Лекции №5. Кривые и поверхности второго порядка

Рассмотрим в начале частные виды кривых, определяемых на плоскости уравнениями, в которых неизвестные x и y присутствуют только в первой или во второй степени.

1. Пусть на плоскости Oxy имеются две точки F_1 и F_2, называемые фокусами на расстоянии $2c$ друг от друга ($2c-$ фокусное расстояние). Для определенности расположим их на оси Ox симметрично относительно начало координат, т.е. $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Пусть $2a > 2c$.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний, от которых до двух выбранных фокусов, постоянна и равна $2a$.

Разделив части уравнения на a^2b^2, получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ где } b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, а числа a и b его полуосями (большой и малой). Подставив в каноническое уравнение значение $y=0$, получим $\frac{x^2}{a^2}=1$; $x^2=a^2$, $x=\pm a$, т.е. эллипс пересекает ось Ox в точках с координатами $x=\pm a$. Аналогично проверяется, что ось Oy эллипс пересекает в точках $y=\pm b$. Эти точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса.

Несложно проверить, что т. O является центром симметрии эллипса, описываемого каноническим уравнением, а оси Ox и Oy его осями симметрии. Ось, проходящая через фокусы эллипса (ось Ox), называется его фокальной осью. Число $e=\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом. У эллипса $0\le e<1$. Прямые, проходящие перпендикулярно фокальной оси на расстоянии $d=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$ от центра эллипса, называются директрисами эллипса.

2. В частном случае, когда фокусное расстояние эллипса $2c=0$, два фокуса эллипса совпадают с его центром. При этом $a=b$ и каноническое управление эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{или} \quad x^2+y^2=a^2.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением окружности радиуса a. У окружности эксцентриситет $e=0$, а директрисы отсутствуют.

Уравнение окружности радиуса а с центром в точке $O'(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2.$$

Пример. Запишем уравнение окружности с центром в точке $M_0(3,4)$, проходящей через начало координат. Поскольку радиус окружности

$a=|OM_0|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, то уравнение этой окружности имеет вид $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

Гипербола. Пусть на плоскости имеются два фокуса (например $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ и пусть $a<c$.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, разность расстояний от которых до двух выбранных фокусов постоянна и равна $\pm 2a$. И каноническим уравнением гиперболы записывается так:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{где } b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

Число a называется действительной полуосью гиперболы, а число b – ее мнимой полуосью.

Подставив в каноническое уравнение $y=0$, получим $x^2=a^2$, т.е. $x=\pm a$, следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точках $(a,0)$ и $(-a,0)$. Эти точки называются вершинами гиперболы. Подставив в каноническое уравнение $x=0$, получим $-\frac{y^2}{b^2}=1$. Это уравнений решения не имеет, поэтому гипербола с каноническим уравнением с осью Oy не пересекается. Как и у эллипса, т. O является центром симметрии гиперболы, а оси Ox и Oy ее осями симметрии.

Определения эксцентриситета и директрис гиперболы повторяют соответствующие определения для эллипса. Эксцентриситет гиперболы $e>1$.

Определение. Прямая L называется асимптотой кривой K, если расстояние от точки на кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль кривой в бесконечность.

Это определение не вполне корректно. Точное определение асимптоты опирается на понятие предела, которое будет изучаться позже. В четвертом модуле будет приведено доказательство следующего факта. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами обеих ветвей гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Парабола. Пусть на плоскости имеется прямая D (директриса) и точка F (фокус) на расстоянии p от директрисы. Пусть D имеет уравнение $x=-\frac{p}{2}$, фокус - координаты $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

Определение. Параболой называется геометрическое место точек M плоскости, расстояние от которых до фокуса совпадает с расстоянием до директрисы (см. рис. 2.19).

Пусть N - проекция точки $M(x,y)$ на директрису D. Из условия $|MN|=|MF|$ выведем уравнение параболы: $x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$; $x^2+px+\frac{p^2}{2}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$; $y^2=2px$.

Это уравнение называется каноническим уравнением параболы, а число $p>0$ ее параметром. Парабола проходит через точкой O, которая называется ее вершиной. Ось Ox является осью симметрии параболы. Эксцентриситет e параболы всегда считается равным единице. Асимптот у параболы нет.

Теорема. Пусть на плоскости заданы прямая D (директриса) и точка F (фокус), не лежащая на D. Пусть задано число $e>0$ (эксцентриситет). Тогда геометрическое место точек M плоскости таких, что отношение расстояние от M до F к расстоянию от M до D равно e, является:

а) эллипсом, при $e<1$; в) гиперболой, при $e>1$; с) параболой, при $e=1$.

Общее уравнение кривой второго порядка

Определение. Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0.$$

Здесь хотя бы одно из чисел a_{11},a_{12},a_{22} отлично от нуля. Это уравнение называется общим уравнением кривой второго порядка.

Поверхности второго порядка. Рассмотрим вначале частные виды поверхностей, определяемых в пространстве уравнениями, в которых неизвестные x,y,z присутствуют только в первой или во второй степени.

1. Пусть в пространстве имеется кривая K и прямая L.

Определение. Цилиндрической поверхностью (цилиндром) с направляющей K и образующей L называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через точки K параллельно L.

1.1. Эллиптический цилиндр имеет направляющей эллипс и каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. В частности, круговой цилиндр: $x^2+y^2=a^2$ имеет направляющей окружность.

1.2. Гиперболический цилиндр имеет направляющей гиперболу и каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.3. Параболический цилиндр имеет направляющей параболу и каноническое уравнение $y^2=2px$.

1.4. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ определяет ось Oz.

1.5. Уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ и $x^2=-1$ - пустое множество.

1.6. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся по оси Oz плоскостей

1.7. $x^2=a^2$ - пара плоскостей, параллельных Oyz.

1.8. $x^2=0$ - плоскость Oyz.

Все перечисленные поверхности называются цилиндрическими поверхностями второго порядка.

1. Пусть в пространстве имеется кривая K и точка O, не лежащая на K.

Определение. Конической поверхностью (конусом) с направляющей K и вершиной O называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через O и пересекающих K.

В частности, конические поверхности, рассматриваемые в школьной программе, имели направляющие окружности K, их вершины находились на прямой, проходящей через центр K перпендикулярно плоскости окружности.

Заметим, что вершина O любой конической поверхности является ее центром симметрии.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0)$ называется каноническим уравнением конуса второго порядка.

1. Поверхность, определяемая каноническими уравнениями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a,b,c>0)$

называется эллипсоидом, а числа a,b,c – его полуосями.

2. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $(a,b,c>0)$

называется двуполостным гиперболоидом.

3. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a,b,c>0)$

называется однополостным гиперболоидом.

4. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$, $(p,q>0)$ называется эллиптическим параболоидом.

5. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$, $(p,q>0)$ называется гиперболическим параболоидом.

6. Определение. Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0.$$

Здесь хотя бы один коэффициент $a_{i,j}$ должен быть отличен от нуля.

Теорема. Любая поверхность второго порядка в пространстве является одной из следующих поверхностей:

1) одной из цилиндрических поверхностей второго порядка;

2) конусом второго порядка;

3) Эллисоидом;

4) одно или двуполостным гиперболоидом;

5) эллиптическим или гиперболическим параболоидом.

Найдется, такая декартова система координат $O'x'y'z'$, в которой уравнение поверхности принимает канонический вид.

Основная литература**:** [1] § 24,25,26, стр. 135-172

Дополнительная литература: [19] 1.20-1.21, стр. 121-138

Контрольные вопросы:

1. Определение эллипса как геометрического места точек.
2. Каноническое уравнение параболы. Что такое директриса?
3. Каноническое уравнение гиперболы