйлера о волновой природе света.....	159
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	161

ПРЕДИСЛОВИЕ

В **1845г.** великий английский физик *Стокс* закон трения *Ньютона* и соответствующий ему тензор напряжений

$$\pi_{ji(n)} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i \neq j, \pi_{ii(n)} = -p + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

предложил заменить псевдореологическим (*ошибочным*) законом:

$$\pi_{ji(c)} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i \neq j, \pi_{ii(c)} = -[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v}] + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

На данных зависимостях компонент тензора напряжений от градиентов скоростей построены известные уравнения *Стокса*. Уравнения динамики вязкой жидкости выводили французские ученые: *Навье* в **1821г.**, Пуассон в **1831г.**, Сен-Венан в **1843г.**. Уравнения *Стокса* совпадают с уравнениями *Навье* только для несжимаемых жидкостей $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ при постоянном коэффициенте вязкости $\mu = \text{const}$, отсюда произошло объединенное название – уравнения *Навье-Стокса*. Физическим обоснованием уравнений *Навье* служит их соответствие закону трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$ и тензору напряжений *Ньютона*. При переменном коэффициенте вязкости уравнения *Стокса* не совпадают с уравнениями *Навье*. Считается, что *Стокс* создал новый закон трения в отличие от закона трения *Ньютона*. Закон трения *Стокса* $\pi_{ji(c)} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

по мнению лауреата Нобелевской премии академика *Л.Д. Ландау* является лишь *гипотезой* из-за отсутствия теоретического и физического обоснований. Закон трения и тензор напряжений *Стокса* **не вытекают** из закона трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$. Касательные напряжения по закону трения *Ньютона* $\pi_{ji(n)} \neq \pi_{ij(n)}$ *несимметричны*, по гипотезе *Стокса* *симметричны* $\pi_{ji(c)} = \pi_{ij(c)}$ (в идеальных жидкостях касательные напряжения равны нулю: $\pi_{ji(ud)} = \pi_{ij(ud)} = 0$, $i \neq j$, тензор напряжений тоже симметричен).

Гипотеза *Стокса* опирается в определенной мере на укоренившееся в теоретической физике *ошибочное положение*, по которому тен-

зор напряжений сплошной среды всегда симметричен. Вывод о симметричности тензора напряжений, как правило, получается из теоремы об изменении момента импульса и содержится во всех учебниках. По этой причине гипотеза *Стокса* связана с рядом *Тейлора*

$$\bar{v}(\bar{r} + \delta\bar{r}, t) = \bar{v}(\bar{r}, t) + \bar{S} \delta\bar{r},$$

который по первой теореме *Гельмгольца* представляется в виде

$$\bar{v}(\bar{r} + \delta\bar{r}, t) = \bar{v}(\bar{r}, t) + \dot{S} \delta\bar{r} + \hat{S} \delta\bar{r}$$

Для определения касательных напряжений по гипотезе *Стокса* используется только одна часть тензора перемещений $\bar{S} = \dot{S} + \hat{S}$, а именно *симметричный* тензор скоростей деформаций \dot{S} . Причем элементы этого тензора удваиваются, то есть используется тензор

$$2\dot{S}, \text{ так как вторая половина } \frac{1}{2} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \text{ закона трения } \textit{Ньютона}$$

находится в *антисимметричной* составляющей тензора \hat{S} , которая в гипотезе *Стокса* отбрасывается, хотя характеризует составную часть движения, а именно - не менее важное вращательное движение среды..

В отличие от тензора напряжений, основанного на законе трения *Ньютона* и тензора перемещений \bar{S} , тензор напряжений *Стокса* приводит к парадоксам, противоречащим физической сущности, что вызвало сомнения в правильности построения на ее основе уравнений *Стокса динамики вязких жидкостей*. Стало очевидной необходимостью теоретическое и физическое обоснование в общем случае **несимметричности тензора напряжений сплошной среды, в том числе несимметричности тензора вязких напряжений, и, как следствие всего этого, обоснование ошибочности уравнений *Стокса***. Ошибочная гипотеза *Стокса* с симметричным тензором напряжений стала непреодолимым препятствием для дальнейшего развития механики жидкости и газа.

В предлагаемой книге приводится достаточно подробное **физическое и теоретическое обоснования новых реологических законов и уравнений с несимметричными тензорами напряжений:**

$$\pi_{ji} = \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}, i \neq j, \pi_{ii} = -p + \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_i},$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

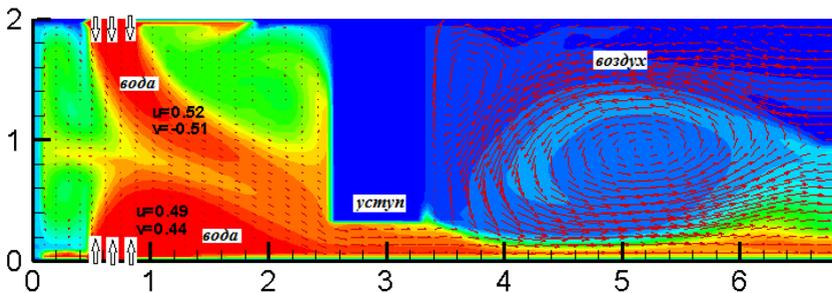
и уравнения теории упругости также с несимметричным тензором напряжений в отличие от уравнений Ламе:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}$$

Анализ проблем гипотезы Стокса и симметричности тензора напряжений выявил парадоксальные применения некоторых математических формул и основных законов физики.

Разумеется, с точки зрения *несимметричности* тензора напряжений логичной является пересмотр уравнений Навье-Коши-Ламе в теории упругости и вывод новых уравнений. Постановка перечисленных проблем и обоснование возможности их решения составили основное содержание данной книги.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность за внимание к поставленным проблемам академику Левину В.А., чл.-корр. Пухначеву В.В., проф. Чубарову Л.Б., проф. Черных Г.Г., проф. Чекмареву С.Ф., проф. Хакимзянову Г.С., доц. В.Н.Берцуну, Prof. Dr. nat. Uwe Riedel (Stuttgart), Prof. Dr.nat. Peuman Givi (Princeton), Prof. Tsutomu Kambe (Tokyo), Prof. Nakasuka (Tokyo), Jean-Jacques Royer (Nancy), Ph.D. Branimir Cvetkovic (Oslo) и обсуждения представленных результатов: участникам городских семинаров по механике, Международных научных конференций по математике и механике, состоявшихся в Казахском Национальном университете им.Аль-Фараби в 2006-2012 г.г., участникам Всероссийских конференций по математике и механике, посвященных 60-летию механико-математического факультета (2008г.) и 135-летию Томского государственного университета (2013г.).



Обтекание уступа встречными струями воды

Глава 1. ОБОСНОВАНИЕ ОШИБОЧНОСТИ ГИПОТЕЗЫ Стокса В ТЕОРИИ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

1.1. Парадоксы формул Эйлера, Лейбница

В [1] приводится *гидродинамический* вывод индивидуальной производной по времени для объема τ сплошной среды, ограниченного поверхностью σ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau + \iint_{\sigma} \Phi(\vec{v}, \vec{n}) \delta\sigma, \quad (1.1.1)$$

именуемой в [1] *формулой Эйлера*.

Здесь и в дальнейшем, следуя [1], обозначаются: символом $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ произвольные бесконечно малые отрезки, проводимые в пространстве в данный момент времени в заданной точке среды, символом $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ - элементарные перемещения частиц жидкости, происходящие за бесконечно малый промежуток времени dt , $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ - вектор скорости, так же $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. В [2] выводится формула

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta\tau + \iint_{\sigma} \Phi(\vec{v}, \vec{n}) \delta\sigma, \quad (1.1.2)$$

используемая в [3] как *формула Лейбница*. Ставится вопрос: какая из этих двух формул верная? Ответ на этот вопрос можно дать только на основании определения производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента. Для дифференцируемой подынтегральной функции $\Phi\vec{v}$ по x, y, z , по теореме *Остроградского-Гаусса* правая часть формулы *Лейбница* (1.1.2) сводится к объемному интегралу

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi\vec{v}) \right] \delta\tau, \quad (1.1.3)$$

В дальнейшем весьма часто будет применяться формула скорости относительного объемного расширения бесконечно малого *индивидуального* объема среды $\delta\tau$ из [1]:

$$\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \cdot \text{div}\vec{v} \quad (1.1.4)$$

Вывод данного выражения содержится в [1], иное доказательство (1.1.4) дается здесь в **1.2**. Парадоксы связаны с тем, что относительно выбора области интегрирования τ существуют два подхода.

Первый подход. Применен *Седовым Л.И.* в [2], где в силу (1.1.4) считается, что объем τ сплошной среды является *движущейся областью*, т.е. является функцией времени $\tau = \tau(t)$, как сумма $\tau = \iiint_{\tau} \delta\tau$ индивидуальных объемов $\delta\tau = \delta\tau(t)$, за-

висящих от времени. Пусть в момент времени $t + \Delta t$ движущийся объем τ занимает положение $\tau' = \tau(t + \Delta t)$. Исходя из этого, *Седов Л.И.* в [2] составляет отношение приращений

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\},$$

откуда в пределе получается *формула Лейбница* (1.1.2). Но в этом составленном *Седовым* выражении только функция Φ и объем $\tau' = \tau(t + \Delta t)$ рассматриваются на момент времени $t + \Delta t$, не учтена зависимость $\delta\tau = \delta\tau(t + \Delta t)$. Если учитывать данную зависимость от времени, то по *Седову* отношение приращений должно быть составлено в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \right. \\ \left. - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\}, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

откуда в пределе получается выражение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\} = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) + \right. \\ \left. + \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'-\tau} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) + \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\} = \iint_{\sigma} \Phi(\vec{v}, \vec{n}) \delta\sigma + \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi \delta\tau), \quad (1.1.6)
\end{aligned}$$

в силу того, что в области $\tau'-\tau$ элементарный объем равен $\delta\tau(t + \Delta t) = (\Delta\vec{r}, \vec{n})\delta\sigma$, поэтому образуется скорость

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \text{ и } \tau'-\tau \rightarrow \sigma, \vec{n} - \text{ орт внешней нормали } \sigma.$$

Итак, из (1.1.6) вытекает формула

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi \delta\tau) + \iint_{\sigma} \Phi(\vec{v}, \vec{n}) \delta\sigma, \quad (1.1.7)$$

что, очевидно, отличается от формул Эйлера и Лейбница.

А если пойти дальше и учесть, что в движущемся объеме $\tau' = \tau(t + \Delta t)$ на момент времени $t + \Delta t$ и координаты частиц x, y, z поменяют места на $x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)$, то отношение приращений должно иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'} \Phi(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \right. \\
&\quad \left. - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\},
\end{aligned}$$

откуда после преобразований получается в пределе

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'} \Phi(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \right. \\
&\quad - \iiint_{\tau} \Phi(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) + \\
&\quad + \iiint_{\tau} \Phi(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) - \\
&\quad \left. - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \right\} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iiint_{\tau'-\tau} \Phi(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) \delta\tau(t + \Delta t) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iiint_{\tau} [\Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t) \delta\tau(t+\Delta t) - \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t)] \} = \\
& = \iint_{\sigma} \Phi(\bar{v}, \bar{n}) \delta\sigma + \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\Phi \delta\tau), \quad (1.1.8)
\end{aligned}$$

Итак, из (1.1.8) вытекает иная формула производной по времени

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\Phi \delta\tau) + \iint_{\sigma} \Phi(\bar{v}, \bar{n}) \delta\sigma, \quad (1.1.9)$$

что отличается от формул Эйлера, Лейбница и формулы (1.1.7).

Второй подход. Применен Лойцяным Л.Г. в [1]. Считается, что объем τ является фиксированной областью сплошной среды, т.е. не является функцией времени $\tau' = \tau = const$. Парадокс здесь состоит в том, что область интегрирования τ должна быть суммой индивидуальных объемов $\delta\tau = \delta\tau(t)$, зависящих от времени в силу (1.1.4) $\tau = \iiint_{\tau} \delta\tau = const$.

Отношение приращений во втором подходе будет такое

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ & \iiint_{\tau} \Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t) \delta\tau(t+\Delta t) - \\
& - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \}, \quad (1.1.10)
\end{aligned}$$

где область интегрирования не изменяется во времени в силу $\tau' = \tau = const$. Из (1.1.10) после аналогичных преобразований получается в пределе

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ & \iiint_{\tau} \Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t), t+\Delta t) \delta\tau(t+\Delta t) - \\
& - \iiint_{\tau} \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t) \} = \iiint_{\tau} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\Phi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), \\
& z(t+\Delta t), t+\Delta t) \delta\tau(t+\Delta t) - \Phi(x, y, z, t) \delta\tau(t)] = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\Phi \delta\tau)
\end{aligned}$$

В результате для фиксированного объема $\tau' = \tau = const$ получается формула

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta \tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\Phi \delta \tau), \quad (1.1.11)$$

т.е. дифференцирование можно внести под знак интеграла.

Теорема 1. В зависимости от подхода к вычислению полной производной по времени, кроме формул Эйлера (1.1.1) и Лейбница (1.1.2), имеют место еще 3 представления: (1.1.7), (1.1.9), (1.1.11).

Доказательство данной теоремы изложено выше.

Как известно из [1], [2], [3], [4], [5] и др. для раскрытия выражений типа $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta \tau$ применяются формулы (1.1.3) или

(1.1.11), что в этих учебниках составляет основу **дедуктивного метода** вывода дифференциальных уравнений динамики, баланса энергий, уравнения неразрывности и др.

Именно дедуктивным методом получено известное дифференциальное соотношение для моментов

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0,$$

из которого выводится *ошибочное* положение о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды.

В индуктивном методе производные типа $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Phi \delta \tau$ не применяются и доказывается **неравенство нулю** выражения

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] \neq 0,$$

откуда следуют неравенства $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}, i \neq j$ о *несимметричности* тензора напряжений сплошной среды.

Действительно, левая часть данного выражения в силу уравнения динамики сплошной среды в напряжениях равна следующему выражению:

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = [\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] - [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j] = [\vec{r}, 0] -$$

$$-\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j\right] = -[\vec{i}_j, \vec{\pi}_j] = -(\pi_{23} - \pi_{32})\vec{i}_1 - (\pi_{31} - \pi_{13})\vec{i}_2 - (\pi_{12} - \pi_{21})\vec{i}_3,$$

из которого следует неравенство

$$(\pi_{23} - \pi_{32})\vec{i}_1 + (\pi_{31} - \pi_{13})\vec{i}_2 + (\pi_{12} - \pi_{21})\vec{i}_3 \neq 0,$$

что является доказательством **несимметричности** тензора напряжений сплошной среды $\pi_{23} \neq \pi_{32}, \pi_{31} \neq \pi_{13}, \pi_{12} \neq \pi_{21}$

1.2. Парадоксы деформационного движения элементарного объема сплошной среды

Как известно, в механике сплошной среды фигурирует симметричный тензор скоростей деформаций \dot{S} (см. [1], [2], [3], [4]). Целью параграфа является доказательство того, что *несимметричный* тензор перемещения \bar{S} обладает такими же свойствами.

В теории деформационного движения элементарного объема и с целью установления реологических законов динамики вязкой сплошной среды широко используется ряд *Тейлора*

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \delta z,$$

в фиксированный момент времени t .

Ряд *Тейлора* в матрично-векторной форме имеет вид

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \bar{S} \delta\vec{r}, \quad (1.2.1)$$

где стоит матрица, именуемая в дальнейшем *тензором перемещения*:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Обозначая элементы данной матрицы

$$\bar{S}_{xx} = \partial u / \partial x, \bar{S}_{yx} = \partial u / \partial y, \bar{S}_{zx} = \partial u / \partial z, \bar{S}_{yy} = \partial v / \partial y, \bar{S}_{xy} = \partial v / \partial x,$$

$$\bar{S}_{zz} = \partial w / \partial z, \bar{S}_{yz} = \partial w / \partial y, \bar{S}_{xz} = \partial w / \partial x, \bar{S}_{zy} = \partial v / \partial z,$$

можно записать тензор перемещения, по аналогии с известным в гидромеханике тензором скоростей деформаций \dot{S} , в виде:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{xx} & \bar{S}_{yx} & \bar{S}_{zx} \\ \bar{S}_{xy} & \bar{S}_{yy} & \bar{S}_{zy} \\ \bar{S}_{xz} & \bar{S}_{yz} & \bar{S}_{zz} \end{pmatrix}$$

Теорема 2. Тензор перемещения \bar{S} обладает теми же свойствами, что и тензор скоростей деформаций \dot{S} .

Доказательство. Следуя [1], введем три скорости $\dot{e}_x, \dot{e}_y, \dot{e}_z$ относительного удлинения жидких элементарных векторов $\delta\vec{r}_1(\delta x, 0, 0)$, $\delta\vec{r}_2(0, \delta y, 0)$, $\delta\vec{r}_3(0, 0, \delta z)$, расположенных вдоль осей прямоугольной системы координат с началом в некоторой точке M :

$$\dot{e}_x = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt}(\delta x), \dot{e}_y = \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt}(\delta y), \dot{e}_z = \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt}(\delta z) \quad (1.2.2)$$

и три скорости скошения координатных углов $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ между осями, которые до деформации были равны $\pi/2$. Из скалярных произведений вытекают косинусы этих углов

$$\cos \gamma_{xy} = (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2) / (\delta x \delta y), \cos \gamma_{yz} = (\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3) / (\delta z \delta y),$$

$$\cos \gamma_{zx} = (\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1) / (\delta x \delta z) \quad (1.2.3)$$

Производные по времени от этих углов обозначаются

$$\dot{e}_{xy} = -\partial \gamma_{xy} / \partial t, \dot{e}_{yz} = -\partial \gamma_{yz} / \partial t, \dot{e}_{zx} = -\partial \gamma_{zx} / \partial t$$

В основу определения кинематического смысла компонент тензора перемещения \bar{S} полагается соотношение

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \delta \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \delta \vec{v}, \quad (1.2.4)$$

которое вытекает из равенств:

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}_1) - \vec{v}(\vec{r}) = \delta\vec{v}$$

В силу $\vec{r}_1 = \vec{r} + \delta\vec{r}$, формула (1.2.1) представляется в виде

$$\delta\vec{v} = \bar{S} \delta\vec{r} \quad (1.2.5)$$

После подстановки (1.2.4) в (1.2.5) получается равенство

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \bar{S} \delta\vec{r} \quad (1.2.6)$$

Полагая в нем $\delta\vec{r}$ последовательно равным $\delta\vec{r}_1(\delta x, 0, 0)$, $\delta\vec{r}_2(0, \delta y, 0)$, $\delta\vec{r}_3(0, 0, \delta z)$ и проектируя на три оси координат, найдем

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \bar{S}_{xx} \delta x, \quad \frac{d}{dt}(\delta y) = \bar{S}_{yy} \delta y, \quad \frac{d}{dt}(\delta z) = \bar{S}_{zz} \delta z,$$

что согласно (1.2.2) дает связь

$$\bar{S}_{xx} = \dot{e}_x, \bar{S}_{yy} = \dot{e}_y, \bar{S}_{zz} = \dot{e}_z, \dot{e}_x = \partial u / \partial x, \dot{e}_y = \partial v / \partial y, \dot{e}_z = \partial w / \partial z, \quad (1.2.7)$$

откуда вытекают равенства диагональных компонент тензора перемещения \bar{S} соответственно скоростям относительных удлинений элементарных отрезков, расположенных вдоль осей координат и имеющих начало в данной точке потока.

Вычислим производные по t от равенств (1.2.3):

$$\begin{aligned} -\sin \gamma_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} &= \frac{1}{\delta x \delta y} \frac{d(\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2)}{dt} + (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta x \delta y} \right), \\ -\sin \gamma_{yz} \frac{d\gamma_{yz}}{dt} &= \frac{1}{\delta z \delta y} \frac{d(\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3)}{dt} + (\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta z \delta y} \right), \\ -\sin \gamma_{zx} \frac{d\gamma_{zx}}{dt} &= \frac{1}{\delta x \delta z} \frac{d(\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1)}{dt} + (\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\delta x \delta z} \right) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Данные равенства в [1] применяются в момент времени $t = t_0$, соответствующий начальному недеформированному состоянию элементарного объема, когда

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \frac{\pi}{2}, (\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2) = 0, (\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3) = 0, (\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1) = 0$$

Из (1.2.8) вытекают, ибо синусы прямых углов равны 1:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{xy} &= -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{1}{\delta x \delta y} \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2), \quad \dot{\varepsilon}_{yz} = -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} = \frac{1}{\delta y \delta z} \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3), \\ \dot{\varepsilon}_{zx} &= -\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t} = \frac{1}{\delta z \delta x} \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_3, \delta \vec{r}_1)\end{aligned}\quad (1.2.9)$$

Используя (1.2.6) и правила вычисления скалярно-векторных произведений и произведений матрицы на вектор, имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2) &= \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_1) \delta \vec{r}_2 + \delta \vec{r}_1 \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_2) = ((\bar{S} \delta \vec{r}_1), \delta \vec{r}_2) + (\delta \vec{r}_1, (\bar{S} \delta \vec{r}_2)) = \\ &= (\bar{S} \delta \vec{r}_1)_y \delta y + \delta x (\bar{S} \delta \vec{r}_2)_x = \bar{S}_{xy} \delta x \delta y + \bar{S}_{yx} \delta y \delta x = (\bar{S}_{xy} + \bar{S}_{yx}) \delta x \delta y, \\ \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3) &= (\bar{S}_{yz} + \bar{S}_{zy}) \delta z \delta y, \quad \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_3, \delta \vec{r}_1) = (\bar{S}_{zx} + \bar{S}_{xz}) \delta z \delta x,\end{aligned}$$

откуда следуют в силу (1.2.9) равенства

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \bar{S}_{xy} + \bar{S}_{yx}, \quad \dot{\varepsilon}_{yz} = \bar{S}_{yz} + \bar{S}_{zy}, \quad \dot{\varepsilon}_{zx} = \bar{S}_{zx} + \bar{S}_{xz}\quad (1.2.10)$$

В [1], [2], [3] и др., соотносясь с формулой первой теоремы Гельмгольца, вводится тензор скоростей деформаций

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\quad (1.2.11)$$

Наряду с этим вводится антисимметричный тензор

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

В сумме имеет место равенство $\bar{S} = \dot{S} + \hat{S}$.

Используя иное представление (первая теорема Гельмгольца)

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) = \bar{\omega}x\delta\vec{r} + \dot{S}\delta\vec{r}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{v}$$

в [1] получены соотношения, аналогичные (1.2.7) и (1.2.10):

$$\begin{aligned} \dot{S}_{xx} = \dot{e}_x, \dot{S}_{yy} = \dot{e}_y, \dot{S}_{zz} = \dot{e}_z, \dot{e}_x = \partial u / \partial x, \dot{e}_y = \partial v / \partial y, \dot{e}_z = \partial w / \partial z, \\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2) = (\dot{S}_{xy} + \dot{S}_{yx})\delta x\delta y, \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3) = (\dot{S}_{yz} + \dot{S}_{zy})\delta z\delta y, \\ \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1) = (\dot{S}_{zx} + \dot{S}_{xz})\delta z\delta x, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

В силу симметричности тензора скоростей деформаций имеют место равенства

$$\dot{S}_{xy} = \dot{S}_{yx} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{xy}, \quad \dot{S}_{yz} = \dot{S}_{zy} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{yz}, \quad \dot{S}_{zx} = \dot{S}_{xz} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{zx} \quad (1.2.13)$$

Парадоксально то, что как из (1.2.13) так и из (1.2.10) вытекают одинаковые равенства

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

несмотря на разительное отличие друг от друга тензоров \dot{S} и \bar{S} !

Рассмотрим скорость относительного объемного расширения среды в данной ее точке

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt}(\delta\tau),$$

$\delta\tau$ - элементарный «жидкий» объем среды, определяемый тройным скалярно-векторным произведением элементарных координатных векторов

$$\delta\vec{r}_1(\delta x, 0, 0), \delta\vec{r}_2(0, \delta y, 0), \delta\vec{r}_3(0, 0, \delta z): \quad \delta\tau = (\delta\vec{r}_1, [\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3])$$

Вычисляя индивидуальную производную по времени, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt}(\delta\tau) = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1, [\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3]) = \\ &= \frac{1}{\delta\tau} \left(\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_1), [\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3] \right) + \frac{1}{\delta\tau} \left(\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_2), [\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1] \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\delta\tau} \left(\frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_3), [\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2] \right)$$

Для элементарного параллелепипеда $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ и по известному свойству единичных векторов осей координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а также в силу представлений

$$\delta\vec{r}_1 = \delta x \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}, \quad \delta\vec{r}_2 = 0\vec{i} + \delta y \vec{j} + 0\vec{k}, \quad \delta\vec{r}_3 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \delta z \vec{k}$$

получается

$$\frac{[\delta\vec{r}_2, \delta\vec{r}_3]}{\delta\tau} = \frac{1}{\delta x} \left[\frac{\delta\vec{r}_2}{\delta y}, \frac{\delta\vec{r}_3}{\delta z} \right] = \frac{1}{\delta x} [\vec{j}, \vec{k}] = \frac{\vec{i}}{\delta x},$$

$$\frac{[\delta\vec{r}_3, \delta\vec{r}_1]}{\delta\tau} = \frac{\vec{j}}{\delta y}, \quad \frac{[\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2]}{\delta\tau} = \frac{\vec{k}}{\delta z},$$

в силу чего предыдущее равенство перейдет в следующее

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt} (\delta\tau) =$$

$$= \frac{1}{\delta x} \left(\vec{i}, \frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_1) \right) + \frac{1}{\delta y} \left(\vec{j}, \frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_2) \right) + \frac{1}{\delta z} \left(\vec{k}, \frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_3) \right)$$

Используя вновь равенство (1.2.6), согласно которому

$$\frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_1) = \bar{S}_{xx} \delta\vec{r}_1, \quad \frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_2) = \bar{S}_{yy} \delta\vec{r}_2, \quad \frac{d}{dt} (\delta\vec{r}_3) = \bar{S}_{zz} \delta\vec{r}_3,$$

определяется искомое выражение $\dot{\theta}$ в форме

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt} (\delta\tau) = \frac{1}{\delta x} (\vec{i}, \bar{S}_{xx} \delta\vec{r}_1) + \frac{1}{\delta y} (\vec{j}, \bar{S}_{yy} \delta\vec{r}_2) + \frac{1}{\delta z} (\vec{k}, \bar{S}_{zz} \delta\vec{r}_3),$$

где скалярные произведения равны

$$\frac{1}{\delta x} (\vec{i}, \bar{S}_{xx} \delta\vec{r}_1) = \bar{S}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{1}{\delta y} (\vec{j}, \bar{S}_{yy} \delta\vec{r}_2) = \bar{S}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{1}{\delta z} (\vec{k}, \bar{S}_{zz} \delta\vec{r}_3) = \bar{S}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Окончательно получается

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt} (\delta\tau) = \bar{S}_{xx} + \bar{S}_{yy} + \bar{S}_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{v}, \quad (1.2.14)$$

т.е. скорость относительного объемного расширения элементарного объема среды в данной ее точке равна

дивергенции вектора скорости в этой точке или сумме скоростей относительных удлинений

$$\dot{\theta} = \dot{e}_x + \dot{e}_y + \dot{e}_z$$

Таким образом, с применением тензора перемещения \bar{S} установлена использованная выше формула (1.1.4) **1.1**. Она непосредственно вытекает из (1.2.14):

$$\frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt} = \text{div} \vec{v} \quad (1.2.15)$$

или в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial(\delta\tau)}{\partial t} + u \frac{\partial(\delta\tau)}{\partial x} + v \frac{\partial(\delta\tau)}{\partial y} + w \frac{\partial(\delta\tau)}{\partial z} = \delta\tau \text{div} \vec{v}$$

и выражает *изменение элементарного объема* среды во времени при заданном ее движении, т.е. $\delta\tau = \delta\tau(x, y, z, t)$.

1.3. Парадоксы интегрального вывода уравнений динамики сплошной среды

В [1], [2], [3], [4] применяется интегрирование по объему τ , таким образом, уравнения динамики сплошной среды выводятся **дедуктивным методом**. Именно применение дедуктивного метода привело к ложному положению о симметричности тензора напряжений. Отправным пунктом является закон изменения импульса (или количества движений) для системы точек с массами m_i и скоростями \vec{v}_i :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i, \quad (1.3.1)$$

где $\vec{p}_i = (\vec{v}_i m_i)$ - импульс (количество движения) частицы с массой m_i , движущейся под действием результирующих сил \vec{f}_i , в которые входят все силы, действующие на частицу с номером i , как внешние так и внутренние силы взаимодействия частиц между собой. При суммировании эти

внутренние силы по третьему закону *Ньютона* сокращаются попарно (см. [7]).

В дедуктивном методе закон (1.3.1) применяется к произвольному объему τ с поверхностью σ , внешняя нормаль которой обозначена \vec{n} . Закон изменения импульса записывается для произвольного объема τ в виде:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \vec{v} \rho \delta\tau = \iiint_{\tau} \vec{F} \rho \delta\tau + \iint_{\sigma} \vec{\pi}_n \delta\sigma \quad (1.3.2)$$

В [1] преобразование левой части (1.3.2) производится по формуле (1.1.11) **1.1**:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \vec{v} \rho \delta\tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\vec{v} \rho \delta\tau),$$

но в [2] применяется формула *Лейбница*. Очевидно, в интегральном выводе уравнений динамики сплошной среды возникают

проблемы с вычислениями $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \vec{v} \rho \delta\tau$ или производной от мо-

ментов $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho] \delta\tau$ и т.п., на что было указано в виде пяти

формул в **1.1**. Удачные применения формул *Лейбница* или (1.1.11) **1.1** связаны с тем, что уравнения динамики сплошной среды должны были соответствовать теореме об изменении импульса или второму закону *Ньютона*.

Первое, что обращает внимание, в поверхностном интеграле в (1.3.2) учтены только силы, действующие на частицы, расположенные на поверхности σ объема τ , т.е. *не учтены внутренние напряжения* $\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma$, действующие на частицы

поверхности $\sigma_{\delta\tau}$ индивидуального объема $\delta\tau$, содержащего массу $\sum_i m_i = \delta m = \rho \delta\tau$ совокупности частиц, С учетом этих

сил интегральное выражение должно иметь исходный вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \vec{v} \rho \delta\tau = \iiint_{\tau} \vec{F} \rho \delta\tau + \iiint_{\tau} \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma \quad (1.3.2a)$$

Далее, объем $\delta\tau_A$ действует на другой объем $\delta\tau_B$ с силой $\vec{f}_A = \iint_{\sigma_{\delta\tau_A}} \vec{\pi}_n \delta\sigma$ и, наоборот, объем $\delta\tau_B$ действует с силой $\vec{f}_B = \iint_{\sigma_{\delta\tau_B}} \vec{\pi}_n \delta\sigma$ на объем $\delta\tau_A$, то по 3-ему закону Ньютона

имеет место равенство $\vec{f}_A = -\vec{f}_B$. В результате сокращения этих сил при суммировании получается равенство

$$\iiint_{\tau} \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma = \iint_{\sigma} \vec{\pi}_n \delta\sigma, \quad (*)$$

т.е. такое должно быть обоснование (1.3.2). Из правильно составленного выражения (1.3.2a), если применить к левой части формулу *Лейбница* или формулу (1.1.11) **1.1**, выводится уравнение динамики сплошной среды в напряжениях, то есть нет необходимости перехода к формуле (1.3.2).

В теореме об изменении момента импульса

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \rho \delta\tau] + \iint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta\sigma], \quad (1.3.3)$$

которая применена в [1] к объему \mathcal{T} аналогично (1.3.2), равенство типа (*) не имеет места. Согласно приведенным выше рассуждениям *правильно составленная* теорема об изменении момента импульса (количества движений) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \rho \delta\tau] + \iiint_{\tau} [\vec{r}, \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma] \quad (1.3.3a)$$

Из (1.3.3) выводится равенство, используемое в [1] и др.,

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0$$

со всеми вытекающими отсюда противоречиями о *симметричности тензора напряжений* сплошной среды.

Из правильно составленного выражения (1.3.3а) получается соотношение

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - [\vec{r}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] = 0,$$

из которого следует уравнение динамики в напряжениях

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j},$$

следовательно, не возникает вопроса о *симметричности* тензора напряжений, что имело место в неправильной формулировке (1.3.3).

Другой *парадокс* состоит в том, что для вывода основных уравнений механики сплошной среды нет никакой необходимости в интегральных формулах типа (1.3.2), (1.3.3). Покажем это.

Пусть масса индивидуального объема $\delta\tau$ равна $\delta m = \rho \delta\tau$, ρ – плотность, \vec{F} – плотность массовых сил, $\vec{\pi}_n$ – напряжение.

Теорему об изменении импульса нужно сформулировать непосредственно для объема $\delta\tau$, имея в виду, что главная поверхностная сила, действующая на поверхность $\sigma_{\delta\tau}$ объема $\delta\tau$

равна $\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma$, главная массовая сила, действующая на

объем $\delta\tau$, равна $\vec{F} \delta m$:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \delta m) = \vec{F} \delta m + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma \quad (1.3.4)$$

Далее, по теореме *Остроградского-Гаусса* осуществляется переход к объемному интегралу

$$\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma = \iiint_{\delta\tau} \left(\frac{\partial \vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_z}{\partial z} \right) \delta\tau', \quad \delta\tau = \iiint_{\delta\tau} \delta\tau'$$

По теореме о среднем значении определенного интеграла и

малости индивидуального объема $\delta\tau$ получается

$$\begin{aligned} \iiint_{\delta\tau} \left(\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \right) \delta\tau' &= \left(\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \right) \iiint_{\delta\tau} \delta\tau' = \\ &= \left(\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \right) \delta\tau, \end{aligned}$$

следовательно, имеет место равенство

$$\iint_{\sigma_{\delta\tau}} \bar{\pi}_n \delta\sigma = \left(\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \right) \delta\tau \quad (1.3.5)$$

Подставляя (1.3.5) и $\delta m = \rho \delta\tau$ в (1.3.4), находим

$$\frac{d}{dt} (\bar{v} \rho \delta\tau) = \bar{F} \rho \delta\tau + \left(\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \right) \delta\tau \quad (1.3.6)$$

Левая часть (1.3.6) преобразовывается на основании формулы (1.1.4) **1.1** и уравнения неразрывности $d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \delta\tau + \rho \bar{v} \delta\tau \operatorname{div} \bar{v} + \bar{v} \delta\tau \frac{d\rho}{dt} &= \\ &= \bar{F} \rho \delta\tau + \left(\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \right) \delta\tau, \end{aligned}$$

откуда после сокращений $\delta\tau$ получается классическое уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z}$$

1.4. Индуктивный метод

Индуктивный метод (от частного к общему) свободен от указанных выше недостатков, потому как используется понятие *частицы* сплошной среды. «Жидкий» индивидуальный объем $\delta\tau$ составлен именно из этих частиц с массами m_i и скоростями

ми \vec{v}_i . (Если бы с самого начала развития механики сплошных сред применялся индуктивный метод, то не было бы проблемы *симметричности* тензора напряжений! В связи с чем здесь достаточно подробно излагается этот физический метод.)

Предполагается в силу сплошности среды, что в $\delta\tau$ содержится сумма частиц $\sum_i m_i = \delta m$, среднемассовая скорость \vec{v}

$$\text{объема } \delta\tau \text{ определяется как отношение } \vec{v} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\delta m},$$

аналогично определяется среднемассовая сила, действующая

$$\text{на } \delta\tau : \vec{F} = \frac{\sum_i m_i \vec{F}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{F}_i}{\delta m}, \quad \text{откуда } \vec{F} \delta m = \sum_i m_i \vec{F}_i,$$

$$\vec{v} \delta m = \sum_i m_i \vec{v}_i, \quad \text{плотность } \rho = \frac{\delta m}{\delta\tau}, \quad \delta m = \rho \delta\tau = \sum_i m_i \quad [2].$$

Теорема об изменении импульса системы материальных точек применяется к элементарному индивидуальному объему сплошной среды $\delta\tau$, в которой находится совокупность частиц $\sum_i m_i$, а не к конечному объему $\tau = \iiint_{\tau} \delta\tau$, собственно говоря,

в этом заключается вся суть **индуктивного** метода:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i m_i + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k, \quad (1.4.1)$$

где $\vec{\pi}_n = \frac{\sum_k \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k}{\delta\sigma}$ - главное напряжение, действующее на по-

верхность $\delta\sigma = \sum_k \delta\sigma_k$, $\delta\sigma \in \sigma_{\delta\tau}$, $\delta\sigma_k$ - участок поверхности

$\delta\sigma$, которую занимает частица $m_{\sigma k}$, находящаяся под дей-

ствием напряжения $\vec{\pi}_{nk}$, поверхность индивидуального объема $\delta\tau$ равна: $\sigma_{\delta\tau} = \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \delta\sigma$. (В формуле (1.4.1) стоит знак интеграла в своем истинном смысле суммирования по поверхности $\sigma_{\delta\tau}$ бесконечно малых величин, что будет применяться и в дальнейшем.)

Формула (1.4.1) в эквивалентной записи принимает уже использованный выше вид

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \delta m) = \vec{F} \delta m + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \vec{\pi}_n \delta\sigma, \quad (1.4.2)$$

откуда получается, как было показано, уравнение динамики сплошной среды в напряжениях.

В некоторых учебниках поступают проще, не применяя теорему о среднем интеграла, а пользуясь предельным переходом $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z \rightarrow 0$, взяв в качестве элементарного объема $\delta\tau$ параллелепипед с гранями $\delta x = x_2 - x_1, \delta y = y_2 - y_1, \delta z = z_2 - z_1$. Закон изменения импульса для параллелепипеда с суммой частиц $\sum_i m_i = \delta m = \rho \delta\tau$ записывается с учетом массовых и поверх-

ностных сил. В результате в приложении к параллелепипеду теорема об изменении импульса примет вид, который аналогичен (1.4.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{v} \delta m) = \vec{F} \delta m + (\vec{\pi}_{x_2} + \vec{\pi}_{-x_1}) \delta y \delta z + \\ + (\vec{\pi}_{y_2} + \vec{\pi}_{-y_1}) \delta x \delta z + (\vec{\pi}_{z_2} + \vec{\pi}_{-z_1}) \delta x \delta y, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

где $\vec{v} \delta m = \sum_i m_i \vec{v}_i, \vec{F} \delta m = \sum_i m_i \vec{F}_i, \vec{\pi}_n \delta\sigma = \sum_k \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k$.

Сравнение (1.4.3) с (1.4.2) показывает, что поверхностный интеграл для параллелепипеда вычисляется по его граням: $\sigma_{\delta\tau} = (\delta y \delta z)_1 \cup (\delta y \delta z)_2 \cup (\delta x \delta z)_1 \cup (\delta x \delta z)_2 \cup (\delta x \delta y)_1 \cup (\delta x \delta y)_2$

В результате получается следующее значение интеграла

$$\oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k \bar{\pi}_{nk} \delta\sigma_k = (\bar{\pi}_{x_2} + \bar{\pi}_{-x_1}) \delta y \delta z + (\bar{\pi}_{y_2} + \bar{\pi}_{-y_1}) \delta x \delta z +$$

$$+ (\bar{\pi}_{z_2} + \bar{\pi}_{-z_1}) \delta x \delta y$$

Используя формулу $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \operatorname{div} \vec{v}$ и равенство напряжений

$$\bar{\pi}_{-x_1} = -\bar{\pi}_{x_1}, \bar{\pi}_{-y_1} = -\bar{\pi}_{y_1}, \bar{\pi}_{-z_1} = -\bar{\pi}_{z_1}, \quad (1.4.4)$$

поделив на объем $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$, приходим к выражению

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = \rho \vec{F} + (\bar{\pi}_{x_2} - \bar{\pi}_{x_1}) / \delta x +$$

$$+ (\bar{\pi}_{y_2} - \bar{\pi}_{y_1}) / \delta y + (\bar{\pi}_{z_2} - \bar{\pi}_{z_1}) / \delta z \quad (1.4.5)$$

Очевидно, предельный переход в (1.4.5) $\delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0, \delta z \rightarrow 0$, дает уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = \rho \vec{F} + \frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} \quad (1.4.6)$$

При равенстве нулю уравнения неразрывности (нет источников и стоков)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

данное уравнение (1.4.6) точно совпадает с уравнением (1.3.10) из **1.3**.

Здесь не используются теорема *Остроградского-Гаусса* и теорема о среднем интеграла.

Уравнение баланса энергий выводится таким же способом. Для элементарного параллелепипеда $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ сплошной среды закон сохранения энергий формулируется в виде

$$\frac{d}{dt} [(E + |\vec{v}|^2 / 2) \delta m] = (\vec{F} \delta m, \vec{v}) + [(\bar{\pi}_{x_2}, \vec{v}_{(x_2)}) + (\bar{\pi}_{-x_1}, \vec{v}_{(x_1)})] \delta y \delta z +$$

$$+ [(\bar{\pi}_{y_2}, \vec{v}_{(y_2)}) + (\bar{\pi}_{-y_1}, \vec{v}_{(y_1)})] \delta z \delta x +$$

$$+ [(\bar{\pi}_{z_2}, \vec{v}_{(z_2)}) + (\bar{\pi}_{-z_1}, \vec{v}_{(z_1)})] \delta x \delta y -$$

$$- \left\{ (q_{(x)2} - q_{(x)1}) \delta y \delta z + (q_{(y)2} - q_{(y)1}) \delta z \delta x + (q_{(z)2} - q_{(z)1}) \delta x \delta y \right\} + Q \delta m \quad (1.4.7)$$

где $\vec{v}_{(x_m)}$, $m = 1, 2$ - значения вектора скорости на площадках $\delta y \delta z$ в сечениях x_1, x_2 и т.п., $\vec{q} = q_{(x)} \vec{i} + q_{(y)} \vec{j} + q_{(z)} \vec{k}$ - вектор потока тепла, $(E + |\vec{v}|^2 / 2) \delta m$ - полная энергия объема $\delta \tau$, $(\vec{F} \delta m, \vec{v})$ - мощность массовой силы, а это выражение

$$\begin{aligned} & [(\vec{\pi}_{x_2}, \vec{v}_{(x_2)}) + (\vec{\pi}_{-x_1}, \vec{v}_{(x_1)})] \delta y \delta z + \\ & + [(\vec{\pi}_{y_2}, \vec{v}_{(y_2)}) + (\vec{\pi}_{-y_1}, \vec{v}_{(y_1)})] \delta z \delta x + \\ & + [(\vec{\pi}_{z_2}, \vec{v}_{(z_2)}) + (\vec{\pi}_{-z_1}, \vec{v}_{(z_1)})] \delta x \delta y \end{aligned}$$

дает сумму мощностей поверхностных сил, действующих на пары граней $\delta y \delta z$, $\delta z \delta x$, $\delta x \delta y$ параллелепипеда, сумма

$$- \left\{ (q_{(x)2} - q_{(x)1}) \delta y \delta z + (q_{(y)2} - q_{(y)1}) \delta z \delta x + (q_{(z)2} - q_{(z)1}) \delta x \delta y \right\}$$

- есть потоки тепла через эти грани, $Q \delta m$ - мощность источника или потребителя энергии в объеме $\delta \tau$.

Поделив обе части (1.4.7) на $\delta \tau = \delta x \delta y \delta z$ и стягивая параллелепипед $\delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0, \delta z \rightarrow 0$ к точке, приходим к уравнению баланса энергий в сплошной среде:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} (E + |\vec{v}|^2 / 2) + (E + |\vec{v}|^2 / 2) \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = \quad (1.4.8) \\ & = \rho (\vec{F}, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\pi}_x, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\pi}_y, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\pi}_z, \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q} + \rho Q, \end{aligned}$$

из которого по закону Фурье $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ и $dE = c_v dT$, получается уравнение притока тепла для несимметричного тензора напряжений Ньютона [8] в виде

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2$$

(Энергия тепла, проходящая через площадку $\delta\sigma$ в единицу времени, равна $(\vec{q}, \vec{n})\delta\sigma$). Изложенный выше индуктивный подход обладает прямой связью с основными законами физики.

Следует отметить, что уравнение неразрывности (1.4.6) выведено в [1] из закона сохранения материи *индуктивным* методом. По закону сохранения материи масса $\delta m = \rho\delta\tau$ индивидуального объема $\delta\tau$ есть величина постоянная $\delta m = const$, поэтому

$$\frac{d\delta m}{dt} = 0, \frac{d(\rho\delta\tau)}{dt} = 0, \rho \frac{d(\delta\tau)}{dt} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.4.9)$$

В силу формулы $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \cdot \text{div}\vec{v}$ из (1.4.9) вытекает

выражение
$$\rho\delta\tau \text{div}\vec{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

откуда, сокращая $\delta\tau$, приходим к уравнению неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}\vec{v} = 0$$

Целью вышеизложенных двух параграфов было обоснование того, что для вывода основных уравнений можно не применять *дедуктивный* метод.

Как это показано в **1.3**, при выводе ложной симметричности тензора напряжений сплошной среды традиционно используется *дедуктивный метод*.

1.5. Парадоксы первой теоремы Гельмгольца

Известно [1], что Гельмгольц, исключая давление p из уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости [1], вывел уравнение для ротора скорости

$$\text{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Имея в виду, что размерность $\text{rot}\vec{v}$ совпадает с размерностью угловой скорости $\vec{\omega}$, Гельмгольц попытался связать их с помощью *формулы скорости для точек твердого тела* [1]:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, (\vec{r} - \vec{r}_0)], \quad (1.5.1)$$

где \vec{v}_0 , \vec{r}_0 скорость и радиус-вектор полюса, относительно которого в данный момент происходит мгновенное вращение тела. Попытка выразить компоненты угловой скорости $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ через компоненты линейной скорости $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ привела Гельмгольца к решению относительно $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ линейной алгебраической системы

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0), \\ v &= v_0 + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0), \\ w &= w_0 + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0), \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

определитель которой равен нулю, поэтому данная система при заданных разностях

$$\begin{aligned} \delta u &= u - u_0, \delta v = v - v_0, \delta w = w - w_0, \\ \delta x &= x - x_0, \delta y = y - y_0, \delta z = z - z_0 \end{aligned}$$

имеет бесконечное множество решений, что в первую очередь следует из равенства

$$| \vec{v} - \vec{v}_0 | = | [\vec{\omega}, (\vec{r} - \vec{r}_0)] | = |\vec{\omega}| |\vec{r} - \vec{r}_0| \sin \alpha;$$

совместность системы вытекает из условия ортогональности $\vec{v} - \vec{v}_0$ к $\vec{r} - \vec{r}_0$: $(\vec{v}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. В самом деле, если в качестве исходной произвольной переменной выбрать ω_x , то множество решений системы (1.5.2) записывается в виде

$$\omega_z = \frac{\delta v}{\delta x} + \omega_x \frac{\delta z}{\delta x}, \omega_y = \omega_x \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} \quad (1.5.3)$$

Гельмгольц (или Лойцянский в [1]) поступают совершенно иначе. Полагая постоянными \vec{v}_0, \vec{r}_0 , $\vec{\omega}$ дифференцируется (1.5.2) по x, y, z , в результате для компонент угловой скорости *твердого тела* получаются выражения:

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.5.4)$$

Парадоксально, что применение метода (1.5.4) *Гельмгольца* к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, N$$

дает $N*N$ значений $x_j = \frac{\partial b_i}{\partial a_{ij}}, j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, N$ искомым неизвестных вместо положенных N . Очевидно, из них можно образовать любые комбинации типа

$$x_j = \sum_m (\alpha_m \frac{\partial b_{m-}}{\partial a_{mj}}) / \sum_m \alpha_m, j = 1, \dots, N,$$

где α_m - произвольные числа. В случае системы (1.5.4) этим фактом можно воспользоваться следующим образом.

Умножив верхнюю строчку на n - нижнюю строчку на m , сложив и поделив их на $m+n \neq 0$, найдем значения

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{m}{m+n} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{n}{m+n} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{m}{m+n} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{n}{m+n} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{m}{m+n} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{n}{m+n} \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.5.5)$$

Гельмгольц из данного бесчисленного многообразия компонент угловой скорости использовал только одну совокупность, получающуюся из (1.5.5) при $m=n=1$:

$$(rot \vec{v})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x, (rot \vec{v})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\omega_y,$$

$$(\text{rot}\vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z, \quad (1.5.6)$$

где использовано известное выражение ротора скорости.

Очевидно, ни при каких значениях m, n выражения (1.5.5) $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ **не совпадают** с решениями (1.5.3) системы (1.5.2).

Если даже взять в качестве значения свободной переменной

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

подставляя его в найденные решения (1.5.3) системы (1.5.2)

$$\omega_z = \frac{\delta v}{\delta x} + \omega_x \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\delta z}{\delta x} \neq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\omega_y = \omega_x \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta w}{\delta x} \neq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

убеждаемся в том, что формулы **Гельмгольца** (1.5.6) **не являются решениями системы** (1.5.2), ч.т.д. Парадоксальный факт, используя неправильное решение (1.5.6) *Гельмгольца (или Лойцянский* в [1]) вместо формулы (1.5.1) обращаются к выражению

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left[\frac{1}{2} \text{rot}\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}_0) \right], \quad (1.5.7)$$

которое ничего общего с формулой скорости твердого тела (1.5.1) не имеет, потому что (1.5.6) не является решением системы (1.5.2).

В силу того, что формулы *Гельмгольца* (1.5.6) не являются решениями системы (1.5.2) данное выражение вовсе не эквивалентно формуле (1.5.1) скорости точки твердого тела! (Эта формула вообще *ошибочна*, она не годится для расчета скорости точек твердого тела.) Тем ни менее, данное выражение стало в дальнейшем прообразом первой теоремы *Гельмгольца*, на которой остановимся более подробно.

Первая теорема *Гельмгольца* выводится из приближенной формулы, представляющей члены с первыми производными ряда *Тейлора* в виде

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \vec{S} \delta\vec{r} \quad (1.5.8)$$

Гельмгольц по аналогии с неправильным выражением (1.5.7) преобразовал (1.5.8) к эквивалентному виду (см. [1]):

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} [\text{rot}\vec{v}, \delta\vec{r}] + \dot{S}\delta\vec{r}, \quad (1.5.9)$$

введя тензор скоростей деформаций \dot{S} . Формула (1.5.9) является содержанием первой теоремы *Гельмгольца*. Сравнивая (1.5.9) с ошибочным выражением (1.5.7), *Гельмгольц* объявляет $\dot{S}\delta\vec{r}$ деформационным смещением. Если иметь в виду, что выражение $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\frac{1}{2}\text{rot}\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}_0)]$ в отдельности вообще не имеет никакого физического смысла, в отличие от скорости точки твердого тела $\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, (\vec{r} - \vec{r}_0)]$, то сформулированное понятие деформационного смещения является весьма сомнительным с физической точки зрения.

Более содержательным является перемещение $\bar{S}\delta\vec{r}$ в (1.5.8) и в силу результатов (1.2.7), (1.2.9), (1.2.10) **1.2** это произведение можно объявить деформационным смещением.

Теорема 3. Ряд *Тейлора* (1.5.8) имеет бесконечное число форм, содержащих $\text{rot}\vec{v}$, следовательно, имеет место бесконечное число «деформационных смещений» $\dot{S}\delta\vec{r}$, первая теорема *Гельмгольца* получается из них как частный случай.

Для доказательства запишем ряд *Тейлора* (1.5.8) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} u(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z, \\ v(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= v(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z, \quad (1.5.10) \\ w(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= w(x, y, z, t) + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned}$$

Эквивалентное преобразование ряда *Тейлора* (1.5.10) имеет вид:

$$\begin{aligned}
u(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x - \frac{b-1}{b} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y + \\
&+ \frac{b-1}{b} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta z + \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta z, \\
v(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= v(x, y, z, t) + \frac{b-1}{b} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \\
&- \frac{b-1}{b} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z + \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z, \quad (1.5.11) \\
w(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= w(x, y, z, t) - \frac{b-1}{b} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x + \\
&+ \frac{b-1}{b} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z + \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta y,
\end{aligned}$$

По аналогии с представлением Гельмгольца (1.5.9) ряд Тейлора (1.5.11) можно записать в векторном виде:

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta \vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{b-1}{b} [\operatorname{rot} \vec{v}, \delta \vec{r}] + S_b \delta \vec{r}, \quad (1.5.12)$$

используя очевидное матрично-векторное представление

$$S_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad (1.5.13)$$

$b = \text{const}$, $b \neq 0$, $|b| < \infty$. При $b=2$ из (1.5.12) получается первая теорема Гельмгольца (1.5.9), ибо $S_2 = \dot{S}$, т.е. тензор S_2 равен тензору скоростей деформаций, при $b=1$ универсальная формула (1.5.12) переходит в ряд Тейлора в исходной записи (1.5.8), т.к. $S_1 = \bar{S}$, т.е. S_1 равен матрице перемещения. Всюду выше ротор скорости имеет компоненты

$$(\text{rot}\vec{v})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, (\text{rot}\vec{v})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, (\text{rot}\vec{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.5.14)$$

Поэтому разложению в ряд *Тейлора* (1.5.10) можно придать другой эквивалентный вид:

$$\begin{aligned} u(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x - \\ &- \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta z + \frac{\partial v}{\partial x} \delta y + \frac{\partial w}{\partial x} \delta z, \\ v(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= v(x, y, z, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial y} \delta y - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z + \frac{\partial u}{\partial y} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta z, \\ w(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) &= w(x, y, z, t) - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta x + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z + \frac{\partial u}{\partial z} \delta x + \frac{\partial v}{\partial z} \delta y \quad (1.5.15) \end{aligned}$$

По аналогии с (1.5.12) проекции (1.5.15) свертываются в выражение

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + [\text{rot}\vec{v}, \delta\vec{r}] + \delta\vec{r} \bar{S}, \quad (1.5.16)$$

где \bar{S} несимметричная матрица перемещения из **1.1**, в $\delta\vec{r} \bar{S}$ строки умножаются на столбцы. *Гельмгольц* вихрем скорости назвал формулу

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{v}, \quad (1.5.17)$$

исходя из ложного представления (1.5.7), о чем шла речь выше.

Как известно, ротор скорости в гидродинамике связан, в первую очередь, с **циркуляцией скорости** [1], [4]:

$$(\text{rot}\vec{v}, \vec{n}) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{r}), \quad (1.5.18)$$

и компоненты $rot\vec{v}$ в указанном в (1.5.14) виде получаются именно из этого определения (1.5.18), поэтому для вихря скорости должна использоваться формула $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$. Если исходить из определения Гельмгольца, то деформационными смещениями являются $S_b\delta\vec{r}$, входящие в универсальную формулу (1.5.12).

1.6. Парадоксы гипотезы Стокса

1⁰. Гипотеза Стокса основана на неверной формуле Гельмгольца $\vec{v} = \vec{v}_0 + [1/2rot\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}_0)]$

В 1.5 приведена эта ошибочная формула Гельмгольца, на основании которой разложение в ряд Тейлора сформулировано в виде *первой теоремы Гельмгольца* [1]:

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} [rot\vec{v}, \delta\vec{r}] + \dot{S}\delta\vec{r}$$

Далее, Стокс, приняв в этом ряду Тейлора слагаемое $\dot{S}\delta\vec{r}$ за деформационное смещение, происходящее под действием поверхностных сил, гипотетически предположил, что касательные напряжения должны быть пропорциональными **удвоенным значениям** компонент тензора скоростей деформаций \dot{S} :

$$\pi_{ji(c)} = 2\mu\dot{S}_{ji}, i \neq j,$$

благодаря чему, касательные напряжения получились симметричными в силу симметричности матрицы \dot{S} . Стокс пренебрег равноправным членом ряда Тейлора (**в этом состоит главная ошибка этой гипотезы**): $0,5[rot\vec{v}, \delta\vec{r}] \equiv \hat{S}\delta\vec{r}$.

Свою гипотезу Стокс (другое название - обобщенный закон Ньютона [1]), оформил для течений вязких жидкостей и газов в тензорном виде

$$\pi_c = -\left(p + \frac{2}{3}\mu div\vec{v}\right)E + 2\mu\dot{S} \quad (1.6.1)$$

В индексных обозначениях компоненты данного тензора напряжений записываются короче

$$\begin{aligned}\pi_{ii(c)} &= -(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, i = 1, 2, 3, \\ \pi_{ji(c)} &= \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i \neq j,\end{aligned}\quad (1.6.2)$$

и симметричность тензора напряжений в виде

$$\pi_{ij(c)} = \pi_{ji(c)}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, \quad (1.6.3)$$

Обращает внимание то обстоятельство, что в нормальные напряжения диагональные элементы тензора \dot{S} входят **с удвоенным значением**, что связано с *подгонкой* касательных напряжений

(1.6.2) под закон трения *Ньютона* $\pi_{ns} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n}$. Напри-

мер, закон трения *Ньютона* при $v_s = u, n = y, s = x$ дает фор-

мулу $\pi_{yx(n)} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, а по гипотезе *Стокса* (1.6.2) получается

$\pi_{yx(c)} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$. Очевидное несовпадение связано со вклю-

чением парадоксального лишнего члена $\mu \frac{\partial v}{\partial x}$. (Кстати, на необоснованность гипотезы *Стокса* указывал *Л.Д.Ландау*.)

Возникает вопрос об адекватности члена $2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ в нормаль-

ном напряжении в том смысле, что выбор коэффициента «2» обоснован только гипотезой *Стокса* (1.6.1), по которой должно выполняться искусственно созданное равенство

$$\pi_{ji(c)} = 2\dot{S}_{ji}, i \neq j \quad (1.6.4)$$

В предыдущем параграфе **1.5** для ряда *Тейлора*

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \bar{S} \delta\vec{r}$$

было приведено бесчисленное множество эквивалентных формулировок, содержащих ротор скорости:

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{b-1}{b} [\text{rot}\vec{v}, \delta\vec{r}] + S_b \delta\vec{r} \quad (1.6.5)$$

Если следовать логике гипотезы *Стокса*, то напряжения, выбранные из соображений их пропорциональности компонентам тензора S_b , будут определяться в виде

$$\begin{aligned} \pi_{xx} &= -(p + b/3\mu \text{div}\vec{v}) + b\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \pi_{yy} &= -(p + b/3\mu \text{div}\vec{v}) + b\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \pi_{zz} &= -(p + b/3\mu \text{div}\vec{v}) + b\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \pi_{yx} &= \mu \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \pi_{yz} = \mu \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \pi_{xy} &= \mu \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \pi_{xz} = \mu \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \pi_{zx} &= \mu \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial z} \right), \pi_{zy} = \mu \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Для $b \neq 2$ касательные напряжения *несимметричны*, симметричность имеет место только при $b=2$, когда $S_2 = \dot{S}$. Очевидно также, что при $b=1$ матрица (1.6.6) переходит в матрицу перемещения $S_1 = \bar{S}$.

Имеется бесконечное число вязких течений (здесь приведены лишь некоторые из них), в которых симметричность напряжений *Стокса* (1.6.3) противоречит *фундаментальному закону трения Ньютона* $\pi_{ns} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n}$, где \vec{n} поперечное к \vec{s} направление, $v_s = (\vec{v}, \vec{s})$ - проекция скорости на направление орта \vec{s} , π_{ns} - касательное напряжение.

2⁰. Парадокс гипотезы *Стокса* $S_2 = \dot{S}$ в течениях *Пуазейля* и *Куэтта*

В ламинарном течении между параллельными непроницаемыми и недеформируемыми стенками канала (течение *Пуазейля*), скорости определяются решением уравнения

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad u(\pm b) = 0,$$

в виде зависимостей

$$u = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2), \quad \left(\frac{dp}{dx} = \text{const}\right), \quad v \equiv 0,$$

(здесь $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$).

В данном течении продольное касательное напряжение в направлении x по формуле (1.6.2) равно

$$\pi_{yx(c)} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{dp}{dx} y$$

В силу того, что нет течения по поперечному направлению $v \equiv 0$, а значит производная равна нулю $\partial v / \partial x = 0$, по закону трения *Ньютона* поперечное касательное напряжение в направлении y тоже будет равно нулю: $\pi_{xy(n)} = \mu \partial v / \partial x = 0$, что вполне объяснимо отсутствием *поперечного течения* в направлении y , т.к. $v \equiv 0$ по всему каналу. По гипотезе *Стокса* о симметричности касательных напряжений $\pi_{yx(c)} = \pi_{xy(c)}$, получается парадокс, заключающийся в том, что поперечное касательное напряжение не равно нулю, ибо

$$\pi_{xy(c)} = \pi_{yx(c)} = \frac{dp}{dx} y \neq 0,$$

что вступает в противоречие с законом трения *Ньютона*, по которому, как было выше доказано, поперечное касательное напряжение равно нулю $\pi_{xy(n)} = 0$. Т.о. в течении *Пуазейля*

поперечные и продольные касательные напряжения не равны между собой, т.е. их симметричность относительно левой главной диагонали тензора напряжений π_c в виде (1.6.2) не имеет места.

Данное противоречие совершенно аналогично излагаемому ниже парадоксу с касательными напряжениями по *Стоксу* (1.6.2) в течении *Хагена-Пуазейля* в трубе. Для течения *Куэтта* несимметричность касательных напряжений устанавливается аналогично.

3⁰. Парадокс гипотезы *Стокса* $S_2 = \dot{S}$ в произвольных течениях

Для бесконечного числа течений симметричные касательные напряжения *Стокса* (1.6.2) имеют нулевые значения, т.е. во всех точках потока равны нулю

$$\pi_{ji(c)} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \equiv 0, i \neq j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

Ограничимся приведением небольшого перечня течений с компонентами скоростей, в которых этот факт имеет место:

1) $u = F(\sin k_1 x \cos k_1 y), v = F(-\cos k_1 x \sin k_1 y),$

2) $u = U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y),$

$v = U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y),$

3) $u = W(-\cos k_3 x \sin k_3 y), v = W(\sin k_3 x \cos k_3 y),$

4) $u = Q(\sin k_4 x \sin k_4 y), v = Q(\cos k_4 x \cos k_4 y),$

5) $u = T(\sin k_5 x \sin k_5 y), v = T(\cos k_5 x \cos k_5 y),$

6) $u_x = M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x), v = M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x),$

7) $u = S(e^{k_7(x+y)}), v = -S(e^{k_7(x+y)}),$

для трехмерных течений

8) $u = D((e^{k_8 y} - e^{k_8 z})e^{k_8 x}), v = D((e^{k_8 z} - e^{k_8 x})e^{k_8 y}),$

$$w = D((e^{k_8 x} - e^{k_8 y}) e^{k_8 z}),$$

где коэффициенты $k_i = const, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ выбираются произвольно из бесконечного интервала $-\infty < k_i < +\infty$.

Стоящие здесь дифференцируемые функции F, U, W, Q, T, M, S, D также произвольны в выборе. Очевидно, из указанного перечня можно образовать новые любые линейные комбинации типа $u = F + U, v = F + U$ и т.д. Поля скоростей 1-7 соответствуют плоским течениям и удовлетворяют двумерному уравнению

$$\text{неразрывности } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ поля скоростей 8) удовлетворяют}$$

$$\text{трехмерному уравнению неразрывности } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Для всех этих течений касательные напряжения *Стокса* тождественно равны нулю во всех точках потоков:

$$\pi_{ji(c)} = \pi_{ij(c)} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0, i \neq j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

Для сжимаемого газа число течений, в которых имеют место нулевые напряжения *Стокса* $\pi_{ijc} = \pi_{jic} = 0, i \neq j$, бесконечно возрастает из-за присутствия в уравнении неразрывности переменной плотности ρ . Таким образом, в течениях с компонентами скоростей типа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 симметричные напряжения (1.6.2) обращаются в нули $\pi_{ji(c)} = 0, i \neq j$ и получается так, что движение вязкой жидкости происходит без трения, что противоречит фундаментальному закону *Ньютона* $\pi_{ns} = \mu \partial v_s / \partial n$. Нетрудно вычислить по этой формуле, что касательные напряжения в указанных течениях не равны нулю

$$\pi_{ji(n)} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \neq 0, i \neq j \quad (1.6.6)$$

4⁰. Парадокс гипотезы *Стокса* $S_2 = \dot{S}$ в течении *Хагена-Пуазейля* в круглой трубе

Ламинарное течение вязкой жидкости в круглой трубе (см.[1]) в цилиндрических координатах имеет скорости

$$V_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{dp}{dz} = const,$$

где a — радиус трубы, z - осевая, r - радиальная координаты.

По гипотезе *Стокса* (1.6.2) симметричные касательные напряжения равны между собой и вычисляются по формуле [1]:

$$\pi_{zr(c)} = \pi_{rz(c)} = \mu \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r \quad (1.6.7)$$

Рассмотрим течение в положительном направлении оси z , которое образуется при падении давления $\frac{dp}{dz} = const < 0$.

При этом по формуле (1.6.7) продольные касательные напряжения отрицательны $\pi_{rz(c)} < 0$, по гипотезе *Стокса* (хотя течение в поперечном направлении r отсутствует) в силу симметричности (1.6.3) существуют и являются отрицательными поперечные касательные напряжения

$$\pi_{zr(c)} = \pi_{rz(c)}, \pi_{zr(c)} < 0$$

их направления показаны на рис.1.

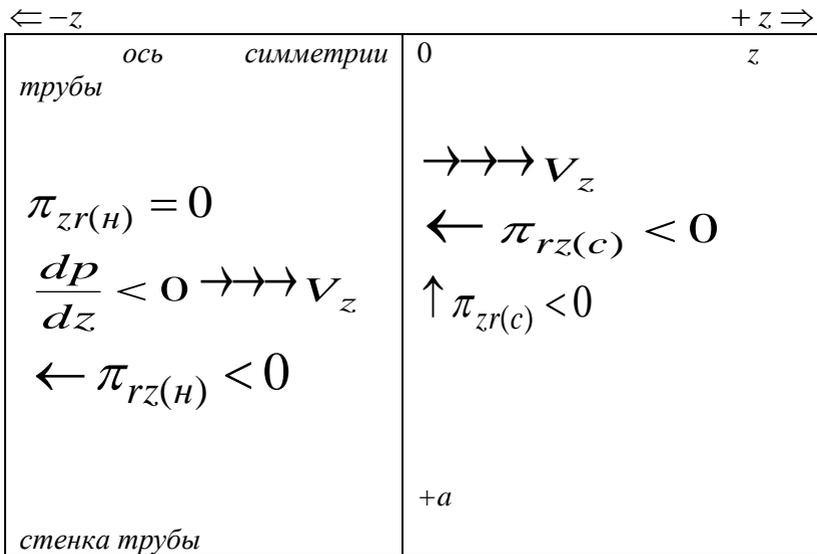
По фундаментальному закону трения *Ньютона* поперечные касательные напряжения равны нулю $\pi_{zr(n)} = \mu \partial v_r / \partial z = 0$, ибо

$v_r = 0$, продольные касательные напряжения отрицательны

$$\pi_{rz(n)} = \mu \partial v_z / \partial r = 1/2 (dp/dz) r < 0,$$

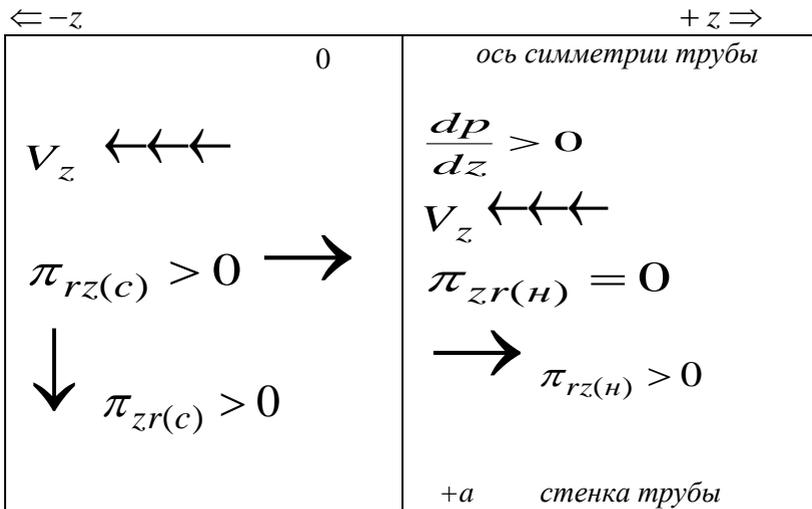
причем как касательные напряжения по гипотезе *Стокса* так и касательные напряжения по формуле *Ньютона* $\pi_{rz(c)} < 0$,

$\pi_{rz(n)} < 0$ имеют одинаковые направления против течения.



$+r \downarrow$

Рис.1



$+r \downarrow$

Рис.2

При положительном градиенте $dp/dz > 0$ жидкость в трубе течет в отрицательном направлении оси z (справа налево), касательные напряжения меняют знаки в силу (1.6.7)

$$\pi_{rz(c)} > 0, \pi_{zr(c)} > 0, \text{ по закону трения Ньютона}$$

$$\pi_{rz(h)} > 0, \pi_{zr(h)} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \text{ и течение будет в направлении "}$$

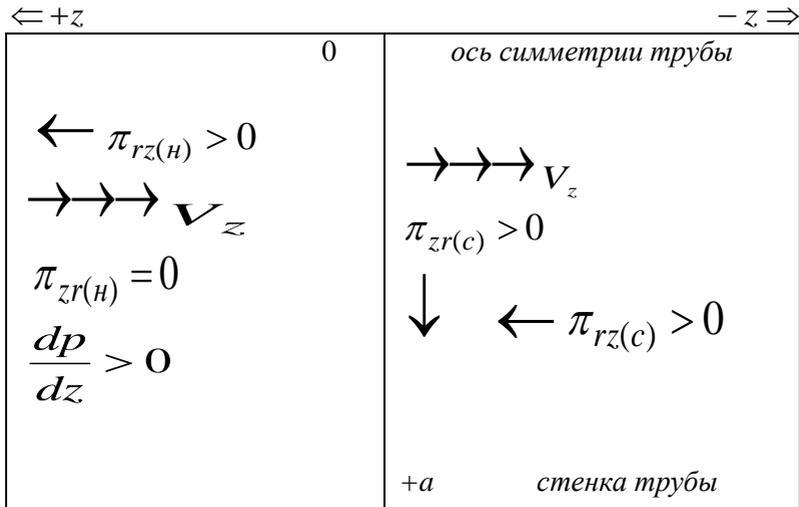
$-z$ ", что отражено на рис.2.

При развороте рис.2 на 180° получается рис.3, на котором показано, что течение в трубе направлено в ту же сторону, что и на рис.1.

Противоречие заключается в расположении не равных нулю поперечных касательных напряжений по гипотезе *Стокса*

$\pi_{zr(c)}$, которые на рис. 3 направлены к стенке трубы, а на рис.1 направлены к оси трубы при одинаковой направленности течения, тогда как продольные напряжения

$\pi_{rz(c)}$ в обоих случаях направлены против течения!



$+r \downarrow$

Рис.3

Напротив, по закону *Ньютона* касательные напряжения равны нулю:

$$\pi_{zr(n)} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0,$$

т.к. $v_r = 0$ из-за отсутствия радиального течения.

Очевидно, для несимметричного тензора (1.6.6) противоречия, подтвержденного рисунками 1, 2, 3, не возникает, в то время как для симметричного тензора напряжений *Стокса* (1.6.2) имеет место указанный на рисунках 1, 2, 3 *парадокс*.

Аналогичный *парадокс* с направлениями симметричных *стоксовых* касательных напряжений, очевидно, получается в течениях *Пуазейля* и *Куэтта*.

1.7. Несимметрический тензор напряжений *Ньютона*. Парадоксы определения вязких нормальных напряжений связаны с гипотезами о давлении и с законом *Паскаля* для идеальных жидкостей

Закон линейной зависимости напряжений от скоростей деформаций, предложенный *Стоксом* в **1845г.** как неадекватное обобщение закона трения *Ньютона*, можно связать с формулой *Гельмгольца* или рядом *Тейлора*, (что одно и то же):

$$\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} [\text{rot}\vec{v}, \delta\vec{r}] + \dot{S}\delta\vec{r} \quad (1.7.1)$$

эквивалентная запись (1.7.1) имеет вид:

$$\delta\vec{v} = \hat{S}\delta\vec{r} + \dot{S}\delta\vec{r}$$

Данную формулу необходимо представить в раскрытом виде

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta x_j, i = 1, 2, 3 \quad (1.7.2)$$

Относя (1.7.2) к бесконечно малому отрезку времени δt , получаем **конвективную составляющую ускорения**

$$\frac{\delta v_i}{\delta t} = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\delta x_j}{\delta t}, i = 1, 2, 3$$

На основании (1.7.2) *Стокс* выдвинул гипотезу о том, что напряжения пропорциональны удвоенному деформационному смещению $2\dot{S} \delta\vec{r}$. Гипотеза была сформулирована в виде обобщенного закона *Ньютона* (другое название - закон *Стокса*) с симметричным тензором напряжений

$$\pi_{ji(c)} = -(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{v})\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i, j = 1, 2, 3, \quad (1.7.3)$$

где δ_{ij} - символ *Кroneкера*.

Как было отмечено, появление множителя «2» в $2\dot{S} \delta\vec{r}$ связано с подгонкой касательного напряжения по *Стоксу* (1.7.3)

$$\pi_{ji(c)} = \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}), i \neq j \text{ к закону трения Ньютона (1.6.6) 1.6:}$$

$$\pi_{ji(n)} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i \neq j. \text{ В связи с этим ставится вопрос: если}$$

напряжения (1.7.3) вызваны деформационными смещениями $\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\delta x_j$, то какие же напряжения

создают стоящие в (1.7.2) вращательные смещения $\frac{1}{2}[\operatorname{rot}\vec{v}, \delta\vec{r}]$ или $\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\delta x_j$? Тем более, что во

вращательное движение входят те же градиенты $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, что

стоят и в $\pi_{ji(c)}$, $i \neq j$, более того $\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\frac{\delta x_j}{\delta t}$ является

составной частью конвективного ускорения!

Парадоксальное пренебрежение *Стоксом* этими силами мотивировано подгонкой гипотезы (1.7.3) к ошибочному положению о симметричности тензора напряжений. (Несимметричность тензора напряжений сплошной среды будет строго доказано в нижеследующих параграфах.)

Ответом на поставленный выше вопрос является очевидная необходимость учета напряжений

$$\pi_{ji}^* = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

образованными вращательными смещениями среды, наравне с напряжениями

$$\pi_{ji}^{**} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

образованными в потоке деформационными смещениями, т.е. нельзя пренебрегать столь важной составляющей общего движения, как

$\frac{1}{2} [\text{rot} \vec{v}, \delta \vec{r}] \equiv \hat{S} \delta \vec{r}$. В результате этого суммарная сила определяется уже в виде

$$\pi_{ji(n)} = -\left(p + \frac{1}{3} \mu \text{div} \vec{v} \right) \delta_{ji} + \pi_{ji}^* + \pi_{ji}^{**},$$

что после подстановки $\pi_{ij}^*, \pi_{ij}^{**}$ приводит к несимметричному тензору напряжений

$$\pi_{ji(n)} = -\left(p + \frac{1}{3} \mu \text{div} \vec{v} \right) \delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.7.4)$$

Данная формула соответствует как ряду Тейлора $\delta v_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta x_i$ так и закону трения Ньютона $\pi_{ns} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n}$

и дает несимметричные значения касательных напряжений

(1.6.6) **1.6:** $\pi_{ji(n)} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i \neq j$. В декартовых координатах

это будет так:

$$\begin{aligned} \pi_{yx(n)} &= \mu \frac{\partial u}{\partial y}, & \pi_{xy(n)} &= \mu \frac{\partial v}{\partial x}, & \pi_{xz(n)} &= \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \pi_{zx(n)} &= \mu \frac{\partial u}{\partial z}, & \pi_{zy(n)} &= \mu \frac{\partial v}{\partial z}, & \pi_{yz(n)} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Нормальные напряжения, в силу равенств (1.2.7) **1.2**, равны

$$\bar{S}_{xx} = \dot{e}_x, \bar{S}_{yy} = \dot{e}_y, \bar{S}_{zz} = \dot{e}_z,$$

$$\dot{e}_x = \partial u / \partial x, \dot{e}_y = \partial v / \partial y, \dot{e}_z = \partial w / \partial z,$$

$$\pi_{xx(n)} = -\left(p + \frac{1}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}\right) + \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \pi_{yy(n)} = -\left(p + \frac{1}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}\right) + \mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\pi_{zz(n)} = -\left(p + \frac{1}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}\right) + \mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

где, в отличие от нормальных напряжений *гипотезы Стокса*, стоит $1/3 \mu \operatorname{div} \vec{v}$ согласно гипотезам о давлении.

Парадоксы определения вязких нормальных напряжений

Первая гипотеза о давлении гласит: *среднеарифметическое значение вязких нормальных напряжений должно быть равно давлению со знаком минус (см. [1])*:

$$\frac{\pi_{xx(n)} + \pi_{yy(n)} + \pi_{zz(n)}}{3} = -p \quad (1.7.5)$$

В силу данной гипотезы в нормальные напряжения в законе *Стокса* (1.7.3) был искусственно включен член $\frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}$ и в (1.7.4) по аналогии включен $\frac{1}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}$. Эти искусственные

гипотетические включения обеспечивают безусловное выполнение гипотезы о давлении (1.7.5).

Известно, что гипотеза (1.7.5) для идеальных жидкостей является законом *Паскаля* $\vec{p}_n = -p \vec{n}$, безусловно выполняется для несжимаемых вязких жидкостей $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, даже если нормальные напряжения в них определять с произвольным коэффициентом $\bar{\mu}$:

$$\pi_{ii} = -p + \bar{\mu} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.7.6)$$

а касательные напряжения определить по закону *Ньютона*

$$\pi_{ji} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i \neq j$$

При $\bar{\mu}=0$ из (1.7.6) $\pi_{ii} = -p$, $i = 1,2,3$ вытекает закон *Паскаля*. При значении $\bar{\mu} = \mu$ нормальные и касательные напряжения определяются единой записью

$$\pi_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3, \quad (1.7.7)$$

т.е. имеет место канонический несимметричный тензор

$$\pi = -pE + \mu\bar{S} \quad (1.7.8)$$

Если в определении вязких нормальных напряжений исходить из первой гипотезы (1.7.5), то налицо произвол, связанный с выбором коэффициента $\bar{\mu}$.

Вторая гипотеза о давлении гласит: что нормальные напряжения в сжимаемом газе $div\bar{v} \neq 0$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\pi_{xx(n)} + \pi_{yy(n)} + \pi_{zz(n)}}{3} = -p + \mu' div\bar{v}, \quad (1.7.9)$$

где произвольный коэффициент μ' (для его выбора нет каких-либо физических обоснований) объявляется коэффициентом *объемной вязкости* или *вторым коэффициентом вязкости*.

Нетрудно вычислить, что вторая гипотеза выполняется для нормальных напряжений вида

$$\pi_{ii(n)} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\bar{v}] + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, i = 1,2,3, \quad (1.7.10)$$

т.е. несимметричный тензор напряжений оформляется в виде

$$\pi_{ji(n)} = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\bar{v}]\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2,3, \quad (1.7.11)$$

$$\pi_u = -[p + (\frac{1}{3}\mu - \mu')div\bar{v}]E + \mu\bar{S} \quad (1.7.12)$$

Как сказано, имеется определенный произвол в выборе множителя μ' . Распоряжаясь данным произволом, можно положить $\mu' = \frac{1}{3}\mu$, благодаря чему нормальные напряжения

(1.7.10) в сжимаемых газах $div\vec{v} \neq 0$ принимают вид

$$\pi_{ii} = -p + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.7.13)$$

совпадающий с нормальными напряжениями в несжимаемых $div\vec{v} = 0$ жидкостях (1.7.7) $\bar{\mu} = \mu$, т.е. (1.7.12) перейдет в (1.7.8) и будет иметь место **единый реологический закон, физическое обоснование которого дано в главе 3, как для несжимаемых жидкостей так и для сжимаемых газов:**

$$\pi = -pE + \mu\bar{S}, \quad \pi_{ji} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.7.14)$$

Лишь гипотеза (1.7.9) примет иную форму

$$\frac{\pi_{xx(n)} + \pi_{yy(n)} + \pi_{zz(n)}}{3} = -p + \frac{1}{3}\mu div\vec{v}, \quad (1.7.15)$$

которая соответствует нормальным напряжениям (1.7.13)!

В случае несжимаемых жидкостей с $div\vec{v} = 0$ гипотеза (1.7.15) автоматически переходит в закон *Паскаля*.

Тем самым показано:

- 1) что включение комплексов $\frac{1}{3}\mu div\vec{v}$ или $\frac{2}{3}\mu div\vec{v}$ есть некая совершенно очевидная подгонка вязких нормальных напряжений к гипотезе о давлении (1.7.5);
- 2) формулы нормальных напряжений зависят от вида гипотезы о давлении.

Отказ от искусственных добавок типа $\frac{2}{3}\mu div\vec{v}$, $\frac{1}{3}\mu div\vec{v}$,

$(\frac{2}{3}\mu - \mu')div\vec{v}$, $(\frac{1}{3}\mu - \mu')div\vec{v}$, обоснован в главе 3

значительно упрощает тензор напряжений, следовательно, и уравнения динамики вязкого сжимаемого газа с $div\vec{v} \neq 0$.

Приведенные выше парадоксы с гипотезами о давлении и реологический закон *Ньютона* (1.7.14) позволяют сделать вывод: пропорциональность вязкой части нормальных напряжений диагональным элементам тензора перемещения \bar{S} , обоснована законом трения *Ньютона*, в силу которого касательные напряжения пропорциональны недиагональным элементам тензора \bar{S} .

Реологический закон *Ньютона* (1.7.14) освобождает уравнения динамики *вязких сжимаемых газов* в диссипативной части от смешанных производных, в связи с этим на **12 производных** сокращаются трехмерные уравнения, а если сравнивать с уравнениями *Навье-Стокса*, то в общей сумме в новых уравнениях на **18 производных** меньше содержится по сравнению с уравнениями *Навье-Стокса*. Кроме того, наличие смешанных производных влияет на тип уравнений, т.е. на квазипараболичность, создает определенные трудности при исследовании устойчивости разностных схем для численного их решения.

В **1.5** отмечено, что в универсальной формуле

$$\bar{v}(\bar{r} + \delta\bar{r}, t) = \bar{v}(\bar{r}, t) + \frac{b-1}{b} [\text{rot}\bar{v}, \delta\bar{r}] + S_b \delta\bar{r}$$

при $b=1$ стоит матрица $S_1 = \bar{S}$, поэтому переход к тензору перемещения \bar{S} совершается при $b=1$

$$\bar{v}(\bar{r} + \delta\bar{r}, t) = \bar{v}(\bar{r}, t) + \bar{S} \delta\bar{r}$$

тем самым доказываем, что для **построения тензора напряжений Ньютона нет необходимости в первой теореме Гельмгольца**, следует непосредственно исходить из ряда *Тейлора*

$$\bar{v}(\bar{r} + \delta\bar{r}, t) = \bar{v}(\bar{r}, t) + \bar{S} \delta\bar{r}$$

Разделение ряда *Тейлора* на симметричную $\dot{S} \delta\bar{r}$ и антисимметричную $\frac{1}{2} [\text{rot}\bar{v}, \delta\bar{r}]$ части напрямую связано с построением симметричного тензора напряжений сплошной среды и с теорией деформаций.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц в качестве дополнительного требования к реологическому закону сплошной среды выдвинули

следующее условие: «... во вращающейся как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью вязкой жидкости все касательные напряжения должны обращаться в нули» [10].

Напряжения (1.7.6) удовлетворяют этому требованию. Действительно, в цилиндрической системе r, ε, z , ньютоновские напряжения (1.7.7) имеют вид

$$\begin{aligned}\pi_{r\varepsilon} &= \mu\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r}\right), \quad \pi_{\varepsilon r} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon}, \quad \pi_{zr} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z}, \\ \pi_{rz} &= \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \pi_{z\varepsilon} = \mu \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z}, \quad \pi_{\varepsilon z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon}, \\ \pi_{rr} &= -\left[p + \left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div} \vec{v}\right] + \mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \pi_{\varepsilon\varepsilon} &= -\left[p + \left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div} \vec{v}\right] + \mu\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r}\right), \\ \pi_{zz} &= -\left[p + \left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div} \vec{v}\right] + \mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \operatorname{div} \vec{v} &\equiv \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon},\end{aligned}$$

для жидкости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, скорости равны (α - угол между $\vec{\omega}$ и \vec{r}):

$$\begin{aligned}v_r &= 0, \quad v_z = 0, \quad v_\varepsilon = \left|[\vec{\omega}, \vec{r}]\right| = \\ &= \left|\vec{\omega}\right| \left|\vec{r}\right| \sin \alpha = \omega r \sin \alpha,\end{aligned}$$

следовательно, равны нулю все касательные напряжения

$$\pi_{rz} = 0, \quad \pi_{zr} = 0, \quad \pi_{r\varepsilon} = 0, \quad \pi_{\varepsilon r} = 0, \quad \pi_{z\varepsilon} = 0, \quad \pi_{\varepsilon z} = 0.$$

1.8. Предпосылки ошибочного вывода о симметричности тензора напряжений

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_i , $i=1,2,\dots,N$ и с радиус-векторами r_i , $i=1,2,\dots,N$, на которые

действуют силы $\vec{F}_i, i = 1, 2, \dots, N$. Главная сила равна

$\vec{F}^* = \sum_i \vec{F}_i$. Момент главной силы равен $\vec{M}_c = [\vec{r}_c, \vec{F}^*]$, где

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} - \text{радиус-вектор центра масс, обозначаемый в даль-}$$

нейшем $\vec{r}_c = \vec{r}$, а главный момент сил равен $\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$.

Теорема 4. Для системы материальных точек момент главной силы не равен в общем случае главному моменту:

$$\vec{M}_c \neq \vec{M}.$$

Действительно, имеет место очевидное неравенство

$$\left[\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \sum_i \vec{F}_i \right] \neq \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

Теорема 5. Для заданных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{Q} \perp \vec{F}$ существует бесконечное число векторов

$$\vec{r}^* = x^* \vec{i} + y^* \vec{j} + z^* \vec{k}, \quad \text{для которых имеет место}$$

равенство $[\vec{r}^*, \vec{F}] = \vec{Q}$. Если заданы взаимно перпендикулярные векторы $\vec{Q} \perp \vec{r}^*$, то существует бесконечное число векторов \vec{F}^* , для которых имеет место это равенство.

Действительно, данное уравнение, решаемое относительно x^*, y^*, z^* , имеет определитель, равный нулю

$$y^* F_z - z^* F_y = Q_x, \quad z^* F_x - x^* F_z = Q_y, \quad x^* F_y - y^* F_x = Q_z, \quad (1.8.1)$$

где

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad \vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}$$

Из $(\vec{r}^*, \vec{Q}) = 0$, вытекает выражение $x^* Q_x + y^* Q_y + z^* Q_z = 0$, которое представляется в виде

$$y^* Q_y + z^* Q_z = -x^* Q_x$$

и решается совместно с первым уравнением данной системы (1.8.1). В результате получается бесконечное множество решений

$$y^* = \frac{Q_x(Q_z - x^* F_y)}{F_y Q_y + F_z Q_z}, \quad z^* = \frac{-Q_x(x^* F_z + Q_y)}{F_y Q_y + F_z Q_z}.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 6. Для заданного вектора \vec{Q} можно найти бесконечное число векторов \vec{r}^* и \vec{F} , для которых имеет место равенство $[\vec{r}^*, \vec{F}] = \vec{Q}$.

В данной теореме система (1.8.1) решается совместно с уравнениями

$$(\vec{r}^*, \vec{Q}) = 0 \text{ и } (\vec{F}, \vec{Q}) = 0,$$

в результате для 6 искомых величин $x^*, y^*, z^*, F_x, F_y, F_z$ получается 5 уравнений, т.е. 5 неизвестных будут выражены через шестую неизвестную, например, как в теореме 5, через x^* .

Главная сила стоит в правой части уравнения динамики (1.3.10) **1.3**, где ради краткости напряжения обозначим нижними индексами

$$\vec{\pi}_x = \vec{\pi}_1, \vec{\pi}_y = \vec{\pi}_2, \vec{\pi}_z = \vec{\pi}_3,$$

Умножая (1.3.10) **1.3** векторно на \vec{r} , получаем равенство моментов

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r}, \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] \quad (1.8.2)$$

Очевидно, в (1.8.2) **момент главной силы** равен

$$\vec{M}_c = [\vec{r}, \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] \quad (1.8.3)$$

Во-первых, симметричность тензора напряжений в [1] выво-

дится из теоремы об изменении момента импульса (момента количества движения), записанного в интегральном виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta \tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \rho \delta \tau] + \iiint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta \sigma],$$

с внесением дифференцирования в левой части под интеграл

$$\iiint_{\tau} \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta \tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \rho \delta \tau] + \iiint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta \sigma], \quad (1.8.4)$$

что неправомерно, если объем $\tau = \tau(t)$ зависит от времени. Что касается правой части этого выражения, то в силу формулы (1.3.3) **1.3** имеет место **правильно составленное** выражение

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta \tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \rho \delta \tau] + \iiint_{\tau} [\vec{r}, \iiint_{\sigma_{\delta \tau}} \vec{\pi}_n \delta \sigma]$$

Из сформулированной в [1] (аналогично в других учебниках) теоремы об изменении момента импульса в виде (1.8.4) получено неверное в общем случае соотношение

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r}, \rho \vec{F}] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] \quad (1.8.5)$$

Несоответствие выражение (1.8.5) фундаментальной теореме об изменении момента импульса системы частиц рассматривается ниже в **1.9. В правой части (1.8.5) стоит главный момент**

$$\vec{M} = [\vec{r}, \rho \vec{F}] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j], \quad (1.8.6)$$

потому что (1.8.6) выводится из соотношения

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta \tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \rho \vec{F}] \delta \tau + \iiint_{\sigma} [\vec{r}, \sum_{j=1}^3 \vec{\pi}_j \cos(\vec{n}, x_j)] \delta \sigma, \quad (1.8.7)$$

где в правой части стоит суммарный (в виде тройного интеграла) главный момент массовых сил $\iiint_{\tau} [\vec{r}, \rho \vec{F}] \delta \tau$ и главный

момент поверхностных сил $\oiint_{\sigma} [\vec{r}, \sum_{j=1}^3 \vec{\pi}_j \cos(\vec{n}, x_j)] d\sigma$,

очевидно, имеющие различные радиус-вектора \vec{r} .

Дифференцированием (1.8.6) приводится к виду

$$\vec{M} = [\vec{r}, \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] + \sum_{j=1}^3 [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j], \quad (1.8.8)$$

В силу (1.8.3) *главный момент* (1.8.8) представляется в форме

$$\vec{M} = \vec{M}_c + \sum_{j=1}^3 [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j], \quad (1.8.9)$$

По *теореме 4* эти моменты *неравны* между собой: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$.

В [1] и др. учебниках традиционно полагается равенство данных моментов, что возможно только при равенстве нулю последнего члена в (1.8.9):

$$\sum_{j=1}^3 [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j] = 0 \quad (1.8.10)$$

Для того чтобы момент результирующих сил \vec{M}_c равнялся результирующему моменту \vec{M} *условие* (1.8.10) *должно выполняться в каждой точке сплошной среды.*

Теорема 7. Условие (1.8.10) выполняется при следующих ситуациях:

1. Напряжения параллельны координатным осям:

$$\vec{\pi}_j \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

2. Компоненты напряжений симметричны:

$$\pi_{ij} = \pi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.8.11)$$

Таким образом, симметричность тензора напряжений (1.8.11) и вытекающая из нее симметричность напряжений противоречат

теореме 4, что подтверждается приведенными в **1.6** примерами 1-8 и перечнем парадоксов.

Утверждение 1. Симметричность тензора напряжений по гипотезе *Стокса* не есть физическое свойство среды, а является следствием искусственного приравнивания главного момента \vec{M} моменту главной силы \vec{M}_c , т.е. математическое условие равенства этих моментов в том смысле, что если в некоторой точке потока выполняются одновременно условия (1.8.11), то момент главной силы становится равным главному моменту $\vec{M}_c = \vec{M}$. Они неравны друг другу: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$, если эти условия (1.8.11) не выполняются.

Следовательно, **неправильно** применена теорема об изменении момента импульса к произвольному объему сплошной среды, о чем было сказано в **1.3**, ибо это приравнивание произошло вследствие приравнивания левых частей выражений (1.8.2) и (1.8.5).

Тензор напряжений в общем случае *несимметричен*, о несимметричности для отдельных течений было указано еще в [3].

Является обоснованным вывод: для **вязких сред имеют место реологические законы с несимметричными касательными напряжениями**, так как *гипотеза Стокса приводит к вышеперечисленным противоречиям*.

1.9. Из теоремы об изменении момента импульса не следует симметричность тензора напряжений

Для системы материальных точек, каждая из которых имеет массу m_i и движется под действием силы \vec{F}_i со скоростью \vec{v}_i , теорема об изменении момента импульса имеет вид [5]:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \quad (1.9.1)$$

Для взятого в виде параллелепипеда объема $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ индивидуальных частиц сплошной среды, радиус-вектор \vec{r}_m на-

правлен в точку приложения главной массовой силы $\vec{F}\delta m$, соответственно, радиус-вектора главных поверхностных сил направлены в точки их действия на каждой грани параллелепипеда:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{(x)2} &\rightarrow \vec{\pi}_{x2}, \quad \vec{r}_{(x)1} \rightarrow \vec{\pi}_{-x1}, \quad \vec{r}_{(y)2} \rightarrow \vec{\pi}_{y2}, \quad \vec{r}_{(y)1} \rightarrow \vec{\pi}_{-y1}, \\ \vec{r}_{(z)2} &\rightarrow \vec{\pi}_{z2}, \quad \vec{r}_{(z)1} \rightarrow \vec{\pi}_{-z1}.\end{aligned}$$

В силу этого по фундаментальной теореме (1.9.1) для объема $\delta\tau = \delta x\delta y\delta z$ **главный момент сил** будет представлен в виде

$$\begin{aligned}\vec{M}^* &= [\vec{r}_m, \delta m \vec{F}] + [\vec{r}_{(x)2}, \vec{\pi}_{x2} \delta y \delta z] + [\vec{r}_{(x)1}, \vec{\pi}_{-x1} \delta y \delta z] \\ &\quad + [\vec{r}_{(y)2}, \vec{\pi}_{y2} \delta z \delta x] + [\vec{r}_{(y)1}, \vec{\pi}_{-y1} \delta z \delta x] + \\ &\quad + [\vec{r}_{(z)2}, \vec{\pi}_{z2} \delta x \delta y] + [\vec{r}_{(z)1}, \vec{\pi}_{-z1} \delta x \delta y] \quad (1.9.2)\end{aligned}$$

Главная сила стоит в правой части (1.4.3) **1.4** и равна

$$\begin{aligned}\vec{F}_{pez} &= \vec{F}\delta m + (\vec{\pi}_{x2} + \vec{\pi}_{-x1})\delta y\delta z + (\vec{\pi}_{y2} + \vec{\pi}_{-y1})\delta x\delta z + \\ &\quad + (\vec{\pi}_{z2} + \vec{\pi}_{-z1})\delta x\delta y\end{aligned}$$

Очевидно, по **теореме 4** момент главной силы *не равен* главному моменту сил: $[\vec{r}, \vec{F}_{pez}] \neq \vec{M}^*$.

Рассмотрим более подробно подынтегральное выражение $[\vec{r}, \delta m \vec{v}]$ в левой части (1.8.7) **1.8**, т.е. момент главного импульса $\delta m \vec{v}$ массы, $\delta m = \rho \delta\tau$, $\delta\tau$ - индивидуальный объем, в котором находится масса $\delta m = \sum_i m_i$. Причем каждая частица

обладает скоростью \vec{v}_i , т.е. существует соответствие $\vec{r}_i \rightarrow m_i \rightarrow \vec{v}_i, i = 1, 2, \dots$, в силу чего главный момент векторов системы частиц объема $\delta\tau$ будет равен $\sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$. По

теореме 4 он не равен моменту главного импульса $[\vec{r}, \delta m \vec{v}]$:

$$\sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] \neq [\vec{r}, \delta m \vec{v}],$$

ибо

$$[\vec{r}, \delta m \vec{v}] = \left[\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \sum_i m_i \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} \right],$$

следовательно, равенство между ними возможно только при выполнении условий **теорем 5 или 6**. При предельном переходе \vec{r} в рассматриваемом выражении $[\vec{r}, \delta m \vec{v}]$ является конкретным радиус-вектором точки сплошной среды, значит, по **теореме 6** $\frac{d\vec{v}}{dt}$ будет произвольным вектором, поэтому

равенство между $\iiint_{\tau} [\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] \delta\tau$, которое получено

интегрированием по всему объему сплошной среды обеих частей (1.8.3) **1.8:**

$$\iiint_{\tau} [\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] \delta\tau = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] \delta\tau,$$

и $\iiint_{\tau} \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta\tau]$ невозможно, тем самым обосновано

неравенство в силу зависимости $\tau = \tau(t)$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta\tau] \neq \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v} \rho \delta\tau],$$

а правая часть преобразуется к выражению

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{v} \delta m] &= \iiint_{\tau} \left\{ \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{v} \delta m \right] + [\vec{r}, \delta m \frac{d\vec{v}}{dt}] + [\vec{r}, \vec{v} \frac{d\delta m}{dt}] \right\} = \\ &= \iiint_{\tau} \left\{ [\vec{r}, \delta m \frac{d\vec{v}}{dt}] + [\vec{r}, \vec{v} \frac{d\delta m}{dt}] \right\} \end{aligned}$$

Совершенно аналогичные выводы надо сделать и для момента

массовых сил $[\vec{r}, \delta m \vec{F}]$, ибо \vec{F} есть сумма всех сил \vec{F}_i в объеме $\delta \tau$, действующих на частицы m_i сплошной среды, причем

$$\delta m = \sum_i m_i, \quad \vec{F} = \frac{\sum_i m_i \vec{F}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{F}_i}{\delta m}$$

По *теореме 4* $[\vec{r}, \delta m \vec{F}] \neq \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i]$, поэтому для конкретного вектора \vec{r} по *теореме 6* равенство

$$[\vec{r}, \delta m \vec{F}^*] = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i]$$

возможно только для такого вектора \vec{F}^* , который не будет в общем случае равен истинному \vec{F} : $\vec{F}^* \neq \vec{F}$, т.е. в правой части (1.8.7) **1.8** стоит на самом деле \vec{F}^* , являющийся совершенно произвольным вектором. Формула из учебника [1]

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \delta m] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \delta m] + \iint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta \sigma] \quad (1.9.3)$$

в силу указанных выше причин не соответствует фундаментальной теореме об изменении момента импульса (1.9.1).

Действительно, теорема об изменении момента импульса

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{f}_i]$$

должна быть написана в индивидуальном объеме $\delta \tau$ в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i] + \iint_{\sigma_{\delta \tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k],$$

следовательно, для объема τ в виде тройного интеграла

$$\iiint_{\tau} \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \iiint_{\tau} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i] + \iiint_{\tau} \iint_{\sigma_{\delta \tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k] \quad (1.9.4)$$

Согласно **теоремам 5, 6**, между соответствующими членами выражений (1.9.3) и (1.9.4) нельзя ставить знак равенства, т.е. имеют место очевидные неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{v} \delta m] \neq \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i], \quad \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F} \delta m] \neq \iiint_{\tau} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i], \\ \oiint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n] \delta \sigma \neq \iiint_{\tau} \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k], \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

которые подтверждают различие выражений (1.9.3) и (1.9.4). Надо иметь в виду то обстоятельство, что подвижная система

координат, имеющая начало в центре массы $\delta m = \sum_i m_i$,

следовательно, движущаяся с ускорением $d\vec{v}/dt \neq 0$, будет

неинерциальной системой. В (1.9.5) $\vec{\pi}_n \delta \sigma = \sum_k \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k$ есть

главная поверхностная сила, действующая на $\delta \sigma = \sum_k \delta \sigma_k$, где

$\delta \sigma \in \sigma_{\delta\tau}$, $\delta \sigma_k$ — часть поверхности $\delta \sigma$, которую занимает

частица $m_{\sigma k}$, находящаяся под действием напряжения $\vec{\pi}_{nk}$.

Векторы $\vec{r}_{\sigma k}$ направлены на частицы $m_{\sigma k}$, лежащие на

поверхности $\sigma_{\delta\tau}$, ч.т.д.

Из (1.9.4) по указанным выше обстоятельствам уже не следует

симметричность тензора напряжений, т.е. $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}$, $j \neq i$,

т.к. в обеих частях (1.9.4) стоят главные моменты, по **теореме 4** не равные моментам результирующих векторов в (1.9.3).

1.10. Тензор напряжений сплошной среды *не симметричен*

Покажем детально еще раз ошибочность равенства (1.8.6) **1.8**, широко применяемого в [1], [2], [3], [4], для доказательства

симметричности тензора напряжений. Представим его в виде

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0 \quad (1.10.1)$$

Из этого выражения теоретически получена *симметричность* тензора напряжений сплошной среды и, как следствие этого, подгонка *симметричности* касательных напряжений вязкой жидкости в гипотезе *Стокса* [1].

Докажем, что левая часть (1.10.1) не равна нулю:

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] \neq 0$$

С этой целью формулируем теорему об изменении моментов импульсов (количеств движений) для индивидуального объема $\delta\tau$ сплошной среды:

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i] + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] \quad (1.10.2)$$

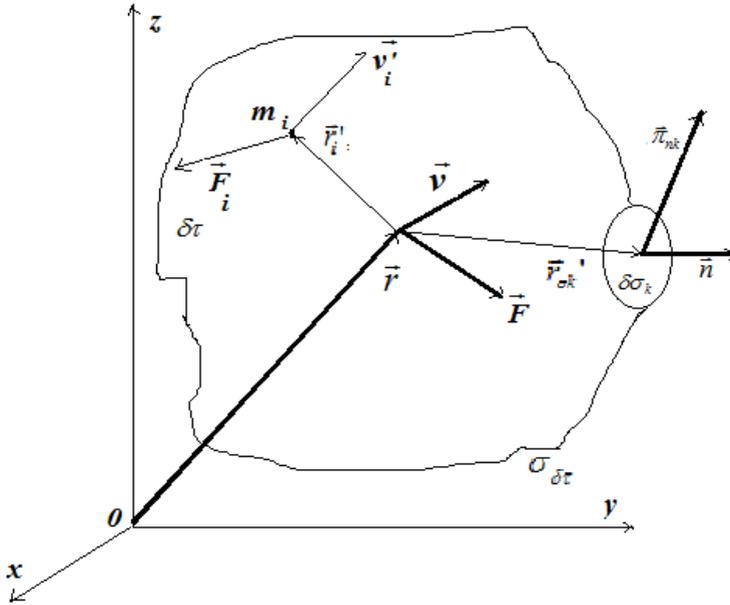
Между векторами \vec{r} в (1.10.1) и \vec{r}_i , $\vec{r}_{\sigma k}$ в (1.10.2) имеет

место связь $\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{r}_i'$, $\vec{r}_{\sigma k} = \vec{r} + \vec{r}_{\sigma k}'$, откуда вытекает связь и между скоростями

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}_i'}{dt}, \quad \vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i'$$

Подставляя их в (1.10.2), найдем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r} + \vec{r}_i', m_i (\vec{v} + \vec{v}_i')] &= \sum_i [\vec{r} + \vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] + \\ &+ \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r} + \vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] \end{aligned} \quad (1.10.3)$$



Прделаем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r} + \vec{r}_i', m_i (\vec{v} + \vec{v}_i')] &= \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \\ &+ \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \delta m \vec{v}] + \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \\ &+ \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] \end{aligned}$$

Здесь в объеме $\delta\tau$ учтено $\delta m = \sum_i m_i = \rho \delta\tau$. Имея в виду

$$\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \operatorname{div} \vec{v}, \text{ прделаем следующие преобразования}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{r}, \delta m \vec{v}] &= \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \delta m \vec{v} \right] + \left[\vec{r}, \delta m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\delta m}{dt} \vec{v} \right] = \\ &= \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \rho \delta\tau \vec{v} \right] + \left[\vec{r}, \rho \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d(\rho \delta\tau)}{dt} \vec{v} \right] = \left[\vec{r}, \rho \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\vec{r}, (\rho \frac{d\delta\tau}{dt} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt}) \vec{v}] = [\vec{r}, \rho \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt}] + \\
& + [\vec{r}, (\rho \delta\tau \operatorname{div} \vec{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt}) \vec{v}] = [\vec{r}, \rho \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt}]
\end{aligned}$$

Здесь использовано равенство $[\frac{d\vec{r}}{dt}, \rho \delta\tau \vec{v}] = 0$ и равенство

$$\text{нулю уравнения неразрывности: } \rho \delta\tau \operatorname{div} \vec{v} + \delta\tau \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r} + \vec{r}_i, m_i (\vec{v} + \vec{v}_i')] = [\vec{r}, \rho \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt}] + \\
& + \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] \quad (1.10.4)
\end{aligned}$$

Далее в правой части (1.10.3):

$$\begin{aligned}
& \sum_i [\vec{r} + \vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] = [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{F}_i] + \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] = \\
& = [\vec{r}, \vec{F} \delta m] + \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] = [\vec{r}, \vec{F} \rho \delta\tau] + \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i], \\
& \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r} + \vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] = \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}, \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] + \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k],
\end{aligned}$$

где по теореме *Остроградского-Гаусса* и теореме о среднем для элементарного объема $\delta\tau$ имеют место преобразования

$$\begin{aligned}
& \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}, \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] = \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} [\vec{r}, \sum_k \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] = \oiint_{\sigma_{\delta\tau}} [\vec{r}, \vec{\pi}_n \delta\sigma] = \\
& = \iiint_{\delta\tau} \sum_j \frac{\partial [\vec{r}, \vec{\pi}_j]}{\partial x_j} \delta\tau = \sum_j \frac{\partial [\vec{r}, \vec{\pi}_j]}{\partial x_j} \delta\tau
\end{aligned}$$

В результате данных преобразований (1.10.3) примет вид

$$[\vec{r}, \rho \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt}] + \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i'] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] =$$

$$=[\vec{r}, \vec{F} \rho \delta \tau] + \sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{F}'_i] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial [\vec{r}, \vec{\pi}_j]}{\partial x_j} \delta \tau + \iint_{\sigma_{\delta \tau}} \sum_k [\vec{r}'_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k] +$$

Поделив это выражение на $\delta \tau$ и проделав перегруппировку, получаем

$$\begin{aligned} & [\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = \\ & = -\frac{1}{\delta \tau} \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}'_i] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}'_i] \right\} + \\ & + \frac{1}{\delta \tau} \left(\sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{F}'_i] + \iint_{\sigma_{\delta \tau}} \sum_k [\vec{r}'_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k] \right) \quad (1.10.5) \end{aligned}$$

Подведем итоги. В учебниках [1], [2], [3], [4], [5], [13] и др. тем или иным способом **известная формула**:

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0,$$

т.е. левая часть (1.10.5) равна нулю во всех точках потока и всегда и, следовательно, тензор напряжений **симметричен**:

$$\pi_{23} = \pi_{32}, \pi_{31} = \pi_{13}, \pi_{12} = \pi_{21}.$$

Исходя из *фундаментальной формулы физики* (1.9.1), трансформированной для элементарного объема сплошной среды к виду (1.9.2), получено выражение (1.10.5), правая часть которой

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\delta \tau} \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}'_i] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}'_i] \right\} + \\ & + \frac{1}{\delta \tau} \left(\sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{F}'_i] + \iint_{\sigma_{\delta \tau}} \sum_k [\vec{r}'_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta \sigma_k] \right) \neq 0 \quad (1.10.6) \end{aligned}$$

в общем случае **не равна нулю**, т.к. во-первых, числитель дроби составлен из величин 1-го и 2-го порядков малости, а в знаменателе стоит величина 3-го порядка малости ($\delta \tau \rightarrow 0$), во-вторых, элементарный объем $\delta \tau$ движется вместе с потоком (см. (1.2.15) пункт **1.2 главы 1**) и он выбирается совершенно произвольно.

Собственно говоря, если в какой-либо точке потока выраже-

(1.10.6) будет равно нулю, это будет означать, что в данной точке тензор сплошной среды симметричен и частица не вращается.

В раскрытом виде левая часть (1.10.5) по уравнению динамики сплошной среды в напряжениях равна следующему выражению:

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{r}, \rho \vec{F}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = [\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}] - [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j] = [\vec{r}, 0] - [\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}, \vec{\pi}_j] = -[\vec{i}_j, \vec{\pi}_j] = -(\pi_{23} - \pi_{32})\vec{i}_1 - (\pi_{31} - \pi_{13})\vec{i}_2 - (\pi_{12} - \pi_{21})\vec{i}_3,$$

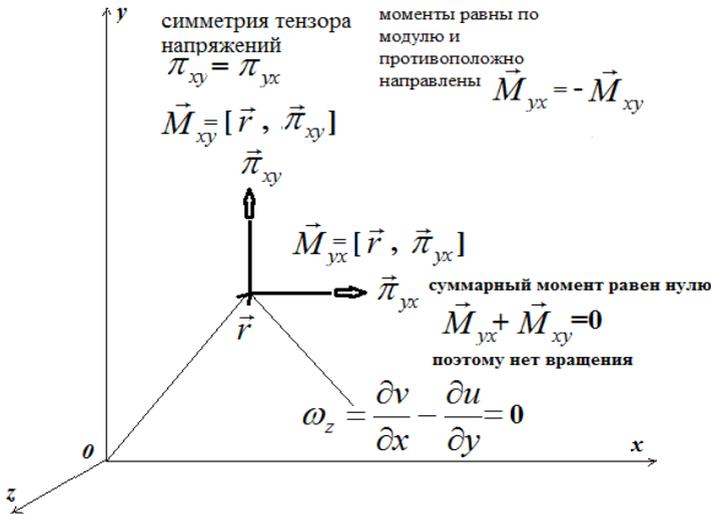
поэтому в силу (1.10.6) имеет место неравенство

$$(\pi_{23} - \pi_{32})\vec{i}_1 + (\pi_{31} - \pi_{13})\vec{i}_2 + (\pi_{12} - \pi_{21})\vec{i}_3 \neq 0,$$

из которого вытекает доказательство **несимметричности** тензора напряжений сплошной среды

$$\pi_{23} \neq \pi_{32}, \pi_{31} \neq \pi_{13}, \pi_{12} \neq \pi_{21}$$

что и требовалось доказать.



На данном рисунке показано, что при симметричности тензора напряжений, например $\pi_{yx} = \pi_{xy}$, суммарный момент равен нулю и частица не будет вращаться, следовательно, проекция вихря скорости равна нулю:

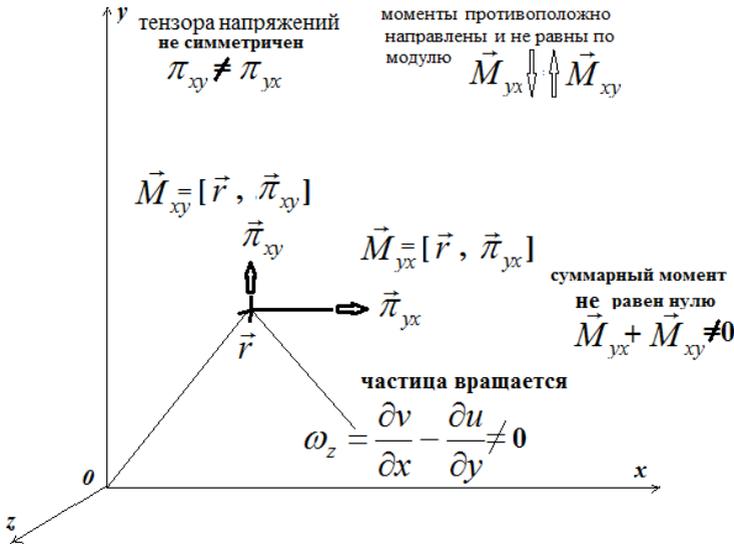
$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Таким образом, при симметричном тензоре напряжений $\pi_{ji} = \pi_{ij}$, что дано в гипотезе *Стокса*:

$$\pi_{(c)yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \pi_{(n)xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

суммарный момент всегда равен нулю и во всех точках потока частицы не должны вращаться: $\vec{\omega} = rot \vec{v} \equiv \vec{0}$. А это по определению означает, что течение вязкой жидкости по гипотезе *Стокса* является **потенциальным**, что **противоречит в плоских течениях решению уравнений Гельмгольца**:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega_z$$



Следовательно, выражение (1.10.1), которое применяется в учебниках *Лойцянского* [1] и *Седова* [2] в качестве теоремы об изменении момента импульса **ошибочно**. Очевидно из (1.10.5), что в формуле (1.10.1) *Лойцянского* [1] и *Седова* [2] не может стоять знак равенства. На самом деле в силу (1.10.5) имеет место быть **неравенство**:

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] \neq [\vec{r}, \rho \vec{F}] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j]$$

Общеизвестно, что теоретический вывод о симметричности тензора напряжений устанавливается исходя из равенства (1.10.1). **Так как (1.10.1) не имеет места в силу (1.10.5), то и нет в общем случае симметричности тензора напряжений в сплошной среде, что требовалось доказать.**

Примечание. В состоянии равновесия скорости всех частиц жидкости равны нулю $\vec{v}_i = 0 \quad \forall i, \vec{v} = 0, \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, уравнение равновесия сплошной среды

$$\rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.10.7)$$

является равенством нулю главной силы (см.1.8), кроме того, выражение (1.10.6) будет равно нулю

$$\frac{1}{\delta\tau} \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{r}, \sum_i m_i \vec{v}_i] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}] + \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{v}_i'] \right\} = 0 \quad (1.10.8)$$

По фундаментальному определению момента импульса (1.10.2), в правой части (1.10.5) будет равно нулю и выражение

$$\frac{1}{\delta\tau} \left(\sum_i [\vec{r}_i', m_i \vec{F}_i] + \iint_{\sigma_{\delta\tau}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}', \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] \right) = 0 \quad (1.10.9)$$

В силу равенств (1.10.8) и (1.10.9) в состоянии равновесия будет иметь место равенство нулю главного момента сил

$$\vec{M} = [\vec{r}, \rho \vec{F}] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\vec{r}, \vec{\pi}_j] = 0 \quad (1.10.10)$$

Из (1.10.7) вытекает равенство нулю момента главной силы:

$$\vec{M}_c = [\vec{r}, \rho \vec{F}] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.10.11)$$

По **теореме 4 1.8** в общем случае они не равны между собой по определению: $\vec{M}_c \neq \vec{M}$. Их равенство $\vec{M}_c = \vec{M}$ имеет место при условиях **теоремы 7** и справедливо **Утверждение 1.**

1.11. Парадоксы Бэтчелора

Очевидно, что Дж. Бэтчелору было известно устоявшееся более века в механике сплошной среды утверждение о *симметричности* тензора напряжений. Данный ложный факт Бэтчелор решил обосновать следующим образом. Цитируем из [5]: «...можно показать, что не все девять компонент тензора напряжений независимы. На этот раз рассмотрим моменты различных сил, действующих на жидкость в объеме V произвольной формы; i — компонента полного момента относительно точки O внутри этого объема, возникающего за счет действия поверхностных сил на границе объема, равна

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA,$$

где \vec{r} — радиус-вектор элемента $\vec{n}dA$ относительно точки O . Этот интеграл по замкнутой поверхности A можно преобразовать по теореме Остроградско-Гаусса в интеграл по объему V

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA = \int \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(r_j \sigma_{kl})}{\partial r_l} dV = \int \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l}) dV \quad (1.3.6)$$

Если теперь объем V устремить к нулю таким образом, чтобы конфигурация, создаваемая границей A объема и неподвижной точкой O в нем, сохраняла ту же самую форму, то первый член в правой части равенства (1.3.6) будет стремиться к нулю как объем V , а второй член будет стремиться к нулю быстрее, а именно как $V^{\frac{4}{3}}$. Полный момент массовых сил относительно точки O , приложенный к элементу жидкости, составляет, очевидно, величину порядка $V^{\frac{4}{3}}$, когда V мало, поэтому в объеме V одновременно имеет место также скорость изменения момента количества движения жидкости. Следовательно, интеграл $\int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV$, очевидно, представляет собой величину более высокого порядка по сравнению с другими членами уравнения момента для объема V , и вследствие этого он должен тождественно обращаться в нуль. Это возможно при любом выборе положения точки O и формы объема V , когда величина σ_{ij} представляет непрерывную функцию x , если только

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \quad (1.3.7)$$

всюду внутри жидкости;... Из (1.3.7) следует, что тензор напряжений симмет-

ричен, т.е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, и имеет только *шесть независимых* компонент...»

В (1.3.6) утверждение «...Полный момент массовых сил относительно точки O , приложенный к элементу жидкости, составляет, очевидно, величину порядка $V^{\frac{4}{3}}$, когда V мало, поэтому в объеме V одновременно имеет место также скорость изменения момента количества движения жидкости...» подразумевает использование в правой части (1.3.6) уравнений динамики сплошной среды в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} = \rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k,$$

в результате (1.3.6) принимает дедуктивный вид

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA = \int \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + r_j [\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k]) dV$$

Данные здесь оценки отдельных членов «...порядка $V^{\frac{4}{3}}$...» легко устанавливаются, если объем V есть сфера радиуса

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 r_j^2} \quad \text{с центром в точке } O,$$

изображенная на рисунке.

Для сферы $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ и $r = (\frac{3}{4\pi})^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}}$. Чтобы опровергнуть вытекающее из (1.3.7) утверждение Бэтчелора о симметричности тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, достаточно

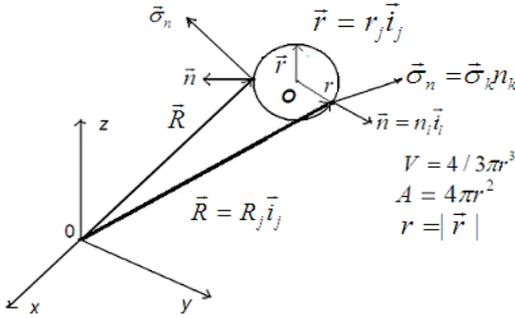
рассмотреть данный случай. Очевидно, оценки «...порядка $V^{\frac{4}{3}}$...» подразумевают применение теоремы о среднем интеграла, вследствие чего имеют место равенства

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l dA = [\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} A, \quad \int \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = [\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}]_{cp} V,$$

$$\int \varepsilon_{ijk} r_j [\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k] dV = [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} V$$

После подстановки $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ из (1.3.6) получается

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} 4\pi r^2 &= [\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}]_{cp} \frac{4}{3} \pi r^3 + \\
+ [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} \frac{4}{3} \pi r^3 & \quad (1.11.1)
\end{aligned}$$



Формула (1.11.1) легко обобщается на объем V произвольной формы, если положить поверхность $A = k_A r_{eff}^2$, объем $V = k_V r_{eff}^3$:

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} k_A r_{eff}^2 &= [\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}]_{cp} k_V r_{eff}^3 + \\
+ [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} k_V r_{eff}^3 & \quad (1.11.2)
\end{aligned}$$

Первый парадокс Бэтчелора содержится в формулах (1.11.1) и (1.11.2).

Проделав очевидные сокращения $4\pi r^2$ и r_{eff}^2 , получаем

$$[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} = [\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}]_{cp} \frac{1}{3} r + [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} \frac{1}{3} r, \quad (1.11.3)$$

$$[\varepsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l]_{cp} k_A = [\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}]_{cp} k_V r_{eff} + [\varepsilon_{ijk} r_j (\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k)]_{cp} k_V r_{eff} \quad (1.11.4)$$

По Бэтчелору «...Если теперь объем V устремить к нулю...», что эквивалентно устремлению к нулю радиусов $r \rightarrow 0, r_{eff} \rightarrow 0$, то из (1.11.3) и (1.11.4) вытекают соответственно равенства $0=0$, т.к. при этом в левых частях $r_j \rightarrow 0, \forall j$, то есть никоим

образом не получается формула (1.3.7) Бэтчелора, следовательно, тензор напряжений сплошной среды не симметричен $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$.

Второй парадокс Бэтчелора состоит в следующем.

Очевидно, $|r_j| = \sqrt{r^2 - \sum_{i=1, i \neq j}^3 r_i^2} \leq r$. На основании этого в

формуле (1.11.3) произведем оценку, положив $|r_j| \approx r$, именно

при этом получается оценка $V^{\frac{4}{3}}$ по Бэтчелору полного момента массовых сил (нижний значок [...] опускается):

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} n_l 4\pi r^3 \approx \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \frac{4}{3} \pi r^3 + \varepsilon_{ijk} \left(\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k \right) \frac{4}{3} \pi r^4$$

После сокращения $\frac{4}{3} \pi r^3$ имеет место

$$3\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} n_l \approx \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \varepsilon_{ijk} \left(\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho F_k \right) r$$

Устремим объем V к нулю, то есть r к точке O , тем самым $r \rightarrow 0$. Получается

$$3\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} n_l = \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \quad (1.11.5)$$

Но левая часть $3\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} n_l$ формулы (1.11.5) по определению не равна нулю: $3\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} n_l \neq 0$, следовательно, формула (1.3.7) Бэтчелора не равна нулю $\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \neq 0$! Тем самым доказана **несимметричность** тензора напряжений сплошной среды $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$.

В предыдущих параграфах настоящей книги была дана критика дедуктивного подхода Седова Л.И., George E. Mase, Лойцянского Л.Г., использовавших интегральные формулы

$$\frac{d}{dt} \iiint_V [\bar{R}, \bar{v} \rho \delta V] = \iiint_V [\bar{R}, \bar{F} \rho \delta V] + \iint_A [\bar{R}, \bar{\sigma}_n \delta A], \quad (1.11.6)$$

$$\iiint_V \frac{d}{dt} [\vec{R}, \vec{v} \rho \delta V] = \iiint_V [\vec{R}, \vec{F} \rho \delta V] + \iint_A [\vec{R}, \vec{\sigma}_n \delta A] \quad (1.11.7)$$

для доказательства симметричности тензора напряжений сплошной среды, которая неизбежно вытекает из получающегося из (1.11.6) и (1.11.7) соотношения

$$[\vec{R}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] - [\vec{R}, \rho \vec{F}] - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} [\vec{R}, \vec{\sigma}_k] = 0, \quad (1.11.8)$$

ошибочность которого установлена в **1.10**, причем для вывода уравнения (1.11.8) из интегральных формул (1.11.6) или (1.11.7)

используется физическая связь $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}$. Более того, радиус-

вектор \vec{R} не стремится к нулю, может принимать любые значения $\vec{R} \neq 0$.

В дедуктивном подходе *Бэтчелора* из рисунка видно, что для произвольно расположенного объема V имеет место

неравенство $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, и только в случае совпадения точки

O с началом системы координат 0 имеет место равенство

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, ибо в этом случае будет $\vec{r} = \vec{R}$.

Основной парадокс *Бэтчелора* состоит в устремлении к нулю произвольного объема V , что равносильно в случае сферы устремлению к нулю радиуса $r \rightarrow 0$ или $r_{eff} \rightarrow 0$. В дедуктивном методе *Седова Л.И., George E. Mase, Лойцянского Л.Г. и др.* объем V произвольный, причем $\vec{R} \neq 0$. По определению момента любого вектора $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{f}]$, если плечо равно нулю $\vec{r} = 0$, то и момент равен нулю: $\vec{M} = 0$, следовательно, использование для доказательства симметричности тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ нулевого момента $\vec{M} = 0$ является ошибкой.

1.12. Аналог гипотезы *Стокса*. Антисимметричный тензор Напряжений

В 1.7 был поставлен логичный вопрос: если по гипотезе *Стокса* симметричные напряжения

$$\pi_{ji(c)} = -(p + 2/3\mu \operatorname{div}\vec{v})\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), i, j = 1, 2, 3 \quad (1.12.1)$$

вызваны деформационными смещениями

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j,$$

то какие же напряжения создают стоящие в ряду *Тейлора* (в конвективном ускорении)

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta x_j, i = 1, 2, 3 \quad (1.12.2)$$

вращательные смещения $\frac{1}{2} [\operatorname{rot}\vec{v}, \delta\vec{r}]$ или $\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j$?

Чтобы ответить на этот вопрос выдвигается по аналогии с гипотезой *Стокса альтернативная* гипотеза: пусть касательные напряжения будут пропорциональны компонентам вращательного смещения, т.е. имеют место антисимметричные (кососимметричные) напряжения $\pi_{ji}^* = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, следовательно,

альтернативный тензор напряжений будет иметь вид

$$\pi_{(Alt)} = -pE + 2\mu\hat{S}, \pi_{ji(Alt)} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), i, j = 1, 2, 3 \quad (1.12.3)$$

Подставляя (1.12.3) в уравнения динамики в напряжениях

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\pi}_j}{\partial x_j}, \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3,$$

получаем *альтернативные* уравнения динамики вязкой жидкости:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.12.4)$$

Нормальные напряжения $\pi_{ii(Alt)} = -p, i = 1, 2, 3$ соответствуют закону *Паскаля*. Представляют интерес следующие факты. При вязкости $\mu = const$ уравнения (1.12.4) приводятся к виду

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.12.5)$$

откуда для несжимаемой жидкости без источников в силу уравнения неразрывности $div \vec{v} \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ получаются **уравнения**

Навье несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.12.6)$$

Эти же уравнения **Навье** получаются и из уравнений *Стокса* с симметричными напряжениями (1.12.1):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu div \vec{v}), \quad i = 1, 2, 3,$$

и эти же уравнения (1.12.6) получаются из уравнений динамики с несимметричными напряжениями *Ньютона*:

$$\pi_{ji(n)} = -[p + (\frac{1}{3} \mu - \mu') div \vec{v}] \delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.12.7)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mu/3 - \mu') div \vec{v}], \quad i = 1, 2, 3$$

Теорема 8. Уравнения **Навье-Стокса** несжимаемой жидкости получаются одинаковыми как для симметричного тензора напряжений *Стокса* и несимметричного тензора напряжений *Ньютона*, так и для антисимметричного тензора.

Но гипотеза *Стокса* (1.12.1) приводит к указанным выше парадоксам, ибо, как это доказано, тензор напряжений сплошной среды в общем случае несимметричен, а при альтернативной гипотезе уравнения (1.12.4) в общем случае переменной вяз-

кости $\mu \neq const$ теряют свойство эллиптичности. Физическое обоснование адекватности несимметричного тензора напряжений *Ньютона* (1.12.7) течениям вязких жидкостей дано в главе 3.

1.13. О неправильном применении теоремы об изменении момента импульса. *Ошибочность уравнений Стокса*

Напомним, следующую **логическую последовательность** вывода **теоремы об изменении момента импульса**. Здесь это очень важно. А именно, что из закона сохранения импульса отдельных материальных точек (см.[7])

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ik}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.13.1)$$

вытекает, во-первых, закон сохранения импульса системы материальных точек (см. [7]):

$$\sum_{i=1}^N \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ik}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.13.2)$$

где сумма внутренних сил равна нулю

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ik} = 0,$$

поэтому для системы материальных точек теорема об изменении импульса получается в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.13.3)$$

во-вторых, из (1.13.1) вытекает момент импульса для каждой отдельно взятой материальной точки

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{k=1, k \neq i}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}], \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.13.4)$$

суммированием которых получается для моментов системы материальных точек равенство

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1, k \neq i}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}], \quad i = 1, \dots, N,$$

где сумма моментов внутренних сил равна нулю

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1, k \neq i}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] = 0,$$

в силу чего теорема об изменении момента импульса замкнутой системы материальных точек сформулировано в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i], \quad (1.13.5)$$

где $\sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ - сумма моментов внешних сил.

Взяв за основу (1.13.5), точная формулировка теоремы об изменении момента импульса в элементарном объеме $\delta\tau$ сплошной среды была дана выше:

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{F}_i] + \oiint_{\sigma_{\alpha}} \sum_k [\vec{r}_{\sigma k}, \vec{\pi}_{nk} \delta\sigma_k] \quad (1.13.6)$$

Итак, из (1.13.1) вытекает (1.13.4) и затем (1.13.5), но не наоборот: из (1.13.5) не выводится (1.13.1). Данную последовательность рассуждений применим к выводу теоремы об изменении момента импульса в сплошной среде в иных формулировках. Выпишем уравнение динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_z}{\partial z} \quad (1.13.7)$$

Как было показано в индуктивном методе **1.4**, (данное уравнение является прообразом уравнения (1.13.3)). Умножая (1.13.7) векторно на радиус-вектор \vec{r} , выведем прообраз теоремы моментов (1.13.5):

$$[\vec{r}, \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r}, \rho \vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial \vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_z}{\partial z}] \quad (1.13.8)$$

Из эквивалентного преобразования (1.13.8)

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}, \rho \vec{v}] - [\vec{r}, \vec{v} \frac{d\rho}{dt}] = [\vec{r}, \rho \vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial \vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\pi}_z}{\partial z}] \quad (1.13.9)$$

вытекает теорема об изменении момента импульса $\rho\vec{v}$, приходящегося на единицу объема:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \rho\vec{v}] = [\vec{r}, \vec{v} \frac{d\rho}{dt}] + [\vec{r}, \rho\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}] \quad (1.13.10)$$

Для несжимаемых сплошных сред $\rho = const$ теорема об изменении момента импульса примет форму

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \rho\vec{v}] = [\vec{r}, \rho\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}], \quad (1.13.11)$$

которая полностью совпадает с определением момента (1.13.5).

Импульс индивидуального объема $\delta\tau$ равен $\rho\delta\tau\vec{v} = \delta m\vec{v}$, поэтому теорема об изменении момента импульса из (1.13.8) получается для элементарного объема $\delta\tau$ в виде:

$$[\vec{r}, \delta m \frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r}, \delta m\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau$$

Для сжимаемых сред $\delta\tau = \delta\tau(t)$ и $\frac{d\delta\tau}{dt} = \delta\tau \text{div}\vec{v}$, $\frac{d\delta m}{dt} = 0$

и это выражение переходит в теорему об изменении момента импульса индивидуального объема $\delta\tau$ для сжимаемых сред

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}, \delta m\vec{v}] = [\vec{r}, \delta m\vec{F}] + [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau \quad (1.13.12)$$

Интегрирование (1.13.12) по всему объему τ дает выражение

$$\iiint_{\tau} \frac{d}{dt}[\vec{r}, \rho\delta\tau\vec{v}] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \rho\delta\tau\vec{F}] + \iiint_{\tau} [\vec{r}, \frac{\partial\vec{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\pi}_z}{\partial z}]\delta\tau,$$

которое в принципе *отличается* от известной формулы [1]

$$\iiint_{\tau} \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{v}\rho\delta\tau] = \iiint_{\tau} [\vec{r}, \vec{F}\rho\delta\tau] + \iint_{\sigma} [\vec{r}, \vec{\pi}_n\delta\sigma], \quad (1.13.13)$$

приведенной в книгах *Лойцянского, Седова* и др.

Очевидно, из правильно сформулированной теоремы об изменении момента импульса (1.13.12) никак не следует вывод о симметричности тензора напряжений.

Следовательно, доказана

Теорема 9. Из правильно сформулированной теоремы об изменении момента импульса не вытекает симметричность тензора напряжений.

Ошибочность выражения (1.13.13) и вытекающих из нее формул исследована в предыдущих параграфах.

Итак, приведенные выше парадоксы и доказательства **несимметричности тензора напряжений** сплошной среды подтверждают **ошибочность гипотезы Стокса**. Так как именно по этой гипотезе выведены уравнения *Навье-Стокса*, то, следовательно, **уравнения *Навье-Стокса*, точнее, уравнения Стокса** [1]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \operatorname{div} \vec{v}), i = 1, 2, 3,$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2 - p \operatorname{div} \vec{v} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2$$

являются ошибочными.

Уравнения вязкой несжимаемой жидкости, построенные *Навье* по *несимметричному* тензору напряжений *Ньютона* π_n ,

$$\rho [\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}] + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{F}, (\nabla, \vec{v}) = 0$$

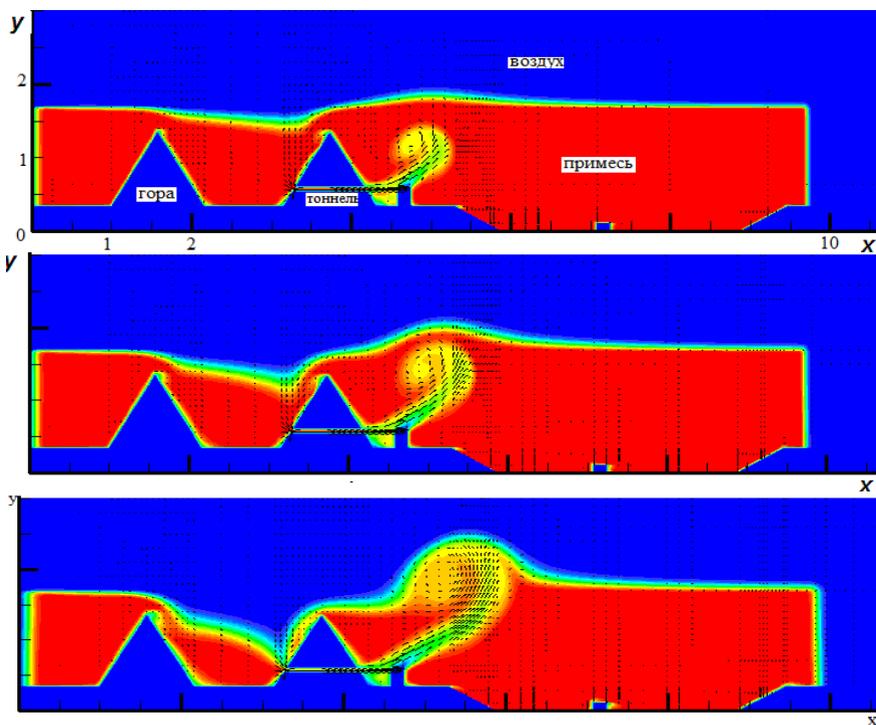
являются правильными и имеет место **теорема 8**.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: "Наука", 1973г.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - Т.1. М.: "Наука", 1973г.
3. Лыков А.В. Теплообмен. - М.: «Энергия», 1972г. С.560.
4. George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY. New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico and Panama 1970.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: «Мир», 1973г.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Изд-во "Наука", 1974г.
7. Савельев И.В. Курс общей физики. - Т.1. М.: "Наука", 1977г.
8. Джакупов К.Б. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэро-термодинамики. - Алматы: Изд-во КазНУ им.Аль-

Фараби, 2004г. С.246.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. - М.: "Наука", 1973г.
10. Джакупов К.Б. О несимметричности тензора напряжений // Междунар. науч.конф. «Пробл.теор. прикл.мех.» Алматы, 1-2 марта 2006г., посвящ. 75-лет. акад. Джолдасбекова У.А.
11. Джакупов К.Б. О первой теореме Гельмгольца// Междунар. науч.конф. «Пробл.теор. прикл.мех.» Алматы, 1-2 марта 2006г., посвящ. 75-лет. акад. Джолдасбекова У.А.
12. Джакупов К.Б. Тензор напряжений сплошной среды не симметричен // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящ. 60-летию механико-математического факультета Томского университета, 22-24 сент.2008г., г.Томск.
13. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. -М.: Изд-во МГУ, 1978г.



Влияние выдува из тоннели в правой горе на перенос примеси на моменты времени $n=18400$, $n=31200$, $n=54800$, сетка 500×150 , $Re=80000$, число Маха $Mx=0.05$, $\tau = 0.0005$

Глава 2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ *Ньютона*

$$\pi_{ii} = -[p + (\mu/3 - \mu') \operatorname{div} \vec{v}] E + \mu \bar{S}$$

Уравнения динамики вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений выписываются здесь, удовлетворяя вторую гипотезу о давлении. Следует отметить, что приведенные в данной главе уравнения являются математическими моделями (ламинарных) низкоскоростных течений, соответствующих закону трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$.

2.1. Уравнения динамики в декартовых координатах

Подставляя компоненты несимметричного тензора напряжений *Ньютона* в уравнение динамики в напряжениях и проецируя на оси декартовой системы координат получаем уравнения динамики вязкой жидкости (*Джакупов К.Б.* [1]):

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] + \rho F_x, \\ & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \quad (2.1.1) \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] + \rho F_y, \\ & \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] + \rho F_z \end{aligned}$$

из общего уравнения баланса энергий получается уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned}
& \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \\
& \quad + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.1.2)
\end{aligned}$$

В несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$:

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho F_x, \\
& \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho F_y, \\
& \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho F_z, \quad (2.1.3) \\
& \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\
& \quad + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2] \quad (2.1.4)$$

Вывод уравнений *Навье* несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3 \quad (2.1.5)$$

из уравнений *Стокса* при постоянной вязкости

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i=1,2,3,$$

как известно, использует уравнение неразрывности $div \vec{v} = 0$.

Если же в потоке имеются дискретно расположенные источники или стоки с удельными мощностями J , то $div \vec{v} = J$ будет разрывной недифференцируемой функцией, поэтому вывод указанных уравнений в виде (2.1.5) невозможен, тогда как (2.1.5) из *новых уравнений* (2.1.3) получается без использования уравнения неразрывности $div \vec{v} = 0$.

В отличие от уравнений *Навье-Стокса* в уравнениях (2.1.1) содержится на **9** производных меньше в трехмерном случае и на **4** в двумерном. Кроме того, уравнения (2.1.1) удобно записываются в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + div(\rho v_i \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \quad (2.1.6) \\ & = \rho F_i + div(\mu grad v_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) div \vec{v} \right], i=1,2,3 \end{aligned}$$

Если в правой части этого уравнения положить $div \vec{v} = 0$, получается аналогичная дивергентная запись уравнений (2.1.3) несжимаемой жидкости.

Краткое выражение уравнения баланса энергий для несимметричного тензора

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = (\nabla, \lambda \nabla T) + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - p(\nabla, \vec{v}) - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\nabla, \vec{v})^2 \quad (2.1.7)$$

в дивергентной записи подобно уравнению динамики (2.1.6)

$$c_v \left[\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho T \vec{v}) \right] = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \\ + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2$$

В новых уравнениях динамики привлекают внимание диссипативные члены $\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v_i)$, $i=1,2,3$, которые по структуре аналогичны диссипативному члену в уравнении баланса энергий $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$, вытекающему из закона Фурье.

Число Прандтля $\operatorname{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ связывает вязкость μ с теплопроводностью среды λ , что подчеркивает единую сущность молекулярного переноса субстанций, которыми в одном случае является температура T , в других случаях компоненты скорости v_i , $i = 1,2,3$ или концентрации C_m по закону Фика.

2.2. Уравнения динамики в цилиндрических координатах

Вывод аналогичных уравнений в цилиндрической и сферической системах координат не вызывает особых затруднений, только надо учесть несимметричность напряжений в этих системах (Джакупов К.Б. [1]). В цилиндрической системе для постоянной вязкости $\mu = \operatorname{const}$ и плотности уравнения динамики совпадают с известными уравнениями Навье-Стокса [2], в случае переменных вязкости и плотности выводятся подстановкой несимметричных напряжений

$$\pi_{r\varepsilon} = \mu \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r} \right), \quad \pi_{\varepsilon r} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon}, \quad \pi_{zr} = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z}, \\ \pi_{rz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \pi_{z\varepsilon} = \mu \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z}, \quad \pi_{\varepsilon z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon}, \\ \sigma_{rr} = \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} - \mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \pi_{rr} = -p - \sigma_{rr},$$

$$\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div}\vec{v} - \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{v_r}{r}\right), \pi_{\varepsilon\varepsilon} = -p - \sigma_{\varepsilon\varepsilon},$$

$$\pi_{zz} = -\left[p + \left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div}\vec{v}\right] + \mu\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

в уравнения динамики сплошной среды [2]):

$$\begin{aligned} & \rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varepsilon^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \\ & -\frac{\partial}{r\partial r}\left[r\left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div}\vec{v} - \mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + \\ & + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div}\vec{v} - \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{v_r}{r}\right)\right] + \rho F_r, \\ & \rho\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + v_z\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} + \frac{v_r v_\varepsilon}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varepsilon} + \\ & + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\mu\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z}\right) - \\ & - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div}\vec{v} - \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{v_r}{r}\right)\right] + \rho F_\varepsilon, \\ & \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varepsilon} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \\ & = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[p + \left(\frac{1}{3}\mu - \mu'\right) \operatorname{div}\vec{v}\right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \rho F_z, \end{aligned}$$

уравнение баланса энергий принимает вид

$$\begin{aligned} \rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r}\frac{\partial T}{\partial\varepsilon} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \\ &+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \Phi_v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_v = & \mu \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon} \right)^2 \right] - p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2 \end{aligned}$$

2.3. Уравнения динамики в сферических координатах

Компоненты несимметричного тензора напряжений *Ньютона*:

$$\sigma_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} - \mu \left(\frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon}{r} \right), \pi_{\phi\phi} = -p - \sigma_{\phi\phi},$$

$$\sigma_{rr} = \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} - \mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \pi_{rr} = -p - \sigma_{rr},$$

$$\sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} - \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r} \right), \pi_{\varepsilon\varepsilon} = -p - \sigma_{\varepsilon\varepsilon},$$

$$\pi_{\phi r} = \mu \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_r}{\partial \phi}, \pi_{r\phi} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right), \pi_{r\varepsilon} = \mu \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon}{r} \right),$$

$$\pi_{\varepsilon r} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon}, \pi_{\phi\varepsilon} = \mu \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \phi}, \pi_{\varepsilon\phi} = \mu \frac{\sin \varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{v_\phi}{\sin \varepsilon} \right),$$

$$\operatorname{div} \vec{v} \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial (v_\varepsilon \sin \varepsilon)}{\partial \varepsilon},$$

подставляются в уравнения динамики в напряжениях [2]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + \frac{v_\phi}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\varepsilon^2 + v_\phi^2}{r} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} - \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial (\pi_{\varepsilon r} \sin \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial \pi_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\sigma_{\varepsilon \varepsilon} + \sigma_{\phi \phi}}{r} + \rho F_r, \\
\rho \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_\phi}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\varepsilon}{r} - \frac{v_\phi^2 \operatorname{ctg} \varepsilon}{r} \right) = \\
& = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \pi_{r\varepsilon})}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial (\sigma_{\varepsilon \varepsilon} \sin \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \\
& + \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial \pi_{\phi \varepsilon}}{\partial \phi} + \frac{\pi_{r\varepsilon} + \pi_{\varepsilon r}}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \varepsilon}{r} \sigma_{\phi \phi} + \rho F_\varepsilon, \\
\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \varepsilon} + \frac{v_\phi}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\varepsilon v_\phi}{r} \operatorname{ctg} \varepsilon \right) = \\
& = -\frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \pi_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \pi_{\varepsilon \phi}}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial \sigma_{\phi \phi}}{\partial \phi} + \\
& + \frac{\pi_{r\phi} + \pi_{\phi r}}{r} + \frac{2 \operatorname{ctg} \varepsilon}{r} (\pi_{\varepsilon \phi} + \pi_{\phi \varepsilon}) + \rho F_r,
\end{aligned}$$

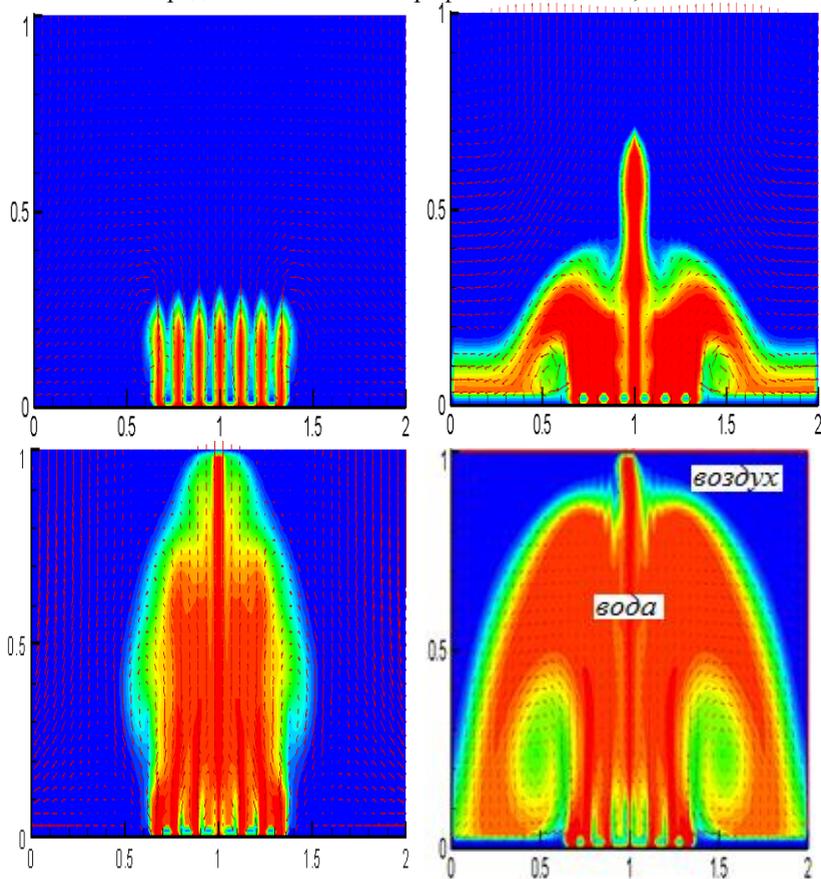
в уравнении баланса энергий для несимметричного тензора диссипативный член равен

$$\begin{aligned}
\Phi_v = \mu \{ & \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon}{r} \right)^2 + \\
& + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varepsilon}{r} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \left[\frac{\sin \varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{v_\phi}{\sin \varepsilon} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \phi} \right)^2 + \\
& + \left(\frac{1}{r \sin \varepsilon} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 \} - p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2
\end{aligned}$$

Примечание. В отличие от μ искусственный коэффициент вязкости μ' никак не связан с законом трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, его истинное физическое значение до сих пор не определено и **никогда не будет определено**. По здравому смыслу, положив $\mu' = \frac{\mu}{3}$, следует значительно упростить уравнения динамики и баланса энергий, что обосновано в **главе 3**.

Литература

1. Джакупов К.Б. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэро-термодинамики.-Алматы: Изд-во КазНУ им.Аль-Фараби, 2004г. С.246.
2. Лыков А.В.Тепломассобмен. - М.: «Энергия»,1972г. С.560.
3. Джакупов К.Б. Новые уравнения динамики вязкой жидкости // Всероссийская конференции по математике и механике, посвящ. 60-летию механико-математического факультета Томского государственного университета, 22-24 сент.2008г., г.Томск.
4. Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.-Алматы: Типография «К2». 2011г., С.293.



Развитие во времени шестиструйного фонтана воды в воздухе

Глава 3. НОВЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В 1882г. английский физик *Осборн Рейнольдс* экспериментально установил потерю устойчивости ламинарного течения в цилиндрических трубах и переходе его в турбулентное течение. Одновременно *Рейнольдс* вывел, исходя из уравнений *Навье*, дифференциальные уравнения, основанные на представлении актуальных, имеющих хаотический характер, компонент скорости и давления в виде сумм осредненных во времени значений и пульсационных составляющих. Тот факт, что в системе уравнений *Рейнольдса* число неизвестных превышает число уравнений на 6 величин, т.е. не хватает еще 6 уравнений для их замыкания, должно было обратить внимание на ошибочность такого подхода к моделированию турбулентных течений. Автор этих строк еще в 1985г. опубликовал метод замыкания уравнений *Рейнольдса* с помощью всего лишь 4 уравнений для пульсаций, которые необходимы для определения 6 пульсационных (рейнольдсовых) напряжений.

Являющийся исторически первым, метод *Келлера-Фридмана* замыкания уравнений *Рейнольдса* неэффективен по той причине, что он приводит к бесконечной цепочке сцепленных между собой уравнений (метод *Келлера-Фридмана* напоминает действия барона *Мюнхгаузена*, вытаскившего себя вместе с лошадью из болота).

Буссинеск для решения проблемы замыкания уравнений *Рейнольдса* предложил заменить компоненты тензора рейнольдсовых напряжений $\pi_{(Re)} = \overline{\rho v'_i v'_j}_{i=1,2,3}^{j=1,2,3}$ симметричными форму-

лами типа *Стокса* $\overline{\rho v'_i v'_j} = -\mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$, где μ_T назван

коэффициентом эффективной *турбулентной вязкости* [7], т.е. осуществлена подгонка под тензор напряжений *Стокса* и тем самым подгонка под уравнения *Стокса*. Тензор напряжений *Буссинеска* с учетом молекулярной вязкости имеет вид

$$\pi_{(B)ji} = -p\delta_{ij} + (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, 3$$

Для определения коэффициента *турбулентной вязкости* μ_T используется множество полуэмпирических теорий [1], содержащих, как правило, целый ряд функциональных включений и констант с неопределенной физической содержательностью и сомнительной универсальностью. Многие полуэмпирические теории, типа *теории пути смешения Прандтля* [3], моделируют осредненные турбулентные течения в пограничном слое по безградиентным уравнениям, в которых не выполняется закон сохранения массы и второй закон *Ньютона*. (Обзор таких работ содержится в [1], [7], [8], [10] и др.)

Разумеется только путем подгонки коэффициентов можно получать из таких теорий *нужные* результаты.

В данной главе показано, что замыкание уравнений *Рейнольдса* вполне осуществимо в системе с уравнениями для пульсаций, в подтверждение приводятся некоторые результаты численных расчетов.

Уравнения *Рейнольдса* и *Буссинеска* выводятся из уравнений *Навье-Стокса*. Доказано, что уравнения *Навье* соответствуют закону трения *Ньютона*, который в свою очередь является следствием закона трения для малых скоростей $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, поэтому уравнения *Навье* и искусственно выведенные из них уравнения *Рейнольдса* не являются моделями турбулентных движений с большими скоростями. Доказано также, что тензор напряжений *Стокса*, следовательно, уравнения *Стокса* не соответствуют закону трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, следовательно, не имеют физического обоснования. Уравнения *Буссинеска* также не соответствуют закону трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, так как подобны уравнениям *Стокса*. По этой причине совокупность уравнений *Буссинеска* и $k - \varepsilon$ моделей не могут служить в качестве моделей турбулентных течений.

В данной главе для адекватного моделирования как ламинарных так и турбулентных движений вязких жидкостей и газа, обоснована необходимость применения степенных законов трения, тем самым даны **физическое и математическое обоснования** предлагаемых здесь дифференциальных уравнений.

3.1. О парадоксе формулы осреднения Рейнольдса

В подходе Рейнольдса к выводу уравнений для осредненных физических величин актуальные значения гидротермодинамических функций f представляются в виде суммы осредненных по времени \bar{f} и пульсационных составляющих f' :

$$f = \bar{f} + f', \bar{f} = \frac{1}{t^o} \int_{t-\frac{t^o}{2}}^{t+\frac{t^o}{2}} f(x, y, z, \tau) d\tau, \bar{f}' = \frac{1}{t^o} \int_{t-\frac{t^o}{2}}^{t+\frac{t^o}{2}} f'(x, y, z, \tau) d\tau = 0 \quad (3.1.1)$$

При осреднении нелинейных уравнений Навье, баланса энергий, диффузии и др. появляются дополнительные, так называемые рейнольдсовы или пульсационные напряжения, тепловые и диффузионные потоки вида

$$\overline{\Lambda\{f'\psi'\}} = \frac{1}{t^o} \int_{t-\frac{t^o}{2}}^{t+\frac{t^o}{2}} \Lambda\{f'(x, y, z, \tau)\psi'(x, y, z, \tau)\} d\tau \quad (3.1.2)$$

(Λ – дифференциальный оператор), определение которых и создает искусственную проблему замыкания уравнений Рейнольдса.

Парадоксальность формул осреднения (3.1.1), (3.1.2)

заключается в пределах интегрирования $[t - \frac{t^o}{2}, t + \frac{t^o}{2}]$, где t^o -

период осреднения, а t - текущее время. По Рейнольдсу (3.1.1) получается, что предварительно нужно знать значения функций

на будущие моменты времени $[t, t + \frac{t^o}{2}]$ и затем лишь проводить

осреднения по (3.1.1), что нереально. В вычислительных экспериментах всегда имеется возможность осуществления осреднения к текущему моменту времени t , используя накопленные в оперативной памяти значения функции в предыдущие моменты времени:

$$f = \bar{f} + f', \bar{f} = \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o}^t f(x, y, z, \tau) d\tau, \bar{f}' = \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o}^t f'(x, y, z, \tau) d\tau = 0 \quad (3.1.3)$$

Соответственно осреднению (3.1.3) имеет место формула

$$\overline{\Lambda\{f'\psi'\}} = \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o}^t \Lambda\{f'(x, y, z, \tau)\psi'(x, y, z, \tau)\} d\tau \quad (3.1.4)$$

3.2. Приближенное вычисление интегралов осреднения

2.1. Имеется несколько простых формул приближенного вычисления определенных интегралов. Например, в осреднении по Рейнольдсу (3.1.2) интеграл можно приближенно вычислить по формуле среднего прямоугольника

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda\{f'\psi'\}} &= \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o/2}^{t+t^o/2} \Lambda\{f'(x, y, z, \tau)\psi'(x, y, z, \tau)\} d\tau = \quad (3.2.1) \\ &= \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} + \frac{(t^o)^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t^*)\psi'(x, y, z, t^*)\}, \\ t^* &\in \left[t - \frac{t^o}{2}, t + \frac{t^o}{2} \right]. \end{aligned}$$

По формуле Лагранжа имеет место

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t^*)\psi'(x, y, z, t^*)\} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} + \\ + (t^* - t) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Lambda\{f'(x, y, z, t^{**})\psi'(x, y, z, t^{**})\}, & t^{**} \in [t, t^*] \text{ или } t^{**} \in [t^*, t] \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Подставляя (3.2.2) в (3.2.1), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda\{f'\psi'\}} &= \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} + \quad (3.2.3) \\ + \frac{(t^o)^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} &+ O\left(\frac{(t^o)^2}{24} |t^* - t|\right) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что период осреднения t^o - (одна из важнейших характеристик турбулентного потока) в реальных течениях подразумевается как величина сравнительно малая по отношению к характерному для данного процесса масштабу

времени, в формуле (3.2.3) остаточный член $O(\frac{(t^o)^2}{24} |t^* - t|)$ можно отбросить как относительно малую величину 3-го порядка, на основании неравенства $|t^* - t| \leq t^o$.

В результате из (3.2.3) получается приближенная формула

$$\overline{\Lambda\{f'\psi'\}} = \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} + \frac{(t^o)^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\}, \quad (3.2.4)$$

имеющая погрешность $O(\frac{(t^o)^2}{24} |t^* - t|) = O(\frac{(t^o)^3}{24})$.

Аналогично поступаем для осредненных третьих и более высоких моментов

$$\overline{\Lambda\{f'\psi'...\varphi'\}} = \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)...\varphi'(x, y, z, t)\} + \frac{(t^o)^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)...\varphi'(x, y, z, t)\} \quad (3.2.5)$$

2.2. В реальном осреднении (3.2.4) для приближенного вычисления интеграла можно применить формулу прямоугольника

$$\overline{\Lambda\{f'\psi'\}} = \frac{1}{t-t^o} \int_{t-t^o}^t \Lambda\{f'(x, y, z, \tau)\psi'(x, y, z, \tau)\} d\tau = \quad (3.2.6)$$

$$= \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t^*)\psi'(x, y, z, t^*)\},$$

где $t^* \in [t - t^o, t]$.

По формуле Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t^*)\psi'(x, y, z, t^*)\} = \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} + (t^* - t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda\{f'(x, y, z, t^{**})\psi'(x, y, z, t^{**})\}, \quad (3.2.7)$$

Подставляя (3.2.7) в (3.2.6), находим

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda\{f'\psi'\}} &= \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o}^t \Lambda\{f'(x, y, z, \tau)\psi'(x, y, z, \tau)\}d\tau = \\ &= \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} - \\ &- \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} + O\left(\frac{t^o}{2} |t^* - t|\right) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Из (3.2.8) получается приближенная формула

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda\{f'\psi'\}} &= \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} - \\ &- \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

имеющая погрешность $O(0,5t^o |t^* - t|) = O(0,5t^{o2})$ в силу неравенства $|t^* - t| \leq t^o$, так как $t^* \in [t - t^o, t]$.

Аналогично поступаем для осредненных третьих и более высоких моментов

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda\{f'\psi'...\varphi'\}} &= \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)...\varphi'(x, y, z, t)\} - \\ &- \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)...\varphi'(x, y, z, t)\} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Формулы (3.2.4), (3.2.5), (3.2.9), (3.2.10) позволяют замкнуть системы осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики с привлечением уравнений для пульсаций или уравнений для вторых моментов $\overline{f'\psi'}$, $\overline{f'\varphi'}$, $\overline{\psi'\varphi'}$ и т.п.

3.3. Применение уравнений пульсаций для замыкания уравнений Рейнольдса

Покажем применение формулы (3.2.9) на уравнениях вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \text{div}(v_i \vec{v}) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \rho F_i + \mu \Delta v_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \quad \rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(T \vec{v}) \right] = \lambda \Delta T, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + \text{div}(C_m \bar{v}) = D_m \Delta C_m, \quad m = 1, \dots \quad (3.3.1)$$

$$v_i|_S = \varphi_i, T|_S = q, C_m|_S = q_m, v_i|_{t=0} = v_i^0, T|_{t=0} = T^0, C_m|_{t=0} = C_m^0$$

Благодаря осреднению по Рейнольдсу, получаются уравнения для осредненных функций

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \overline{\rho v'_j v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho \bar{F}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.3.2)$$

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] + c_p \frac{\partial \overline{\rho v'_j T'}}{\partial x_j} = \lambda \Delta \bar{T},$$

$$\frac{\partial \bar{C}_m}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_j C'_m}}{\partial x_j} = D_m \Delta \bar{C}_m, \quad m = 1, \dots,$$

$$\bar{v}_i|_S = \bar{\varphi}_i, \bar{T}|_S = \bar{q}, \bar{C}_m|_S = \bar{q}_m, \bar{v}_i|_{t=0} = \bar{v}_i^0, \bar{T}|_{t=0} = \bar{T}^0, \bar{C}_m|_{t=0} = \bar{C}_m^0$$

При вычитании уравнений (3.3.2) соответственным образом из (3.3.1) получаются уравнения для пульсаций

$$\rho \left(\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{\rho v'_j v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \rho F'_i + \mu \Delta v'_i,$$

$$i = 1, 2, 3, \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.3.3)$$

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] - c_p \frac{\partial \overline{\rho v'_j T'}}{\partial x_j} = \lambda \Delta T',$$

$$\frac{\partial C'_m}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial C'_m}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial C'_m}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{v'_j C'_m}}{\partial x_j} = D_m \Delta C'_m,$$

$$v'_i|_S = \varphi'_i, T'|_S = q', C'_m|_S = q'_m, v'_i|_{t=0} = v_i^0, T'|_{t=0} = T^0, C'_m|_{t=0} = C_m^0$$

Далее, входящие в (3.3.2) и (3.3.3) пульсационные выражения

$$\frac{\partial \overline{\rho v'_j v'_i}}{\partial x_j}, \quad c_p \frac{\partial \overline{\rho v'_j T'}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \overline{v'_j C'_m}}{\partial x_j}$$

заменяются по формуле (3.2.9), в результате чего получается замкнутая система уравнений:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j v'_i}{\partial x_j} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 v'_j v'_i}{\partial t \partial x_j}\right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= \rho \bar{F}_i + \mu \Delta \bar{v}_i, i = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j T'}{\partial x_j} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 v'_j T'}{\partial t \partial x_j}\right) &= \lambda \Delta \bar{T}, \\
\frac{\partial \bar{C}_m}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j C'_m}{\partial x_j} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 v'_j C'_m}{\partial t \partial x_j} &= D_m \Delta \bar{C}_m, m = 1, \dots, \\
\rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 v'_j v'_i}{\partial t \partial x_j}\right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= \rho F'_i + \mu \Delta v'_i, \\
i = 1, 2, 3, \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} &= 0, \quad (3.3.4)
\end{aligned}$$

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 v'_j T'}{\partial t \partial x_j}\right] = \lambda \Delta T', \quad (3.3.5)$$

$$\frac{\partial C'_m}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial C'_m}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial x_j} + \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 v'_j C'_m}{\partial t \partial x_j} = D_m \Delta C'_m, m = 1, \dots,$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}_i|_S = \bar{\varphi}_i, \bar{T}|_S = \bar{q}, \bar{C}_m|_S = \bar{q}_m, \bar{v}_i|_{t=0} = \bar{v}_i^0, \bar{T}|_{t=0} = \bar{T}^0, \bar{C}_m|_{t=0} = \bar{C}_m^0, \\
v'_i|_S = \varphi'_i, T'|_S = q', C'_m|_S = q'_m, v'_i|_{t=0} = v_i^0, T'|_{t=0} = T^0, C'_m|_{t=0} = C_m^0
\end{aligned}$$

Сумма уравнений (3.3.4) и (3.3.5) есть уравнения *Навье*, теплопроводности и диффузий.

Период осреднения по времени t^o , органически вошедший в замкнутую систему (3.3.4) и (3.3.5), наряду с такими физическими характеристиками течения, как коэффициенты - вязкости μ , теплопроводности λ , теплоемкости c_p , диффузий D_m и плотности ρ , а также начальные и граничные условия для осредненных и пульсационных величин должны быть определены для каждого рассчитываемого течения. Численное решение замкнутой связанной системы (3.3.4) и (3.3.5) для заданных $\mu, \lambda, c_p, \rho, D_m, \bar{\varphi}_i, \varphi'_i, \bar{q}, q', \bar{q}_m, q'_m$ и начальных условий по времени не представляет принципиальных затруднений и

может быть проведено по разностным схемам, разработанным и теоретически обоснованным в [4], [5].

Уравнения вторых моментов $\overline{v'_i v'_j}$, $\overline{v'_j T'_i}$, $\overline{v'_j C'_m}$ составляются методом *Келлера-Фридмана* [1]. Ограничимся уравнениями вторых моментов $\tau_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$:

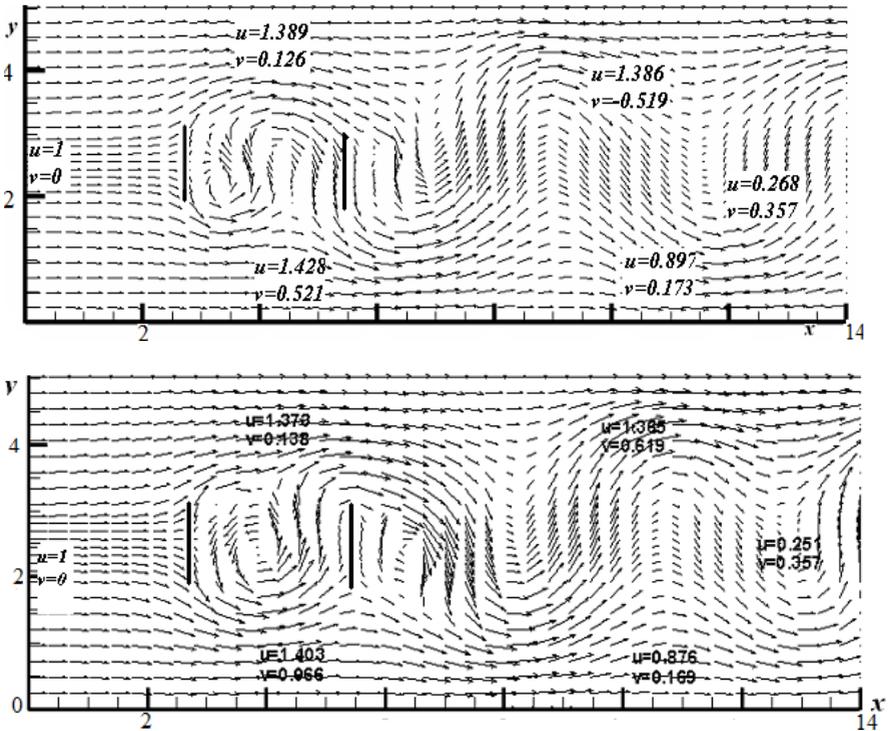
$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \right] + v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} = \\ = -\rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k} + \mu \Delta \tau_{ij} - 2\mu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Заменяя в (3.3.6) моменты $\overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}}$, $\overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}}$, $\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}$ по формуле (3.2.9), третьи моменты $\frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k}$ по формуле (3.2.10),

получаем замкнутую систему вместе с уравнениями (3.3.2) для \bar{v}_i и уравнениями (3.3.3) для пульсаций v'_i , поставив граничные $\tau_{ij}|_{\sigma}$ и начальные условия $\tau_{ij}|_{t=0}$:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho \bar{F}_i + \mu \Delta \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \\ \rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \rho F'_i + \mu \Delta v'_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \rho \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \right] + v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}) + \\ + v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}) = -\rho \left(\frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial t \partial x_k} \right) + \mu \Delta \tau_{ij} - \\ - 2\mu \left[\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right) \right], \quad \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0, \end{aligned}$$

$$\bar{v}_i|_S = \bar{\varphi}_i, \bar{v}_i|_{t=0} = \bar{v}_i^0, v'_i|_S = \varphi'_i, v'_i|_{t=0} = v_i^0, \tau_{ij}|_S = \eta_{ij}, \tau_{ij}|_{t=0} = \tau_{ij}^0$$



Численное моделирование обтекания двух параллельных пластин на сетке $450 \times 150 n = 166500$, $t = n \tau$, $\tau = 0.001$, $Re = 30000$. Представлены поля актуальных скоростей на один и тот же момент времени. Верхняя эюра соответствует $\bar{v} = u\bar{i} + v\bar{j}$, полученное из решения уравнений Навье, нижняя эюра соответствует $\bar{v} = (\bar{u} + u')\bar{i} + (\bar{v} + v')\bar{j}$, полученное совместным решением уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций для безразмерного периода $Dg = 10 \tau$. Нанесены значения компонент скорости в отдельных точках потоков. Видно различие в расположениях линий тока, что объясняется влиянием пульсаций.

При переходе от (3.3.4), (3.3.5) к уравнениям в безразмерных переменных, взяв в качестве масштабов – скорости U , линейных размеров L , времени $t_* = L/U$, давления $p_* = \rho U^2$, температуры T_* , получаются критерии подобия: Струхала- Sh , Эйлера- Eu , Рейнольдса- Re , Фруда - Fr , Прандтля - Pr , Шмидта - Sc . На-

ряду с ними здесь появляется еще один безразмерный комплекс - $Dg = \frac{t^0}{t_*}$ или $Dg = \frac{t^0 U}{L}$, определяющий отношение периода осреднения к характерному масштабу времени.

Точность приближенных вычислений интегралов типа (3.2.9) зависит от величины периода осреднения t^0 , а в безразмерной системе от критерия Dg . Здесь надо принять во внимание, во-первых, **отсутствие в литературе конкретных экспериментальных значений периода осреднения t^0** , во-вторых, то очевидное обстоятельство, что период осреднения может быть функцией пространственных координат x, y, z .

3.4. О неэффективности закона трения *Ньютона* для моделирования турбулентных течений

Обоснование реологических связей, вытекающих из законов трения

Линейная формула сил трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, из которой вытекает касательное напряжение по Ньютону $\pi_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, считается установленным для малых скоростей [6]. Для больших скоростей предполагается квадратичная зависимость сил трения от модуля скорости $\vec{F}_{mp} = -k_2 v^2 \vec{e}_v$, следовательно, касательное напряжение должно зависеть от градиента квадрата скорости $\pi_{yx} = \mu_2 \frac{\partial u^2}{\partial y}$ в отличие от закона трения *Ньютона*. Обобщение данного факта на другие возможные степенные формулы трения $\vec{F}_{mp} = -k_m v^m \vec{e}_v, m = 1; 2; 3; \dots$ и применение вытекающих из них реологических связей к моделированию течений вязкой жидкости привело к интересным результатам. Из достаточно подробно доказательств непосредственной связи между силами трения

и компонентами тензора напряжений следуют, что вязкие напряжения пропорциональны *линейным* плотностям сил трения.

Теорема 1. Формула Ньютона касательных напряжений

$\pi_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ является следствием закона трения для малых

скоростей $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$.

Как было сказано, Л.Д.Ландау назвал закон трения *Стокса гипотезой* в силу отсутствия физического и теоретического его обоснований. В физике указывается на два закона трения: это $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$ для малых скоростей и $\vec{F}_{mp} = -k_2 v^2 \vec{e}_v$ в случае больших скоростей (см. [6]). Закон трения Ньютона (касательное напряжение по Ньютону) выводится из формулы $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$.

Действительно, пусть течение вязкой жидкости происходит со скоростью $\vec{v} = u\vec{i}$ параллельно плоскости xz в положительном направлении оси x . Силы сопротивления движению частицы равны соответственно: $\vec{F}_1 = -ku_1\vec{i}$ на слое y_1 , $\vec{F}_2 = -ku_2\vec{i}$ на слое $y_2 = y_1 + \delta y$, $\delta y > 0$. Приращения силы и скорости между слоями: $\delta\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$, $\delta u = (u_2 - u_1) > 0$, $\delta\vec{F} = -k\delta u\vec{i}$, причем $\delta\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{i}$. Введем линейную плотность силы $\delta\vec{F}$ как отношение

ние $\vec{f} = \frac{\delta\vec{F}}{\delta y}$, $\delta\vec{F} = \vec{f} \delta y$. По определению вектор касательного

напряжения $\vec{\pi}_{yx}$ параллелен и одинаково направлен с силами трения $\vec{\pi}_{yx} \uparrow \uparrow \delta\vec{F}$, $\vec{\pi}_{yx} \uparrow \uparrow \vec{f}$. Вводя коэффициент пропорциональности, имеем $\vec{f} = k' \vec{\pi}_{yx}$, $k' > 0$, $\vec{\pi}_{yx} \uparrow \downarrow \vec{i}$, $k' \vec{\pi}_{yx} \delta y = -k\delta u\vec{i}$.

Данное выражение умножается скалярно на орт \vec{i} :

$$(k' \vec{\pi}_{yx}, \vec{i}) \delta y = -k(\delta u \vec{i}, \vec{i})$$

В результате получается

$$(\vec{\pi}_{yx}, \vec{i}) \delta y = |\vec{\pi}_{yx}| \cdot |\vec{i}| \cos 180^\circ = \pi_{yx} \cdot 1 \cdot (-1) = -\pi_{yx},$$

$$-k(\delta u \vec{i}, \vec{i}) = -k \delta u |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k \delta u \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -k \delta u$$

Равенства $-k' \pi_{yx} \delta y = -k \delta u$, $\pi_{yx} = \frac{k \delta u}{k' \delta y}$ в пределе дают за-

кон трения *Ньютона* $\pi_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{k \delta u}{k' \delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, где обозначено

$\mu = \frac{k}{k'}$, что требовалось доказать.

Обобщения на другие направления дают соответствующие формулы касательных напряжений

$$\pi_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \pi_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \pi_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \pi_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \pi_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

Утверждение 1. Формула Стокса касательного напряжения $\pi_{(c)yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ **не соответствует закону**

трения $\vec{F}_{mp} = -k \vec{v}$, что является еще одним доказательством ошибочности гипотезы *Стокса*.

Утверждение 2. Уравнения, основанные на тензоре напряжений Ньютона $\pi_n = -[p + (1/3 \mu - \mu') \text{div} \vec{v}] E + \mu \bar{S}$, являются моделями низкоскоростных ламинарных течений и не могут служить в качестве моделей для течений при больших скоростях.

Основанием для таких утверждений служат тщетные попытки моделирования турбулентных течений полуэмпирическими теориями типа *Колмогорова*, «пути смешения» *Прандтля*, *Буссинеска*, *Сполдинга*, « $k - \varepsilon$ » моделей и множества других, содержащих искусственно введенные константы, не имеющие физического содержания [1].

Далее, при моделировании осредненных турбулентных течений используется так называемая «эффективная турбулентная вязкость» μ_T , на несколько порядков превышающая молекуляр-

ную вязкость μ в законе трения *Ньютона*. Тем самым отказ от закона трения *Ньютона* в турбулентных течениях был обоснован всей предыдущей историей развития гидромеханики.

В нижеследующих параграфах для моделирования турбулентных течений излагаются физически обоснованные реологические законы и основанные на этих законах уравнения динамики вязкой жидкости.

3.5. Уравнения динамики, соответствующие квадратичному закону трения $\vec{F}_{mp} = -k_2 v^2 \vec{e}_v$. О вязкой составляющей нормального напряжения

Ошибочное положение о симметричности тензора напряжений сплошной среды и порожденная на его основе ошибочная гипотеза *Стокса* стали камнем преткновения для совершенствования реологических законов динамики реальных жидкости и газа. Собственно говоря, стало очевидным, что реология, фундаментом которой является закон трения *Ньютона*, ни в коей мере не является адекватной математической моделью турбулентных течений.

Доказанное в главе 1 утверждение о несимметричности тензора напряжений создает возможности для конструирования широкого спектра новых реологических законов, из которых можно выбирать подходящие модели соответственно скорости течения и физическим свойствам среды.

Пусть сила сопротивления движению частицы пропорциональна степени $m = 1, 2, 3, \dots$ скорости в данном направлении. По

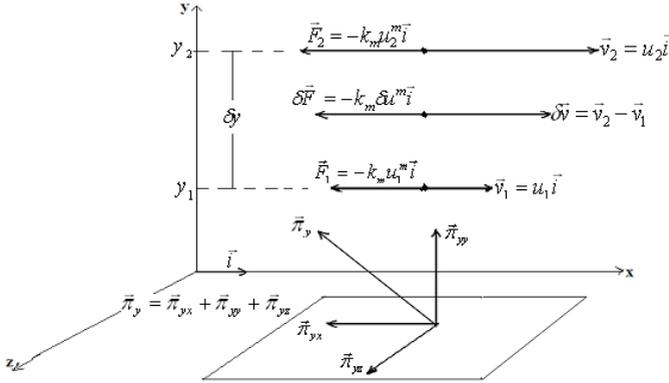
1.4 имеем: $\vec{F}_1 = -k_m u_1^m \vec{i}$ на слое y_1 , $\vec{F}_2 = -k_m u_2^m \vec{i}$ на слое y_2 ,
 $\delta \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = -k_m u_2^m \vec{i} + k_m u_1^m \vec{i} = -k_m \delta u^m \vec{i}$, $\delta \vec{F} \uparrow \downarrow \vec{i}$, $\delta \vec{F} = \vec{f} \delta y$,
 \vec{f} - линейная плотность силы $\delta \vec{F}$, $\vec{f} \uparrow \uparrow \vec{\pi}_{yx}$, поэтому
 $\vec{f} = k' \vec{\pi}_{yx}$, $\delta \vec{F} = k' \vec{\pi}_{yx} \delta y$, $\vec{\pi}_{yx} \uparrow \downarrow \vec{i}$, $\vec{\pi}_{yx} = -\pi_{yx} \vec{i}$, $k' \vec{\pi}_{yx} \delta y = -k_m \delta u^m \vec{i}$.

Вытекающие из них равенства

$$-k' \pi_{yx} \delta y = -k_m \delta u^m, \pi_{yx} = \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta y}, \mu_m = \frac{k_m}{k'}$$

в пределе дают формулы касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \pi_{yx} &= \lim_{\delta y \rightarrow 0} \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta y} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial y}, \pi_{xy} = \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial x}, \pi_{zy} = \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial z}, \\ \pi_{yz} &= \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial y}, \pi_{xz} = \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial x}, \pi_{zx} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.5.1)$$



Вывод вязких составляющих нормальных напряжений

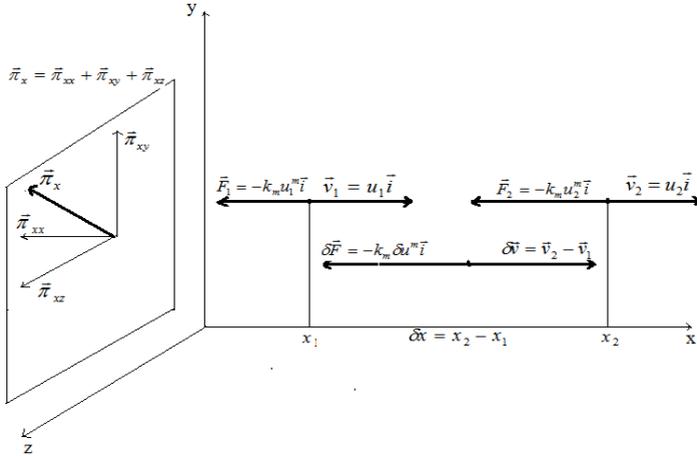
Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей $\bar{\pi}'_{xx}$ нормального напряжения $\bar{\pi}_{xx} = -p\vec{i} + \bar{\pi}'_{xx}$. Пусть силы трения равны: $\vec{F}_1 = -k_m u_1^m \vec{i}$ в точке x_1 и $\vec{F}_2 = -k_m u_2^m \vec{i}$ в точке $x_2 = x_1 + \delta x$, $\delta \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = -k_m u_2^m \vec{i} + k_m u_1^m \vec{i} = -k_m \delta u^m \vec{i}$.

Через линейную плотность $\delta \vec{F} = \bar{\varphi} \delta x$, $\bar{\varphi} = k'' \bar{\pi}_{xx}^o$ имеют место равенства $\delta \vec{F} = k'' \bar{\pi}_{xx}^o \delta x$, $k'' \bar{\pi}_{xx}^o \delta x = -k_m \delta u^m \vec{i}$. По определению

$\bar{\pi}_{xx}^o \uparrow \downarrow \vec{i}$. Это выражение умножается скалярно на орт \vec{i} : $(k'' \bar{\pi}_{xx}^o, \vec{i}) \delta x = -k_m (\delta u^m \vec{i}, \vec{i})$. В результате получается

$$\begin{aligned} (\bar{\pi}_{xx}^o, \vec{i}) \delta x &= |\bar{\pi}_{xx}^o| \cdot |\vec{i}| \cos 180^\circ = -\pi_{xx}^o, \\ -k_m (\delta u^m \vec{i}, \vec{i}) &= -k_m \delta u^m |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = -k_m \delta u^m \end{aligned}$$

Равенства $-k''\pi_{xx}^o\delta x = -k_m\delta u^m$, $\pi_{xx}^o = \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta x}$, $\mu_m = \frac{k_m}{k''}$ в пределе дают формулы составляющих нормальных напряжений $\pi_{xx}^o = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \mu_m \frac{\delta u^m}{\delta x} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial x}$, $\pi_{yy}^o = \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial y}$, $\pi_{zz}^o = \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial z}$, ч.т.д.



Очевидно, полные нормальные напряжения являются суммой данных составляющих и гидродинамического давления

$$\pi_{xx} = -p + \pi_{xx}^o = -p + \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial x}, \pi_{yy} = -p + \pi_{yy}^o = -p + \mu_m \frac{\partial v^m}{\partial y},$$

$$\pi_{zz} = -p + \pi_{zz}^o = -p + \mu_m \frac{\partial w^m}{\partial z} \quad (3.5.2)$$

Данное обоснование нормальных напряжений делает **излишними** ранее принятые гипотезы о давлении [7].

В цилиндрических координатах напряжения имеют вид

$$\pi_{r\varepsilon} = \mu_m \left(\frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon^m}{r} \right), \pi_{er} = \frac{\mu_m}{r} \frac{\partial v_r^m}{\partial \varepsilon}, \pi_{zr} = \mu_m \frac{\partial v_r^m}{\partial z},$$

$$\pi_{rz} = \mu_m \frac{\partial v_z^m}{\partial r}, \pi_{z\varepsilon} = \mu_m \frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial z}, \pi_{\varepsilon z} = \frac{\mu_m}{r} \frac{\partial v_z^m}{\partial \varepsilon}.$$

$$\sigma_{rr} = -\mu_m \frac{\partial v_r^m}{\partial r}, \pi_{rr} = -p - \sigma_{rr}, \sigma_{\varepsilon\varepsilon} = -\mu_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r^m}{r} \right),$$

$$\pi_{\varepsilon\varepsilon} = -p - \sigma_{\varepsilon\varepsilon}, \pi_{zz} = -p + \mu_m \frac{\partial v_z^m}{\partial z}$$

и соответствующие им уравнения динамики

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varepsilon^2}{r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_m \frac{\partial v_r^m}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\mu_m}{r} \frac{\partial v_r^m}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_m \frac{\partial v_r^m}{\partial z} \right) - \\ & \quad - \frac{1}{r} \left[\mu_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r^m}{r} \right) \right] + \rho F_r, \\ & \rho \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} + \frac{v_r v_\varepsilon}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = \\ & = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \mu_m \left(\frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial r} - \frac{v_\varepsilon^m}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_m \frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial z} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\mu_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon^m}{\partial \varepsilon} + \frac{v_r^m}{r} \right) \right] + \rho F_\varepsilon, \\ & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_m \frac{\partial v_z^m}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\mu_m}{r} \frac{\partial v_z^m}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z^m}{\partial z} \right) + \rho F_z \end{aligned}$$

Выведенные из законов трения формулы касательных и нормальных напряжений (3.5.1) и (3.5.2) служат обоснованиями следующего утверждения.

Утверждение 3. Тензор напряжений Стокса

$$\pi_{ji(e)} = -\left[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, 3$$

не соответствует известным в физике законам трения, следовательно, не имеет физического обоснования.

Теоретическая необоснованность тензора напряжений *Стокса* установлена в **главе 1**.

Теорема 2. Тензор напряжений Ньютона

$$\pi_{ji(n)} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3$$

соответствует закону трения для малых скоростей $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$.

Доказательство данной теоремы изложено выше при выводе формул касательных и нормальных напряжений из закона трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$.

В потоках с большими скоростями $U \gg 1$ после потери устойчивости происходит переход ламинарного течения в турбулентное. Для больших скоростей закон трения в [6] предложен в виде:

$$\vec{F}_{mp} = -k_2 v^2 \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v \vec{e}_v \quad (3.5.3)$$

Для данного закона из (1) при $m = 2$ для касательных напряжений получается формула $\pi_{ji} = \mu_2 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$, нор-

мальные напряжения имеют вид $\pi_{ii} = -p + \mu_2 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_i}, i = 1, 2, 3$.

Естественный физически обоснованный вывод формул нормальных напряжений из законов трения не содержит выражений с коэффициентами типа « $-\left(\frac{1}{3}\mu_m - \mu'\right)$ », вытекающие из гипотезы о давлении. Бессмысленность появления данных выражений в гипотезе о давлении подтверждается невозможностью определения искусственно введенного коэффициента μ' , таким образом фигурирование этого коэффициента в уравнениях динамики вязкой среды было совершенно излишне.

Соответственно данным напряжениям получаются уравнения динамики

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu_2 v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}), i = 1, 2, 3 \quad (3.5.4)$$

Рассмотрим уравнение баланса энергий

$$\begin{aligned} \rho c_v (\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) - \\ - p \operatorname{div} \vec{v} + \mu_2 (\frac{\partial u^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ + \frac{\partial v^2}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w^2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}) \end{aligned}$$

В несжимаемых жидкостях $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ и диссипативный член в уравнении баланса энергий принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{v_2} = 2\mu_2 [u (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z}) + v (\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}) + w (\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z})], \quad (3.5.5) \end{aligned}$$

следовательно, может быть знакопеременным, в то время как соответствующий закону трения *Ньютона* диссипативный член

$$\begin{aligned} \Phi_{v(\mu)} = \mu [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + \\ + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2] \geq 0 \end{aligned}$$

всегда неотрицателен. Знакопеременность диссипативного члена Φ_{v_2} , т.е. то, что он становится отрицательным $\Phi_{v_2} < 0$ в случае отрицательных компонент $u < 0, v < 0, w < 0$, отвергает возможность применения закона трения $\vec{F}_{mp} = -\mu_2 v^2 \vec{e}_v$ для моделирования турбулентных течений. Кроме того, для отрицательных коэффициентов $2\mu_2 v_i < 0$ в диссипативных членах

$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu_2 v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j})$ уравнения динамики теряют свойство квази-

параболичности. Следовательно, четные показатели степеней неприемлемы из указанных выводов о знакопеременности диссипативного члена и потери свойства квазипараболичности.

При переходе в уравнениях (3.5.4) к безразмерным переменным образуется критерий подобия $\frac{1}{\text{Re}_2} = \frac{\mu_2}{\rho L}$, являющееся ана-

логом числа Рейнольдса $\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$. Критерий Re_2 в отличие

от числа Рейнольдса не содержит масштаб скорости U , что еще раз доказывает неприемлемость квадратичного закона трения $\vec{F}_{mp} = -\mu_2 v^2 \vec{e}_v$ для вывода соответствующих компонент тензора напряжений вязкой среды!

3.6. Уравнения динамики, соответствующие законам трения с нечетными показателями степеней

$$\vec{F}_{mp} = -k_3 v^3 \vec{e}_v, \vec{F}_{mp} = -k_5 v^5 \vec{e}_v, \vec{F}_{mp} = -k_7 v^7 \vec{e}_v, \vec{F}_{mp} = -k_9 v^9 \vec{e}_v$$

В силу указанных в 3.5 обстоятельств в течениях с высокими скоростями логично применять законы трения с нечетными показателями степени, например, с кубическим:

$$\vec{F}_{mp} = -\mu_3 v^3 \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v \vec{e}_v$$

Соответствующие данному закону трения напряжения будут иметь вид $\pi_{ji} = -p \delta_{ij} + \mu_3 \frac{\partial v_i^3}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3$ с вытекающими на

их основе уравнениями динамики

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (3v_i^2 \mu_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}), i = 1, 2, 3$$

и уравнением баланса энергий

$$\rho_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} + 3\mu_3 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 v_i^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

плюс уравнение неразрывности.

При этом диссипативный член неотрицателен

$$\Phi_{v3} = 3\mu_3 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 v_i^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \geq 0$$

При переходе к безразмерным переменным образуются критерии подобия

$$\frac{1}{\operatorname{Re}_3} = \frac{\mu_3 U}{\rho L} = \frac{\mu}{\rho U L} \frac{\mu_3 U^2}{\mu} = \frac{1}{\operatorname{Re}} K_{S_3}, \quad K_{S_3} = \frac{\mu_3 U^2}{\mu}$$

Для закона трения $\vec{F}_{mp} = -k_5 v^5 \vec{e}_v$ напряжения будут равны

$$\pi_{ji} = -p \delta_{ij} + \mu_5 \frac{\partial v_i^5}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

с соответствующими уравнениями:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(5v_i^4 \mu_5 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} + 5\mu_5 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 v_i^4 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Диссипативный член $\Phi_{v3} = 5\mu_5 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 v_i^4 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \geq 0$ неотрицателен.

В безразмерных переменных образуются комплексы

$$\frac{1}{\operatorname{Re}_5} = \frac{\mu_5 U^3}{\rho L} = \frac{\mu}{\rho U L} \frac{\mu_5 U^4}{\mu} = \frac{1}{\operatorname{Re}} K_{S_5}, \quad K_{S_5} = \frac{\mu_5 U^4}{\mu}$$

Для закона трения $\vec{F}_{mp} = -k_7 v^7 \vec{e}_v$ напряжения будут равны

$$\pi_{ji} = -p \delta_{ij} + \mu_7 \frac{\partial v_i^7}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad \text{Соответствующие уравнения:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_7 \frac{\partial v_i^7}{\partial x_j}), i=1,2,3,$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}) - p \operatorname{div} \vec{v} + \mu_7 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i^7}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Безразмерные комплексы равны

$$\frac{1}{\operatorname{Re}_7} = \frac{\mu_7 U^5}{\rho L} = \frac{\mu}{\rho U L} \frac{\mu_7 U^6}{\mu} = \frac{1}{\operatorname{Re}} K_{S_7}, \quad K_{S_7} = \frac{\mu_7 U^6}{\mu}$$

Варьируя показатели степеней можно конструировать новые реологические законы и уравнения.

Например, для закона трения $\vec{F}_{mp} = -k_9 v^9 \vec{e}_v$ напряжения

будут равны $\pi_{ji} = -p \delta_{ij} + \mu_9 \frac{\partial v_i^9}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, и уравнения:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_9 \frac{\partial v_i^9}{\partial x_j}), i=1,2,3,$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}) - p \operatorname{div} \vec{v} + \mu_9 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i^9}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

Безразмерные комплексы равны

$$\frac{1}{\operatorname{Re}_9} = \frac{\mu_9 U^7}{\rho L} = \frac{\mu}{\rho U L} \frac{\mu_9 U^8}{\mu} = \frac{1}{\operatorname{Re}} K_{S_9}, \quad K_{S_9} = \frac{\mu_9 U^8}{\mu}$$

В безразмерных переменных фигурируют число Рейнольдса и коэффициенты $K_{S_m} = \frac{\mu_m U^{m-1}}{\mu}$, $m=1,3,5,7,9$ и т.д., пропорциональные степеням

масштаба скорости и отношению коэффициентов трения, причем $\mu_1 = \mu$.

Для ряда жидкостей и газов значения коэффициентов динамической вязкости μ измерены вискозиметрами для низкоростных ламинарных течений и приводятся в справочниках, для высокоскоростных (турбулентных или перемежаемых) течений конкретные данные о коэффициентах μ_m отсутствуют. По этой причине для проведения численных экспериментов автор руководствовался следующей гипотезой. При больших скоростях молекулярный перенос между слоями жидкости замедляется, следовательно, коэффициенты вязкости μ_m будут значительно меньше коэффициента динамической вязкости μ . В силу отсутствия измеренных значений μ_m , для $m > 1$, имея в виду, что $\mu_m \ll \mu$, пока использованы феноменологические отношения:

$$\frac{\mu_m}{\mu} = \alpha_m \left(\frac{1}{m}\right)^{m-1}, \text{ размерность } [\alpha_m] = \left(\frac{\text{сек}}{м}\right)^{m-1},$$

$$Ks_m = \alpha_m \left(\frac{1}{m}\right)^{m-1} U^{m-1} = \alpha_m \left(\frac{U}{m}\right)^{m-1}, m = 1;3;5;7;9...$$

3.7. Сравнения с экспериментальным профилем осредненной скорости турбулентного течения в круглой трубе и областях применимости степенных реологических законов

Осевая скорость установившегося одномерного течения вязкой жидкости в круглой трубе получается из уравнения в цилиндрических координатах:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu_m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z^m}{dr} \right), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{dp}{dz} = \text{const} < 0,$$

решение которого имеет вид

$$V_z^m = -\frac{1}{4\mu_m} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{V_z}{\max V_z} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{m}}$$

На рисунках 1-5 представлены картины сравнения с осредненной скоростью турбулентного течения (обозначено звездочками), приведенного в учебнике [7] на стр.670.

Обращает внимание рис.1, где нанесены профили скорости ламинарного течения в трубе, соответствующие закону трения

Ньютона и решению уравнений Навье-Стокса $m = 1, \mu_1 = \mu$.

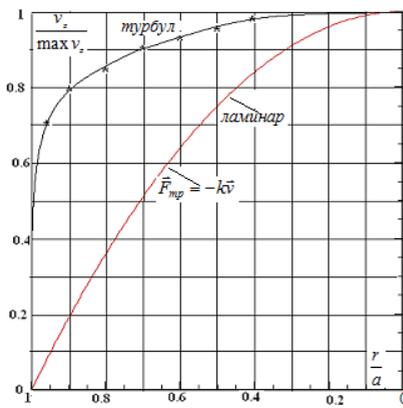


Рис.1

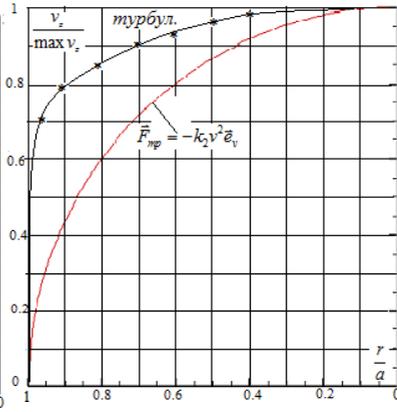


Рис.2

Поражает **громдное различие** между скоростью турбулентного течения и ламинарным течением *Хагена-Пуазейля*. Очевидно, *такой параболический профиль можно создать только для очень малых скоростей*. Например, критическое число Рейнольдса

дса $Re_{кр} = \frac{Ud}{\nu}$ для течения в круглой трубе приблизительно

равно 2300 (см. [10]). Кинематическая вязкость воды при температуре $20^{\circ}C$ равна $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$. При этих данных критическая скорость течения в трубе с диаметром $d=1\text{м}$ будет равна $U = 0,0023138\text{м/с}$, т.е. около 2 миллиметров в секунду (что сравнимо со скоростью улитки), для сохранения ламинарного режима течения скорость потока должна быть еще меньше.

Разумеется, многочисленные попытки моделирования на основе реологического закона *Ньютона* высокоскоростных турбулентных течений оказались безуспешными, чему очевидной причиной являются ошибочные положения о симметричности тензора напряжений сплошной среды, гипотеза *Стокса* и уравнения *Навье-Стокса*.

Итак, на рис.1 представлено сравнение с турбулентным профилем решения уравнений *Навье-Стокса*, чему соответствует показатель степени $m = 1$ и закон трения $\vec{F}_{тр} = -k\vec{v}$.

На рисунках 2, 3, 4 представлены эпюры скоростей, соответствующие законам трения с показателями степеней $m = 2, m = 3, m = 5$. Осредненный турбулентный профиль соответствует числу $Re = 3240 \cdot 10^3$.

На рис.5 приведено сравнение теоретического значения при значениях показателей степеней $m = 7, m = 9$ с экспериментальным турбулентным профилем. Наблюдается почти полное совпадение.

Таким образом, с увеличением показателя степеней наиболее совпадающие с экспериментом результаты получаются при показателях степеней $m = 7, m = 9$. Очевидно, с такими реологическими законами имеет смысл моделировать те или иные турбулентные течения, варьируя безразмерные параметры.

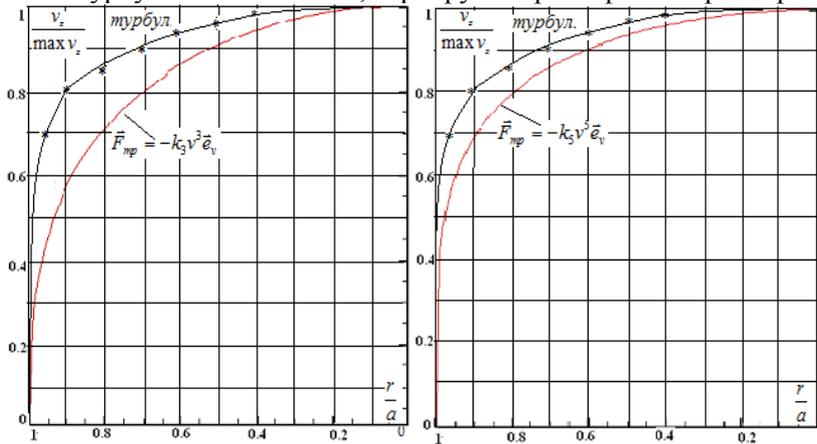


Рис.3

Рис.4

Анализируя содержания **теорем 1, 2, Утверждений 1-3** и сравнения с экспериментом на рисунках 3-5, необходимо сделать очевидные выводы о границах применимости степенных реологических законов. Низкоскоростным течениям соответствует закон трения $m = 1$ (Ньютон). Степенные законы трения (Джакупов), обоснованные здесь, соответствуют среднескоростным течениям при показателях степеней $m = 3, m = 5$, высокоскоростным течениям при показателях степеней $m = 7, m = 9$ и выше.

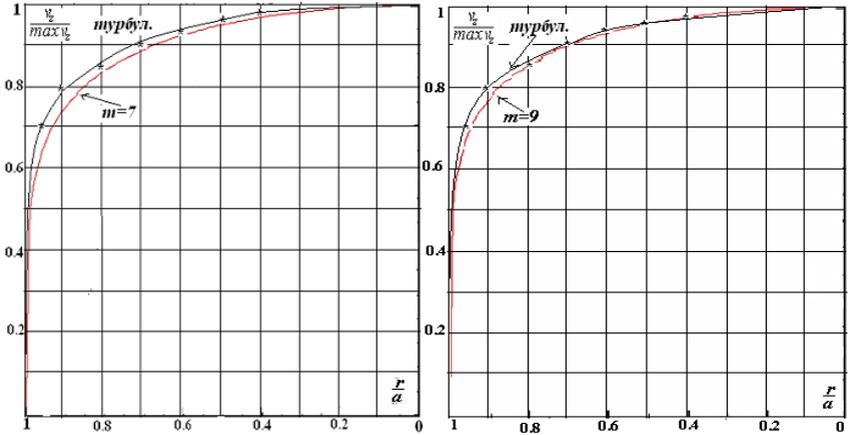


Рис.5

3.8. Уравнения осредненных по времени скоростей и пульсаций

Рассмотрим для несжимаемой и изотермической жидкости систему уравнений с кубическим законом трения:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu_3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^3}{\partial x_j^2}, i=1,2,3, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.8.1)$$

Уравнения для осредненных величин получаются традиционным образом по искусственному методу Рейнольдса в виде

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho \bar{F}_i + \mu_3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i^3}{\partial x_j^2} + 3 \frac{\partial^2 \bar{v}_i \overline{v_i'^2}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \overline{v_i'^3}}{\partial x_j^2} \right), i=1,2,3, \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.8.2)$$

На основании (3.8.2) из (3.8.1) выводятся уравнения пульсаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \\ = \mu_3 \sum_{j=1}^3 \left(3 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^2 v'_i}{\partial x_j^2} + 3 \frac{\partial^2 \bar{v}_i v_i'^2}{\partial x_j^2} - 3 \frac{\partial^2 \bar{v}_i v_i'^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i'^3}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_i^3}{\partial x_j^2} \right) + \rho F'_i, \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

$$i = 1, 2, 3$$

По методу **3.3** для образования замкнутой системы из уравнений (3.8.2) и (3.8.3) применяется формула

$$\overline{\Lambda\{f'\psi'\}} = \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'(x, y, z, t)\psi'(x, y, z, t)\}$$

для замены осредненных нелинейных членов с пульсациями

$$v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} v_i'^2, \frac{\partial^2 v_i'^3}{\partial x_j^2}. \quad \text{Из уравнений, соответствующих} \quad 5$$

степенному закону трения

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu_5 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^5}{\partial x_j^2}, i = 1, 2, 3, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

получаются уравнения для осредненных величин

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho \bar{F}_i + \\ + \mu_5 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i^5}{\partial x_j^2} + 10 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^3 v_i'^2}{\partial x_j^2} + 10 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^2 v_i'^3}{\partial x_j^2} + 5 \frac{\partial^2 \bar{v}_i v_i'^4}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i'^5}{\partial x_j^2} \right), i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

и, соответственно, уравнения пульсаций

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0, \rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \\ = \mu_5 \sum_{j=1}^3 \left(5 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^4 v'_i}{\partial x_j^2} + 10 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^3 v_i'^2}{\partial x_j^2} - 10 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^3 v_i'^2}{\partial x_j^2} + 10 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^2 v_i'^3}{\partial x_j^2} - 10 \frac{\partial^2 \bar{v}_i^2 v_i'^3}{\partial x_j^2} \right) + \\ + \mu_5 \sum_{j=1}^3 \left(5 \frac{\partial^2 \bar{v}_i v_i'^4}{\partial x_j^2} - 5 \frac{\partial^2 \bar{v}_i v_i'^4}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i'^5}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 v_i'^5}{\partial x_j^2} \right) + \rho F'_i, i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Далее, по методу **3.3** для образования замкнутой системы

уравнений применяется $\overline{\Lambda\{f'\psi'\}} = \Lambda\{f'\psi'\} - \frac{t^o}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\{f'\psi'\}$

для замены осредненных нелинейных членов с пульсациями

$$\overline{v'_j}, \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}, \overline{\frac{\partial^2 \overline{v_i^3} v_i^2}{\partial x_j^2}}, \overline{\frac{\partial^2 v_i^5}{\partial x_j^2}}, \overline{\frac{\partial^2 \overline{v_i^2} v_i^3}{\partial x_j^2}}, \overline{\frac{\partial^2 \overline{v_i} v_i^4}{\partial x_j^2}}$$

Уравнения пульсаций для 7 и 9 степенных законов трения при постоянных коэффициентах вязкости и плотности $\mu_5 = const, \rho = const$ выводятся аналогичным образом

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu_7 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^7}{\partial x_j^2}, i = 1, 2, 3, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu_9 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i^9}{\partial x_j^2}, i = 1, 2, 3, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Как видно, с увеличением показателя степени уравнения для пульсаций и осредненных по времени гидродинамических функций становятся громоздкими для моделирования турбулентных течений.

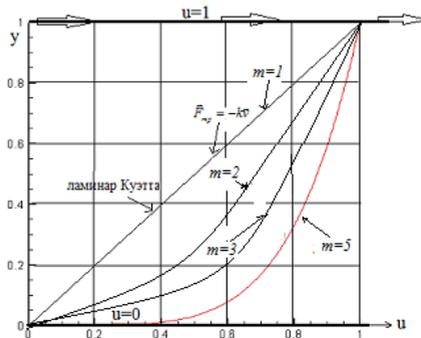


Рис.6

На рис.6 приведены продольные скорости течения между параллельными плоскостями (течение Куэтта $m = 1$), вызванного движением верхней стенки канала в своей плоскости.

3.9. Адекватное моделирование течений вязкой жидкости требует определения тензора напряжений по закону трения, соответствующему скорости в данной точке потока

Совершенно очевидно и не требует доказательств, что в течениях вязкой жидкости, тем более в турбулентном режиме, ско-

рости будут различными по величине и направлению, следовательно, будут переменными и законы трения в точках потока

$$\vec{F}_{mp} = -k_m v^m \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v \vec{e}_v, m > 0, m = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

Например, при продольном двумерном обтекании пластины продольная скорость во много раз больше поперечной скорости: $|u| \gg |v|$. Следовательно, в направлении оси \vec{i} должен работать один из законов трения

$\vec{F}_{mp} = -k_1 u \vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_3 u^3 \vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_5 u^5 \vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_7 u^7 \vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_9 u^9 \vec{i}$ и т.д., а в поперечном направлении \vec{j} - законы с более низкими показателями степеней

$$\vec{F}_{mp} = -k_1 u \vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_3 u^3 \vec{i}, \vec{F}_{mp} = -k_5 u^5 \vec{i},$$

и т.д., что должно быть учтено в формулах касательных и нормальных напряжений в двумерном течении

$$\pi_{yx} = \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial y}, \pi_{xx} = -p + \mu_m \frac{\partial u^m}{\partial x}, \pi_{xy} = \mu_r \frac{\partial v^r}{\partial x}, \pi_{yy} = -p + \mu_r \frac{\partial v^r}{\partial y}, r < m$$

и в уравнениях динамики

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_m \frac{\partial u^m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_m \frac{\partial u^m}{\partial y} \right), \quad (3.9.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_r \frac{\partial v^r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_r \frac{\partial v^r}{\partial y} \right)$$

С данными уравнениями поставлен ряд численных экспериментов продольного обтекания пластины. Краевые условия в безразмерных переменных приведены на рис.7.

Скорость набегающего потока равна $U = 20 \text{ м/с}$, длина пластины $L = 5 \text{ м}$, коэффициент кинематической вязкости равен $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, в силу чего число Рейнольдса получается равным $Re = 10^8$, $Ks_m = \alpha_m \left(\frac{1}{m} \right)^{m-1} 20^{m-1}$, $m = 1; 3; 5; 7; 9$, $\alpha_m = 1 \left(\frac{cek}{m} \right)^{m-1}$.

Коэффициенты сопротивления пластины, смачиваемой с обеих сторон, вычислялись по формуле

$$C_f = \frac{2}{\text{Re}} \int_{0.1}^{1.1} \frac{\partial u}{\partial y} dx \text{ по той причине, что в пограничном слое}$$

течение низкоскоростное и работает закон трения *Ньютона*.

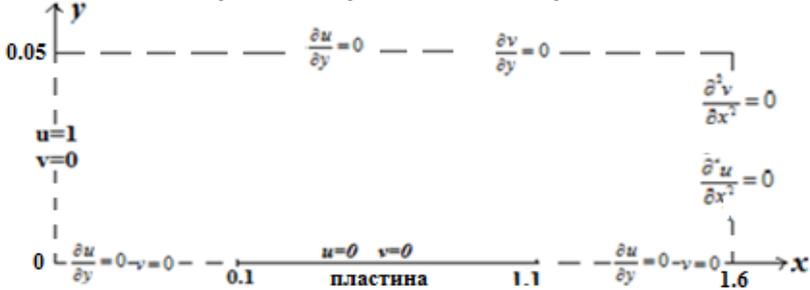


Рис.7

Было образовано 9 интервалов выбора показателей степеней, исходя из почти абсолютного совпадения с экспериментом в течении в трубе при показателе степени $m = 9$:

$$|v_i| < \frac{1}{9}U \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{9}U \leq |v_i| < \frac{3}{9}U \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{9}U \leq |v_i| < \frac{5}{9}U \quad m_i = 5; \quad (3.9.2)$$

$$\frac{5}{9}U \leq |v_i| \leq \frac{7}{9}U \quad m_i = 7; \quad \frac{7}{9}U \leq |v_i| \quad m_i = 9$$

исключая четные показатели степеней.

Указанный выбор показателя степеней в каждой точке потока позволяет моделировать перемежаемость ламинарных и и турбулентных режимов течений, что легко осуществляется в сеточных методах решения данных уравнений.

1⁰. Продольное обтекание пластины конечной длины.

На рис.8а и 8б приведены поля скоростей, насчитанные по уравнениям *Навье* на сетке 160x200. На пластину приходится 100 узлов, до пластины 10 узлов и за пластиной 50 узлов. Шаг по времени 0,0001.

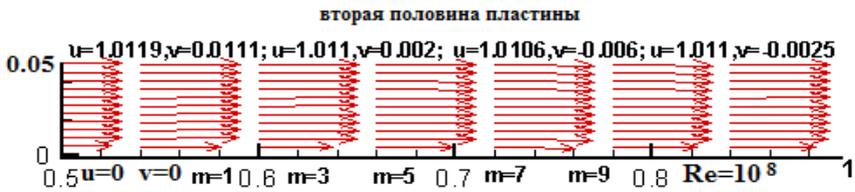
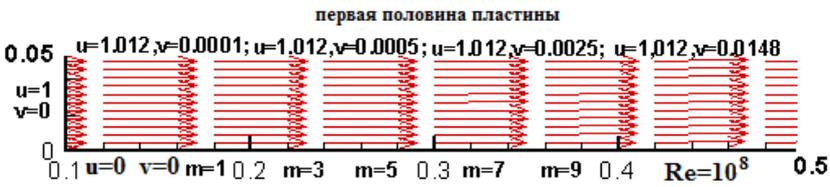


Рис.8а



На рис.9а и 9б приведены поля скоростей, насчитанные на той же сетке по уравнениям (3.9.1) и с выбором показателя степени по распределению (3.9.2) в каждой точке потока.

На рис.10 представлены профили продольной скорости в сечении $x = 1.1$, проходящем через конец пластины, полученные по уравнениям *Навье-(Стокса)* и уравнениям (3.9.1) степенного закона (3.9.2). Имеет место качественное совпадение с результатами экспериментов (рис.16.4 на стр.419 *Г.Шлихтинг* [10]). При численном решении уравнений со степенными законами *Джакупова* коэффициент сопротивления, полученный по схеме с аппроксимационной вязкостью равен $C_f = 3,3034 \cdot 10^{-5}$, коэффициент сопротивления, полученный по схеме без аппроксимационной вязкости равен $C_f = 7,6104 \cdot 10^{-5}$, почти в 11 раз превосходит значения $C_f = 5,7888 \cdot 10^{-6}$, насчитанного по уравнениям *Навье-(Стокса)*, что тоже не противоречит экспериментам.



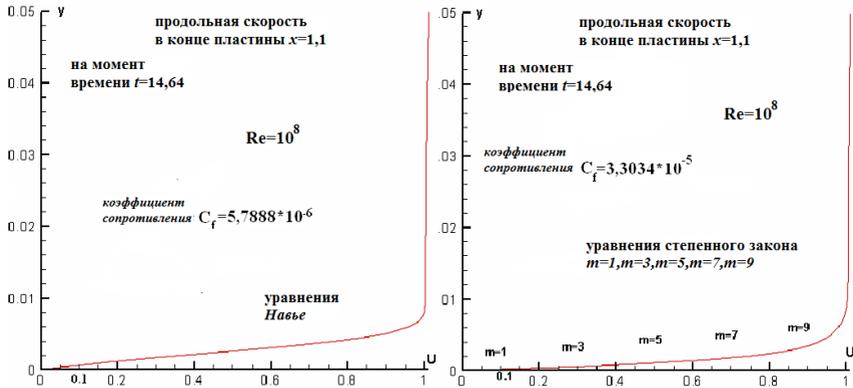


Рис.10

Вероятный выбор интервалов скоростей и соответствующих им показателей степеней по аналогии с (3.9.2) организуется следующим образом.

Для среднескоростных течений $m = 3$:

$$|v_i| < \frac{1}{3}U \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{3}U \leq |v_i| \quad m_i = 3$$

Для среднескоростных течений $m = 5$:

$$|v_i| < \frac{1}{5}U \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{5}U \leq |v_i| < \frac{3}{5}U \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{5}U \leq |v_i| \quad m_i = 5$$

Для высокоскоростных течений $m = 7$:

$$|v_i| < \frac{1}{7}U \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{7}U \leq |v_i| < \frac{3}{7}U \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{7}U \leq |v_i| < \frac{5}{7}U \quad m_i = 5; \quad \frac{5}{7}U \leq |v_i| \quad m_i = 7$$

Для высокоскоростных течений $m = 11$:

$$|v_i| < \frac{1}{11}U \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{11}U \leq |v_i| < \frac{3}{11}U \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{11}U \leq |v_i| < \frac{5}{11}U \quad m_i = 5;$$

$$\frac{5}{11}U \leq |v_i| < \frac{7}{11}U \quad m_i = 7; \quad \frac{7}{11}U \leq |v_i| < \frac{9}{11}U \quad m_i = 9; \quad \frac{9}{11}U \leq |v_i| \quad m_i = 11$$

Для медленных течений по закону трения *Ньютона* $m = 1$.

Всюду здесь нижний индекс принимает 3 значения: $i = 1, i = 2, i = 3$, соответственно трем компонентам скорости в данной точке потока с координатами x, y, z и в данный момент времени t .

Можно предположить следующую **гипотетическую** зависимость от числа *Рейнольдса* максимального показателя степени в законе трения *Джакупова*: $10^{m-1} \leq \text{Re} = \frac{\rho LU}{\mu_1} \leq \beta 10^m$,

$1 \leq \beta < 10, \mu_1 = \mu$. Например, пусть $\text{Re} = 10^8$. Следовательно, максимальный показатель можно выбрать равным $m = 9$. Или число *Рейнольдса* равно $\text{Re} = 3240000 = 3,24 \cdot 10^6 < 10^7$, можно положить $m = 7$ и т.д. После чего в каждой точке потока реализовать вышеописанный тоже гипотетический вероятный выбор интервалов скоростей и соответствующих им показателей степеней в законах трения.

2⁰. Сравнение закона трения *Ньютона* со степенными законами трения $m=3;5;7;9$ *Джакупова* в осесимметричном течении в трубе

Продольная скорость течения в трубе является преобладающим и $v_z \gg v_r$, для осевой скорости применяется уравнение со степенными законами трения *Джакупова*:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{m_z} \frac{\partial v_z^{m_z}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{m_z} \frac{\partial v_z^{m_z}}{\partial z} \right),$$

показатель степени в каждой точке потока (в каждом узле сеточной области в процессе численного решения) выбирается по распределению (3.9.2):

$$|v_z| < \frac{1}{9} U \quad m_z = 1; \quad \frac{1}{9} U \leq |v_z| < \frac{3}{9} U \quad m_z = 3; \quad \frac{3}{9} U \leq |v_z| < \frac{5}{9} U \quad m_z = 5;$$

$$\frac{5}{9} U \leq |v_z| \leq \frac{7}{9} U \quad m_z = 7; \quad \frac{7}{9} U \leq |v_z| \quad m_z = 9$$

Радиальные скорости малы, следовательно, необходимо применить уравнения с законом трения *Ньютона* $m=1$:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) - \mu \frac{v_r}{r^2},$$

для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

На рис.11 представлены профили скорости, рассчитанные с применением уравнений со степенными законами *Джакупова*, на рис.12, результаты, полученные по уравнениям *Навье-Стокса* с законом трения *Ньютона*:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

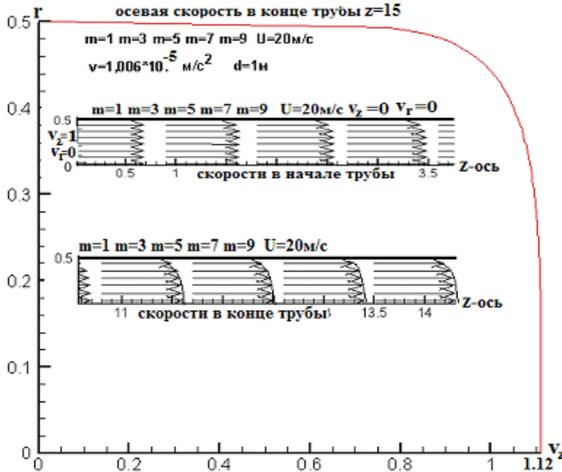


Рис.11

Из распределений скоростей в различных сечениях трубы, в особенности в конце трубы, длина которой равна 15 калибров, видно, что уравнения *Навье-Стокса* при одних и тех же данных, не реагируют на вязкость жидкости, пограничный слой практически отсутствует. Расчеты проведены по схеме без «аппроксимационных вязкостей» для конвективных членов.

Рис.11 наглядно демонстрирует, что профили скоростей, полученные решением уравнений со степенными законами трения, идентичны результатам экспериментов рис.5, видно образование пограничного слоя у стенки трубы.

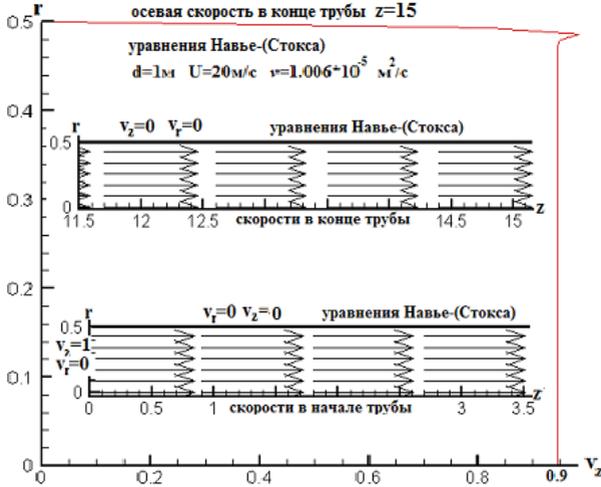


Рис.12

3.10. Универсальная модель динамики жидкости и газа

Таким образом, из законов трения с различными показателями степеней

$$\vec{F}_{mp} = -k_{m_v} v^{m_v} \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v \vec{e}_v, m_v > 0$$

вытекают формулы напряжений и уравнения

$$\pi_{ji} = -p \delta_{ij} + \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3, \quad (3.10.1)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.10.2)$$

Показатели степеней должны быть *нечетными целыми положительными* числами.

В безразмерных переменных образуются комплексы

$$\frac{1}{\text{Re}_{m_i}} = \frac{\mu_{m_i} U^{m_i-2}}{\rho L} = \frac{\mu}{\rho UL} \frac{\mu_{m_i} U^{m_i-1}}{\mu} = \frac{1}{\text{Re}} Ks_{m_i},$$

$$Ks_{m_i} = \frac{\mu_{m_i} U^{m_i-1}}{\mu} = \alpha_{m_i} \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \cdot U^{m_i-1}$$

Уравнения Эйлера идеальной жидкости и газа получаются из универсальных уравнений (3.10.1) и (3.10.2) при показателях степеней $m_i = 0 \forall i, Ks_{m_i} = 0$. В идеальной жидкости и газа вязкость равна нулю (молекулярный перенос отсутствует), что подтверждает справедливость формулы $\mu_{m_i} = \alpha_{m_i} \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \mu$:

$$\mu_{m_i=0} = \alpha_{m_i} \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \mu = \alpha_0 \left(\frac{1}{0}\right)^{0-1} \mu = \alpha_0 \left(\frac{0}{1}\right) \mu = 0, \mu_0 = 0$$

Новые уравнения главы 1 с тензором напряжений Ньютона получаются из уравнений (3.10.1) и (3.10.2) при показателях степеней $m_i = 1 \forall i$ и коэффициенте вязкости $\mu_1 = \mu$.

$$\text{Равенство } \alpha_1 = 1 \text{ вытекает из формулы } \mu_{m_i} = \alpha_{m_i} \left(\frac{1}{m_i}\right)^{m_i-1} \mu$$

при показателе степени, равном единице $m_i = 1$:

$$\mu_1 = \alpha_1 \left(\frac{1}{1}\right)^{1-1} \mu = \alpha_1 \mu, \text{ так как } \mu_1 = \mu.$$

Уравнения моделей турбулентных течений, соответствующие различным законам трения, получаются из (3.10.1) и (3.10.2) при показателях степеней $m_i = 3, m_i = 5, m_i = 7, m_i = 9, m_i = 11, \dots$

Фигурирующая в известной модели *Буссинеска* «турбулентная вязкость» становится равной $\mu_i = m_{m_i} \mu_{m_i} v_i^{m_i-1}, i = 1, 2, 3$.

Примечание. Удовлетворительное совпадение на рис.5 получено для показателей $m_i = 7, m_i = 9$. Ясно, что при моделировании других

турбулентных течений могут оказаться эффективными иные показатели степеней в законах трения *Джакупова*.

Очевидно, определение форм связи между коэффициентом ламинарной вязкости μ и коэффициентами μ_{m_i} , выбор комплексов Ks_{m_i} требует дополнительных исследований.

3.11. Математические модели турбулентных течений, адекватные законам трения в каждой точке потока

Системы уравнений (3.10.1), (3.10.2) **3.10** при нечетных показателях степени выше 3 являются математическими моделями высокоскоростных течений и для показателей степени $m = 5, m = 7, m = 9$ дают удовлетворительное совпадение с экспериментом. Однако принято считать, что переход течения в турбулентный режим связан с влиянием внешних малых возмущений, приводящих к пульсациям гидродинамических величин. Исторически это связано с уравнениями *Рейнольдса*.

1^o. Уравнения *Рейнольдса* не являются математическими моделями турбулентных течений

Уравнения пульсаций **3.8**, выведенные по законам трения для больших скоростей

$$\vec{F}_{mp} = -k_m v^m \vec{e}_v, v = |\vec{v}|, \vec{v} = v \vec{e}_v, m > 0, m = 3, 5, 7, \dots,$$

являются весьма громоздкими и соответствуют методу *Рейнольдса*, по которому скорость, давление и другие параметры представляются в виде сумм $\vec{v} = \vec{\bar{v}} + \vec{v}'$, $p = \bar{p} + p'$, где \vec{v}' , p' пульсационные составляющие.

Подстановка в уравнения *Навье* несжимаемой жидкости

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, i = 1, 2, 3, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11.1)$$

приводит к системе

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial v'_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \right. \\ & \left. = \rho F_i + \mu \sum_j \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3, \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \right. \end{aligned} \quad (3.11.2)$$

Осреднением Рейнольдса по времени из (3.11.2) получаются уравнения для \bar{v}, \bar{p} , в предположении существования такого периода времени t^o , при котором осредненные значения пульсаций равно нулю во всех точках потока

$$f = \bar{f} + f', \bar{f} = \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o/2}^{t+t^o/2} f(x, y, z, \tau) d\tau, \bar{f}' = \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o/2}^{t+t^o/2} f'(x, y, z, \tau) d\tau = 0$$

В результате получается известная незамкнутая система уравнений для осредненных функций

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho v'_j v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) = \rho \bar{F}_i + \mu \sum_j \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3, \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11.3)$$

Как отмечено выше, в уравнениях динамики системы (3.11.3) напряжения соответствуют *низкоскоростным* течениям, по этой причине они **не являются моделями высокоскоростных** (как правило, турбулентных) течений.

Экспериментальные значения периода осреднения t^o в публикациях не приводятся. Можно предположить, что только при очень больших значениях периода $t^o \gg l$ осредненные пульсации

$$\bar{f}' = \frac{1}{t^o} \int_{t-t^o/2}^{t+t^o/2} f'(x, y, z, \tau) d\tau = 0 \text{ во всех точках турбулентного}$$

потока будут близкими к нулю в той или степени.

При конечных значениях t^o , очевидно, будет функцией координат x, y, z . Из уравнений (3.11.2) и (3.11.3) выводится тоже в свою очередь незамкнутая система уравнений пульсаций

$$\rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + (\bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}) \right] - \frac{\partial \rho v'_j v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \quad (3.11.4)$$

$$= \rho F'_i + \mu \sum_j \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0$$

в которой напряжения также соответствуют *низкоскоростным* течениям.

Простой метод замыкания систем (3.11.3) и (3.11.4) с применением формулы прямоугольника для приближенного вычисления интеграла осреднения рассмотрен выше для малых значений периода осреднения t^o .

Абсурдность осреднения всей системы уравнений динамики вязкой жидкости и искусственное образование незамкнутых систем уравнений, соответствующих *закону трения для малых скоростей (закону трения Ньютона)*, отсутствие четких критериев определения периода осреднения t^o требуют пересмотра подхода *Рейнольдса* к математическому моделированию турбулентных течений.

2°. Моделирование пульсаций в турбулентных течениях

Пульсации гидродинамических функций считаются сравнительно малыми по величине и определяют степень турбулизованности потока, следовательно, при определении создаваемых ими напряжений необходимо применять закон трения для малых скоростей ($m=1$), что было отражено в системе уравнений с осреднением по *Рейнольдсу*.

Предлагается следующий подход к моделированию турбулентных течений. Актуальное значение скорости \vec{v} представляется в виде суммы двух скоростей $\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$, где $\bar{\vec{v}}$ объявляется не осредненной по времени, а *глобальной скоростью*, для нее ставятся соответствующие физике процесса естественные начальные и краевые условия, \vec{v}' соответствует «пульсационной скорости», начальные и краевые условия для которой учитывают стохастичность и степень возмущенности основного потока.

Для любой дифференцируемой гидродинамической функции $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ полный дифференциал равен

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz,$$

откуда вытекает субстанциональная производная

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

В этой формуле скорости переноса равны

$$\frac{dx}{dt} = \bar{u} + u', \frac{dy}{dt} = \bar{v} + v', \frac{dz}{dt} = \bar{w} + w',$$

следовательно, имеет место

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial\Phi}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial\Phi}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial\Phi}{\partial z} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} + \vec{v}', \nabla)\Phi$$

Для $\Phi \sim \bar{\vec{v}}$ и $\Phi \sim \vec{v}'$ получаются соответственно

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\vec{v}}}{dt} &= \frac{\partial\bar{\vec{v}}}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial\bar{\vec{v}}}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial\bar{\vec{v}}}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial\bar{\vec{v}}}{\partial z} = \frac{\partial\bar{\vec{v}}}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} + \vec{v}', \nabla)\bar{\vec{v}}, \\ \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{\partial\vec{v}'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial\vec{v}'}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial\vec{v}'}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial\vec{v}'}{\partial z} = \frac{\partial\vec{v}'}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} + \vec{v}', \nabla)\vec{v}' \end{aligned}$$

Реализация второго закона Ньютона для глобального течения приводят к уравнениям в напряжениях

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{\vec{v}}}{dt} &= \rho \bar{\vec{F}} + \frac{\partial\bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\pi}_z}{\partial z}, \\ \rho \left[\frac{\partial\bar{\vec{v}}}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} + \vec{v}', \nabla)\bar{\vec{v}} \right] &= \rho \bar{\vec{F}} + \frac{\partial\bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\pi}_z}{\partial z}, \\ \rho \left[\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} + \vec{v}', \nabla)\bar{v}_i \right] &= \rho \bar{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\bar{\pi}_{ji}}{\partial x_j}, \quad i=1,2,3 \end{aligned}$$

Глобальному течению в турбулентном режиме соответствуют большие скорости, следовательно, напряжения должны определяться по реологическим законам **3.9**:

$$\bar{\pi}_{ji} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu_{m_i} \frac{\partial\bar{v}_i^{m_i}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho \bar{F}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{m_i} \frac{\partial \bar{v}_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11.5)$$

Аналогичная реализация второго закона *Ньютона* для пульсационного течения приводят к уравнениям в напряжениях

$$\rho \frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{\partial \bar{\pi}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}'_z}{\partial z},$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v} + \bar{v}', \nabla) \bar{v}' \right] = \rho \bar{F}' + \frac{\partial \bar{\pi}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}'_z}{\partial z},$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v} + \bar{v}', \nabla) \bar{v}' \right] = \rho F'_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \pi'_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3$$

В пульсационном течении, имеющем небольшие скорости, напряжения, аналогично подходу *Рейнольдса*, определяются по реологическому закону *Ньютона*

$$\pi'_{ji} = -p' \delta_{ij} + \mu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3,$$

$$\rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \rho F'_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11.6)$$

В результате уравнение баланса энергий получается в виде

$$\rho c_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div}(\bar{v} + \bar{v}') +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left(\mu_{m_i} \frac{\partial \bar{v}_i^{m_i}}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j}$$

При единичных показателях степени $m_i = 1 \forall i$ система уравнений (3.11.5) и (3.11.6) для несжимаемой жидкости с постоян-

ной вязкостью $\mu_i = \mu = const \forall i$ имеет вид:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho \bar{F}_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.11.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v'_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \rho F'_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3,$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11.8)$$

Алгебраическая сумма уравнений приводит к системе (3.11.2):

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial v'_i}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} =$$

$$= \rho F_i + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j^2}, i=1,2,3, \quad \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0$$

т.е. к уравнениям *Навье* (3.11.1). Система уравнений (3.11.7) и (3.11.8), рассматриваемая совместно, является замкнутой системой в отличие от уравнений *Рейнольдса* (3.11.3) и (3.11.4)!

m1 m3 m5 m7 m9 Re-3240000

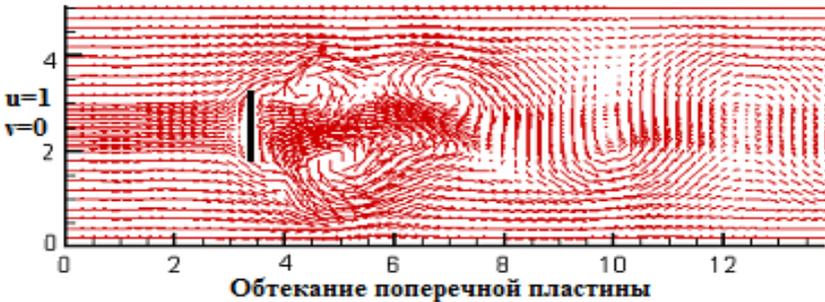


Рис.12а

Применяя осреднение по времени *Рейнольдс* создал существующую с **1882г.** проблему определения так называемых «пульсационных или рейнольдсовых напряжений», тем более, что уравнения для осредненных функций (3.11.3) соответствуют

низкоскоростным течениям, т.е. ламинарным. Данной искусственно созданной проблемы удастся избежать в замкнутой системе (3.11.7), (3.11.8), но уравнения (3.11.7) моделируют низкоскоростные течения, т.е. заведомо не являются моделями турбулентных течений, как и уравнения *Рейнольдса* (3.11.3).

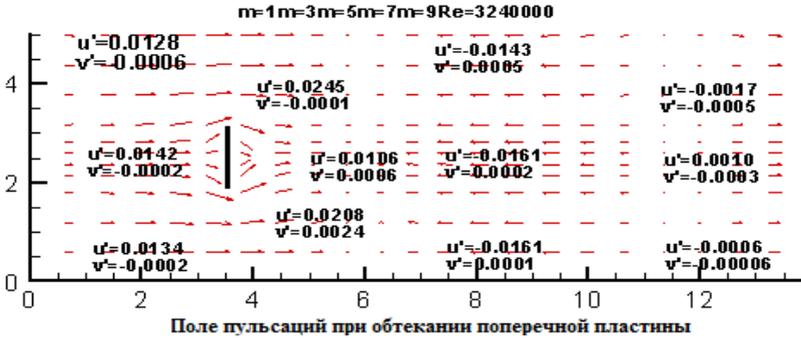


Рис.126

На рисунке 12а представлено поле глобальной скорости, рассчитанное по степенным уравнениям (3.11.5) для постоянных вязкостей и плотности с распределением

$$|v_i| < \frac{1}{9}U \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{9}U \leq |v_i| < \frac{3}{9}U \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{9}U \leq |v_i| < \frac{5}{9}U \quad m_i = 5;$$

$$\frac{5}{9}U \leq |v_i| \leq \frac{7}{9}U \quad m_i = 7; \quad \frac{7}{9}U \leq |v_i| \quad m_i = 9$$

Позади поперечной пластины образуется переменная во времени вихревая дорожка. На рисунке 12б представлено поле пульсаций, рассчитанное по уравнениям (3.11.6) с законом трения *Ньютона* для малых скоростей $\mu = const, \rho = const$.

Примечание. При моделировании высокоскоростных течений уравнениями степенного закона (3.9, 3.10) численные эксперименты показали нестационарность течений. Кроме того, сравнительно хорошее совпадение с экспериментом при показателях степеней $m = 7, m = 9$ позволяют отказаться от устаревшей теории *Рейнольдса* и ограничиться применением уравнений

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), i = 1, 2, 3,$$

$$\rho v_i \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0,$$

включая возмущения в начальные и краевые условия:

$$v_i|_S = \varphi_i + \varphi_i', T|_S = q + q', v_i|_{t=0} = v_i^0 + v_i'^0, T|_{t=0} = T^0 + T'^0,$$

где возмущения $\varphi_i', q', v_i'^0, T'^0$ задаются в определенных пределах датчиком случайных чисел.

3.12. Нефизичность и абсурдность $k - \varepsilon$ моделей турбулентности

Итак, для реализации модели турбулентности *Буссинеска* необходимостью стало вычисление коэффициента эффективной турбулентной вязкости $\mu_T = \rho \nu_T$. Предназначенные для этой цели популярные модели турбулентности противоречат здравому математическому смыслу и не имеют никакой физической основы, что весьма подробно освещено в [1]. Зачастую они представляют собою произвольные обрывки цепочки *Келлера-Фридмана*. В численных расчетах предпочтение отдается моделям переноса кинетической энергии пульсаций (*Прандтль-Колмогоров, Нг и Сполдинг, Роди и Сполдинг, Лаундер и Морзе, Ханжалик и Лаундер* и др.), среди них наиболее распространенными являются уравнения $k - \varepsilon$ - моделей.

Можно предположить, что идея применения уравнений переноса турбулентной кинетической энергии пульсаций и масштаба турбулентности принадлежит основателю теории вероятностей математику *Колмогорову* [11].

Остановимся на уравнениях *Колмогорова* для несжимаемых течений в пограничном слое [1]:

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{1/2} l_k \frac{\partial e}{\partial y} \right) + e^{1/2} l_k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_D e^{1/2}}{l_k}, \quad (3.12.1)$$

$$U \frac{\partial e l_k}{\partial x} + V \frac{\partial e l_k}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{3/2} l_k}{\sigma_1} \frac{\partial l_k}{\partial y} + \frac{e^{1/2} l_k^2}{\sigma_2} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + C_p e^{1/2} l_k^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_M e^{3/2},$$

Решения данной системы уравнений, как и любой другой системы уравнений в частных производных, существенно зависят от постановки краевых условий, а в нестационарных течениях и от начальных условий. Где и кем доказано, что функция e , которой безосновательно присвоено название «турбулентная кинетическая энергия», и «масштаб турбулентности» l_k , полученные в качестве решений данных уравнений, будут *неотрицательными* функциями? **При отрицательных значениях e корни $e^{1/2}$, $e^{3/2}$ не будут действительными числами!** Далее при отрицательных значениях «масштаб турбулентности» l_k теряет физический смысл длины. При близости к нулю $l_k \rightarrow 0$, что в хаотическом турбулентном потоке вполне вероятно, отношение $\frac{C_D e^{1/2}}{l_k} \rightarrow \infty$ становится бесконечно большим числом.

С учетом вышеприведенных парадоксов во второй модели *Прандтля-Колмогорова* для вычисления коэффициента турбулентной вязкости $\mu_T = \rho \nu_T$ в уравнениях *Буссинеска* была использована система, где уже нет радикалов типа $e^{1/2}$:

$$\rho U \frac{\partial e}{\partial x} + \rho V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_T y^\alpha}{\sigma_k} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon, \quad (3.12.2)$$

$$\rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_T y^\alpha}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} \rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{e},$$

Кинематический коэффициент турбулентной вязкости в уравнениях *Буссинеска* через решение уравнений (3.12.2) определяется по формуле

$$\nu_T = C_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}$$

Специалист по уравнениям математической физики, обязательно поставит следующие вопросы:

1) Какие краевые условия необходимо ставить для системы (3.12.2), чтобы решение второго уравнения было ненулевым и положительным: $\varepsilon > 0$? 2) Из-за присутствия члена « $-C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{e}$ » при «турбулентной кинетической энергии» близкой к нулю ($e \approx 0$), данный член становится бесконечно большим числом, следовательно, может быть $\varepsilon < 0$, что приведет к отрицательной турбулентной вязкости $\nu_T < 0$ и уравнения *Буссинеска* потеряют свойства эллиптичности или квазипараболичности и т.д.

Уравнения $k - \varepsilon$ - моделей основаны на идеях *Колмогорова*.

В системе уравнений *Буссинеска*

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], i=1,2,3,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \vec{v}) = 0 \quad (3.12.3)$$

турбулентная (эффeктивная) вязкость определяется формулой:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.12.4)$$

числитель и знаменатель которой являются переменными функциями и находятся из **искусственно** созданных уравнений в частных производных типа:

$$\rho \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t F_k - \rho \varepsilon,$$

$$\rho \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{k} [C_1 \mu_t F_k - C_2 \rho \varepsilon (1 - C_\varepsilon Ri)], F_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.12.5)$$

Выбор эмпирических констант в системе зависит от потребностей конкретного пользователя [1]. Например, весьма часто ис-

пользуются следующие их значения или близкие к ним:

$$C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09, C_\varepsilon = 0.02, \sigma_k = 0.9, \sigma_\varepsilon = 1.22$$

(**неуниверсальность** данного набора констант подтверждено их применениями, собственно говоря, это очевидно).

В ламинарных течениях полагается

$$Ri = \frac{2v_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) / \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2.$$

Парадоксальным является формула эффективной турбулентной вязкости (3.12.4). В самом деле, решение уравнений (3.12.5) зависит от начальных и краевых условий, поэтому $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t)$ будет знакопеременной функцией, следовательно, вполне может принимать в точках потока нулевые значения $\mathcal{E} = 0$, но в таких точках эффективная вязкость будет равна бесконечности $\mu_t \rightarrow \infty$, что физически означает затвердевание жидкости в этих точках. С математической точки зрения при отрицательных значениях $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t) < 0$ уравнение (3.12.5) теряет свойство квазипараболичности.

Точная запись уравнений вторых моментов $\tau_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$, логически вытекающих из уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций, приведена в п.3 данного параграфа:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \right] + \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} = \\ = -\rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k} + \mu \Delta \tau_{ij} - 2\mu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.12.6)$$

Уравнение для турбулентной кинетической энергии пульсаций

$$e = \frac{\sum_{i=1}^3 \overline{\rho v_i'^2}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^3 \rho \tau_{ii}}{2}$$

получается из (3.12.6) при $j = i$ после деления на 2 и суммированием по индексу i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^3 (\overline{\rho v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}}) = \quad (3.12.7) \\ = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \overline{v'_i v'_i v'_k}}{\partial x_k} + \frac{\mu}{\rho} \Delta e - \sum_{i=1}^3 \overline{\mu (\frac{\partial v'_i}{\partial x_k}) (\frac{\partial v'_i}{\partial x_k})} \end{aligned}$$

Очевидно, правильное уравнение (3.12.7) резко отличается от уравнений *Колмогорова* и уравнений $k - \varepsilon$ моделей (3.12.5), во-первых, **отсутствием градиента** пульсационного давления, во-вторых, диссипативными членами

$$F_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i})^2, \sum_{i=1}^3 \overline{\mu (\frac{\partial v'_i}{\partial x_k})^2},$$

которые различаются как по смыслу, так и знаками.

Скалярное произведение уравнения динамики на вектор скорости

$$\rho (\frac{d\bar{v}}{dt}, \bar{v}) + (\nabla p, \bar{v}) = \mu (\Delta \bar{v}, \bar{v}) + \rho (\bar{F}, \bar{v}),$$

дает для кинетической энергии $e = \rho v^2 / 2$ следующее выражение

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + (\nabla p, \bar{v}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta e - \mu (\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k}) + \rho (\bar{F}, \bar{v}), \quad (3.12.8)$$

сходство которого с (3.12.7) очевидно. Следовательно, в $k - \varepsilon$ моделях уравнение турбулентной кинетической энергии

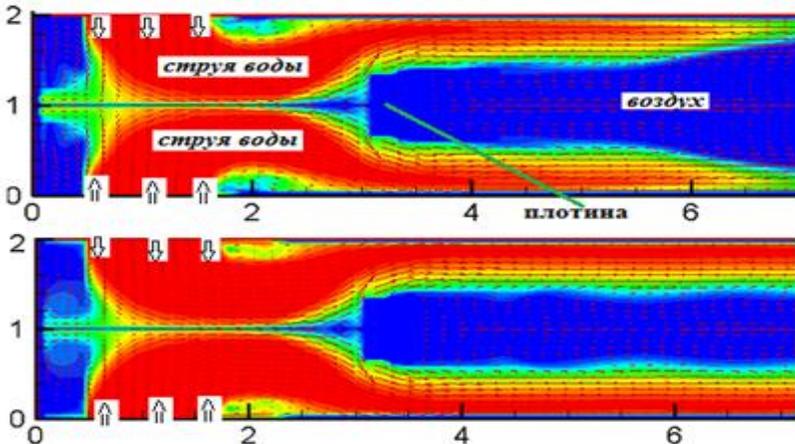
$$\rho [\frac{\partial k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial k}{\partial x_j}] = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j}] + \mu_t F_k - \rho \varepsilon,$$

противоречит (3.12.7) и (3.12.8). Физическая абсурдность состоит в том, что силы трения уменьшают кинетическую энергию в (3.12.7) и в (3.12.8), но член $\mu_t F_k$ увеличивает k !

Приведенные замечания показывают полную **непригодность** для моделирования осредненных турбулентных течений $k - \varepsilon$ моделей и их различных модификаций (число которых превышает 90 и растет соответственно количеству пользователей).

Литература

1. Турбулентность (принципы и применения).- М.:Мир,1980.С.585.
2. Джакупов К.Б. Численный расчет турбулентного обтекания пластины с применением уравнений для пульсаций // Известия СО АН СССР, сер.техн.н. , вып.1, 1985г., с.61-67.
3. L.Prandtl.Untersuchungen zur ausgebildete Turbulenz // Zeitschrift.f.angewandte Mathematik und Mechanik.5, 1925.
4. Джакупов К.Б. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэро-термодинамики. – Алматы: Изд-во КазНУ им.Аль-Фараби, 2004г. С.246.
5. Устименко Б.П., Джакупов К.Б., Кроль В.О. Численное моделирование аэродинамики и горения в топочных и технологических устройствах. - Алма-Ата: изд-во «Наука»,1986. С.280.
6. Савельев И.В. Курс общей физики.- Т.1. М.: “Наука”, 1977г.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. –М.: “Наука”, 1973г.
8. Белоцерковский О.М., Конюхов А.В., Опарин А.М., Трошкин О.В., Фортова С.В. О структурировании хаоса // ЖВММФ, 2011, том 51,№2, с.237-250.
9. Джакупов К.Б. Численное моделирование влияния пульсаций на вихревые следы за пластинами // Вестник Томского Гос. Универ., математика и механика , №4(20), 2012г., с.80-87.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.- . М.: “Наука”, 1974г.
11. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв.Ан СССР, сер.физ.,(1942),6, №1-2.с.56-58.
12. Якупов К.В. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат.,1. 2014.



Обтекание пластины встречными потоками воды

Глава 4. ОБОСНОВАНИЕ ОШИБОЧНОСТИ ГИПОТЕЗЫ *Навье-Коши-Ламе*. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ. НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

4.1. Парадоксы теории деформаций

На стр.64 в «Механике сплошной среды, т.1» *Л.И.Седова*, в параграфе «**О зависимости векторов базиса сопутствующей системы от времени**» **утверждается**: «...Действительно, при движении деформируемого тела расстояния между его точками M и M' меняются. Координатные линии сопутствующей системы координат деформируются, **и векторы базиса $\hat{\varepsilon}_i$ меняются со временем так, что меняются и их величины и углы между ними...**» .

Напомним, что в «Основном курсе теоретической механики, ч.1» *Н.Н.Бухгольца* для переменного вектора $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, с изменяющимся во времени базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ подвижной связанной с телом сопутствующей системы координат $Oxuz$, производная по времени определяется так:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k} + a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt},$$

далее по формуле *Эйлера* $\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}]$, $\frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}]$, $\frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}]$,

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения. Сокращение на dt дает

$$d\vec{a} = da_x \vec{i} + da_y \vec{j} + da_z \vec{k} + a_x d\vec{i} + a_y d\vec{j} + a_z d\vec{k} \quad (4.1.1)$$

Поэтому на стр. 65 в том же параграфе «**О зависимости векторов базиса сопутствующей системы от времени**» цитируемой книги *Седова* [1] дифференциалы

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\varepsilon}_i \quad \text{и} \quad d\vec{r}' = d\xi^i \bar{\varepsilon}_i \quad (4.1.2)$$

противоречат формуле (4.1.1), следовательно, должны быть заменены на соответствующие формуле (4.1.1) выражения

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\varepsilon}_i + \xi^i d\hat{\varepsilon}_i, \quad d\vec{r}' = d\xi^i \bar{\varepsilon}_i + \xi^i d\bar{\varepsilon}_i \quad (4.1.3)$$

со всеми вытекающими отсюда последствиями в теории деформаций. Собственно говоря, сомнительность формулы (4.1.2) с

точки зрения формулы (4.1.1) подтверждается положением о том, что «... и векторы базиса $\hat{\varepsilon}_i$ меняются со временем так, что меняются и их величины и углы между ними...», ибо $\bar{\varepsilon}_i, i=1,2,3$ – векторы базиса в начальный момент времени t_0 , $\hat{\varepsilon}_i, i=1,2,3$ – векторы базиса в текущий момент времени t , а также \bar{r} и \bar{r}' , как сказано, переменные величины.

По Седову [1] для представлений (4.1.2) положено

$$\begin{aligned} |d\bar{r}| = ds &= \sqrt{\hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j}, \hat{g}_{ij} = \hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_j, \\ |d\bar{r}'| = ds' &= \sqrt{g'_{ij} d\xi^i d\xi^j}, g'_{ij} = \bar{\varepsilon}_i \cdot \bar{\varepsilon}_j \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

очевидно, для *правильных* представлений (4.1.3) вместо (4.1.4) получаются совершенно иные выражения, так как будет

$$\begin{aligned} |d\bar{r}| &= (d\xi^i \hat{\varepsilon}_i + \xi^i d\hat{\varepsilon}_i, d\xi^i \hat{\varepsilon}_i + \xi^i d\hat{\varepsilon}_i)^{\frac{1}{2}}, \\ |d\bar{r}'| &= (d\xi^i \bar{\varepsilon}_i + \xi^i d\bar{\varepsilon}_i, d\xi^i \bar{\varepsilon}_i + \xi^i d\bar{\varepsilon}_i)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

На основании (4.1.4) в дальнейшем выводится формула [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{V}_i \dot{w}_j + \dot{V}_j \dot{w}_i - \dot{V}_i \dot{w}_k \dot{V}_j \dot{w}_k) \quad (4.1.6)$$

Произведение производных $\dot{V}_i \dot{w}_k \dot{V}_j \dot{w}_k$ в (4.1.6) *принято считать малой величиной* и оно отбрасывается, тем самым (4.1.6) упрощается до следующего известного выражения тензора перемещений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.1.7)$$

Если $\dot{V}_i \dot{w}_k \dot{V}_j \dot{w}_k$ *не мало*, то (4.1.7) не имеет места. Очевидно, в силу (4.1.5) вместо (4.1.6) и (4.1.7) будут совершенно другие соотношения. (С точки зрения здравого смысла формула (4.1.6) была бы абсурдной, если бы w_j и x_j имели различные размерности). Совершенно аналогичное обстоятельство имеет место быть и в книге Дж. Мейза «Теория и задачи механики

сплошных сред», если привести обозначения *Мейза* в соответствие с обозначениями *Седова*: $d\mathbf{x} = d\vec{r}$, $d\mathbf{X} = d\vec{r}'$, $\xi^1 = x_1, \xi^2 = x_2, \xi^3 = x_3$, $\varepsilon_{ij} = E_{ij}, w_i = u_i, \mathbf{w} = \mathbf{u}$ и т.д.

Формула (4.1.6) в [2] имеет вид

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.1.8)$$

Таким образом, замечания (4.1.2) и (4.1.3), (4.1.5) относятся и к выводу формулы (4.1.8). Считается, что в (4.1.8) градиенты малы по сравнению с единицей и их приравнивают к нулю. Собственно говоря, и это совершенно очевидно, отбрасывание градиентов

$\dot{\nabla}_i \dot{w}_k \dot{\nabla}_j \dot{w}^k$ и $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ связано с *подгонкой* (4.1.7) к *лож-*

ной симметричности тензора напряжений сплошной среды.

Тензор напряжений сплошной среды в общем случае несимметричен, что доказано в **главе 1** настоящей книги.

4.2. Альтернативное представление относительного перемещения $d\mathbf{u}$

В обозначениях *Дж.Мейза* [2] вектор относительного перемещения $d\mathbf{u}$ (в книге *Л.И.Седова* [1] обозначено $d\mathbf{w}$) вводится как разность векторов начального положения точки Q_0 и конечного положения той же точки P_0 : $d\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(Q_0)} - \mathbf{u}^{(P_0)}$.

Разложение $\mathbf{u}^{(P_0)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки P_0 дает

$$d\mathbf{u} = \mathbf{K} d\mathbf{x},$$

или в покомпонентной записи (неполный дифференциал)

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i=1,2,3 \quad (4.2.1)$$

(по индексу j производится суммирование от 1 до 3).

Обратим внимание на то, что тензор \mathbf{K} **несимметричен**:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

В [1], [2], [3] по традиции разложение (4.2.1) приводится к виду

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j, \quad (4.2.3)$$

или в обозначениях Седова [1]

$$dw_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j$$

Первая сумма в (4.2.3) представляется *эйлеровым тензором линейной деформации*

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Это симметричная матрица; вторая часть в (4.2.3) есть *компоненты эйлера тензора линейного поворота*

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2.5)$$

Они же являются и компонентами *антисимметричного тензора*

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, ряд *Тейлора* представляется двойным образом в виде (4.2.1) и (4.2.3):

$$d\mathbf{u} = \mathbf{K}d\mathbf{x} \quad \text{и} \quad d\mathbf{u} = \mathbf{E}d\mathbf{x} + \frac{1}{2} [\text{rot}\mathbf{u}, d\mathbf{x}] \quad (4.2.6)$$

или с помощью антисимметричной матрицы в виде

$$d\mathbf{u} = \mathbf{E}d\mathbf{x} + \mathbf{R}d\mathbf{x}] \quad (4.2.7)$$

Кроме (4.2.6), (4.2.7) имеется бесконечное число различных форм представлений ряда *Тейлора* (4.2.1). С этой целью введем семейство однопараметрических матриц

$$\mathbf{C}_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{b} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{1}{b} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{1}{b} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \left(\frac{b-1}{b} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{1}{b} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

Ряд *Тейлора* (4.2.1) с применением матриц (4.2.8) имеет бесконечное число альтернативных или универсальных представлений

$$d\mathbf{u} = \mathbf{C}_b d\mathbf{x} + \frac{b-1}{b} [\text{rot}\mathbf{u}, d\mathbf{x}], \quad b \neq 0, |b| < \infty \quad (4.2.9)$$

При $b=1$ получается $\mathbf{C}_1 = \mathbf{K}$, при $b=2$ получается $\mathbf{C}_2 = \mathbf{E}$ и т.д.

4.3. Парадоксы гипотезы *Навье-Коши-Ламе*

Закон *Гука* в теории твердого деформируемого тела основан на *гипотезе Навье-Коши-Ламе* [2] о том, что в ряду *Тейлора*

(или неполного дифференциала)

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \quad (4.3.1)$$

для определения компонент тензора напряжений достаточно только первой половины данного ряда

$$du_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j, \quad (4.3.2)$$

второй половиной ряда пренебрегается, полагая

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (4.3.3)$$

хотя оба эти выражения состоят из одних и тех же градиентов.

В результате по гипотезе *Навье-Коши-Ламе* закон Гука был определен и широко используется в виде

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \bar{u} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, 3, \quad (4.3.4)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$, λ, μ – коэффициенты Ламе, $\pi_{ij} = \pi_{ji}$.

Тем самым по (4.3.4) утверждается, что силы, деформирующие тело, создают только *линейную деформацию* $E dx$.

По гипотезе *Навье-Коши-Ламе* эйлеров линейный поворот приравняется к нулю $\frac{1}{2} [\operatorname{rot} u, dx] = R dx = \mathbf{0}$, что конкретно

выражается в силу (4.3.3) в равенстве нулю ротора перемещения (см. Лурье [3]):

$$\operatorname{rot} u = \mathbf{0} \quad (4.3.5)$$

Следовательно, формула (4.3.1) обрезается и принимает укороченный вид (4.3.2), далекий от ряда *Тейлора*:

$$du = E dx \quad (4.3.6)$$

Разумеется, указанный парадокс связан с подгонкой (4.3.4) к формуле эйлерова тензора конечных деформаций

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right),$$

в котором по теории малых деформаций отбрасываются произведения $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$, могущие быть и совсем немалыми, и

предлагается сомнительная формула

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Итак, если следовать гипотезе *Навье-Коши-Ламе*, по которой $\text{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, то из представления ряда *Тейлора* в универсальной форме

$$d\mathbf{u} = \mathbf{C}_b d\mathbf{x} + \frac{b-1}{b} [\text{rot} \mathbf{u}, d\mathbf{x}], \quad b \neq 0, |b| < \infty \quad (4.3.7)$$

выпадает второе слагаемое и, исходя из выражения

$$d\mathbf{u} = \mathbf{C}_b d\mathbf{x}, \quad (4.3.8)$$

закон Гука по логике должен быть определен в виде

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + b \mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{1}{b} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{b-1}{b} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad b \neq 0, |b| < \infty \quad (4.3.9)$$

В формулах (4.3.4) *Навье-Коши-Ламе* тензор напряжений симметричен, в формулах (4.3.7) имеет место бесконечное число несимметричных тензоров напряжений при $b \neq 2$. Формула (4.3.7) есть ряд *Тейлора* при любых значениях $b \neq 0$, в том числе и для $b = 1$. Закон *Гука* (4.3.9) сформулирован для представления (4.3.8), получающегося из (4.3.7) при $\text{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, и для $b = 1$ принимает вид

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.3.10)$$

а так как при $b = 1$ имеет место быть $\mathbf{C}_1 = \mathbf{K}$, то закон *Гука* (4.3.10) соответствует полному ряду *Тейлора* $d\mathbf{u} = \mathbf{K} d\mathbf{x}!$

Главный парадокс гипотезы *Навье-Коши-Ламе* состоит в следующем. Согласно этой гипотезе имеют место эквивалент-

ные равенства (4.3.3) или (4.3.5), откуда вытекают равенства нулю компонент ротора

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, i, j = 1, 2, 3 \text{ или } \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, i, j = 1, 2, 3 \quad (4.3.11)$$

Напряжения (4.3.4), построенные по гипотезе *Навье-Коши-Ламе*, можно представить так:

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

которые в силу равенств (4.3.11) переходят к формулам (4.3.10):

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3 \quad (4.3.12)$$

и являются симметричными в силу вторых равенств (4.3.11).

Снова получается закон *Гука* в форме (4.3.10)! **Главный парадокс заключается еще и в том, что решение уравнений *Навье-Коши-Ламе***

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \quad (4.3.13)$$

должно удовлетворять равенствам (4.3.11). Исследуем этот вопрос. С этой целью применим операцию *rot* к (4.3.13):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \operatorname{rot} \vec{F} + \mu \Delta \operatorname{rot} \vec{u}, \quad (4.3.14)$$

т.к. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} \equiv 0$.

Теорема 1. В нестационарных задачах теории упругости $\operatorname{rot} \vec{u} \neq 0$, следовательно, гипотеза *Навье-Коши-Ламе* (4.3.4) неверна, тензор напряжений не может быть симметричным.

Очевидно, для $\operatorname{rot} \vec{F} \neq 0$ уравнение (4.3.14) имеет ненулевое решение $\operatorname{rot} \vec{u} \neq 0$, поэтому гипотеза *Навье-Коши-Ламе* неверна, а это значит, что тензор напряжений надо определять по формуле (4.3.10) с несимметричным тензором напряжений.

Пусть $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Тогда уравнение (4.3.14) примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \operatorname{rot} \vec{u} \quad (4.3.15)$$

Данное волновое уравнение имеет общее **ненулевое** решение

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{u} &= (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \sqrt{3\mu\pi}) \vec{i}_1 + \\ &+ (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \sqrt{3\mu\pi}) \vec{i}_2 + \\ &+ (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \sqrt{3\mu\pi}) \vec{i}_3 \neq 0 \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

следовательно, гипотеза *Навье-Коши-Ламе* снова неверна!

Рассмотрим уравнение упругого равновесия, полученное по гипотезе *Навье-Коши-Ламе*:

$$\rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} = 0 \quad (4.3.17)$$

Операция ротор (4.3.17) дает уравнение эллиптического типа относительно $\operatorname{rot} \vec{u}$:

$$\rho_0 \operatorname{rot} \vec{F} + \mu \Delta \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad (4.3.18)$$

Теорема 2. Если $\operatorname{rot} \vec{F} \neq 0$, то уравнение (4.3.18) имеет ненулевое решение $\operatorname{rot} \vec{u} \neq 0$, следовательно, в задачах упругого равновесия гипотеза *Навье-Коши-Ламе* неверна, тензор напряжений не может быть симметричным.

Доказательство очевидное.

Пусть теперь массовые силы таковы, что $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Тогда уравнение (4.3.18) перейдет в однородное эллиптическое уравнение

$$\Delta \operatorname{rot} \vec{u} = 0,$$

которое имеет нулевое решение

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad (4.3.19)$$

Теорема 3. В задачах упругого равновесия гипотеза *Навье-Коши-Ламе* верна, если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, т.е. $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$, следовательно, тензор напряжений может быть симметричным. Вектор перемещения имеет потенциал.

Доказательство уже дано в виде (4.3.19). Потенциал вводится по формуле

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \Phi, \quad (4.3.20)$$

ибо $\operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$. И в этом случае тензор напряжений определяется в виде (4.3.10), симметрия имеет место из-за (4.3.19), что приводит к равенствам (4.3.11).

Итак, согласно теоремам 1, 2, 3 тензор напряжений должен иметь вид (4.3.10):

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j=1,2,3.$$

По гипотезе *Навье-Коши-Ламе* силы, действующие на тело, создают только **линейную деформацию** $E dx$, в результате получается, как сказано, *искаженное* выражение

$$du_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j, \quad d\mathbf{u} = E d\mathbf{x},$$

ничего общего не имеющего с рядом *Тейлора* (4.3.1) $d\mathbf{u} = \mathbf{K} d\mathbf{x}$. Отказ от гипотезы *Навье-Коши-Ламе* означает, что если исходить из формулы ряда *Тейлора*

$$d\mathbf{u} = E d\mathbf{x} + \frac{1}{2} [\operatorname{rot} \mathbf{u}, d\mathbf{x}],$$

то *необходимо* учитывать также силы напряжений, вызывающие и *эйлеров линейный поворот*. С этой целью обозначим через π_{ji}^* - напряжения, пропорциональные *эйлеровым линейным деформациям*, через π_{ji}^{**} - напряжения, пропорциональные *эйлеровым линейным поворотам*:

$$\pi_{ji}^* = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \pi_{ji}^{**} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3.21)$$

По закону *Гука* суммарная сила будет равна

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{w} + \pi_{ji}^* + \pi_{ji}^{**}$$

После подстановки π_{ji}^* и π_{ji}^{**} получается

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i, j=1,2,3, \quad (4.3.22)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$, λ, μ - коэффициенты *Ламе*.

Тензор напряжений в (4.3.22) **несимметричен** $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}, i \neq j$, ибо здесь не предполагается заранее равенство

нулю (4.3.11) компонент вектора $\text{rot } \mathbf{u}$. Итак, тензор напряжений (4.3.22) снова совпадает с тензорами (4.3.12) и (4.3.10).

Несимметричность тензора напряжений в динамике сплошной среды доказано автором в **главе 1**. Данное там строгое доказательство легко переносится и на деформируемые тела в теории упругости. В монографии *Лурье А.И.* [3] и др. симметричность тензора напряжений в теории упругости устанавливается для состояния упругого равновесия

$$\frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z} + \rho \bar{F} = 0 \quad (4.3.22a)$$

Аналогично *Седову и Лойцянскому* составляется уравнение момента сил в *неправильной* форме

$$\iiint_{\tau} [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{F}} \rho \delta \tau] + \iint_{\sigma} [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\pi}_n \delta \sigma] = 0,$$

из которого в силу получается соотношение

$$\frac{\partial [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\pi}_x]}{\partial x} + \frac{\partial [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\pi}_y]}{\partial y} + \frac{\partial [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\pi}_z]}{\partial z} + [\bar{\mathbf{r}}, \rho \bar{\mathbf{F}}] = 0, \quad (4.3.23)$$

на основании чего *Лурье* и др. авторы делают вывод о *симметричности* тензора напряжений в упругой среде. Критика такого *дедуктивного* метода дана в **главе 1**. Там же дано обоснование *правильной* формулы момента сил в виде

$$\iiint_{\tau} [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{F}} \rho \delta \tau] + \iiint_{\tau} [\bar{\mathbf{r}}, \iint_{\sigma_{\delta \tau}} \bar{\pi}_n \delta \sigma] = 0,$$

откуда получается не совпадающее с (4.3.23) соотношение

$$[\bar{\mathbf{r}}, \frac{\partial \bar{\pi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\pi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\pi}_z}{\partial z}] + [\bar{\mathbf{r}}, \rho \bar{\mathbf{F}}] = 0,$$

из которого следует уравнение упругого равновесия (4.3.22a), но не следует *симметричность тензора напряжений*.

Поэтому надо положить, опираясь на вышеприведенные факты, что и касательные напряжения $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}$, $j \neq i$ (в декартовых координатах $\pi_{xy} \neq \pi_{yx}$, $\pi_{xz} \neq \pi_{zx}$, $\pi_{zy} \neq \pi_{yz}$) в общем случае не равны друг другу. Равенство касательных напряжений - симметричность тензора напряжений - в какой-либо точке сплошной

среды, т.е. выполнение равенств $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, i, j=1,2,3$ по-

просту означает тот факт, согласно результатам **параграфа 1.8 главы 1**, что в данной точке среды момент главной силы совпал с главным моментом сил.

Таким образом, само собою назрела необходимость пере-
смотра уравнений динамики деформируемого твердого тела,
иначе говоря, уравнений *Навье-Коши-Ламе*.

4.4. Парадоксы закона Гука для симметричного тензора напряжений *Навье-Коши-Ламе*

Рассмотрим, например, уравнения равновесия (4.3.17) **4.3**
для двумерного случая, когда сила $\vec{F} = 0\vec{i}_1 + 0\vec{i}_2 + F_3\vec{i}_3$ перпен-
дикулярна плоскости (x_1, x_2) , и запишем (4.3.17) в проекциях

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta u_k = 0, k = 1, 2, 3, \quad (4.4.1)$$

или более подробно для двумерной задачи

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \mu \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0, k = 1, 2 \quad (4.4.2)$$

Для бесконечного числа перемещений, т.е. решений системы уравнений (4.4.2), **симметричные касательные напряжения гипотезы *Навье-Коши-Ламе* имеют нулевые значения**, т.е. во всех точках тела равны нулю

$$\pi_{ij} = \pi_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0, i, j = 1, 2,$$

в то время как нормальные напряжения отличны от нуля $\pi_{ii} = 2\mu \varepsilon_{ii} \neq 0$, Ограничимся приведением небольшого перечня перемещений, в которых данный факт имеет место (ради краткости, обозначается $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, u_3 \equiv w, x_3 \equiv z$):
1) $u = F(\sin k_1 x \cos k_1 y), v = F(-\cos k_1 x \sin k_1 y),$

$$2) u = U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y),$$

$$v = U(\sin k_2 x \cos k_2 y - \cos k_2 x \sin k_2 y),$$

$$3) u = W(-\cos k_3 x \sin k_3 y), v = W(\sin k_3 x \cos k_3 y),$$

$$4) u = Q(\sin k_4 x \sin k_4 y), v = Q(\cos k_4 x \cos k_4 y),$$

$$5) u = T(\sin k_5 x \sin k_5 y), v = T(\cos k_5 x \cos k_5 y),$$

$$(4.4.3) \quad 6) u = M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x),$$

$$v = M(\sin k_6 x \sin k_6 y + \cos k_6 y \cos k_6 x),$$

$$7) u = S(e^{k_7(x+y)}), v = -S(e^{k_7(x+y)}),$$

для трехмерных перемещений при отсутствии массовых сил

$$8) u = D((e^{k_8 y} - e^{k_8 z})e^{k_8 x}), v = D((e^{k_8 z} - e^{k_8 x})e^{k_8 y}), \quad (4.4.4)$$

$w = D((e^{k_8 x} - e^{k_8 y})e^{k_8 z})$, где коэффициенты $k_i = const$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, выбираются произвольно из бесконечного

интервала $-\infty < k_i < +\infty$. Стоящие здесь дифференцируемые функции F, U, W, Q, T, M, S, D также произвольны в выборе. Очевидно, из указанного перечня можно образовать новые любые линейные комбинации типа $u = F + U$, $v = F + U$ и т.д. Поля 1-7 в (4.4.3) соответствуют плоским перемещениям, являются решениями уравнений (4.4.2), т.к. обращают дивергенцию в

нуль $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, поля перемещений 8) в (4.4.4) обращают

трехмерную дивергенцию в нуль $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$,

симметричные касательные напряжения тоже равны нулю

$$\pi_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0, i \neq j, \forall (i, j),$$

нормальные напряжения не равны нулю $\pi_{ii} = 2\mu \varepsilon_{ii} \neq 0, i = 1, 2, 3$.

Следует заметить, что частные решения (4.4.3), (4.4.4) уравнений упругого равновесия (4.4.1) являются также частными решениями уравнений с **несимметричным тензором** напряжений

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta u_k = 0, k = 1, 2, 3,$$

но здесь *несимметричные* касательные напряжения

$$\pi_{ji} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \neq 0, \pi_{ij} \neq \pi_{ji}, i \neq j \text{ уже не равны нулю.}$$

4.5. Уравнения теории упругости с несимметричным тензором напряжений

Уравнения теории упругости в форме *Навье-Коши-Ламе* для *симметричного* тензора напряжений даны в [1], [2], [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}, \quad (4.5.1)$$

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} - \text{вектор перемещения, } u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w.$$

Выше было обосновано, что если действующие на частицы деформируемого тела силы перемещают их на $d\mathbf{u} = \mathbf{K}d\mathbf{x}$, то соответствующие компоненты тензора напряжений должны быть по закону *Гука* пропорциональными компонентам **несимметричного тензора перемещений К**.

Закон *Гука* для *несимметричного* тензора напряжений дан в параграфе 4.2

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3 \quad (4.5.2)$$

Уравнения динамики получаются подстановкой (4.5.2) в уравнения в напряжениях

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3$$

и для несимметричного тензора напряжений (4.5.2) получается

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \quad (4.5.3)$$

Проекции (4.5.3) на оси координат образуют систему из 3-х скалярных уравнений гиперболического типа

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

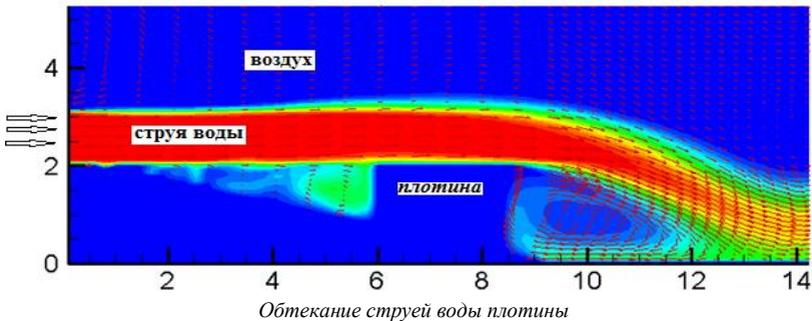
Примечание. Условия совместности компонент несимметричного тензора перемещений имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial x_j \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{iv}}{\partial x_\mu \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial x_i \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{j\mu}}{\partial x_\nu \partial x_i} -$$

$$- \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial x_j \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\mu}}{\partial x_\nu \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{vj}}{\partial x_i \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{j\nu}}{\partial x_\nu \partial x_i} = 0$$

Литература

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. - М.: Мир, 1974г.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1 - М.: «Наука», 1973г.
3. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: «Наука», 1970г., 984с.
4. Джакупов К.Б. О несимметричности тензора напряжений// Междунар. науч. конф. «Пробл.теор. прикл.мех.» Алматы, 1-2 марта 2006г., посвящ. 75-лет. акад. Джолдасбекова У.А.
5. Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. - Алматы: Типография «С». 2011г., 293с.



Глава 5. УРАВНЕНИЯ Эйлера О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА ОТ ИСТОЧНИКА и формуле Эйнштейна $E = mc^2$

Свет представляет собою дуалистическое явление, сочетает в себе электромагнитную волну в одних случаях и поток *фотонов* в других [1]. Масса покоя фотона считается равной нулю (по-видимому, относительно системы координат, жестко связанной с источником фотонов), поэтому скорость фотона равна скорости света. Фотону приписывается наличие «релятивистской массы». Именно из-за отсутствия у фотона массы покоя, движению фотона в вакууме приписывается «максимально возможная скорость» — скорость света «С». Фотон может существовать лишь в таком движении. Любая остановка фотона равносильна его поглощению. Если исходить из формулы Эйнштейна

$$E = mc^2 \text{ масса фотона составит } m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad h = 2\pi\hbar, \text{ где } \hbar - \text{ постоянная}$$

Планка, $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, ω - угловая частота.

В [1] утверждается, что «...невозможно ввести понятие тока фотонов, для которого выполнялось бы уравнение непрерывности для плотности числа фотонов». Не вдаваясь в дискуссию по этому поводу, в данной главе будет показано, что применение объемной плотности фотонов и уравнений Эйлера правомерно хотя бы потому, что уравнение непрерывности вытекает из закона сохранения массы, а движущийся фотон имеет массу и скорость. Применение закона сохранения массы может прояснить некоторые явления, связанные с распространением света в пространстве, например, свечка или костер освещают вокруг себя круг или сферу конечного диаметра, концентрация солнечных лучей нагревает тело до возгорания и т.д. Применение теоремы Мещерского об изменении импульса показывают, что силы гравитации ведут к поглощению фотонов и ускорению их движения и т.д.

5.1. О формуле Эйнштейна $E = mc^2$ и энергии фотонов

Представляет интерес рассмотрение с применением уравнений идеального газа скорости и распространения света как корпускулярного сплошного потока фотонов, отвлекаясь от его электромагнитной волновой природы. Тот факт, что свет имеет давление « ρ » установлен в XIX-м веке русским физиком П.Левбедевым.

Нетрудно установить, что формула Эйнштейна $E = mc^2$ выведена из предположения о постоянстве скорости света $c = const$.

Для постоянной массы $m = const$ из 2-го закона *Ньютона* $m \frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{F}$

выводится теорема об изменении кинетической энергии $m \frac{d|\vec{c}|^2}{dt} = 2(\vec{F}, \vec{c})$.

При отсутствии внешних сил $\vec{F} \equiv 0$ и $m = const$ справедлив 1-й закон *Ньютона* о постоянстве скорости движения $\vec{c} = const$, кроме того следует

постоянство кинетической энергии $\frac{mc^2}{2} = const = \frac{m_0 c_0^2}{2}$, $c = |\vec{c}|$, где

m_0 и c_0 значения массы и скорости в некоторый момент времени. При удвоении получается формула *Эйнштейна*

$$E = mc^2 = 2 \cdot const$$

В случае материальной точки переменной массы m , движущейся со скоростью \vec{c} под действием силы \vec{F} , предполагается справедливым закон *Мещерского* (теорема об изменении импульса)

$\frac{dm\vec{c}}{dt} = \vec{F}$. Из скалярного произведения

$(\frac{dm\vec{c}}{dt}, \vec{c}) = (\vec{F}, \vec{c})$ следует $\frac{m}{2} \frac{dc^2}{dt} + \frac{dm}{dt} c^2 = (\vec{F}, \vec{c})$, откуда по-

лучается при $\vec{F} \equiv 0$ после деления на mc^2 : $\frac{d \ln m^2 c^2}{dt} = 0$, $m^2 c^2 = const$,

т.е. импульс тела будет постоянным во все время движения $mc = m_0 c_0$. Из закона *Мещерского* получается, чтобы увеличить скорость тела необходимо уменьшение его массы и наоборот, если нет внешних сил.

Следовательно, для тела с неизменной массой $m = const$, движущейся с постоянной скоростью $\vec{c} = const$ справедлива формула *Эйнштейна* $E = mc^2$, равная удвоенной кинетической энергии. Формула постоянства величины импульса тела $mc = const$ имеет место как для переменных массы и скорости, так и для постоянных их значений.

Таким образом, представляет определенный интерес рассмотрение движения фотонов в поле гравитационных сил и под действием градиента давления, считая плотность фотонов ρ_ϕ переменной величиной (данное утверждение основано на таких явлениях, как яркий свет, тень, сумерки и др.)

С этой целью для моделирования движения фотонов **вдоль луча** применим стационарные одномерные уравнения *Эйлера*:

$$\rho_\phi c \frac{dc}{dx} + \frac{dp}{dx} = \rho_\phi F_x, \quad (5.1.1)$$

$$\frac{d\rho_\phi c}{dx} = 0 \quad (5.1.2)$$

Уравнение динамики (5.1.1) в силу уравнения неразрывности (5.1.2) преобразуется к виду

$$\frac{d\rho_\phi c^2}{dx} + \frac{dp}{dx} = \rho F_x$$

Вне поля гравитации можно пренебречь действием на фотоны гравитационной силы $F_x \approx \frac{m_\phi m_S}{x^2}$, которая стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. В этом случае уравнение (5.1.1) легко интегрируется

$$\frac{d(\rho_\phi c^2 + p)}{dx} = 0, \quad (5.1.3)$$

$$\rho_\phi c^2 + p = const$$

Константу в интеграле (5.1.3) выберем из условия данных на конкретном источнике «S»:

$$\rho_\phi c^2 + p = \rho_{\phi S} c_S^2 + p_S, \quad (5.1.4)$$

где $\rho_{\phi S}$ плотность фотонов на «S», c_S^2 — квадрат скорости фотонов, исходящих от «S», p_S — давление на фотоны в источнике «S».

Из формулы (5.1.4) вытекает, что плотность энергии фотонов равна

$$U = \rho_\phi c^2 + p \quad (5.1.5)$$

Энергия фотонов, содержащаяся в объеме τ равна интегралу

$$E_\tau = \iiint_\tau U \delta\tau = \iiint_\tau (\rho_\phi c^2 + p) \delta\tau$$

По теореме о среднем интеграла вытекает

$$E_\tau = \iiint_\tau (\rho_\phi c^2 + p) \delta\tau = c_{cp}^2 \iiint_\tau \rho_\phi \delta\tau + p_{cp} \iiint_\tau \delta\tau = mc^2 + p_{cp} \tau$$

Таким образом, энергия фотонов равна

$$E_\tau = mc^2 + p_{cp} \tau \quad (5.1.6)$$

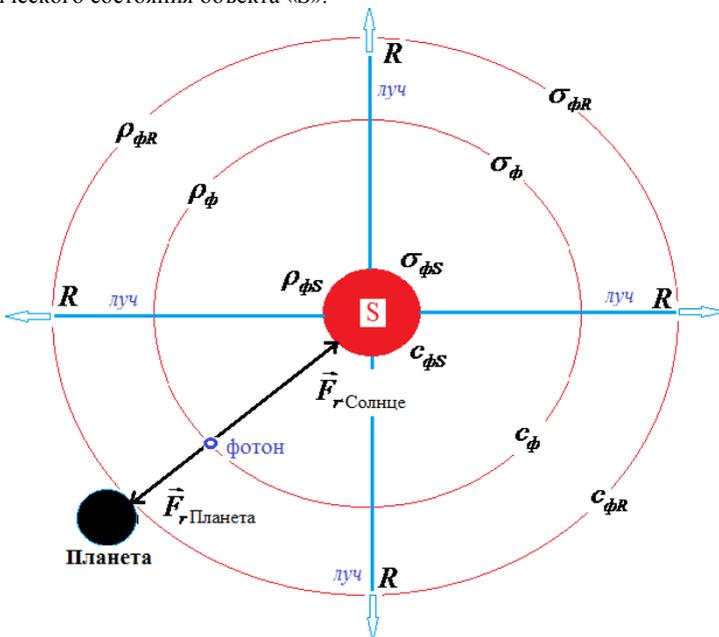
где $m = \iiint_\tau \rho_\phi \delta\tau$ масса фотонов, содержащихся в объеме.

Формула (5.1.6) отличается от формулы Эйнштейна $E = mc^2$ на величину $P_{cp} \tau$.

Из формулы (5.1.4) определяется скорость фотонов, исходящих от источника «S»:

$$c^2 = \frac{\rho_{\phi S} c_S^2 + P_S - P}{\rho_{\phi}} \quad (5.1.7)$$

Из данной формулы вытекает зависимость скорости света от плотности фотонов $\rho_{\phi S}$ на источнике «S» и начального давления « P_S », от скорости фотонов c_S , исходящих от источника «S», следовательно, зависит от физического состояния объекта «S».



5.2. О дальности распространения света вокруг источника

По закону сохранения массы поток фотонов через поверхность σ в единицу времени равен потоку через поверхность источника σ_S :

$$\rho_{\phi} c \sigma = \rho_{\phi S} c_S \sigma_S \quad (5.2.1)$$

На расстоянии R от источника поток фотонов, проходящий через отдаленную поверхность $\sigma_R = 4\pi R^2$ по формуле (5.2.1) будет равен

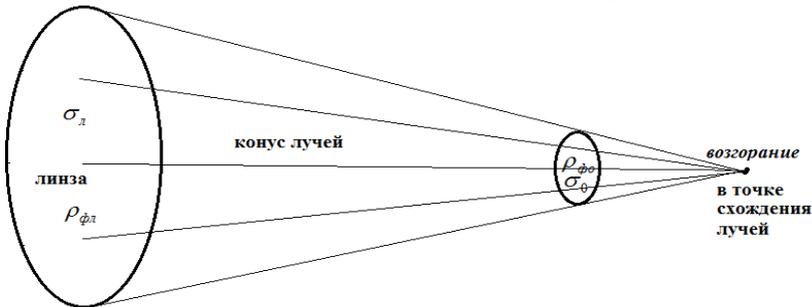
$$\rho_{\phi R} c_R \sigma_R = \rho_{\phi S} c_S \sigma_S \quad (5.2.2)$$

Из данной формулы вытекает

$$\rho_{\phi R} = \frac{\rho_{\phi S} c_S \sigma_S}{4\pi R^2 c_R}, \quad (5.2.3)$$

что плотность фотонов на $\rho_{\phi R}$ расстоянии R обратно пропорциональна площади отдаленной поверхности σ_R и прямо пропорциональна площади σ_S поверхности источника, т.е. чем больше $\sigma_R = 4\pi R^2$ и чем меньше σ_S , тем меньше будет плотность $\rho_{\phi R}$ фотонов, ухудшается видимость предметов на расстоянии R .

Очевидно, яркость светила зависит от плотности $\rho_{\phi S}$ фотонов на источнике «S», начального давления « P_S » и от скорости фотонов c_S .



На данном рисунке показан известный способ зажигания фокусированными солнечными лучами. Из формулы (5.2.2) при $\sigma_o \rightarrow 0$ применительно к линзе вытекает бесконечное возрастание плотности фотонов $\rho_{\phi o}$ в точке

пересечения лучей от линзы:
$$\rho_{\phi o} = \frac{\rho_{\phi l} c_l \sigma_l}{c_o \sigma_o} \rightarrow \infty.$$

Кинетическая энергия фотонов переходит в энергию молекул площадки $\sigma_o \rightarrow 0$ предмета, происходит выгорание данного участка.

Дифференцирование (5.2.1) по радиусу дает равенство
$$\frac{d\rho_{\phi} c \sigma}{dr} = 0, c$$

применением которого уравнение динамики

$$\rho_{\phi} c \frac{dc}{dr} + \frac{dp}{dr} = \rho_{\phi} F_r$$

преобразуется к виду

$$\frac{d\rho_{\phi} c^2}{dr} + \frac{\rho_{\phi} c^2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} + \frac{dp}{dr} = \rho_{\phi} F_r, \quad (5.2.4)$$

где $\sigma = 4\pi r^2$ поверхность сферы произвольного радиуса r . Для таких источников света как свечка, горящая спичечная головка, костер и т.д. градиент давления и гравитационная сила должны быть невелики по сравнению с Солнцем. Считая их равными нулю из (5.2.4) имеем

$$\frac{d\rho_{\phi} c^2}{dr} = -\frac{\rho_{\phi} c^2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} < 0$$

Производная $\frac{d\rho_{\phi} c^2}{dr} < 0$ отрицательна, следовательно, комплекс $\rho_{\phi} c^2$

будет убывающей функцией, стремящейся к нулю (освещение от свечки, от горящей спичечной головки и т.д. распространяется на небольшое расстояние).

5.3. О постоянстве скорости фотонов вне гравитационного поля при нулевом градиенте давления

Рассмотренное выше уравнение динамики

$$\frac{d\rho_{\phi} c^2}{dr} + \frac{\rho_{\phi} c^2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} + \frac{dp}{dr} = \rho_{\phi} F_r,$$

вне гравитационного поля при нулевом градиенте давления имеет вид

$$\frac{d\rho_{\phi} c^2}{dr} + \frac{\rho_{\phi} c^2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} = 0$$

Из данного уравнения вытекает $\rho_{\phi} c^2 \sigma = \rho_{\phi S} c_S^2 \sigma_S$. Закон сохранения массы (5.2.1) дает $\rho_{\phi} c \sigma = \rho_{\phi S} c_S \sigma_S$. В результате из двух уравнений вытекает постоянство скорости фотонов $c = c_S$ и формула (5.2.3) для произвольного радиуса r принимает вид

$$\rho_\phi = \frac{\rho_{\phi S} \sigma_S}{4\pi r^2},$$

т.е. и в этом случае плотность фотонов убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника света.

Из (5.1.7) и (5.2.3) вытекают, если градиент давления не равен нулю $\frac{dp}{dr} \neq 0$, что скорость света зависит от начального давления « P_S », от скорости фотонов c_S , исходящих от источника « S », и радиуса R отдаленности от Солнца или другого источника света.

5.4. Переменность скорости фотонов вдоль луча в гравитационном поле

Одномерные уравнения *Эйлера* вдоль одного луча даны в виде (5.1.1) и (5.1.2) в п.5.1.

Силы гравитационного поля направлены к центру источника фотонов, поэтому в уравнении динамики *Эйлера*

$$\frac{d(\rho_\phi c^2 + p)}{dx} = \rho_\phi F_x, \quad (5.4.1)$$

проекция силы на направление луча отрицательна $F_x < 0$, фотодинамический напор $\rho_\phi c^2 + p$ становится **монотонно убывающей функцией**, стремящейся к нулю:

$$\rho_\phi c^2 + p \rightarrow 0 \quad (5.4.2)$$

Гравитационные силы так называемой «**черной дыры**» настолько велики, что фотоны не могут покинуть сферу, радиус которой определен действием

силы всемирного тяготения $F_{xS} \approx \frac{m_\phi m_S}{x_c^2}$.

При незначительных гравитационных силах фотоны покидают пределы их действия и распределяются в пространстве.

При приближении фотонов к Земле или другой планете гравитационная сила Солнца ослабевает и начинает действовать на фотоны сила тяготения Земли или другой планеты, что вызывает ускорение фотонов, потому как

$F_{x3} \approx \frac{m_\phi m_3}{x_3^2}$ будет иметь положительную проекцию на направление луча,

вследствие чего фотодинамический напор $\rho_\phi c^2 + p$ **монотонно**

возрастает $\rho_\phi c^2 + p \rightarrow \rho_{\phi R} c_R^2 + p_R$ до поглощения фотонов поверхностью Земли или другой планеты.

Измерения скорости света от Солнца на поверхности Земли зависят от расположения прибора на конкретном расстоянии R от Солнца и должны иметь небольшие по космическим масштабам отклонения от значения в вакууме $c = 299792,458 \text{ км/с}$.

Как видно из результатов применения уравнений Эйлера, скорость света есть переменная величина в поле гравитационных сил.

5.5. Уравнения Эйлера о волновой природе света

Природа звуковых волн, как факт распространения малых возмущений по адиабатическому газу, обоснована одномерными уравнениями Эйлера [3]. Данный подход, очевидно, вполне приемлем здесь. Действительно, образование конуса лучей при прохождении фотонов через линзу с бесконечным увеличением их плотности $\rho_{\phi 0}$ можно принять за явление баротропности $\rho_\phi = \rho_\phi(p)$ течения. Следуя [3], допустим, что до момента времени $t < t^0$ параметры потока фотонов установились во времени и имеют стационарные значения вдоль луча $c = \tilde{c} = const, \rho_\phi = \tilde{\rho}_{\phi 0} = const, p = \tilde{p}_0 = const$.

В момент времени $t = t^0$ в поток фотонов внесены бесконечно малые возмущения $c' = c'(x, t^0), \rho'_\phi = \rho'_\phi(x, t^0), p' = p'(x, t^0)$ (например, изменение состояния воздуха после грозы, прохождение света через грани хрусталя или алмаза и т.д.). Дальнейшее развитие возмущений для $t > t^0$ описываются нестационарными уравнениями

$$\rho_\phi \left(\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial \rho_\phi} \frac{\partial \rho_\phi}{\partial x} = \rho_\phi F_x, \quad (5.5.1)$$

$$\frac{\partial \rho_\phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\phi c}{\partial x} = 0 \quad (5.5.2)$$

Опираясь на $\rho_\phi = \rho_\phi(p)$, представим уравнение (5.5.1) в виде

$$\rho_\phi \left(\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial \rho_\phi} \frac{\partial \rho_\phi}{\partial x} = \rho_\phi F_r \quad (5.5.3)$$

Решение системы (5.5.2) и (5.5.3) для времени $t > t^0$ ищется суммами

$$c = \tilde{c} + c'(x, t), \rho_\phi = \tilde{\rho}_{\phi 0} + \rho'_\phi(x, t) \quad (5.5.4)$$

Подставляя суммы (5.5.4) в (5.5.3) и отбрасывая величины 2-го и 3-го порядков малости, получаем систему уравнений для малых возмущений

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \check{\rho}_{\phi 0} \check{c} \frac{\partial c'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \rho_{\phi}} \frac{\partial \rho'_{\phi}}{\partial x} = 0, \quad (5.5.5)$$

$$\frac{\partial \rho'_{\phi}}{\partial t} + \check{c} \frac{\partial \rho'_{\phi}}{\partial x} + \check{\rho}_{\phi 0} \frac{\partial c'}{\partial x} = 0 \quad (5.5.6)$$

В (5.5.5) приближенно положим $\frac{\partial p}{\partial \rho_{\phi}} \approx \frac{\partial p(\rho_{\phi 0})}{\partial \rho_{\phi}} = c_0^2$,

где c_0^2 имеет размерность скорости, является аналогом скорости звука. В этом случае система линеаризируется

$$\check{\rho}_{\phi 0} \left(\frac{\partial c'}{\partial t} + \check{c} \frac{\partial c'}{\partial x} \right) + c_0^2 \frac{\partial \rho'_{\phi}}{\partial x} = 0, \quad (5.5.7)$$

$$\frac{\partial \rho'_{\phi}}{\partial t} + \check{c} \frac{\partial \rho'_{\phi}}{\partial x} + \check{\rho}_{\phi 0} \frac{\partial c'}{\partial x} = 0 \quad (5.5.8)$$

Исключая из (5.5.7) и (5.5.8) c' , получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho'_{\phi}}{\partial t^2} + \check{c} \left(\frac{\partial^2 \rho'_{\phi}}{\partial x \partial t} - \check{\rho}_{\phi 0} \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} \right) = c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'_{\phi}}{\partial x^2}$$

Исключая из (5.5.7) и (5.5.8) ρ' , получаем второе волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 c'}{\partial t^2} + \check{c} \left(\frac{\partial^2 c'}{\partial t \partial x} - \frac{c_0^2}{\check{\rho}_{\phi 0}} \frac{\partial^2 \rho'_{\phi}}{\partial x^2} \right) = c_0^2 \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2}$$

Если положить $\check{c} = 0$, то данная система принимает форму, аналогичную распространению звуковых волн

$$\frac{\partial^2 \rho'_{\phi}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'_{\phi}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 c'}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2}$$

Примечание. Из данных выше применений уравнений Эйлера к распространению света от источника вытекают очевидные выводы о том, что скорости света на планетах Солнечной системы будут различными, тем более в космических масштабах, свет от звезд Галактики, надо полагать, доходит до Земли с различными скоростями.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Том 2.-М.: «Наука», 1988г.
2. Берестецкий Е. М. Теоретическая физика IV. Квантовая электродинамика. -Физматлит, 2002. ISBN 5-9221-0058-0 (рус.) - §3, с.26-27 и § 4, с. 29.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: “Наука”, 1973г..С.847.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно, достаточно подробно изложенные здесь коррекции теоретических основ механики сплошной среды обеспечивают необходимость следующих выводов.

Исключить из учебников и других источников ряд **неправомерных положений**:

1. **Ошибочное утверждение о симметричности тензора напряжений сплошной среды** $\pi_{ij} = \pi_{ji}$

2. **Ошибочный реологический закон (гипотезу) Стокса**

$$\pi_c = -[p + (2/3\mu - \mu') \operatorname{div} \vec{v}] E + 2\mu \dot{S},$$

$$\pi_{ji(c)} = -[p + (2/3\mu - \mu') \operatorname{div} \vec{v}] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, 3$$

3. **Ошибочные уравнения Стокса динамики вязкой жидкости и газа**

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \vec{v} \right], i = 1, 2, 3,$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 -$$

$$- p \operatorname{div} \vec{v} - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2$$

4. **Гипотезу Навье-Коши-Ламе и ошибочное представление закона Гука в виде**

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j = 1, 2, 3$$

5. **Ошибочное уравнение теории упругости**

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}$$

Вместо них необходимо ввести в учебники и в приложения следующие обоснованные правильные положения:

1. Утверждение о несимметричности в общем случае тензора напряжений сплошной среды $\pi_{ij} \neq \pi_{ji}, j \neq i$;

2. Реологический закон Ньютона с несимметричным тензором напряжений $\pi_n = -pE + \mu\bar{S}$,

$$\pi_{ji(n)} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3;$$

3. Новые уравнения динамики вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}), i = 1, 2, 3,$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2 - p \text{div} \vec{v};$$

4. Реологический закон с несимметричным тензором напряжений в теории упругости и закон Гука в виде

$$\pi_{ji} = \lambda \delta_{ij} \text{div} \vec{u} + \mu \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, 3;$$

5. Новое уравнение теории упругости с несимметричным тензором напряжений

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \lambda \text{grad} \text{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u};$$

6. В книгах Дж. Мейза «Теория и задачи механики сплошных сред», Л.И. Седова «Механика сплошной среды» и других учебниках заменить неправильные соотношения

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i, d\vec{r}' = d\xi^i \bar{\partial}_i;$$

$$|d\vec{r}| = ds = \sqrt{\hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j}, \hat{g}_{ij} = \hat{\partial}_i \cdot \hat{\partial}_j,$$

$$|d\vec{r}'| = ds' = \sqrt{g_{ij} d\xi^i d\xi^j}, g_{ij} = \bar{\partial}_i \cdot \bar{\partial}_j;$$

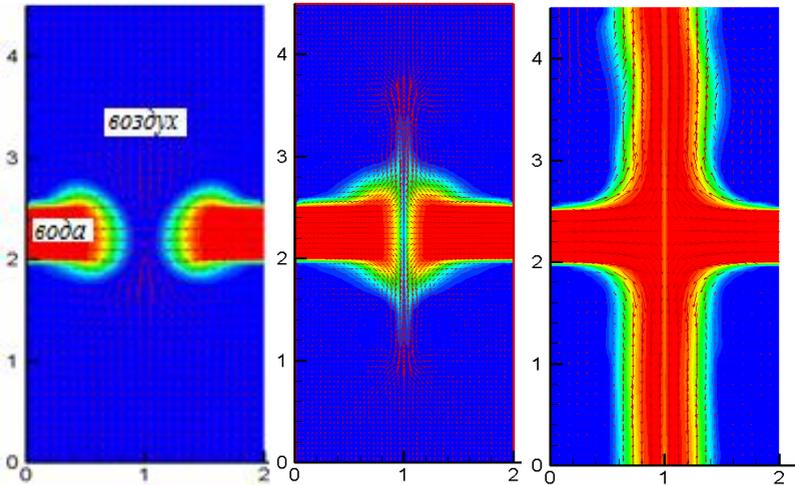
на правильные

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i + \xi^i d\hat{\partial}_i, d\vec{r}' = d\xi^i \bar{\partial}_i + \xi^i d\bar{\partial}_i;$$

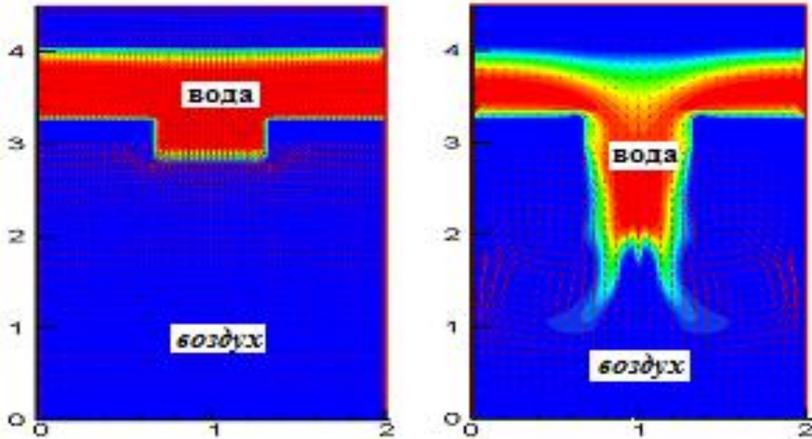
$$|d\vec{r}| = (d\xi^i \hat{\partial}_i + \xi^i d\hat{\partial}_i, d\xi^i \hat{\partial}_i + \xi^i d\hat{\partial}_i)^{\frac{1}{2}},$$

$$|d\vec{r}'| = (d\xi^i \bar{\partial}_i + \xi^i d\bar{\partial}_i, d\xi^i \bar{\partial}_i + \xi^i d\bar{\partial}_i)^{\frac{1}{2}}$$

и на этой основе пересмотреть все вытекающие отсюда положения теории деформаций.



Соударение боковых струй воды в воздухе



Численное моделирование свободного истечения слоя воды в воздушный бассейн под действием силы тяжести



Джакупов Кенес Бажкенович окончил с красным дипломом в 1966г. механико-математический факультет Томского государственного университета им. В.В.Куйбышева. С 1966г. по 1969г. аспирант ВЦ СОАН СССР Академгородок г. Новосибирск. Защитил в 1970г. кандидатскую, в 1990г. докторскую диссертации в Институте теплофизики им. С.С.Кутателадзе СОАН СССР. Автор 5 монографий, 9 учебных пособий и около 100 работ в области механики жидкости и газа и вычислительной математики. Профессор механики, доктор физико-математических наук. С 1969г. работает на механико-математическом факультете Казахского Национального Университета им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан.

Тел. +7 727 2518172, +7 701 667 88 59. E-mail: jakupovKB@mail.ru.

Почта: мкр. Айнабулак-3, д.158, кв.20, г.Алматы, 050014, Казахстан