**Вариационное исчисление и методы оптимизации**

**Специальность – Математика**

**Курс – 3, семестр - 5**

**Часть 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

**Лекция № 8. Задачи на условный экстремум. 1.**

Ранее рассматривались различные задачи минимизации функционалов на множестве функций, удовлетворяющих каким-либо граничным условиям, либо вообще без каких-либо ограничений. Однако на практике часто возникают задачи, когда на неизвестные функции наложены какие-то дополнительные ограничения в виде равенств. В настоящей лекции мы рассмотрим задачи с ограничениями интегрального характера, которые называются изопериметрическими. Для решения таких задач применяется метод множителей Лагранжа. Получаемые в результате дифференциальные уравнения Эйлера включают с себя дополнительные неизвестные величины – множители Лагранжа. Эти уравнения решаются совместно с заданными условиями связи. В качестве примера рассматривается некоторая вариационная задача, связанная с одной спектральной задачей.

**8.1. Задачи с изопериметрическими ограничениями**

Рассматривается функционал

 (8.1)

где *F* – известная функция своих аргументов, которая предполагается достаточно гладкой. Кроме того, имеются граничные условия

 (8.2)

а также дополнительное соотношение

 (8.3)

называемое *изопериметрическим условием*. Здесь *G* – известная функция своих аргументов, которая предполагается достаточно гладкой а  и  – заданные числа.

Ставится следующая задача.

**Задача 8.1**. *Найти функцию v*, *доставляющую экстремум функционалу* (8.1) *при   
выполнении граничных условий* (8.2) *и изопериметрического условия* (8.3).

Для решения этой задачи воспользуемся описанной ранее методикой, дополненной методом множителей Лагранжа.

**8.2. Метод множителей Лагранжа**

Для решения всех предшествующих задач мы использовали вариационный метод. При этом предполагалось, что известна точка *и* экстремума исследуемого функционала *I*. Затем осуществлялась ее вариация, т.е. рассматривалась некоторая функция  где *σ* есть число, а в качестве *h* выбиралась произвольная функция, обращающаяся в нуль там, где задана искомая функция. В частности, если для стандартной задачи Лагранжа выбрать функцию *h* равной нулю на концах данного отрезка, то соответствующая ей функция  будет удовлетворять граничным условиям (8.2). Далее определялась функция одной числовой переменной  которая в точке  имеет экстремум. Дальнейшее решение задачи сводится к приравниванию нулю производной от функции *f* в этой точке.

|  |
| --- |
| **Вопрос**: Почему указанный подход не применим для данной задачи? |

Для задачи 8.1 не совсем очевидно, каким способом можно обеспечить справедливость изопериметрического условия (8.3), поскольку определенная выше функция  этому ограничению, вообще говоря, не удовлетворяет. Для преодоления указанных трудностей мы будем брать более сложную вариацию функции.

Рассмотрим функцию



где  и  есть некоторые числа, а функции  и  удовлетворяют граничным условиям

 (8.4)

Тогда для функции  будут наверняка выполнены соотношения (8.2). Имея, в принципе, конкретную функцию *и* – решение задачи 8.1 (мы ее пока не знаем, но это что-то конкретное), и фиксированные произвольным образом функции  и  (лишь бы выполнялись указанные краевые условия), мы определим функции двух переменных

** **

Рассмотрим следующую вспомогательную экстремальную задачу:

**Задача 8.2**. *Найти пару чисел* , *доставляющую экстремум функции*  *на множестве таких пар* , *которые удовлетворяют равенству* ****

**Вопрос**: *Как следует решать задачу* 8.2?

В соответствии с *методом множителей Лагранжа* определим функцию трех переменных

****

называемую *функцией Лагранжа*. При этом число *λ* называют *множителем Лагранжа*. Очевидно, справедливо равенство

****

для любых *λ* и любых пар чисел , удовлетворяющих равенству **** Пусть пара  является решение задачи 8.2. Тогда она минимизирует функцию Лагранжа по первым двум аргументам для любых значений третьего аргумента. Идея метода множителей Лагранжа состоит в приравнивании нулю частных производных от функции *L* по первым двум аргументам при **** В результате получаем два равенства

**** (8.5)

Итак, для нахождения трех неизвестных величин **** имеются два равенства (8.5) и условие ****

**Пример 8.1**. *Среди всех прямоугольников заданного периметра выбрать тот, что имеет максимальную площадь*. Пусть прямоугольник имеет стороны  Его площадь равна  а периметр есть Таким образом, требуется минимизировать функцию **** а входящая в равенство **** функция *g* определяется по формуле **** Следуя методу множителей Лагранжа составляем функцию Лагранжа

****

Условия (8.5) соответствуют равенствам

****

откуда следует  Подставляя эти значения в условие **** будем иметь **** значит,  Таким образом, прямоугольником заданного периметра максимальной площади является квадрат.

Возвращаемся к исследованию задачи 8.1. Учитывая равенства

** **

а также сделанное ранее предположение о том, что *и* есть решение задачи 8.1, заключаем, что пара  есть решение задачи 8.2. Идея метода множителей Лагранжа состоит в приравнивании нулю частных производных от функции *L* по первым двум аргументам при ****

Определим функцию

 (8.6)

Тогда функция Лагранжа может быть представлена в следующем виде

****

Найдем частные производные

****

Получаем

****

где

** **

Интегрируя по частям, получаем

****

Учитывая условия (8.4), будем иметь



В результате получаем равенство



Это соотношение справедливо для любых функций , удовлетворяющих краевым условиям (8.4). Пользуясь основной леммой вариационного исчисления, будем иметь

 (8.7)

Полученное соотношение является уравнением Эйлера для вариационной задачи с изопериметрическим ограничением.

**Теорема 8.1**. *Решение задачи* 8.1 *удовлетворяет соотношению* (8.7).

Рассмотрим свойства полученного соотношения.

|  |
| --- |
| **Вопрос**: Достаточно ли полученного результата для нахождения решения задачи? |

Соотношение (8.7) с функцией *Н*,определенной по формуле (8.6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение включает в себя две произвольных постоянных и зависит также от множителя Лагранжа *λ*. Относительно этих трех неизвестных мы имеем два граничных условия, а также изопериметрическое условие. Таким образом, имеющейся информации, в принципе, достаточно для практического решения задачи.

|  |
| --- |
| **Вопрос**: Каким образом осуществляется практическое нахождение решения задачи? |

Решая дифференциальное уравнение второго порядка (8.7), можно, в принципе, определить функциональную зависимость

 (8.8)

где известна функция Ф своих аргументов. Для нахождения трех неизвестных констант, входящих в последнюю формулу, мы имеем два граничных условия, а также изопериметрическое условие. В частности, необходимость выполнения краевых условий (8.2) приводит к равенствам

 (8.9)

 (8.10)

Для справедливости изопериметрического условия (8.3) полагаем

 (8.11)

Решая систему трех (вообще говоря, нелинейных) алгебраических уравнений (8.9) – (8.11) относительно трех неизвестных констант , находим их значения. После этого по формуле (8.7) можно найти решение поставленной задачи.

Итак, алгоритм решения конкретной задачи 8.1 включает в себя следующие этапы:

|  |
| --- |
| 1. Для конкретной задачи 8.1 выписываем вид функций *F* и *G* и констант . 2. В соответствии с формулой (8.6) выписываем функцию *Н*. 3. Зная функцию *Н*, записываем конкретный вид уравнения Эйлера (8.7). 4. Решая конкретное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида (8.7), находим его общее решение в форме (8.8), определяя явный функции Ф. 5. Подставляя найденное общее решение в соотношения (8.9) – (8.11), получаем конкретные алгебраические относительно констант . 6. Решая конкретную систему трех алгебраических уравнений (8.9) – (8.11), находим константы . 7. Подставляя найденные значения констант  в формулу (8.8) с конкретной функцией Ф, находим искомую функцию |

**Замечание 8.1**. Естественно, как и во всех предшествующих случаях, мы имеем дело с необходимыми условиями экстремума. Таким образом, не всякая полученная указанным выше способом функция является решение задачи 8.1, хотя решение этой задачи наверняка может быть найдено описанным методом. Кроме того, мы не знаем, минимизируется рассматриваемый функционал или максимизируется.

Воспользуемся описанной методикой для решения конкретной задачи типа 8.1.

**8.3. Одна спектральная задача**

Рассматривается функционал

 (8.12)

Задаются краевые условия

 (8.13)

а также изопериметрическое условие

 (8.14)

Ставится следующая вариационная задача:

**Задача 8.3**. *Найти функцию v*, *доставляющую экстремум функционалу* (8.12) *при   
выполнении граничных условий* (8.13) *и изопериметрического условия* (8.14).

Для решения этой задачи воспользуемся описанным выше алгоритмом.

1. Для преобразования этой задачи к задаче 8.1 определяем функции трех переменных



а также константы



2. В соответствии с формулой (8.6) находим функцию



3. Находим производные



Тогда уравнение Эйлера (8.7) принимает вид

 (8.15)

4. Уравнение (8.15) пополняется краевыми условиями

 (8.16)

и изопериметрическим условием

 (8.17)

Итак, для нахождения искомой функции  и множителя Лагранжа (числа) *λ* имеются дифференциальное уравнение второго порядка (8.15) с двумя краевыми условиями (8.16), а также дополнительное равенство (8.17).

5. Уравнение (8.15) может иметь разные представления общего решения в зависимости от знака числа *λ*. Для установления его знака проведем предварительный анализ задачи (8.15) – (8.17). Умножая равенство (8.15) на функцию *и* и интегрируя полученное выражение, будем иметь

 (8.18)

Преобразуя первый интеграл с помощью интегрирования по частям, будем иметь



в силу условий (8.16).

Отметим, что второй интеграл в равенстве (8.18) равен единице. В результате соотношение (8.18) принимает вид

. (8.19)

Таким образом, мы заключаем, что число *λ* не положительно.

Если же оно равно нулю, то из равенства (8.19) следует, что  т.е. функция *и* принимает постоянное значение. Из краевых условий (8.16) тогда следует, что  Однако в этом случае никак не может выполняться равенство (8.17). В результате заключаем, что число *λ* отрицательно.

6. Общее решение уравнения (8.15) для отрицательных значений *λ* имеет вид

 (8.20)

где  – произвольные постоянные. Пользуясь первым из условий (8.16), находим

.

Пользуясь вторым равенством (8.16), получаем



Учитывая, что в случае равенства нулю константы  согласно (8.20) установим, что  А это значение противоречит равенству (8.17). Таким образом, приходим к соотношению



что дает значения

**** (8.21)

Таким образом, существует бесконечное множество значений множителя Лагранжа *λ*, при которых краевая задача (8.15), (8.16) имеет отличное от нуля решение

, (8.22)

где  – произвольные постоянные.

7. Константу  подбираем таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия (8.17). Имеем



Отсюда находим



В результате определяем функции

. (8.23)

Итак, (8.15) – (8.17) имеет бесконечное множество решений – функций , определяемых формулами (8.23), и множителей Лагранжа , характеризуемых равенствами (8.21).

8. Итак, решение задачи 8.3 следует искать среди решений системы условий оптимальности (8.15) – (8.17). Сравнивая соотношения (8.12) и (8.19), приходим к равенству

.

Минимальное из этих значений, т.е.  и будет минимумом функционала в задаче 8.3. Таким образом, решением этой задачи оказывается функция



**Замечание 8.2**. Задача определения нетривиальных (т.е. отличных от нуля) решений дифференциального уравнения (8.15) с краевыми условиями (8.16) называется *задачей Штурма–Лиувилля*. Значения , удовлетворяющие равенствам (8.21), называют собственными числами, а соответствующие функции , определяемые по формулам (8.22) – собственными функциями этой задачи. При этом только те из них, которые задаются формулами (8.23), удовлетворяют изопериметрическому условию (8.17). Характерно, что только эти *функцию образуют ортонормированное семейство*, т.е. такое множество функций, что интеграл по заданному интервалу от произведения любых двух различных функций равен нулю, а любых двух равных функций – единице. Совокупность всех собственных чисел  образуют *спектр* оператора, определяющего рассматриваемую краевую задачу.

**Замечание 8.3**. Характерно, что в данном случае система (8.15) – (8.17) допускает существенно не единственное решение . Среди них решением задачи 8.3 оказывает первое значение, соответствующее первому собственному числу задачи Штурма*–*Лиувилля. Таким образом, мы имеем дело с необходимым, но не достаточным условием экстремума. Однако таким же свойством обладает и простейшее условие экстремума функции – равенство нулю ее производной в точке экстремума.

**Замечание 8.4**. Задачи 8.3 можно придать естественный физический смысл. Рассмотрим процесс колебания пружины на интервале времени [0,*Т*]. Данный процесс характеризуется функцией  выражающей отклонение пружины положения равновесия в данный момент времени. Оценим кинетическую и потенциальную энергии пружины. Кинетическая энергия определяется по формуле  где *m* – масса пружины, а *v* – ее скорость. Скорость является производной от пути *у*, т.е.  В результате получаем формулу  Если бы скорость была постоянной, то кинетическая энергия системы на заданном интервале времени была бы равна произведению величины *К* на длину интервала времени *Т*. В случае переменной скорость общая кинетическая энергия получается в результате интегрирования по времени функции *К*, что дает величину



Потенциальная энергия равна произведению силы на пройденный путь, т.е.  В соответствии с законом Гука, сила упругости, действующая на пружину, пропорциональна отклонению пружины от состояния равновесия, т.е.  где *k* – есть коэффициент упругости. В результате получаем формулу  Если бы положение пружины со временем не менялось, то потенциальная энергия пружина на заданном интервале времени была бы равна произведению *UT*. При переменном положении пружины функция времени *U* интегрируется по времени. В результате получаем значение



Пусть заданы начальное и конечное состояние



Можно поставить задачу отыскания такого закона движения пружины, который при заданном значении потенциальной энергии *E* обеспечивал минимум ее кинетической энергии. Рассмотренный ранее пример является частным случаем этой задачи при  

Рассмотрим некоторое обобщение полученных результатов.

**8.4. Вариационная задача со многими изопериметрическими ограничениями**

Пусть задан функционал

 (8.24)

краевые условия

 (8.25)

и семейство изопериметрических условий

 (8.26)

Ставится следующая задача:

**Задача 8.4**. *Найти функцию v*, *доставляющую экстремум функционалу* (8.24) *при   
выполнении граничных условий* (8.25) *и изопериметрических условий* (8.26).

В соответствии с методом множителей Лагранжа вводится функция

 (8.27)

где числа , являющиеся компонентами вектора *λ*, называются *множителями Лагранжа*. По аналогии с теоремой 8.1 доказывается следующее утверждение

**Теорема 8.2**. *Решение задачи* 8.4 *удовлетворяет уравнению Эйлера*

 (8.28)

Итак, нам неизвестны функция  и вектор *n*-ого порядка *λ*. Для их нахождения мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (8.28) с двумя краевыми условиями (8.25), а также *n* равенств (8.26). Этой информации, в принципе, достаточно для нахождения решения полученной системы уравнений.

**Задание**

Рассматривается задача минимизации функционала



при выполнении краевых условий

 (\*)

либо

 (\*\*)

а также изопериметрического условия



Табл. 8.1. Значения параметров для самостоятельной работы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| вариант | граничные условия | *a* | *b* | *M* |
| 1 | \* | 0 | 2π | 2 |
| 2 | \*\* | 0 | π | 1 |
| 3 | \* | π | 2π | 1 |
| 4 | \*\* | 0 | π | 2 |
| 5 | \* | 0 | π | 2 |
| 6 | \*\* | 0 | π | 3 |
| 7 | \* | 0 | π | 3 |
| 8 | \*\* | 0 | 2π | 1 |
| 9 | \* | 0 | 2π | 3 |
| 10 | \*\* | -π | π | 1 |
| 11 | \* | -π | 0 | 1 |
| 12 | \*\* | -π | π | 2 |
| 13 | \* | -π | 0 | 2 |
| 14 | \*\* | 0 | 2π | 1 |
| 15 | \* | -π | 0 | 3 |
| 16 | \*\* | 0 | 2π | 2 |
| 17 | \* | -π | π | 1 |
| 18 | \*\* | 0 | 2π | 3 |
| 19 | \* | -π | π | 2 |
| 20 | \*\* | 0 | π | 4 |

Требуется выполнить следующие действия:

1. Записать конкретную постановку задачи.
2. Выписать уравнения Эйлера.
3. Проверить знак множителя Лагранжа путем умножения уравнения Эйлера на искомую функцию и интегрирования.
4. Дать общее решение уравнения Эйлера, зависящее от двух констант и множителя Лагранжа.
5. Исходя из двух граничных условий и изопериметрического условия, найти две константы и множитель Лагранжа.
6. Найти всё множество решений системы условий оптимальности.
7. Найти значение минимизируемого функционала на произвольном условии оптимальности.
8. Выбирая минимальное из полученных значений, найти решение поставленной задачи.

**Литература**

1. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М., ГИТТЛ, 1956. – С. 126-131.
2. Будылин А.М. Вариационное исчисление. – Санкт-Петербург, СПбГУ, 2001. – [http://www.newlibrary.ru/book/budylin\_a\_m\_/variacionnoe\_ischislenie.html](http://www.newlibrary.ru/book/budylin_a_m_/variacionnoe_ischislenie.html%20)  . – Раздел 6.
3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М., Физматгиз, 1961. – С. 48-55.
4. Гурса Э. Курс математического анализа. Том 3. Часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – М.-Л., Гостехиздат, 1934. – С. 228-229.
5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И, Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М., Наука, 1973. – С. 103-118.
6. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления. Том 2. – М., ОНТИ, 1935. – С. 148-160.
7. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М., Наука. – 1968. – С. 57-63.
8. Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. – Л., 1933. – С. 14-15.
9. Шарапов В.Г. Руководство по решению задач по курсу «Вариационное исчисление и методы оптимизации». – Волгоград, 2004. – С. 29-32.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., Наука, 1969. – С. 385-393.

**Направления дальнейших исследований**

В дальнейшем мы рассмотрим вариационные задачи с более сложными ограничениями.