**Вариационное исчисление и методы оптимизации**

**Специальность – Математика**

**Курс – 3, семестр - 5**

**Часть 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

## Лекция № 7. Задача Больца. Условие трансверсальности

Рассматривается задача минимизации интегрального функционала без каких-либо граничных условий, называемая задачей Больца. В этом случае в состав необходимых условий экстремума помимо уравнения Эйлера входят условия трансверсальности. Рассматриваются примеры. В качестве приложения решается навигационная задача о выборе курса лодки, обеспечивающего наискорейшую переправу с одного берега реки на другой.

### 7.1. Задача Больца

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых интегральные функционалы минимизировались на множестве функций, принимающие заданные значения на границе имеющейся области. Однако на практике зачастую возникают задачи без этих дополнительных условий. Кроме того, минимизируемый функционал может зависеть от значений искомой функции на границах заданной области. Пусть, в частности, рассматривается функционал



где *F* и *G* – известные функции своих аргументов, которые предполагаются достаточно гладкими.

**Задача 7.1**. *Найти функцию  минимизирующую функционал I.*

**Определение 7.1**. *Задача* 7.1 *называемая* ***задачей Больца***.

Для решения задачи воспользуемся описанной ранее методикой.

### 7.2. Необходимые условия экстремума

Предположим, что некоторая функция *u* является решением задачи Больца. Определим функцию



где *σ* – число, а *h* – произвольная достаточно гладкая функция, определенная на отрезке . Тогда справедливо неравенство  для любого *σ*, а значит, функция *f* достигает своего минимума в нуле. Теперь остается найти производную от этой функции в нуле и приравнять ее нулю.

Справедливо следующее утверждение:

**Лемма 7.1**. *Производная функции f в нуле равна*

  (7.1)

**Доказательство**. Определим величину



Пользуясь разложением в ряд Тейлора, находим значения





где  при  Отсюда следует равенство



После деления на *σ* и перехода к пределу при  получаем



Применяя интегрирование по частям, будем иметь



В результате предшествующее равенство принимает следующий вид (7.1).

Теперь можно получить необходимые условия минимума для задачи Больца.

**Теорема 7.1**. *Если достаточно гладкая функция* *u**является решением задачи Больца, то она удовлетворяет уравнению Эйлера*

  (7.2)

*и следующим соотношениям, называемым* ***условиями трансверсальности***

  (7.3)

 ** (7.4)

**Доказательство**. Справедливо равенство

  (7.5)

для всевозможных функций *h*. В частности, это соотношение справедливо и для функций *h*, обращающихся в нуль на границе заданной области. В этом случае из (7.5) получаем



Отсюда в силу произвольности *h* из основной леммы вариационного исчисления следует уравнение Эйлера (7.2).

При выполнении уравнения Эйлера равенство (7.5) принимает вид

  (7.6)

В условии (7.6) значения  и  произвольны. Определив здесь  получаем условие (7.3). Аналогично, полагая в (7.6)  приходим к равенству (7.4). €

**Замечание 7.1**. Хотя мы не имеем фиксированных изначально граничных условий для задачи Больца, для уравнения Эйлера, по-прежнему являющегося дифференциальным уравнением второго порядка, имеется два условия трансверсальности. Таким образом, необходимые условия экстремума представляют собой краевую задачу, откуда, в принципе можно найти искомую функцию.

|  |
| --- |
| **Вывод**: *Задача Больца сводится к решению дифференциального уравнения Эйлера второго порядка с двумя краевыми условиями трансверсальности.* |

Итак, решение задачи Больца осуществляется практически также, как и задача Лагранжа с заменой заранее фиксированных граничных условий на условия трансверсальности.

|  |
| --- |
| **Вопрос**: *Что делать, если постановка задачи включает одно граничное условие*? |

Если имеется смешанная задача, когда на одном конце заданного интервале имеется краевое условие, а второй – свободен, то уравнение Эйлера вновь решается с двумя граничными условиями. Одно из них соответствует заданному краевому условию, как в задаче Лагранжа, а второе – условию трансверсальности, как в задаче Больца.

### 7.3. Пример

Для прояснения сути полученных результатов рассмотрим следующий пример.

**Пример 7.1**. Требуется минимизировать функционал



на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций. Тогда функции, входящие в определение задачи Больца имеют следующий вид:



В этих условиях получаем следующее уравнение Эйлера (7.2):



Его общее решение определяется по формуле



где  – произвольные постоянные. Для их определения имеем условия трансверсальности (7.3) и (7.4), которые в данном случае имеют вид:



Подставляя найденное общее решение в эти граничные условия, находим константы



Таким образом, решением уравнения Эйлера с условиями трансверсальности является функция  Очевидно, это действительно будет решением задачи, поскольку только на этом значении функционал обращается в нуль, а отрицательные его значения невозможны.

### 7.4. Задача о переправе

Рассмотрим одну прикладную задачу. Дана река с прямыми берегами шириной *L*. Исследуется движение лодки с одного берега реки на другой. Выбираем систему координат так, чтобы координата *х* была направлена поперек реки, а координата *у –* вдоль реки по одному из ее берегов (см. рис. 7.1). Скорость реки  считается известной. Скорость лодки *и* превосходит максимальную скорость реки и считается постоянной. Требуется выбрать такой курс лодки, чтобы, двигаясь по нему, она переплыла с одного берега на другой за минимальное время.



Рис. 7.1. Движение лодки.

Дадим математическое описание поставленной задачи. Наша цель состоит в определении такой функции  которая минимизирует время, необходимое для переправы лодки с одного берега реки на другой. Выбирая точку старта лодки за начало координат, приходим к граничному условию

  (7.7)

Скорость движения лодки в поперечном и продольном направлении характеризуется дифференциальными уравнениями

  (7.8)

где угол *α* – угол, определяемый курсом лодки. Из этих соотношений следует равенство



Рассмотрим последнее соотношение как уравнение относительно угла *α*. Получаем



откуда после возведения в квадрат следует



Обозначив



приходим к следующему квадратному уравнению относительно *z*:



Отсюда находим



Отметим, что знак «минус» здесь приведет к отрицательному значению угла *α* и не дает направление в сторону другого берега реки. Таким образом, находим



Пользуясь первым из равенств (7.7), находим



За некоторое время от нуля до *Т*, выбрав некоторый маршрут движения, лодка проходит путь по координате *х* от нуля до значения *L*. Тогда, интегрируя предшествующее соотношение, находим время движения лодки

  (7.9)

Таким образом, для нахождения функции  требуется минимизировать функционала  на множестве всех функций, удовлетворяющих одному граничному условию (7.7). Отметим, что второе краевое условие отсутствует, поскольку точка финиша лодки на другом берегу значения не имеет. Таким образом, правый конец искомой траектории является свободным.

Для полученной вариационной задачи мы имеем уравнение Эйлера (7.2), одно явное граничное условие (7.7) и условие трансверсальности (7.4). В нашем случае подынтегральное выражение в функционале имеет вид

,

а функция *G* равна нулю. Учитывая, что *F* не зависит явным образом от функции *y*, получаем уравнение Эйлера

,

откуда следует

 . (7.10)

Условие трансверсальности (7.4) дает

,

откуда следует, что константа  в предшествующем равенстве обращается в нуль. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение первого порядка



Отсюда следует



В результате находим



Интегрируя это уравнения с учетом граничного условия (7.7), получаем



Это равенство и дает искомую траекторию движения лодки.

### Задача Больца и смешанная задача. Задания на самостоятельную работу

**Варианты 1-5**. Требуется найти функцию  удовлетворяющую граничному условию  и минимизирующую функционал

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| variant |  |  |  |  |  |
| 1 |  | *v* | 0 | 1 | 0 |
| 2 |  | -*v* | -1 | 0 | 1 |
| 3 |  | -2*v* | 0 | 1 | 0 |
| 4 |  | 2*v* | -1 | 0 | 1 |
| 5 |  | -3*v* | 1 | 0 | 0 |

**Variants 6-10**. Требуется найти функцию  удовлетворяющую граничному условию  и минимизирующую функционал

and minimize the integral

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| variant |  |  |  |  |  |
| 6 |  | *v* | 0 | 1 | 0 |
| 7 |  | -*v* | -1 | 0 | 1 |
| 8 |  | -2*v* | 0 | 1 | 0 |
| 9 |  | 2*v* | -1 | 0 | 1 |
| 10 |  | -3*v* | 1 | 0 | 0 |

**Variants 11-15**. Найти  минимизирующую функционал



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| variant |  |  |  |  |
| 11 |  |  | 0 | 1 |
| 12 |  |  | -1 | 0 |
| 13 |  |  | 0 | 1 |
| 14 |  |  | 0 | 1 |
| 15 |  |  | 1 | 0 |

Задание.

1. Сформулировать конкретную постановку задачи.
2. Записать уравнение Эйлера.
3. Найти его общее решение.
4. Записать одно условие стационарности для вариантов 1-10 и два – вариантов 11-15.
5. Найти константы, входящие в общее решение с помощью граничных условий.
6. Записать полученное частное решение уравнения Эйлера.
7. Нарисовать график полученного решения.

**Задание**

Варианты 1,2. Требуется найти функцию  удовлетворяющую условию  минимизирующую функционал



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |  |
| 1 |  | *v* | 0 | 1 | 0 |
| 2 |  | -*v* | -1 | 0 | 1 |

Варианты 3,4. Требуется найти функцию  удовлетворяющую условию  минимизирующую функционал



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |  |
| 3 |  | -2*v* | 0 | 1 | 0 |
| 4 |  | 2*v* | -1 | 0 | 1 |

Требуется выполнить следующие действия:

1. Записать конкретную постановку задачи.
2. Получить уравнение Эйлера и условие трансверсальности.
3. Решив соответствующую краевую задачу, найти функцию, которая может оказаться решением данной задачи Лагранжа.
4. Найти значение функционала, соответствующее найденной экстремали.
5. Найти значение функционала для какой-либо другой функции, удовлетворяющей заданному граничному условию.
6. Проанализировать полученные результаты.

### Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., Наука, 1979. –
С. 64-66.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М., ГИТТЛ, 1956. – С. 105-111.
3. Будылин А.М. Вариационное исчисление. – Санкт-Петербург, СПбГУ, 2001. – [http://www.newlibrary.ru/book/budylin\_a\_m\_/variacionnoe\_ischislenie.html](http://www.newlibrary.ru/book/budylin_a_m_/variacionnoe_ischislenie.html%20)  . – Раздел 5.4.
4. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М., Физматгиз, 1961. – С. 30-32, 56-63.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. Том 3. Часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – М.-Л., Гостехиздат, 1934. – С. 222-226.
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И, Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М., Наука, 1973. – С. 119-130.
7. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления. Том 2. – М., ОНТИ, 1935. – С. 118-126.
8. Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. – Л., 1933. – С. 47-57.
9. Шарапов В.Г. Руководство по решению задач по курсу «Вариационное исчисление и методы оптимизации». – Волгоград, 2004. – С. 25-29.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., Наука, 1969. – С. 327-333.

### Направления дальнейших исследований

До сих пор рассматривались задачи, в которых ограничения могли быть заданы исключительно на границе исследуемой области. Наша ближайшая перспектива – распространить полученные результаты на случай, когда имеются ограничения в форме равенств на значения искомых функций внутри рассматриваемой области.