Лекция 1

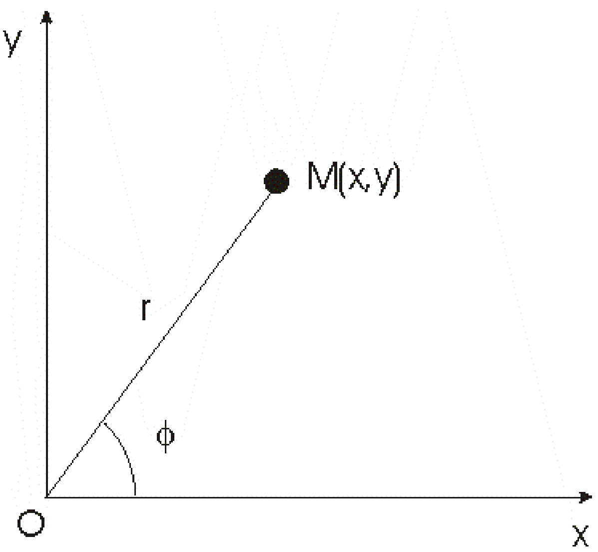
Комплексные числа

Комплексным числом называется число вида x+iy, где x и y – действительные числа, а i – символ, который называется мнимой единицей. Числа x и y называются действительной и мнимой частями комплексного числа.

Обозначаются они так: x=Re(z), y=Im(z). Частные случаи:

- если y=0, то z – действительное число;
- если x=0, то z называется чисто мнимым числом.

Каждой точке на плоскости соответствует только одно комплексное число z:



Число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряжённым числу z. Между парами переменных x, y; $z, \overline{z}$; r, φ, где r, φ - полярные координаты точки (см. рис.), имеют место легко проверяемые соотношения

$$\begin{cases} \overline{z} = x - iy \\ z = x + iy \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{cases} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Приходим к тригонометрической форме записи комплексного числа*:* z=$r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

Здесь: r-модуль комплексного числа: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; φ - аргумент комплексного числа: $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$. Аргумент определен неоднозначно. Если к аргументу прибавить 2π, получится то же самое комплексное число. Иными словами, аргумент обладает свойством периодичности:

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in Z\ ,$$

где $\arg\left(z\right)$ обозначает какое-либо определенное значение аргумента. Обычно полагают $\arg(z) \in \left(-\pi, \pi\right]$.

Операции над комплексными числами

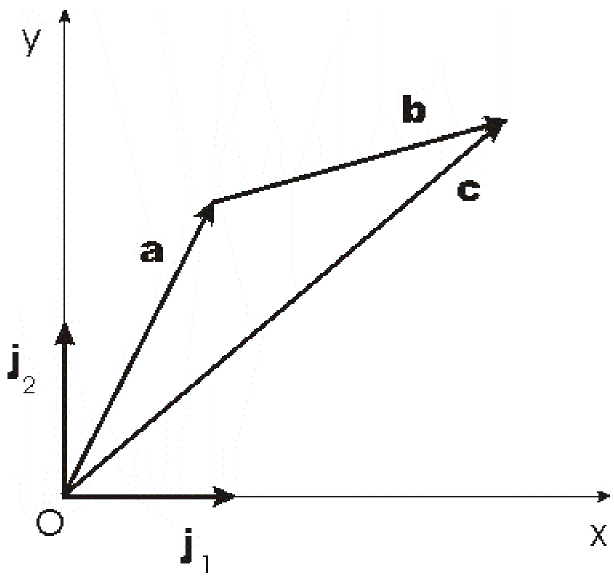
Существует понятие равенства двух комплексных чисел: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$. Однако отношения > или < для них не определены.

Сумма двух чисел:

$z_1 + z_2 = z_3$, или $\mathrm{x}_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = x_3 + iy_3$, где

$$\begin{cases} \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Геометрически сумму можно изобразить так:



$$\begin{aligned} &\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ &\mathbf{a} = x_1\mathbf{j}_1 + y_1\mathbf{j}_2 \\ &\mathbf{b} = x_2\mathbf{j}_1 + y_2\mathbf{j}_2 \\ &\mathbf{c} = (x_1 + x_2)\mathbf{j}_1 + (y_1 + y_2)\mathbf{j}_2 \end{aligned}$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между сложением комплексных чисел и сложением векторов.

Аналогично выполняется операция *разности*:

$$z_1 - z_2 = z_3,\ \text{или}\ \mathrm{x}_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) = x_3 + iy_3$$

$$\text{где } \begin{cases} \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 \\ y_3 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Умножение комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = (\mathrm{x}_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 = z_3$$

$$\begin{cases} x_3 = x_1x_2 - y_1y_2 \\ y_3 = x_1y_2 + x_2y_1 \end{cases}$$

При этом произведение мнимой единицы на себя определяется соотношением $i \cdot i = -1$.
Частным случаем является умножение комплексного числа на действительное:

$$z_2 = az_1 = ax_1 + iay_1$$

Существует взаимно однозначное соответствие между умножением вектора на действительное число и комплексного числа на действительное число:

$\mathbf{c} = a\mathbf{a}$

$\mathbf{a} = x_1\mathbf{j}_1 + y_1\mathbf{j}_2$

$c = a\left(x_1\mathbf{j}_1 + y_1\mathbf{j}_2\right) = ax_1\mathbf{j}_1 + ay_1\mathbf{j}_2$

Деление комплексных чисел ($z_2 \neq 0$):

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ y_3 = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}$$

Числовые ряды

Пусть $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ - комплексный числовой ряд, где $z = a + ib$. Тогда $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... + i(b_1 + b_2 + ... + b_n + ...)$ - сумма числового ряда, или $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Для того чтобы комплексный числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды из его действительных и мнимых величин.

$z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = r_n\cos\varphi_n + ir_n\sin\varphi_n$

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n\cos\varphi_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n\sin\varphi_n$

$S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n\cos\varphi_n \qquad S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n \qquad S_3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n\sin\varphi_n$

Ряд S_2 - ряд из положительных членов. Если он сходится, то ряд S_1 сходится абсолютно, т.к. $\left|r_n\cos\varphi_n\right| \leq r_n$.

Аналогично, если ряд S_2 сходится, то ряд S_3 сходится абсолютно.

Таким образом, комплексный ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей.