ГЛАВА 2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРАХ МАТРИЦ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть A — действительная числовая квадратная матрица размеров $(n \times n)$. Ненулевой вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ размеров $(n \times 1)$, удовлетворяющий условию

$$AX = \lambda X, \tag{2.1}$$

называется *собственным вектором* матрицы A. Число λ в равенстве (2.1) называется *собственным значением*. Говорят, что собственный вектор X соответствует (принадлежит) собственному значению λ.

Равенство (2.1) равносильно однородной относительно X системе:

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad (X \neq 0). \tag{2.2}$$

Система (2.2) имеет ненулевое решение для вектора X (при известном λ) при условии $|A - \lambda E| = 0$. Это равенство есть *характеристическое уравнение*:

$$|A - \lambda E| = P_n(\lambda) = 0, \tag{2.3}$$

где $P_n(\lambda)$ — *характеристический многочлен n-й степени*. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *характеристического уравнения* (2.3) являются *собственными* (*характеристическими*) *значениями* матрицы A, а соответствующие каждому собственному значению λ_i, $i = 1, \ldots, n$, ненулевые векторы X^i, удовлетворяющие системе

$$AX^i = \lambda_i X^i \text{ или } (A - \lambda_i E)X^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.4}$$

являются собственными векторами.

Требуется найти собственные значения и собственные векторы заданной матрицы. Поставленная задача часто именуется *второй задачей линейной алгебры*.

Проблема собственных значений (частот) возникает при анализе поведения мостов, зданий, летательных аппаратов и других конструкций, характеризующихся малыми смещениями от положения равновесия, а также при анализе устойчивости численных схем. Характеристическое уравнение вместе с его собственными значениями и собственными векторами является основным в теории механических или электрических колебаний на макроскопическом или микроскопическом уровнях.

Различают *полную* и *частичную проблему собственных значений*, когда необходимо найти весь спектр (все собственные значения) и собственные векторы либо часть спектра, например: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ и $\min_i |\lambda_i(A)|$. Величина $\rho(A)$ называется *спектральным радиусом*.

Замечания

1. Если для собственного значения λ_i найден собственный вектор X^i, то вектор μX^i, где μ — произвольное число, также является собственным вектором, соответствующим этому же собственному значению λ_i.

2. Попарно различным собственным значениям соответствуют линейно независимые собственные векторы; k-кратному корню характеристического уравнения соответствует не более k линейно независимых собственных векторов.

3. Симметрическая матрица имеет полный спектр λ_i, $i = \overline{1, n}$, действительных собственных значений; k-кратному корню характеристического уравнения симметрической матрицы соответствует ровно k линейно независимых собственных векторов.

4. Положительно определенная симметрическая матрица имеет полный спектр действительных положительных собственных значений.

2.2. МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО РАЗВЕРТЫВАНИЯ

Полную проблему собственных значений для матриц невысокого порядка ($n \le 10$) можно решить методом непосредственного развертывания. В этом случае будем иметь

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = P_n(\lambda) = 0. \qquad (2.5)$$

Уравнение $P_n(\lambda) = 0$ является нелинейным (методы его решения изложены в главе 3). Его решение дает n, вообще говоря, комплексных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, при которых $P_n(\lambda_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Для каждого λ_i может быть найдено решение однородной системы $(A - \lambda_i E)X^i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Эти решения X^i, определенные с точностью до произвольной константы, образуют систему n, вообще говоря, различных векторов n-мерного пространства. В некоторых задачах несколько этих векторов (или все) могут совпадать.

Методика решения задачи

1. Для заданной матрицы A составить характеристическое уравнение (2.5):

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Для развертывания детерминанта $|A - \lambda E|$ можно использовать различные методы, например метод Крылова, метод Данилевского или другие [2], [9], [14].

2. Решить характеристическое уравнение и найти собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Для этого можно применить методы, изложенные в п. 3.1.

3. Для каждого собственного значения составить систему (2.4):

$$(A - \lambda_i E)X^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и найти собственные векторы X^i.

Замечание. Каждому собственному значению соответствует один или несколько векторов. Поскольку определитель $|A - \lambda_i E|$ системы равен нулю, то ранг матрицы системы меньше числа неизвестных: $\mathrm{rang}(A - \lambda_i E) = r < n$ и в системе имеется ровно r независимых уравнений, а $(n - r)$ уравнений являются зависимыми. Для нахождения решения системы следует выбрать r уравнений с r неизвестными так, чтобы определитель составленной системы был отличен от нуля. Остальные $(n - r)$ неизвестных следует перенести в правую часть и считать параметрами. Придавая параметрам различные значения, можно получить различные решения системы. Для простоты, как правило, попеременно полагают значение одного параметра равным 1, а остальные равными 0.

Пример 2.1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A \in R^{2\times 2}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

☐Воспользуемся методикой.

1. Запишем уравнение (2.5):

$$|A| - \lambda E = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

отсюда получаем характеристическое уравнение

$$P_2(\lambda) \equiv \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

2. Находим его корни (собственные значения): $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$.

3. Составим систему $(A - \lambda_i E)X^i = 0$, $i = 1, 2$, для каждого собственного значения и найдем собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -2 \\ -4 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{matrix} -2x_1^1 - 2x_2^1 = 0, \\ -4x_1^1 - 4x_2^1 = 0. \end{matrix}$$

Отсюда $x_1^1 = -x_2^1$. Если $x_2^1 = \mu$, то $x_1^1 = -\mu$. В результате получаем

$$X^1 = \left\{x_1^1, x_2^1\right\}^T = \left\{\mu(-1;1)\right\}^T.$$

Для $\lambda_2 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & -2 \\ -4 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{matrix} 4x_1^2 - 2x_2^2 = 0, \\ -4x_1^2 + 2x_2^2 = 0. \end{matrix}$$

Отсюда $x_2^2 = 2x_1^2$. Если $x_1^2 = \mu$, то $x_2^2 = 2\mu$. В результате получаем

$$X^2 = \left\{x_1^2, x_2^2\right\}^T = \left\{\mu(1;2)\right\}^T,$$

где μ — произвольное действительное число.■

Пример 2.2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□Воспользуемся методикой.

1. Запишем характеристическое уравнение (2.5):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (1-\lambda)[(2-\lambda)^2-1]=0.$$

2. Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 1$ (кратный корень), $\lambda_3 = 3$ — собственные значения матрицы.

3. Найдем собственные векторы.

Для $\lambda_{1,2} = 1$ запишем систему $(A - \lambda_{1,2}E) \cdot X^{1,2} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{1,2} \\ x_2^{1,2} \\ x_3^{1,2} \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $\operatorname{rang}(A - \lambda_{1,2}E) = 1$, в системе имеется одно независимое уравнение $x_1^{1,2} - x_2^{1,2} + x_3^{1,2} = 0$ или $x_1^{1,2} = x_2^{1,2} - x_3^{1,2}$.

Полагая $x_2^{1,2} = 1$, $x_3^{1,2} = 0$, получаем $x_1^{1,2} = 1$ и собственный вектор $X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Полагая $x_2^{1,2} = 0$, $x_3^{1,2} = 1$, получаем $x_1^{1,2} = -1$ и другой собственный вектор $X^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что оба собственных вектора линейно независимы.

Для собственного значения $\lambda_3 = 3$ запишем систему $(A - \lambda_3 E) \cdot X^3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $\operatorname{rang}(A - \lambda_3 E) = 2$, то выбираем два уравнения:

$$-x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 = 0, \quad -2x_3^3 = 0.$$

Отсюда $x_3^3 = 0$, $x_1^3 = -x_2^3$. Полагая $x_2^3 = 1$, получаем $x_1^3 = -1$ и собственный вектор $X^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ■

2.3. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Для решения частичной проблемы собственных значений и собственных векторов в практических расчетах часто используется метод итераций (*степенной метод*). На его основе можно определить приближенно собственные значения матрицы A и *спектральный радиус* $\rho(A) = \max|\lambda_i(A)|$.

Пусть матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов X^i, $i=\overline{1,n}$, и собственные значения матрицы A таковы, что:

$$\rho(A) = |\lambda_1(A)| > |\lambda_2(A)| \geq \ldots \geq |\lambda_n(A)|.$$

Методика решения задачи

1. Выбрать произвольное начальное (нулевое) приближение собственного вектора $X^{1(0)}$ (второй индекс в скобках здесь и ниже указывает номер приближения, а первый индекс без скобок соответствует номеру собственного значения). Положить $k = 0$.

2. Найти $X^{1(1)} = AX^{1(0)}$, $\lambda_1^{(1)} = \dfrac{x_i^{1(1)}}{x_i^{1(0)}}$, где i — любой номер $1 \leq i \leq n$, и положить $k = 1$.

3. Вычислить $X^{1(k+1)} = AX^{1(k)}$.

4. Найти $\lambda_1^{(k+1)} = \dfrac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}$, где $x_i^{1(k+1)}$, $x_i^{1(k)}$ — соответствующие координаты векторов $X^{1(k+1)}$ и $X^{1(k)}$. При этом может быть использована любая координата с номером $i, i=\overline{1,n}$.

5. Если $\Delta = \left|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}\right| \leq \varepsilon$, процесс завершить и положить $\lambda_1 \cong \lambda_1^{(k+1)}$. Если $\Delta > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

Замечания

1. Процесс последовательных приближений

$$X^{1(1)} = AX^{1(0)}, X^{1(2)} = AX^{1(1)} = A^2X^{1(0)}, \ldots,$$
$$X^{1(k)} = AX^{1(k-1)} = A \cdot A^{k-1}X^{1(0)} = A^kX^{1(0)}, \ldots$$

сходится, т. е. при $k \to \infty$ вектор $X^{1(k)}$ стремится к собственному вектору X^1. Действительно, разложим $X^{1(0)}$ по всем собственным векторам:

$$X^{1(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i X^i.$$

Так как, согласно (2.4), $AX^i = \lambda_i X^i$, то

$$AX^{1(0)} = X^{1(1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i X^i; \quad AX^{1(1)} = A^2 X^{1(0)} = X^{1(2)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^2 X^i, \ldots,$$

$$A^k X^{1(0)} = X^{1(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k X^i = \lambda_1^k \left[c_1 X^1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k X^2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k X^n \right].$$

При большом k дроби $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$, ..., $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k$ малы, и поэтому $A^k X^{1(0)} = c_1 \lambda_1^k X^1$, т. е. $X^{1(k)} \to X^1$ при $k \to \infty$. Одновременно $\lambda_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}$.

2. Вместо применяемой в п. 4 методики формулы для $\lambda_1^{(k+1)}$ можно взять среднее арифметическое соответствующих отношений для разных координат.

3. Метод может использоваться и в случае, если наибольшее по модулю собственное значение матрицы A является кратным, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s$, и $|\lambda_1| > |\lambda_k|$ при $k > s$.

4. При неудачном выборе начального приближения $X^{1(0)}$ предел отношения $\frac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}$ может не существовать. В этом случае следует задать другое начальное приближение.

5. Рассмотренный итерационный процесс для λ_1 сходится линейно с параметром $c = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ и может быть очень медленным. Для его ускорения используется алгоритм Эйткена.

6. Если $A = A^T$ (матрица A симметрическая), то сходимость процесса при определении $\rho(A)$ может быть ускорена.

7. Используя λ_1, можно определить следующее значение λ_2 по формуле

$$\lambda_2 = \frac{x_i^{1(k+1)} - \lambda_1 x_i^{1(k)}}{x_i^{1(k)} - \lambda_1 x_i^{1(k-1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта формула дает грубые значения для λ_2, так как значение λ_1 является приближенным. Если модули всех собственных значений различны, то на основе последней формулы можно вычислять и остальные λ_j ($j = 3, 4, \ldots, n$).

8. После проведения некоторого числа итераций рекомендуется «гасить» растущие компоненты получающегося собственного вектора. Это осуществляется нормировкой вектора, например по формуле $\frac{X^{1(k)}}{\| X^{1(k)} \|_1}$.

Пример 2.3. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ найти спектральный радиус степенным методом с точностью $\varepsilon = 0{,}1$.

□1. Выбирается начальное приближение собственного вектора $X^{(0)} = (1; 1; 1)^T$. Положим $k = 0$.

2. Найдем

$$X^{1(1)} = AX^{1(0)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{1(1)}}{x_1^{1(0)}} = \frac{8}{1} = 8,$$

положим $k = 1$.

Таблица 2.1

k	$x_1^{1(k)}$	$x_2^{1(k)}$	$x_3^{1(k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	$\left\|\lambda_1^{(k)}-\lambda_1^{(k-1)}\right\|$
0	1	1	1	—	—
1	8	6	6	8	—
2	58	38	40	7,25	0,75
3	408	250	274	7,034	0,116
4	2838	1682	1888	6,9559	0,078 < ε

3. Вычислим

$$X^{1(2)} = AX^{1(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 38 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{x_1^{1(2)}}{x_1^{1(1)}} = \frac{58}{8} = 7,25.$$

5. Так как $\left|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}\right| = 0,75 > \varepsilon,$ то процесс необходимо продолжить.

Результаты вычислений удобно представить в виде таблицы 2.1.

Точность по $\lambda_1^{(k)}$ достигнута на четвертой итерации. Таким образом, в качестве приближенного значения λ_1 берется 6,9559, а в качестве собственного вектора принимается $X^1 = (2838,\ 1682,\ 1888)^T$. Так как собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя, то X^1 лучше пронормировать, т. е. поделить все его компоненты на величину нормы. Для рассматриваемого примера получим

$$X^1 = \frac{1}{2838}\begin{pmatrix} 2838 \\ 1682 \\ 1888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 0,5927 \\ 0,6652 \end{pmatrix}.$$

Согласно замечаниям, в качестве собственного значения λ_1 можно взять не только отношение $\frac{x_1^{1(4)}}{x_1^{1(3)}} = \frac{2838}{408} = 6,9559,$ но и $\frac{x_2^{1(4)}}{x_2^{1(3)}} = \frac{1682}{250} = 6,7280;$ $\frac{x_3^{1(4)}}{x_3^{1(3)}} = \frac{1888}{274} = 6,8905,$ а также их среднее арифметическое $\frac{6,9559 + 6,728 + 6,8905}{3} = 6,8581.$■

Пример 2.4. Найти максимальное по модулю собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и соответствующий собственный вектор.

□1. Зададим начальное приближение $X^{1(0)} = (1; -1; 1)^T$ и $\varepsilon = 0,0001$.

Выполним расчеты согласно методике (см. табл. 2.2).

Таблица 2.2

k	$x_1^{1(k)}$	$x_2^{1(k)}$	$x_3^{1(k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	$\lvert\lambda_1^{(k)}-\lambda_1^{(k-1)}\rvert$
0	1	–1	1	—	—
1	4	–4	1	4	—
2	13	–13	1	3,25	0,75
3	40	–40	1	3,0769	0,17307
4	121	–121	1	3,025	0,0519
5	364	–364	1	3,00826	0,01673
6	1093	–1093	1	3,002747	0,005512
7	3280	–3280	1	3,000914	0,00183
8	9841	–9841	1	3,000304	0,000609
9	29524	–29524	1	3,000101	0,000202
10	88573	–88573	1	3,000034	0,000067

В результате получено собственное значение $\lambda_1 \cong 3{,}00003$ и собственный вектор $X^1 = (88573;\ -88573;\ 1)^T$ или после выполнения нормировки $X^1 = \frac{1}{88573}(88573; -88573; 1)^T = (1; -1; 0{,}0000113)^T$ (сравните с примером 2.2).■

2.4. МЕТОД ВРАЩЕНИЙ

Метод используется для решения полной проблемы собственных значений симметрической матрицы и основан на преобразовании подобия исходной матрицы $A \in R^{n\times n}$ с помощью ортогональной матрицы H.

Две матрицы A и $A^{(i)}$ называются *подобными* ($A \sim A^{(i)}$ или $A^{(i)} \sim A$), если $A^{(i)} = H^{-1}AH$ или $A = HA^{(i)}H^{-1}$, где H — невырожденная матрица.

В методе вращений в качестве H берется *ортогональная матрица*, такая, что $HH^T = H^TH = E$, т. е. $H^T = H^{-1}$. В силу свойства ортогонального преобразования евклидова норма исходной матрицы A не меняется. Для преобразованной матрицы $A^{(i)}$ сохраняется ее след и собственные значения λ_i:

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \mathrm{tr}A^{(i)}.$$

При реализации метода вращений преобразование подобия применяется к исходной матрице A многократно:

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^{-1}A^{(k)}H^{(k)} = (H^{(k)})^T A^{(k)}H^{(k)},\quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.6}$$

Формула (2.6) определяет итерационный процесс, где начальное приближение $A^{(0)} = A$. На каждой k-й итерации для некоторого выбираемого при решении задачи недиагонального элемента $a_{ij}^{(k)}$, $i \neq j$, определяется ортогональная матрица $H^{(k)}$, приводящая этот элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ (а также и $a_{ji}^{(k+1)}$) к нулю. При этом на каждой итерации в качестве $a_{ij}^{(k)}$ выбирается наибольший по модулю. Матрица $H^{(k)}$, называемая *матрицей вращения* Якоби, зависит от угла $\varphi^{(k)}$ и имеет вид

$$H^{(k)} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cos\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & -\sin\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \sin\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & \cos\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \uparrow & \qquad\qquad & \uparrow \\ i\text{-й столбец} & & j\text{-й столбец} \end{array}
\end{array}$$

В данной ортогональной матрице элементы на главной диагонали единичные, кроме $h_{ii}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)}$ и $h_{jj}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)}$, а $h_{ij}^{(k)} = -\sin\varphi^{(k)}$, $h_{ji}^{(k)} = \sin\varphi^{(k)}$ (h_{ij} — элементы матрицы H).

Угол поворота $\varphi^{(k)}$ определяется по формуле

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi^{(k)} = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} = \bar{P}_k; \quad \varphi^{(k)} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, \bar{P}_k, \tag{2.7}$$

где $|2\varphi^{(k)}| \le \frac{\pi}{2}$, $i < j$ (a_{ij} выбирается в верхней треугольной наддиагональной части матрицы A). Заметим, что при $a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)}$ получается $\varphi^{(k)} = \frac{\pi}{4}$.

В процессе итераций сумма квадратов всех недиагональных элементов $\sigma(A^{(k)})$ при возрастании k уменьшается, так что $\sigma(A^{(k+1)}) < \sigma(A^{(k)})$. Элементы $a_{ij}^{(k)}$, приведенные к нулю на k-й итерации, на последующей итерации немного возрастают. При $k \to \infty$ получается монотонно убывающая ограниченная снизу нулем последовательность $\sigma(A^{(1)}) > \sigma(A^{(2)}) > \ldots > \sigma(A^{(k)})$. Поэтому $\sigma(A^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$. Это и означает сходимость метода. При этом

$$A^{(k)} \to \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

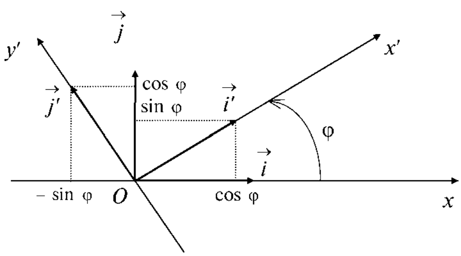

Рис. 2.1

Замечание. В двумерном пространстве с введенной в нем системой координат Oxy с ортонормированным базисом $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ матрица вращения легко получается из рисунка 2.1, где система координат $Ox'y'$ повернута на угол φ:

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$

$$\vec{j}' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi.$$

Таким образом, для компонент $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ будем иметь

$$\left(\vec{i}', \vec{j}'\right) = \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что в двумерном пространстве матрица вращения имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при $n = 2$ для решения задачи требуется одна итерация.

Методика решения задачи

1. Положить $k = 0$, $A^{(0)} = A$ и задать $\varepsilon > 0$.

2. Выделить в верхней треугольной наддиагональной части матрицы $A^{(k)}$ максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(k)}$, $i < j$.

Если $\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le \varepsilon$ для всех $i \ne j$, процесс завершить. Собственные значения определяются по формуле

$$\lambda_i(A^{(k)}) = a_{ii}^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Собственные векторы X^i находятся как i-е столбцы матрицы, получающейся в результате перемножения:

$$\nu_k = H^{(0)}H^{(1)}H^{(2)} \ldots H^{(k-1)} = (X^1, X^2, X^3, \ldots, X^n).$$

Если $\left|a_{ij}^{(k)}\right| > \varepsilon$, процесс продолжается.

3. Найти угол поворота по формуле

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \quad \left(\text{при } a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)} \text{ получается } \varphi^{(k)} = \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Составить матрицу вращения $H^{(k)}$.

5. Вычислить очередное приближение

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^T A^{(k)} H^{(k)}.$$

Положить $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

Замечания

1. Используя обозначение $\bar{P}_k = \dfrac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}$, можно в п. 3 методики вычислять элементы матрицы вращения по формулам:

$$\sin\varphi^{(k)} = \operatorname{sign}\bar{P}_k \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{P}_k^{\,2}}}\right)}; \quad \cos\varphi^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{P}_k^{\,2}}}\right)}.$$

2. Контроль правильности выполнения действий по каждому повороту осуществляется путем проверки сохранения следа преобразуемой матрицы.

Пример 2.5. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ методом вращений найти собственные значения и собственные векторы.

□1. Положим $k=0$, $A^{(0)}=A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\varepsilon=10^{-10}$.

2^0. Выше главной диагонали имеется только один элемент $a_{ij}=a_{12}=1$.

3^0. Находим угол поворота матрицы по формуле (2.7), используя в расчетах 11 цифр после запятой в соответствии с заданной точностью:

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(0)}=\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}=\frac{2}{2-3}=-2;$$

$$\sin\varphi^{(0)}=-0{,}52573111212;\quad \cos\varphi^{(0)}=0{,}85065080835.$$

4^0. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(0)}=\begin{pmatrix}\cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)}\\ \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}85065080835 & 0{,}52573111212\\ -0{,}52573111212 & 0{,}85065080835\end{pmatrix}.$$

5^0. Выполним первую итерацию:

$$A^{(1)}=(H^{(0)})^T A^{(0)} H^{(0)}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}85065080835 & -0{,}52573111212\\ 0{,}52573111212 & 0{,}85065080835\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}85065080835 & 0{,}52573111212\\ -0{,}52573111212 & 0{,}85065080835\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1{,}38196601125 & -4{,}04620781325\cdot 10^{-12}\\ -4{,}04587474634\cdot 10^{-12} & 3{,}61803398874\end{pmatrix}.$$

Очевидно, след матрицы с заданной точностью сохраняется, т. е.

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ii}^{(1)}=\sum_{i=1}^{2} a_{ii}^{(0)}=5.$$

Положим $k=1$ и перейдем к п. 2.

2^1. Максимальный по модулю наддиагональный элемент

$$|a_{12}|=4{,}04620781325\cdot 10^{-12}<\varepsilon=10^{-10}.$$

Для решения задачи (подчеркнем, что $n=2$) с принятой точностью потребовалась одна итерация, полученную матрицу можно считать диагональной. Найдены следующие собственные значения и собственные векторы:

$$\lambda_1=1{,}38196601125;\quad \lambda_2=3{,}61803398874;$$

$$X^1=\begin{pmatrix}0{,}85065080835\\ -0{,}52573111212\end{pmatrix};\quad X^2=\begin{pmatrix}0{,}52573111212\\ 0{,}85065080835\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

Пример 2.6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

□1. Положим $k = 0$, $A^{(0)} = A$, $\varepsilon = 0{,}001$.

2^0. Выделим максимальный по модулю элемент в наддиагональной части: $a_{13}^{(0)} = 2$. Так как $a_{13} = 2 > \varepsilon = 0{,}001$, то процесс продолжается.

3^0. Находим угол поворота:

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot a_{13}^{(0)}}{a_{11}^{(0)} - a_{33}^{(0)}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{5-3} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2 = 0{,}553574;$$

$$\sin\varphi^{(0)} = 0{,}52573;\ \ \cos\varphi^{(0)} = 0{,}85065.$$

4^0. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}85065 & 0 & -0{,}52573 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}52573 & 0 & 0{,}85065 \end{pmatrix}.$$

5^0. Выполним первую итерацию:

$$A^{(1)} = (H^{(0)})^T A^{(0)} H^{(0)} = \begin{pmatrix} 6{,}236 & 1{,}376 & 2{,}33\cdot 10^{-6} \\ 1{,}376 & 4 & 0{,}325 \\ 2{,}33\cdot 10^{-6} & 0{,}325 & 1{,}764 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 1$ и перейдем к п. 2.

2^1. Максимальный по модулю наддиагональный элемент $a_{12}^{(1)} = 1{,}376$. Так как $a_{12}^{(1)} > \varepsilon$, процесс продолжается.

3^1. Найдем угол поворота:

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)} - a_{22}^{(1)}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot 1{,}376}{6{,}236-4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1{,}230769 = 0{,}444239;$$

$$\sin\varphi^{(1)} = 0{,}429770;\ \ \cos\varphi^{(1)} = 0{,}902937.$$

4^1. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}902937 & -0{,}429770 & 0 \\ 0{,}429770 & 0{,}902937 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5^1. Выполним вторую итерацию:

$$A^{(2)} = (H^{(1)})^T A^{(1)} H^{(1)} = \begin{pmatrix} 6{,}891 & 2{,}238\cdot 10^{-4} & 0{,}14 \\ 2{,}238\cdot 10^{-4} & 3{,}345 & 0{,}293 \\ 0{,}14 & 0{,}293 & 1{,}764 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 2$ и перейдем к п. 2.

2^2. Максимальный по модулю наддиагональный элемент $a_{23}^{(2)} = 0{,}293 > \varepsilon$.

3^2. Найдем угол поворота:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)} - a_{33}^{(2)}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot 0{,}293}{3{,}345-1{,}764} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}0{,}370651 = 0{,}177476;$$

$$\sin\varphi^{(2)} = 0{,}1765460;\ \ \cos\varphi^{(2)} = 0{,}9842924.$$

4^2. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9842924 & -0{,}1765460 \\ 0 & 0{,}1765460 & 0{,}9842924 \end{pmatrix}.$$

5^2. Выполним третью итерацию:

$$A^{(3)} = (H^{(2)})^T A^{(2)} H^{(2)} = \begin{pmatrix} 6{,}891 & 0{,}025 & 0{,}138 \\ 0{,}025 & 3{,}398 & 3{,}375 \cdot 10^{-7} \\ 0{,}138 & 3{,}375 \cdot 10^{-7} & 1{,}711 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 3$ и перейдем к п. 2.
2^3. Максимальный по модулю наддиагональный элемент $a_{13}^{(3)} = 0{,}138 > \varepsilon$.
3^3. Найдем угол поворота:

$$\varphi^{(3)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot a_{13}^{(3)}}{a_{11}^{(3)} - a_{33}^{(3)}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 0{,}138}{6{,}891 - 1{,}711} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0{,}05328 = 0{,}026615;$$

$\sin \varphi^{(3)} = 0{,}026611;\ \cos \varphi^{(3)} = 0{,}999646.$

4^3. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}999646 & 0 & -0{,}026611 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}026611 & 0 & 0{,}999646 \end{pmatrix}.$$

5^3. Выполним четвертую итерацию:

$$A^{(4)} = (H^{(3)})^T A^{(3)} H^{(3)} = \begin{pmatrix} 6{,}895 & 0{,}025 & 8{,}406 \cdot 10^{-6} \\ 0{,}025 & 3{,}398 & -6{,}649 \cdot 10^{-4} \\ 8{,}406 \cdot 10^{-6} & -6{,}649 \cdot 10^{-4} & 1{,}707 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 4$ и перейдем к п. 2.
2^4. Так как $a_{12}^{(4)} = 0{,}025 > \varepsilon$, процесс повторяется.
3^4. Найдем угол поворота:

$$\varphi^{(4)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot a_{12}^{(4)}}{a_{11}^{(4)} - a_{22}^{(4)}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 0{,}025}{6{,}895 - 3{,}398} = 0{,}0071484;$$

$\sin \varphi^{(4)} = 0{,}0071483;\ \cos \varphi^{(4)} = 0{,}9999744.$

4^4. Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(4)} = \begin{pmatrix} 0{,}9999744 & -0{,}0071483 & 0 \\ 0{,}0071483 & 0{,}9999744 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5^4. Выполним пятую итерацию:

$$A^{(5)} = (H^{(4)})^T A^{(4)} H^{(4)} = \begin{pmatrix} 6{,}895 & 4{,}774 \cdot 10^{-7} & 3{,}653 \cdot 10^{-6} \\ 4{,}774 \cdot 10^{-7} & 3{,}398 & -6{,}649 \cdot 10^{-4} \\ 3{,}653 \cdot 10^{-6} & -6{,}649 \cdot 10^{-4} & 1{,}707 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 5$ и перейдем к п. 2.

2^5. Так как наибольший по модулю наддиагональный элемент удовлетворяет условию $|-6{,}649 \cdot 10^{-4}| < \varepsilon = 0{,}001$, процесс завершается.

Собственные значения:

$$\lambda_1 \cong a_{11}^{(5)} = 6{,}895; \;\; \lambda_2 \cong a_{22}^{(5)} = 3{,}398; \;\; \lambda_3 \cong a_{33}^{(5)} = 1{,}707.$$

Для нахождения собственных векторов вычислим

$$\nu_5 = H^{(0)} \cdot H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot H^{(3)} \cdot H^{(4)} = \begin{pmatrix} 0{,}753 & -0{,}458 & -0{,}473 \\ 0{,}432 & 0{,}886 & -0{,}171 \\ 0{,}497 & -0{,}076 & 0{,}864 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0{,}753 \\ 0{,}432 \\ 0{,}497 \end{pmatrix}, \;\; X^2 = \begin{pmatrix} -0{,}458 \\ 0{,}886 \\ -0{,}076 \end{pmatrix}, \;\; X^3 = \begin{pmatrix} -0{,}473 \\ -0{,}171 \\ 0{,}864 \end{pmatrix},$$

или после нормировки

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5737 \\ 0{,}660 \end{pmatrix}, \;\; X^2 = \begin{pmatrix} -0{,}517 \\ 1 \\ -0{,}0858 \end{pmatrix}, \;\; X^3 = \begin{pmatrix} -0{,}5474 \\ -0{,}1979 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для следующих матриц с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ определить методами вращения и непосредственного развертывания собственные значения и собственные векторы. Методом итераций найти спектральный радиус.

$$1)\begin{pmatrix} 2{,}1 & 1 & 1{,}1 \\ 1 & 2{,}6 & 1{,}1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 3{,}1 \end{pmatrix}; \quad 2)\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1 & 1{,}4 \\ 1 & 2{,}3 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1{,}4 & 3{,}4 \end{pmatrix}; \quad 3)\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}3 \end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 1{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}6 \end{pmatrix}; \quad 5)\begin{pmatrix} 2{,}2 & 1 & 2{,}2 \\ 1 & 2{,}7 & 1{,}2 \\ 2{,}2 & 1{,}2 & 3{,}2 \end{pmatrix}; \quad 6)\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}3 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix};$$

$$7)\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 1{,}4 \end{pmatrix}; \quad 8)\begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 1{,}7 \end{pmatrix}; \quad 9)\begin{pmatrix} 2{,}3 & 1 & 1{,}3 \\ 1 & 2{,}8 & 1{,}3 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 3{,}3 \end{pmatrix}.$$