ӘОЖ 51:37.016

ҒТАМР 27.01.45

С.Е. Касенов[1], Г.Е. Касенова[2], А.В. Халиева[3], Б.М. Иманбаев[4]

[1]PhD доктор, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]мұғалім, Көпсалалы №3 мектеп-гимназия, Өскемен қ., Қазақстан
[3]мұғалім, Назарбаев зияткерлік мектебі, Алматы қ., Қазақстан
[4]магистр, оқытушы, ҚР ІІМ Алматы академиясы, Алматы қ., Қазақстан

ТРИГОНОМЕТРИЯ АЛГЕБРАҒА КӨМЕКТЕСЕДІ

Аңдатпа

Есеп шығару оқу үрдісінің маңызды бөлігі. Ол кезде оқушылар математиканың теориясын меңгереді және логикалық ойлауы мен шығармашылық қабілеттері дами түседі. Математиканы оқыту кезінде оқушылардың шығармашылық қабілеттерін дамыту үшін күрделі және стандартты емес есептерді шешу болып табылады. Математика бойынша күрделі есептерді шешу көбінде оларды шешу шеберлігіне, түрлендіру тәсілдеріне және оларды шешу әдістеріне тәуелді болады.

Мақалада алгебра пәнінде кездесетін стандартты емес есептер қарастырылады. Стандартты емес есептерді шешудің көп қолданылатын әдістерінің бірі айнымалыны ауыстыру әдісі. Мақалада айнымалыны ауыстыру әдісінің жалпы теориясына тоқтала отырып, тригонометриялық аламастыру көмегімен есептерді шешу жолдары көрсетілген.

Түйін сөздер: Стандартты емес есептер, тригонометрия, алгебра, айнымалыны ауыстыру, тригонометриялық алмастыру, теңдеу.

Аннотация

С.Е. Касенов[1], Г.Е. Касенова[2], А.В. Халиева[3], Б.М. Иманбаев[4]

ТРИГОНОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

[1]PhD доктор, Казахский национальный университет имени Аль-Фараби,г. Алматы, Казахстан
[2]учитель, Многопрофильная школа-гимназия № 3, г.Усть-Каменогорск, Қазақстан
[3]учитель, Назарбаев интеллектуальная школа, г. Алматы, Казахстан
[4]магистр, преподаватель, Алматинская академия МВД РК, г. Алматы, Казахстан

Решение задач является важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой учащимися усваивается математическая теория и развиваются логическое мышление и творческие способности. Для развития творческих способностей учащихся наиболее ценными являются сложные и нестандартные задачи. Решение сложных задач по математике во многом зависит от опыта их решения, от степени овладения методами их решения и техникой преобразований.

В данной работе рассматривается нестандартные задачи, которые встречаются в алгебре. Метод замена переменных применяется при решении самых различных нестандартных задач. В статье рассмотрено общая положения замена переменных и показано решение различных задач с помощью тригонометрических постановок.

Ключевые слова: Нестандартные задачи, тригонометрия, алгебра, замена переменных, тригонометрическая подстановка, уравнение.

Abstract

TRIGONOMETRY HELPS ALGEBRA

S.E. Kassenov[1], G.E. Kassenova[2], A.V. Khalieva[3], B.M. Imanbaev[4]
[1]PhD. doctor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]teacher, multidisciplinary school-gymnasium No. 3, Ust-kamenogorsk, Kazakhstan
[3]teacher, Nazarbayev intellectual school, Almaty, Kazakhstan
[4]master degree, lecturer, Almaty Academy of the MIA of the RK, Almaty, Kazakhstan

The solution of problems is the most important kind of educational activity, in the course of which students are assimilated by mathematical theory and logical thinking and creative abilities develop. To develop creative abilities, the most valuable are complex and non-standard tasks. Solving complex problems in mathematics depends to a large extent on the experience of solving them, on the degree to which they master their decisions and the technique of transformation.

In this paper we consider non-standard problems that occur in algebra. Acquired experience shows that it can not perform its functions. The article deals with issues related to the use of trigonometric statements.

Keywords: Nonstandard problems, trigonometry, algebra, change of variables, trigonometric substitution, equation.

Шығыстың нақыл сөзі: «Білімді алу –батылдық, оны еселеу –ақылдылық, ал оны сенімді қолдану –ұлы шеберлік». Француз математигі, физигі Паскаль: «Математика пәні сондай маңызды, сондықтан да оны әрі қарай қызықты етіп көрсету мүмкіншілігін жібермеу керек». Осы айтылған пікірге сай есеп шығару кезінде неғұрлым қызықты, әрі жеңіл жолмен қарастыру өте дұрыс болып табылады.

Стандартты емес есептер – бұл оқушыларда есепті шығарудың дайын алгоритмі жоқ және өздері кілттік ойларды іздейтін есептер. Стандартты емес есептерді шешу кезінде математикалық мәдениет, ақыл-ойдың орамдылығы тәрбиеленеді және математика бірлігінің ұғынуы жүзеге асады.

Стандартты емес есептердің ең маңызды қайнар көзі олимпиадалық пен конкурстық есептер болып табылады. Стандартты емес есептер оларды шешуіне стандартты емес тәсілдерді талап етеді. Ең маңыздысы оқушыларда стандартты емес есептерді шешудің әдістер қоры құрылу керек, себебі оқушылар шешудің стандартты емес әдістерін өздігінен ойлап табуы мүмкін бола бермейді.

Алгебралық есептерде тригонометриялық түрлендіруді қолдану математиканың әртүрлі бөлімдерін, соның ішінде алгебра мен тригонометрия бөлімдерін, өзара байланыстарын орнатуға бағытталған. Оқушыларды тек есеп шартының айналасында ғана емес, бірақ өте кеңірек, тіпті байқалмайтын облыстан есепті шешудің тәсілдерін табудағы батылдыққа және тапқырлыққа тәрбиелеу маңызды.

Есепті шешу кезінде айнымалыны ауытыру әдісі

Айнымалыны ауытыру, яғни жаңа белгілеуге көшу – элементар математика мен жоғары математиканың әртүрлі есептерін шешу кезінде қолданылатын маңызды тәсіл мен әдістердің бірі. Бастысы, бұл әдіс мектепте жақсы меңгеріленіп және игерулену керек. Себебі айнымалыны ауыстыру идеясы өтпелі болып табылады және мектеп математикасының барлық бөлімдерінде кездеседі.

Айнымалыны ауыстыру әдіс анықтамасының екі жолы бар. Егер $f(x)=0$ теңдеуін $p(g(x))=0$ түріне түрлендірген болсақ, онда $u=g(x)$ жаңа айнымалыны енгізіп $p(u)=0$ теңдеуін шешу керек, сосын $g(x)=u_1, g(x)=u_2, \dots g(x)=u_n$ жиынтығын қарастырады. Мұндағы $u_1, u_2, \dots, u_n$ – $p(u)=0$ теңдеуінің түбірлері.

Айнымалыны ауыстыру кезінде түбірді жоғалтпас үшін, қарастырылып отырған облыстан әрбір x мәніне $u=g(x)$ теңдігін қанағаттандыратын, тым болмағанда u бір мәні сәйкес келу керек.

Теңбе-тең ауыстырудың жоғарыда айтылған әдістен айырмашылығы u айнымалысының мәндер жиынын табуды талап етеді. Біздің жағдайда әрбір x мәніне $u = g(x)$ теңдігін қанағаттандыратын, u тек бір мәні сәйкес келу талабы айтылады. Бұл тәсіл бастапқы теңдеудің анықталу облысын сақтауға алып келеді [1].

Тригонометриялық алмастыру

Тригонометриялық алмастыру айнымалыны ауыстыру әдісін жүзеге асыру тәсілдерінің бірі болып табылады және ол бастапқы теңдеудің анықталу облысы тригонометриялық функциялардың мәндер облысымен сәйкес келген жағдайда ғана қолданылады. Қай тригонометриялық функцияны таңдау теңдеу, теңсіздік, олардың жүйесі немесе алгебралық өрнегіне байланысты болады.

Егер есеп шартынан x айнымалысының мүмкін мәндер жиыны $|x| \le 1$ теңсіздігімен анықталған болса, онда $x = \sin\alpha$ немесе $x = \cos\alpha$ ауыстыруын қолданған дұрыс. Бірінші жағдайда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ аралықта қарастырған жеткілікті, себебі $y = \sin x$ үзіліссіз функциясы осы аралықта өседі, сондықтан әрбір мәнін тек бір ғана нүктеде ғана қабылдайды. $y = cos\, x$ үзіліссіз функциясы $[0;\pi]$ аралықта кемиді, сондықтан әрбір мәнін тек бір ғана нүктеде ғана қабылдайды. Осы себептен $x = \cos\alpha$ ауыстыру жағдайында $\alpha \in [0;\pi]$ аралығында алған жеткілікті. Осы екі алмастырудың қайсысын алу есептің берілуіне байланысты болады.

Айнымалы кез келген нақты мәнді қабылдаған кезде, $x = tg\alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ немесе $x = ctg\alpha, \quad \alpha \in (0;\pi)$ ауыстыруларын пайдаланылады, себебі $y = tgx$ пен $y = ctgx$ функцияларының мәндер жиыны берілген аралықта нақты сандар жиыны.

$x = r\sin\alpha$ немесе $x = r\cos\alpha$ ауыстырулары сиректеу қолданылады, мұндағы $r \in R, \quad r \ge 0$, ал α мәнін таңдау есеп шартына байланысты болады.

Өрнек x пен y екі айнымалыдан тәуелді болған уақытта, $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ қою керек, мұндағы $r \in R, \quad r \ge 0, \quad \alpha \in [0;\ 2\pi)$. Мұндай ауыстыру заңды. Шынында да, кез келген x пен y үшін $x^2 + y^2 = r^2$ болатын, $r \ge 0$ табылады. $r \ne 0$ кезінде $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$ орындалады. Ал квадратының қосындысы бірге тең сандар, модулі бойынша бірден артпайды және ол сандарды синус және косинус ретінде қарастыруға болады. Мұндай ауыстырудың геометриялық мағынасы: әрбір $(x; y)$ нүктесі координата басына дейінгі r арақашықтықпен және $(x; y)$ векторының абцисса осінің оң бағыттағы α бұрышымен өлшенеді.

Соңғы ескерту. Мұндай алмастыруды жүзеге асыру аса қиын емес, ең бастысы күрделісі соны көріп таба білу болады. Сондықтан осы мақалада тригонометртялық алмастыру «белгілерін» таба білуге оқушыларды арнайы үйрету қарастырылады.

Есептер:

1) Теңдеуді шешіңіз: $\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$ [2].

Есепті тригонометриялық алмастыру көмегімен шешеміз.

$1 - x^2 \ge 0$ болғандықтан, онда $|x| \le 1$. Сондықтан $x = \sin\alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теңдеу келесі түрге келеді

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}}=1-2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \frac{\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|}{\sqrt{2}}=\cos 2\alpha \Leftrightarrow \left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\cos 2\alpha .$$

$\alpha+\frac{\pi}{4}=u$ қояйық, мұндағы $u\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$, онда

$$\left|\sin u\right|=\sin 2u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin u\rangle 0\\ \cos u=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \sin u=0\\ \begin{cases}\sin u\langle 0\\ \cos u=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u_1=\frac{\pi}{3}\\ u_2=0\end{array}\right.$$

.

$$x_1=\sin\left(u_1-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$x_2=\sin\left(u_2-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Жауабы: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

2) Теңдеуді шешіңіз: $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)$[2].

Есепті тригонометриялық алмастыру көмегімен шешеміз.

Теңдедеудің анықталу облысы $1-4x^2\geq 0$ теңсіздікпен беріледі, бұл $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ шартымен теңбе-тең, онда $2x\in[-1;1]$ болады. Сондықтан $2x=\cos\alpha,\ \ \alpha\in[0;\pi]$ қоюға болады. Ал теңдеу келесі түрге келеді

$$\left|2\frac{\cos\alpha}{2}-\sqrt{1-4\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2}\right|=\sqrt{2}\left(8\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2-1\right) \Leftrightarrow \left|cos\alpha-\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right|=\sqrt{2}\left(2\cos^2\alpha-1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|cos\alpha-\left|\sin\alpha\right|\right|=\sqrt{2}\cos 2\alpha .$$

$\alpha\in[0;\pi]$ болғандықтан, онда $\sin\alpha\geq 0$. Ішкі моджульді ашамыз

$$\left|cos\alpha-\sin\alpha\right|=\sqrt{2}\cos 2\alpha \Leftrightarrow \left|\frac{cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right|=cos2\alpha \Leftrightarrow \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|=\cos 2\alpha .$$

$\frac{\pi}{4}-\alpha=u, u\in\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ қоямыз, онда

$$\left|\sin u\right|=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2u\right) \Leftrightarrow \left|\sin u\right|=\sin 2u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin u>0\\ \sin u-2\sin u\cos u=0\end{cases}\\ \sin u=0\\ \begin{cases}\sin u<0\\ \sin u+2\sin u\cos u=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin u>0\\ \cos u=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \sin u=0\\ \begin{cases}\sin u<0\\ \cos u=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in Z \\ u=\pi k, \quad k\in Z \\ u=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi l, \quad l\in Z \end{array}\right. .$$

$u\in\left[-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ шартын қанағаттандыратын екі мән $u_1=0$ және $u_2=\dfrac{4\pi}{3}$ бар.

$$x_1=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-u_1\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$x_2=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-u_2\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}=$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}.$$

Жауабы: $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}\right\}$.

3) $\begin{cases} x+3y=4y^3 \\ y+3z=4z^3 \\ z+3x=4x^3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің неше шешімі бар[2].

Мұнда циклдік теңдеулер жүйесі берілген. Мұндай есептер әртүрлі конкурстық есептерде кездеседі. Арнайы әдістерді білмей бұл жүйені шешу өте күрделі. Берілген жағдайда $(0;0;0)$ шешімін табуға болады. Енді осы жүйенің басқа шешімі жоқ екенін дәлелдеу өте қиын. Осы кезде осындай есептерді шешуге тригонометриялық алмастыру әдісі жақсы көмектеседі.

Жүйені келесі түрде жазып алайық

$$\begin{cases} x=4y^3-3y \\ y=4z^3-3z \\ z=4x^3-3x \end{cases}.$$

Барлық x, y, z сандары абсолют мәні бойынша 1-ден артпайтынын дәлелдейік. x – x, y, z сандарының ең үлкен саны болсын және $x>1$, онда $z=4x^3-3x>x$. Қарама-қайшылыққа келдік. Егер x саны ең кішісі және $x<-1$, онда $z=4x^3-3x<x$. Тағы да қарама-қайшылыққа келдік. Сонымен $-1\le x, y, z\le 1$.

Есепті тригонометриялық алмастыру көмегімен шешеміз.

$x=\cos\alpha, \quad \alpha\in[0;\pi]$ болсын. Онда $z=\cos3\alpha$, $y=\cos9\alpha$, $x=\cos27\alpha$. Бастапқы теңдеулер жүйесінің шешімдер саны мына теңдеудің шешімдер санына тең.

$$\cos\alpha=\cos27\alpha\Leftrightarrow\cos27\alpha-\cos\alpha=0\Leftrightarrow\sin14\alpha\sin13\alpha=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{k\pi}{13},k\in Z\\ \alpha=\dfrac{n\pi}{14},n\in Z\end{array}\right.$$

$\alpha \in [0;\pi]$ шартын қанағаттандыратын 27 шешім бар

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{k\pi}{13}, & k = 0,1,2,...,13 \\ \alpha = \dfrac{n\pi}{14}, & n = 1,2,...,13 \end{cases}.$$

Жауабы: $\begin{cases} \alpha = \dfrac{k\pi}{13}, & k = 0,1,2,...,13 \\ \alpha = \dfrac{n\pi}{14}, & n = 1,2,...,13 \end{cases}$.

4) $(a+b)^4 \le 8\left(a^4 + b^4\right)$ теңсіздігін дәлелдеңіз[2].

$a = b = 0$ кезде теңсіздік дұрыс.

Есепті тригонометриялық алмастыру көмегімен шешеміз.

Кез келген $a, b \neq 0$ үшін α бұрышы табылады, $b = atg\alpha$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ болатындай. Бастапқы теңсіздік келесі түрге келеді

$$a^4(1+tg\alpha)^4 \le 8a^4\left(1+tg^4\alpha\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^4 \le 8\left(\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}\right).$$

$\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан, онда $\cos^4\alpha \neq 0$. Теңсіздіктің екі жағын $\cos^4\alpha$ көбейтіп, келесіні аламыз

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^4 \le 8\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)^2 \le \left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$(1+\sin 2\alpha)^2 \le 8\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) \Leftrightarrow 1+2\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha \le 8-4\sin^2 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 2\alpha+7\sin 2\alpha-5\sin 2\alpha-7 \le 0 \Leftrightarrow (\sin 2\alpha-1)(5\sin 2\alpha+7) \le 0.$$

Екінші көбейткіш әрқашанда оң, ал бірінші көбейткіш 0 артпайды, сондықтан олардың көбейтіндісі оң емес сандар.

Сонымен қорытындылай келе, математиканы тереңдетіп оқытылатын сынып оқушыларына тригонометриялық алмастыру тәсіліне арналған есептерді шешу олардың шығарамашылық қабілеттерін дамытуға және жоғарғы оқу орнына түсуге арнал, мектепті тәммәмдәу емтихандарына дайындалуға зор көмек көрсетеді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.:МЦНМО, 2012. ¬ 560с.

2. А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. Киев:Агрофирма «Александрия», 1993. –58с.