

Содержание

Численные методы в области алгебры, математической логики, дифференциальных уравнений, математической физики	7
Garifullina Zh. COMPUTER SIMULATION OF THREE-DIMENSION ECOLOGICAL PROBLEMS	7
Долговесов Б.С., Мазурок Б.С., Морозов Б.Б., Коростелев Е.И., Городилов М.А., Артиков Т.Н., Артиков А.Н. МУЛЬТИМЕДИЙНАЯ СИСТЕМА ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ . . .	9
Жайнаков А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ФИЗИКЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ	14
Иващенко Е.Н., Серая Н.В. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ВУЗОВСКОГО КУРСА ХИМИИ	24
Кабанихин С.И., Исаков К.Т., Шолпанбаев Б.Б., Бектемисова А.А. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОРАДАРНЫХ ДАННЫХ НА ОПЫТНЫХ ОБРАЗЦАХ	30
Казакбаев С.Т. «MSC SOFTWARE» МИРОВОЙ ЛИДЕР В ОБЛАСТИ ВИРТУАЛЬНОЙ РАЗРАБОТКИ ИЗДЕЛИЙ	34
Мелкозёрова Л.Я. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЕ "НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ"	38
Мухамедова Р.О., Дронсейка И.П. ТЕХНОЛОГИЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ В КОНТЕКСТЕ МОДЕРНИЗАЦИИ ВЫСШЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ	42
Ranakhov Etibar S., Vabaoglu M. SPECTRAL PROBLEMS FOR REGULAR CANONIC DIRAC SYSTEMS WITH PARAMETER DEPENDENT BOUNDARY CONDITIONS	47
Тыныбекова С.Д. КОМПЕТЕНТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ – ВКЛАД В КАЧЕСТВО ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ВТУЗОВ	48
Федорчук Ю. М., Извеков В.Н., Русина О.Н. ФОРМИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ У ВЫПУСКНИКОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ	53
Ходиев Ш.И., Кобылов С.С. КОМПИЛЯТОРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ	57
Информационные технологии в методике обучения математике, физике, химии	63
Абылкаиров У.У., Айтжанов С.Е. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ	63
Абылкаиров У.У., Хомпыш Х. КЛАССИЧЕСКАЯ ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ	70
Абылкаиров У.У., Хомпыш Х., Сахаев Ш.С. ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТИ	76
Айдосов А.А., Нарбаева С.М. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РЕАГИРУЮЩИХ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В МНОГОФАЗНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕДАХ	80
Айсагалиев С.А., Белогулов А.П., Севрюгин И.В. УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ	85

Акыш А.Ш. ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_p ($1 < p \leq \infty$)	94
Алиев Ф.А., Велиева Н.И., Агамалиева Л.Ф. АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО ПОЛИНОМА И СЕПАРАЦИИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА	102
Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ГАЗЛИФТНЫМ ПРОЦЕССОМ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОТЕРЯХ ДЕБИТА В ПОДЪЕМНИКЕ	111
Бейсебай П.Б. О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ	119
Бурнышева Т.В., Штейнбрехер О.А. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ	124
Галкин С.В., Асанов Д.А., Запасный В.В. РАСШИРЕНИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ	129
Данаев Н.Т., Аменова Ф.С. О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ (Ψ, Ω)	134
Данаев Н.Т., Байтуленов Ж.Б. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА	138
Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Айменова К.А. ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ	139
Елеуов А.А., Назарбекова К.Т. О БАЗИСТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИИ КОРРЕКТНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	146
Zhumagulov B.T., Mukhambetzhanov A.T., Iskakova A.S., Abilmazhinova B.S. ON THE CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN ONE-DIMENSIONAL CASE	148
Искендерова Д.А., Мусатаева Г.Т. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ	153
Исмаилов Б.Р., Оразов И., Садыбеков М.А. ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЦЕССА ЭКСТРАГИРОВАНИЯ ИЗ ТВЕРДЫХ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ	161
Кабанихин С.И. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В НАУКЕ, ОБРАЗОВАНИИ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ	166
Кальменов Т.Ш., Сураган Д., Токмагамбетов Н.Е. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	173
Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б. ПЕРВЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОКОЛОТЕМ ОТРЕЗКЕ	178
Карчевский А.Л., Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЕОЭЛЕКТРИКИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ СРЕД	181
Крыкпаева А.А. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ	186

Крюкова Я.С., Каледин В.О., Бурнышева Т.В. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ	193
Latkin I.V. ON SOME COMPLEXITY PROBLEMS I	198
Латкина Л.П. ДОПОЛНЕННЫЙ СПИСОК СМЕЖНОСТИ ВЕРШИН И АЛГОРИТМ РАЗБИЕНИЯ НА ОРБИТЫ	211
Нуризинов М.К., Тюлюбергенов Р.К., Хисамиев Н.Г. О ВЫЧИСЛИМЫХ ПОДГРУП- ПАХ ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД ПОЛЕМ	219
Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП	223
Сакабеков А., Аужани Е. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНО- МЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ШЕСТИМОМЕНТНОЙ СИСТЕ- МЫ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	226
Токибетов Ж.А., Тунгатаров А.Б., Сапакова С.З. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМА- НА - ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	227
Тюреходжаев А.Н. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АКТУАЛЬ- НЫХ ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ	235

UDC 004.574

COMPUTER SIMULATION OF THREE-DIMENSION ECOLOGICAL PROBLEMS

Zh. Garifullina

D. Serikbayev East Kazakhstan state technical university

Abstract. Today solution of environment problems by applying high technology is actual. This article discusses mathematical model for calculating the concentration and diffusion of impurities and also describes methods and algorithms for the implementation of the model in three-dimensions.

Keywords: ecologic, diffusion, impurities.

Аңдатпа. Бүгінгі таңда экология мәселесі алдыңғы қатарлы мәселе деп айтуға болады, сондықтан оны жаңа технологиялар көмегімен шешу өзекті болып табылады. Бұл мақалада қоспалардың концентрациясы мен диффузиясын есептеудің математикалық моделі қарастырылған, сонымен қатар бұл үлгіні орындау әдістемелері мен алгоритмдері сипатталып жазылған.

Кілттік сөздер: экология, диффузия, қоспа.

Аннотация. На сегодняшний день остро стоит проблема экологии, поэтому решение этой проблемы путем применения высоких технологий является актуальным. В данной статье описана математическая модель расчета концентрации и диффузии примесей, а также описаны методы и алгоритмы реализации данной модели в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: экология, диффузия, примесь.

Nowadays the environment pollution is actual problem. The human activity concerns all spheres: atmosphere, hydrosphere and lithosphere. And people are the main reason of existing ecological problems, and at the same time they are the main victim. Today around the world more than 40% people die from water pollution, atmospheric and soil pollutions. Many industrial cities and megalopolises of our country suffer from these problems over the years.

Ust-Kamenogorsk is one of the important industrial cities of Kazakhstan. Unfortunately, Ust-Kamenogorsk is a leader of the environment pollution. The atmosphere is polluted with 80000 or more tons of contaminants. There are 170 types of contaminants (lead, selenium, cadmium, arsenic, anhydrous hydrogen fluoride, chlorine, sulfurous anhydride and others). Major industrial objects are located closely to the cit. They adversely affect the ecological situation in the zone of the housing estate.

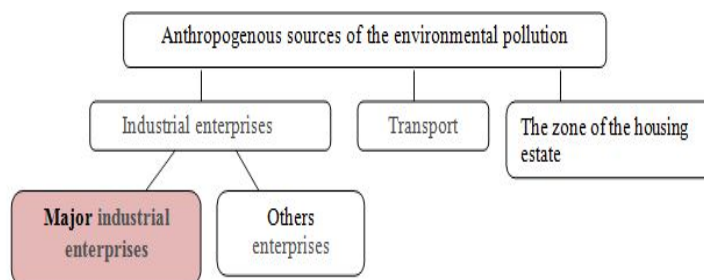


Figure 1 Structure of anthropogenic source of pollution

The air pollution can be the result of the diffusion, which depends on turbulent pulsations of air. M.Y. Berlyand, G.I. Marchuk, V.V. Penenko, A.I. Aloyan and others scientists solve problems about impurity of turbulent diffusion and its transfer.

The models of atmosphere pollution analysis are the main instruments of programming ecological problems. The simulation of impurities dissemination in the atmosphere needs consideration of a lot of factors, which influence on the atmosphere quality. Each of these factors has own specific properties. Mathematical models and databases are necessary their properties.

The model of impurities dissemination in the atmosphere is the model of impurities transfer and diffusion. It is a three-dimensional problem. In figure 2 cubic realm G is presented.

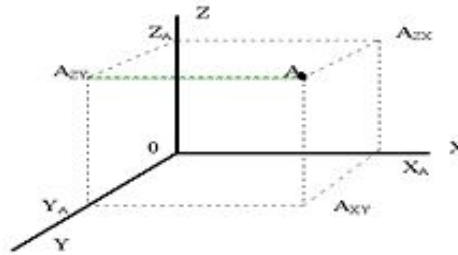


Figure 2 Cubic realm of dissemination of impurities

So, the model of impurities dissemination in the atmosphere is presented by the following equation:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div} U \Phi = D \Phi + f \quad (1)$$

f – Emission source.

(1) it is necessary to attach initial data and boundary conditions to the equation

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{at } t = 0 \quad (2)$$

$$\Phi = \Phi_s \quad \text{in } S \text{ at } U_n < 0 \quad (3)$$

Thereby we have the following equation:

$$\text{div} U \Phi = \frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial V \Phi}{\partial y} + \frac{\partial W \Phi}{\partial z} \quad (4)$$

The equation impurities diffusion in atmosphere:

$$D \bar{\Phi} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (5)$$

Above the three-dimensional statement of problem was presented. The methods of the solution of air pollution problem. The following algorithm is used for numerical tasks realization. It includes several methods.

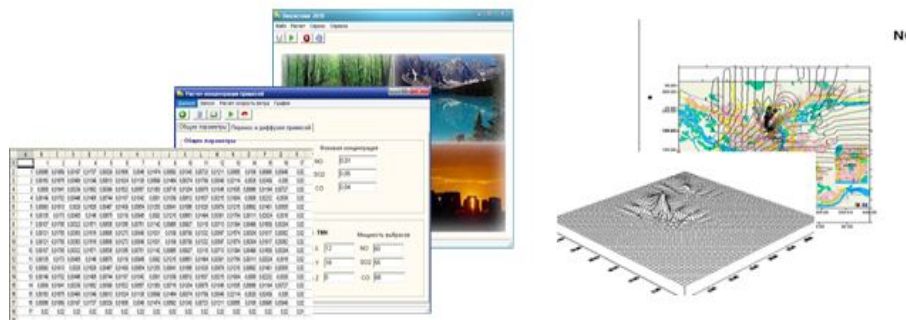


Figure 3 Realization of program

The information system of impurity concentration calculation in the atmosphere was created. The new approach of impurity concentration calculation was used at wind speeds which were calculated on formulas of a logarithmic profile and average on OPP.

List of references

- [1] Марчук Г.И. Mathematical simulation in an environment problem: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. – М.: 1982.-320 p.
- [2] Берлянд М.Е. Forecast and regulation of pollution of the atmosphere: Уч.издание. – М.: 1985.- 315 p.

УДК 004.946

МУЛЬТИМЕДИЙНАЯ СИСТЕМА ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Б.С. Долговесов, Б.С. Мазурок, Б.Б. Морозов, Е.И. Коростелев, М.А. Городилов,
Т.Н. Артиков, А.Н. Артиков

Институт Автоматики и Электрoметрии СО РАН, Новосибирск, Россия

Abstract. This paper presents features of the modern hardware/software integrated solution for interactive presentations. Developed presentation system provides wide opportunities for training and demonstration of various multimedia data. Also the paper describes implementation details and presents useful techniques for providing an interactive integration both images of a lecturer and media (video, presentations, text) into virtual scene. Integrated multimedia content improves the quality of presentations.

Keywords: virtual presenter, multimedia, real-time rendering.

Аннотация. В статье представлены возможности современной системы визуализации для подготовки образовательных материалов. Разработанная система позволяет совмещать мультимедийные данные различных форматов с изображением лектора. Как результат, использование различных вспомогательных материалов и интерактивное взаимодействие с ними позволяют докладчику наглядно иллюстрировать излагаемый материал.

Ключевые слова: виртуальный презентер, мультимедиа, визуализация реального времени.

Введение

В настоящее время широко применяются программные системы, позволяющие создавать лекционный материал для последующего просмотра на персональном компьютере. При этом, область их применения не ограничивается дистанционным образованием и включает традиционный образовательный процесс, где дополнительные материалы используются в качестве наглядной демонстрации каких-либо процессов и свойств. Кроме этого, видеозаписи материала позволяют слушателям лекций в последующем вернуться к повторному изучению представленных тем.

Первые варианты систем для подготовки образовательных материалов позволяют совмещать материалы презентации с видеозаписью лектора (поверх презентаций). В большинстве случаев этого не достаточно, в частности для демонстрации сложных процессов (например, физических реакций, математических моделей), и требуется интерактивность – возможность переключения медиа контента в ходе презентации. Следующим этапом развития систем стали: реализация этих и других возможностей для персональных компьютеров в виде мультимедийной системы виртуальной реальности и последующее применение их для подготовки демонстрационных материалов любой сложности.

Современная система для подготовки образовательных материалов, в первую очередь, позволяет совмещать изображение тематической виртуальной среды и реального докладчика, взаимодействующего в реальном времени с моделями объектов этой среды. Кроме того, система позволяет совмещать мультимедийные данные различных форматов (видеоданные с различных источников, презентации Microsoft PowerPoint, текст, анимированные трехмерные модели). При необходимости также производится автоматическое преобразование данных. В случае видеозаписи докладчика, это, например, замена монохроматического фона.

Компоненты системы

Расширяемость современных систем визуализации обеспечивается благодаря использованию компонентной архитектуры. Подсистемы, как правило, представлены в виде отдельных компонент и требования на них определяются областью применимости мультимедийной системы: образовательный процесс в школах, тренинги, рекламные презентации. Рассмотрим список основных задач, решаемых подсистемами:

- Хранение и преобразования мультимедиа, импорт данных различных распространенных форматов (трехмерные сетки, двухмерные изображения, видеофайлы, гипертекстовые страницы).

- Блок обработки сценариев – поддержка языка сценариев для конфигурирования поведения виртуальной среды в зависимости от времени или действий пользователя.
- Компоновка изображений и растеризация – совмещение и обработка загруженного медиа контента, результатом работы является готовый кадр виртуальной среды изображения.
- Отображение на устройства – вывод готовых кадров на отображающие устройства персонального компьютера.
- Запись результатов – запись изображений виртуальной среды на диск или организация вещания в сеть.
- Интерактивное управление – поддержка различных периферийных устройств для управления (нажатия клавиш мыши или клавиатуры, либо сенсорные экраны).
- Интеграция приложений – внедрение изображений интерфейса и содержания окон сторонних приложений.

Компоненты реализуются в виде динамически загружаемых библиотек. При этом в системе существует функциональность по загрузке и настройке модулей системы, позволяющая конфигурировать систему под требования заказчика и добавлять модули с новыми функциональными возможностями. Кроме этого, исполнение подсистем происходит в отдельных процессах либо потоках.

Реализация системы

Первый вариант мультимедийной системы, либо ее прототип, как правило, разрабатывается на основе существующей системы визуализации общего назначения. Этому варианту достаточно только для решения части задач, поскольку специфика области применимости требует серьезных доработок системы. Так, широко используемые системы визуализации не предоставляют весь набор необходимых компонент и их внедрение в систему, в большинстве случаев, требует серьезных изменений в организации системы и её функционирования.



Рисунок 1 Интерактивная демонстрация трехмерной модели фрагмента ускорителя (ИЯФ СО РАН)

Основываясь на разработках в области интегрированных систем виртуальной реальности [1], создается презентационная система (рис. 1). В ходе разработки предложены ключевые принципы построения систем следующего поколения [2]. Кроме этого, по результатам использования системы предыдущего поколения, сформулированы новые требования и подходы к организации программной архитектуры. В итоге, на этих принципах построена новая версия системы, позволяющая совмещать мультимедийные данные с динамическим изображением докладчика и предоставляющая интерактивное взаимодействие со всеми визуализируемыми элементами. Новая версия мультимедийной системы (на рис. 2 представлен интерфейс новой системы) исполь-



Рисунок 2 Интерфейс управления презентацией

зует унифицированную структуру хранения и обработки данных: формат XQL, иерархическая база данных и алгоритмы ее функционирования [3]. Особенности предлагаемого подхода являются: межмодульное взаимодействие только через базу данных, хранение данных произвольного типа (в том числе последовательности команд). В результате, интерфейсы модулей отделены друг от друга и зависимости между ними определяются только данными. При таком подходе, модули более ранних версий интерпретируют только известные им данные, а добавленные для более поздних версий (неизвестные) игнорируют.

База данных используется для доступа к произвольным свойствам системы. Допускается частичное дублирование данных в программных модулях – для более эффективного использования аппаратных ресурсов (отображение в видеопамять, предварительная компиляция эффектов, кэширование крупных структур). Для того чтобы обеспечить обновление данных, применяется система обработки событий: каждый модуль регистрируется на уведомления о чтении и записи в базу данных определенного набора структур.

Блок обработки сценариев использует команды в формате XQL. Также он поддерживает возможность интерпретации команд языков Lua и Javascript. Используемый набор команд позволяет наполнять и модифицировать базу данных, доступ к которой имеют все подсистемы разработанного программного решения. Компоновка изображений и растеризация осуществляется модулем (подсистемой) визуализации. Модуль поддерживает различные спецэффекты и конвейер обработки изображений [4], позволяет формировать изображение интегрированной виртуальной среды (схема представлена на рис 3). Изображение докладчика, взаимодействующего с изучаемыми виртуальными моделями, совмещается с тематическим виртуальным фоном и виртуальными моделями трехмерных объектов. Для обработки изображения докладчика используется технология выделения актёра на монохроматическом фоне [5]. Реализованная технология дает результат, в реальном времени, без видимых дефектов при различных съёмочных условиях.

Вывод готовых кадров на отображающие устройства персонального компьютера осуществ-

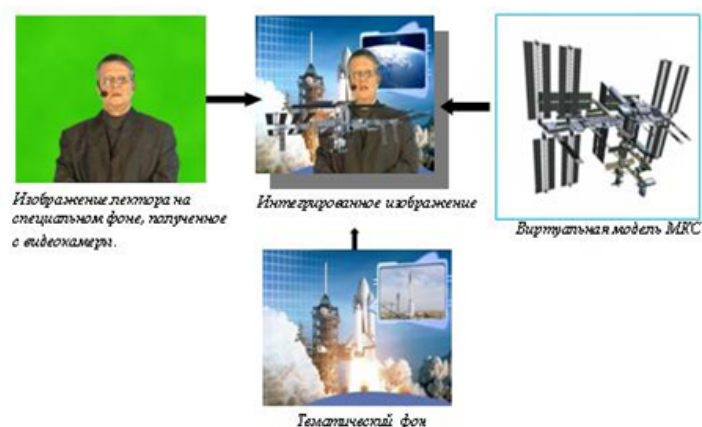


Рисунок 3 Принцип формирования интегрированной виртуальной среды

ляется одним из двух возможных способов: непосредственный вывод на монитор, либо вывод в плату для организации вещания (семейство плат FD компании SoftLab-NSK). Для обеспечения правильной вертикальной синхронизации кадры буферизируются и обрабатываются в отдельных потоках исполнения. Для этого используются средства видеодрайвера, предоставляющие возможность разделения видеопамяти между потоками.

Поддерживаются различные форматы представлений изображений, имеющие разное разрешение и соотношение сторон пиксела (аспект пиксела). Допускается фиксированный размер rasterизуемого изображения, а также различные соотношения сторон пиксела итогового кадра. В этих случаях применяются корректирующие методы (вписывание, обрезка, масштабирование кадров). Кроме того, при необходимости, к изображению добавляются чёрные поля. Запись результатов на диск осуществляется с помощью разработанного фильтра DirectShow []. При этом пользователю системы предоставляется возможность выбирать формат и способ кодирования видео и аудио данных.

Интерактивное управление и интеграции сторонних приложений осуществляется через удаленное управление и передачу системных событий в сторонние процессы (окна приложений) системы. С помощью разработанного драйвера производится захват части рабочего стола пользователя (как правило, второй монитор), где размещаются приложения. Захваченные изображения отображаются непосредственно в разработанной системе и любые взаимодействия с ними (действия пользователя) в виртуальной среде передаются соответствующим приложениям. Таким образом, докладчик, находясь в рамках приложения мультимедийной системы, свободно взаимодействует со сторонними приложениями и видит результат их работы. Данная функция широко востребована и применяется для демонстрации интерактивных материалов, предоставляемых специализированными приложениями (например, виртуальными лабораториями, пакетами моделирования).

Заключение

В ходе разработки новой мультимедийной системы учтены недостатки существующих систем для подготовки образовательных материалов. Сформулирован список необходимых функций, достаточных для эффективного применения системы в образовательном процессе, а также предложены программные решения соответствующих вопросов. В результате, разработанная система

удовлетворяет современным требованиям и применима для решения соответствующих задач: всевозможные презентации для выставок, лекционных залов, ситуационных центров, музеев, обучение персонала управлению сложными технологическими процессами и техническими системами, дистанционное обучение и телеконференции.

Список литературы

- [1] Долговесов Б.С, и др. Система обучения и презентаций с использованием технологии «погружения» лектора в интерактивную виртуальную среду // Сборник трудов «Online EDUCA 2007, Moscow». 2007.
- [2] Ванданов В. Г. и др. Программно-аппаратный комплекс 3d презентаций на основе виртуальной студии и виртуального окружения // Труды конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования». 2009. Том 1. С. 73-77.
- [3] Долговесов Б.С. и др. Объектно-ориентированная база данных в интерактивных системах 3D визуализации // Вестник НГУ. Серия: Физика (том 6, выпуск 3) . 2011. – С.59-63
- [4] Городилов М.А. и др. Управление конфигурациями конвейера обработки изображений и спецэффектов систем визуализации реального времени // Сборник трудов «Технологии Microsoft в теории и практике программирования». 2011. – С. 85-87.
- [5] Ковальков М.А. и др., Разработка и реализация алгоритмов рирпроекции на базе современного графического акселератора // Труды конференции Графикон-2006. 2006 . – С. 360-362

УДК 51-72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ФИЗИКЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

А. Жайнаков

Институт физико-технических проблем и материаловедения имени академика Ж. Женбаева
Национальной Академии Наук Кыргызской Республики

Abstract. The aim of the paper is a brief overview of the development of computing technologies in Kyrgyzstan and mathematical modelling in physics of low-temperature plasma. Give a brief overview of the developed models of low-temperature plasma and the analysis of the results obtained. In general terms, the system of three-dimensional Magnetohydrodynamic equations. A simplification, consider additional conditions and finite-difference approximation of generalized equations and methods of solution.

Keywords: low-temperature plasma, model

Аңдатпа. Жұмыста Кыргызстандағы төмен температурлық плазма физикасындағы есептеуіш технологиялар мен математикалық үлгілеудің дамуына шолу жасалды. Өзірленген төмен температурлық плазмаға шолу жасалды және алынған нәтижелерге талдау жасалды. Жалпыланған түрде үшденгейлі магнитті-гидродинамикалық теңдеулер жүйесі келтірілген. Бқшамдатылған түрі келтірілген, қосымша шарттар қарастырылған.

Кілттік сөздер: төмен температурлық плазма, үлгі

Аннотация. В работе проводится краткий обзор развития в Кыргызстане вычислительных технологий и математического моделирования в физике низкотемпературной плазмы. Дан краткий обзор разработанных моделей низкотемпературной плазмы и анализ полученных результатов. Приведена в общем виде система трехмерных магнитогидродинамических уравнений. Проведено их упрощение, рассмотрены дополнительные условия и конечно-разностная аппроксимация обобщенного уравнения и методы решения.

Ключевые слова: низкотемпературная плазма, модель

Низкотемпературная плазма, обладающая рядом исключительных свойств, не реализуемых в обычных условиях, всегда привлекала большое внимание ученых всего мира. Широкие масштабы разработки и применения новых плазменных технологий настоятельно требуют дальнейшего изучения теплофизических процессов и свойств низкотемпературной плазмы.

Наряду с экспериментальными методами исследования, все большее значение приобретают теоретические методы исследования, в частности, вычислительный эксперимент. Как показывает многолетняя практика, методы математического моделирования низкотемпературной плазмы являются эффективным инструментом исследования, позволяют существенно дополнить и в ряде случаев объяснить результаты физического эксперимента.

Последние годы, отмеченные высокими темпами развития численных методов решения дифференциальных уравнений и новых компьютерных технологий, подняли методы вычислительного эксперимента на качественно новый уровень. В настоящее время можно констатировать, что вычислительная магнитная гидродинамика полностью сформировалась как самостоятельная научная дисциплина, бурно развивающаяся и имеющая широкие перспективы.

Большой вклад в развитие плазменных технологий и методов математического моделирования электрической дуги внесли ученые Кыргызстана.

Первоначально численные исследования электрической дуги проводились в рамках каналových и интегральных моделей, а также в приближении пограничного слоя. Относительная простота математических моделей обусловлена тем, что уровень развития вычислительных технологий и численных методов решения МГД-уравнений не позволял решать задачи в более сложной постановке. Тем не менее, проведенные исследования позволили заметно расширить и углубить знания о протекающих физических процессах. Так, автором данной статьи впервые был выполнен численный анализ характеристик дуги на начальном участке плазматрона с учетом электромагнитных сил дуги. Выявлены основные механизмы нагрева и течения газа, определены важные характеристики дуговой плазмы [1-3].

Новое поколение ЭВМ стимулировало дальнейшие численные исследования в области низкотемпературной плазмы. Были развиты двумерные математические модели электродуговой плазмы как в приближении локального термодинамического равновесия [4], так и с учетом отклонения плазмы от термического и ионизационного равновесия [5]. Использование двумерных моделей позволило заметно расширить круг исследуемых задач. Проведены численные исследования от-

крытых электрических дуг и плазмотронов. Обнаружены качественно новые вихревые режимы течения плазмы, выявлены условия формирования «плазменных тарелок» как результат соударения катодных и анодных струй. Рассмотрено влияние закрутки газа на характеристики дугового потока [6].

Появление в последние годы быстродействующих компьютеров с большим объемом оперативной памяти позволило приступить к решению более сложных задач. Так, например, развита трехмерная математическая модель расчета характеристик стационарной электрической дуги [7].

Система уравнений в декартовых координатах x, y, z включает в себя: уравнение неразрывности газа

$$\operatorname{div}(\rho U) = 0, \quad (1)$$

уравнение неразрывности электронного газа

$$\operatorname{div}[N_e(U + U_d + U_t + U_a)] = Re, \quad (2)$$

уравнения движения в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div}[m(N_i + N_a)Uu] = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}u) - \partial P / \partial x + \mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_x + s_x + (p - p_\infty)g, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}[m(N_i + N_a)Uv] = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}v) - \partial P / \partial y + \mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_y + s_y, \quad (4)$$

$$\operatorname{div}[m(N_i + N_a)Uw] = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}w) - \partial P / \partial z + \mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_z + s_z, \quad (5)$$

уравнение энергии электронного газа

$$\operatorname{div}[N_e(\mathbf{U} + \mathbf{U}_d + \mathbf{U}_t + \mathbf{U}_a)(5/2kT_e + U_i)] = \operatorname{div}(\lambda_e \operatorname{grad}T_e) + \mathbf{j}^2 / \sigma - \psi - B(T_e - T), \quad (6)$$

уравнение энергии тяжелых частиц

$$\operatorname{div}[5/2kT(N_i + N_a)U] = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}T) + B(T_e - T), \quad (7)$$

уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

обобщенный закон Ома

$$\mathbf{E} + \mu_0(\mathbf{U} \times \mathbf{H}) = \mathbf{j} / \sigma + (\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \operatorname{grad}P_e) / q_e N_e, \quad (9)$$

и закон Дальтона

$$P/kT = N_i + N_a + N_e T_e / T. \quad (10)$$

Рассматриваются стационарные процессы в однократно ионизованной аргоновой плазме атмосферного давления, излучение предполагается объемным.

При записи уравнений использованы следующие обозначения: $p, \lambda_e, \lambda, \mu, \sigma, \psi$ - соответственно плотность газа, теплопроводность электронного газа и газа тяжелых частиц, вязкость,

электропроводность, излучение; m - масса атома; N_i, N_a, N_e - концентрации ионов, атомов и электронов соответственно; $R_e = N_e K_r (N_a K_i - N_e N_i)$ - скорость генерации электронов; K_r - коэффициент трехчастичной рекомбинации, K_i - определяется уравнением Саха; U_i - потенциал ионизации газа; P_e - парциальное давление электронов; k - постоянная Больцмана; B - коэффициент энергообмена между электронами и тяжелыми частицами; g - ускорение свободного падения; $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ Кл - заряд электрона; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная; $\mathbf{U}, \mathbf{E}, \mathbf{j}, \mathbf{H}$ - соответственно векторы скорости, напряженности электрического поля, плотности электрического тока, напряженности магнитного поля; T, T_e - температура тяжелых частиц и электронов, P - давление; u, v, w - соответственно компоненты вектора скорости в направлении осей декартовой системы координат x, y, z ; $U_d = j/(q_e N_e)$, $U_t = -0.5/T_e D_a \text{grad} T_e$, $U_a = -D_a/N_e \text{grad} N_e$ - векторы скоростей дрейфа электронов, термо- и амбиполярной диффузии соответственно; D_a - коэффициент амбиполярной диффузии; s_x, s_y, s_z - дополнительные к $\text{div}(\mu \text{grad} u)$, $\text{div}(\mu \text{grad} v)$, $\text{div}(\mu \text{grad} w)$ слагаемые, учитывающие вязкость.

Коэффициенты переноса и теплофизические свойства неравновесной аргоновой плазмы рассчитываются в соответствии с методикой [5].

Электромагнитная часть задачи решается в переменных $\varphi - A$, где φ - потенциал электрического поля φ , связанный с \mathbf{E} соотношением $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$, A - векторный потенциал магнитного поля, связанный с соотношением $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$. Используя закон Ома, условие сохранения электрического тока $\text{div}\mathbf{j} = 0$ и уравнения Максвелла, уравнения для расчета φ и A могут быть приведены к следующему виду:

$$\text{div}(\sigma \text{grad}\varphi) = \text{div}[\sigma \mu_0(\mathbf{U} \times \mathbf{H}) - \sigma(\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \text{grad} P_e)/q_e N_e] \quad (11)$$

$$\Delta A = -j \quad (12)$$

Использование скалярного потенциала φ позволяет избежать вычисления в итерационном процессе трех компонент вектора \mathbf{E} , а введение векторного потенциала A - избежать вычисления в итерациях напряженности магнитного поля \mathbf{H} через тройной интеграл по закону Био-Савара-Лапласа: $\mathbf{H} = (1/4\pi) \int \int \int [j \times R]/R^3 dV$ требующего, как показано в [8], чрезмерно много времени расчета.

Математическая модель столба электрической дуги дополняется стационарной тепловой задачей для электродов. Система уравнений для расчета трехмерных распределений температурного поля и течения электрического тока в катод и аноде включает в себя уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа и может быть записана в следующем виде:

$$\text{div}(\lambda \text{grad} T) + j^2/\sigma = 0, \quad (13)$$

$$\text{div}(\sigma \text{grad}\varphi) = 0, \quad (14)$$

где T, j, φ - температура электродов, вектор плотности электрического тока и потенциал электрического поля соответственно; $\sigma(T), \lambda(T)$ - коэффициенты электропроводности и теплопроводности материала электродов соответственно.

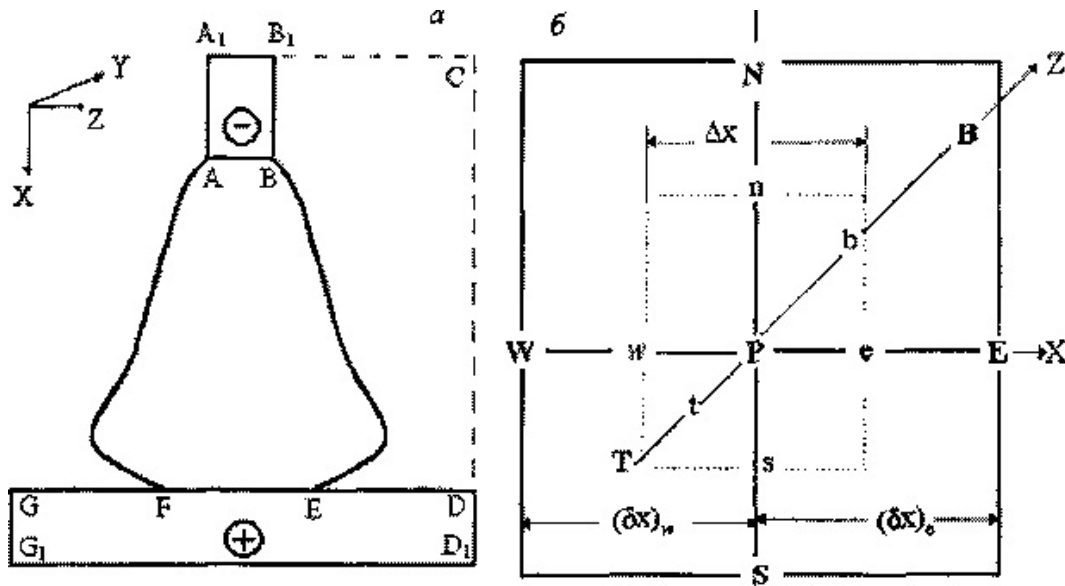


Рисунок 1 а - схема открытой дуги в плоскости X-Z.

б - фрагмент трехмерной разностной сетки и контрольного объема (пунктир).

Исходная система уравнений после несложных преобразований записывается в обобщенной форме:

$$\operatorname{div}(\alpha\rho U\Phi) = \operatorname{div}(\beta\operatorname{grad}\Phi) + \gamma, \quad (15)$$

Φ - одна из неизвестных - $N_e, T_e, T, u, v, w, \varphi, A_x, A_y, A_z$. Значения коэффициентов α, β, γ , зависят от смысла переменной Φ и приведены в таблице 2.

В результате конечно-разностной аппроксимации обобщенного уравнения (15) получаем дискретный аналог, связывающий значение переменной в центральном узле P (рис. 16) с ее значениями в соседних узлах разностной сетки N, S, W, E, T, B :

$$a_p\Phi_p = a_E\Phi_E + a_w\Phi_w + a_N\Phi_N + a_s\Phi_s + a_B\Phi_B + a_t\Phi_t + \Gamma \quad (16)$$

где $a_p = a_E + a_W + a_N + a_s + a_B + a_T, \Gamma = \gamma\rho\Delta x\Delta y\Delta z$.

Решение дискретного аналога (16) проводится итерационным методом Зейделя-Гаусса с применением нижней релаксации. Численное решение уравнений проводится на основе метода [9].

Таблица 1 Граничные условия

Граница	Переменная
A_1B_2	φ : условие ортогональности электрического тока; $A = (1/4\pi) \int \int \int j/RdV; T = T_s; U = 0; T_e = T_e^{min}; N_e = N_e^{min}; \partial P/\partial x = 0$
AB	φ : условие ортогональности электрического тока; $\partial T_e/\partial x = 0; T = T_c(y, z); \partial N_e/\partial x = 0; U = 0; \partial P/\partial x = 0$
FE	φ : условие ортогональности электрического тока; $\partial T_e/\partial x = 0; T = T_a(y, z); dN_e/dx = 0; U = 0; \partial P/\partial x = 0$
$BC; CD$	$T_e = T_e^{min}; N_e = N_e^{min}; \partial T/\partial n = 0; \partial \varphi/\partial n = 0; A = (1/4\pi) \int \int \int j/RdV P = P^*; \partial u/\partial n = 0; \partial v/\partial n = 0; \partial w/\partial n = 0.$
$ED; GF$	$T = T^*; T_e = T_e^{min}; N_e = N_e^{min}; \partial \varphi/\partial x = 0; U = 0; \partial P/\partial x = 0.$
GiD	$A = (1/4\pi) \int \int \int j/RdV; T = T^*; T_e = T_e^{min}; N_e = N_e^{min}; U = 0; \partial P/\partial x = 0. \varphi$: условие ортогональности электрического тока;

Таблица 2 Коэффициенты α, β, γ для переменной Φ уравнения (15)

Φ	α	β	γ
N_e	$1/\rho$	D_a	$R_e - div(N_e U_t)$
T_e	$5/2kN_e/\rho$	λ_e	$j^2/\sigma - \psi - B(T_e - T) - div[N_e(U_d + U_t + U_a)(5/2kT_e + U_i)] - div(N_e U U_i) :$
T	$5/2k(N_a + N_i)/\rho$	λ	$B(T_e - T)$
u	1	μ	$-\partial P/\partial x + \mu_0[j + H]$
\mathbf{V}	1	μ	$-\partial P/\partial y + \mu_0[j + H]_{Y+S_Y}$
\mathbf{W}	1	μ	$-\partial P/\partial z + \mu_0[j + H]_{Z+S_Z}$
A_x	0	1	j_x
A_y	0	1	j_y
A_z	0	1	j_z
Φ	0	σ	$div[\sigma\mu_0(U \times H) - \sigma(\mu_0 j - H - grad P_e)_e/N_e]$

В рамках трехмерной математической модели исследованы характеристики дуги во внешнем поперечном магнитном поле, а также в скрещенном магнитном и газодинамическом поле. Выявлены механизмы нагрева и течения дуговой плазмы, причины смещения и деформации дугового столба во внешнем магнитном поле [10, 11].

Проведены численные исследования влияния направления токоподвода к аноду на столб дуги [12]. На рис. 2 представлены изолинии поля температуры электронов T_e , векторные поля течения электрического тока j в аноде и течения газа V в столбе дуги, когда электрический ток течет с боковой поверхности анода.

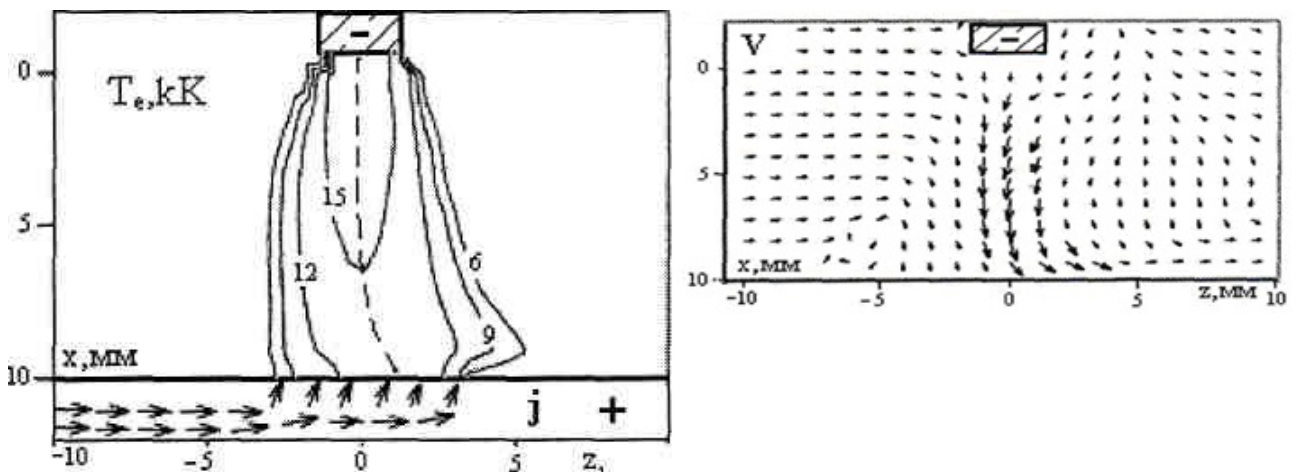


Рисунок 2 Изолинии температуры электронов T_e , векторные поля течения электрического тока j в аноде и течения газа V в столбе дуги; $I = 150$ А, $L = 10$ мм.

В этом случае происходит взаимодействие магнитных полей, создаваемых течением тока в столбе дуги и аноде. Из рис. 2 видно, что направление течения тока в аноде оказывает заметное влияние на характеристики столба дуги.

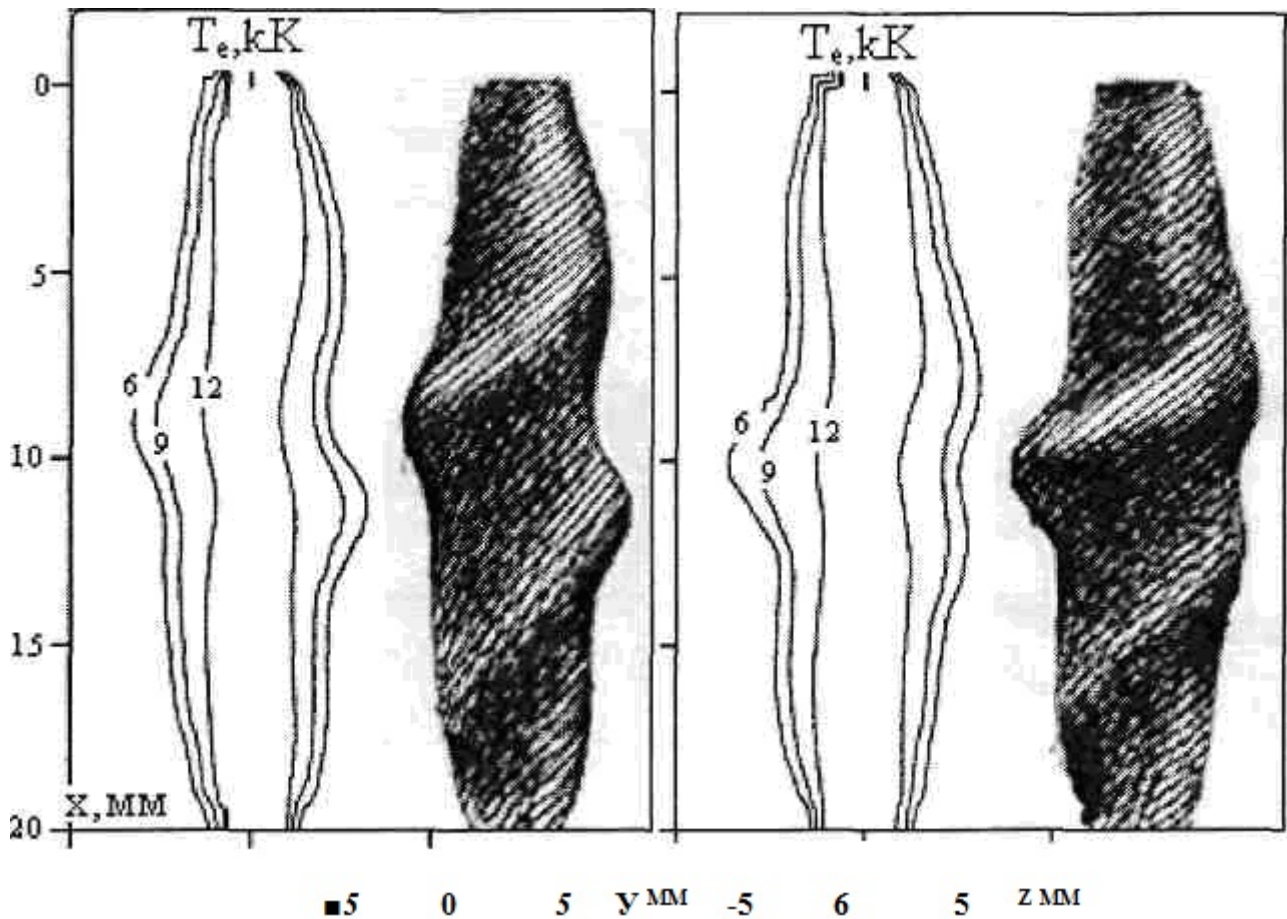


Рисунок 3 Изолинии температуры электронов T_e и рисунок дугового столба; продольный обдув $U_{\text{обдува}} = 5$ м/с, $I = 50$ А, $L = 20$ мм, $H_x = 5$ кА/м.

Численные эксперименты [13] с электрической дугой в продольном магнитном поле H_x позволили выявить формирование такой сложной пространственной структуры столба дуги, как винтовая форма дуги (рис. 3). В рамках двумерной математической модели развита методика расчета характеристик электрической дуги в областях сложной геометрии, включающей в себя столб дуги, твердое тело электродов, а также расплав материала электродов (рис. 4). Методика основана на использовании модели ЧЛТР плазмы с привлечением опытных данных о характеристиках дуги вблизи электродов и применении известного в вычислительной гидродинамике метода фиктивных областей [14].

Расчет характеристик электрической дуги в областях сложной геометрии проводится в рамках приближения частичного локального термодинамического равновесия плазмы.

В цилиндрической системе координат z, r, φ при условии $\partial/\partial\varphi = 0$ (задачи обладают осевой симметрией) система МГД-уравнений имеет вид:

уравнение неразрывности газа

$$\text{div}(\rho U) = 0, \quad (17)$$

уравнение неразрывности электронного газа

$$\text{div}[N_e(U + U_d + U_i + U_a)] = R_e, \quad (18)$$

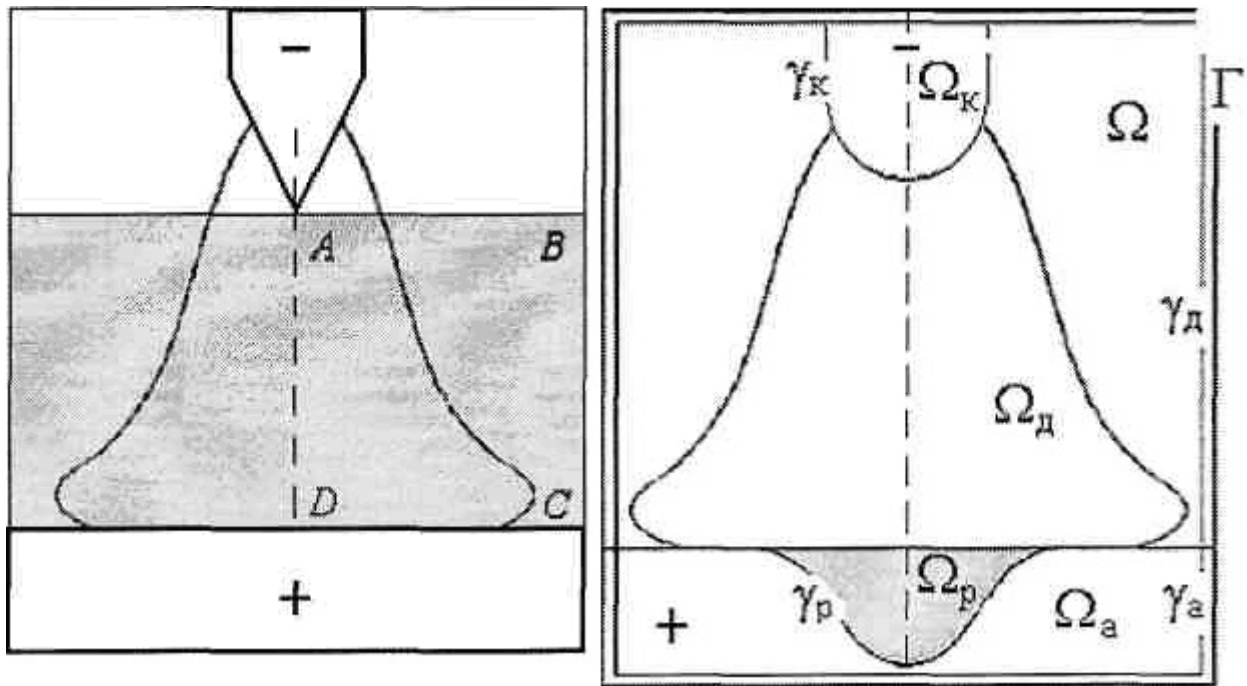


Рисунок 4 а - расчётная область ABCD столба дуги, не включающая катод «-» и анод «+»
 б - расчетная область Q, заключающая в себе столб дуги и электроды, включая расплав

уравнения движения по координатам z и r соответственно

$$\operatorname{div}[m(N_j + N_a)Uu] = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}u) - dP/dz + \mu_0 j_r H_0 + s_z, \quad (19)$$

$$\operatorname{div}[m(N_i + N_a)Uv] = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}v) - dP/dr + \mu_0 j_r H_0 + s_r, \quad (20)$$

уравнение энергии электронного газа

$$\operatorname{div}[N_e(U + U_d + U_i + U_a)(5/2kT_e + U_i)] - \operatorname{div}(\lambda_e \operatorname{grad}T_e) + j^2/\sigma - \psi - B(T_e - T), \quad (21)$$

уравнение энергии тяжелых частиц

$$\operatorname{div}[5/2kT(N_i + N_a)U] = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}T) + B(T_e - T), \quad (22)$$

уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}H = j, \operatorname{rot}E = 0, \operatorname{div}H = 0, \quad (23)$$

закон Ома

$$E = j/a \quad (24)$$

закон Дальтона

$$P/kT = N_i + N_a + N_e T_e/T \quad (25)$$

Электромагнитная часть задачи решается с использованием функции электрического тока $\chi(r, z)$, автоматически удовлетворяющей уравнению сохранения электрического тока $div j = 0$ и определяемой соотношениями $d\chi/dz = -j_r r$, $\partial\chi/\partial r = j_z r$.

Система МГД-уравнений записана с учётом упрощений, справедливых для большинства электродуговых процессов. Так, в уравнениях движения пренебрегается силами Архимеда и Кулона; в уравнениях энергии – кинетической энергией потока газа и вязкой диссипацией; в законе Ома – плотностью индуцированного электрического тока, плотностью тока Холла и тока, обусловленного градиентом электронного давления.

Полагается, что протекающие процессы являются стационарными, однократно ионизованная плазма атмосферного давления представляет собой сплошную квазинейтральную среду; течение является ламинарным, излучение объемным, приэлектродные процессы не рассматриваются.

Апробация метода фиктивных областей для расчета электрической дуги в многосвязной области проведена в работах [15, 16].

Выполнено сравнение результатов расчета с экспериментом и расчетными данными работ [17-19], полученными без применения метода фиктивных областей. Анализ результатов позволяет предположить правомерность использования метода фиктивных областей для численного расчета характеристик электрической дуги. Показано, что для проведения количественного анализа необходимо привлечение дополнительной информации о дуговом разряде, которая может быть получена либо из эксперимента, либо в рамках соответствующих моделей приэлектродных процессов.

Подводя краткий итог, можно констатировать, что математическое моделирование низкотемпературной плазмы на основе новых вычислительных и компьютерных технологий позволяет заметно продвинуться в понимании сложного комплекса процессов электрической дуги. Вместе с тем, широкий круг практически важных задач требует дальнейшего развития расчетно-теоретических моделей электрической дуги и проведения численных исследований.

Список литературы

- [1] К расчету плазматрона. В кн.: Применение плазматрона в спектроскопии. Жайнаков А., Энгельшт В.С. // Фрунзе: Илим, 1970, с. 194.
- [2] Нагрев и течение проводящего газа. // Жайнаков А., Лелевкин В.М., Энгельшт В.С. // Изв. АН СССР, МЖГ. 1975, № 5. с. 190-193.
- [3] Методы расчета и численный анализ течений проводящего газа в сильнооточных электрических дугах. 3. Десятков Г.А., Жайнаков А., Козлов П.В. и др. // Изв. АН СССР, МЖГ. 1978, №5. с. 103-110.
- [4] Магнитогазо-динамические потоки в сильнооточных электрических дугах. Жайнаков А., Невелев Д.В., Слободянюк В.С., Энгельшт В.С. // Изв. АН СССР, МЖГ. 1983, №5. с. 138-143.
- [5] Низкотемпературная плазма. Т.1. Теория столба электрической дуги. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А., Жайнаков А. и др. -Новосибирск: Наука, 1990.

- [6] Электрическая дуга - генератор низкотемпературной плазмы. Жайнаков А., Лелевкин В.М., Мечев В.С. и др. - Бишкек: Илим. - 1991. - 440 с.
- [7] Трёхмерная модель расчета электродуговых потоков. Жайнаков А., Урусова Т.Э., Урусов Р.М. // Бишкек: Наука и новые технологии. 1999. № 2. с. 3-7.
- [8] Численный анализ неосесимметричных электрических дуг. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Бишкек: Илим, 2001. 232с.
- [9] Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Патанкар С. М.: Энергоатомиздат, 1984. 146 с.
- [10] Трёхмерная математическая модель расчета электро- дуговых потоков плазмы. Жайнаков А., Урусов Р.М // М: ТВТ, 2002, т.40, №1, с.13-18.
- [11] Численное моделирование газодинамических потоков, формируемых электрической дугой во внешнем поперечном магнитном поле. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // М: ТВТ, 2002, т.40, №2, с. 199-203.
- [12] Влияние токоподвода к аноду на столботкрытой электрической дуги. Труды 3-й Международной научно-технической конференции. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Алматы, 2002, с.138-141.
- [13] Расчет электрической дуги в продольном магнитном поле. 13. Урусов Р.М. // М: ТВТ, 2003, т.41, №2, с.181-188.
- [14] Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях. 14. Смагулов Ш., Сироченко В.П., Орунханов М.К. - Алматы, 2001, 276с.
- [15] Расчёт электрической дуги в многосвязной области методом фиктивных областей. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // Вычислительные технологии. - Новосибирск. -2003.-т. 8.ч.2. -С.12-21.
- [16] Применение метода фиктивных областей для расчёта электрической дуги. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // М: ТВТ.- 2004. - т.42. - № 3. - С.374 - 382.
- [17] Исследование баланса энергии на аноде сильнотоочных дуг, горящих в атмосфере аргона. Шоек П. // В кн.: Современные проблемы теплообмена. - М.: Энергия. 1966. -с.110-139.
- [18] Study of the Free-Burning High-Intensity Argon Arc. Hsu K.S., Etemadi K., Pfender E. // J. Appl.Phys.-1983.-Vol. 54.-No3.-pp. 1293-1304.
- [19] Two-Temperature Modeling of the Free-Burning, High-Intensity Arcs. Hsu K.C., Pfender E. // J. Appl. Phys. - 1983. - Vol.54. - No 8. - pp. 4359.
- [20] Численное исследование влияния формы катода на характеристики электрической дуги. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // М: ТВТ. - 2005. - т.43. - № 3. - с.359 - 366.
- [21] К расчёту течения плазмы вблизи профилированной поверхности катода электрической дуги. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // М: ТВТ. 2005. т. 43. №2. с.175-180.

- [22] Численная реализация электрической дуги трубчатой формы. Урусов Р. М., Урусова Т. Э. // Новосибирск: ТиА. - 2005. - т. 12. - №2. - с.315 - 323.
- [23] Расчёт электрической дуги с кольцевой привязкой на внешней боковой поверхности катода. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // Новосибирск: ТиА. 2005. т.12. №3. с.501 -511.
- [24] Численный расчёт электрической дуги с кольцевой привязкой на торце катода. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т. Э. // Новосибирск: ТиА. 2006. т. 13. №4. с.651 -658.
- [25] Расчет электрической дуги на коаксиальных катодах. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // Вестник КНУ, - Бишкек, - 2005. - с. 141 - 143.
- [26] Численная реализация дугового разряда на коаксиальных катодах. Урусова Т. Э. // Изв. НАН КР. - 2006. - №2. - с. 94 - 100.
- [27] Расчёт стационарного течения в ванне расплава при электродуговом нагреве. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. // Новосибирск: ТиА.- 2007. - т.14. - №2. - с.277 - 288.
- [28] К расчёту гидродинамики расплава катода электрической дуги. Урусова Т.Э. // Изв. НАН КР. - Бишкек. - 2007. - №4. - с. 17 - 25.
- [29] Численное исследование течения в капле расплава катода электрической дуги. Урусов Р.М., Урусова Т.Э., Нам И. // Новосибирск: ТиА. -2008. -т. 15. — №1. -с.365-374.
- [30] Численный анализ электрических дуг в нерегулярных областях. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. - Бишкек. - 2007. - 196 с.

УДК 681.3.06:54

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ВУЗОВСКОГО КУРСА ХИМИИ

Е.Н. Иващенко, Н.В. Серая

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The problems of the use of information technologies with the application of means of conceptual and mathematical modeling of chemical phenomena and processes in chemistry teaching in high school are considered.

Particular attention is given to the use of Delphi software package, which basic algorithm is setting of the variety of tasks, such as an identification of the form of radial distribution of an atom wave function or the form of hybrid orbital.

Аннотация. Рассматриваются проблемы использования информационных технологий, с применением средств концептуального и математического моделирования химических явлений и процессов в преподавании курса химии в высшей школе.

Особое внимание уделено применению программного пакета Delphi, основной алгоритм которого заключается в постановке различных задач, например, для установления вида радиального распределения волновой функции атома или формы гибридной орбитали.

Процессы математизации химической науки требуют подготовки квалифицированных специалистов, умеющих применять математические методы и владеющих современными информационными технологиями в своей профессиональной деятельности.

Перед техническими университетами стоит проблема подготовки специалиста с качествами, адаптированными к потребностям общества. Подготовка таких специалистов должна осуществляться через обновленный образовательный процесс. В его основе – инновационная деятельность преподавателей высшей школы, ориентированная на совершенствование профессиональной подготовки специалиста с учетом фундаментальности, интегративности, информатизации, профессиональной и личностной ориентации студентов. Поэтому поиск новых технологических решений для совершенствования учебного процесса по химии с учетом отмеченных факторов и недостаточность разработанности теоретических основ и практики современных технологий обучения с одновременным учетом потребностей информационного общества является весьма актуальной в настоящее время.

В связи с этим актуальными становятся вопросы повышения эффективности химической подготовки студентов в ВУЗе на основе внедрения новых информационных технологий.

Для реализации поставленной цели от преподавателя требуется такая организация учебного процесса, в ходе которой будут учитываться индивидуальные особенности каждого студента, влияющие на его учебную деятельность и результаты обучения. Опыт преподавания данного курса в ВУЗе позволяет сделать вывод о недостаточности традиционных средств представления информации и наметить пути модернизации педагогического процесса за счет применения информационных технологий [1].

Информационные технологии играют все более заметную роль в организации обучения химии. Решение химических задач представляет собой один из возможных вариантов применения информационных технологий в процессе обучения, что позволяет расширить кругозор студентов, предоставляет новые возможности передачи информации, более широкого применения средств наглядности, диалогового режима обучения в сочетании с индивидуализацией обучения и активностью студентов.

Применение современных информационных технологий в процессе обучения химии возможно еще и в тех случаях, когда постановка эксперимента для исследования отдельных вопросов представляется проблематичной и сложной, например, при установлении вида радиального распределения волновой функции атома или формы гибридной орбитали атома [2].

Программа Delphi является дополнением к основному курсу дисциплины «Химия». Подобный программный продукт обеспечивает преподавателю не только возможность выполнять сложные математические расчеты, но и быстро решать многие задачи химии. Основной алгоритм и возможности программы заключаются в постановке задачи.

Задача 1. Волновые функции гармонического осциллятора.

Рисунок 1 Окно ввода данных для задачи «Волновые функции гармонического осциллятора»

Волновые функции гармонического осциллятора являются решениями соответствующего уравнения Шредингера. Общий вид их следующий:

$$\Psi_n(z) = \left(\frac{1}{(\pi * x_0 * 2^n * n!)^{1/2}} \right) * H_n(z) * e^{-z*z/2}, \quad (1)$$

где $z = x/x_0$

$\left(\frac{1}{(\pi * x_0 * 2^n * n!)^{1/2}} \right)$ - нормировочный множитель.

$$H_n(z) = (-1)^n * e^{z*z} * \left(\frac{\partial^n e^{-z*z}}{\partial z^n} \right) \quad - \text{полиномы Эрмита.} \quad (2)$$

Полиномы Эрмита удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$H_{n+1}(z) = 2 * [z * H_n(z) - n * H_{n-1}(z)] \quad (3)$$

При этом $H_0 = 1$, $H_1 = 2 * z$.

Составить в среде программирования Delphi программу: расчета значений волновых функций гармонического осциллятора в интервале $0 \leq z \leq b$ с шагом h ; построения графиков волновых функций $\psi_n(z)$ в интервале $-b \leq z \leq b$.

Задание 1.1 - рассчитать, используя составленную программу (рис. 1, рис. 2, рис. 3), значения волновой функции гармонического осциллятора в интервале $0 \leq z \leq 2$ с шагом 0,2.

Используя свойства симметрии, построить графики первых пяти волновых функций $\psi_n(z)$ в интервале $-2 \leq z \leq +2$.

Указания к выполнению: расчет значений волновых функций производится по формуле (1) в заданном интервале. Значения полиномов Эрмита вычисляются по рекуррентной формуле (3). В качестве входных величин использовать порядок полинома n (номер волновой функции от 0 до максимум 10) и значение $x_0 = 1$.

Задача 2. Расчет водородоподобных волновых функций.

Решениями радиального уравнения Шредингера для водородоподобного атома являются волновые функции, зависящие только от расстояния до ядра – радиальные волновые функции. Первые шесть радиальных функций, соответствующих главному квантовому числу $n = 1, 2, 3$ приведены в таблице 1.

аргумент z	множитель	значение функции
0	0,199471140200716	-0,398942280401433
0,2	0,199471140200716	-0,359759278457419
0,4	0,199471140200716	-0,25042369540626
0,6	0,199471140200716	-0,0933028888097038

Рисунок 2 Таблица значений функции гармонического осциллятора

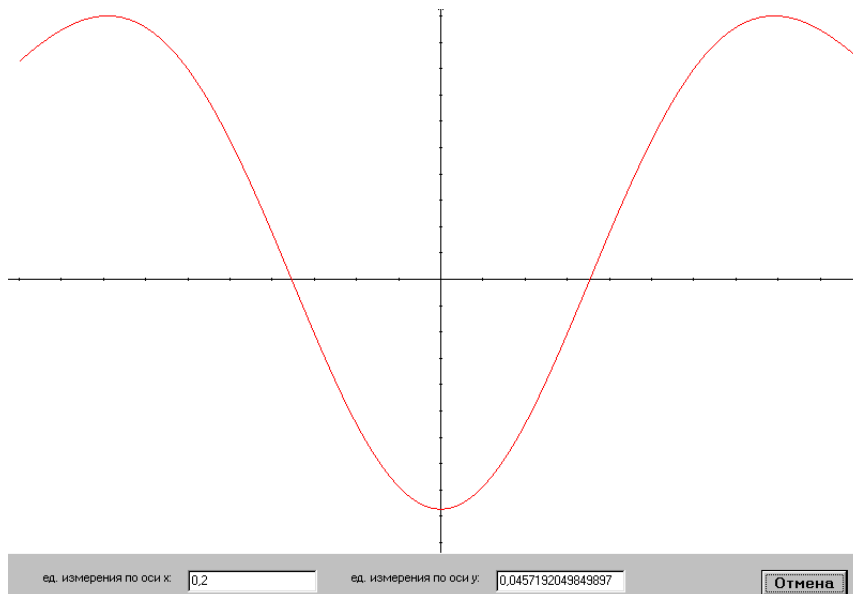


Рисунок 3 График волновой функции из задания 1.1

Таблица 1 Радиальные функции, соответствующие главному квантовому числу $n = 1, 2, 3$

Орбиталь	Волновая функция	A
1s	$A * e^{-\rho}$	$z * 5.14$
2s	$A * (2 - \rho) * e^{-\rho/2}$	$z * 1.53$
2p	$A * \rho * e^{-\rho/2}$	$z * z * 1.65$
3s	$A * (27 - 18 * \rho + 2 * \rho * \rho) * e^{-\rho/3}$	$z * 0.0845$
3p	$A * \rho * (6 - \rho) * e^{-\rho/3}$	$z * 0.119$
3d	$A * \rho * \rho * e^{-\rho/3}$	$z * z * z * 0.186$

где A нормировочный множитель, $\rho = z * r / a_0$
 z – эффективный заряд ядра, рассчитанный по правилу Слейтера.
 $a_0 = 0,0529$ нм.

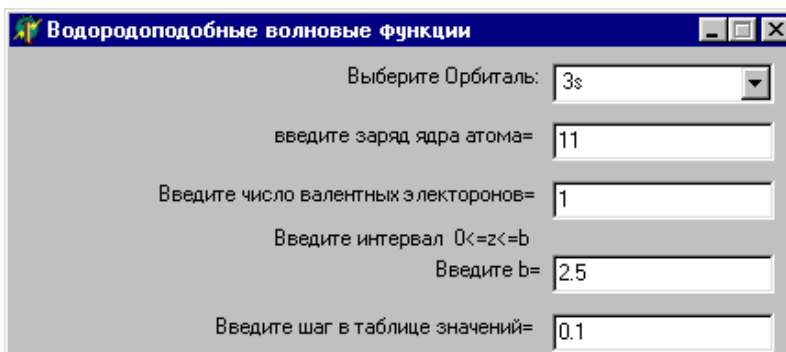
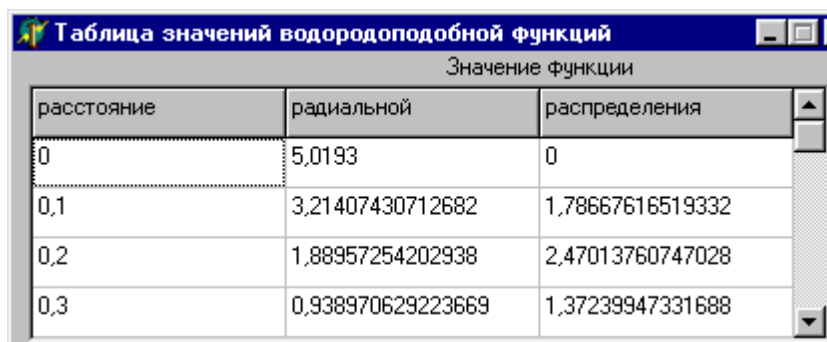


Рисунок 4 Окно ввода данных для Na в задаче «Расчет водородоподобных волновых функций»



расстояние	радиальной	распределения
0	5,0193	0
0,1	3,21407430712682	1,78667616519332
0,2	1,88957254202938	2,47013760747028
0,3	0,938970629223669	1,37239947331688

Рисунок 5 Таблица значений водородоподобной функции

Функция радиального распределения (плотность вероятности) определяется следующим образом:

$$W(\rho) = \rho * \rho * R_{n1}^2(\rho) \quad (4)$$

Составить в среде программирования Delphi программу: расчета значений одной из радиальной волновой функции $R_{n1}(\rho)$ и функции радиального распределения $W(\rho)$ в интервале расстояний r от 0 до b с шагом h ; построения графиков этих функций; определения узловых точек волновой функции и точек максимума функции радиального распределения [3].

Задание 2.1 - Рассчитать, используя составленную программу (рис. 4, рис. 5, рис. 6), значения одной из радиальной волновой функции $R_{n1}(\rho)$ и функции радиального распределения $W(\rho)$ для трех элементов таблицы Д.И. Менделеева по заданию преподавателя в интервале расстояний r от 0 до $2,5A^\circ$, с шагом $0,1A^\circ$.

Построить графики этих функций, определить узловые точки волновой функции и точки максимума радиальной волновой функции.

Написание программы, определяющей решение уравнения Шредингера (представляющей сложную математическую задачу), поглощает времени гораздо больше, чем допустимо в учебной обстановке. Поэтому программы готовятся заранее (преподавателем), а студент, работая с загрузочными модулями, меняет только входные параметры, (по заданию преподавателя) но не сам текст программы. Такой метод обучения поможет студенту переходить сразу от постановки задачи и представления принципиальных путей ее решения к получению и интерпретации физических результатов. Сэкономленное на программировании и проведении математических преобразований время дает студенту возможность рассмотреть большее число физических ситуаций и получить на основе изображений наглядные представления о волновой природе квантово-механических

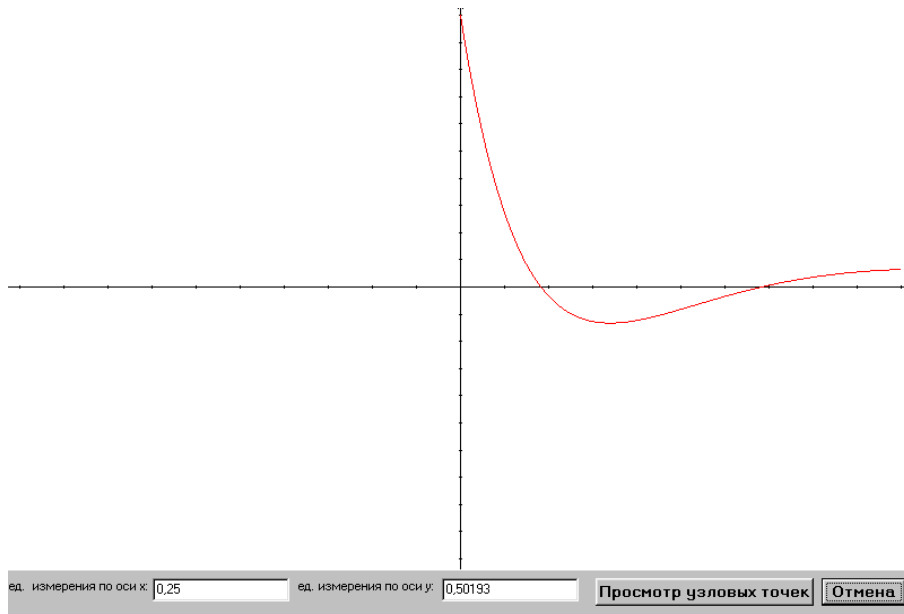


Рисунок 6 График радиальной волновой функции

Узел	Расстояние
1	0,457325897216797
2	1,7067643737793

Рисунок 7 Узловые точки радиальной волновой функции

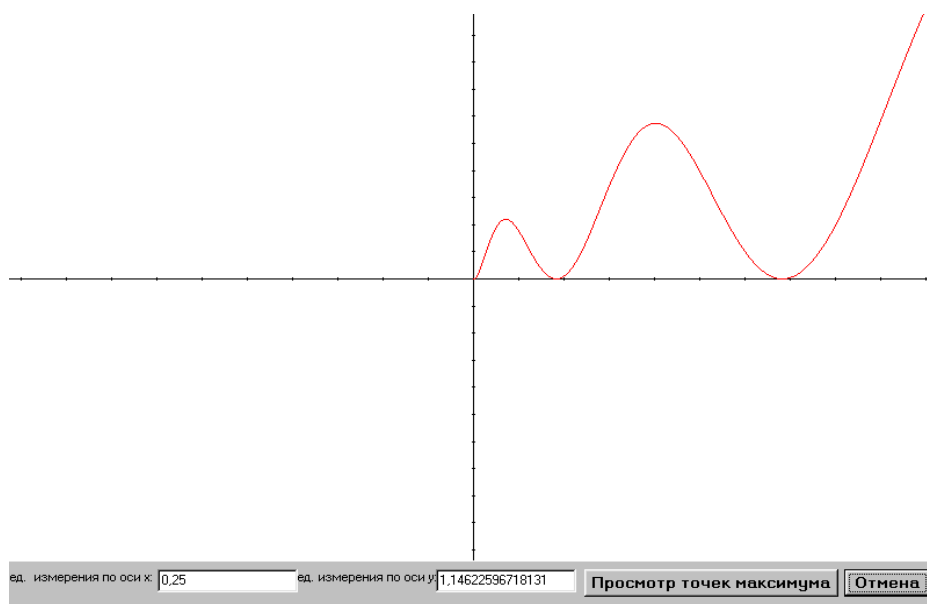


Рисунок 8 График функции радиального распределения

Максимум	Расстояние
1	0,177427117919922
2	0,937241571044922

Рисунок 9 Точки максимума функции радиального распределения

явлений.

Таким образом, современные информационные технологии открывают студентам доступ к нетрадиционным источникам информации, дают совершенно новые возможности для творчества, обретения и закрепления различных профессиональных навыков, позволяют реализовать принципиально новые формы и методы обучения с применением средств концептуального и математического моделирования химических явлений и процессов.

Список литературы

- [1] Д. Кабрал, К. Каше. Обучение химии с использованием микрокомпьютеров – в книге: ЭВМ помогает химии: под. ред. Г. Вернена, М. Шанона.- Л. Химия, 1990.-с.88-90.
- [2] В.Г. Скатецкий Математические методы в химии.- М. Тетра Сисемс, 2006.-с.43-45.
- [3] Васильева П.Д., Кузнецова Н.Е. Обучение химии. – СПб. КАРО, 2003.-с.128.

УДК 519.62/.64

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОРАДАРНЫХ ДАННЫХ НА ОПЫТНЫХ ОБРАЗЦАХ

С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков, Б.Б. Шолпанбаев, А.А. Бектемисова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия
 Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
 Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
 Казахский экономический университет им. Т.Рыскулова, г. Алматы, Казахстан

Abstract. In this paper we consider a technique for interpreting geradar's data on the prototype. Experimental research to find pre-known localized object conducted with GPR. Analysis radarogram conducted with representation of the problem in 3D visualization.

Keywords: georadar (GPR), interpretation, radarogram, modeling.

Аңдатпа. Бұл мақалада тәжірибелік үлгі үшін георадарлық мәліметтерді интерпретациялау тәсілі келтіріледі. Георадардың көмегімен алдын-ала белгілі, оқшауланған объектіні іздеу

эксперименттік зерттеуі келтірілген. Радарограммаларды талдау қойылған есептің 3D визуализациясын келтіру арқылы жасалған.

Кілттік сөздер: георадар, интерпретация, радарограмма, модельдеу.

Аннотация. В работе приводится методика по интерпретации георадарных данных на опытном образце. Проведены экспериментальные исследования по поиску заранее известного локализованного объекта с помощью георадара. Проведен анализ радарограмм с представлением 3D визуализации поставленной задачи.

Ключевые слова: георадар, интерпретация, радарограмма, моделирование.

Как следует из ряда работ подповерхностной радиолокации [1, 2] приводятся обширная методика по интерпретации георадарных данных. В основном эти работы посвящены объектам протяженной длины. По интерпретации данных для локализованных объектов с их геоэлектрическими свойствами методики интерпретации разработаны в недостаточной мере. С другой стороны в существующих программных обеспечениях, в частности входящего в комплект георадара «Лоза» в недостаточной мере описаны методики определения геоэлектрических свойств исследуемых объектов. Поскольку эти программы носят коммерческий характер.

В связи с этим нами проведен эксперимент с заданной глубиной залегания и геоэлектрическими свойствами объекта. Эксперимент состоял в следующем: металлический диск (размеры: диаметр - 30 см, высота - 8 см) был закопан на глубину 55 см. (Рис. 1 а).

Для проведения эксперимента по методу зондирования с разносом антенн была сделана разметка (Рис.1 б)



Рисунок 1 Начало эксперимента

Для исследования был использован георадар Лоза 1В антеннами с центральной частотой 300 МГц (длина 50 см) и шагом 30 см. (Рис.2 а). Данные радарограмм полученных георадаром представлены (Рис.2 б)

Используя программу «Крот» выявлена следующая картина (Рис.3) откуда видно что глубина залегания согласно данных георадара составляет 56 см., которая совпадает с исходным данным с погрешностью 1 см. Здесь годограф показывает скорость 3.74, глубину 56 и проницаемость 16,09. По таблице электрических характеристик почв и пород на частоте 300 МГц, данные по нашему измерению соответствует глинистой влажной почве. По характерной "параболе" можно определить границы локализованного объекта.

Затухание электромагнитных волн в излучаемой среде приведены на Рис. 4 и Рис. 5.

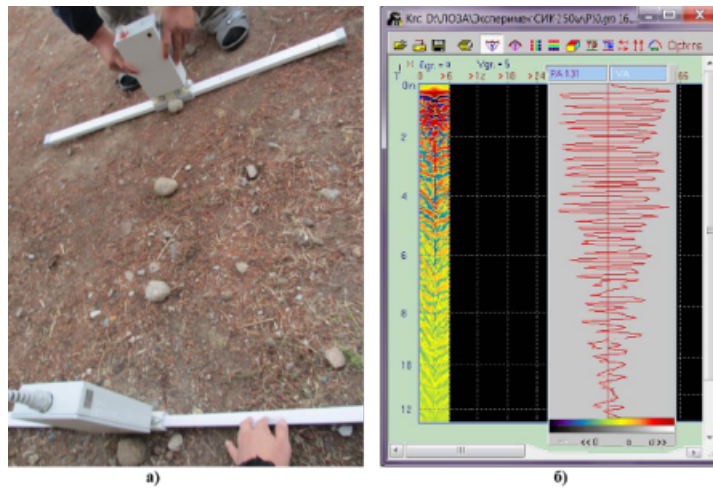


Рисунок 2 Полученные данные

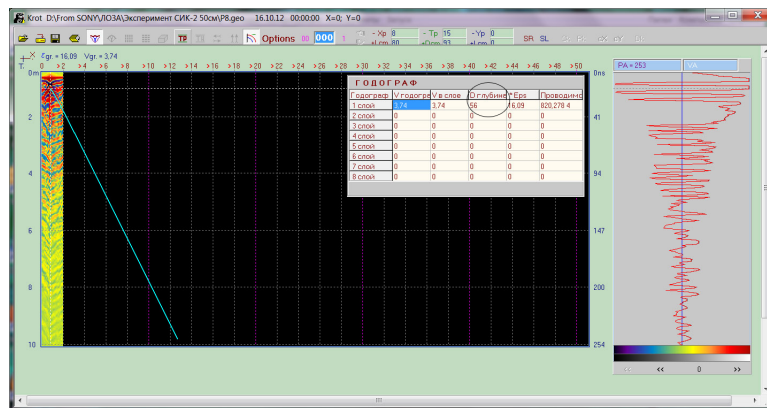


Рисунок 3 Программа «Крот»

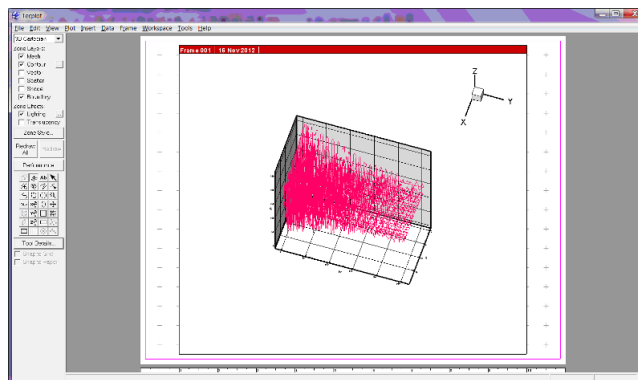


Рисунок 4 Вид записанных приемной антенной георадара отраженных электромагнитных волн собранных в 3D формат

Приведем результаты данных радарограмм проведенных для реального эксперимента описанных в работах [3-6] (Рис.4)

Вывод: данные радарограмм полученные для опытного образца и для реального исследования дают заключение о том, что если мы на радарограммах получаем вышеизложенные данные, то можем утверждать что под поверхностью мы имеем локализованный объект и можем определить ее границы. Так же, по данной методике мы можем выяснить глубину залегания, и геоэлектрические свойства объекта.

Поддержано грантом МОН РК ГФ 2 Договор № 977 от 02.03.12 (рук. проф. Бектемесов М.А.).

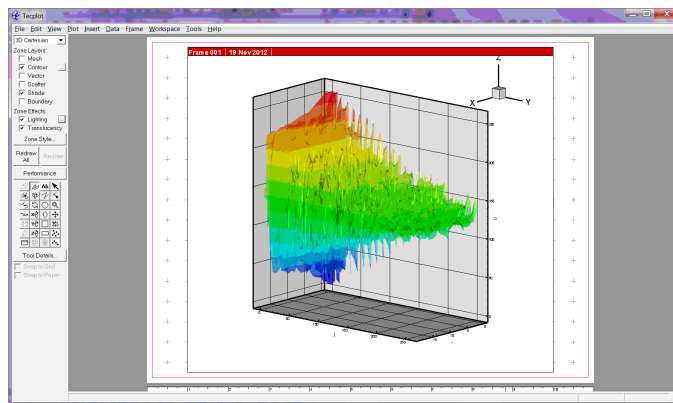


Рисунок 5 Вид записанных приемной антенной георадара отраженных электромагнитных волн собранных в 3D формат(в цветовой палитре)

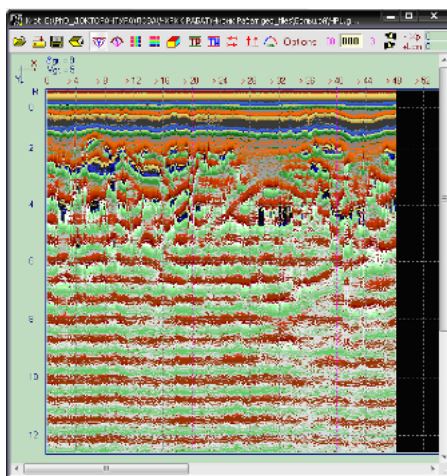


Рисунок 6 Здесь по под "параболой" находится квадратный локализованный объект

Список литературы

- [1] Обзор геофизических методов исследований при решении инженерно-геологических и инженерных задач. М.Л.Владов, А.В.Старовойтов. /М.: Наука, 1998г. – 64 с.
- [2] Геофизика в археологии. Г. С. Франтов, А. А. Пинкевич./ Ленинград, Издательство «НЕДРА», 1966г.-212 с.
- [3] Application of georadar Loza-B for the study of ciric-rabat and mounds in the Kyzyl-orda region. K.T. Iskakov, B.B. Sholpanbaev // The 4 Congress of the Turkic Word Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July 2011. - P. 470-471.
- [4] Analysis of the measurements inhomogeneties (archaeological objects) using Georadar. S.I. Kabanikhin, K.T. Iskakov, B.B. Sholpanbaev // The 8th Congress of International Society for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC-2011). Moscow, Russia, 22-27 August 2011. - P. 292-293.
- [5] Применение георадара для обнаружения археологических объектов. С.И. Кабанихин, К.Т. Исаков, Б.Б. Шолпанбаев // Международная конференция “Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики”, посвященной 20-летию независимости РК. Алматы. 28-30 сентября 2011. - С. 319-320.

- [6] Результаты применения георадара по исследованию археологических объектов. К.Т. Искаков., Б.Б. Шолпанбаев // Третья международная научная школа конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Новосибирск. 10-15 октября 2011. - С. 26-27.

УДК 004

«MSC SOFTWARE» МИРОВОЙ ЛИДЕР В ОБЛАСТИ ВИРТУАЛЬНОЙ РАЗРАБОТКИ ИЗДЕЛИЙ

С.Т. Казакбаев

ТОО «RAM Trade company», г. Алматы, Республика Казахстан

Abstract. This article focuses on the software of the American corporation «MSC Software», and specifically its modules Adams and Easy5 for virtual simulation of complex machinery, tools and products. It is shown that the use of this software can significantly shorten the design and manufacture of machinery, structures and buildings. Application programs «MSC Software» allows you to explore dozens, hundreds or even thousands of design options, compare and select the best, improve and develop future product, spending is many times less time and money than with traditional approaches.

Аңдатпа. Осы мақала американдық "MSC Software" деген корпорациясының бағдарламалық қамсыздандыруына арналған. Осы бағдарламалық қамсыздандырудың «Adams» және «Easy5» модульдары күрделі машинаның, тетіктердің және бұйымдардың ауани модельдеуге мүмкін береді. Осы бағдарламалық қамсыздандырудың қолданысы тетіктің және ғимараттардың жобалау және жасау мерзімдердіні қысқартады. "MSC Software" деген бағдарламаның қолданысы мыңдаған конструкцияның нұсқасының зерттеуге, салыстыруға және жетілдіруге мүмкін береді.

Аннотация. Данная статья посвящена программному обеспечению американской корпорации «MSC Software», а конкретно его модулям Adams и Easy5 для виртуального моделирования сложных машин, механизмов и изделий. Показано, что применение данного программного обеспечения позволяет значительно сократить сроки проектирования и изготовления механизмов, сооружений и зданий. Применение программ «MSC Software» позволяет исследовать десятки, сотни и даже тысячи вариантов конструкции, сравнивать и выбирать лучший, совершенствовать и совершенствовать будущее изделие, тратя на это во много раз меньше времени и средств, чем при использовании традиционных подходов.

Каждый день сотни тысяч специалистов в самых разных уголках мира обращаются к продукции корпорации MSC Software. Среди них не только сотрудники авиационных и космических

предприятий, где эта система фактически является мировым стандартом сертификации. С ней работают автомобилестроители и судостроители, железнодорожники, специалисты в области машиностроения и электроники, приборостроения, строительства и целого ряда других отраслей.

Компьютерные технологии MSC обеспечивают сегодня не только самый широкий спектр наукоемких инженерных расчетов: прочности, динамики, кинематики, теплопередачи, акустики, аэроупругости, долговечности, ресурса и т.д., но также позволяют виртуально моделировать технологические процессы изготовления, сборки изделий, их работу в условиях реальной эксплуатации. Такие технологии обеспечивают создание подробных компьютерных моделей сложных машин и механизмов, а также проведение подробного анализа их функционирования в различных условиях. Таким образом, еще на ранних стадиях проектирования создаются высокоточные компьютерные модели. Применение данных моделей значительно сокращает сроки проектирования и изготовления изделий при значительном повышении их качества, что обеспечивает быстрый выход на рынок с новой продукцией и получение высокой отдачи от вложенных инвестиций.

При этом значительно сокращается число натуральных экспериментов путем замены их на быстрое, эффективное и точное компьютерное моделирование на основе создаваемых виртуальных моделей сложных машин и механизмов. Компьютерные модели не только позволяют создавать новейшие изделия в самые сжатые сроки, но и сопровождают их на всем их жизненном цикле, позволяя решать различные эксплуатационные задачи, включая аварийные ситуации, и проводить оперативные модификации, обеспечивая постоянный высокий уровень эксплуатационных характеристик, большой ресурс, безопасность, надёжность и качество изделий. Что бы ни выпускала Ваша фирма – авиационную или автомобильную технику, электронное оборудование, медицинские приборы или, к примеру, высококачественный спортивный инвентарь, какие бы расчетные или исследовательские задачи Вы и Ваши коллеги ни решали, можете быть уверены: применение продуктов MSC Software Corporation даст Вам ту надежность и функциональность, о которой Вы всегда мечтали, обеспечит экономическую эффективность, без которой невозможен успех в современных условиях рыночной экономики. Эти качества программных продуктов MSC используют ведущие фирмы практически всех стран мира. С 1992 года они доступны в России и странах СНГ.

MSC Software с 1963 г. является лидером в разработке и поставке компьютерных систем инженерного анализа (CAE – Computer Aided Engineering). В 60-е годы MSC разработала и успешно сдала по заказу NASA и правительства США суперсистему того времени NASTRAN (NASA STRuctural ANalysis). С начала 70-х годов MSC не только активно продолжает совершенствование системы NASTRAN в виде собственной версии MSC Nastran, но и ведет разработку широкого спектра инженерных систем, интегрируя их с MSC Nastran, постоянно вкладывая большие средства в исследования и разработки. Эти вложения обеспечивают компьютерным технологиям MSC самый высокий уровень и ведущее место в отрасли, а также дальнейшее ускоренное развитие продуктов MSC, позволяя им вбирать в себя все новейшие технологии, методы, алгоритмы, тем самым укрепляя авторитет MSC как признанного мирового лидера и самого надежного партнера. В конце 90-х годов ведущие мировые производители авиационно-космической и автомобильной техники поставили перед MSC, как перед лидером CAE рынка, задачу по разработке и поставке инженерных компьютерных технологий нового уровня, применение которых позволило бы компаниям достичь повышения качества и надежности изделий при значительном сокращении сроков цикла “проектирование -производство”, существенном уменьшении количества опытных образцов и натуральных испытаний, сокращении затрат и увеличении прибыли. Компания Boeing

так сформулировала данную задачу: «Цель состоит в том, чтобы перейти от 60-месячного цикла создания изделия к 12-месячному и сделать за 1 млрд. долларов то, что мы делали за 6 или 7 млрд. долларов». Выполнение данного заказа промышленности требует концентрации всех возможных ресурсов.

ADAMS

Инструмент виртуального моделирования машин, механизмов и изделий в сборе

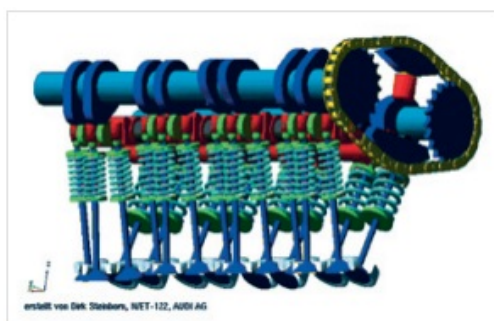


Рисунок 1 Модель газораспределительного механизма двигателя внутреннего сгорания

Программные продукты семейства Adams – наиболее широко используемое в мире программное обеспечение для виртуального моделирования сложных машин, механизмов и изделий в сборе.

Программы семейства Adams используются для разработки и совершенствования конструкций фактически всего, что движется – от простых механических и электромеханических устройств до автомобилей и самолетов, железнодорожной техники, космических аппаратов и т.д. Характерной особенностью (и большим достоинством) программного пакета Adams является эффективный и чрезвычайно дружелюбный графический интерфейс пользователя. Используя этот интерфейс, пользователь пакета Adams имеет возможность быстро разработать расчётную модель изделия строя ее на базе геометрических примитивов, создаваемых непосредственно в препроцессоре или на базе геометрических моделей компонентов изделия, импортируемых из САД-систем, задать связи компонентов модели (упругие, демпфирующие, кинематические и др.), приложить нагрузки, запустить расчет и проанализировать его результаты. Интерфейс пользователя пакета Adams включает эффективные средства анализа результатов, которые позволяют в сжатые сроки наметить пути к совершенствованию расчётной модели и добиться максимальной близости её свойств к характеристикам реального динамического процесса, изделия-прототипа или результатам испытаний физического образца разрабатываемой машины. Раньше на получение сведений о характеристиках работы будущего изделия уходили недели, месяцы, а в некоторых случаях и годы, требовались огромные средства. Теперь же, используя Adams, можно получить представление о работе разрабатываемого изделия ещё до начала раскроя металла или отливки пластика для изготовления опытного образца. Начиная с самых ранних стадий проектирования, можно видеть как будет работать машина и улучшать ее функционирование.

Работая с Adams, пользователь имеет возможность:

– Разрабатывать расчётные модели исследуемых изделий, в максимальной степени учитывающих особенности их конструкции, включая высокую идентичность внешнего вида, что во многих случаях облегчает построение моделей, их отладку и анализ полученных результатов;

- Выполнять расчёт параметров изделий, определяющих их работоспособность и точность (перемещения, скорости и ускорения компонентов изделия, действующие нагрузки, габариты пространства, необходимого для движущихся частей машины и т.п.);
- Выполнять оптимизацию параметров изделия.

Отличительные особенности Adams:

- Широкий набор видов кинематических связей, упругих и диссипативных звеньев с линейными и нелинейными характеристиками, нагрузок, кинематических воздействий и т.д., доступных пользователю для построения расчётной модели в максимальной степени воспроизводящей свойства реального изделия;
- Лёгкость изучения и использования, так как исследование виртуального прототипа в Adams соответствует основным этапам работы с опытным образцом изделия (разработка – испытания – совершенствование);
- Лёгкость изучения и использования, так как исследование виртуального прототипа в Adams соответствует основным этапам работы с опытным образцом изделия (разработка – испытания – совершенствование);
- Эффективные средства визуализации результатов моделирования, включая анимацию и построение графиков;
- Возможность параметризации расчётной модели модификация параметров приводит к автоматическому изменению свойств модели и/или её конфигурации, параметры модели могут быть связаны функциональными зависимостями и т.п.

EASY 5

Система моделирования и расчета гетерогенных технических систем и устройств

Специализированный продукт для моделирования сложных технических систем и устройств на системном уровне

Easy5 предоставляет возможности для моделирования широкого круга сложных технических систем и устройств: цифровых и аналоговых систем управления, гидроприводов, пневматических, механических и электрических устройств. Моделирование в Easy5 происходит на системном уровне посредством использования необходимых функциональных блоков, соединяемых между собой связями.

Easy5 легко интегрируется с Adams, что позволяет создавать полноценные виртуальные прототипы механических систем (с учетом податливости как всего механизма, так и отдельных его частей) с системой управления: в Adams моделируется механическая часть – механизмы, изделия в целом (например, автомобиль, гусеничная техника), а в Easy5 – система управления, гидравлика, пневматика, электрические системы и т.д. Создание полноценных виртуальных прототипов позволяет провести виртуальные испытания разрабатываемого изделия еще на ранних стадиях проектирования и выявить недостатки как механической системы, так и системы управления и принять необходимые решения до изготовления реального прототипа будущего изделия. Для углубленного анализа и моделирования используется интеграция с системами других компаний – разработчиков (MATLAB/Simulink, MatrixX и др.) Таким образом, система Easy5 является одной из самых уникальных и важнейших компонент современных технологий Виртуальной Разработки Изделий (Virtual Product Development – VPD).

Программный пакет Easy5 включает большое количество готовых математических моделей в виде отдельных функциональных блоков (сумматоров, делителей, фильтров, интеграторов, клапанов, двигателей, теплообменников, редукторов, муфт сцепления и др.). Также пользователь имеет возможность создавать собственные функциональные блоки с помощью языков C или Fortran. Пользователь Easy5 – специалист в конкретной области техники соединяет эти функциональные блоки, моделируя изделие на уровне «устройства», и оптимизирует параметры разрабатываемых систем изделия.

На базе перечисленных возможностей системы Easy5, в интеграции с другими системами MSC, создаются полные функциональные модели самолетов, автомобилей, танков, экскаваторов, приборов и т.д. и исследуется их работа при выполнении различных задач и в различных условиях эксплуатации, находя оптимальные решения на основе точного комплексного компьютерного моделирования.

Среди пользователей Easy5 – ведущие мировые компании – разработчики и производители в авиационной, ракетно-космической, автомобильной, электронной, энергетической и других отраслях промышленности.

Список литературы

- [1] Теоретические основы анализа конструкций с применением метода конечных элементов. Шатров Б.В. 76 стр.
- [2] MSC Nastran. Динамика. Практическая работа. Шатров Б.В.
- [3] Моделирование динамических систем с помощью MSC Adams и MSC EASY5. Георгиев А.Ф. 29 стр.
- [4] Введение в систему MSC Adams. Материалы семинара. Соболев Р.Ю. 514 стр.
- [5] MSC Adams: теория и элементы виртуального конструирования и моделирования. Иванов А.А. 97 стр.

УДК 681.3(075.8)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЕ "НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ"

Л.Я. Мелкозёрова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The article is devoted to the important higher education pedagogy problem namely, developing educational materials for the academic subject as one of the factors influencing improving the quality of the students, professional training.

Аңдатпа. Мақала жоғары оқу орындарындағы маңызды мәселе – студенттерді кәсіптәк даярлаудағы сапаның жоғарылауына әсер беретін пәннің оқу-әдістемелік қамтамасыздандыруға арналған.

Аннотация. Статя посвящена актуальной для вузовской педагогики проблеме – разработке учебно-методического обеспечения дисциплины, как одному из факторов влияющих на повышение качества профессиональной подготовки студентов.

Начертательную геометрию студенты считают трудным предметом: действительно, успеваемость по этому курсу зачастую ниже в сравнении с другими дисциплинами. Трудность начертательной геометрии обусловлена необходимостью пространственного осмысления, логического и абстрактного мышления и реализацией особого подхода к изучению этой дисциплины. Усвоить начертательную геометрию только через чтение учебника невозможно, чтение его следует обязательно сопровождать выполнением соответствующих изображений и необходимых геометрических построений. Важно проработать конспект лекции при подготовке к практическому занятию. Обязательным является самостоятельное решение типовых и нестандартных задач.

За основу схемы учебной деятельности студента при изучении начертательной геометрии (рисунок 1) мы выбрали схему, предложенную Ж.М. Есмухановым [1], дополнив её решением индивидуальных графических заданий, контролем самостоятельной работы и информационными компьютерными средствами обучения.

Как видно из рисунка 1, программа предусматривает обязательное выполнение индивидуальных заданий (самостоятельных графических работ), содержание заданий и сроки их выполнения определены в силлабусе.



Рисунок 1 Схема учебной деятельности студента при изучении начертательной геометрии

Основным источником для обучения студентов являются специально подготовленные электронные учебники и учебно-методические пособия. Нами разработаны: электронное учебное издание и комплект средств информационной поддержки СРС и СРСП по учебной дисциплине.

На лекции, как ведущем звене всего курса обучения в современных условиях информатизации и компьютеризации, по нашему мнению, должны использоваться компьютерные программные продукты.

Наиболее подробно остановимся на изложении теоретического материала как основной части лекции. При КТО, в связи с тем, что число аудиторных часов по дисциплине значительно умень-

шилось при сохранении содержания обучения, возникла необходимость многие темы рассматривать только на лекциях, т.е. информативность и интенсивность лекций должны быть увеличены. При этом конспектирование лекций как одна из важнейших форм учебных записей, представляющая собой связанное сжатое и последовательное изложение содержания усваиваемого материала в нашей дисциплине обязательно сопровождается выполнением графических построений. Они же выполнялись прежде лектором при помощи линейки и мела на доске, что занимало большую часть лекции, снижая её информативность. Содержание лекции соответствует содержанию электронного учебного издания, выдаваемого студентам в начале семестра в виде скомпилированного файла, это позволяет вести конспект, используя символы, и не тратить время на перерисовку сложных пространственных чертежей. Студент имеет возможность при необходимости распечатать нужный чертеж из ЭУ или ЭУП (рисунок 2) и вклеить её в конспект.

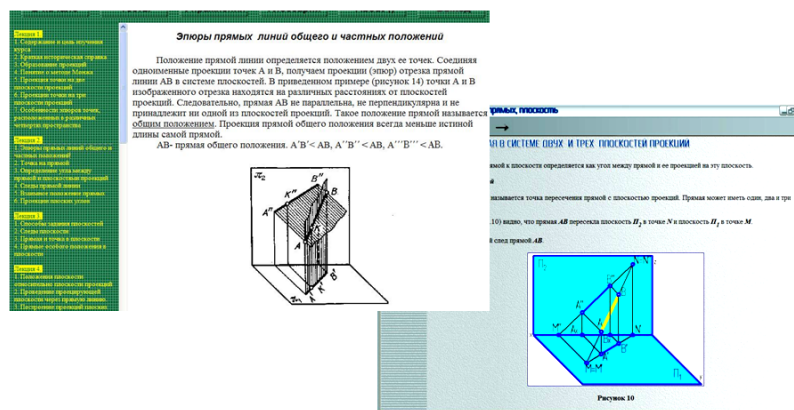


Рисунок 2 Страницы ЭУИ «Эпюры прямых линий общего и частных положений» и ЭУП «Точка и прямая в системе двух и трех плоскостей проекций»

На лекции рассматриваются принципиальные вопросы темы, излагаются и доказываются теоремы, выясняются основы построений, при этом приводимые примеры являются типовыми. Важным элементом методики преподавания является показ поэтапного решения графической задачи (рисунок 3). При этом визуальные учебные материалы могут, независимо от их дидактической ценности, хорошо выполнять задачу только в том случае, если студенты могут их увидеть без помех со всеми деталями. В этом отношении использование на лекции анимационных фрагментов электронного учебного пособия «Прямая, взаимное положение прямых. Плоскость», как показала практика, способствует хорошему освоению методов решения типовых задач и достаточно быстрому и качественному выполнению графических построений в конспекте.

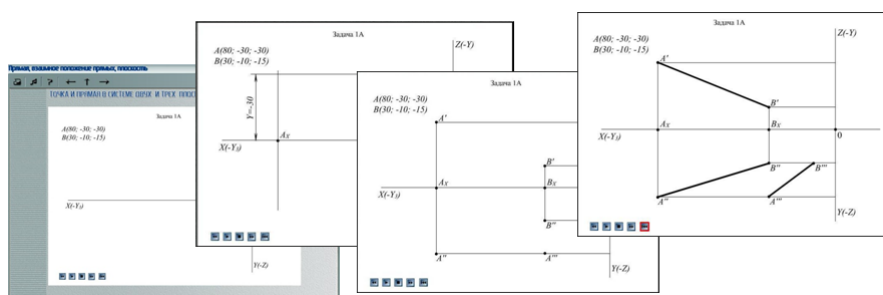


Рисунок 3 Анимационные кадры решения задачи на построение трех проекций точки

В заключительной части лекции обобщаются основные положения, рассмотренные на лекции, они представляются в виде структурной схемы (рисунок 4), поскольку информация лучше запоминается, чем больше в ней смысла и чем лучше она структурирована.

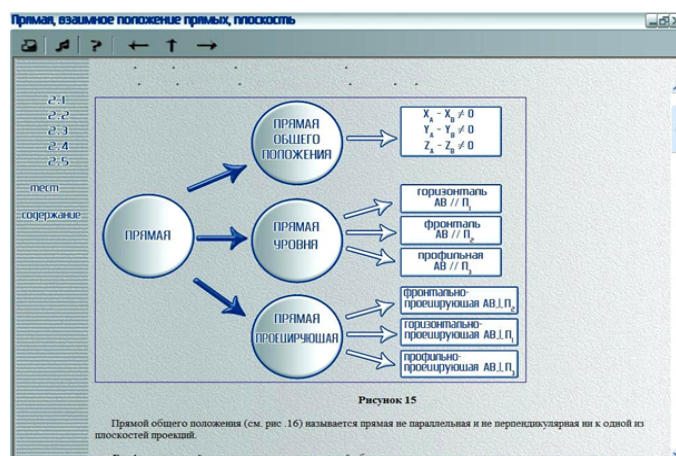


Рисунок 4 Страница ЭУП, содержащая структурную схему положения прямой линии относительно плоскостей проекций

Также рекомендуется при подготовке к практическому занятию на данную тему после проработки теоретических положений выполнить самостоятельные графические работы, используя ЭУП, и провести самоконтроль приобретенных знаний, используя тесты в электронном учебном издании.

Индивидуальные задания по рассматриваемой теме размещены в электронном учебном пособии к самостоятельной графической работе «Прямая, взаимное положение прямой. Плоскость». Студент имеет возможность распечатать свой вариант задания и приступить к его выполнению во внеаудиторное время. Это важный этап в процессе обучения начертательной геометрии, т.к. только после решения определенного количества задач становится понятным геометрический смысл той или иной теоремы.

Методика решения наиболее сложных задач состоит из анализа условия, эскизного наглядного изображения графического алгоритма решения, символической записи этого алгоритма и решения задачи на комплексном чертеже. Пособие содержит примеры решения задач, как в текстовом виде, так и с использованием анимации. Студенты первого-второго курсов испытывают трудности при обращении к литературе по графике, особенностью которой является переплетение текстового и графического материала. Переключаясь от текста к чертежу и наоборот, студент часто теряет нить повествования, быстро утомляется и тратит огромное количество времени. При использовании анимации в ЭУП повышается эффективность всей работы, т.к. цель ЭУП - помочь студенту глубже усвоить теоретические положения начертательной геометрии, приобрести практические навыки решения задач и выполнения графических работ.

Следующим этапом является самоконтроль знаний. В ЭУП «Прямая, взаимное положение прямых. Плоскость» студенту предлагается несколько видов самоконтроля: можно проверить свои знания, отвечая на вопросы и сверяясь с правильными ответами к ним, расположенными на странице «вопросы для самоконтроля», а также проверить свои знания, отвечая на вопросы теста.

Эффективность внедрения разработанных нами электронных учебных пособий в теоретическом и практическом изучении студентами учебных предметов подтверждена основными показателями, отражающими удовлетворенность студентов организацией работы; мотивированным,

позитивным отношением студентов к самоподготовке; заинтересованностью процессом выполнения и содержанием заданий; более высокими результатами выполнения студентами семестровых заданий.

Список литературы

- [1] Методическое руководство к решению задач по начертательной геометрии. Есмуханов Ж.М., Салимжанов К.С. // Алма-Ата: КазНТИ, 1982. – 37 с.

УДК 372.851

ТЕХНОЛОГИЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ В КОНТЕКСТЕ МОДЕРНИЗАЦИИ ВЫСШЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Р.О. Мухамедова, И.П. Дронсейка

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Аннотация. В статье рассматриваются специфика и проблемы организации самостоятельной работы студентов технических вузов средствами инновационных технологий обучения с учетом современных требований и условий общества. Изучаются условия и методы эффективной организации самостоятельной работы студентов как целостной системы образовательной среды.

Ключевые слова: самостоятельность, самостоятельная работа, инновационные технологии обучения.

Главной задачей образовательной политики Республики Казахстан является обеспечение современного качества образования на основе сохранения его фундаментальности и соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства. При этом ключевой характеристикой образования становится не столько передача знаний и технологий, но и формирование творческих компетентностей, готовности к переобучению.

Это привело к изменению парадигмы образования, требующей модернизации высшего профессионального образования, разработки новой модели казахстанской высшей школы, новых государственных образовательных стандартов. В связи с этим создается современная модель подготовки студента вуза, содержащая принципиально новые требования к будущему специалисту, и отвечающая всем потребностям современного общества.

Приоритетным образованием нового этапа развития являются точные и инженерные науки в сфере высшего образования, в этой связи важная роль принадлежит математическому образованию. При этом качественная математическая подготовка студента втуза является методологической основой большинства образовательных и специальных дисциплин. Поэтому математическая

подготовка будущего специалиста должна предполагать методы, средства и формы обучения, оптимально способствующие формированию целостной системы научных знаний, профессионализации и самореализации личности.

Студент учится добывать и применять научные знания и методы исследования для изучения содержания своей будущей профессиональной деятельности, вследствие этого цель математической подготовки заключается в развитии навыков математического мышления и формировании умений в применении математических методов и основ моделирования.

Вследствие этого одной из целей профессиональной подготовки специалиста является необходимость дать студенту прочные фундаментальные знания, на основе которых он смог бы обучаться самостоятельно в нужном ему направлении. Формирование внутренней потребности к самообучению становится и требованием времени, и условием реализации личностного потенциала.

Одним из путей реализации данной задачи в условиях кредитной системы обучения (КСО) является совершенствование самостоятельной работы студентов над учебным материалом, развитие навыков самостоятельной работы, стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы. Очевидно, что самостоятельная работа и контроль над ее выполнением способствуют формированию самостоятельности мышления студентов, творческого подхода к решению учебных и профессиональных задач.

В трактовке понятия "самостоятельная работа студентов" (СРС) пока не выработано единого подхода. Употребляются термины "самостоятельная работа", "самостоятельная деятельность", иногда отождествляются понятия "самостоятельность", "самостоятельная работа", "самостоятельная деятельность", "самостоятельные занятия", "самообразование". Это происходит потому, что данная педагогическая категория весьма многогранна в предмете исследования.

Так, по мнению ряда ученых, под СРС понимается планируемая научная и учебная работа, выполняемая по заданию преподавателя под его методическим и научным руководством. Другие исследователи считают, что это разновидность деятельности студентов по выполнению дополнительных заданий, во внеаудиторное время. Третьи определяют ее как деятельность, направленную на полное усвоение учебной программы, без прямого участия преподавателя. Еще одна группа ученых видит в самостоятельной работе способ учебной деятельности студентов.

Исходя из этих подходов, самостоятельную работу будем рассматривать как форму учебной работы, выполняемую студентами по заданию и при методическом руководстве преподавателя. На наш взгляд, именно этот подход наиболее значим, так как он предполагает наличие специальных методических указаний преподавателя, следуя которым студент приобретает и совершенствует знания, умения и навыки, накапливает опыт практической деятельности.

Основная задача организации СРС заключается в создании психолого-дидактических условий развития интеллектуальной инициативы и мышления на занятиях любой формы. Основным принципом организации СРС должен стать перевод всех студентов на индивидуальную работу с переходом от формального пассивного выполнения определенных заданий к познавательной активности с формированием собственного мнения при решении поставленных проблемных вопросов и задач. Таким образом, в результате самостоятельной работы студент должен научиться осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, использовать основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы развивать в дальнейшем умение непрерывно повышать свою квалификацию.

Решающая роль в организации СРС принадлежит преподавателю, который должен работать не со студентом “вообще”, а с конкретной личностью, с ее сильными и слабыми сторонами, индивидуальными способностями и наклонностями. Задача преподавателя – увидеть и развить лучшие качества студента как будущего специалиста.

Отметим условия, обеспечивающие успешное выполнение СРС:

1. Мотивированность учебного задания.
2. Постановка познавательных задач.
3. Алгоритм выполнения работы, знание студентом способов ее выполнения.
4. Четкое определение преподавателем форм отчетности, объема работы, сроков ее представления.
5. Определение видов консультационной помощи (консультации установочные, тематические, проблемные).
6. Критерии оценки, отчетности и т.д.
7. Виды и формы контроля (практика, контрольные работы, тесты, коллоквиумы и др.).

Также самостоятельная работа включает воспроизводящие творческие процессы в деятельности студента. В зависимости от этого различают три уровня СРС: репродуктивный (тренировочный); реконструктивный; творческий, поисковый.

Самостоятельные тренировочные работы выполняются по образцу: решение задач, заполнение таблиц, схем и т. д. Познавательная деятельность студента проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании. Цель такого рода работ – закрепление знаний, формирование умений, навыков.

Ко второму виду относятся самостоятельные реконструктивные работы. В ходе таких работ происходит перестройка решений, составление плана, тезисов, аннотирование. На этом уровне могут изучаться первоисточники, выполняться рефераты. Цель этого вида работ – научить студентов основам самостоятельного планирования и организации собственного учебного труда.

Третий вид, самостоятельная творческая работа, требует анализа проблемной ситуации, получения новой информации. Студент должен самостоятельно произвести выбор средств и методов решения (учебно-исследовательские задания, курсовые и дипломные работы). Цель данного вида работ – обучение основам творчества, перспективного планирования, в соответствии с логикой организации научного исследования.

Также можно выделить два основных направления построения учебного процесса на основе самостоятельной работы студентов. Первое направление – это увеличение доли самостоятельной работы в процессе аудиторных занятий. Реализация этого пути требует от преподавателей разработки методик и форм организации всех видов аудиторных занятий, способных обеспечить высокий уровень самостоятельности студентов и улучшение качества их подготовки.

Второе направление – это повышение активности студентов по всем видам самостоятельной работы во внеаудиторное время, что связано с рядом трудностей. В первую очередь это неготовность к нему как большинства студентов, так и самих преподавателей. Кроме того, существующее информационно-методическое обеспечение учебного процесса недостаточно для эффективной организации самостоятельной работы.

Таким образом, для организации и успешного функционирования самостоятельной работы студентов необходимы:

1. Комплексный подход к организации СРС (включая все формы аудиторной и внеаудиторной работы).
2. Обеспечение контроля над качеством выполнения СРС (требования, консультации).
3. Использование различных форм контроля.

Вследствие этого, главное в планировании организации самостоятельной работы студентов во втузе заключается не в оптимизации ее отдельных видов, а в создании благоприятных условий для высокой активности, самостоятельности и ответственности студентов в аудитории и вне ее в ходе всех видов учебной деятельности.

При изучении дисциплины "Высшая математика" организация СРС должна представлять единство трех взаимосвязанных форм: внеаудиторная самостоятельная работа; аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя; иворческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Конкретные формы внеаудиторной СРС могут быть самыми различными, в зависимости от целей, количества кредитов, определенных учебным планом:

- подготовка к лекциям, практическим занятиям и самостоятельной работе студентов под руководством преподавателя (СРСП);
- изучение и конспектирование учебных пособий;
- изучение в рамках программы курса тем и проблем, не выносимых на лекции и практические занятия;
- выполнение контрольных работ;
- написание тематических докладов, рефератов и эссе;
- участие студентов в составлении тестов;
- выполнение исследовательских и творческих заданий;
- написание курсовых и дипломной работ;
- создание наглядных пособий по изучаемым темам;
- самостоятельное изучение темы в рамках "круглых столов".

С учетом приведенного описания многообразия форм внеаудиторной СРС, следует на каждом ее этапе разъяснять цели работы, контролировать понимание этих целей студентами, постепенно формируя у них умение самостоятельной постановки целей и определения задач.

Формы СРС должны отличаться для студентов разных курсов. Студентов младших курсов в первую очередь необходимо научить работать с учебниками, статьями, источниками, писать конспекты, позднее – оформлять рефераты, эссе, курсовые, а затем и дипломные работы.

При проведении СРСП и практических занятий студенты могут выполнять СРС как индивидуально, так и малыми (творческими) группами, каждая из которых разрабатывает свой проект (задачу). Выполненный проект (решение проблемной задачи) затем рецензируется другой группой по круговой системе. Публичное обсуждение и защита своего варианта повышают роль СРС

и усиливают стремление к ее качественному выполнению. Данная система организации практических занятий позволяет вводить в учебно-профессиональные задачи научно-исследовательские элементы, упрощать или усложнять задания.

Также активность работы студентов на обычных практических занятиях может быть усилена введением элементов СРС, в результате чего студент получает свое индивидуальное задание (вариант), при этом условие задания для всех студентов одинаково, а исходные данные различны. Перед началом выполнения задания преподаватель дает лишь общие методические указания (общий порядок решения, имеющиеся справочные материалы и т.п.). Такая форма СРС способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, изменению отношения студентов к конспектированию лекций, так как без понимания теории предмета, без хорошего конспекта трудно рассчитывать на успех в выполнении задания. Это улучшает посещаемость как практических, так и лекционных занятий.

Другая форма СРС на практических занятиях может заключаться в самостоятельном изучении схем, программ и т.п., которые преподаватель раздает студентам вместе с контрольными вопросами, на которые студент должен ответить в течение занятия.

Рассмотрим технологическую сторону самостоятельной работы, которая должна быть поэтапной и обоснованной. Для этого при организации СРС выделим следующие составляющие:

1. Технология отбора целей самостоятельной работы. Основаниями отбора целей являются цели, определенные Государственным образовательным стандартом, и конкретизация целей по курсам, отражающим введение в будущую профессию, профессиональные теории и системы, профессиональные технологии и др.

Кроме того, цели самостоятельной работы должны соответствовать структуре готовности к профессиональному самообразованию, включающей мотивационный, когнитивный, деятельностный компоненты.

2. Технология отбора содержания СРС. Основаниями отбора содержания самостоятельной работы являются Государственный образовательный стандарт, источники самообразования (литература, опыт, самоанализ), индивидуально-психологические особенности студентов (обучаемость, обученность, интеллект, мотивация, особенности учебной деятельности). При отборе содержания необходимо учитывать содержательную специфику дисциплины.

3. Технология конструирования заданий. Задания для самостоятельной работы должны соответствовать целям различного уровня, отражать содержание каждой предлагаемой дисциплины, включать различные виды и уровни познавательной деятельности студентов.

4. Технология организации контроля. Включает тщательный отбор средств контроля, определение этапов, разработку индивидуальных форм контроля.

Согласно этому технологическая последовательность организации СРС по математическим дисциплинам выглядит следующим образом. Сначала преподаватель определяет трехуровневые цели деятельности (репродуктивные, реконструктивные и творческие) и конкретные формы работы, выстраивает систему мотивации студентов, затем обеспечивает их учебно-методическими материалами, устанавливает сроки промежуточных отчетов о проделанной работе, организует деятельность творческих групп, читает вводную лекцию, проводит консультации, контролирует результаты самоконтроля и самокоррекции студентов, оценивает результаты их работы (индивидуальные или групповые).

В стандартах высшего профессионального образования на внеаудиторную работу отводится не менее половины бюджета времени студента за весь период обучения. Это время может быть

использовано на самостоятельную работу. Кроме того, большая часть аудиторных занятий также включает самостоятельную работу. Таким образом, времени на самостоятельную работу в учебном процессе вполне достаточно. Вопрос в том, как эффективно его использовать.

Поэтому преподаватель при планировании учебной деятельности студента и объема самостоятельной работы должен начать с определения содержания, педагогических условий и технологий математической подготовки студента, необходимых для формирования его профессиональной компетентности, включающей способности к самообучению, самоконтролю деятельности, критическому мышлению. Применение индивидуально-творческого подхода в проектировании профессиональной направленности математической подготовки позволяет создать условия самореализации творческих возможностей студента и включить механизмы его профессионального саморазвития.

Решение задач современного образования невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы.

Список литературы

- [1] Эффективность научно-образовательной деятельности в высшей школе. Н.А. Завалько // М.: Флинта, 2011.
- [2] Технологии профессионального образования. Н.А. Морева // М.: Академия, 2005.
- [3] Основы специальной педагогики и психологии. Н.М. Трофимова и др. // СПб.: Питер, 2006.

УДК 517.9

SPECTRAL PROBLEMS FOR REGULAR CANONIC DIRAC SYSTEMS WITH PARAMETER DEPENDENT BOUNDARY CONDITIONS

Etibar S. Panakhov, Mine Babaoglu

Firat University, Department of Mathematics, Elazig, Turkey,

Abstract. In this paper, we examine the regular Dirac system with quite general separated boundary conditions nonlinear in the eigenvalue parameter and we achieve several spectral results.

Consider the following Dirac system with separated parameter dependent boundary conditions:

$$Ly = By' + Q(x)y = \mu^2 y, \quad x \in [0, y],$$

$$a_{11}(\mu)y_2(0) - a_{12}(\mu)y_1(0) = 0,$$

$$a_{21}(\mu) y_2(\gamma) + a_{22}(\mu) y_1(\gamma) = 0.$$

where $\lambda = \mu^2$, $a_{11}^2(\mu) + a_{21}^2(\mu) \neq 0$, $a_{21}^2(\mu) + a_{22}^2(\mu) \neq 0$, a_{ij} are entire functions satisfying the growth conditions

$$|a_{ij}(\mu)| \leq c_{ij} (1 + |\mu|)^{m_0} \exp(L_{ij} \{Im\mu\}), \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

and m_0 is a nonnegative integer.

List of references

- [1] B. M. Levitan, I. S. Sargsyan, Introduction to Spectral Theory; Selfadjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975.
- [2] B. Chanane, Computation of the eigenvalues of Sturm-Liouville problems with parameter dependent boundary conditions using the regularized sampling method, Math. Comput. 2005, 74, 252, 1793-1801.
- [3] B. Chanane, Computing eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems, Appl. Math. Lett. 1999, 12, 119-125.
- [4] A. I. Zayed, Advances in Shannon's Sampling Theory, CRC Press, 1993.

УДК 378.147.3, 372.851.02

КОМПЕТЕНТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ — ВКЛАД В КАЧЕСТВО ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ВТУЗОВ

С.Д. Тыныбекова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The article highlights the issues of competence approach in teaching mathematical disciplines of technical university students for whom mathematics is a comprehensive discipline. Unlike specialty implying way to carry out qualitatively specific activity, the category of competence is broader integrative. This is especially important because in today's fast-paced world to raise the issue of providing education integrative result - the ability and personal interested popping the graduates to fully implement professional activities. As a category for interpreting the result of education provides expert, but as a concept associated with the content of a future professional activity - competence. Invariant in the first place should be the components of education, which in the near and distant future will be useful technical college graduates (and their employers) to have mastered the practical new types of professional activity, and it is indisputable fundamental knowledge. In this case, the most important strategic task of vocational education in the period of post-industrial society is to move from information transfer learning disability, that is, transfer of competencies. The article presents some indicators of the quality of mathematical preparation of

technical college graduates on the basis of the competence model.

Keywords: competence, competence model of learning, mathematical training, the quality of teaching.

Аңдатпа. Бұл мақалада техникалық жоғары оқу орындарында жалпы білім беретін пән ретінде оқылатын математика пәндерін құзырлылығы тұрғысында оқыту мәселелері қаралған. Оның мамандықтан өзгешелігі нақты іс-әрекеттің арнайы түрін сапалы орындау қабілетін білдіретін Құзыреттілік категориясы кең, қарқындылығында. Ал бұл қазіргі әлемдегі тез өзгермелі кезеңде білім беру жүйесін қарқынды нәтижелері - жоғары оқу орнының түлегі кәсіби қызметін толық атқарудағы қабілеті мен жеке қызығушылығын қамтамасыз ету мәселесі маңызды болып саналады. Құзырлылық білім берудің нәтижесін мазмұны категориясы қызметін атқарады, ал құзыреттілік болашақтағы кәсіби қызметінің мазмұнымен байланысты түсінік. Жақын және алдағы келешекте техникалық жоғары оқу орны түлектері (оларға жұмыс берушілерге) үшін кәсіби қызметтің негізгі түрлерін тәжірибелік тұрғыда меңгеру, ал ол сөзсіз іргелі білім беру компоненттері біріншіден инвариантты болып табылады. Қоғамның индустриядан кейінгі кезеңінде кәсіби білімнің ең маңызды стратегиялық міндеті ақпарат таратуды үйрену, яғни құзыреттілікке берілу. Бұл мақалада техникалық жоғары оқу орны студенттерінің құзыреттілік үлгісінің математикалық дайындық сапасының кейбір көрсеткіштері келтірілген.

Кілттік сөздер: Құзыреттілік, оқытудың құзыреттілік үлгісі, математикалық дайындық, оқыту сапасы

Аннотация. В статье освещаются вопросы компетентностного подхода в обучении математическим дисциплинам студентов технических вузов, для которых математика является общеобразовательной дисциплиной. В качестве категории, позволяющей интерпретировать результат образования, выступает компетентность, а в качестве понятия, связанного с содержанием области будущей профессиональной деятельности – компетенция. Инвариантными в первую очередь должны быть те компоненты образования, которые в ближайшей и отдаленной перспективе будут полезны выпускникам вуза (и их работодателям) в ходе практического освоения новых видов профессиональной деятельности, а это бесспорно фундаментальные знания. В статье приведены некоторые показатели качества математической подготовки выпускников вуза на основе предлагаемой компетентностной модели.

Ключевые слова: компетентность, компетентностная модель обучения, математическая подготовка, качество образования.

В настоящее время развитие отечественной системы высшего образования осуществляется через её модернизацию, в основе которой повышение качества подготовки специалистов [1]. Успешное решение этой задачи определяется через такие инструменты, как ГОСО — государственные образовательные стандарты и ТУПы — типовые учебные программы, утверждаемые Министерством образования и науки Республики Казахстан.

В контексте проблем качества подготовки специалистов можно выделить вполне определенные недостатки действующих государственных образовательных стандартов высшего образования и типовых учебных программ, которые отмечаются исследователями этих вопросов. В стандартах прошлых лет, которые использовались в учебной практике по математическим дисциплинам, как базовым, выделялось в среднем 6 кредитов для технических специальностей вузов, что значительно меньше, чем в технических вузах Великобритании, России и других стран. А в 2012 году МОН РК утвердил новые ТУПы, по которым уменьшился объем часов по базовым

дисциплинам, а это значит и по математическим дисциплинам, и соответственно, увеличился - по элективным дисциплинам. Это было сделано, как мы полагаем, с теми намерениями, чтобы обязательная компонента - математика присутствовала также в виде курса по выбору (элективной дисциплине) с учетом специализации студентов.

Иного мнения придерживаются выпускающие кафедры, в чьих руках распределение кредитов по дисциплинам специальности, в результате количество кредитов по математическим дисциплинам сократилось по многим специальностям вдвое, т.е. до 3. Такое положение по математике в технических вузах делает, по нашему мнению, математическую подготовку студентов втузов не соответствующей государственным стандартам. Основная причина этого состоит в том, что введение новых ТУПов приводит к закреплению узкой специализации профессиональной подготовки студентов, поскольку элективные курсы, как правило, состоят из спецдисциплин. Этим самым поддерживается стереотипное представление о качестве образования, как производной от числа учебных спецдисциплин, прослушанных студентом. В то время, как на словах все согласны с тем, что качество профессионального образования определяется степенью приобщения студента к целостной системе будущей профессиональной деятельности, достигнутой в процессе реализации образовательной программы, отраженной в государственных стандартах.

Одним из путей выхода из этой ситуации является внедрение компетентностного подхода, который в последнее время завоевывает все большее число сторонников, в отличие от применяемой долгие годы предметно-знаниевой модели специалиста. Рассмотрим причины, определяющие его преимущества. В условиях нестабильности рыночной экономики, характеризующей социально-экономическую систему в целом, происходит ускорение темпов устаревания знаний. В связи с этим ключевое значение приобретает вопрос о том, а что должно быть объектом стандартизации в образовании и каков оптимальный объем его инвариантных компонентов. Инвариантными в первую очередь должны быть те компоненты образования, которые в ближайшей и отдаленной перспективе будут полезны выпускникам втуза (и их работодателям) в ходе практического освоения новых видов профессиональной деятельности, а это бесспорно фундаментальные знания. Именно эти компоненты будут играть решающую роль в повышении профессиональной мобильности молодых специалистов, их адаптации в различных социальных группах, толерантности, готовности следовать принятым в обществе нормам и правилам поведения.

Для базовых умений, в том числе математических, надо понимать и оценивать фундаментальность современного высшего профессионального образования. Понимание фундаментальности основано не на подсчете числа дисциплин, которые несут фундаментальные знания в виде механически усвоенной студентом информации, а в практическом применении усвоенных фундаментальных знаний. При этом важнейшей стратегической задачей профессионального образования в период постиндустриального общества является переход от передачи информации к научению, т.е. передаче компетенций. В настоящее время результатом образования должно быть не столько усвоение обучаемым новой информации, новых идей, сколько формирование предпосылок по выполнению задач предстоящей профессиональной деятельности. В отличие от специальности, подразумевающей способность качественно выполнять конкретный специализированный вид деятельности, категория компетенции более широкая, интегративная. А это особенно важно, поскольку в современном быстро меняющемся мире актуальна постановка вопроса об обеспечении образованием интегративного результата — способности и личной заинтересованности выпускника вуза в полном объеме выполнять профессиональную деятельность.

В качестве категории, позволяющей интерпретировать результат образования выступает компетентность, а в качестве понятия, связанного с содержанием области будущей профессиональной деятельности — компетенция. Категория "компетенция" отражает не только предметные знания — "знать, что но, прежде всего, процедурные знания - "знать, как" и ценностно-смысловые знания — "знать, зачем и почему" [2]. Если понимать под качеством подготовки специалистов — результат деятельности конкретного образовательного учреждения, измеряемую уровнем востребованности выпускников, то необходимо переходить к новым качественно иным критериям. Например, от затратных критериев (числа академических часов, отведенных учебным планом на дисциплину) к показателям, позволяющим определять возможности студента совершать адекватные действия в ситуациях, имитирующих его будущую профессиональную деятельность. А это приводит к необходимости дополнения оценочных критериев новыми компонентами, такими, как рейтинговой оценкой учебной деятельности студента, проверкой его способностей применять на практике результаты обучения.

Вышеизложенное подводит к необходимости поиска новых концептуальных подходов, помогающих по-новому осмыслить и более адекватно оценить качество математической подготовки выпускников вуза. Один из таких подходов связан с использованием компетенций как характеристики качества математической подготовки специалистов. В самом общем понимании компетенция — это предметная область, о которой студент как будущий специалист хорошо осведомлен и в которой он проявляет готовность к выполнению деятельности. Важно подчеркнуть различие между понятиями "способность" и "готовность". Способность это умение производить какие-либо действия или деятельность, а понятию "готовность" в большей степени присущ деятельностный аспект — "подготовленный к использованию". Кроме того, готовность предполагает также и согласие, желание что-либо сделать, т.е. включает и мотивированность личности на выполнение работы. По этой причине Дж. Равен назвал компетенции "мотивированными способностями" [3].

Таким образом, по нашему мнению, компетенция представляет собой открытую систему процедурных и профессиональных знаний, включающую взаимодействующие между собой компоненты, которые актуализируются и обогащаются в деятельности по мере возникновения реальных жизненно важных проблем, с которыми сталкивается носитель компетенции.

Рассмотрим некоторые показатели качества математической подготовки выпускников вуза на основе компетентностной модели.

1. Компетентность: потребность и способность к самообразованию по математическим дисциплинам. Показатель: умение планировать и организовывать свое самообразование на базе полученного математического образования; самостоятельно изучать новые математические понятия; умение оценивать достигнутый уровень самообразования по математическим дисциплинам.
2. Компетентность: целостное представление о математике, как науке и современных математических технологиях. Показатель: иметь целостное восприятие окружающего мира, уметь использовать математические знания в профессиональной деятельности.
3. Компетентность: готовность к использованию информационных и телекоммуникационных технологий для составления математических моделей задач специальности. Показатель: владение информационными и телекоммуникационными технологиями: методами сбора и

хранения информации; методами поиска информации в Интернете; умение их использовать для математического моделирования.

4. Компетентность: готовность к математическому творчеству. Показатель: владение навыками математического формулирования и решения задач специальности методами математики.
5. Компетентность: готовность к инновационной деятельности, как в своей области так и в математике для решения задач специальности. Показатель: умение применять инновационные методы и технологии в математике для решения задач в своей предметной области; умение проводить анализ и оценку результатов решения задач инновационными математическими методами.

Эти показатели требуют разработки инструментов их внедрения в учебную практику с тем, чтобы математическая подготовка студентов вузов способствовала профессиональной подготовке выпускников, удовлетворяющей потребностям рынка труда, реалиям меняющегося общества. Для этого математическая подготовка будущего специалиста должна быть непрерывной, т.е. знания общего курса математики должны применяться в спецкурсах, содержание которых вариативно и связано со специализацией студентов. А естественным продолжением и применением спецкурсов должны стать курсовое и дипломное проектирование, выполнение которых требует математических знаний, полученных как, в общем, так и специальных курсах математики по тематике, разработанной по тематике, согласованной с выпускающими кафедрами вуза. При разработке спецкурсов должен привлекаться материал по специализации студентов для создания проблемных ситуаций, а курсовое проектирование должно осуществляться по реальной тематике. Одним из наиболее значимых в подготовке специалиста к творческой деятельности является научно-исследовательская работа с использованием математического аппарата, подготовка и защита дипломов на актуальные технические темы и внедрение результатов этих работ на производстве.

Все представленные теории обучения и воспитания, независимо от их содержания и направленности, конечную цель обучения трактуют как овладение обучаемыми системой знаний, умений и личностных качеств, необходимых для успешной профессиональной деятельности. Это основная проблема качества подготовки будущих специалистов, требующая решения.

Список литературы

- [1] Государственная программа развития образования РК на 2011-2020 годы от 7 декабря 2010 года № 1118.
- [2] Ключевые компетенции - новая парадигма результата образования. И.А. Зимняя// Высшее образование сегодня. 2002. - № 5 с. 34-42.
- [3] Компетентность в современном обществе. Выявление, развитие и реализация. Дж. Равен// М., 2006.

УДК 004.9:378:574

ФОРМИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ У ВЫПУСКНИКОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ю. М. Федорчук, В.Н. Извеков, О.Н. Русина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Abstract. Information technology, along with traditional teaching methods used in education will facilitate the development of environmental competence of the graduates of higher institutions of technical education. Tomsk Polytechnic University has been successfully implementing conventional IT methods and developing and introducing new IT applications; it also establishes modern educational IT environment and forms a bank of academic and scientific information. In TPU developed and are testing the software supports the organization of environmental auditing procedure. Software product to allow for advice on optimization of the company.

Keywords: Information technology, environmental competence.

Аннотация. Информационные технологии наряду с традиционными образовательными приемами, применяемыми в образовательных целях, позволят сформировать экологические компетенции у выпускников технических вузов. В Томском политехническом университете успешно используются как распространённые, так разрабатываются и внедряются новые виды информационных технологий, создается современная информационно-образовательная среда, формируется банк учебно-методической и научной информации. В ТПУ разработан и находится в стадии апробации программный продукт, поддерживающий процедуру проведения экологического аудита на предприятии. Программа предложит рекомендациями по оптимизации деятельности предприятия с целью минимизации негативного воздействия на окружающую среду.

Ключевые слова: Информационные технологии, экологические компетенции.

Введение

Российская образовательная система в настоящее время претерпевает серьезные изменения. В 2009-2011 гг. были приняты Федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) третьего поколения для высшего профессионального образования. ФГОС предполагают переход к компетентностному подходу, главной целью которого является гармоничное развитие личности учащегося с определенным набором ключевых компетенций, обеспечивающих успешное адаптивное поведение к постоянно меняющимся условиям жизнедеятельности.

Федеральные государственные образовательные стандарты предписывают, какой должна быть структура образовательной программы, наличие в ней тех или иных элементов и какой набор компетенций она должна формировать. Какими методами и приемами, какие условия нужно создать для успешного формирования необходимых компетенций ФГОС не определяют. Выбор

способов реализации этих задач возлагаются на усмотрение вуза, на его возможности, внутренние ресурсы.

Использование информационных технологий в образовательном процессе, на наш взгляд, являются одним из методов, который позволит достичь компетенций, определенных ФГОС.

Теоретические предпосылки

Дисциплина «Экология» для технических специальностей призвана формировать, помимо всего прочего, экологические компетенции у выпускников технического вуза.

Методика обучения экологических дисциплин предполагается более эффективной, если в процессе обучения применяются и компьютерные и традиционные приемы.

Современная быстроразвивающаяся информатизация российского общества требует совершенствования образовательной системы в области информационных технологий.

Под информационной технологией понимается система методов и способов сбора, накопления, хранения, поиска и обработки информации на основе применения средств вычислительной техники» [1].

Информационные технологии позволяют решать следующие задачи обучения:

- хранение больших объемов баз данных;
- доступ и поиск необходимой информации;
- быстрый обмен информацией независимо от расстояния;
- построение моделей вымышленных и реальных объектов, явлений, процессов;
- возможность закрепления учебного, лабораторного материала путем многократного повторения и др.

И.В. Роберт определила следующие задачи применения информационных технологий в учебном процессе:

- индивидуальный подход в процессе обучения;
- контроль результатов обучения с возможностью корректировки;
- самоконтроль учебного процесса;
- освобождение учебного времени за счет выполнения компьютером трудоемких длительных вычислительных работ;
- визуализация учебного материала;
- моделирование исследуемых явлений и процессов;
- выполнение лабораторных работ с возможностью имитации реальных ситуаций и (или) экспериментов;
- формирование способности принимать оптимальное и грамотные решения в различных ситуациях;

- повышение мотивации обучения (за счет использования изобразительных средств программы или применения игровых ситуаций) и др.

К информационным технологиям, применяемым в образовательных целях, можно отнести электронные учебники и лекции, компьютерные программы с функцией контроля; справочные и учебные базы данных; предметно-ориентированные среды; учебно-методические комплексы; компьютерная графическая поддержка учебного процесса. [2]

Опыт ТПУ

В Томском политехническом университете (далее ТПУ) успешно происходит внедрение информационных технологий в процесс обучения, оснащение предметных кабинетов техническими средствами информатизации, создание современной информационно-образовательной среды, формирование банка учебно-методической и научной информации.

В ТПУ поставлены следующие задачи в области внедрения новых информационных технологий:

Сбор, изучение, общение и распространение в университете новых эффективных образовательных технологий;

Развитие концепции и практической реализации дистанционной формы образования;

Разработка методического обеспечения для новых информационных технологий;

Участие в развитии и учебно-методическом наполнении внутриуниверситетской компьютерной сети, его методическое сопровождение;

Разработка методического обеспечения для учебного процесса, ориентированного на групповой метод выполнения проектных работ;

Участие в формировании концепции и методическом обеспечении элитного технического образования;

Методическое обеспечение разработки электронных образовательных ресурсов университета. [3]

В ТПУ планируется создать не только информационный портал, но и портал реального сетевого взаимодействия на основе открытых для редактирования документов (wiki), располагаемых на персональных сайтах преподавателей. На портале также будут размещаться рабочие документы студентов и преподавателей. [4]

Мощная информационная поддержка и развивающие информационные технологии обеспечивают достижение подразделениями ТПУ своих образовательных задач.

На кафедре Экологии и безопасности жизнедеятельности ТПУ помимо указанных выше информационных технологий преподаватели используют обучающие компьютерные программы, такие как АС «Труд – Эксперт» и Программный комплекс «Эра».

Программа АС «Труд – Эксперт» предназначена для осуществления проведения всего комплекса работ по аттестации рабочих мест на предприятии. Студенты знакомятся с особенностями оценки условий труда на рабочем месте, выявляют вредные и опасные производственные факторы, разрабатывают мероприятия по приведению рабочих мест в соответствие с государственными нормативными требованиями, с целью предотвращения травмоопасных и аварийных ситуаций

Программный комплекс «Эра» знакомит студента с принципами текущей работы эколога на предприятии: составление отчетности, разработка проектной документации по охране окружающей среды. Программный комплекс позволяет организовать работу на предприятии в области

охраны атмосферного воздуха и безопасного обращения с отходами, т. е. формируются необходимые экологические компетенции, которые обеспечат готовность выпускника приступить к профессиональной деятельности сразу после окончания вуза.

В Томском политехническом университете разработан и находится в стадии апробации программный продукт, поддерживающий процедуру проведения экологического аудита на предприятии. В программе заложена обобщенная процедура проведения ЭА, выработанная на основе рекомендаций ГОСТ Р ИСО 19011-2003 и результатов сравнительного анализа различных подходов.

Программный продукт формирует отчет с рекомендациями по оптимизации деятельности хозяйствующего субъекта, внедрению мероприятий по охране окружающей среды с целью минимизации негативного воздействия на окружающую среду. Все это является частью создания системы экологического менеджмента на предприятии. [5]

Также программа позволит подготовить такие документы, как инвентаризация источников воздействия на окружающую среду, карты управления отходами, и другие исходные базы данных по предприятию с возможностью дополнения и обновления. На основе этих документов возможна разработка программы производственного экологического контроля и конкретных решений по технологическим процессам обращения с отходами.

Программный продукт позволит рассматривать разнообразные варианты развития ситуаций, что в значительной мере ускорит и облегчит поиск и разработку форм и методов управления их развитием. Обучающийся будет иметь возможность научиться принимать обоснованные решения на теоретическом уровне, а затем использовать их в практической деятельности.

Студенты также смогут моделировать экологическую ситуацию с грамотным использованием правовых методов для ее разрешения. Что позволит, помимо всего прочего, сформировать эколого-правовую компетентность у обучаемого.

Выводы

Таким образом, информационные технологии в сочетании с традиционными образовательными приемами при преподавании экологических дисциплин позволят усилить эффективность достижения экологических компетенций, определенных ФГОС ВПО.

Список литературы

- [1] Информационные системы в экономике: Учебник / Под ред. проф. В.В. Дика. - М.: Финансы и статистика, 1996. - С. 25-30.
- [2] Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании. - М.:Школа-Пресс, 1994.
- [3] <http://tpu.ru/>
- [4] А.Ф. Федоров, «Магистратуре – новые технологии обучения», «За кадры», №21 (3311), 26 октября 2009 г.
- [5] Извеков В.Н. Экологическое инспектирование и аудит: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006.-152 с.

УДК 681.08

КОМПИЛЯТОРЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Ш.И. Ходиев, С.С. Кобиров

Национальный Университет Узбекистана
Самаркандский государственный университет

Abstract. The questions connected with modern methods of creation of compilers, by automation of their construction, a place of compilers in technology of creation of the software are considered.

Keywords: compilation, interpreter, multilanguage systems, contextual analysis, component approach.

Аннотация. Рассматриваются вопросы, связанные с современными методами создания компиляторов, автоматизацией их построения, местом компиляторов в технологии создания программного обеспечения.

Ключевые слова: компиляция, интерпретатор, многоязыковые системы, семантический анализ, компонентный подход.

Введение

Область информатики, связанная с построением трансляторов объединяет идеи, методы и алгоритмы синтаксического и семантического анализа искусственных языков и практический опыт технологии разработки для языков высокого уровня для различных архитектур, разнообразных операционных систем. Успехи в области языков и программирования, возможности современных технологий, позволяют создавать коды программ, относящихся к разнообразным областям и аспектам написания приложений, в том числе построения синтаксических анализаторов, интерпретаторов. В частности, компонентные технологии. Компоненты (развертывания) являются блоками, из которых строится компонентное программное обеспечение. Эти же компоненты имеются в виду, когда говорят о компонентных технологиях, компонентно-ориентированной разработке ПО, компонентах ActiveX, VBA, COM, .Net и других. Однако отсутствие полного успеха, в частности, в построении автоматического генератора трансляторов, свидетельствует что в этой области продвижение меньше, чем может показаться.

Данная работа написана на основе опыта преподавания, а также разработки трансляторов и интерпретаторов (или их частей) в рамках дипломных проектов студентами высших учебных заведений (НУУз, СамГУ). Актуальность определяется и тем, что идеи и методы этой области используются во всё возрождающем числе приложений компьютеров. Необходимость создания компиляторов определяется и тем, что языки программирования эволюционируют. Учитывая, что разработаны разнообразные систематические технологии решения многих задач, возникающих при компиляции, а также языки реализации, программные среды и программный инструментарий, и несмотря на то, что компиляторы считаются крайне сложными в написании, мы имеем возможность реализации неплохих компиляторов в рамках даже курсовых работ по проектированию компиляторов [1,2,6].

Место компилятора в программном обеспечении

Написание компиляторов охватывает языки программирования, архитектуру вычислительных систем, теорию языков, алгоритмы и технологию создания программного обеспечения. Компиляторы составляют существенную часть программного обеспечения ЭВМ. Это связано с тем, что языки высокого уровня стали основным средством разработки программ. Наряду с традиционными языками, широкое распространение получили так называемые "универсальные" языки а также некоторые специализированные (например, язык обработки списочных структур Лисп, Perl и т.д.). Кроме того, большое распространение получили языки, связанные с узкими предметными областями, такие, как входные языки пакетов прикладных программ, языки для конкретных применений, например, для запросов к базам данных, форматирования текста, а также языки, основанные на логике, языки сценариев (скриптов), объектно-ориентированные языки [2].

С другой стороны, постоянно растущая потребность в новых компиляторах связана с развитием архитектур ЭВМ. Это развитие идет по различным направлениям. Наряду с возникновением новых архитектур, совершенствуются старые архитектуры как в концептуальном отношении, так и по отдельным, конкретным параметрам. Развиваются различные параллельные архитектуры, невероятными темпами развивается ARM архитектура и мобильные технологии. Естественно, для каждой новой системы команд требуется полный набор новых компиляторов с распространённых языков.

Структура компилятора

Программная система, выполняющая преобразование на том или ином языке в форму, которая может выполняться на компьютере, называется компилятором. Компилятор считывает текст программы на исходном языке и транслирует его в эквивалентный текст на другом – целевом языке. Интерпретатор – это один из видов языкового процессора. Вместо получения целевого кода, как в случае транслятора, интерпретатор непосредственно выполняет операции, указанные в исходной программе, над входными данными, предоставляемыми пользователем. Например, языковый процессор Java объединяет в себе и компиляцию, и интерпретацию. Однако, кроме компиляторов, потребовать создания выполнимой программы могут и другие программы. Например, препроцессор осуществляет сборку исходной программы в случае, если она разделена и находится в различных файлах.

Компиляция состоит из этапов анализа (разбиения исходной программы на составные части и создания её промежуточного представления) и синтеза (конструирования из промежуточного представления целевой программы). В процессе анализа определяются в древовидную структуру операции, заданные исходной программой.

Определённый вид анализа выполняют также и такие программные инструменты, как структурный редактор, программы форматированного вывода на печать (программы так, чтобы её структура была более ясной); статически проверяющие программы (анализирующие программу на ошибки); интерпретаторы.

Анализ разбивает исходную программу на составные части и накладывает на них грамматическую структуру. Затем он использует эту структуру для создания промежуточного представления исходной программы. Строит таблицу символов с информацией об исходной программе. Синтез строит требуемую целевую программу на основе промежуточного представления и таблицы символов. Между анализом и синтезом компиляторы содержат фазу машинно-независимой оптимизации. Семантический анализатор использует синтаксическое дерево и таблицы символов для проверки исходной программы на семантическую согласованность с определением языка. Он также собирает информацию о типах и сохраняет её в синтаксическом дереве или в таблице

символов для последующего использования в процессе генерации промежуточного кода [4,5].

Автоматизация построения трансляторов

Большое число универсальных и специализированных языков, разнообразие машинных языков, необходимость в связи с этим в построении большого числа различных типов трансляторов — вот те предпосылки, которые сделали весьма важными вопросы автоматизации построения трансляторов [2,6]. Автоматизация программирования для трансляторов достигается теми же методами, что и автоматизация программирования вообще. Основными из них являются следующие: использование языка программирования высокого уровня, существенно облегчающего создание программ для широкого круга проблемных областей; накопление библиотеки стандартных алгоритмов (подпрограмм, модулей), имеющих частое применение в задачах данной предметной области, и использование их как готовых частей (обобщенных операций) создаваемых программ; использование проблемно-ориентированных инструментов и систем повышенной интеллектуальности, позволяющих автоматически синтезировать программы (или их части) для задач некоторой проблемной области.

Обобщение алгоритмов трансляции. Работа по обобщению методов трансляции велась в основном по трем направлениям: 1 - системы построения трансляторов (СПТ), 2 - многоязыковые системы, 3 - расширяемые языки [5, 4].

Многоязыковым транслятором, или совместной реализацией, называем набор трансляторов с некоторого множества входных языков на некоторое множество выходных систем, причем эти трансляторы объединяет общая схема трансляции и (хотя бы частично) общие алгоритмы и сопряжения. Вырожденный пример - набор трансляторов, включенных в одну операционную систему.

Под СПТ понимают "исчерпывающую совокупность методик, правил и рабочих процедур, позволяющих для любого языка программирования из некоторого класса входных языков путем систематического применения указанной системы методик и правил получить транслятор, реализующий данный язык на нужной выходной ЭВМ. Понятия СПТ и совместной реализации логически независимы.

Для того, чтобы описать транслятор, необходим формализм для описания. Этот формализм затем реализуется в виде входного языка системы автоматизации построения трансляторов. Формализмы основаны на атрибутивных грамматиках.

Типичные СПТ строятся вокруг универсальных синтаксических процессоров, автоматически конструирующих синтаксические анализаторы по формальной спецификации грамматики. Иногда на этой основе удается автоматизировать и некоторые последующие этапы трансляции (например, атрибутивным подходом). Но при переходе от модельных примеров к реальным языкам ограничения таких СПТ оказываются слишком сильными, эффективность низкой, а главное - сложность подгонки спецификаций сравнима с прямой реализацией. Из наиболее известных таких систем автоматизации отметим Yacc и СУПЕР [2].

Обобщение опыта переноса трансляторов с одной машины на другую привело к развитию концепции промежуточного языка и модульного подхода. Синтез идеи языка - ядра и СПТ дал концепцию расширяемого языка, популярную в 60-е годы и затем ожившую в форме "открытых языков". Большое число универсальных и специализированных языков, разнообразие машинных языков, необходимость в связи с этим в построении большого числа различных типов трансляторов — вот те предпосылки, которые сделали весьма важными для системного программирования вопросы автоматизации построения трансляторов.

Синтаксический анализ программ: алгоритмы реализации

Принципы и технологии написания компиляторов столь распространены, что идеи используются в самых разных областях. При создании трансляторов для широкого круга языков и машин достаточно лишь нескольких основных технологий написания компиляторов. Мы здесь не рассматриваем подробно методы создания компонентов компиляторов, среды, в которых они работают, и программный инструментарий, упрощающий их создание. Отметим только, что основными формализмами, лежащими в основе реализации лексических анализаторов, являются конечные автоматов. Основным формализмом, используемым при контекстном анализе, является аппарат атрибутивных грамматик. Синтаксический анализ основан на грамматиках. Контекстный анализ может быть основан на атрибутивных грамматиках. Глобальная оптимизация основывается на глобальном потоковом анализе, который выполняется на графе программы и представляет по существу преобразование этого графа. При этом могут учитываться такие свойства программы, как межпроцедурный анализ, межмодульный анализ, анализ областей жизни переменных и так далее. Для генерации кода разработаны различные методы, такие как таблицы решений, сопоставление образцов, включающее динамическое программирование, различные синтаксические методы [2,5].

В [3] рассмотрен объектно-ориентированный анализатор выражений, удобный для обучения процесса синтаксического анализа (разбора, анализа выражений), так как задача чётко определена и действия производятся по строгим правилам алгебры. Реализация может опираться на шаблоны и может применяться к любому численному методу. Разработаны три варианта класса, реализующих анализ по методу рекурсивного спуска. При рекурсивном взгляде на выражения старшинство операций подразумевается в самом способе определения порождающих правил, а метод разбора и оценки выражений похож на то, как математические выражения оцениваются людьми. Написав шаблон класса можно создать обобщённую версию анализатора, пригодную для работы с любыми данными, которые допускают выражения в алгебраической форме.

В [2] отмечаются другие применения технологии компиляции. Анализирующая часть нижеприводимых примеров подобна анализатору компилятора. Это кремниевые компиляторы, на выходе которых получается схема устройства на соответствующем языке. Форматирование текста, программа которого получает на входе символы, означающих абзацы, рисунки или математические структуры. Интерпретаторы запросов, которые транслируют предикаты, содержащие операторы отношений и логические операторы, в команды поиска в базе данных записей.

Алгоритмы трансляции, сводящиеся в итоге, в том числе и к работе с различными структурами данных чрезвычайно полезны также в целях освоения главнейших принципов, алгоритмов, приёмов решения самых разных задач различных областей деятельности. В частности, синтаксический анализатор и описанные методики создания интерпретатора можно адаптировать для создания аналогичных анализаторов и интерпретаторов языков любого типа, что позволяет создать и собственный язык программирования. В [3] предлагаются процедуры синтаксического разбора, выделяющие из файла отдельные лексемы, форматирующие файлы, извлекающие имена заголовков и «раскрашивающие» текст программы. При этом эти процедуры не привязаны к конкретному языку и можно легко приспособить и расширить их для обработки текстов на любом компьютерном языке. ООП реализация на соответственном языке, в частности, даёт возможность при реализации опираться на шаблоны, применять реализации более универсально и разнообразно. Реализации в виде класса и процедур делает даёт возможность легко переносить или применяться в других программах, увеличивать наглядность и надёжность. Написав шаб-

лон класса, можно легко создать обобщённую версию синтаксического анализатора, использовать анализатор для создания других или новых версий анализаторов. Т.о. мощные библиотеки классов платформы может взять на себя массу рутинных операций, что даёт возможность писать программы используя готовые блоки.

В области проектирования сложных систем на роль представления накопленного опыта в области программирования во второй половине XX века стали претендовать образцы проектирования, называемые также типовыми решениями или шаблонами. На основе имеющегося опыта исследователями и практиками разработки ПО выделено множество образцов — типовых архитектур, проектных решений для отдельных подсистем и модулей или просто программистских приемов, — позволяющих получить достаточно качественные решения типовых задач. Примером может служить часто используемая архитектура компилятора как последовательности фильтров, обрабатывающих входную программу — лексического анализатора (лексера), синтаксического анализатора, семантического анализатора, набора оптимизаторов и генератора результирующего кода. Таким способом можно достаточно быстро построить прототипный компилятор для несложного языка. Более производительные компиляторы, нацеленные на промышленное использование, строятся по более сложной схеме, в частности, используя элементы стиля «Репозиторий».

С точки зрения компонентных подходов, компонент может быть независимо поставлен или не поставлен, добавлен в состав некоторой системы или удален из нее, в том числе, может включаться в состав систем других поставщиков. Созданный ранее программный код может быть использован в дальнейшем без изменений или в модифицированном и усовершенствованном виде. Знание основных принципов работы широко используемых систем промежуточного уровня (middleware) и умение строить приложения на их основе в настоящий момент становится таким же необходимым элементом образования профессионального разработчика программ, как и знания в области операционных систем, компиляторов и систем управления базами данных.

Реализация языковых интерпретаторов

Интерпретаторы состоят из двух частей: синтаксического анализатора, оценивающего выражения, и собственного интерпретатора, выполняющего программу. Эта программа считывается из файла, и затем начинается её исполнение. Загружает программу соответствующая программа. Во всех интерпретаторах имеется цикл верхнего уровня, который читает последовательные лексемы программы и предпринимает соответствующие действия для их обработки.

Легче писать интерпретатор для языков именно такого типа, что упрощает написание. Принципы, лежащие в основе таких интерпретаторов приложимы к любому другому языку, можно взять разработанные ранее процедуры в качестве отправной точки. Важность интерпретаторов состоит из следующих.

1. Интерпретаторы способны поддерживать интерпретивную среду. Многие приложения выигрывают от реализации в интерпретирующей среде.
2. Они хорошо подходят для интерактивной отладки.
3. Интерпретаторы превосходно работают с «языками сценариев», таких как языки запросов в системах управления базами данных.
4. Интерпретаторы позволяют без всяких изменений запускать программу на самых разных платформах. Для каждого нового окружения нужно только реализовать пакет времени выполнения.

Такой язык ООП, как C++ является идеальным языком создания интерпретаторов. Анализатор выражений, как часть интерпретатора можно адаптировать из уже построенного для другого

языка анализатора.

Изменения в анализаторе могут быть связаны с синтаксисом реализуемого нового языка. Другие различия между реализуемым и адаптируемым интерпретаторами следуют из соображений эффективности. Если синтаксический анализатор нового языка оптимизирован и интегрирован с интерпретатором, он не инкапсулируется в отдельном классе и реализуется автономными функциями. Одновременно, интерпретатор и анализатор могут совместно использовать некоторые разделы кода. Язык реализации C++ позволяет легко вводить в интерпретатор новые команды. Облегчается и процесс усовершенствования и расширения интерпретатора, создание нового интерпретатора для своего языка программирования [2].

Заключение

Методы трансляции находят применение не только в компиляторах. Сейчас, например методы оптимизации кода используются в инструментарии для поиска ошибок (мощные анализаторы семантических ошибок) в программном обеспечении, при проверке безопасности кода. Модели, теория и алгоритмы, связанные с компиляторами, могут применяться для решения задач проектирования и разработки ПО. Интересны задачи, которые встречаются при разработке языковых процессоров, независимо от исходного языка или целевой машины.

Одной из наиболее известных работ по компиляторам является [2]. Там опыт создания компиляторов рекомендуется применять в учебных курсах для первокурсников по языкам программирования; в написании курсовых работ, выполняющихся небольшими группами студентов и состоящих в реализации небольшого языка программирования, спроектированного ими самостоятельно. Разработанные таким образом языки могут быть ориентированы на применение в компьютерную графику, игры, операции с матрицами и другое. Студенты в своей работе используют генераторы компонентов компиляторов, такие как ANTLR, Lex, Yacc, метод синтаксически управляемой трансляции. Для старшекурсников упор делается на генерацию кода и оптимизацию для современных машин, включая сетевую и многопроцессорную архитектуру.

Список литературы

- [1] Арипов М.М., Ходиев Ш.И. Методы трансляции и преобразования программ. Учебное пособие для ВУЗов. – Т.: Университет, 2008. – 134 с.
- [2] Ахо, Альфред В., Лам, Моника С., Сети, Рави, Ульман, Джеффри Д. Компиляторы: принципы и инструментарий, 2-е изд.: Пер с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2008. – 1184 с. : ил. – Парал. Тит.англ. решений./Константиновский Д.Л., Агранович М.Л., Дымарская О.Я. 2-е изд., доп. и перераб. М: Логос, 2006 – 160 с.
- [3] Фридман А., Кландер Л., Михаэлс М., Шильдт Х.С/C++. Алгоритмы и приёмы программирования. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007. -560 с.:ил.
- [4] Касьянов В.Н. Оптимизирующие преобразование программ. -М.: Наука, 1988. -336 с.
- [5] М.М. Бежанова, И.В. Поттосин. Современные понятия и методы программирования.// Новосибирск. 2001. 210 с.
- [6] <http://www.INTUIT.ru>

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

У.У. Абылкаиров, С.Е. Айтжанов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. In this paper the inverse problem for the linearized non-stationary Navier-Stokes equations. To solve this inverse problem to a ratio of the direct problem, added some additional conditions, which are usually referred to override. The method of successive approximations for the inverse theorems of existence, uniqueness and stability of solutions. The results are of theoretical and practical significance.

Keywords: inverse problem, Navier-Stokes equation, nonlocal condation.

Аңдатпа. Бұл жұмыста сызықтандырылған стационар емес Навье-Стокс жүйесі үшін кері есеп зерттелген. Бұндай кері есепті зерттеу үшін, тура есепті құрайтын берілгендеріне қосымша шарт қойылады. Тізбектей жуықтау әдісімен кері есептің шешімі бар, жалғыз және шешімнің орнықты болатындығы туралы теоремалар алынды. Алынған нәтижелер теориялық және қолданбалы мәндеріне ие.

Кілттік сөздер: кері есеп, Навье-Стокс теңдеу, локалді емес шарт.

Аннотация. В данной работе исследуется обратная задача для линеаризованной нестационарной системы Навье-Стокса. Для решения такой обратной задачи к соотношениям, составляющим прямую задачу, добавляются некоторые дополнительные условия, которые обычно называют переопределением. Методом последовательных приближений для обратной задачи получены теоремы существования, единственность и устойчивость решения. Полученные результаты имеют теоретические и прикладные значения.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение Навье-Стокса, нелокальное условие.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega \subset R^2$ обратную задачу для линеаризованной системы Навье-Стокса, определить $\vec{v}(x, t)$ и $f(t)$ которые удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial t} + \Sigma(x, t, \vec{v}, \nabla \vec{v}) + \nabla p(x, t) = \nu \Delta \vec{v}(x, t) + f(t) \vec{\lambda}(x, t), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2)$$

начальному условию

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad (3)$$

граничному условию

$$\vec{v}|_S = 0, \quad (4)$$

и нелокальному интегральному условию

$$\int_{\Omega} \vec{u}(x, t) \cdot \vec{v}(x, t) dx = e(t), \quad (5)$$

где $\Sigma(x, t, \vec{v}, \nabla \vec{v}) = \vec{a}(x, t)v_k + b_k(x, t)\vec{v}_{x_k}$; $\vec{a}(x, t)$, $\vec{b}(x, t)$, $\vec{\lambda}(x, t)$, $\vec{v}_0(x)$, $e(t)$ – заданные функции.

В работе [1] исследована обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения. Задача определения источника для системы Навье-Стокса с финальным и интегральным переопределением рассматривались различными методами рядом автором [2-12].

В работах [9-12] обратные задачи для параболического уравнения исследовались методами теории полугрупп, а этот метод, как известно, предполагает линейность операторов и независимость коэффициентов уравнения от времени t .

Обратную задачу (1)-(5) можно трактовать как задачу нахождения точных управления $f(t)$, необходимых для достижения заданной или ожидаемой энергии $e(t)$. Обратные задачи исследовались методами теории управления для систем с распределенными параметрами в работах [13-16].

Прежде чем перейти к определению слабого решения обратной задачи, введем необходимое функциональное пространство [17].

$V_2(Q_T)$ – банахово пространство, полученное в результате замыкания множества гладких, соленоидальных и равных нулю вблизи $S = \partial\Omega \times [0, T]$, функций по норме

$$\|\vec{u}\|_{V_2(Q_T)} = \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(x, t)\|_{2, \Omega} + \|\vec{u}_x\|_{2, Q_T}.$$

Определение 1. Функции $\vec{v}(x, t)$ и $f(t)$ называются обобщенным решением обратной задачи (1)-(5), если функции $\vec{v}(x, t) \in L_{\infty} \left(0, T; \overset{0}{J}(\Omega)\right) \cap L_2 \left(0, T; \overset{0}{J}_1(\Omega)\right)$, $f(t) \in L_2(0, T)$ удовлетворяют следующим интегральным тождествам

$$\int_{Q_T} \left[-\vec{v} \cdot \vec{\xi}_t + \Sigma(x, t, \vec{v}, \nabla \vec{v}) \vec{\xi} + \nu \nabla \vec{v} \cdot \nabla \vec{\xi} \right] dx dt = \int_{Q_T} f(t) \vec{\lambda} \cdot \vec{\xi} dx dt + \int_{\Omega} \vec{v}_0(x) \vec{\xi}(x, 0) dx, \quad (6)$$

для любых $\xi(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap \overset{0}{J}(Q_T)$, $\xi(x, T) = 0$,

$$e'(t) - \int_{\Omega} \vec{u}_t \cdot \vec{v} dx + \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \Sigma(x, t, \vec{v}, \nabla \vec{v}) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} dx = f(t) \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx, \quad (7)$$

где

$$a(x, t) \in V_2(Q_T), \quad b(x, t) \in V_2(Q_T), \quad \vec{u}(x, t) \in C^1(0, T; \overset{0}{J}_1(\Omega)),$$

$$e(t) \in W_2^1(0, T), \quad \vec{v}_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega), \quad \vec{\lambda}(x, t) \in C(Q_T), \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Лемма 1. Обратная задача (1)-(5) эквивалентна постановке задачи (1)-(4), (7) при достаточно гладком решении (\vec{v}, f) и при совместных данных задачи, причем функцию $f(t)$ можно выразить

явном виде:

$$f(t) = \left(\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx \right)^{-1} \left[e'(t) - \int_{\Omega} \vec{u}_t \cdot \vec{v} dx + \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \Sigma(x, t, \vec{v}, \nabla \vec{v}) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} dx \right]. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (8), тогда существует единственное обобщенное решение $\vec{v}(x, t) \in V_2(Q_T)$ и $f(t) \in L_2(0, T)$ обратной задачи (1)-(5).

Доказательство. Методом последовательных приближений докажем существование и единственности обобщенного решения в “целом”. Возьмем в качестве нулевого приближения $\vec{v}^0 = 0$.

$$f^m(t) = \left(\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx \right)^{-1} \left[e'(t) - \int_{\Omega} \vec{u}_t \cdot \vec{v}^{m-1} dx + \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \Sigma(x, t, \vec{v}^{m-1}, \nabla \vec{v}^{m-1}) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v}^{m-1} dx \right]. \quad (10)$$

А $\vec{v}^m(x, t)$ находим из следующей задачи

$$\frac{\partial \vec{v}^m(x, t)}{\partial t} + \Sigma(x, t, \vec{v}^m, \nabla \vec{v}^m) + \nabla p^m(x, t) = \nu \Delta \vec{v}^m(x, t) + f^m(t) \vec{\lambda}(x, t), \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^m = 0, \quad (12)$$

$$\vec{v}^m|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad (13)$$

$$\vec{v}^m|_S = 0. \quad (14)$$

Покажем, что для каждого $f^m(t)$ существует единственная вектор-функция $\vec{v}(x, t)$, удовлетворяющая (11)-(14) в смысле обобщенного решения.

Доказательство существования и единственности задачи (11)-(14).

Предположим, что $f^m(t)$ известны, так как они явным образом выражаются через $\vec{v}^{m-1}(x, t)$, подставим их в (11), и исследуем разрешимость задачи (11)-(14).

Методы доказательств, используемые здесь, развиты О.А. Ладыженской [1, с.104] при исследовании начально-краевых задач для уравнения Навье-Стокса, а также в работах [2-4].

Определение 2. Обобщенным решением задачи (11)-(14) называются функции $\vec{v}^m(x, t) \in V_2(Q_T)$ и удовлетворяют следующим интегральным тождествам

$$\int_{Q_T} \left[-\vec{v}^m \cdot \vec{\xi}_t + \Sigma(x, t, \vec{v}^m, \nabla \vec{v}^m) \vec{\xi} + \nu \nabla \vec{v}^m \cdot \nabla \vec{\xi} \right] dx dt = \int_{Q_T} f^m \vec{\lambda} \cdot \vec{\xi} dx dt + \int_{\Omega} \vec{v}_0(x) \vec{\xi}(x, 0) dx, \quad (15)$$

для любых $\xi(x, t) \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap \overset{0}{J}(Q_T)$, $\xi(x, T) = 0$, где $a(x, t) \in V_2(Q_T)$, $b(x, t) \in V_2(Q_T)$, $\vec{u}(x, t) \in C^1(0, T; \overset{0}{J}_1(\Omega))$, $e(t) \in W_2^1(0, T)$, $\vec{v}_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$, $\vec{\lambda}(x, t) \in C(Q_T)$, $f^m(t) \in L_2(0, T)$.

Лемма 2. Задача (11)-(14) может иметь не более одного обобщенного решения из $V_2(Q_T)$, для любых $a(x, t) \in V_2(Q_T)$, $b(x, t) \in V_2(Q_T)$, $\vec{\lambda}(x, t) \in C(Q_T)$, $e(t) \in W_2^1(0, T)$, $\vec{v}_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$, $\vec{u}(x, t) \in C^1(0, T; \overset{0}{J}_1(\Omega))$, $f^m(t) \in L_2(0, T)$.

Таким образом, последовательности $\{(\vec{v}^m, f^m)\}$ корректна определена. Докажем, что последовательности $\{(\vec{v}^m, f^m)\}$ являются фундаментальной последовательностью в пространстве $V_2(Q_T) \times L_2(0, T)$, то в силу полноты пространств $V_2(Q_T) \times L_2(0, T)$ следует, что пара функций (\vec{v}, f) является предельной для последовательности $\{(\vec{v}^m, f^m)\}$, т.е. $(\vec{v}^m, f^m) \rightarrow (\vec{v}, f)$ при $m \rightarrow \infty$, тем самым (\vec{v}, f) является искомым слабым решением обратной задачи (1)-(5).

Вводя обозначения $\vec{w}^{m+1} = \vec{v}^{m+1} - \vec{v}^m$, $\Phi^{m+1} = f^{m+1} - f^m$, из (10)-(14) получим:

$$\Phi^{m+1}(t) = \left(\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{h} dx \right)^{-1} \left[\int_{\Omega} \vec{u}_t \cdot \vec{w}^m dx + \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \Sigma(x, t, \vec{w}^m, \nabla \vec{w}^m) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{w}^m dx \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{w}^{m+1}}{\partial t} + \Sigma(x, t, \vec{w}^{m+1}, \nabla \vec{w}^{m+1}) + \nabla (p^{m+1} - p^m) = \nu \Delta \vec{w}^{m+1} + \Phi^{m+1} \vec{h}, \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \vec{w}^{m+1} = 0, \quad (18)$$

$$\vec{w}^{m+1}|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

$$\vec{w}^{m+1}|_S = 0. \quad (20)$$

Оценим Φ^{m+1} следующим образом

$$\begin{aligned} |\Phi^{m+1}(t)| &= \left(\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{h} dx \right)^{-1} \left[\int_{\Omega} |\vec{u}_t| \cdot |\vec{w}^m| dx + \int_{\Omega} |\vec{u}| \cdot |\Sigma(x, t, \vec{w}^m, \nabla \vec{w}^m)| dx + \right. \\ &\left. + \nu \int_{\Omega} |\nabla \vec{u}| \cdot |\nabla \vec{w}^m| dx \right] \leq c_0 ((c_1 + c_1 c_2) d + (c_1 c_2 + \nu c_1)) \|\nabla \vec{w}^m\| \leq c_3 \|\nabla \vec{w}^m\|. \end{aligned}$$

Возведем в квадрат и проинтегрируем по t в последнем неравенстве, получим

$$\int_0^t |\Phi^{m+1}(\tau)|^2 d\tau \leq c_3^2 \int_0^t \|\nabla \vec{w}^m\|^2 d\tau \leq c_4 \left(\max_t \|\vec{w}^m\|^2 + \int_0^t \|\nabla \vec{w}^m\|^2 d\tau \right) \leq c_4 \|\vec{w}^m\|_{V_2(Q_T)}^2. \quad (21)$$

Умножим (17) на \vec{w}^{m+1} в $L_2(Q_t)$, получим следующее соотношение

$$\frac{1}{2} \|\vec{w}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|\nabla \vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 = \int_{Q_t} \vec{w}^{m+1} \cdot \Sigma(x, t, \vec{w}^{m+1}, \nabla \vec{w}^{m+1}) dQ_t + \int_{Q_t} \Phi^{m+1} \vec{h} \cdot \vec{w}^{m+1} dQ_t. \quad (22)$$

Оценивая правые части, подставляя в (22), тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\vec{w}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|\nabla \vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 &\leq \varepsilon \|\nabla \vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 + \frac{c_2^2}{\varepsilon} \|\vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 + \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \|\vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 + \frac{\varepsilon}{2} c_5^2 c^2(\Omega) \int_0^t |\Phi^{m+1}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon \leq \frac{\nu}{2}$ и перенесем второе слагаемое из правой части влево, получим

$$\frac{1}{2} \|\vec{w}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 + (\nu - \varepsilon) \|\nabla \vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 \leq \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{c_2^2}{\varepsilon} \right) \|\vec{w}^{m+1}\|_{2,Q_t}^2 + \frac{\varepsilon}{2} c_5^2 c^2(\Omega) \int_0^t |\Phi^{m+1}(\tau)|^2 d\tau. \quad (23)$$

Обозначим $c_6 = \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{c_2^2}{\varepsilon}$ тогда используя неравенство Гронуолла получим

$$\|\vec{w}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|\nabla \vec{w}^{m+1}\|_{2,\Omega}^2 d\tau \leq c_4 \frac{\varepsilon c_5^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \frac{\nu - \varepsilon + c_6 + 1}{\nu - \varepsilon} \exp[c_6 t] \|\vec{w}^m\|_{V_2(Q_t)}^2.$$

Тем самым мы получили требуемую оценку

$$\|\vec{w}^{m+1}\|_{V_2(Q_t)}^2 \leq c_4 \frac{\varepsilon c_5^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \frac{\nu - \varepsilon + c_6 + 1}{\nu - \varepsilon} \exp[c_6 t] \|\vec{w}^m\|_{V_2(Q_t)}^2. \quad (24)$$

Рассматривая вместе (21) и (24), заметим, что справедлива оценка

$$\int_0^t |\Phi^{m+1}(\tau)|^2 d\tau \leq c_4 \frac{\varepsilon c_5^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \frac{\nu - \varepsilon + c_6 + 1}{\nu - \varepsilon} \exp [c_6 t] \int_0^t |\Phi^m(\tau)|^2 d\tau. \quad (25)$$

Выберем $c_4, c_5, c_6, \varepsilon$ и σ таким образом, чтобы выполнялось

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\nu}{2}, \quad 0 < \sigma \leq t_0, \quad (26)$$

$$c_4 \frac{\varepsilon c_5^2 c^2(\Omega)}{2} \cdot \frac{\nu - \varepsilon + c_6 + 1}{\nu - \varepsilon} \exp [c_6 \sigma] \leq q < 1.$$

Тогда оценки (24) и (25) приводятся к следующему виду

$$\int_0^\sigma |\Phi^{m+1}|^2 d\tau \leq q \int_0^\sigma |\Phi^m|^2 dt, \quad (27)$$

$$\|\vec{w}^{m+1}\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq q \|\vec{w}^m\|_{V_2(Q_\sigma)}^2, \quad (28)$$

для $m = 1, 2, \dots$, где $Q_\sigma = \Omega \times (0, \sigma]$.

Следовательно, из оценок (27), (28), при выполнении (26) и вытекает, что $\{(\vec{v}^m, f^m)\}$ являются последовательностью Коши в соответствующих пространствах $V_2(Q_\sigma) \times L_2(0, \sigma)$. В силу вышеприведенных рассуждений существует единственная пара функций (\vec{v}, f) соответственно из $V_2(Q_\sigma) \times L_2(0, \sigma)$ такая, что

$$\vec{v}^m \rightarrow \vec{v} \text{ в } V_2(Q_\sigma),$$

$$f^m \rightarrow f \text{ в } L_2(0, \sigma).$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в соотношениях (10) и (15) в силу сильной сходимости (\vec{v}^m, f^m) , мы получим обобщенное решение (\vec{v}, f) для обратной задачи (1)-(5) в $Q_\sigma = \Omega \times (0, \sigma]$.

Пусть существует два решения (\vec{v}_k, f_k) , $k = 1, 2$ в Q_σ , тогда в силу соотношений (26)-(28) получим

$$\int_0^\sigma |f_1 - f_2|^2 d\tau \leq q \int_0^\sigma |f_1 - f_2|^2 dt, \quad \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq q \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)}^2,$$

или

$$(1 - q) \int_0^\sigma |f_1 - f_2|^2 d\tau \leq 0, \quad (1 - q) \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq 0.$$

Так как $q < 1$, то $\int_0^\sigma |f_1 - f_2|^2 d\tau = 0$ и $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 = 0$, откуда и следует, что $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}_2$, $f_1 \equiv f_2$.

Константы $c_4, c_5, c_6, \varepsilon$ и σ не зависят от начальной данной функции $\vec{v}_0(x)$, поэтому для $t \geq \sigma$ полагаем, что

$$\vec{v}_0(x) = \vec{v}(x, \sigma),$$

где $\vec{v}(x, \sigma)$ – значение локального решения при $t = \sigma$. В силу локальной разрешимости обратной задачи повторяя проделанные рассуждение конечное число раз, для конечного времени, заключаем, что обобщенное решение (\vec{v}, f) существует и единственно в Q_T .

Проблема устойчивости решения обратных задач связана с построением таких методов, которые позволяют определять приближенные решения $(\hat{\vec{v}}, \hat{f})$, близкие к искомому (\vec{v}, f) , но на основе имеющейся, приближенно заданной исходной информации $\hat{\vec{v}}_0(x), \hat{e}(t)$. Впервые проблема устойчивости решения обратных задач была поставлена А.Н. Тихоновым [82, с.195].

Теорема 2 Пусть (\vec{v}_k, f_k) , $k = 1, 2$ обобщенные решения обратной задачи (1)-(5), соответствующие \vec{v}_{0k}, e_k ($k = 1, 2$), тогда для разности этих обобщенных решений выполняется соотно-

шение

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_T)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T)} \leq C(T) \left(\|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\|_{2,\Omega} + \|e_1 - e_2\|_{W_2^1(0,T)} \right), \quad (29)$$

где $C(T)$ независит от \vec{v}_{0k} , e_k ($k = 1, 2$).

Доказательство. Пусть (\vec{v}_k, f_k) , $k = 1, 2$ обобщенные решения обратной задачи (1)-(5) с соответствующими данными \vec{v}_{0k} , e_k ($k = 1, 2$). Запишем обратную задачу (1)-(5) для их разности. Далее, из (10) – (14) при выполнении условия (8), (26) получим $Q_\sigma = \Omega \times (0, \sigma]$ следующие неравенства

$$\int_0^\sigma |f_1 - f_2|^2 d\tau \leq q \int_0^\sigma |f_1 - f_2|^2 dt + \int_0^T |e'_1 - e'_2|^2 dt, \quad (30)$$

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 \leq q \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)}^2 + \|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (31)$$

Из (30) и (31) получим следующее неравенство

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,\sigma)} \leq C \left(\|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\|_{2,\Omega} + \|e_1 - e_2\|_{W_2^1(0,T)} \right),$$

где константа C независима от \vec{v}_{0k} , e_k ($k = 1, 2$).

Повторяя рассуждения, проведенные выше для $Q_\sigma = \Omega \times (0, \sigma]$, получим что для $Q_\sigma = \Omega \times (\sigma, 2\sigma]$, справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_{\sigma,2\sigma})} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(\sigma,2\sigma)} &\leq C \left(\|\vec{v}_{01}(x, \sigma) - \vec{v}_{02}(x, \sigma)\|_{2,\Omega} + \right. \\ &+ \|e_1 - e_2\|_{W_2^1(0,T)} \left. \right) \leq C \left(\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)} + \|e_1 - e_2\|_{W_2^1(0,T)} \right) \leq \\ &\leq C \left(\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_\sigma)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,\sigma)} + \|e_1 - e_2\|_{W_2^1(0,T)} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В общем случае, полагая $Q_{k\sigma, k(\sigma+1)} = \Omega \times (k\sigma, k(\sigma+1)]$; $k = 0, 1, \dots, [\frac{T}{\sigma}] + 1$ и $d = \|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\|_{2,\Omega} + \|e_1 - e_2\|_{W_2^1(0,T)}$, получим следующую рекуррентную формулу

$$y_k \leq C(y_{k-1} + d); \quad k = 0, 1, \dots, [T/\sigma] + 1; \quad (33)$$

где

$$y_k = \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_{k\sigma, k(\sigma+1)})} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(k\sigma, k(\sigma+1))},$$

для таких же $k = 0, 1, \dots, [\frac{T}{\sigma}] + 1$.

Из рекуррентной формулы (33) учитывая $y_0 \leq cd$, мы получим

$$\begin{aligned} y_k &\leq C(y_{k-1} + d) \leq Cy_{k-2} + C^2d + Cd \leq \dots \leq \\ &\leq C^k y_0 + Cd \sum_{j=0}^{k-1} C^j \leq \left\{ C^{[T/\sigma]+2} + C \sum_{j=0}^{k-1} C^j \right\} d. \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда следует оценка устойчивости

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_T)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T)} &\leq \sum_{k=0}^{[T/\sigma]+1} y_k \leq \\ &\leq ([T/\sigma] + 1) \left\{ C^{[T/\sigma]+2} + C \sum_{j=0}^{k-1} C^j \right\} d \leq C(T)d. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения. Абылкаиров У.У. // Математический журнал ИМ РК. 2003. Т. 3, №4(10). с. 5–12.
- [2] Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. / Marcel Dekker: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. 2000. Vol. 231. 709 p.
- [3] О существовании и единственности обобщенного решения обратной задачи для нелинейной нестационарной системы Навье–Стокса в случае интегрального переопределения. Васин И.А. // Математические заметки. 1993. Т. 54. №4. с. 34–44.
- [4] Исследование вопросов единственности решений в некоторых нелинейных обратных задачах гидродинамики. Прилепко А.И., Васин И.А. // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. №1. с. 109–120.
- [5] Некоторые нестационарные обратные задачи гидродинамики с финальным наблюдением. Прилепко А.И., Васин И.А. // Доклады АН СССР. 1990. Т. 314. №5. с. 1075–1078.
- [6] Смешанная граничная задача для системы Стокса с условиями неполного прилипания и протекания. Абылкаиров У.У. // Известия НАН РК. Серия физ.–мат. 2004. №3. с. 26–32.
- [7] Однозначная разрешимость задачи протекания для 2D–3D системы Навье–Стокса I. Абылкаиров У.У. // Математический журнал ИМ РК. 2005. Т. 5. №2(16). с. 5–11.
- [8] Однозначная разрешимость задачи протекания для 2D–3D системы Навье–Стокса II. Абылкаиров У.У. // Математический журнал ИМ РК. 2005. Т. 5. №3(17). с. 11–18.
- [9] Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. Прилепко А.И., Орловский Д.Г. // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. №1. с. 119–129.
- [10] Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. Прилепко А.И., Орловский Д.Г. // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №8. с. 1343–1353.
- [11] Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. Прилепко А.И., Орловский Д.Г. // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. №4. с. 694–701.
- [12] О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционных уравнениях. Прилепко А.И., Орловский Д.Г. // Доклады АН СССР. 1989. Т. 305. с. 1045–1049.

- [13] Оптимальное управление системами описываемыми уравнениями с частными производными. Лионс Ж.-Л. / М.: Мир. 1972. 416 с.
- [14] Управление сингулярными распределенными системами. Лионс Ж.-Л. / М.: Наука. 1987. 347 с.
- [15] Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Фурсиков А.В. / Новосибирск: Научная Книга. 1999. 350 с.
- [16] Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. / Владивосток: Дальнаука. 2008. 402 с.
- [17] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Ладыженская О.А. / М.: Наука. 1970. 288 с.

УДК 517.95

КЛАССИЧЕСКАЯ ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

У.У. Абылкаиров, Х. Хомпыш

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. In this paper the quasi-stationary problem of a heat convection in which to determine the rate of motion of a viscous fluid, the fluid temperature and pressure. In some simplifications and dimensionless equations of natural convection with the influence of viscous dissipation of heat energy and high-speed driving mode, a system that describes the slow convective motions unevenly heated fluid in a gravitational field. We prove the unique solvability of classical initial-boundary quasi-stationary problem of a heat convection.

Keywords: heat convection, steady-state equation, the classical solution.

Аңдатпа. Бұл жұмыста тұтқыр сұйықтың қозғалу жылдамдығын, сұйық температурасын және қысымын анықтайтын квазистационар жылу конвекция есебі зерттеледі. Тұтқыр диссипация энергияның сұйықтың жылуына және қозғалу жылдамдығына әсері ескерілген бос конвекция теңдеуін кейбір ықшамдау және өлшемдеу негізінде, ауырлық әрісте бірғалыпты емес қызған баяу қозғалатын конвективті жүйеге келтірілген. Бастапқы-шеттік квазистационар жылу конвекция есебінің классикалық бірмәнді шешімділігі дәлелденген.

Кілттік сөздер: жылу конвекция, квазистационар теңдеу, классикалық шешім.

Аннотация. В данной работе исследуется квазистационарная задача тепловой конвекций, в которой требуется определить скорость движения вязкой жидкости, температуру жидкости и давление. При некоторых упрощениях и безразмеривании уравнения свободной конвекций с учетом влияния вязкой диссипации энергии на тепловой и скоростной режим движения, получена система, описывающая медленные конвективные движения неравномерно нагретой жидкости в поле тяжести. Доказана классическая однозначная разрешимость начально-краевой

квазистационарной задачи тепловой конвекций.

Ключевые слова: тепловая конвекция, квазистационарное уравнение, классическое решение.

В задачах гидродинамики тепла и массообмена, возникающих при моделировании многих технологических процессов, динамики движения земной коры и т.д. существенными оказываются: нелинейность задачи; учет зависимости коэффициентов переноса от температуры; учет влияния вязкой диссипации энергии.

Движение теплопроводящей вязкой несжимаемой жидкости описываются полной системой уравнений свободной конвекций с учетом влияния вязкой диссипации энергии на тепловой и скоростной режим движения [1], [2]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\Delta)\vec{v} + \nabla p = \nu\Delta\vec{v} + \beta\vec{g}\theta + \vec{f}, \quad (1)$$

$$div \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$c \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\theta \right] = \chi\Delta\theta + \nu\Phi + \varphi. \quad (3)$$

Здесь \vec{v} , p и θ соответственно скорость, давление и температура жидкости, $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 (\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i})^2$ – диссипативная функция, \vec{g} – ускорение силы тяжести, β – коэффициент объемного расширения, $\vec{f}(x, t)$ – вектор массовых сил, $\varphi(x, t)$ – плотность тепловых источников. Положительные постоянные ν , c , χ имеют такой физический смысл: c – теплоемкость жидкости, ν – кинематическая вязкость, $\chi = \frac{\lambda_0}{\rho}$, где χ – коэффициент теплопроводности и ρ – плотность жидкости.

При некоторых упрощениях и безразмеривании уравнения (1), (3) мы получим уравнения конвекции Обербека-Буссинеска в виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\Delta)\vec{u} + \nabla p = \mu\Delta\vec{u} + \theta\vec{k}, \quad (4)$$

$$div \vec{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\theta = \delta\Delta\theta. \quad (6)$$

При этом на границе $\partial\Omega$, которая предполагается неподвижной и достаточно гладкой, скажем класса C^2 , ставятся краевые условия

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = -z,$$

\vec{k} – направленный вверх единичный вектор ограниченной области $\Omega \subset R^n (n = 2, 3)$. Здесь μ и δ – безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности. С более часто употребляемыми числами Рэлея r , Грасгофа Gr и Прандтля σ они связаны соотношениями

$$r = \frac{1}{\mu\delta}, \quad Gr = \frac{1}{\mu^2}, \quad \sigma = \frac{\mu}{\delta}. \quad (7)$$

Заметим, что число Прандтля σ в отличие от остальных параметров r , Gr , μ и δ определяется лишь свойствами жидкости. При этом σ может принимать весьма различные по порядку величины – порядка 10^{-2} для ртути, порядка 1 для воздуха, порядка 10 для воды, $10^2 - 10^3$ для

минеральных масел, порядка $10^{12} - 10^{14}$ для вулканической магмы, порядка 10^{23} для вещества мантии Земли.

Добавляя к уравнениям (4)-(6) начальные условия

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \varphi(x), \quad (8)$$

приходим к общей начально-краевой задаче конвекции Обербека-Буссинеска.

Сделаем замену переменных $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\mu}$, $t = \mu\tau$, тогда уравнения (4)-(6) с учетом (7) приводятся к следующему виду

$$Gr \frac{d\vec{v}}{d\tau} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \vec{k}\theta, \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \Delta \theta, \quad (10)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla$.

В предельном случае, когда $Gr \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, уравнения (9), (10) превращаются в следующие уравнения:

$$\Delta \vec{v} - \nabla p + \theta \vec{k} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (12)$$

с заменой $\tau = 0 t$.

Следует заметить, что данный предельный переход соответствует случаю, когда вязкость $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \Delta \theta$, теплопроводность $\delta \rightarrow 0$ в силу (7).

Добавляя к уравнениям (11)-(12) уравнение $div \vec{v} = 0$, получим в предельном случае нулевой теплопроводности и бесконечно большой вязкости следующую систему, описывающую медленные конвективные движения неравномерно нагретой жидкости в поле тяжести:

$$\Delta \vec{v} - \nabla p + \theta \vec{k} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (14)$$

$$div \vec{v} = 0 \quad (15)$$

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для неизвестных полей температуры $\theta(x, t)$, скорости $\vec{v}(x, t)$, и давления $p(x, t)$ удовлетворяющих уравнениям (11)-(13) с краевым условием

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (16)$$

начальным условием для температуры

$$\theta|_{t=0} = \varphi(x). \quad (17)$$

Замечание 1. В уравнении (11) нет члена с производной по времени, поэтому не имеется начальное условие для скорости. Уравнение (11) является уравнением связи между θ и \vec{v} .

Замечание 2. Уравнение (12) не содержит диффузионного члена. Поэтому, по естественному смыслу отпадает граничное условие для температуры.

Теорема 1. Ортогональным дополнением в пространстве $L_2(\Omega; R^n)$ к множеству

$$V := \{\vec{v} : \vec{v} \in C_0^\infty(\Omega; R^n), \operatorname{div} \vec{v} = 0\} \quad (18)$$

является множество

$$G(\Omega) := \{\vec{v} : \vec{v} = \nabla p, p \in L_{loc}^2(\Omega), \nabla p \in L_2(\Omega)\}. \quad (19)$$

В соответствии с этим

$$L_2(\Omega; R^n) = V^0(\Omega) \oplus G(\Omega), \quad (20)$$

где $V^0(\Omega) := \bar{V}^{L_2(\Omega)}$ — замыкание V в $L_2(\Omega)$.

Замечание 3. Утверждение типа теоремы 1 для нестандартных граничных условия $(\vec{v} \cdot \vec{n}) = |\vec{v}|$, $x \in \Gamma^1$, $p = \text{const}$, $x \in \Gamma^1$, $\int_\Omega p dx = 0$, на оставшейся части границы Γ^0 выполнены условия “прилипания”:

$$\vec{v}|_{\Gamma^0} = 0$$

где $\partial\Omega = \Gamma^0 \cup \Gamma^1$ доказан в работе У.У. Абылкаирова [3]. Теорема 1 позволяет ввести еще одно пространство, плотно вложенное в $V^0(\Omega)$, а именно пространство

$$V^1(\Omega) := \bar{V}^{H_0^1(\Omega)} \quad (21)$$

замыкание V в норме интеграла Дирихле, т.е. в норме

$$\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\vec{v}_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} := \|\vec{v}_x\|_{2,\Omega}. \quad (22)$$

Соответствующее (21) скалярное произведение в $V^1(\Omega)$ обозначим так:

$$((u, v)) = \int_\Omega u_x \cdot v_x dx := (u_x, v_x).$$

Для ограниченных областей Ω с не очень плохой границей элементы $G(\Omega)$ суть градиенты ∇p , $p \in W^{1,2}$, а норма $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)} = \|\cdot\|_{2,\Omega}$ подчинена $\|\cdot\|_{V^1(\Omega)}$. Благодаря этому и теореме 1 справедливо следующее утверждение [4], [5].

Гладкость решений $\vec{v} \in V^1(\Omega)$ в $\Omega' \subset \Omega$ удалось исследовать очень просто [4]. Гладкость же \vec{v} возле границы зависит от гладкости $\partial\Omega$ и анализируется сложнее, с помощью оценки (22) и ее локального аналога.

Аналог теорем 1. для векторных полей из $L_p(\Omega)$ доказан в [6], где $L_p(\Omega)$ допускает прямое разложение

$$L^p = S_p + G_p \quad (23)$$

при этом $S_p := \bar{V}^{L_p(\Omega)}$, а G_p — замыкание в $L_p(\Omega)$ множества градиентов всевозможных гладких в Ω функций. Можно ввести проектор $P : L_p(\Omega) \rightarrow S_p$, соответствующий прямому разложению (26). в случае $p = 2$ это ортогональный проектор.

Далее, произведем подстановку (26) в (12) и получим одну обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве функций θ :

$$\dot{\theta} = T(L\theta, \theta) \quad (24)$$

здесь T — билинейный оператор определенный на $S_2 \times L_2$, где

$$T(\vec{v}, \theta) = -\vec{v} \nabla \theta = -\operatorname{div}(\vec{v} \cdot \theta) \quad (25)$$

Оператор T обладает следующим свойством: для любых гладких поля $\vec{v} \in S_2$ и функций θ, φ выполнено равенство

$$(T(\vec{v}, \theta), \varphi) = -(T(\vec{v}, \theta), \theta), \quad (T(\vec{v}, \theta), \theta) = 0,$$

где (\cdot, \cdot) - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Определение 1. [7], [8] Уравнение $\dot{\theta} = F(\theta)$ в банаховом пространстве X называется обратимым, если оно инвариантно замены $t \rightarrow -t$, $\theta \rightarrow J\theta$, где $J : X \rightarrow X$ - инверсия ($J^2 = I$, $J \neq I$).

Условие обратимости с инверсией J для уравнения $\dot{\theta} = F(\theta)$ имеет вид

$$F(J\theta) = -J'(F(\theta)) \text{ для всех } \theta \in X.$$

Если J - линейный оператор, то это условие упрощается и принимает следующий вид $FJ = -JF$. Тогда в случае уравнения (27) инверсия $J = -I$. Далее докажем ряд лемм, указывающие на некоторые свойства решения квазистационарной системы тепловой конвекций.

Лемма 1. Система (11)-(12) является обратимой: она инвариантна относительно замены $t \rightarrow -t$, $\theta \rightarrow -\theta$, $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$. Она инвариантна относительно замены $t \rightarrow \gamma t$, $\vec{v} \rightarrow \gamma \vec{v}$, $p \rightarrow \gamma p$ при любом вещественном $\gamma \neq 0$, так что, вместе $\theta(x, t)$, $\vec{v}(x, t)$, $p(x, t)$, также и $\gamma\theta(x, \gamma t)$, $\gamma\vec{v}(x, \gamma t)$, $\gamma p(x, \gamma t)$ есть решение.

Так как задача линейная, доказательство очевидное.

Лемма 2. Для любой гладкой функции $F : R \rightarrow R$ функционал

$$\theta \rightarrow \int_{\Omega} F(\theta) dx$$

является интегралом системы (11)-(12).

Доказательство. Используя (11)-(14), и при помощи теоремы Гаусса о дивергенции, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(\theta) dx &= \int_{\Omega} F'(\theta)' dx = - \int_{\Omega} F'(\theta) \vec{v} \cdot \nabla \theta dx = - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \nabla F(\theta) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}[\vec{v} \cdot F(\theta)] dx = - \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} F(\theta) dS = 0. \end{aligned}$$

Определение 2. Потенциальная энергия $V(\theta)$ и потенциал $\Phi(\theta) = -V(\theta)$ жидкости в поле тяжести равна

$$V(\theta) = - \int_{\Omega} \theta z dx \tag{26}$$

Лемма 3. Потенциальная энергия для любого движения монотонно убывает со временем (а потенциал возрастает).

Доказательство. Из (11)-(14) после некоторых несложных преобразований, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta z dx = \int_{\Omega} (\nabla \vec{v})^2 dx. \tag{27}$$

Но правая часть обращается в нуль только при $\vec{v} = 0$.

Лемма 4. Для любых решений (11)-(14) существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} V[\theta(t)] = V_{\pm} \tag{28}$$

и выполняется равенство

$$V_- - V_+ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\nabla \vec{v})^2 dx dt. \tag{29}$$

Доказательство. По леммам 2, 3 потенциальная энергия $V[\theta(t)]$ монотонно убывающая функция времени, притом ограниченная. Поэтому существуют пределы (31). Проинтегрировав

равенство (30) получим (32). Тогда ясен смысл важного равенства (32): полная потеря потенциальной энергии на траектории равна энергии, диссипированной вязкостью. Приступим к доказательству принципа максимум для температуры.

Лемма 5. Температура достигает максимума (и минимума) в начальный момент времени.

Доказательство. Используя результаты Леммы 2 совершая предельный переход при $p \rightarrow \infty$ в равенстве

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{p,\Omega} = \|\theta(\cdot)\|_{p,\Omega}, \quad (30)$$

получим требуемое.

В следующей теореме требования к начальному полю температуры минимально возможные. Результат о единственности далее будет усилен.

Теорема 2. Пусть Ω — ограниченная область в R^3 с границей $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ для некоторого γ , $0 < \gamma \leq 1$, а начальная температура $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$. Тогда существует и притом единственное классическое решение (θ, \vec{v}) задачи (11)-(15).

Доказательство проводится методом последовательных приближений Гюнтера-Лихтенштейна.

Верна следующая теорема.

Теорема 3. Пусть в Ω ограниченная область в R^3 с $\partial\Omega \in C^\infty$, и пусть $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Тогда решение (θ, \vec{v}) задачи (11)-(15) бесконечно дифференцируемо по x, t .

Список литературы

- [1] Гидродинамика. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. / М.: Наука. 1980. 634 с.
- [2] Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Гершуни Г.З., Жуковицкий Е.М. / М.: Наука. 1972. 412 с.
- [3] Однозначная разрешимость задачи протекания для 2D-3D системы Навье-Стокса I. Абылкаиров У.У. // Математический журнал. 2005. Vol. 5. №2(16). С. 5–11.
- [4] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Ладыженская О.А. / 2-е изд. М.: Наука. 1970. 323 с.
- [5] Уравнения Навье-Стокса. Темам Р. / М.: Мир. 1981. 452 с.
- [6] Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Юдович В.И. / Изд-во РГУ. Ростов-на-Дону. 1984. 127 с.
- [7] Reversible systems, Nonlinear and turbulent processes in physics. V.I. Arnol'd. // (Kiev, 1983). Harwood Acad. Publ. Chur. 1984. Vol. 3. p. 1161-1174.
- [8] Теория катастроф. Арнольд В.И. / Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундамент. Напр. Динамические системы-5. ВИНТИ. 1986. с. 219-277.

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТИ

У.У. Абылкаиров, Х. Хомпыш, Ш.С. Сахаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Abstract. In this work one an ε -approximation of initial-boundary value problem for system of equations of the heat convection for the Kelvin-Voight fluids is investigated. This perturbed system arises naturally when we do number analysis of first initial-boundary value problem for equations of the viscoelastic incompressible Kelvin-Voight fluids. The unique solvability of the ε -regularized value problem is proved and a priori estimates for the strong solution are obtained. Moreover the convergence for $\varepsilon \rightarrow 0$ of strong solutions of the ε -regularized value problem to smooth solution of first initial-boundary value problem are showed.

Keywords: heat convection, Kelvin-Voight fluids, ε -approximation.

Аңдатпа. Бұл жұмыста Кельвин-Фойгт сұйығы үшін жылу конвекция теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есептің бір ε - жуықтауы зерттелінді. Мұндай жүйе серпімді тұтқыр Кельвин-Фойгт сұйықтары үшін бастапқы-шеттік есептерін сандық шешуде туындайды. Бастапқы-шеттік ε -регуляризацияланған есептің бірімәнді шешімділігі дәлелденіп, әлді шешім үшін априорлық бағалаулар алынды. Бұл ε -регуляризацияланған есептің әлді шешімдерінің $\varepsilon \rightarrow 0$ кезде бастапқы есептің әлді шешіміне жинақылығы көрсетілді.

Кілттік сөздер: жылу конвекция, Кельвин-Фойгт сұйығы, ε - жуықтау.

Аннотация. В данной работе исследовано одна ε - аппроксимация начально-краевой задачи для системы уравнений тепловой конвекции для жидкости Кельвина-Фойгта. Это возмущенная система естественно возникает при численном анализе исходной начально-краевой задачи для уравнений вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта. Доказано однозначного разрешимость ε -регуляризованной задачи и получены априорные оценки для сильного решения. Доказана сходимости сильного решения ε -регуляризованной задачи к сильному решению исходной начально-краевой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ключевые слова: тепловой конвекция, жидкости Кельвина-Фойгта, ε - аппроксимация.

Хорошо известно [1]-[3], что непосредственное применение метода дробных шагов при численном анализе начально-краевых задач для уравнений движения вязких несжимаемых жидкостей возникают трудности, связанные с удовлетворением уравнению несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, t) = 0.$$

Для преодоления этих трудностей в работах [2-5] предложены различные способы аппроксимации (методы ε -аппроксимации) уравнений Навье-Стокса с малыми параметрами. В данной

работе мы применим эту идею к системе уравнений тепловой конвекции для жидкости Кельвина-Фойгта, так как она также содержит уравнению несжимаемости.

В работах автора [6-8] исследованы корректность и сходимости некоторых ε - аппроксимации системы уравнений тепловой конвекции для вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта [9]:

$$\vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \chi \Delta \vec{v}_t + \nabla p = \vec{f}(x, t) + g \vec{\gamma} \theta, \quad \vec{\gamma} = (0, 0, 1), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, t) = 0, \quad (2)$$

$$\theta_t - \lambda \Delta \theta + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta = q(x, t), \quad (3)$$

в которых уравнение (2) аппроксимируется одним из следующих уравнений

$$\varepsilon p^\varepsilon + \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon(x, t) = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon p_t^\varepsilon + \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon(x, t) = 0 \quad (5)$$

а уравнения (1) и (3) аппроксимируются соответственно следующими уравнениями со штрафом

$$\vec{v}_t^\varepsilon - \nu \Delta \vec{v}^\varepsilon + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon - \chi \Delta \vec{v}_t^\varepsilon + \frac{1}{2} \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \vec{f}(x, t) + g \vec{\gamma} \theta^\varepsilon, \quad (6)$$

$$\theta_t^\varepsilon - \lambda \Delta \theta^\varepsilon + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \theta^\varepsilon + \frac{1}{2} \theta^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon = q(x, t). \quad (7)$$

Рассмотрим следующую ε - аппроксимацию уравнений (1)-(3):

$$\vec{v}_t^\varepsilon - \nu \Delta \vec{v}^\varepsilon + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \vec{v}^\varepsilon - \chi \Delta \vec{v}_t^\varepsilon + \frac{1}{2} \vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega}^\varepsilon = \vec{f}(x, t) + g \vec{\gamma} \theta^\varepsilon, \quad (8)$$

$$\vec{\omega}_t^\varepsilon + \alpha \vec{\omega}^\varepsilon = \vec{v}^\varepsilon, \quad (9)$$

$$\theta_t^\varepsilon - \lambda \Delta \theta^\varepsilon + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla) \theta^\varepsilon + \frac{1}{2} \theta^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon = q(x, t), \quad (10)$$

Эта система уравнений получается, если в системе уравнений (1)-(3) уравнение несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, t) = 0 \quad (11)$$

заменить на возмущенное уравнение

$$\varepsilon (p_t^\varepsilon + \alpha p^\varepsilon) + \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon(x, t) = 0. \quad (12)$$

Здесь $\vec{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость жидкости, θ – температура, p – давление, $f(x, t)$ и $q(x, t)$ – заданные внешние гидродинамические силы и источник тепла, χ – релаксационный коэффициент вязкости, λ – теплопроводность, ν – кинематическая вязкость жидкости.

Система уравнений (8)-(10) рассматривается в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \subset C^2$, $t \in [0, T]$ со следующими начальными

краевыми условиями:

$$\vec{v}^\varepsilon|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad \vec{\omega}^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \theta^\varepsilon|_{t=0} = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$\vec{v}_n^\varepsilon \equiv \vec{v}^\varepsilon \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\operatorname{rot} \vec{v}^\varepsilon \times n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{\omega}_n^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\operatorname{rot} \vec{\omega}^\varepsilon \times n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \quad (14)$$

Определение 1. Тройка функций $(\vec{v}^\varepsilon, \vec{\omega}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ называется сильным решением задачи (8)-(10), (13), (14) если $\vec{v}^\varepsilon(x, t), \vec{\omega}^\varepsilon(x, t) \in W_\infty^1(0, T; H_n^2(\Omega)), \theta^\varepsilon(x, t) \in L_\infty\left(0, T; W_2^0(\Omega)\right) \cap L_2 \times \times \left(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)\right), \theta_t^\varepsilon(x, t) \in L_2(Q_T)$ и удовлетворяют систему уравнений (8)-(10) и начальному условию (13) почти всюду в Q_T .

Для начально-краевой задачи (8)-(10), (13)-(14) имеет место следующая теорема. Это и есть основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$\vec{v}_0(x) \in J_n^2(\Omega), \quad \theta_0(x) \in W_2^0(\Omega), \quad f, f_t \in L_2(Q_T), \quad q(x, t) \in L_2(Q_T). \quad (15)$$

Тогда начально-краевая задача (6)-(9) для уравнений тепловой конвекции со штрафом (6) при $\forall \varepsilon > 0$ имеет единственное сильное решение $(\vec{v}^\varepsilon, \vec{\omega}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$, и для этого решения справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}^\varepsilon(x, t)\|_{W_\infty^1(0, T; H^2(\Omega))}^2 + \|\theta^\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; W_2^0(\Omega))}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|q \operatorname{raddiv} \vec{v}^\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 + \|\theta_t^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)}^2 + \\ & + \|\theta^\varepsilon\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|q \operatorname{raddiv} \vec{\omega}^\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 \leq C_1 < \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$, справедливы следующие предельные переходы:

$$\begin{aligned} & \vec{v}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{v} \quad \text{в} \quad W_\infty^1(0, T; H_n^2(\Omega)), \\ & \vec{v}^\varepsilon \rightarrow \vec{v} \quad \text{в} \quad W_2^1(0, T; H_n^1(\Omega)), \\ & \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon \xrightarrow{*} 0 \quad \text{в} \quad L_\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ & \theta^\varepsilon \xrightarrow{*} \theta \quad \text{в} \quad L_\infty\left(0, T; W_2^0(\Omega)\right), \\ & \theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta \quad \text{в} \quad L_2\left(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)\right), \\ & \theta_t^\varepsilon \rightharpoonup \theta_t \quad \text{в} \quad L_2(0, T; L_2(\Omega)), \\ & \theta^\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{в} \quad L_2(0, T; L_2(\Omega)), \\ & -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{\omega}^\varepsilon \xrightarrow{*} p(x, t) \quad \text{в} \quad L_\infty(0, T; H^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (17)$$

где тройка предельных функций $(\vec{v}(x, t), \theta(x, t), p(x, t))$ является сильным решением начально-краевой задачи (1)-(3), $(\cdot), (\cdot)$ доказанное в [1], и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\vec{v}\|_{W_{\infty}^1(0,T;H_n^2(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L_{\infty}(0,T;W_2^1(\Omega))}^2 + \|\theta_t\|_{L_2(Q_T)}^2 + \\ & + \|\nabla p\|_{L_{\infty}(0,T;L_2(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega)\cap W_2^1(\Omega))}^2 \leq C_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Список литературы

- [1] Н.Н. Яненко Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. –Новосибирск. Наука, –1967.
- [2] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. –М.: Мир, –1981. –408 с.
- [3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, – 1970. – 288 с.
- [4] Осолков А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему уравнений Навье-Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. –1971. – Т. 21. – С. 75-103.
- [5] Kotsiolis A. A., Oskolkov A. P. The initial-boundary value problem with a free surface condition for the ε -approximations of the Navier-Stokes equations and some their regularizations // Записки научных семинаров ПОМИ. –1993. –Т. 205. –С. 38-70.
- [6] Осолков А.П. Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина-Фойгта и их ε -аппроксимаций // Записки научных семинаров ПОМИ. –1995. – Т. 221. – С. 185-207.
- [7] Смагулов Ш.С. Малые параметры некоторой модели гидродинамики // Вестник КазГУ им. аль-Фараби. Серия физика, математика, информатика. –Алматы. –1996. –Т. 4. – С. 171-177.
- [8] Хомпыш Х. Начально-краевая задача с проскальзыванием для модифицированных уравнений тепловой конвекции и их ε -аппроксимаций // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. –2008. –№2(57). –С. 36-41
- [9] Хомпыш Х. О скорости сходимости решений одной ε -аппроксимаций уравнений тепловой конвекции для жидкости Кельвина-Фойгта // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. –2012. –№1(72) –С. 79-86.
- [10] Сахаев Ш.С., Хомпыш Х. Разрешимость одной начально-краевой задачи ε -аппроксимаций для модифицированных уравнений тепловой конвекции // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия физико - математических наук. –Алматы. –2009. –№4(28). – С. 167-171.
- [11] Хомпыш Х. Разрешимость начально-краевой задачи тепловой конвекции с условием проскальзывания для уравнений жидкости Кельвина-Фойгта // Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева, научный журнал. –Алматы. –2010. –№2(78). –С. 178-182.

УДК 577.4:519.9+517 (574)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РЕАГИРУЮЩИХ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В МНОГОФАЗНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

А.А. Айдосов, С.М. Нарбаева

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. The paper deals with mathematical modeling, using a deterministic approach, the analysis of the phenomenon and the creation of a physical model of the object. Defining the properties of the reaction medium, the transfer coefficients and the structural parameters of the medium and the output of the basic system of equations with the appropriate initial and boundary conditions.

Simulation of the regional atmospheric processes implemented taking into account the fact that the fields of meteorological variables in the restricted area are influenced by macro-scale circulation of the atmosphere.

Writing the equations of hydrodynamics of the turbulent atmosphere and the diffusion of impurities by using the methods of continuum multi-phase multi-rate multi-component reactive media for each block of the model taking into account the interactions between the blocks and joined them for the equation of radiative transfer, we obtain a system of equations of the block model.

Keywords: Turbulent atmosphere, mathematical modeling.

Аңдатпа. Жұмыста детерминантталған әдісті, зерттелінетін құбылысты талдауды және нысанның физикалық моделін пайдаланатын математикалық модельдеу қарастырылады. Ортаның реакциялық қатынасын, өту коэффициенттерін және ортаның құрылымдық параметрлерін анықтау және сәйкес бастапқы және шекаралық шарттарлы негізгі теңдеулер жүйесін қорыту.

Аймақтық атмосфералық процестерді модельдеу шенелген облыстағы метеорологиялық шамалар өрістері атмосфераның макромасштабтың циркуляциясы әсерінен пайда болатындығы ескеріле отырып іске асырылады.

Модельдің әр блогы үшін блоктардың өзара әсерін ескере отырып, тұтас көпфазалық көпкомпоненттік көпжылдамдықты орта механика әдістерін пайдаланып, турбуленттік атмосфераның және қоспалардың диффузиясының гидродинамикалық теңдеулерін жазып, сосын оларға радиацияның өту теңдеуін қосып, блоктың модельдің теңдеулер жүйесін аламыз.

Кілттік сөздер: турбуленттік атмосфера, математикалық модельдеу.

Аннотация. В работе рассматривается математическое моделирование, использующее детерминированный подход, анализ изучаемого явления и создание физической модели объекта. Определение реакционных свойств среды, коэффициентов переноса и структурных параметров среды и вывод основной системы уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.

Моделирование региональных атмосферных процессов реализуется с учетом того, что поля метеорологических величин в ограниченной области формируются под влиянием макромасштабных циркуляций атмосферы.

Записав уравнения гидродинамики турбулентной атмосферы и диффузии примесей используя методов механики сплошных многофазных многокомпонентных многоскоростных реагирующих сред для каждого блока модели с учетом взаимодействия между блоками и присоединив к ним уравнения переноса радиации, получим систему уравнений блочной модели.

Ключевые слова: турбулентная атмосфера, математическое моделирование.

В результате работы промышленных предприятий и автотранспорта в окружающую среду выбрасываются газообразные и конденсированные продукты, например, оксиды углерода, азота и серы, альдегиды, бензапирен, свинец и др. Кроме того, в приземном слое в процессе фотохимических реакций образуются озон и другие, опасные для здоровья человека и состояния растительного и животного мира токсиканты. При определенных метеорологических условиях даже незначительные выбросы загрязняющих веществ могут создавать неблагоприятную экологическую обстановку в населенных пунктах. Еще большую опасность представляет природные и техногенные катастрофы, в результате которых возможно крупномасштабное загрязнение природной среды. Возникновение пожаров на значительных территориях, в том числе лесных, может привести к таким явлениям, как огненный шторм и "ядерная зима". Кроме того, в последнее время становятся актуальными проблемы, связанные с защитой водной среды от загрязнения.

А экспериментальное, промышленные и полупромышленные, а так же натурные изучение вышеуказанных явлений является очень дорогостоящим, а в отдельных случаях не представляется возможным проводить полное физическое моделирование, представляют интерес теоретические методы исследования - методы математического моделирования. В этом случае объект изучения не само явление, а его математическая модель, которая может представлять собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями.

В рамках данной проблемы один из наиболее сложных и наименее разработанных (в том числе и в методическом плане) вопросов связан с исследованиями по изучению изменений компонентов природной среды, методами математического моделирования в условиях различного рода техногенных загрязнений [1-3]. Эти исследования являются одним из важных этапов экологической программы, они вскрывают особенности воздействия антропогенной нагрузки на среду обитания.

В связи с вышеизложенными, теоретические исследования используя математическое моделирование переноса и рассеивание вредных примесей в атмосфере при реальных погодных условиях является весьма актуальной.

В данной работе рассматривается математическое моделирование, использующее детерминированный подход, со следующими этапами:

1. Физический анализ изучаемого явления и создание физической модели объекта.
2. Определение реакционных свойств среды, коэффициентов переноса и структурных параметров среды и вывод основной системы уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.
3. Выбор метода численного или аналитического метода решения поставленной краевой задачи.
4. Получение дискретного аналога для соответствующей системы уравнений, если предполагается численное решение.
5. Выбор метода получения решения для дискретного аналога.

6. Разработка программы расчета для вычислительной машины. Тестовые проверки программы расчета. Получение численного решения системы дифференциальных уравнений.

7. Сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными, их физическая интерпретация. Параметрическое изучение исследуемого объекта.

Главное требование к математической модели - согласованность полученных результатов численного анализа с данными натурального наблюдения и экспериментальных исследований. Для выполнения этого достаточного условия необходимо, чтобы:

- в математической модели выполнялись фундаментальные законы сохранения массы, энергии и импульса;

- математическая модель правильно отражала сущность изучаемого явления.

Для исследования вышеупомянутых сложных явлений перспективно использование понятий и методов механики сплошных многофазных многокомпонентных многоскоростных реагирующих сред.

Таким образом, с помощью построенной математической модели (в приземном слое атмосферы, в водной среде и т.д.) можно исследовать динамику распространения загрязнения под влиянием различных внешних условий (температуры воздуха, скорости ветра, температурной стратификации в атмосфере и т.д.), а также параметров источника загрязнения. Сравнивая полученные данные с установленными предельно - допустимыми концентрациями (ПДК), можно проанализировать уровни загрязнения по различным компонентам в различные моменты времени и предложить пути снижения концентрации загрязнения воздушного бассейна. Процесс переноса моделируется смешанной краевой задачей математической физики и включает уравнение переноса с учетом турбулентной диффузии. При постановке задачи граничные условия задаются на самом нижнем слое $z = 0$ и на самом верхнем слое $z = h_3$, рассматриваются условия сопряжения на границах разделения слоев.

Моделирование региональных атмосферных процессов реализуется с учетом того, что поля метеорологических величин в ограниченной области формируются под влиянием макромасштабных циркуляций атмосферы. Поэтому ограниченная область решения рассматривается как часть некоторого целого, и нестационарные краевые условия на ее боковых границах формулируются на основе данных, полученных для окаймляющей области. Кроме этого, при численном решении задач прогноза состояния атмосферы для ограниченной территории появляется необходимость сгущать сетку для достижения требуемой точности решения задачи в местах больших градиентов зависимых функций.

Слой почвы можно разделить на три части: поверхность почвы, являющейся границей двух сред; слой суточных колебаний температуры (~ 1 м); слой годовых колебаний температуры (~ 10 м). Толщина выделенных в почве слоев зависит от свойств почвы.

Неизвестных функций в уравнениях гидродинамики турбулентной атмосферы и диффузии примесей представим в виде суммы: $Y(t, x, y, z) = \bar{Y}(t) + Y'(t, x, y, z)$, где $\bar{Y}(t) = \frac{1}{\sigma} \int \int \int Y(t, x, y, z) dx dy dz$ - среднее значение функции в блоке (σ - объем блока), а $Y'(t, x, y, z)$ - отклонение от среднего внутри блока. И затем усредним уравнения гидродинамики турбулентной атмосферы и диффузии примесей по объему блока σ , используя свойства операции осреднения: $\overline{A\xi + B\phi} = A\bar{\xi} + B\bar{\phi}$, $\overline{\xi\phi} = \bar{\xi}\bar{\phi}$, $\overline{\frac{\partial \xi}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s}$, $\overline{f'} = 0$, где: ξ, ϕ - функции независимых переменных x, y, z, t ; A, B - постоянные; s - любая из этих независимых переменных.

Записав уравнения гидродинамики турбулентной атмосферы и диффузии примесей используя методов механики сплошных многофазных многокомпонентных многоскоростных реагирующих

сред для каждого блока модели с учетом взаимодействия между блоками и присоединив к ним уравнения переноса радиации, получим систему уравнений блочной модели локального климата:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \alpha_1(U_1 - u) + \alpha_2(U_2 - u) + l\nu + \frac{1}{L}(U_3 - u\bar{V}), \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{d\nu}{dt} &= \alpha_1(U_4 - \nu) + \alpha_2(U_5 - \nu) + lu + \frac{1}{L}(U_6 - \nu\bar{V}), \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{dw}{dt} &= \alpha_1(U_7 - w) + \alpha_2(U_8 - w) + \frac{1}{L}(U_9 - w\bar{V}) - g, \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{c_p\rho}(U_{10} - G_m) + \alpha_1(U_{11} - \theta) + \alpha_2(U_{12} - \theta) + \frac{1}{L}(U_{13} - \theta\bar{V}) + U_{14}, \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{dq}{dt} &= -\frac{m}{\rho} + \alpha_1(U_{15} - q) + \alpha_2(U_{16} - q) + \frac{1}{L}(U_{17} - q\bar{V}) + U_{18}, \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{d\delta}{dt} &= m + \frac{1}{L}(U_{19} - \delta\bar{V}) + U_{20} - \frac{1}{L}(\delta\bar{V} - U_{21}) + \alpha_1(U_{22} - \delta) + \alpha_2(U_{23} - \delta), \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{dc^T}{dt} &= \alpha_1(U_{24} - c^T) + \alpha_2(U_{25} - c^T) - a_c^T c^T + \frac{1}{L}(U_{26} - c^T\bar{V}) - \frac{1}{L}(c^T\bar{V}_c - U_{27}) + U_{28}, \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{dc^\Gamma}{dt} &= \alpha_1(U_{29} - c^\Gamma) + \alpha_2(U_{30} - c^\Gamma) - a_c^\Gamma c^\Gamma + \frac{1}{L}(U_{31} - c^\Gamma\bar{V}) + U_{32}, \quad (i = 1, 2, 3); \\
 \frac{T}{dt} &= \frac{1}{l_0 c^* \rho^*} U_{33} + \alpha_1(U_{34} - T) + \alpha_2(U_{35} - T) - Ga_1(U_{36} - q) + U_{37}, \quad (i = 0); \\
 \frac{T}{dt} &= -\frac{G}{c^* \rho^*} \bar{m}_0 + \alpha_1(U_{38} - T) + \alpha_2(U_{39} - T), \quad (i = -1, -2); \\
 \frac{dW_B}{dt} &= -\frac{\bar{m}_0}{\rho^*} - \frac{J\Delta(\xi)}{\rho^*} + \alpha_1(U_{40} - W_B) + \alpha_2(U_{41} - W_B), \quad (i = -1, -2); \\
 \frac{dW_\Pi}{dt} &= \frac{\bar{m}_0}{\rho^*} + \alpha_1(U_{42} - W_\Pi) + \alpha_2(U_{43} - W_\Pi), \quad (i = -1, -2); \\
 \frac{d(W_\Pi + W_B)}{dt} &= \frac{1}{\rho^* l_0} [J + G\alpha_1(U_{36} - q) + \alpha_1(U_{44} - \delta) + U_{45} + \alpha_2(U_{41} - W_B) + \alpha_2(U_{33} - W_\Pi)], \quad (i = 0).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Скорость фазовых переходов влаги m в случае термодинамического процесса в воздухе, насыщенном водяным паром, определяется формулой:

$$m = -\frac{dq_{HAC}}{dt} + \frac{q_{HAC}}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \text{ где } q_{HAC} = \frac{0.622E_{HAC}}{p_A}, \quad E_{HAC} = 6.1 * 10^{\frac{7.45(T-273)}{T-38}}; \quad \bar{V} - \text{ скорость ветра}$$

$$U_1 = u_{i+1j},$$

$$U_2 = u_{i-1j}, \quad U_3 = u_{ij-1}\bar{V}_{ij-1}, \quad U_4 = v_{i+1j}, \quad U_5 = v_{i-1j}, \quad U_6 = v_{ij-1}\bar{V}_{ij-1}, \quad U_7 = w_{i+1j}, \quad U_8 = w_{i-1j},$$

$$U_9 = w_{ij-1}\bar{V}_{ij-1}, \quad U_{10} = \varepsilon_{\pi ij}, \quad U_{11} = \theta_{i+1j}, \quad U_{12} = \theta_{i-1j}, \quad U_{13} = \theta_{ij-1}\bar{V}_{ij-1}, \quad U_{14} = \Delta\theta_{ij}, \quad U_{15} =$$

$$q_{i+1j}, \quad U_{16} = q_{i-1j}, \quad U_{17} = q_{ij-1}\bar{V}_{ij-1}, \quad U_{18} = \Delta q_{ij}, \quad U_{19} = \delta_{ij-1}\bar{V}_{ij-1}, \quad U_{20} = \Delta\delta_{ij}, \quad U_{21} =$$

$$\delta_{i+1j}\bar{V}_{i+1j}\rho_{i+1j}/\rho_{ij},$$

$$U_{22} = \delta_{i+1j}, \quad U_{23} = \delta_{i-1j}, \quad U_{24} = c_{i+1j}^T, \quad U_{25} = c_{i-1j}^T, \quad U_{26} = c_{ij-1}^T\bar{V}_{ij-1}, \quad U_{27} = c_{i+1j}^T\bar{V}_{i+1j}\rho_{i+1j}/\rho_{ij},$$

$$U_{28} = \Delta c_{ij}^T,$$

$$U_{29} = c_{i+1j}^\Gamma, \quad U_{30} = c_{i-1j}^\Gamma, \quad U_{31} = c_{ij-1}^\Gamma\bar{V}_{ij-1}, \quad U_{32} = \Delta c_{ij}^\Gamma, \quad U_{33} = \varepsilon_{\pi 0j}, \quad U_{34} = T_{1j}, \quad U_{35} =$$

$$T_{-1j}, \quad U_{36} = q_{1j}, \quad U_{37} = \Delta T_{0j},$$

$$U_{38} = T_{i+1j}, \quad U_{39} = T_{i-1j}, \quad U_{40} = W_{Bi+1j}, \quad U_{41} = W_{Bi-1j}, \quad U_{42} = W_{\Pi i+1j}, \quad U_{43} = W_{\Pi i-1j}, \quad U_{44} =$$

$$\delta_{1j}, \quad U_{45} = \Delta W_{B0j},$$

где: $\Delta\theta_{ij}, \Delta q_{ij}, \Delta\delta_{ij}, \Delta c_{ij}^T, \Delta c_{ij}^\Gamma, \Delta T_{0j}, \Delta W_{B0j}$ - антропогенные добавки в слой модели; i - номер блока по вертикали; j - номер блока по горизонтали; $i - 1$ - номер соседнего блока снизу; $i + 1$ -

номер соседнего блока сверху; $j-1$ - номер блока, из которого дует ветер; $j+1$ - номер следующего блока по воздушному потоку, $\varepsilon_\pi = \frac{d\Phi}{dz}$, $\Phi = J \downarrow - J \uparrow - U + G$.

Следовательно, в предлагаемой блочной модели локального климата довольно просто с математической точки зрения записана основная система уравнений, но вследствие схематизации процессов появились дополнительные коэффициенты, при поиске которых максимально используются известные физические закономерности и выражающие теоретические, полуэмпирические и эмпирические формулы. От определения этих коэффициентов во многом будет зависеть степень приближения модели к действительности.

Определим коэффициенты двух блоков ("Диффузия" и "Радиация") первого варианта модели. Расчетные модели для α_1, α_2 определяются непосредственно из системы уравнения: $\frac{d\bar{Y}}{dt} = \alpha_1(\bar{U} - \bar{Y}) = dif^Y$; $\frac{d\bar{U}}{dt} = \alpha_2(\bar{Y} - \bar{U}) = dif^U$, фиксируя время $t = \bar{t}$:

$$\alpha_{1,2} = - \frac{\bar{Y}(\bar{t}) - \bar{Y}(t_0)}{U(t_0) - U(\bar{t}) + \bar{Y}(\bar{t}) - \bar{Y}(t_0)} * \frac{1}{\bar{t} - t_0} \ln \frac{U(\bar{t}) + \bar{Y}(\bar{t})}{U(t_0) - \bar{Y}(t_0)}$$

Для определения привлечется непрерывная модель диффузии.

Параметры r_k, a_k, h_k, p_k, e_k для чистой влажной атмосферы можно рассчитать с помощью следующих формул полученных:

$$h_k = \frac{H_k(1-b) + b - A_k}{H_{k-1}(1-b) + b - A_{k-1}}, \quad a_k = \frac{A_k - A_{k-1}}{H_{k-1} - A_{k-1}}, \quad e_k = 1 - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \exp(-\beta_j W_{k,k+1}),$$

где $H_k = \frac{s_k}{s_0} - 1.041 - 0.160 \sqrt{M(0.949 p_{A_k} / p_0 + 0.051)}$, $A_k = 0.172(MW_{k\infty})^{0.303}$, $b = \frac{1}{2}$, где: s_0 - поток прямой радиации на верхней границе атмосферы (солнечная постоянная); s_k - поток прямой радиации на уровне с давлением; p_{A_k}, p_0 - давление у поверхности земли; $M = f(h_0)$ - число оптических масс атмосферы, где h_0 - высота Солнца; A_k - функция поглощения прямой солнечной радиации водяным паром; $W_{k\infty}$ - содержание водяного пара в столбе единичного сечения с основаниями k, ∞ ($/^2$): $W_{k\infty} = \frac{1}{g} \int_0^{p_A} q dp_A \approx \frac{1}{g} \sum_{i=1}^N q_k \Delta p_A$, где: e_k - функция поглощения длинноволнового излучения водяным паром; $W_{k,h+1}$ - содержания водяного пара в столбе единичного сечения с основаниями $k, k+1$; $\beta_1 = 0.166, \beta_2 = 2.60, \beta_3 = 36.2, \beta_4 = 114$.

Вычислительный эксперимент реализации на ЭВМ численных расчетных моделей переноса и диффузии примеси в пограничном слое атмосферы и по его результатам построение геоэкологической карты загрязненности орфографии местности на примере Карачаганакского нефтегазоконденсатного месторождения.

Моделировался суточный ход температуры в одной ячейке модели в летний, безоблачный, безветренный день для широты $55, 7^0$ и склонения Солнца $23, 4^0$. Поверхность считалась достаточно увлажненной ($q_0 = q_{НАС}(T_0)$) с коэффициентом отражения (альбедо) $r = 0, 2$. Твердые и газообразные примеси не учитывались. Задавалось начальное состояние: $T_{-1} = 287, T_0 = 283, \theta_1 = 285, \theta_2 = 282, \theta_3 = 260, q_1 = 0, 0054, q_2 = 0, 0045, q_3 = 0, 0014$.

Система уравнений (1) интегрировалась методом Рунге-Кутта с шагом по времени $t = 1$. Результаты расчетов сравнивались с данными экспедиционных наблюдений.

Экстренные дополнительные источники загрязнения природных сред

Основные причины аварий на объектах являются магистральные трубопроводы.

Объемы аварийных утечек на магистральном трубопроводном транспорте нефти в 1999-2001 гг. составили соответственно 1332, 512 и 1530 м³.

Из-за внешних воздействий на нефтепроводах происходит более 5% аварий от общего их числа, а по наносимому ущербу они занимают первое место.

Произведен вычислительный эксперимент реализации расчетных моделей переноса и диффузии примеси в пограничном слое атмосферы и по его результатам построение геоэкологической карты загрязненности орографии местности в конвективных условиях и в инверсионных условиях. Распространение примесей в устойчивых атмосферных условиях, проводилось для двух вариантов: в первом случае скорость ветра в приземном слое выбрана равная 2 м/с, а во втором - 4 м/с.

Время расчета, соответствовало периоду полного продувание района месторождения, имеющего протяженность порядка 40 км.

Список литературы

- [1] Теоретические основы прогнозирования природных процессов и экологической обстановки окружающей среды. Книга 1, Теоретические основы прогнозирования атмосферных процессов и экологической обстановки окружающей среды./ Айдосов А.А., Айдосов Г.А. - Алматы: Изд-во "Қазақ университеті. 2000. - 290 с.
- [2] Моделирование распространения вредных веществ в нижнем слое атмосферы со свободной верхней границей воздушной массы и оценка экологической обстановки окружающей среды.// Промышленность Казахстана./2 Айдосов А.А., Айдосов Г.А., Заурбеков Н.С. , №1(40), Алматы, 2007 – с.68-70.
- [3] Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей./ Нигматулин Р.И., ПММ., Т.34, №6, 1970 -с. 1097-1112.

УДК 517.938

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

С.А. Айсағалиев, А.П. Белогуров, И.В. Севрюгин

Казахский Национальный университет имени Аль-Фараби

Abstract. In this work proposes constructing method for program control of the process described by ordinary differential equation with boundary conditions and phase and integral constrains and the constrains on the control. Two problems are solved: the problem of the existence of control and the problem of constructing of the control that takes the trajectory of the system from nay initial state to the given final state. It is shown that the boundary controllability problem for ordinary differential equations can be reduced to the initial optimal control problems. Given algorithms for the construction of minimizing sequences and assessment of the convergence speed.

Keywords: transformation, optimization problems, the partial derivatives, the gradient of the functional, minimizing sequences.

Аңдатпа. Процесстерге программалық басқаруды құрудың методтары ұсынылған, жәй дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын, өлкелік шарттар және фазалық интегралдық шектеумен басқаруға шектеумен есептелінген. Екі сұрақ шешілген: басқарудың бар екендігі туралы және басқаруды құру туралы сұрақ, траекториялық системаны кез келген бастапқы күйінен қойылған соңғы күйіне ауыстыру туралы сұрақтар. Өлкелік есептер дифференциалдық теңдеулердің жай басқарылымы бастапқы есептердің оптималды басқармаларына теңестірілуі мүмкін. Алгоритмде құрудың алмасуын азайтатын және теңесудің тездігін бағалайыны келтірілген.

Кілттік сөздер: өзгеріс, тиімділік есебі, жеке туынды, функционалдың градиенті, минимумдаушы тізбектер.

Аннотация. Предлагается метод построения программного управления для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, при наличии краевых условий, а также фазовых и интегральных ограничений с учетом ограничений на управление. Решены две задачи: задача о существовании управления и задача о построении управления, переводящего траекторию системы из любого начального состояния в заданное конечное состояние. Показано, что краевые задачи управляемости обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть сведены к начальным задачам оптимального управления. Приведены алгоритмы построения минимизирующих последовательностей и оценки их скорости сходимости.

Ключевые слова: преобразование, оптимизационная задача, частные производные, градиент функционала, минимизирующие последовательности.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t) + B(t)f(x, u, x(t_0), x(t_1), t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$x_0 = x(t_0) \in S_0, \quad x_1 = x(t_1) \in S_1, \quad ((x_0, x_1) \in S \subset R^{2n}), \quad (2)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = x \in R^n / \gamma(t) \leq F(x, t) \leq \delta(t), \quad t \in I, \quad (3)$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u, x, x(t_0), x(t_1)) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}; \quad g_j(u, x, x(t_0), x(t_1)) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (4)$$

$$g_j(u, x, x(t_0), x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), u(t), x(t_0), x(t_1), t) dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \quad (5)$$

и ограничений на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) / u(t) \in V(t), \text{ п.в. } t \in I\}. \quad (6)$$

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения системы (1)-(6).

Задача 2. Найти решение системы (1)-(6).

Преобразование. Пусть вектор $f_0 = (f_{01}, \dots, f_{0m_2})$. Введем вектор-функцию $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \dots, \bar{x}_{m_2}(t))$ следующим образом

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau) d\tau, \quad t \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\bar{x}}(t) = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t), \quad t \in I, \quad (7)$$

$$\bar{x}(t_0) = 0, \quad \bar{x}(t_1) = \bar{C} \in Q, \quad (8)$$

$$Q = \bar{c} \in R^{m_2} / \bar{c}_j = c_j - d_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad \bar{c}_j = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad d_j > 0, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad (9)$$

где $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_2})$, $d = (d_1, \dots, d_{m_1})$, причем $g_j(u, x, x_0, x_1) = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $d \geq 0$ - неизвестный вектор. Теперь исходная задача (1)-(6) запишется в виде (см. (7)-(9))

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, x_0, x_1, t), \quad t \in I, \quad (10)$$

$$\dot{\bar{x}} = f_0(x, u, x_0, x_1, t), \quad \bar{x}(t_0) = 0, \quad (11)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad \bar{x}(t_1) \in Q, \quad x(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t). \quad (12)$$

Вводя следующие векторы и матрицы

$$\mu = \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n, m_2} \\ O_{m_2, n} & O_{m_2, m_2} \end{pmatrix} B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2, k} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} O_{n, m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = (I_n, O_{n, m_2}), \quad P_2 = (O_{m_2, n}, I_{m_2}),$$

где $O_{r,q}$ прямоугольная матрица порядка $r \times q$ с нулевыми элементами, I_n, I_{m_2} - единичные матрицы порядков $n \times n, m_2 \times m_2$ соответственно, систему (10)-(12) запишем в векторной форме

$$\dot{\mu} = A_1(t)\mu + B_1(t)f(P_1\mu, u, x_0, x_1, t) + B_2f_0(P_1\mu, u, x_0, x_1, t), \quad (13)$$

$$(P_1\mu(t_0), P_1\mu(t_1)) \in S_0 \times S_1, \quad P_2\mu(t_0) = 0, \quad P_2\mu(t_1) = \bar{c} \in Q, \quad (14)$$

$$P_1\mu(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t), \quad t \in I. \quad (15)$$

Линейная управляемая система. Наряду с системой (13)-(15) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2(t)w_2(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (16)$$

$$y(t_0) = \mu(t_0) = \mu_0, \quad y(t_1) = \mu(t_1) = \mu_1, \quad (17)$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^k), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \quad (18)$$

где

$$\mu(t_0) = \mu_0 = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \bar{x}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2, 1} \end{pmatrix}, \quad \mu(t_1) = \mu_1 = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ \bar{x}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix}, \quad \mu_0 \in S_0 \in O_{m_2, 1},$$

$$\mu_1 \in S_1 \times Q.$$

Пусть матрица $\bar{B}(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n + m_2) \times (k + m_2)$, а вектор $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{k+m_2})$. По исходным данным задачи, определим следующие матрицы и векторы

$$\bar{a} = \bar{\Phi}(t_0, t_1)\mu_1 - \mu_0, \quad \mu_0, \mu_1 \in R^{n+m_2}, \quad \bar{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}(t_0, t)\bar{B}(t)\bar{B}^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t)dt,$$

$$\bar{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}(t_0, \tau)\bar{B}(\tau)\bar{B}^*(\tau)\bar{\Phi}(t_0, \tau)d\tau, \quad \bar{W}(t, t_1) = \bar{W}(t_0, t_1) - \bar{W}(t_0, t), \quad t \in I,$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1(t, \mu_0, \bar{\mu}_1) &= \bar{B}^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t)\bar{W}^{-1}(t_0, t)\bar{a}, \quad \bar{N}_1(t) = -\bar{B}^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1) = \\ &= \begin{pmatrix} -B_1^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1) \\ -B_2^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_2(t, \mu_0, \mu_1) = \bar{\Phi}(t, t_0)\bar{W}(t, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\mu_0 + \bar{\Phi}(t, t_0)\bar{W}(t_0, t)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1)\mu_1,$$

$$\bar{N}_2(t) = -\bar{\Phi}(t, t_0)\bar{W}(t_0, t)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1), \quad t \in I,$$

где $\bar{\Phi}(t, \tau) = \bar{\Theta}(t)\bar{\Theta}^{-1}(\tau)$, $\bar{\Theta}(\tau)$ - фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\eta} = A_1(t)\eta$.

Теорема 1. Пусть матрица $\bar{W}(t_0, t_1) > 0$. Тогда управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{k+m_2})$ переводит траекторию системы (16)-(18) из любой заданной начальной точки $\mu_0 \in R^{n+m_2}$ в любое заданное конечное состояние $\mu_1 \in R^{n+m_2}$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} w(t) \in \Sigma = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{k+m_2}) / w(t) = v(t) + \lambda_1(t, \mu_0, \mu_1) + N_1(t)z(t_1, v), \quad \forall v(\cdot) \in L_2(I, R^{k+m_2}), \\ t \in I\}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{k+m_2})$ - произвольная функция, а функция $z(t) = z(t, v)$, $t \in I$ - решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1(t)z + \bar{B}(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I. \tag{20}$$

Решение дифференциального уравнения (16), соответствующее уравнению $w(t) \in \Sigma$, имеет вид

$$y(t) = z(t) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, v), \quad t \in I. \tag{21}$$

Заметим, что компоненты вектор функции $w(t) \in \Sigma$ равны:

$$w_1(t) = v_1(t) + B_1^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)a + N_{11}(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \tag{22}$$

$$w_2(t) = v_2(t) + B_2^*(t)\bar{\Phi}^*(t_0, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)a + N_{12}(t)z(t_1, v), \quad t \in I. \tag{23}$$

где $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $t \in I$.

Введем следующие блочные матрицы

$$\bar{\Phi}^*(t_0, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} \Pi_{11}(t) \\ \Pi_{12}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi}^*(t_0, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} S_{11}(t) \\ S_{12}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t, t_0)\bar{W}(t, t_1)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1) &= (\Pi_{21}(t), \Pi_{22}(t)), \quad \bar{\Phi}(t, t_0)\bar{W}(t_0, t)\bar{W}^{-1}(t_0, t_1)\bar{\Phi}(t_0, t_1) = \\ &= (\Pi_{31}(t), \Pi_{32}(t)), \quad B^*(t)\Pi_{11}(t) = (T_0(t), T_1(t)), \quad \Pi_{12}(t) = (T_2(t), T_3(t),) \\ &\quad -B^*(t)S_{11}(t) = (D_0(t), D_1(t)), \quad -S_{12}(t) = (D_2(t), D_3(t)), \quad t \in I. \end{aligned}$$

Теперь функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in I$ из (22), (23) соответственно могут быть представлены в виде

$$w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)\bar{c} + N_{11}(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (24)$$

$$w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)\bar{c} + N_{12}(t)z(t_1, v), \quad t \in I. \quad (25)$$

Функция $y(t)$, $t \in I$, определяемая по формуле (21), запишется так

$$y(t) = z(t) + \Pi_{21}(t)x_0 + \Pi_{31}(t)x_1 + \Pi_{32}(t)\bar{c} + N_2(t)z(t_1, v), \quad t \in I. \quad (26)$$

Лемма 1. Пусть матрица $\bar{W}(t_0, t_1) > 0$. Тогда краевая задача (1)-(6) равносильна следующей задаче

$$w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)\bar{c} + N_{11}(t)z(t_1, v) = f(P_1y(t), u, x_0, x_1, t), \quad t \in I, \quad (27)$$

$$w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)\bar{c} + N_{12}(t)z(t_1, v) = f(P_2y(t), u, x_0, x_1, t), \quad t \in I, \quad (28)$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (29)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \quad (30)$$

$$x_0 \in S_0, \quad x_1 \in S_1, \quad \bar{c} \in Q, \quad u(t) \in U(t), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \omega(t) \in \Omega(t) &= \{\omega(\cdot) \in L_2(I, R^S) / \gamma(t) \leq \omega(t) \leq \delta(t), \text{ п.в. } t \in I\}, \\ \omega(t) &= F(y(t), t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (32)$$

где $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$ определяются формулами (24)-(26) соответственно.

Доказательство теоремы следует из равносильности исходной задачи (1)-(6) к задаче (13)-(15). Теорема 1 позволяющая выделить все множества решений (16)-(18) каждый элемент которого переводит траекторию системы (16) из любой точки $\mu_0 \in R^{n+m_2}$ в любую точку $\mu_1 \in R^{n+m_2}$, в частности, верно и для любых $\mu_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}$, $\mu_1 \in S_1 \times Q$.

В свою очередь, задача управляемости (16)-(18) при выполнении условия (26)-(31) равносильна краевой задаче (13)-(15). Следовательно, исходная краевая задача (1)-(6) равносильна условиям (27)-(32) при $\mu(t) = y(t)$, $t \in I$, $\omega(t) = F(y(t), t)$, $t \in I$.

Оптимизационная задача. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$I(v_1, v_2, u, \omega, x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} S_0(q(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - f(P_1 y(t), u, x_0, x_1, t)|^2 + |w_2(t) - f_0(P_1 y(t), u, x_0, x_1, t)|^2 + |\omega(t) - F(P_1 y(t), t)|^2] dt \rightarrow \inf \quad (33)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2 v_2(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (34)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \quad (35)$$

$$x_0 \in S_0, \quad x_1 \in S_1, \quad u(t) \in U(t), \quad \omega(t) \in \Omega(t), \quad (36)$$

$$d \in D = \{d \in R^{m_2} / d \geq 0\}, \quad (37)$$

где функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$ определяются формулами (24)-(26) соответственно, $\bar{a}(t) = (v_1(t), v_2(t), u(t), \omega(t), x_0, x_1, d, z(t, v), z(t_1, v))$, $v = (v_1, v_2)$.

Матрицы $T_1(t)$, $T_3(t)$, $t \in I$ представим в виде $T_1(t) = (T_{11}(t), T_{12}(t))$, $T_3(t) = (T_{31}(t), T_{32}(t))$. Пусть векторы $\bar{c}_1 = (c_1, \dots, c_{m_1})$, $\bar{c}_2 = (c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2})$. Тогда вектор $\bar{c} = (\bar{c}_1 - d, \bar{c}_2)$, произведения

$$T_1(t)\bar{c} = T_{11}(t)(\bar{c} - d) + T_{12}(t)\bar{c}_2 = T_1(t)e - T_{11}(t)d, \quad e = (\bar{c}_1, \bar{c}_2),$$

$$T_3(t)\bar{c} = T_{31}(t)(\bar{c}_1 - d) + T_{32}(t)\bar{c}_2 = T_3(t)e - T_{31}(t)d, \quad t \in I.$$

Теперь функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in I$ запишутся так:

$$w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)e - T_{11}(t)d + N_{11}(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (38)$$

$$w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)e - T_{11}(t)d + N_{12}(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (39)$$

где $T_1(t)e$, $T_3(t)e$, $t \in I$ - известные функции. Аналогичным путем, получим

$$y(t) = z(t, v) + \Pi_{21}(t)x_0 + \Pi_{31}(t)x_1 + \Pi_{32}(t)e - \Pi_{321}(t)d + N_3(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (40)$$

где $\Pi_{32}(t) = (\Pi_{321}(t), \Pi_{322}(t))$, $t \in I$. В функционале (33) функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$ представлены в виде (38)-(40).

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \xi &= (v_1(t), v_2(t), u(t), \omega(t), x_0, x_1, d) \in X = L_2(I, R^k) \times L_2(I, R^{m_2}) \times U \times \Omega \times \\ &\times S_0 \times S_1 \times D \subset H = L_2(I, R^k) \times L_2(I, R^{m_2}) \times L_2(I, R^S) \times R^n \times R^n \times R^{m_1}, \\ X_* &= \{\xi_* \in X / J(\xi_*) = I_* = \inf_{\xi \in X} I(\xi)\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть матрица $\bar{W}(t_0, t_1) > 0$. Для того, чтобы система (1)-(6) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы значение $I(\xi_*) = 0$, где $\xi_*(v_1^*(t), v_2^*(t), u_*(t), \omega_*(t), x_0^*, x_1^*, d_*) \in X$ - оптимальное управление в задаче (33)-(37).

Частные производные. Введем следующие обозначения

$$\bar{w}_1(q(t), t) = w_1(t) - f(P_1y(t), u(t), x_0, x_1, t), \quad t \in I,$$

$$\bar{w}_2(q(t), t) = w_2(t) - f_0(P_1y(t), u(t), x_0, x_1, t), \quad t \in I,$$

$$\bar{w}_3(q(t), t) = \omega(t) - F(P_1y(t), t), \quad t \in I.$$

Теперь функционал (33) запишется в виде

$$I(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} S_0(q(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (|\bar{w}_1(q(t), t)|^2 + |\bar{w}_2(q(t), t)|^2 + |\bar{w}_3(q(t), t)|^2) dt,$$

где $q(t) = (v_1(t), v_2(t), u(t), \omega(t), x_0, x_1, d, z(t, v), z(t_1, v)), t \in I$.

Частные производные равны:

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial v_1} = 2\bar{w}_1(q(t), t), \quad \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial v_2} = 2\bar{w}_2(q(t), t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial u} = -2f_u^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)\bar{w}_1(q(t), t) - 2f_{0u}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)\bar{w}_2(q(t), t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial \omega} = 2\bar{w}_3(q(t), t), \quad \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial x_0} = [2D_0^*(t) - 2\Pi_{21}^*(t)P_1^*f_x^*(P_1y, u, x_0, x_1, t) -$$

$$-2f_{x_0}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_1(q, t) + [2D_2^*(t) - 2\Pi_{21}^*(t)P_1^*f_{0x}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t) - 2f_{0x_0}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)] \times \\ \bar{w}_2(q, t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial x_1} = [2T_0^*(t) - 2\Pi_{31}^*(t)P_1^*f_x^*(P_1y, u, x_0, x_1, t) - 2f_{x_1}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_1(q, t) +$$

$$+ [2T_2^*(t) - 2\Pi_{31}^*(t)P_1^*f_{0x}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t) - 2f_{0x_1}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_2(q, t) - 2\Pi_{31}^*(t)P_1^*F_x^*(P_1y, t)\bar{w}_3(q, t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial z(t_1)} = [2N_{11}^*(t) - 2N_2^*(t)P_1^*f_x^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_1(q, t) +$$

$$[2N_{12}^*(t) - 2N_2^*(t)P_1^*f_{0x}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_2(q, t) - 2N_2^*(t)P_1^*F_x^*(P_1y, t)\bar{w}_3(q, t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial z} = 2P_1^*f_x^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)\bar{w}_1(q, t) -$$

$$-2P_1^*f_{0x}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)\bar{w}_2(q, t) - 2P_1^*F_x^*(P_1y, t)\bar{w}_3(q, t),$$

$$\frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial d} = [-2T_{11}^*(t) + 2\Pi_{321}^*P_1^*f_x^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_1(q, t) +$$

$$+ [-2T_{31}^* + 2\Pi_{321}^*P_1^*f_{0x}^*(P_1y, u, x_0, x_1, t)]\bar{w}_2(q, t) - 2\Pi_{321}^*P_1^*F_x^*(P_1y, t)\bar{w}_3(q, t).$$

Определение 1. Будем говорить, что производная

$$S_{0q}(q, t) = (S_{0v_1}(q, t), S_{0v_2}(q, t), S_{0u}(q, t), S_{0\omega}(q, t), S_{0x_0}(q, t), S_{0x_1}(q, t), S_{0z}(q, t), S_{0z(t_1)}(q, t), S_{0d}(q, t))$$

удовлетворяет условию Липшица по переменной q в области R^{N_1} , $N_1 = k + m_2 + m + s + 2n + m_1 + 2(n + m_2)$, если

$$|S_{0v_1}(q + \Delta q, t) - S_{0v_1}(q, t)| \leq L_1|\Delta q|, \quad |S_{0v_2}(q + \Delta q, t) - S_{0v_2}(q, t)| \leq L_2|\Delta q|,$$

$$\begin{aligned}
|S_{0u}(q + \Delta q, t) - S_{0u}(q, t)| &\leq L_3|\Delta q|, & |S_{0\omega}(q + \Delta q, t) - S_{0\omega}(q, t)| &\leq L_4|\Delta q|, \\
|S_{0x_0}(q + \Delta q, t) - S_{0x_0}(q, t)| &\leq L_5|\Delta q|, & |S_{0x_1}(q + \Delta q, t) - S_{0x_1}(q, t)| &\leq L_6|\Delta q|, \\
|S_{0d}(q + \Delta q, t) - S_{0d}(q, t)| &\leq L_7|\Delta q|, & |S_{0z}(q + \Delta q, t) - S_{0z}(q, t)| &\leq L_8|\Delta q|, \\
|S_{0z(t_1)}(q + \Delta q, t) - S_{0z(t_1)}(q, t)| &\leq L_9|\Delta q|,
\end{aligned}$$

где $L_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, 9}$, $|\Delta q| = |\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta u, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta d, \Delta z, \Delta z(t_1)|$.

Лемма 2. Пусть матрица $\overline{W}(t_0, t_1) > 0$, функция $S_0(q, t)$ непрерывно дифференцируема по q , $q \in R^{N_1}$, множества U , S_0 , S_1 , Ω - выпуклые и замкнутые и выполнено неравенство

$$\langle S_{0q}(q_1, t) - S_{0q}(q_2, t), q_1 - q_2 \rangle_{R^{N_1}} \geq 0, \quad \forall q_1, q_2 \in R^{N_1}. \quad (41)$$

Тогда функционал (33) при условиях (34)-(37) является выпуклым.

Градиент функционала. Следующая теорема дает алгоритм вычисления градиента функционала (33) при условиях (34)-(37).

Теорема 3. Пусть матрица $\overline{W}(t_0, t_1) > 0$, функции $f(x, u, t)$, $f_0(x, u, x_0, x_1, t)$, $F(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по переменным (x, u, x_0, x_1) , частная производная $S_{0q}(q, t)$ удовлетворяет условию Липшица.

Тогда функционал (33) при условиях (34)-(37) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$I'(\xi) = (I'_{v_1}(\xi), I'_{v_2}(\xi), I'_u(\xi), I'_\omega(\xi), I'_{x_0}(\xi), I'_{x_1}(\xi), I'_d(\xi)) \in H$$

в любой точке $\xi \in X$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
I'_{v_1}(\xi) &= \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial v_1} - B_1^*(t)\psi, & I'_{v_2}(\xi) &= \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial v_2} - B_2^*(t)\psi, \\
I'_u(\xi) &= \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial u}, & I'_\omega(\xi) &= \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial \omega}, & I'_{x_0}(\xi) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial x_0} dt, \\
I'_{x_1}(\xi) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial x_1} dt, & I'_d(\xi) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial d} dt,
\end{aligned} \quad (42)$$

где частные производные определяются выражениями выше, функция $z(t, v_1, v_2)$, $t \in I$ - решение дифференциального уравнения (34), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ - решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial z} - A_1^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial S_0(q(t), t)}{\partial d} dt. \quad (43)$$

Кроме того, градиент $I'(\xi)$, $\xi \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|I'(\xi_1) - I'(\xi_2)\| \leq K\|\xi_1 - \xi_2\|, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in X, \quad (44)$$

где $K = \text{const} > 0$.

Используя соотношения (42)-(44) строим последовательность $\{\xi_n\} = \{v_1^n, v_2^n, u_n, \omega_n, x_0^n, x_1^n, d_n\} \subset X$ по следующему алгоритму

$$\begin{aligned} v_1^{n+1} &= v_1^n - \alpha_n I'_{v_1}(\xi_n), \quad v_2^{n+1} = v_2^n - \alpha_n I'_{v_2}(\xi_n), \\ u_{n+1} &= P_U[u_n - \alpha_n I'_u(\xi_n)], \quad \omega_{n+1} = P_\Omega[\omega_n - \alpha_n I'_\omega(\xi_n)], \\ x_0^{n+1} &= P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n I'_{x_0}(\xi_n)], \quad x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n I'_{x_1}(\xi_n)], \\ d_{n+1} &= P_D[d_n - \alpha_n I'_d(\xi_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

где $0 < \alpha_n < \frac{2}{K+2\epsilon}$, $\epsilon > 0$, $K > 0$ - постоянная Липшица из неравенства (44).

Введем множество $\Lambda_0 = \{\xi \in X / I(\xi) \leq I(\xi_0)\}$, где $\xi_0 = (v_1^0, v_2^0, u_0, \omega_0, x_0^0, x_1^0, d_0) \in X$ - начальная точка для последовательности (45).

Минимизирующие последовательности. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие управляемости системы (1)-(5).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, последовательность определяется по формуле (45), U, S_0, S_1, Ω - выпуклые замкнутые множества. Тогда:

- 1) числовая последовательность $\{I(\xi_n)\}$ строго убывает;
- 2) $\|\xi_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если, кроме того, выполнено неравенство (40), множество Λ_0 ограничено, то:
- 3) последовательность $\{\xi_n\} \subset X$ является минимизирующей, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\xi_n) = I_* = \inf_{\xi \in X} I(\xi)$;
- 4) последовательность $\{\xi_n\} \subset X$ слабо сходится к множеству X_* , $X_* \neq \emptyset$, $\xi_n \xrightarrow{с.л.} \xi_*$ при $n \rightarrow \infty$;
- 5) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq I(\xi_n) - I_* \leq \frac{m_3}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m_3 = const > 0.$$

- 6) задача управляемости (1)-(5) имеет решение тогда и только тогда, когда $I(\xi_*) = 0$.

Список литературы

- [1] Элементы теории функций и функционального анализа. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. -М.: Наука, 1989, -623 с.
- [2] Интегральные уравнения. Краснов М.Л. -М.: Наука, 1975, -303 с.
- [3] Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Фридман В.М. УМН XI, вып. 1, 1956.
- [4] Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений. Айсагалиев С.А. //Дифференциальные уравнения. 1991. -т.27, №9. -с.1475-1486.
- [5] Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений. Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С. //Дифференциальные уравнения. 1993. -т.29, №4. -с.555-567.
- [6] Оптимальное управление линейными системами с закреплёнными концами траектории и ограниченным управлением. Айсагалиев С.А. //Дифференциальные уравнения. 1996. -т.32, №6. -с.1-7.

- [7] Управляемость и оптимальное управление нелинейных систем. *Айсағалиев С.А.* //Известия Российской академии наук, сер. теория систем управления. 1993. -№3. -с.87-99.

УДК 51.74

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_p ($1 < p \leq \infty$)

А.Ш. Акыш

Институт математики и математического моделирования МОН РК

Abstract. In work some results of results of a new method of research of stability of the various are resulted two-layer schemes for a class of linear and nonlinear problems of mathematical physics with constants or variable coefficients in functional spaces ℓ_p . Besides, by means of a of the splitting method for nonlinear Boltzmann equation boundedness of solutions and solvability of nonlinear Boltzmann equation as a whole on time are shown.

Аңдатпа. Жұмыста сызықты және бейсызықы математикалық физиканың тұрақты немесе айнымалы коэффициентті есептерінің класстары үшін әртүрлі қос қабатты схемалардың орнықтылығын ℓ_p функционалдық кеңістігінде ұсынылған жаңа әдіспен зерттеу нәтижелерінің кейбір қортындылары келтірілген. Онымен қоса бейсызықты Болцман теңдеуінің ыдырату әдісінің көмегімен шешуінің тұйықталатындығы және оның барлық уақыт аралығында шешілетіндігі көрсетілген.

Аннотация. В работе приведены некоторые итоги результатов нового метода исследования устойчивости разнообразных двухслойных схем для класса линейных и нелинейных задач математической физики с постоянными и переменными коэффициентами в функциональных пространствах ℓ_p . Кроме того, с помощью схемы метода расщепления показаны ограниченность решений нелинейного уравнения Больцмана и его разрешимость в целом по времени.

Принципиальные вопросы теории устойчивости разностных схем известны из классических работ С. К. Годунова и В. С. Рябенского [1], Г. И. Марчука [2], Н.Н. Яненко[3], А. А. Самарского и А. В. Гулина [4],[5] и др. Откуда следует, что наиболее распространенными способами исследования устойчивости разностных краевых задач являются: метод разделения переменных, спектральные методы, метод энергетических неравенств и методы, основанные на принципе максимума, а также принцип замороженных коэффициентов при исследовании разностных схем с переменными коэффициентами. Известно, что устойчивость разностных схем в норме \mathbb{C} может быть установлена не только на основе принципа максимума, но и иными методами. Например, если доказана устойчивость разностной задачи в ℓ_p при $\forall p \geq 1$, тогда из неё при $p = \infty$, следует

устойчивость в норме \mathbb{C} . Видимо с этой целью в работах [6],[7] изучена устойчивость в пространстве ℓ_p двухслойной схемы для одномерного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом методом разложения разностного оператора в бесконечный ряд комплексной плоскости. А в некоторых других исследованиях устойчивость в пространстве ℓ_p для простейшей одномерной задачи с постоянным коэффициентом основывается на фундаментальных решениях разностных задач. Однако построение фундаментальных решений многомерных разностных задач с переменными коэффициентами — технически затруднительно. Из классических работ Г.И. Марчука [2] и А.А. Самарского [4] следуют, что вопросы устойчивости разностных задач в ℓ_p , $\forall p > 2$ являются актуальным и проблематичным. За последние десять-пятнадцать лет автором работ [16]–[18] разработан новый метод исследования устойчивости в функциональных пространствах ℓ_p ($1 < p \leq \infty$) двухслойных схем решения большого класса линейных и нелинейных задач математической физики с постоянными и переменными коэффициентами. Новизна состоит в том, что удастся исследовать устойчивость разностных схем методом, свободным от использования фундаментальных решений соответствующих разностных уравнений. Причем, методология исследования дискретных задач в ℓ_p позволяет приблизиться к теоретическим методам анализа исходных многомерных нестационарных дифференциальных, интегро-дифференциальных задач в функциональном пространстве L_p . Кроме того, в [19] рассматривается вопрос о сходимости метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана. На основе схемы метода расщепления получена ограниченность положительных решений в пространстве \mathbb{C} . С помощью последнего и установленных априорных оценок доказывается сходимость схемы метода расщепления и единственность предельного элемента. Найденный элемент удовлетворяет эквивалентному интегральному уравнению Больцмана. Тем самым показана разрешимость нелинейного уравнения Больцмана в целом по времени.

Об устойчивости в ℓ_p разностных схем для уравнения переноса излучения. Уравнение переноса, являясь многомерным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, имеет весьма сложную структуру и описывает гораздо более сложные физические процессы, чем, скажем начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка, которая, как известно, является довольно грубым приближением для задачи теории переноса излучения (**диффузионное приближение**). Поэтому первоначально, чтобы удовлетворить нужды практики, были разработаны вычислительные алгоритмы, в основном, для одномерных задач переноса, а многомерные задачи были сведены к последовательностям одномерных. В работах У. М. Султангазина [8] были даны математические обоснования метода расщепления, сводящего многомерные задачи переноса излучения к последовательностям одномерных. Им были построены абсолютно устойчивые схемы в энергетическом пространстве для численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения. В последующем эти результаты послужили начальным стимулом научных исследований задачи теории переноса излучения и кинетической теории газов под руководством У. М. Султангазина в Казахстане.

Автором в [16] исследованы устойчивости класса двухслойных схем (явная, неявная, расщепления и т. др.), соответствующих многомерным задачам теории переноса излучения с постоянными и переменными коэффициентами в функциональных пространствах ℓ_p , $\forall p > 2$. И там же, метод успешно применен для исследования устойчивости неявной схемы в пространстве ℓ_p , соответствующей трехмерной системе нелинейных уравнений Карлемана в теории уравнения Больцмана. Вкратце изложим эти результаты: Как известно [9], весьма общая задача теории переноса

излучения ставится так: найти решение уравнения переноса в области $Q = [0, T] \times \Omega \times G$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\omega, \text{grad} U) + \sigma(x)U = \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{\Omega} g(\omega, \omega') U(t, \omega', x) d\omega' + f(t, \omega, x), \quad (1)$$

удовлетворяющего следующим начальным и граничным условиям:

$$U(0, \omega, x) = \varphi(\omega, x); \quad U(t, \omega, x) |_{\Gamma=0} (\mathbf{n}, \omega) < 0, \quad (2)$$

где $U = U(t, \omega, x)$ – функция распределения нейтронов, летящих в направлении $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ трехмерного евклидова пространства R_3 в момент времени $t \in (0, T]$; $f(t, \omega, x)$ – функция источников; $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$ – сечения, характеризующие свойства среды; $g = g(\omega, \omega')$ – индикатриса рассеяния, она зависит от направлений ω, ω' лишь посредством косинуса угла между ними; Ω – единичная сфера направлений ω ; область G , где происходит процесс переноса нейтронов, выпукла и ограничена кусочно–гладкой поверхностью Γ ; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали в точке x границы Γ .

При разработке разностных методов для задачи переноса интеграл по сфере аппроксимируется кубатурной формулой.

Наличие высокоточных квадратурных (кубатурных) формул для сферы [10], [11], способствуют дальнейшему развитию метода дискретных ординат в сочетании с разностными методами для многомерных задач теории переноса излучения.

Интеграл по сфере аппроксимируется кубатурной формулой и задача (1)–(2) в сеточной области $\tilde{Q}_h^\tau = G^\tau \times \tilde{\Omega} \times G_h$ заменяется, например, следующей разностной схемой

$$\frac{U_{\nu_k, h}^{n+1} - U_{\nu_k, h}^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^3 \left| \omega_{\alpha, \nu_k} \right| \left| \frac{E - T_{\alpha}^{\theta_k}}{h_{\alpha}} U_{\nu_k, h}^{n+1} + \sigma U_{\nu_k, h}^{n+1} = \sigma_s \sum_{\nu=1}^N c_{\nu} g_{\nu, \nu_k} U_{\nu, h}^n + f_{\nu_k, h}^n, \quad k = \overline{1, 8}, \quad (3)$$

с начально–граничными условиями (2), где $\tilde{\Omega}$ –объединение всех узлов кубатурной формулы, G^τ –сетка по времени, G_h – пространственная сетка; E –единичный оператор; $\mathbf{T}_{\alpha}^{\theta_k} U(\cdot, x_{\alpha}, \cdot) = U(\cdot, x_{\alpha} + \theta_k h_{\alpha}, \cdot)$ – операторы сдвига; $\theta_k = -\text{sgn}(\omega_{\alpha, \nu_k})$.

Доказаны устойчивости класса двуслойных схем (явная, неявная, расщепления) типа (3), соответствующих многомерным задачам теории переноса излучения с постоянными и переменными коэффициентами в ℓ_p , $1 < p \leq \infty$. Из нее, при $p = \infty$, получены устойчивости в норме \mathbb{C} . В частности, в случае постоянных коэффициентов уравнения переноса найдены оценки асимптотического поведения решения разностных схем (3) при $t \rightarrow \infty$, на всем интервале времени $(0, \infty)$ в норме пространства

$$\ell_{\infty}(G^\tau; \ell_p(G_h \times \tilde{\Omega})), \quad 1 < p \leq \infty,$$

т.е. справедливость важной оценки при проектировании ядерных реакторов:

$$\|U^{n+1}\|_{\ell_p(G_h \times \tilde{\Omega})} \leq C_1 \|\varphi\|_{\ell_p(G_h \times \tilde{\Omega})} + C_2 \sup_{0 \leq s \leq n} \|f^s\|_{\ell_p(G_h \times \tilde{\Omega})}, \quad 1 < p \leq \infty, \quad (4)$$

где $C_1 = \exp(-\gamma t_{n+1})$, $C_2 = (1 - \exp(-\gamma t_n))/\gamma$, $\gamma = \sigma - \sigma_s(g_0)^{1/p} > 0$,

$$\|U\|_{\ell_p(G_h \times \tilde{\Omega})} = \left(\sum_{G_h} h \sum_{\nu=1}^N c_{\nu} |U_{\nu, h}|^p \right)^{1/p}.$$

Автором в [16] рассматривается газ, молекулы которого могут обладать N , различными вектор-скоростями $V_k = (V_k^1, V_k^2, V_k^3)$, $k = \overline{1, N}$, взаимно меняющимися при столкновениях и для него система N нелинейных уравнений относительно плотности молекулы U_k , $k = \overline{1, N}$ записывается в виде :

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 V_k^\alpha \frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha} = \sigma \sum_{m=1}^N (U_m^2 - U_k^2), k = \overline{1, N}, \quad (5)$$

в области $Q = (0, \infty) \times G$ с начальными и периодическими граничными условиями

$$U_k(0, x) = \varphi_k(x); \quad U_k \Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = U_k \Big|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, k = \overline{1, N}; \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

где $G = [0, 1]^3$ –куб, а $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ – грань куба G , σ –сечение столкновения, $t \in (0, \infty)$.

$$\varphi_k(x) \geq 0 \wedge \varphi_k(x) \in L_p(G), k = \overline{1, N}; \quad 1 < p \leq \infty. \quad (7)$$

Систему (5) также будем называть дискретной моделью Карлемана, так как в частных случаях $N = 2, 3$ из нее следуют соответственно общеизвестные двух–трех скоростные модели Карлемана ([12], стр.109) для уравнения Больцмана.

Для этой задачи изучена следующая неявная схема:

$$\frac{U_{k,h}^{n+1} - U_{k,h}^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^3 \left| V_k^\alpha \right| \frac{E - T_{\alpha}^{\theta_k}}{h_\alpha} U_{k,h}^{n+1} = \sigma \sum_{m=1}^N [(U_{m,h}^{n+1})^2 - (U_{k,h}^{n+1})^2], k = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Схема (8) с условиями (6) свойством (7) абсолютно устойчива на всем интервале времени $(0, \infty)$ в норме пространства $\ell_\infty((0, \infty); \ell_p(G_h))$, $1 < p \leq \infty$ т. е. верны оценки

$$\left\| U_k^{n+1} \right\|_{\ell_p(G_h)} \leq \sum_{k=1}^N \left\| \varphi_k \right\|_{\ell_p(G_h)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad 1 < p < \infty; \quad (9)$$

$$\left\| U_k^{n+1} \right\|_{C(G_h)} \leq \sum_{k=1}^N \left\| \varphi_k \right\|_{C(G_h)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad p = \infty. \quad (10)$$

Автором в [17] исследованы и доказаны устойчивости в пространстве $\ell_p, \forall p > 2$ класс разностных схем (явная, неявная, расщепления, расщепления с весами, продольно–поперечной прогонки), соответствующих уравнениям теплопроводности (диффузионным приближением уравнения переноса) с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right) = f(t, x), U(0, x) = \varphi(x); U(t, x) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (11)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in G = \{0 \leq x_\alpha \leq \ell_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, 3}\}$, Γ –граница G , $t \in [0, T], T < \infty$;

Из множеств изученных разностных задач для (11) является интересным из–за повышенной точности схема расщепления с весами

$$\frac{U_h^{n+\frac{\alpha}{3}} - U_h^{n+\frac{\alpha-1}{3}}}{\tau} - \left[\gamma \Lambda_{\alpha,h} U_h^{n+\frac{\alpha}{3}} + (1 - \gamma) \Lambda_{\alpha,h} U_h^{n+\frac{\alpha-1}{3}} \right] = \delta_\alpha^3 f_h^{n+1}, \quad (12)$$

$$\Lambda_{\alpha,h} = \frac{\mathbf{T}_\alpha^{+1} a_{\alpha,h}}{h_\alpha^2} (\mathbf{T}_\alpha^{+1} - E) - \frac{a_{\alpha,h}}{h_\alpha^2} (E - \mathbf{T}_\alpha^{-1}), \quad \alpha = \overline{1, 3}.$$

Схема (12) условно устойчива при $\max_{\alpha} \sup_{G_h} r_{\alpha,h} \leq \frac{1}{2(1-\gamma)}$, $\forall \gamma \in [0, 0.5) \cup (0.5, 1]$, т. е.

$$\|U^{n+1}\|_{\ell_p(G_h)} \leq C_1 \|\varphi\|_{\ell_p(G_h)} + C_2 \sup_{0 \leq s \leq n+1} \|f^s\|_{\ell_p(G_h)}, \quad C_1, C_2 - \text{const.} \quad (13)$$

Когда $p = \infty$, устойчива в норме \mathbb{C} , а при $\gamma = 0.5$ и $\gamma = 1$ абсолютно устойчива соответственно в ℓ_2 и ℓ_p для $\forall p$.

В частности, метод исследования устойчивости в ℓ_p применен для двумерных нелинейных разностных задач теплопроводности и экологии, и доказаны их устойчивости. Двумерное нелинейное уравнение теплопроводности рассматривается следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(U) \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha}} \right) = 0, \quad (14)$$

с начальным и периодическим граничным условиями

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U(t, x) \Big|_{\Gamma_{0x_{\alpha}}} = U(t, x) \Big|_{\Gamma_{\ell_{\alpha}x_{\alpha}}}, \quad k_{\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha}} \Big|_{\Gamma_{0x_{\alpha}}} = k_{\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha}} \Big|_{\Gamma_{\ell_{\alpha}x_{\alpha}}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (15)$$

где $\Gamma_{dx_{\alpha}}$, ($d = 0, \ell_{\alpha}$) – противоположные стороны прямоугольника $G = \{0 \leq x_{\alpha} \leq \ell_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}$.

Для решения (14)–(15) записывается схема расщепления

$$\frac{U_h^{n+\frac{1}{2}} - U_h^n}{\tau} = \left(\frac{\mathbf{T}_1^{+1} a_{h,1}^n}{h_1^2} (\mathbf{T}_1^{+1} - E) - \frac{a_{h,1}^n}{h_1^2} (E - \mathbf{T}_1^{-1}) \right) U_h^{n+\frac{1}{2}}, \quad (16a)$$

$$\frac{U_h^{n+1} - U_h^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \left(\frac{\mathbf{T}_2^{+1} a_{h,2}^n}{h_2^2} (\mathbf{T}_2^{+1} - E) - \frac{a_{h,2}^n}{h_2^2} (E - \mathbf{T}_2^{-1}) \right) U_h^{n+1}, \quad (16b)$$

с начально–граничными условиями (15), где

$$a_{h,\alpha}^n(U_h^n) = 0.5 \left(k_{\alpha}(U_h^n) + k_{\alpha}(\mathbf{T}^{-1}U_h^n) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

И там же [17] показано, что схема расщепления (16) абсолютно устойчива в норме пространства

$$\ell_{\infty}(G^T; \ell_p(G_h)), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

т. е. верна оценка

$$\|U^{n+1}\|_{\ell_p(G_h)} \leq \|\varphi\|_{\ell_p(G_h)}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (17a)$$

$$\|U^{n+1}\|_{C(G_h)} \leq \|\varphi\|_{C(G_h)}, \quad p = \infty, \quad (17b)$$

и имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй–по h , а система разностных уравнений (16) решается методом циклической прогонки.

Далее, следуя [13], записывается уравнение динамики пространственно распределенной популяции на двумерном ареале $G = \{0 \leq x_{\alpha} \leq \ell_{\alpha}, \alpha = \overline{1, 2}\}$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right) = F(U) \quad (18)$$

с начальным

$$U(0, x) = \varphi(x), \tag{19}$$

и граничными условиями

$$U(t, x) \Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \Big|_{\Gamma_{\ell_\alpha x_\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{20}$$

где Γ_{0x_α} и $\Gamma_{\ell_\alpha x_\alpha}$ – противоположные стороны прямоугольника G , $t \in [0, T]$, $T < \infty$; $U = U(t, x)$ – плотность популяции; $D = \rho^2/4$, ρ – радиус индивидуальной активности популяции; $F(U)$ – локальный закон роста популяции, причем зависимость F от U нелинейная.

Рассматривается случай логистической популяции [14], т. е.

$$F(U) = \nu U(1 - U/K),$$

где $0 < \nu$ – мальтузиансий параметр, $0 < K$ – "емкость" среды.

Пусть \bar{G}_h – пространственная сетка, $\bar{G}_h = \{x_{\alpha, j_\alpha} = j_\alpha h_\alpha, h_\alpha = \frac{\ell_\alpha}{N_\alpha}, j_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \alpha = 1, 2\}$.

Для (18)–(20) записано схема расщепления

$$\frac{U_h^{n+\frac{1}{2}} - U_h^n}{\tau} = \frac{D}{h_1} \left(\frac{\mathbf{T}_1^{+1} - E}{h_1} - \frac{E - \mathbf{T}_1^{-1}}{h_1} \right) U_h^{n+\frac{1}{2}}, \tag{21a}$$

$$\frac{U_h^{n+1} - U_h^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{D}{h_2} \left(\frac{\mathbf{T}_2^{+1} - E}{h_2} - \frac{E - \mathbf{T}_2^{-1}}{h_2} \right) U_h^{n+1} + \nu U_h^{n+\frac{1}{2}} (1 - U_h^{n+1}/K), \tag{21b}$$

с начально–граничными условиями

$$U_h^0 = \varphi_h, \quad U_h^{n+\frac{\alpha}{2}} \Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{22a}$$

$$U_{N_1, j_2}^{n+\frac{1}{2}} = U_{N_1-1, j_2}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j_2 = \overline{0, N_2}; \quad U_{j_1, N_2}^{n+1} = U_{j_1, N_2-1}^{n+1}, \quad j_1 = \overline{0, N_1}. \tag{22b}$$

Отметим, что если начальная функция $\varphi(x)$ неотрицательна на сетке \bar{G}_h , то решения разностных задач (21)–(22) $U_h^{n+\frac{1}{2}}$ и U_h^{n+1} так же неотрицательны на сетке \bar{G}_h для всех n . Доказано, что схема расщепления (21)–(22) абсолютно устойчива по норме пространства

$$\ell_\infty(G^T; \ell_p(G_h)), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

т. е. верна оценка

$$\| U^{n+1} \|_{\ell_p(G_h)} \leq \exp(\nu T) \| \varphi \|_{\ell_p(G_h)}, \quad 1 \leq p < \infty, \tag{23a}$$

$$\| U^{n+1} \|_{C(G_h)} \leq \exp(\nu T) \| \varphi \|_{C(G_h)}, \quad p = \infty. \tag{23b}$$

Из множества нелинейных задач математической физики наиболее интересными оказались исследования устойчивости в ℓ_p разностных схем для системы нелинейных трехмерных уравнений

Бюргерса [18] относительно вектор–функции $U = (U_1, U_2, U_3)$ в области $Q = (0, T] \times G$:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} - \mu \Delta U_k + (U, \text{grad} U_k) = f_k; \quad U_k(0, x) = \varphi_k(x); \quad U_k|_{\Gamma} = 0, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (24)$$

Для нее изучены некоторые (явная, расщепления и т.д.) разностные задачи. В том числе, неявная разностная схема:

$$\begin{aligned} \frac{U_{k,h}^{n+1} - U_{k,h}^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\mu}{h_\alpha^2} \left[\mathbf{T}_\alpha^{+1} - 2E + \mathbf{T}_\alpha^{-1} \right] U_{k,h}^{n+1} + \\ \sum_{\alpha=1}^3 \frac{U_{\alpha,h}^n}{2h_\alpha} \left[\mathbf{T}_\alpha^{+1} - \mathbf{T}_\alpha^{-1} \right] U_{k,h}^{n+1} = f_{k,h}^{n+1}, \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Доказано, что схема устойчива т.е.

$$\|U_k^{n+1}\|_{\ell_p(G_h)} \leq \|\varphi_k\|_{\ell_p(G_h)} + T \|f_k\|_{\ell_\infty(G^\tau; \ell_p(G_h))}, \quad 1 \leq p \leq \infty; \quad k = \overline{1, 3}$$

при следующем необычном условии между шагами сетки h_α , функциями $\varphi_{\alpha,h}$, $f_{\alpha,h}^s$ и интервалом времени T

$$h_\alpha \leq \frac{2\mu}{\|\varphi_\alpha\|_{C(G_h)} + T \|f_\alpha\|_{C(Q_h^\tau)}}.$$

Одним из основных уравнений математической физики является **нелинейное уравнение Больцмана**[15] со степенным потенциалом межмолекулярного взаимодействия:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v, \text{grad} f) = \mathbf{J}(f) - f\mathbf{S}(f) \equiv \mathbf{B}(f, f), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(f) = \int_{V_3} \int_{\Sigma} f' f'_1 K(\theta, \mathbf{W}) d\sigma dv_1, \quad \mathbf{S}(f) = \int_{V_3} \int_{\Sigma} f_1 K(\theta, \mathbf{W}) d\sigma dv_1, \quad K(\theta, \mathbf{W}) = |\mathbf{W}|^q \Lambda(\theta), \\ q = (n-5)/(n-1); \end{aligned}$$

$f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $f_1 = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1)$, $f' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}')$, и $f'_1 = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_1)$ – функции распределения молекул, соответственно, имеющие скорости \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 ; \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 –векторы скорости двух сталкивающихся молекул до столкновения; а \mathbf{v}' , \mathbf{v}'_1 – векторы скорости после столкновения; $\mathbf{W} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ -вектор относительной скорости; $\mathbf{v} \in V_3 = \{-\infty < v_\alpha < \infty, \alpha = \overline{1, 3}\}$. Скорости молекул после столкновений связаны с соответствующими скоростями до него посредством обычных динамических соотношений: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \beta(\beta, \mathbf{W})$, $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \beta(\beta, \mathbf{W})$, где β – единичный вектор в направлении рассеяния молекул: $\beta = (\sin \theta \cos \varepsilon, \sin \theta \sin \varepsilon, \cos \theta)$; $(\theta, \varepsilon) \in \Sigma = \{0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi\}$.

Нелинейное уравнение Больцмана (26), опубликованное 141 лет тому назад, имеет богатую историю. Оно до сих пор остается основой кинетической теории газов, успешно применяется для решения задач динамики плазмы, разреженных газов, нейтронов в реакторах, лучистой энергии в атмосфере. Нелинейному уравнению Больцмана посвящено много работ, выполненных на различных уровнях математической строгости.

В частности, в работе [19] автора изучена задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана (26) при $n = \infty$ или $K(\theta, \mathbf{W}) = 0.25\chi^2 |\mathbf{W}| \sin(2\theta)$, т.е. для молекул–твердых шаров радиуса χ в

области $Q = [0, T] \times G \times V_3$

$$\left(t \in [0, T], T < \infty; \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in G \equiv \{0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = \overline{1, 3}\}; \right. \\ \left. \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V_3 \equiv \{-\infty \leq v_\alpha \leq \infty, \alpha = \overline{1, 3}\} \right)$$

относительно функции распределения $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ с начальным и периодическим граничным условиями

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}); \quad f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad (27)$$

где $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ – грань куба G .

Построена схема метода расщепления, соответствующей задаче (26),(27):

$$\frac{f^{n+1/5} - f^n}{\tau} = -f^{n+1/5} \mathbf{S}(f^{n+1/5}); \quad \frac{f^{n+2/5} - f^{n+1/5}}{\tau} = \mathbf{J}(f^{n+1/5}), \quad (28)$$

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5} - f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + v_\alpha \frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1, 3}. \quad (29)$$

Используя метод Т. Карлемана [12] для преобразования интеграла столкновений, установлена ключевая оценка

$$\|f^{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{v})\|_{\mathbf{C}(G \times V_3)} = \|\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})\|_{\mathbf{C}(G \times V_3)} + TK, \quad K - const, \quad (30)$$

решения задачи (28),(29) в классе положительных непрерывных функций. На её основе доказано существование единственного положительного непрерывного по совокупности переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ решения в целом по времени.

Список литературы

- [1] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. –М.: Наука, 1973. –400 с.
- [2] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. –М.: Наука, 1989. –608 с.
- [3] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. –М.: Наука, 1967. -195 с.
- [4] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. -М.: Наука. 1971. -552 с.
- [5] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. –М.: Наука. 1973. –415 с.
- [6] Сердюкова С.И. Исследование устойчивости в C явных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами, устойчивых в ℓ_2 // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.. –1963, –Т.3, № 2. –С. 365-370.
- [7] Коновальцев И.В. Устойчивость в L_p двухслойных разностных схем для параболических уравнений// Журн. вычисл. матем. и мат. физики. –1968. –Т. 8, №4. –С. 465-469.
- [8] Марчук Г.И., Султангазин У.М. К обоснованию метода расщепления для уравнения переноса излучения// Журн. вычисл. матем. и мат. физики. -1965. -Т.5, №5. –С. 590-596.
- [9] Султангазин У. М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. –Алма-Ата: Наука, 1979. –267 с.

- [10] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. –М.: Наука, 1974. –808 с.
- [11] Лебедев В.И. Квадратурная формула 35-го порядка для сферы // В кн. Теория кубатурных формул и вычислительная математика. –Новосибирск, 1980. –С.110-114.
- [12] Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. -М.: ИЛ, 1960. –150 с.
- [13] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме// Бюлл. МГУ. Серия А. -1937. №6. –С. 1-26.
- [14] Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии –М.: Наука, 1987.
- [15] Неравновесные явления: Уравнения Больцмана: Пер. с англ.//Под ред. Дж.Л.Либовица, Е.У.Монтролла. -М. :Мир, 1986. -272 с.
- [16] Акыш (Акишев) А. Ш. Об устойчивости в ℓ_p некоторых разностных схем для уравнения переноса// Сиб. журн. вычисл. математики/РАН. Сиб. отд–ние. –Новосибирск, 2002. –Т.5, №3. –С.199–214.
- [17] Акыш (Акишев) А. Ш. Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для уравнения теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики/РАН. Сиб. отд–ние. –Новосибирск, 2003. –Т.6, №1. –С. 1–16.
- [18] Акыш А. Ш. Устойчивость в ℓ_p некоторых разностных схем для одной системы нелинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики/РАН. Сиб. отд–ние. –Новосибирск, 2005. –Т.8, №4. –С. 273–280.
- [19] Акыш А. Ш. Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана// Сиб. журн. вычисл. математики/РАН. Сиб. отд–ние. –Новосибирск, 2013. –Т.16, №2. –С. 123–131.

УДК 681.5.015

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО ПОЛИНОМА И СЕПАРАЦИИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Ф.А. Алиев, Н.И. Велиева, Л.Ф. Агамалиева

Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет

Аннотация. Приводятся вычислительные алгоритмы для факторизации полиномов и сепарации дробно-рациональных выражений на базе матричных сигнум функции, которые позволяют существенно улучшить точность решения задачи. Создана программа деления полиномов, поддерживающая символьные вычисления. Предложенный алгоритм позволяет получить результаты с высокой точностью. Приводится аналитическое решение и сравниваются результаты с обычными (MATLAB) и “символьными” (Symbolic Toolbox-Matlab) вычислениями.

Введение

В последнее время с применением новых компьютерных технологий и созданием новых пакетов прикладных программ (в том числе Symbolic Toolbox MATLAB) точность результатов решения некоторых класс задач значительно увеличилась [1, 2]. Например, в работах [3, 4, 6] приводятся высокоточные алгоритмы с использованием Symbolic Toolbox пакета MATLAB для решения матричных алгебраических уравнений Риккати (МАУР) и Ляпунова. Используя этот подход в [7] создан алгоритм для факторизации полинома со скалярными коэффициентами с высокой точностью.

При реализации операции с числовыми величинами неизбежно возникают ошибки округления, поскольку точность вычислений ограничена количеством цифр, используемых в каждой операции. Поэтому при многократном повторении операций накапливаются ошибки. Операции над символьными величинами могут быть реализованы точно, поскольку в этих случаях не выполняются вычисления с числами, поэтому не возникают ошибки округления. Система MATLAB выполняет вычисления только в арифметике с плавающей точкой. Эти операции ограничены разрядностью, что также в свою очередь приводит к ошибкам. Однако развитие и всестороннее применение высоких технологий порождает все больше классов задач, требующих выполнение вычислений без какой либо погрешности. Для достижения этой цели в работе используется пакет Symbolic Math Toolbox входящий в систему MATLAB.

Следует отметить, что существует класс задач, решение которых приводится к факторизации полиномов и сепарации дробно-рациональных выражений. Например, решение Линейно-Квадратичных-Гауссовых (ЛКГ) задач в частотной области сводится к решению уравнения Винера-Хопфа. А последнее тесно связано с вышеупомянутыми процедурами. Известно [5, 7], что факторизация полиномов сводится к решению матричного алгебраического уравнения Риккати и для его решения созданы высокоточные алгоритмы. В данной работе используя эти алгоритмы предложена высокоточная вычислительная процедура базирующая на символьных вычислениях для факторизации матричных полиномов относительно мнимой оси.

Факторизация матричного полинома относительно мнимой оси

Рассмотрим регулярный вариант задачи факторизации матричного полинома Пусть задан эрмитовый матричный полином

$$A(s) = (-1)^n s^{2n} + (-1)^{n-1} A_1 s^{2n-2} + \dots + A_n \quad (1)$$

где, $A_i > 0$. Требуется найти $H(s)$, удовлетворяющие соотношению

$$A(s) = H(s)H(-s) \quad (2)$$

где $H(s)$ - полином, имеющей нули в левой полуплоскости. Тогда $H(-s)$ будет иметь нули в правой полуплоскости. Используя результаты [1] решение задачи (2) представим в виде

$$H(s) = s^n + G' \Pi N \quad (3)$$

где Π является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати:

$$PF + F'\Pi - \Pi G G' \Pi + R = 0 \quad (4)$$

Здесь

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{n-1} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \text{diag}(A_n, A_{n-1}, \dots, A_1) \quad (5)$$

Такая матрица Pi будет обеспечивать гурвичевость матриц,

$$F - G + G'П$$

т.е. ее собственные значения лежат в левой полуплоскости.

Алгоритм для факторизации полинома (1) состоит из следующих шагов.

1. Формируются коэффициенты A_0, A_1, \dots, A_n матричного полинома (1) и матриц F, G, R .
2. Решается матричное алгебраическое уравнение Риккати. (4).
3. С помощью $G'П$ из (3) вычисляются коэффициенты H_0, H_1, \dots, H_n полинома $H(s)$ и $\tilde{A}(s) = H(s) \cdot H^*(s)$.
4. Проверяется условие $\|A(s) - \tilde{A}(s)\| < \varepsilon$, где ε заданное точность решения задачи. Если условие удовлетворяется, система вычисления прекращается, иначе уточняется решение матричного алгебраического уравнения Риккати из (4).

А теперь рассмотрим факторизацию нерегулярного матричного полинома

Пусть задан нерегулярный матричный полином размера $m \times m$

$$B(s) = (-1)^n B_0 s^{2n} + B_1 s^{2n-1} + \dots + B_{2n}, \quad (6)$$

где $B_i = B'_i$ для четных значений индекса, $B_i = -B'_i$ для нечетких значений.

Требуется факторизовать (6) т.е. определить матрицу $D(s)$ размера $m \times m$ удовлетворяющую соотношению

$$B(s) = D_*(s)D(s). \quad (7)$$

Здесь $*$ - означает операцию транспонирования и замену s на \tilde{s} .

Когда B_0 имеет обратную, где ее решение задачи (6), (7) описан выше.

Рассматривается случай, когда B_0 не имеет обратную.

Для факторизации нерегулярного матричного полинома необходимо выполнение следующих шагов [7]:

1. Умножая матрицы $B(s)$, справа и слева на построенные специальным образом полиномиальные матрицы $T_*(s), T(s)$, до тех пор, пока в результате будет получена регулярной матричной полином $A(s) = T_*(s)B(s)T(s)$.
2. Факторизовав полином $A(s)$ с помощью алгоритма приведенного выше получим $A(s) = H_*(s)H(s)$.

3. Искомая матрица вычисляется формулой $D(s) = H(s)T^{-1}(s)$.

Проиллюстрируем схему реализации первого шага. Для этого используется стандартная процедура *svd* (сингулярное разложение матрицы) *Symbolic Toolbox* пакета *Matlab*. Применяя эту процедуру, получим

$$[U, D, V] = \text{svd}(A) \text{ где } A = UDV'$$

Умножив $B(s)$ на V получаем следующий полином

$$V'B(s)V = [B_{ij}(s)], i, j = 1, \dots, m.$$

Далее определяется матрица $T_1(s)$ в следующем виде

$$T_1(s) = \text{diag}\{1, \dots, 1, (s + \alpha_1)^{\delta_1}, 1, \dots, 1\},$$

где δ_m максимальная степень вне диагонального полинома. В результате выполнений конечного числа циклов получаем регулярный матричный полином

$$\bar{B}(s) = T_{0*}(s)B(s)T_0(s) = (-1)^n \bar{B}_{01}s^{2n} + \dots + \bar{B}_{02n}. \tag{8}$$

Здесь матрица \bar{B}_{01} является положительно определенной, т.е. ее можно представить в виде $\bar{B}_{01} = Q'Q$. Для этого используется процедура *chol* (*A*) (разложения Холецкого) *Symbolic Toolbox* пакета *Matlab*, где Q верхняя треугольная матрица. Умножая $\bar{B}(s)$ слева на $(Q')^{-1}$ и справа на Q^{-1} получим матричный полином, в котором коэффициент главного члена является единичной матрицей

$$\bar{B}(s) = (-1)^n E s^{2n} + A_1 s^{2n-1} + \dots + A_{2n} \tag{9}$$

где $A_j = (Q')^{-1} \bar{B}_{0j} Q^{-1}, j = 1, 2, \dots, 2n$.

Далее выполняется второй шаг алгоритма. Определяется матрица $H(s)$, которая факторизует полином (9). В этом шаге решается матричное алгебраическое уравнения Риккати (АУР) с помощью метода матричной сигнум-функции [7, 8], который реализуется символьными вычислениями с произвольной точностью. Кратко опишем процедуру вычисления матричной сигнум-функции, которая согласно [8] определяется следующим образом

$$\text{sgn}A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i,$$

$$A_0 = A,$$

$$A_{i+1} = \frac{1}{2}(A_i + A_i^{-1}), i = 0, 1, \dots$$

В третьем шаге находится искомая матрица $D(s)$

$$D(s) = H(s)QT_j^{-1}(s)V'_v \dots T_1^{-1}(s)V'_1.$$

Тут операция умножения матрицы справа на $T_j^{-1}(s)$ фактически состоит из выполнения деления полиномов соответствующего столбца этой матрицы на полином $(s + \alpha_j)^{\delta_i}$, стоящий на диагонали матрицы $T_j(s)$. Для упрощения вычислительной процедуры возьмем $\alpha_j = 1$.

В пакете *MATLAB* существует стандартные процедуры умножение и деление полиномов. Аргументы этих функции числовые переменные. Эти процедуры не позволяют, получить результаты с требуемой точностью и не поддерживают *Symbolic Toolbox* пакета *MATLAB*. Учитывая это обстоятельство, мы разработали программы для умножения и деления полиномов в среде *Symbolic Toolbox* пакета *MATLAB*.

Деление многочленов сводится к последовательному повторению следующих процедур:

1. в первом шаге алгоритма старший член делимого, а в последующем, старший член очередной разности делится на старший член делителя;
2. результат деления дает очередное слагаемое в частном, на которое умножается делитель. Полученное произведение записывается под делимым или очередной разностью;
3. если степень полученного разностного многочлена больше или равна степени делителя, то с нею повторяются действия 1, 2. Если же степень полученной разности меньше степени делителя, то процедура деления завершается. При этом последняя разность является остатком.

Ниже приведен текст программы деления полиномов в среде Symbolic Toolbox пакета MATLAB

```
function [Y, Zf] = bolme1(B, A)
syms Y Zf fir fi firr firout
A1=vpa(A);B1=vpa(B);
if ((size(A,1)>1 & size(A,2)>1) | length(size(A)) == 3 )
    error('A must be a vector.')
```

end

```
if ((size(B,1)>1 & size(B,2)>1) | length(size(B)) == 3 )
    error('B must be a vector.')
```

end

```
if(A(1)==0.)
    error('The first element of A can not be zero.');
```

end

```
A=vpa(A,64);B=vpa(B,64);bir=vpa(1,128);y=0;firr=vpa([0]);
while y==0
    nb=length(B);    na=length(A);    X= vpa([bir zeros(1,nb-na)]);
    if( double(A(1))~=1)
        B = vpa(B/A(1)); A = vpa(A/A(1));
    end
    if length(B) < length(A)
        y=3;
    end
    if(length(B)>=length(A))
        if (size(A,1)>1)
            Apad = vpa([A; zeros(length(B)-length(A), 1)]);
        else
            Apad =vpa ([A, zeros(1, length(B)-length(A)) ],64); Bpad=vpa(B,64);
        end
    fir = vurma(vpa(Apad),vpa(B(1)));fi=vurma(vpa(X),vpa(B(1)));
    firr=polysum(vpa(firr),vpa(fi));
    firOut=vpa(polysum(vpa(Bpad),-vpa(fir)),64);
```

```

for i=1:length(firOut)
    if double(firOut(i))~=0.
        k=i;
        break
    end
end
kk=0;firOut1=[ ];
for i=k:length(firOut)
    kk=kk+1; firOut1(kk)=vpa(firOut(i),64);
end
firOut=vpa(firOut1,64);B=vpa(firOut,64);
end
end
Y=vpa(firr,64);Zf=vurma(vpa(firOut),vpa(A1(1)));
Zf=vpa(Zf,64);

```

Проиллюстрируем работу алгоритма факторизации нерегулярного матричного полинома на следующем примере. **Пример.** Пусть подлежащий факторизации матричный полином имеет вид

$$B(s) = \begin{bmatrix} 3 - s^2 & s^4 \\ s^4 & 2 + s^8 \end{bmatrix}.$$

В (6) возьмем

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_5 = B_7 = 0$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ приводит матрицу B_0 к диагональному виду. Умножая полином $B(s)$ справа и слева на U получаем

$$U'B(s)U = \begin{bmatrix} 2 + s^8 & -s^4 \\ -s^4 & 3 - s^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $T(s)$ определяется в следующем виде $T(s) = \text{diag}\{1, (s+1)^3\}$.

Вычислим матричный полином

$$B_1(s) = T_*(s)U'B(s)UT(s) = \begin{bmatrix} 2 + s^8 & -s^4(1+s)^3 \\ -s^4(1-s)^3 & (3-s^2)(1-s^2)^3 \end{bmatrix},$$

т.е. получим регулярный матричный полином

$$A_s = A_1s^8 + A_2s^7 + A_3s^6 + A_4s^5 + A_5s^4 + A_6s^3 + A_7s^2 + A_8s + A_9,$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_9 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Факторизация $A(s) = H_*(s)H(s)$ дает

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2.6702467521558406665425481245717 & -0.21388401189504250760922278296807 \\ 0.78611598810495749239077721703342 & 4.7187942370905486937889886190026 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 3.8740980320765246205111837077708 & -0.64165203568512752282766834890364 \\ 0.78004854193874481711880311069832 & 8.1563827112716460813669658570098 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 3.2990762000942031797723236099326 & -0.64165203568512752282766834890411 \\ 0.51213530895998361311306354355974 & 6.1563827112716460813669658570090 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1.4033896179027123174615514817531 & -0.21388401189504250760922278296781 \\ 0.17463556442740729223783760919692 & 1.7187942370905486937889886190027 \end{bmatrix}$$

Точность этих вычислений равна $3.224839186938058e-029$

Таким образом, искомая матрица имеет вид

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2.6702467521558406665425481245717 \\ 0 & 0.78611598810495749239077721703342 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3.8740980320765246205111837077708 \\ 0 & 0.78004854193874481711880311069832 \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3.2990762000942031797723236099326 \\ 1 & 0.51213530895998361311306354355974 \end{bmatrix},$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$d_{11} = 0.21388401189504250760922278296807$$

$$d_{12} = 1.4033896179027123174615514817531$$

$$d_{21} = -1.7187942370905486937889886190026$$

$$d_{22} = 0.17463556442740729223783760919692$$

Коэффициенты нерегулярного матричного полинома полученного в результате перемножения $\bar{B}(s) = D_*(s)D(s)$ отличается от исходного на 29-ом знаке. Таким образом, рассмотренная задача решена с точностью $1.577822734559815e-029$.

Сепарация дробно-рациональных матриц относительно мнимой оси

Представим дробно-рациональную матрицу V в виде

$$V = V_0 + V_+ + V_-$$

где V_0 полиномиальная матрица, V_+ и V_- дробно-рациональные матрицы элементы которых являются правильными дробями с полюсами в левой и в правой полуплоскостях.

Сепарация дробно-рациональной матрицы V осуществляется поэлементно. Элементы матрицы V_0 являются целыми частями соответствующих элементов матрицы V и находятся в результате деления числителя на знаменатель. Дробные части образуют матрицу

$$V_+ + V_- = \left[\frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \right] = \left[\frac{b_{ij}^{(1)}s^{n-1} + b_{ij}^{(2)}s^{n-2} + \dots + b_{ij}^{(n)}}{s^n + a_{ij}^{(1)}s^{n-1} + \dots + a_{ij}^{(n)}} \right] \quad (10)$$

$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ элементы которых являются правильными дробями.

Рассмотрим следующий случай сепарации. Пусть нули полинома $a_1(s), a_2(s)$ лежат по разные стороны от мнимой оси, n_e - степень полинома $a_e(s), e = 1, 2, n_1 + n_2, n_1 \leq n_2$.

Опишем процедуру вычисления полинома $a_1(s)$. Предположим, что $b_1(s) = 1$. Представление в пространстве состояния правильной дроби $\frac{1}{a(s)}$ следующее

$$\frac{1}{a(s)} = C(Es - A)^{-1} \cdot \alpha$$

где

$$a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$$

$$C = [1 \ 0 \dots 0], \alpha = [0 \ 0 \dots 1]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & E_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_n & \dots & -a_n \dots -a_1 \end{bmatrix}, \quad E - \text{единичная матрица размерности } n - 1 .$$

$$(Es - A)^{-1} = (Es - AA_*)^{-1}A_+ + (Es - AA_-)^{-1}A_-$$

Здесь $A_+ = \frac{E - \text{sign}A}{2}, A_- = \frac{E + \text{sign}A}{2}$ являются не ортогональными проекторами на инвариантной подпространства матрицы A . A^{-1} существует, потому что $a(s)$ не имеет нулей на мнимой оси. Вычислим ранг матрицы AA_+ и AA_- .

$$\text{rank}(AA_+) = r_+; \quad \text{rank}(AA_-) = r_- \quad n_1 = \min(r_+, r_-).$$

Вычисляем

$$X' = [(C(AA^*)^{n_1+1})', \dots, C(AA^*)']$$

где

$$A^* = \begin{cases} A_+ & r_+ < r_- \\ A_- & \text{иначе} \end{cases}$$

Матрицу X с помощью матрицы U приводим к треугольному виду с помощью QR-разложение матрицы (процедура `qr.m` пакета Matlab. $[L, U] = \text{qr}(X)$, U - верхняя треугольная матрица). Последняя строка приведенной матрицы будет нулевой, а элементы последней строки матрицы U - коэффициенты полинома $a_1(s)$ в порядке убывания степеней.

Предложим, что вычислен полином $a_1(s)$ (далее индексы i, j опускаются). Из $a(s) = a_1(s)a_2(s)$ получаем

$$a_2(s) = \frac{a(s)}{a_1(s)} \quad (11)$$

После определения $a_1(s)$ и $a_2(s)$ полиномы $b_1(s)$ и $b_2(s)$ находятся из решения полиномиального уравнения

$$b(s) = a_2(s)b_1(s) + a_1(s)b_2(s)$$

Пример 2. Задан полином

$$a(s) = s^3 - 2s^2 - s + 2; \quad b(s) = 1$$

При выполнении программ получены следующие результаты.

$$a_1(s) = 1 \cdot s + 1$$

$$a_2(s) = s^2 - 3s + 2$$

$$\bar{a}(s) = a_1(s) \cdot a_2(s)$$

$$\|\bar{a}(s) - a(s)\| = 0.$$

Операции факторизации и сепарации реализуются путем построения матричной сигнум функции. Результаты будут использованы для создания вычислительного алгоритма синтеза оптимального регулятора для системы с одним входом и одним выходом.

Список литературы

- [1] Горбаченко В.И., Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB, BHV-Petersburg, 2011, 320 p.

http://www.bhv.ru/books/full_contents.php?id=189162
- [2] Данилов А. Компьютерный практикум по курсу теория управления, Simulink-моделирование в среде Matlab. М.: MSUEE, 2002.
- [3] Larin V.B. High-accuracy algorithms for solution of discrete periodic Riccati equations., Appl. Comput. Math., V.6, N.1, 2007, pp.10-17.
- [4] Varga A. On computing High Accuracy solutions of a class of Riccati equations, Control-Theory and Advanced Technology, V.10, N.4, part 5, 1995, pp.2005-2016.
- [5] Велиева Н.И., Агамалиева Л.Ф. Высокоточный алгоритм факторизации полинома в среде Matlab, Известия НАН Азербайджана, серия физико-технических и математических наук, N 6, 2011, с.128-133.
- [6] Aliev F.A., Gasimov Y.S., Velieva N.I., Safarova N.A., Agamalieva L.F. High accuracy algorithms to the solution of the optimal output feedback problem for the linear systems, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, V.13, N.3, 2012, pp.207-214.
- [7] Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов, Баку, Элм, 1994, 274 с.
- [8] Kenney C.S., Laub A.J. The matrix sign function, IEEE Trans. Autom. Contr., 1995, V.2, N.8, pp.1330-1348.

УДК: 004.942

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ГАЗЛИФТНЫМ ПРОЦЕССОМ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОТЕРЯХ ДЕБИТА В ПОДЪЕМНИКЕ

Ф.А. Алиев, Н.А. Исмаилов

Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

Abstract. An time- averaged gas-lift process is considered, where, in particular, it is assumed that the gas- liquid mixture (GLM) which appears in the zone of mixing on the border of the ring space and layer, is passed to the lift through impulse systems. As GLM directed from the mixing zone to the exit of well, is passed not fully, for the maximal debit production with the minimum initial volume of gas it is assumed, that at the beginning and at the end of lift the volumes of gas-liquid mixture are equal (i.e. satisfaction to the condition of periodicity is demanded). The algorithm of solution of this problem on the basis of methods of finding of extremums, where, leaning to the calculable procedures of quasi-linearization and Euler, the numerical algorithm and its implementation in the MATLAB software is given. The results are illustrated on the concrete practical example, which shows that this approach leads to a significant increase in the debit of the well.

Рассматривается усредненный по времени газлифтный процесс, где в частности, предполагается, что газожидкостная смесь (ГЖС), которая образуется в зоне смешения на границе кольцевого пространства и пласта, передается в подъемник через импульсные системы. Поскольку ГЖС, направленная из зоны смешения к выходу скважины, передается не полностью, для добычи максимального дебита с минимальным начальным объемом газа предполагается, что в начале и в конце подъемника объемы газожидкостной смеси равны (т.е. требуется удовлетворение условию периодичности). Далее предлагается алгоритм решения данной задачи на основе методов нахождения экстремумов, где, опираясь на вычислительные процедуры квазилинеаризации и Эйлера, приводится численный алгоритм и его реализации в среде программного обеспечения MATLAB.

Результаты иллюстрируются на конкретном практическом примере, показывающем, что такой подход приводит к значительному повышению дебета скважины.

Введение. Как известно [1], задача для определения оптимального режима в процессе газлифта выполняется с помощью усреднения уравнения движения газожидкостной смеси по времени - t или по глубине скважин x . Далее, для первого случая, составляя соответствующий функционал, состоящий из суммы квадратов дебита с отрицательными, а управления с положительными весовыми коэффициентами, рассматривается задача нахождения седловых точек [2, 3] для определения оптимальных режимов газлифтного процесса [4,5]. Это и является упрощенной математической моделью увеличения добычи нефти в газлифтных скважинах.

Так как обычно дебит скважины теряется в пределах 55%-57% в подъемнике, возникает вопрос: нельзя ли в математической модели процесса при описании функционала квадрат дебита заменить на квадрат объема ГЖС в начале подъемника, затем прибавить к начальным данным условие периодичности, определяющее объем ГЖС в начале и в конце подъемника?

Это, в свою очередь, является эквивалентом задачи подъема ГЖС из пласта на выход скважины с минимальной потерей по подъемнику. Такой подход делает актуальным создание периодической математической модели газлифтных скважин. Тогда, с помощью уменьшения абсолютного значения соответствующего весового коэффициента в функционале можно добиться увеличения дебита, который при условии периодичности ¹ обеспечивает максимальный объем дебита, совпадающий с объемом ГЖС в начале подъемника, т.е. потери в подъемнике уменьшаются до минимума.

Таким образом, в настоящей работе рассматривается периодическая экстремальная задача управления газлифтным процессом [1], усредненного по времени, где уравнение движения нелинейное и предложенные алгоритмы из [7, 8] не применимы для её решения. Поэтому, здесь предлагается новый алгоритм на базе метода квазилинеаризации [9]. Далее, результаты иллюстрируются числовым примером, где показывается, что такая постановка позволяет увеличить дебиты, также уменьшить потери ГЖС в подъемнике.

Постановка задачи

Пусть уравнение движения ГЖС, усредненного по времени газлифтного процесса, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений ²

$$\dot{Q} = \frac{2a\rho F Q^2}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2}, \quad Q(0) = u \quad (1)$$

$$\dot{P} = \frac{2ac^2 \rho^2 F Q}{c^2 \rho^2 F^2 - Q^2}, \quad P(0) = P_0 \quad (1')$$

на интервале $(0, 2l)$, где Q массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, F площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб по оси x (глубина скважин), c - скорость звука в газе и ГЖС, ρ плотность газа, нефти и ГЖС в зависимости от координаты [1], $2a = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda_c \omega_c}{2D}$, g , λ_c - ускорение свободного падения и гидравлического сопротивления соответственно, $D_i (i=1,2)$ - внутренний и эффективный диаметры кольцевого пространства, подъемника и ω_c усредненная по сечению скорость движения смеси, $P(t)$ - избыточное давление над её стационарным значением, u , p_0 , - начальные данные, которые играют роль управляющего воздействия. Поскольку уравнение (1) полностью не зависит от уравнения (1'), исследования далее будут вестись по уравнению (1). Отметим, что в уравнении (1) отсутствует управляющее воздействие и оно входит в начальное условие. Поэтому далее соответствующую задачу на основе (1) назовем задачей с граничным управлением.

Как известно [1, 4, 5], сверху подаваемый газ в зоне смешения (или на башмаке скважины) превращает поступаемые флюиды из пласта в газожидкостную смесь, которая передается в подъемник, что является ложной задачей [10,11], требующей идентификации пласта. Поэтому, для простоты здесь предполагается, что переход от конца кольцевой трубы через пласт к началу подъемника ($x = l$) выполняется со следующим разностным уравнением [2,6]

$$Q(l+0) = \gamma Q(l-0) + \gamma_1(l-0)\bar{Q}, \gamma_1(Q(l-0)) = -\delta_3(Q(l-0) - \delta_2)^2 + \delta_1 \quad)^3 \quad (2)$$

¹Найти компрессоры, зависящие от параметров скважин и обеспечивающие нужный режим, практически невозможно. При этом можно условие периодичности заменить другими соотношениями, т.е. дебит будет являться требуемой частью ГЖС в начале подъемника.

²На самом деле, в интервалах $(0, l)$ и $(l, 2l)$ дифференциальные уравнения (1), (1') разные, т.е. в первом интервале уравнения (1), (1'), соответственно, описывают движение на кольцевом пространстве $(0, l)$, и в $(l, 2l)$ в подъемнике. Таким образом, параметры a , ρ , F , c получают разные значения на этих интервалах.

³Выбор $\gamma_1(Q(l-0))$ из (2) в квадратичной форме не случаен. Это связано с тем, что дебит увеличивается до оптимальной точки (при увеличении газа) и после этого уменьшается до нуля [5].

где постоянные γ и $\gamma_1(Q(l-0))$ (т.е. действительные числа $\delta_1, \delta_2, u, \delta_3$) выбираются из (2) для обеспечения достаточно большой ГЖС к началу подъемника, \bar{Q} средний объем флюидов в пласте. Несмотря на то, что на втором интервале $(l, 2l)$ явно не присутствует управление u , то здесь присутствие управления можно обеспечить через импульсную систему (2). С другой стороны, такое предположение можно считать возможным из за малой размерности диаметра обеих труб [1, 2, 4, 5, 7].

Обычно в газлифтном процессе [4,5] требуется минимальная подача объема газа $Q(0)$ из (1), и нахождение максимального дебита $Q(2l)$. В данном случае в (1) не входит давление P , т.е. уравнения (1),(2) отделяются друг от друга. Поэтому, далее, соответствующая задача оптимизации ставится только для уравнения (1) - найти максимальный дебит $Q(2l)$. Эти условия требуют только нахождения седловой точки следующего функционала

$$J = \frac{1}{2}\alpha Q^2(2l) + \beta u^2 \quad (3)$$

при условии (1), где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ весовые коэффициенты. В такой постановке (1)-(3) возможно уменьшением $|\alpha|$ повысить $Q(2l)$ [12], а повышением числа β можно уменьшить подаваемый газ $u = Q(0)$. Тогда, при выборе условия периодичности ⁴

$$Q(l+0) = Q(2l) \quad (4)$$

из (3) получим следующий функционал

$$J = \frac{1}{2}\bar{\alpha}Q^2(l+0) + \beta u^2 \quad (5)$$

т.е. с помощью выбора $|\alpha|$ можно для пласта взять максимальный $Q(l+0)$, где уравнение (4) уже обеспечивает максимальный дебит $Q(2l)$.

Таким образом, задача состоит в нахождении $u = Q(0)$ из (1), такого, что при ограничениях (1), (2), (4) функционал (5) принимал оптимальное значение, т.е. найти такую пару (u, Q) , которая бы для задачи (1), (2), (4), (5) стала бы седловой парой.

Задачу (1),(2),(4),(5) можно решать с помощью составления соответствующего расширенного функционала.

Действительно, как в [12,13], напомним дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа для экстремальных задач (1), (2), (4), (5)

$$\lambda = -\frac{4c^2 a \rho^3 F^2 Q}{(Q^2 - c^2 \rho^2 F)^2} \lambda, \quad (6)$$

с краевыми условиями

$$\alpha Q(l+0) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1\right)\lambda(l+0) - \frac{\beta}{4l}\lambda(2l) = 0 \quad (7)$$

$$\gamma\lambda(l+0) - \frac{\beta}{4l}\lambda(l-0) - 2\delta_3\lambda(l+0)(Q(l-0) - \delta_2)\bar{Q} = 0$$

⁴Условие (4) обеспечивает без потери дебит в подъемнике. Если в реальности нельзя найти компрессор, который обеспечивает условие (4), то можно заменить его на $Q(2l) = \chi Q(l+0)$, где $0 < \chi < 1$

$$u + \frac{\beta}{4l}\lambda(0) + \delta = 0$$

где $\lambda(x)$ - множитель Лагранжа, δ - постоянный параметр, присутствующий в расширенном критерии качества за счет неизвестного начального условия $u = Q(0)$ из (1).

Если каким-то образом в явном виде можно написать решение системы дифференциальных уравнений (1),(6) на интервалах $(0; l - 0)$ и $(l + 0; 2l)$. то имеем

$$\begin{bmatrix} Q(l - 0) \\ \lambda(l - 0) \end{bmatrix} = f(Q(0), \lambda(0)), \quad 0 < x < l - 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} Q(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = g(Q(l + 0), \lambda(l + 0)), \quad l + 0 < x < 2l \quad (9)$$

где f, g - первообразные функции правой части уравнений (1), (6). Тогда с помощью решений нелинейных алгебраических уравнений (2), (4), (7), (9), можно восстановить неизвестные $Q(0)$, $\lambda(0)$, $Q(l - 0)$, $\lambda(l - 0)$, $Q(l + 0)$, $\lambda(l + 0)$, $Q(2l)$, $\lambda(2l)$, δ . Однако, представление (8), (9) и даже нахождение решения нелинейных алгебраических уравнений (2),(4), (7)-(9) является трудной задачей. Поэтому используем методы квазилинеаризации [9] нелинейных дифференциальных уравнений (1), (6), где краевые условия (2), (4) и (7) тоже являются нелинейными.

Переходим к построению вычислительного алгоритма для решения (1), (2), (4), (5).

Пусть заданы некоторые номинальные решения $Q^k(x), \lambda^k(x)$ задачи (1),(2),(4),(6),(7). Тогда, линеаризуя дифференциальные уравнения (1), (6) около этих номинальных траекторий, имеем следующие системы линейных дифференциальных уравнений для $(k + 1)$ итераций

$$\dot{Q}(x) = A(Q^k(x))Q(x) + B(Q^k(x)), \quad (10)$$

$$\dot{\lambda}(x) = C(Q^k(x))\lambda(x) + D(Q^k(x))Q(x) + F(Q^k(x)),$$

где

$$A(Q^k(x)) = \frac{4c^2 a \rho^3 F^3 Q^k(x)}{(Q^{k^2}(x) - c^2 \rho^2 F^2)^2}$$

$$B(Q^k(x)) = -\frac{2c^2 a \rho^3 F^3 Q^{k^2}(x) + 2a \rho F Q^{k^3}(x)}{(Q^{k^2}(x) - c^2 \rho^2 F^2)^2},$$

$$C(Q^k(x)) = -\frac{4c^2 a \rho^3 F^3 Q^k(x)}{(Q^{k^2}(x) - c^2 \rho^2 F^2)^2}, \quad (11)$$

$$D(Q^k(x)) = -\frac{8c^4 a \rho^5 F^5 Q^{k^2}(x) - 12c^2 a \rho^3 F^3 Q^{k^4}(x) + 4c^6 a \rho^7 F^7}{(Q^{k^2}(x) - c^2 \rho^2 F^2)^4} \lambda^k(x),$$

$$F(Q^k(x)) = \frac{8c^4 a \rho^5 F^5 Q^{k^2}(x) - 12c^2 a \rho^3 F^3 Q^{k^4}(x) + 4c^6 a \rho^7 F^7}{(Q^{k^2}(x) - c^2 \rho^2 F^2)^4} \lambda^k(x) Q^k(x).$$

Поскольку второе уравнение (7) является нелинейным, его тоже нужно линеаризовать около этой траектории, т.е. уравнение (7) переходит к следующему линейному виду

$$\alpha Q(l+0) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1\right) \lambda(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda(2l) = 0,$$

$$\xi(\lambda^k(l+0))Q(l-0) - \frac{\beta}{4l} \lambda(l-0) + \eta(Q^k(l-0))\lambda(l+0) = \chi(Q^k(l-0), \lambda^k(l+0)), \quad (12)$$

$$u + \frac{\beta}{4l} \lambda(0) + \delta = 0,$$

где

$$\xi(\lambda^k(l+0)) = -2\delta_3 \bar{Q} \lambda^k(l+0),$$

$$\eta(Q^k(l-0)) = \gamma - 2\delta_3 \bar{Q}(Q^k(l-0) - \delta_2),$$

$$\chi(Q^k(l-0), \lambda^k(l+0)) = -2\delta_3 \bar{Q} \lambda^k(l+0)(Q^k(l-0))$$

С другой стороны линеаризованные варианты самого условия (2) около номинальных траекторий $Q^k(x)$ имеют вид:

$$Q(l+0) = \eta(Q^k(l-0))Q(l-0) + \mu(Q^k(l-0)), \quad (13)$$

$$\mu(Q^k(l-0)) = 2\delta_3 \bar{Q} Q^k(l-0) \left[Q^k(l-0) - \delta_2 \right] - \left[\delta_3 \left[Q^k(l-0) - \delta_2 \right]^2 - \delta_1 \right] \bar{Q},$$

Решив систему линейных дифференциальных уравнений (10) с начальными условиями (4), (12), (13), находим ее решение на $(k+1)$ итерации. Действительно, объединяя краевые условия (4), (12), (13) имеем

$$Kz = q, \quad (14)$$

где

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta(Q^k(l-0)) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \left(\frac{\beta}{4l} - 1\right) & 0 & -\frac{\beta}{4l} & 0 \\ 0 & 0 & \xi(\lambda^k(l+0)) & -\frac{\beta}{4l} & 0 & \eta(Q^k(l-0)) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\beta}{4l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$z = [Q(0), \lambda(0), Q(l-0), \lambda(l-0), Q(l+0), \lambda(l+0), Q(2l), \lambda(2l), \delta]$$

$$q = [-\mu(Q^k(l-0)), 0, 0, \chi(Q^k(l-0), \lambda^k(l+0)), 0]$$

Таким образом, представляем решение уравнения (10) в следующем виде [14]:

$$\begin{bmatrix} Q(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = \Phi(x, 0) \begin{bmatrix} Q(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \int_0^x \Phi(x, \delta) \begin{bmatrix} B \\ F \end{bmatrix} d\delta \quad (16)$$

где Φ - переходная фундаментальная матрица для (10), и формулу (16) можем записать в более удобном для реализации виде на концах интервала $0 < x < l - 0$

$$\begin{bmatrix} Q(l-0) \\ \lambda(l-0) \end{bmatrix} = \Phi(l, 0) \begin{bmatrix} Q(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + N(l, 0) \quad (17)$$

а для $l+0 < x < 2l$

$$\begin{bmatrix} Q(2l) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = \Phi(2l, l) \begin{bmatrix} Q(l+0) \\ \lambda(l+0) \end{bmatrix} + N(2l, l), \quad (18)$$

Отметим, что $N(l, 0)$ и $N(2l, l)$ из (17) и (18) определяются в виде [14]

$$N(i, j) = \int_i^j \Phi(j, \delta) \begin{bmatrix} B \\ F \end{bmatrix} d\delta.$$

Таким образом, имеем 9 линейных алгебраических уравнений (14),(17),(18) относительно z

$$\begin{bmatrix} & & K & & & \\ \Phi(l, 0) & E & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \Phi(2l, 0) & E & 0 & \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} q \\ N(l, 0) \\ N(2l, l) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Решив эти уравнения относительно z , определяем $Q(0) = u$ - объем газа в устье скважины, $Q(l+0)$ - оптимальный объем ГЖС в начале подъемнике, который определяет искомый дебит $Q(2l) = Q(l+0)$. Теперь сформулируем пошаговый алгоритм:

1. Ввод исходных данных и параметров a, ρ, F, c, l из (1);
2. Выбор номинальных траекторий $Q^k(x)$ и управлений u^k ;
3. Вычисление $A(Q^k(x)), B(Q^k(x)), C(Q^k(x)), D(Q^k(x)), F(Q^k(x))$ из (11)
4. Формирование фундаментальных матриц из линейных дифференциальных уравнений (10)
5. Решение системы линейных алгебраических уравнений (19) относительно z
6. Решение системы дифференциальных уравнений (10) и нахождение $(k+1)$ итераций $Q^{k+1}(x)$ и $u^{k+1}(x)$.

7. Задание достаточно малого числа ϵ и проверка условия $|\frac{\partial J}{\partial U}| < \epsilon$, где $\frac{\partial J}{\partial U} = u + \frac{\beta}{4l} \lambda(0) + \delta$, если оно удовлетворяется, то вычисления прекращаются, иначе переход к шагу 2.

Реализацию предложенного алгоритма проследим на следующем примере.

Пусть в (1) на интервале $0 < x < l$

$$a_1 = 1, 4337, \rho_1 = 0, 75, F_1 = 0, 006$$

$$c_1 = 331, \lambda_c^1 = 0, 01, \omega_c^1 = 46, 5225,$$

а на интервале $l < x < 2l$

$$a_2 = -89,7272, \rho_2 = 700, F_2 = 0,0042,$$

$$c_2 = 850, \lambda_c^2 = 0,23, \omega_c^2 = 0,0546,$$

и

$$l = 1485, g = 9,81, \vartheta = 0,1, \gamma_1 = 1, \bar{Q} = 100, \alpha = -1, \beta = 10^{-4}$$

Сначала приведем решение задачи (1)-(3) без условия периодичности (4).

Тогда для $Q(x), l < x < 2l$ имеем следующий график [6]:

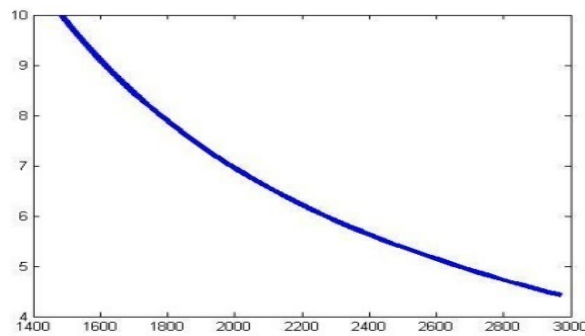


Рисунок 1

Здесь в начале и в конце подъемника объем ГЖС будет

$$Q(l + 0) = 9,9834, Q(2l) = 4,4223.$$

Однако, когда рассматривается периодический режим, [15, 16] т.е. к задаче оптимизации (1)-(3) добавляется и условие периодичности (4) [17, 18], то картина (Рис.1) меняется. Таким образом, для $Q(x)$ имеем следующий график:

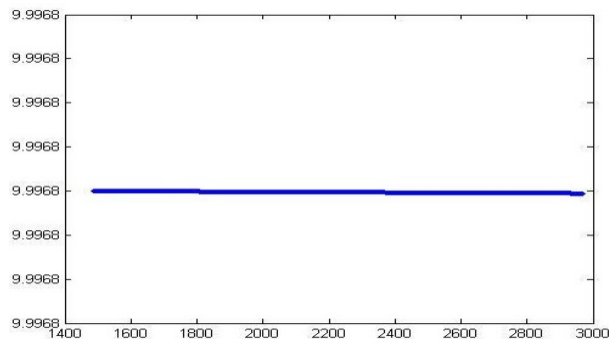


Рисунок 2

Здесь в начале и в конце подъемника объем ГЖС имеет вид

$$Q(l + 0) = 9,968973, Q(2l) = 9,968128.$$

Последний график, в отличие от [6] для $Q(x)$ дает совсем другую картину, т.е. условие (4) фактически обеспечивает без потерный режим в подъемнике ГЖС (дебит составляет 98 % от ГЖС в начале подъемника). Обычно эти потери, как видно из рис.2, составляют 44% объема ГЖС в начале подъемника [6].

Таким образом, приводится новая математическая модель и соответствующая задача управления газлифта на основе метода периодической оптимизации [15-18], обеспечивающая добычу нефти без потери в подъемнике. На практике трудно найти соответствующие компрессоры, подающие газ в устье скважины, а такая модель позволит найти параметры вышеупомянутого компрессора, т.е. последняя задача сама является новой и требует отдельной разработки.

Список литературы

- [1] Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование раб газлифтной скважины. Доклад НАН Азерб., №4, 2008, с. 107-116
- [2] Алиев Ф.А. Минимаксное решение задачи выбора оптимальных режимов газлифта. Доклады НАН Азерб. №1, 2011, с. 27-36
- [3] Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas-lift process Applied and computational Mathematics. An International Journal. Volume 11, № 3, 2012, pp.348-357
- [4] Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти. Под ред. проф. А.Х.Мирзаджанзаде. М.: Недра, 986,382 с.
- [5] Шуров В.И. Технология и техника добычи нефти. М.: Недра,1983,510 с.
- [6] Исмаилов Н.А., Мухтарова Н.С. , Аскеров И.М. Алгоритм решения задачи оптимизации с граничным управлением, Доклады НАН Азерб. №, 2013,
- [7] Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А., Исмаилов Н.А., Гулиев А.П., Гулиев М.Ф. Алгоритм решения задачи оптимального управления начальными условиями в процессе газлифта. Доклад НАН Азерб., №6 2009 с. 21-27
- [8] Aliev F.A., Djamalbekov M.A., Pyasov M. Kh. Mathematical Simulation and Control Gaz Lift. Journal of Computer and System. Sciences, vol50, №5, 2011, 805-814
- [9] Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и линейные краевые задачи. М.: Мир,1968,153 с.
- [10] Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае. Доклад. НАН Азерб., Т., №6, 2010, с. 6-14
- [11] Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одном методе линеаризации для линейных систем. Мехатроника , Автоматизация, Управление. №6 (35), 2012, 2-6
- [12] Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир,1972,544 с.
- [13] Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку, Elm, 1989, 320 с.

- [14] Андреев Ю.И. Управление конечно мерными линейными объектами., М.: Наука, 1976, 424 с.
- [15] Ларин В.Б. Оптимизация периодических систем. Доклад АН СССР,1978, т 239, №1, с. 67-70
- [16] Colaneri P. Periodic control systems: theoretical aspects. Appl. And Computer. Math. V. 3, №2, 2004, P.P. 84-94
- [17] Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями, Известия АН СССР.,сер.тех. Кибернетика,1985, №6, с. 138-146.
- [18] Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями, Дифференциальные уравнения.,1986, №2, с. 345-347.

УДК 519.6:532.5

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

П.Б. Бейсебай

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In the present paper we consider the question of convergence of implicit iterative algorithm parameters to the solution of a linear system of difference equations of stationary free convection. In terms of the parameters of the algorithm a sufficient condition for its convergence to the solution of this system is given.

Keywords: thermal convection, incompressible fluid, convergence of iteration, eventual-differential grid, differential equation, differential algorithm.

Аңдатпа. Ұсынылған жұмыста бір айқындалмаған параметрлі итерациялық алгоритмнің ерікті конвекцияның стационарлық айырымдық теңдеулерінің жүйесінің шешіміне жинақталуы сұрағы қарастырылған. Алгоритмнің параметрлерінің терминінде оның берілген жүйенің шешіміне жинақталуының жеткілікті шарты берілген.

Кілттік сөздер: жылу конвекциясы, сығылмайтын сұйықтық, итерация жинақтылығы, шекті-айырымдық тор, айырымдық теңдеу, айырымдық алгоритм.

Аннотация. В предлагаемой работе рассмотрен вопрос сходимости одного неявного итерационного алгоритма с параметрами к решению линейной системы разностных стационарных уравнений свободной конвекции. В терминах параметров алгоритма дано достаточное условие его сходимости к решению данной системы.

Ключевые слова: тепловая конвекция, несжимаемая жидкость, сходимость итерации, конечно-разностная сетка, разностное уравнение, разностный алгоритм.

Предлагаемая работа посвящена к вопросу сходимости неявного итерационного алгоритма

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \left(p^n - \frac{\tau}{\varepsilon} \operatorname{div}_h \bar{u}^n \right)_{x_m} = \Delta_h u_m^{n+1} + \frac{\delta\tau}{2\varepsilon} (u_{m,x_m}^{n+1} - u_{m,x_m}^n)_{\bar{x}_m} - \frac{Gr g_m}{|\bar{g}|} \theta^{n+1} + f_m, \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} + \operatorname{div}_h \bar{u}^{n+1} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} = \frac{1}{Pr} \Delta_h \theta^{n+1} + g(x) \quad (3)$$

к решению линейной системы разностных стационарных уравнений свободной конвекции

$$\overline{\operatorname{grad}}_h p = \Delta_h \bar{u} - \frac{Gr \bar{g}}{|\bar{g}|} \theta + \bar{f}(x), \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{Pr} \Delta_h \theta = -g(x), \quad (6)$$

рассматриваемой в области $D = \{0 < x_m < 1, m = \overline{1, N}\}$ N -мерного пространства, с однородными краевыми условиями для вектора скорости $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ и температуры $\theta(x)$, где $\bar{f}(x)$, $g(x)$ – заданные сеточные функций, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\alpha = \overline{1, N}$, $p(x)$ – давление, $\bar{g}(x)$ – вектор силы тяжести, Gr – число Грасгофа, Pr – число Прандтля.

Компонента вектора скорости u_m , $m = \overline{1, N}$ определена в узлах сетки

$$D_{m,h} = \{(l_1 h, l_2 h, \dots, l_{m-1} h (l_m + 1/2) h, l_{m+1} h, \dots, l_N h), l_k = \overline{0, M}, k \neq m, l_m = \overline{0, M-1}, Mh = 1\},$$

а значения давления и температуры в узлах сетки

$$D_h = \{(l_1 h, l_2 h, \dots, l_N h), l_k = \overline{0, M-1}, k = \overline{0, N}\}$$

и удовлетворяют условиям

$$u_m|_{\partial D_{m,h}} = \theta|_{\partial D_h} = 0.$$

Считаем, что $p(x)$ ортогонально единице в $L_2(D_h)$.

Подобным вопросам посвящены ряд работ [1-3]. Основным отличием предлагаемой работы является произвольность размерности пространства.

Уравнения погрешности итерационного процесса имеют вид

$$\frac{z_m^{n+1} - z_m^n}{\tau} + (\pi^n - \frac{\tau}{\varepsilon} \operatorname{div}_h \bar{z}^n)_{x_m} = \Delta_h z_m^{n+1} + \frac{\delta\tau}{2\varepsilon} (z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n)_{\bar{x}_m} + \frac{Gr g_m}{|\bar{g}|} T^{n+1} \quad (7)$$

$$\varepsilon \frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\tau} + \operatorname{div}_h \bar{z}^{n+1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{1}{Pr} \Delta_h T^{n+1}, \quad (9)$$

где \bar{u} , p , θ и \bar{u}^n , p^n , θ^n – решения соответственно задач (1)-(3) и (4)-(6), $\bar{z}^n = \bar{u}^n - \bar{u}$, $\pi^n = p^n - p$, $T^n = \theta^n - \theta$.

Умножив обе части (7) на $2\tau z_m^{n+1}$ и просуммировав $m = \overline{1, N}$ и по внутренним узлам сетки, получим

$$\begin{aligned} & \|\bar{z}^{n+1}\|^2 + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 - \|\bar{z}^n\|^2 - 2\tau(\pi^n - \frac{\tau}{\varepsilon} \underline{div}_h \bar{z}^n, \underline{div}_h \bar{z}^{n+1}) = \\ & = -2\tau \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 - \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \left(\|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 + \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 - \|z_{m,x_m}^n\|^2 \right) + \frac{2\tau Gr}{|\bar{g}|} (\bar{g}T^{n+1}, \bar{z}^{n+1}). \end{aligned}$$

Далее, воспользуясь равенством

$$2\tau \left(\pi^n - \frac{\tau}{\varepsilon} \underline{div}_h \bar{z}^n, \underline{div}_h \bar{z}^{n+1} \right) = -\varepsilon \|\pi^{n+1}\|^2 + \varepsilon \|\pi^n\|^2 - \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \bar{z}^n\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n)\|^2,$$

получаемого на основе (7), имеем

$$\begin{aligned} & \|\bar{z}^{n+1}\|^2 + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 - \|\bar{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^{n+1}\|^2 - \varepsilon \|\pi^n\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \bar{z}^n\|^2 - \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n)\|^2 = \\ & = -2\tau \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 - \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \left(\|z_{m,x}^{n+1}\|^2 + \|z_{m,x}^{n+1} - z_{m,x}^n\|^2 - \|z_{m,x}^n\|^2 \right) + \frac{2\tau Gr}{|\bar{g}|} (\bar{g}T^{n+1}, \bar{z}^{n+1}). \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенств Коши-Буняковского, $a \cdot b \leq \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} b^2$ и

$$\|\omega\|^2 \leq \frac{1}{\delta_0} \|\nabla_h \omega\|^2,$$

где ε_1 – произвольное положительное число, δ_0 – наименьшее собственное число оператора Лапласа, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \|\bar{z}^{n+1}\|^2 + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \bar{z}^n\|^2 + 2\tau \left(1 - \frac{Gr\varepsilon_1}{\delta_0} \right) \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \\ & + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{2\varepsilon} (\delta - 2N) \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 \leq \|\bar{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^n\|^2 + \\ & + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^n\|^2 + \frac{\tau Gr}{2\varepsilon_1 \delta_0} \|\nabla_h T^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Умножая обе части (9) на $2\gamma\tau T^{n+1}$, где γ – произвольное положительное число, получим

$$\gamma \|T^{n+1}\|^2 + \gamma \|T^{n+1} - \gamma T^n\|^2 - \|T^n\|^2 = -\frac{2\tau\gamma}{Pr} \|\nabla_h T^{n+1}\|^2.$$

Прибавляя это равенство к предыдущему его неравенству, получим оценку

$$\begin{aligned} & \|\bar{z}^{n+1}\|^2 + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \bar{z}^n\|^2 + 2\tau \left(1 - \frac{Gr\varepsilon_1}{\delta_0} \right) \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \\ & + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{2\varepsilon} (\delta - 2N) \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 + \beta \left(\|T^{n+1}\|^2 + \|T^{n+1} - T^n\|^2 \right) + \\ & + \frac{2\tau}{Pr} \left(\beta - \frac{Ra}{4\varepsilon_1 \delta_0} \right) \|\nabla_h T^{n+1}\|^2 \leq \|\bar{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^n\|^2 + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^n\|^2 + \beta \|T^n\|^2 \end{aligned}$$

или

$$S^{n+1} + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \bar{z}^n\|^2 + 2\tau \left(1 - \frac{Gr\varepsilon_1}{\delta_0}\right) \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{2\varepsilon} (\delta - 2N) \times \\ \times \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 + \beta \|T^{n+1} - T^n\|^2 + \frac{2\tau}{Pr} \left(\beta - \frac{Ra}{4\varepsilon_1\delta_0}\right) \|\nabla_h T^{n+1}\|^2 \leq S^n, \quad (10)$$

где

$$S^n = \|\bar{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^n\|^2 + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^n\|^2 + \beta \|T^n\|^2$$

В силу произвольности ε_1 и γ мы можем их подобрать так, чтобы числа $1 - \frac{Gr\varepsilon_1}{\delta_0}$ и $\gamma - \frac{Ra}{4\varepsilon_1\delta_0}$ были положительными. Тогда, при выполнении условий $\varepsilon > 0$ и $\delta > 2N$, из оценки (10) следует сходимость S_n , которая в свою очередь влечёт сходимости

$$\|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 \rightarrow 0, \quad \|\underline{div}_h \bar{z}^n\|^2 \rightarrow 0, \quad \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 \rightarrow 0, \quad \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 \rightarrow 0, \\ \|\bar{T}^{n+1} - \bar{T}^n\|^2 \rightarrow 0, \quad \|\nabla_h T^{n+1}\|^2 \rightarrow 0. \quad (11)$$

Покажем, что $\|\pi^n\| \rightarrow 0$.

Перепишем (8) в виде

$$\tau \pi_{x_m}^n = \tau \Delta_h z_m^{n+1} - (z_m^{n+1} - z_m^n) + \frac{\tau^2}{\varepsilon} (\underline{div}_h \bar{z}^n)_{x_m} + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} (z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n)_{\bar{x}_m} + \frac{\tau Gr g_m}{|\bar{g}|} T^{n+1}, m = \overline{1, N}.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно в $L_2(D_h)$ на $\vec{\varphi}_m$, где $\vec{\varphi} \in W_2^1(D_h)$ и суммируя по m и по i, j, k имеем

$$\tau (\text{grad} \pi^n, \vec{\varphi}) = -\tau (\nabla_h \bar{z}^{n+1}, \nabla_h \vec{\varphi}) - (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n, \vec{\varphi}) - \frac{\tau^2}{\varepsilon} (\underline{div}_h \bar{z}^n, \underline{div}_h \vec{\varphi}) + \\ + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N (z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n, \varphi_{m,x_m}) + \frac{\tau Gr}{|\bar{g}|} (\bar{g} T^{n+1}, \vec{\varphi}).$$

Отсюда применяя равенство

$$(\text{grad} \pi^n, \vec{\varphi}) = -(\pi^n, \underline{div}_h \vec{\varphi})$$

и неравенство Коши-Буняковского приходим к неравенству

$$\tau |(\pi^n, \underline{div}_h \vec{\varphi})| \leq \tau \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\| \|\nabla_h \vec{\varphi}\| + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\| \|\vec{\varphi}\| + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \bar{z}^n\| \|\underline{div}_h \vec{\varphi}\| + \\ + \frac{\delta\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| \|\varphi_{m,x_m}\| + \frac{\tau Gr}{|\bar{g}|} \|\bar{g} T^{n+1}\| \|\vec{\varphi}\|.$$

Откуда в силу неравенств

$$\|\underline{div}_h \vec{\varphi}\| \leq \|\nabla_h \vec{\varphi}\| \quad \text{и} \quad \|\varphi_{m,x_m}\| \leq \|\vec{\varphi}\|$$

имеем

$$\begin{aligned} \tau |(\pi^n, \underline{div}_h \vec{\varphi})| &\leq \tau \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| \|\nabla_h \vec{\varphi}\| + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| \|\vec{\varphi}\| + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \vec{z}^n\| \|\nabla_h \vec{\varphi}\| + \\ &+ \frac{\delta \tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| \|\nabla_h \vec{\varphi}\| + \tau Gr \|T^{n+1}\| \|\vec{\varphi}\|. \end{aligned}$$

Разделяя обе части данного неравенства на $\|\vec{\varphi}\|_0 = \|\nabla_h \vec{\varphi}\| + \|\vec{\varphi}\| \neq 0$ получим

$$\begin{aligned} Sup_{\vec{\varphi} \neq 0} \frac{\tau |(\pi^n, \underline{div}_h \vec{\varphi})|}{\|\vec{\varphi}\|_0} &\leq \tau \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \vec{z}^n\| + \frac{\delta \tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| + \\ &+ \tau Gr \frac{1}{\sqrt{\delta_0}} \|T^{n+1}\|. \end{aligned}$$

Так как $Sup_{\vec{\varphi} \neq 0} \frac{|(\pi^n, \underline{div}_h \vec{\varphi})|}{\|\vec{\varphi}\|_0} \geq c_0 \|\pi^n\|$, где постоянное c_0 не зависит от ε , τ , h , то из последнего неравенства следует неравенство

$$c_0 \tau \|\pi^n\| \leq \tau \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \vec{z}^n\| + \frac{\delta \tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| + \tau Gr \|T^{n+1}\|.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат и учитывая неравенства

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2), \quad \|T^{n+1}\| \leq \frac{1}{\delta_0} \|\nabla_h T^{n+1}\|$$

имеем

$$\begin{aligned} c_0^2 \tau^2 \|\pi^n\|^2 &\leq 5 \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{\varepsilon} + \frac{\delta \tau^2}{2\varepsilon} + \tau Gr \right) \left(\tau \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2 + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \vec{z}^n\|^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\delta^2 \tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 + \frac{\tau Gr}{\delta_0} \|\nabla_h T^{n+1}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (11) получим, что $\|\pi^n\| \rightarrow 0$.

Таким образом, мы пришли к следующему выводу.

Если параметры ε и δ удовлетворяют условиям $\varepsilon > 0$ и $\delta > 2N$, то итерационный алгоритм (1)-(3) сходится к решению задачи (4)-(6) и при этом имеет место оценка

$$\begin{aligned} S^{n+1} + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|\underline{div}_h \vec{z}^n\|^2 + 2\tau \left(1 - \frac{Gr\varepsilon_1}{\delta_0} \right) \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau^2}{2\varepsilon} (\delta - 2N) \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^{n+1} - \\ - z_{m,x_m}^n\|^2 + \gamma \|T^{n+1} - T^n\|^2 + \tau \left(\gamma \frac{2}{Pr} - \frac{Gr}{2\varepsilon_1 \delta_0} \right) \|\nabla_h T^{n+1}\|^2 \leq S^n, \end{aligned}$$

где

$$S^n = \|\vec{z}^n\|^2 + \varepsilon \|\pi^n\|^2 + \frac{\delta \tau^2}{2\varepsilon} \sum_{m=1}^N \|z_{m,x_m}^n\|^2 + \gamma \|T^n\|^2$$

, ε_1 и γ положительные числа, удовлетворяющие условиям $\varepsilon_1 < \frac{\delta_0}{Gr}$ и $\gamma > \frac{Ra}{\varepsilon_1 \delta_0}$.

Список литературы

- [1] Бейсебай П.Б., Данаев Н.Т. Об одном исследовании разностной схемы для уравнений тепловой конвекции // Материалы международной научно-практической конференции «Информационно-коммуникационные технологии как основной фактор развития инновационного общества». - Усть-Каменогорск, 2007. - С. 7-12.
- [2] Лапко С.Л. Разностные алгоритмы решения задачи тепловой конвекции // Дифференциальные уравнения. - 1992. - Т. 28, № 12. - С. 2137-2147.
- [3] Калтаев А.Ж., Урмашев Б.А. Численное решение одной задачи тепловой конвекции // Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф. - 2000. - № 1. - С. 162-170.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Т.В. Бурнышева, О.А. Штейнбрехер

Новокузнецкий институт (филиал) ФГБОУ ВПО "Кемеровский государственный университет"

Abstract. We consider the class of engineering designs with lattice structure and made of composite materials. Approach for the calculation of the stress-strain state of structures using finite element is considered. A numerical calculation of the stress-strain state of a shell structure under axial compression with a non-uniform load is discussed in the article. The result obtained from numerical simulations are comparable to the natural experiment. Also the results of assessing the impact of the loss of stability of the model manhole covers are considered.

Keywords: ribbed shell structures, composite materials, computational experiment, numerical solution.

Аннотация. Рассматривается класс машиностроительных конструкций имеющих сетчатую структуру и изготовленных из композиционных материалов. Приведен подход для расчета напряженно-деформированного состояния подобных конструкций методом конечных элементов. В работе приведен численный расчет напряженно-деформированного состояния составной оболочечной конструкции при осевом сжатии с неравномерной нагрузкой. Данные полученные при численном моделировании сопоставимы с данными натурального эксперимента. Приведены результаты оценки влияния потери устойчивости крышек люка рассматриваемой модели.

Ключевые слова: сетчатые оболочечные конструкции, композиционные материалы, вычислительный эксперимент, численное решение..

Среди силовых конструкций из полимерных композиционных материалов большое распространение имеют конструкции типа сетчатых оболочек. К особенностям относятся вырезы (усиленные и не усиленные) конструктивной или технологической направленности, влияющие на распределение напряжений в конструкции [1]. Эти конструкции обладают рядом преимуществ перед

гладкими оболочечными конструкциями, подкрепленными продольно-поперечным силовым набором. Они имеют большую несущую способность при осевом сжатии, а критические нагрузки потери устойчивости не чувствительны к начальным несовершенствам формы [1, 2, 3].

Одним из классических методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) сетчатых конструкций является метод, основанный на замене дискретной структуры ребер эквивалентной однородной ортотропной оболочкой. Получаемые поля перемещений и напряжений непрерывны везде в пределах конструкции [4]. Такой подход основан на известных аналитических решениях и позволяет избежать применения численных методов. Однако конструктивное исполнение вырезов в сетчатых структурах, как правило, требует удаления целых ячеек сетки, следовательно, контур выреза имеет форму ломаной. Континуальная модель в этом случае резко завышает реальные напряжения, особенно в углах отверстий.

Избежать появления особенностей подобного типа позволяет модель, основанная на полном дискретном моделировании ребер. Использование такой модели дает более реальную картину полей напряжений в окрестности вырезов [5].

В настоящее время в машиностроении широко применяются составные конструкции, отдельными фрагментами которых являются сетчатые оболочки из композиционных материалов [2, 6]. Расчет напряженно-деформированного состояния таких конструкций остаётся актуальным и в настоящее время.

Рассмотрим оболочечную конструкцию, состоящую из алюминиевого стрингерного отсека и композитной сетчатой оболочки. Структурная схема модели представлена на рисунке 1. Нижняя часть представляет собой цилиндрическую оболочку из композиционных материалов. Высота цилиндра составляет $0,69R$ (R – радиус оболочки). Высота сечения спиральных и кольцевых ребер одинакова; обозначим её d . Ширина сечения составляет $0,25d$, а расстояние между спиральными ребрами по высоте равно $2,63d$. Расстояние между осями пар кольцевых ребер равно $3,56d$. Расстояние между ребрами внутри пары $0,25d$. Конструкция укреплена двумя шпангоутами, встроенным кольцом и четырьмя продольными ребрами. Имеется три компенсированных выреза круглой формы, усиленные двумя окантовками переменной толщины. Внешняя окантовка имеет толщину h_e , поверх которой располагается внутренняя окантовка толщиной h_m . Вырезы под люки закрыты крышками, форма которых совпадает с формой вырезов. Стрингерный отсек представляет алюминиевую конструкцию цилиндрической формы. Высота этой части конструкции составляет $0,53R$. Он содержит четыре равномерно расположенных по окружности проема, частично закрытых несъёмными крышками, укреплен шестью десятками стрингеров и тремя шпангоутами. Толщины обшивок композитной и алюминиевой частей конструкции равны $h_K = h_C = h$. Поля напряжений определялись в пакете программ «Композит-НК» [7], разработанном на кафедре математики и математического моделирования НФИ КемГУ (Россия, г.Новокузнецк), в котором реализован метод конечных элементов в виде метода перемещений. Строилась конечно-элементная модель конструкции по структурной схеме (рисунок 1). Схема разбиения обшивки композитной части конструкции на конечные элементы получалась наложением орebrения, конечные элементы при этом получались треугольными. Для моделирования ребер и стрингеров использовался двухузловой конечный элемент с 6-ю степенями свободы в каждом узле и аппроксимацией прогибов эрмитовыми полиномами 3-й степени, учитывающие деформации поперечного сдвига по сдвиговой модели Тимошенко [8]. Обшивка и окантовки моделировались элементами изгибаемой пластины Зенкевича с неполной кубической аппроксимацией прогибов [9]. Перемещения вдоль осей элементов ребер и в плоскости каждого треугольника обшивки аппроксимировались ли-

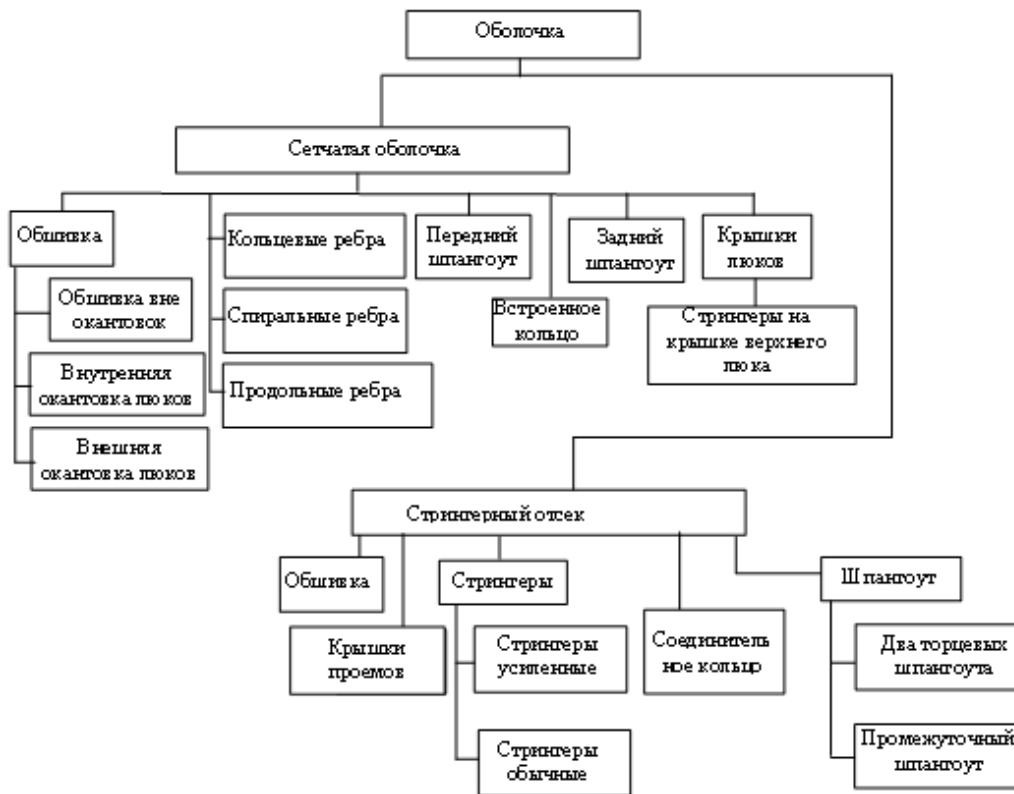


Рисунок 1 Структурная схема конструкции

нейными сплайнами. Вдоль образующей оболочка нагружалась сжимающей силой \tilde{N} . Погонная нагрузка была распределена не равномерно по торцу, на котором был запрещен поворот нормали относительно касательной к круговому сечению. Задача решалась в физически и геометрически линейной постановке. Конечно-элементная модель представлена на рисунке 2.

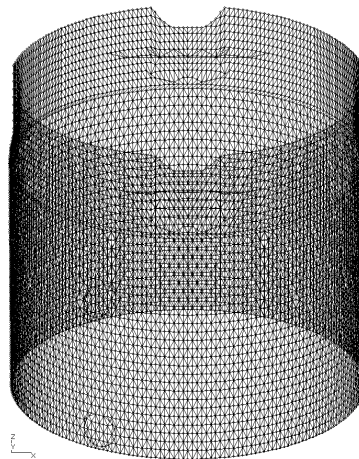


Рисунок 2 Конечно-элементная модель конструкции

При проведении эксперимента на осевую жесткость конструкция была жестко закреплена по нижней кромке, а на верхнюю кромку алюминиевой части конструкции между проемами была приложена сжимающая нагрузка. Численно приложенную нагрузку представляли в виде комбинации \tilde{N} равномерной нагрузки \tilde{F} и неравномерно распределенного момента:

$$\tilde{N} = 0.877 \tilde{F} - 1.765 (\sin \alpha 0.1 \tilde{N}) - 0.093 (\cos \alpha 0.1 \tilde{N})$$

В процессе нагружения измерялись перемещения вдоль образующей. Для этого на конструкции были закреплены датчики перемещений и деформаций, схема расположения которых представлена на рисунке 3.

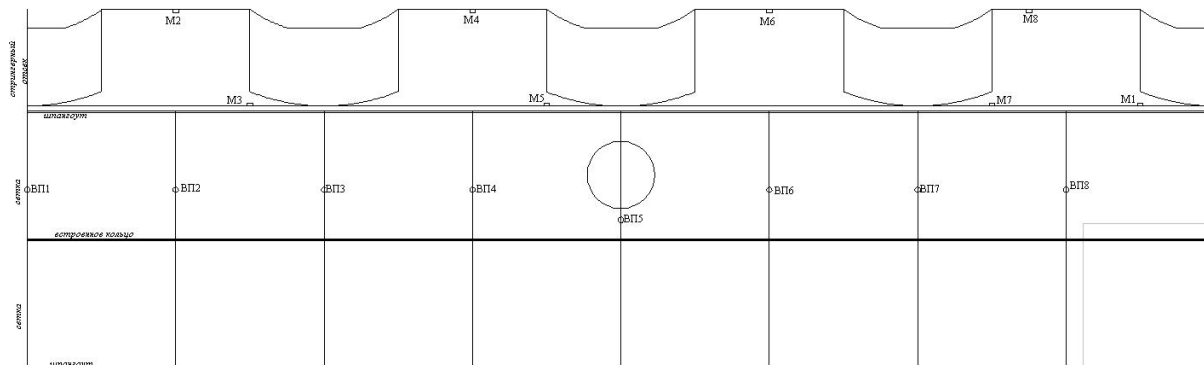


Рисунок 3 Схема расположения датчиков перемещения и деформации на развертке конструкции

Наибольшие различия между расчетными и экспериментально измеренными перемещениями достигаются в зоне первого нижнего люка (слева) – датчики ВП3 [10]. Данные различия можно объяснить геометрически нелинейной связью между деформациями и перемещениями, либо потерей устойчивости крышки люка в упругой зоне во время натурального эксперимента. Применение дискретного подхода к моделированию рассматриваемой оболочечной конструкции сложной структуры, позволило реализовать модель на встроенном языке в пакете программ «Композит НК» и оценить влияние потери устойчивости крышек люков путем быстрой перестройки модели. С учетом симметрии модели рассмотрим шесть состояний: 1) закрыты все люки, 2) открыт один нижний люк, 3) открыты два нижних люка, 4) открыт верхний люк, 5) открыты один нижний и верхний люки, 6) открыты все люки. На рисунке 4 приведены распределения значений осевых перемещений численного расчета осевых перемещений в композитной части конструкции при полностью открытых и закрытых люках. Анализ результатов показывает, что раскрытие верхнего люка дает увеличение осевых перемещений в его окрестности (датчик ВП5) на 9,5%. Влияние раскрытия нижних люков мало – увеличение осевых перемещений в их окрестности порядка 2% (датчики ВП4 и ВП6).

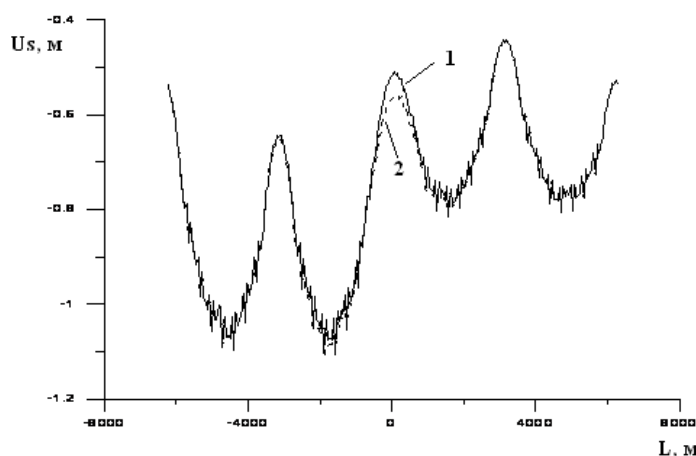


Рисунок 4 Распределение U_s в композитной части конструкции: 1 - численный расчет при закрытых люках, 2 - при открытых люках

Полученные расчеты позволили сделать следующие выводы: для достижения большей точности при численных расчетах напряженно-деформированного состояния конструкций, отдельными фрагментами которых являются сетчатые оболочки из композиционных материалов, необходимо решать задачу в геометрически нелинейной постановке.

Список литературы

- [1] Васильев В.В., Разин А.Ф. Композитные сетчатые балочные элементы для авиационных конструкций // Вопросы оборонной техники. – 2006. – N 1/2. – С. 3-6.
- [2] Васильев В.В., Разин А.Ф. Композитные сетчатые балочные элементы для авиационных конструкций// Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: НТЦ «Информтехника». – 2006. – Вып. 1(142) – 2(143). – с. 3-6.
- [3] Шухов В.Г. Строительная механика. Избранные труды. М.: Наука, 1977. – 193 с.
- [4] Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
- [5] Бурнышева Т.В., Каледин В.О. Сравнение дискретного и континуального подхода к расчету напряженного состояния сетчатых оболочечных конструкций при статическом нагружении // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. - №4 – С. 113-116
- [6] Васильев В.В. Исследование влияния формы ячейки на напряженное состояние композитной сетчатой конструкции при локальном нагружении / В.В. Васильев, М.В. Никитин, А.Ф. Разин// Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: НТЦ «Информтехника». – 2008. – Вып. 1(138) – 2(139). – 90 с.
- [7] Бурнышева Т.В., Каледин В.О., Равковская И.В., Эптешева С.В. Развитие пакета программ математического моделирования сопряженных задач механики неоднородных конструкций // Вестник Кемеровского государственного университета. № 1(41) 2010. – - С. 3-8.
- [8] Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов: учебник для вузов. 2-е издание, стер. СПб.: Издательство "Лань 2002. - 672с.
- [9] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. – 392 с.
- [10] Бурнышева Т.В., Разин А.Ф., Штейнбрехер О.А. Оценка взаимного влияния составных частей оболочечной конструкции при осевом сжатии // Научно-технический вестник Поволжья. №2 2012 г. – Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2012. – 127-132 с.

УДК 512.12

РАСШИРЕНИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

С.В. Галкин, Д.А. Асанов, В.В. Запасный

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. This paper describes conception of two-dimensional mathematical progressions. This conception extends the existing theory of mathematical progressions (arithmetical and geometrical). Classically explained progressions are presented by the form of one-dimensional numerical sequences (one-dimensional progressions). One-dimensional progression is presented by ordered class of one-dimensional progressions. Special terms were introduced for ease of use two-dimensional progressions and for their properties' analysis. Two-dimensional progression is represented by the form of matrix structures with placement of their members correctly in their numerical order in the dimensions (orthogonal and turn-based matrix structures) for image sensitivity.

Keywords: mathematical progressions, one-dimensional progressions, two-dimensional progressions, matrix structures of progressions.

Аңдатпа. Осы мақалада екімөлшерді математикалық прогрессиялардың тұжырымдамасы баяндалған. Бұл тұжырымдама қазіргі математикалық прогрессиялар қағидаларын кеңейтеді (арифметикалық және геометриялық). Классикалық түсініктемеде прогрессиялар бірмөлшерді сандық реттік түрінде берілген (бірмөлшерді прогрессия). Екімөлшерді прогрессия реттелген бірмөлшерді прогрессиялар жиынтығы түрінде берілген. Екімөлшерді прогрессиялардың қолданылуын ыңғайландыру үшін және олардың қасиеттерін зерттеу үшін бірнеше атаулық ұғымдар енгізілген. Екімөлшерді прогрессияны бейнелі түрде қабылдау үшін оны өлшем ішінде орналасқан қалыптамалы құрылым түрінде көрсету ұсынылған (ортогоналдық және қадамдық қалыптамалы құрылым).

Кілттік сөздер: математикалық прогрессиялар, бірмөлшерді прогрессиялар, екімөлшерді прогрессиялар, прогрессиялардың қалыптамалы құрылымдары.

Аннотация. В представленной статье изложена концепция двухмерных математических прогрессий. Данная концепция расширяет существующую теорию математических прогрессий (арифметической и геометрической). Классически трактуемые прогрессии представлены в виде одномерных числовых последовательностей (одномерных прогрессий). Двухмерная прогрессия представлена в виде упорядоченной совокупности одномерных прогрессий. Для удобства использования двухмерных прогрессий и исследования их свойств введен ряд терминологических понятий. Для образного восприятия двухмерной прогрессии предложено представить её в виде матричных структур с размещением членов адекватно их порядковым номерам в измерениях (ортогональная и пошаговая матричные структуры).

Ключевые слова: математические прогрессии, одномерные прогрессии, двухмерные прогрессии, матричные структуры прогрессий.

Многие задачи количественного изменения в системах циклического характера решаются с помощью теории математических прогрессий. Однако существующая теория позволяет решать

задачи, в которых имеется только один циклический фактор. Поэтому для математического моделирования циклических процессов с двумя циклическими факторами необходимо расширить теорию прогрессий. В работе [1] были впервые изложены основные положения концепции теории двухмерных математических прогрессий.

В математике прогрессия – это название некоторых видов числовых последовательностей [2]. Выделяют прогрессии арифметическую и геометрическую.

Рассмотрим классическую трактовку математических прогрессий.

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же постоянным числом, называемым разностью арифметической прогрессии. Каждый член арифметической прогрессии рассчитывается по формуле:

$$a_n = a_1 + (n - 1) * d, \quad (1)$$

где a_1 - первый член арифметической прогрессии;

a_n - член арифметической прогрессии с порядковым номером n (общий член прогрессии);

n – порядковый номер члена прогрессии;

d - разность арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на некоторое постоянное и не равное нулю число, называемое знаменателем геометрической прогрессии. Каждый член геометрической прогрессии рассчитывается по формуле

$$b_n = b_1 * q^{n-1}, \quad (2)$$

где b_1 - первый член геометрической прогрессии;

b_n - член геометрической прогрессии с порядковым номером n (общий член прогрессии);

n – порядковый номер члена прогрессии;

q - знаменатель геометрической прогрессии.

В данной работе предлагается концепция двухмерных математических прогрессий. Дадим определение двумерным прогрессиям. При этом классически трактуемые математические прогрессии (арифметическая и геометрическая) будем называть одномерными прогрессиями.

Двухмерная арифметическая прогрессия - числовая последовательность, основой которой является первый член прогрессии, дающий развитие одномерной прогрессии с разностью d_1 (разность арифметической прогрессии в первом измерении), при этом, все члены этой одномерной прогрессии являются первыми членами других одномерных прогрессий с одинаковой разностью d_2 (разность арифметической прогрессии во втором измерении).

Определение двухмерной арифметической прогрессии можно дать и через математическое описание общего члена прогрессии.

Двухмерная арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой рассчитывается по формуле:

$$a_{nm} = a_{1,1} + (n - 1) * d_1 + (m - 1) * d_2, \quad (3)$$

где n – порядковый номер члена прогрессии в первом измерении;
 m – порядковый номер члена прогрессии во втором измерении;
 $a_{1,1}$ – первый член двухмерной арифметической прогрессии;
 d_1 – разность арифметической прогрессии в первом измерении;
 d_2 – разность арифметической прогрессии во втором измерении;
 a_{nm} – член двухмерной арифметической прогрессии с порядковыми номерами n в первом измерении и m – во втором (общий член прогрессии).

Двухмерная геометрическая прогрессия – числовая последовательность, основой которой является первый член прогрессии, дающий развитие одномерной прогрессии со знаменателем q_1 (знаменатель геометрической прогрессии в первом измерении), при этом, все члены этой одномерной прогрессии являются первыми членами других одномерных прогрессий с одинаковым знаменателем q_2 (знаменатель геометрической прогрессии во втором измерении).

Определение многомерной геометрической прогрессии можно дать и через математическое описание общего члена прогрессии.

Двухмерная геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий рассчитывается по формуле

$$b_{nm} = b_{1,1} * q_1^{n-1} * q_2^{m-1}, \quad (4)$$

где $b_{1,1}$ – первый член двухмерной геометрической прогрессии;
 n – порядковый номер члена прогрессии в первом измерении;
 m – порядковый номер члена прогрессии во втором измерении;
 q_1 – знаменатель геометрической прогрессии в первом измерении;
 q_2 – знаменатель геометрической прогрессии во втором измерении;
 b_{nm} – член двухмерной геометрической прогрессии с порядковыми номерами n в первом измерении и m – во втором (общий член прогрессии).

Классические прогрессии (арифметическая и геометрическая) являются частным случаем двухмерных прогрессий, которые развиваются только в одном измерении. Поэтому и было предложено назвать данные прогрессии одномерными. Каждая двухмерная прогрессия представляет собой упорядоченную совокупность одномерных прогрессий.

Для удобства использования двухмерных прогрессий и исследования их свойств введем для них следующие терминологические понятия.

X уровень первого измерения двухмерной прогрессии – совокупность членов рассматриваемой прогрессии с порядковым номером X в первом измерении, где X натуральное число.

X уровень второго измерения двухмерной прогрессии – совокупность членов рассматриваемой прогрессии с порядковым номером X во втором измерении, где X натуральное число.

Развитие прогрессии – переход от одного члена прогрессии к следующему.

Первый член двухмерной прогрессии – член прогрессии, у которого порядковые номера в обоих измерениях равны единице.

Шаг прогрессии – совокупность членов данной прогрессии, равноудаленных в развитии от первого члена прогрессии. Из данного определения логически вытекает свойство членов одного шага двухмерной прогрессии – они имеют одинаковые значения суммы своих порядковых номеров первого и второго измерений.

Первый член в первом измерении двухмерной прогрессии – член прогрессии, у которого порядковый номер в первом измерении данной прогрессии равен единице.

Первый член во втором измерении двухмерной прогрессии – член прогрессии, у которого порядковый номер во втором измерении данной прогрессии равен единице.

Первый член двухмерной прогрессии является первым членом в обоих измерениях данной прогрессии.

Первый ряд двухмерной прогрессии - упорядоченная совокупность членов первого измерения данной прогрессии, являющихся первыми членами второго измерения.

Первый член X шага прогрессии – член X шага, входящий в состав первого ряда прогрессии, где X натуральное число.

Номер шага прогрессии – число равное порядковому номеру первого члена шага прогрессии в первом измерении.

Однородный шаг прогрессии – шаг прогрессии, все члены которого имеют одинаковое численное значение.

Неоднородный шаг прогрессии – шаг прогрессии, все члены которого имеют различные численные значения.

Коэффициент однородности X шага – отношение среднеарифметического значения членов X шага к первому члену этого шага, где X натуральное число. Для однородного шага прогрессии коэффициент однородности равен единице.

Коэффициент развития прогрессии в X шаге – отношение суммы членов X шага к первому члену прогрессии, где X натуральное число. Данный коэффициент показывает, во сколько раз увеличилась сумма членов шага при развитии прогрессии с первого шага до X шага.

Для удобного образного восприятия двухмерной прогрессии целесообразно представить её в пространстве в виде определенной структуры с размещением членов адекватно их порядковым номерам в измерениях. Предлагаются две пространственные структуры прогрессий: ортогональная матричная структура и пошаговая матричная структура. Для отображения данных структуры на плоскости целесообразно использовать матрицы. Поэтому эти пространственные структуры прогрессий предложено называть матричными.

В математике матрица – это прямоугольная таблица, состоящая из элементов, расставленных в m строк и n столбцов [2]. Матричная структура прогрессии позволяет отобразить все члены двухмерной прогрессии. При этом члены прогрессии размещаются последовательно в строках и столбцах прямоугольной таблицы.

Ортогональная матричная структура прогрессии – последовательное размещение членов прогрессии в пространстве, при котором все уровни одного измерения параллельны друг другу, а любые два уровня различных измерений перпендикулярны друг другу. Исходя из специфики размещения членов прогрессии в пространстве, данную структуру было предложено назвать «ортогональной». Ортогональность (от греческого *orthogonios* – прямоугольный) – обобщенное понятие перпендикулярности, распространённое на различные математические объекты. Такая структура удобна для целостного восприятия членов прогрессии [3].

Пошаговая матричная структура прогрессии - последовательное размещение членов прогрессии в пространстве, при котором все уровни одного измерения параллельны друг другу, а первый ряд прогрессии перпендикулярен шагам прогрессии. Данная структура удобна для наглядного представления развития прогрессии по шагам.

Отображение пошаговой матричной структуры прогрессии на плоскости осуществляется путем трансформации отображения ортогональной матричной структуры данной прогрессии таким образом, что в строках таблицы размещаются уровни одного явного измерения, а в столбцах шаги прогрессии в пределах одного уровня неявных измерений.

Рассмотрим матричные структуры прогрессий на примере двумерной геометрической прогрессии $(b_{n,m})$, состоящей из 16-ти членов. Её ортогональная матричная структура представлена на рисунке 1.

$b_{1,1}$	$b_{2,1}$	$b_{3,1}$	$b_{4,1}$
$b_{1,2}$	$b_{2,2}$	$b_{3,2}$	$b_{4,2}$
$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{3,3}$	$b_{4,3}$
$b_{1,4}$	$b_{2,4}$	$b_{3,4}$	$b_{4,4}$

Рисунок 1 Ортогональная матричная структура двумерной геометрической прогрессии $(b_{n,m})$

На рисунке 2 показаны примеры уровней первого и второго измерений рассматриваемой прогрессии $(b_{n,m})$. Члены $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}, b_{1,4}$ образуют первый уровень первого измерения. Члены $b_{1,1}, b_{2,1}, b_{3,1}, b_{4,1}$ образуют первый уровень второго измерения. И так далее по аналогии.

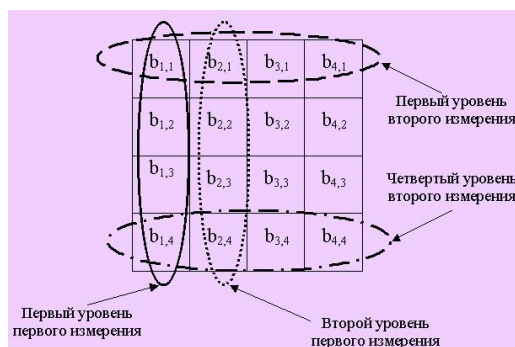


Рисунок 2 Уровни измерений двумерной геометрической прогрессии $(b_{n,m})$

На рисунке 3 показаны шаги двумерной геометрической прогрессии $(b_{n,m})$ при ортогональной матричной структуре.

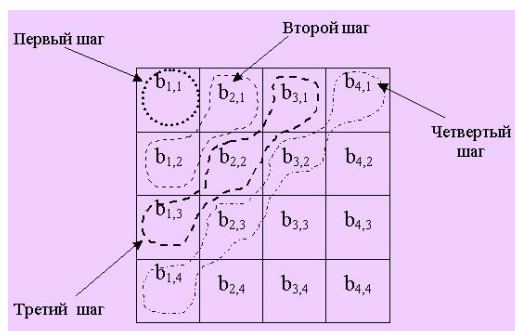


Рисунок 3 Шаги двумерной геометрической прогрессии $(b_{n,m})$

На рисунке 4 показаны шаги рассматриваемой прогрессии при пошаговой матричной структуре. Член $b_{1,1}$ является первым шагом данной прогрессии. Члены $b_{2,1}, b_{1,2}$ образуют второй шаг. Члены $b_{3,1}, b_{2,2}, b_{1,3}$ образуют третий шаг. И так далее по аналогии.

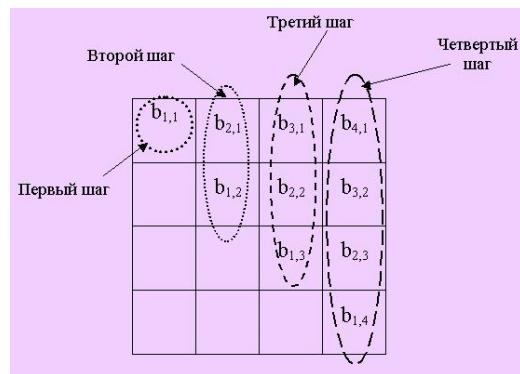


Рисунок 4 Пошаговая матричная структура двумерной геометрической прогрессии $(b_{n,m})$

Таким образом, в данной работе представлена концепция двумерных математических прогрессий, введен ряд терминологических понятий, а также представлены матричные структуры прогрессий, позволяющие упростить восприятие совокупности членов прогрессии при изучении их математических свойств.

Список литературы

- [1] Галкин С.В., Запасный В.В. Концепция двумерных математических прогрессий. Актуальные достижения европейской науки – 2011 г.: Материалы 7 международной научно-практической конференции, 17-25 июня 2011 г. - София: «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2011.-Том 37. -С. 45-48.
- [2] Микиша А.М. и Орлов В.Б. Толковый математический словарь. Основные термины. – М.: Русский язык, 1989. – 244 с.
- [3] Советский энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 1600 с.

УДК 519.68

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ (Ψ, Ω)

Н.Т. Данаев, Ф.С. Аменова

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби,
Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Аннотация. В данной работе рассматривается вопрос о сходимости решения двумерной операторно-разностной задачи для несжимаемой жидкости в переменных «функция тока, вихрь скорости» к решению дифференциальной задачи. Граничные значения для вихря скорости выбраны в виде формул Тома. Исследована единственность решения разностной задачи. Для погрешности решения получена оценка скорости сходимости.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса в переменных «функция тока, вихрь скорости» для несжимаемой жидкости, аппроксимация, сходимость.

В квадратной области $D = \{0 \leq x, y \leq 1\}$ рассмотрим двумерную систему стационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока, вихрь скорости» для несжимаемой вязкой жидкости следующего вида [1]:

$$\left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_x - \left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_y = \nu \Delta \Omega + f(x, y), \quad (1)$$

$$\Delta \Psi = \Omega, \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad (3)$$

где ν - коэффициент вязкости, \vec{n} - внешняя нормаль к границе области, Δ - двумерный оператор Лапласа, $f(x, y)$ - некоторая заданная функция, Ψ - функция тока, Ω - вихрь скорости.

Для аппроксимации уравнений (1), (2) в конечно-разностной области $D_h = \{(kh_1, mh_2), k, m \in \overline{1, N-1}\}$, где h_1 и h_2 - шаги сетки по направлениям x и y соответственно, рассмотрим схему на симметричном шаблоне вида:

$$L_h(\Omega) \Psi = \nu \Delta_h \Omega + f, \quad (4)$$

$$\Delta_h \Psi = \Omega, \quad (5)$$

где L_h - разностный оператор, соответствующий аппроксимации конвективных слагаемых уравнения (1), т.е.

$$L_h(\Omega) \Psi = \left(\Omega \Psi_y\right)_x - \left(\Omega \Psi_x\right)_y$$

здесь Ψ_x, Ψ_y - симметричные разностные производные по направлениям x и y соответственно.

Краевые условия для вихря скорости взяты в виде формул Тома [2]:

$$\begin{aligned} \Omega_{0m} &= \frac{2}{h_1} \Psi_{x,0m}, & \Omega_{Nm} &= -\frac{2}{h_1} \Psi_{\bar{x},Nm}, & k &= \overline{1, N-1}, \\ \Omega_{k0} &= \frac{2}{h_2} \Psi_{y,k0}, & \Omega_{kN} &= -\frac{2}{h_2} \Psi_{\bar{y},kN}, & k &= \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что решение дифференциальной задачи (1)-(3) обладает достаточной гладкостью, необходимой для нашего анализа.

Будем использовать следующие неравенства для разностного оператора L_h :

$$|(L_h(w)u, v)| \leq c_0 \|w\| \|\Delta_h u\| \|\Delta_h v\| \quad (7)$$

$$(L_h(w)u, u) = 0, \quad \forall w, u, v \in H_h(D_h) \quad (8)$$

где c_0 - равномерно ограниченная константа, H_h -пространство сеточных функций.

Для разностной задачи (4)-(6) справедлива следующая оценка:

$$\nu \|\Delta_h \Psi\| \leq \|f\|_{W_2^{0-2}(D_h)} \quad (9)$$

где $\|f\|_{W_2(D_h)}^{0-2} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|(f,u)\|}{\|\Delta_h u\|}$

Действительно, умножив соотношение (4) на Ψ и просуммировав по внутренним узлам сетки D_h , получим соотношение:

$$\nu \|\Delta_h \Psi\|^2 + \nu \left[\sum_{m=1}^{N-1} (\Omega_{0m} \Psi_{x,0m} - \Omega_{Nm} \Psi_{\bar{x},Nm}) h_1 + \sum_{k=1}^{N-1} (\Omega_{k0} \Psi_{y,k0} - \Omega_{kN} \Psi_{\bar{y},kN}) h_2 \right] + (f, \Psi) = 0.$$

Отсюда, учитывая краевые условия (6), имеем:

$$\nu \|\Delta_h \Psi\|^2 + \frac{2\nu}{h_1} \sum_{m=1}^{N-1} (|\Psi_{x,0m}|^2 + |\Psi_{\bar{x},Nm}|^2) h_1 + \frac{2\nu}{h_2} \sum_{k=1}^{N-1} (|\Psi_{y,k0}|^2 + |\Psi_{\bar{y},kN}|^2) h_2 \leq |(f, \Psi)|,$$

Далее, преобразуя правую часть последнего неравенства следующим образом

$$|(f, \Psi)| \leq \frac{|(f, \Psi)|}{\|\Delta_h \Psi\|} \|\Delta_h \Psi\| \leq \|\Delta_h \Psi\| \sup_{\Psi \neq 0} \frac{|(f, \Psi)|}{\|\Delta_h \Psi\|} = \|\Delta_h \Psi\| \|f\|_{W_2(D_h)}^{0-2}$$

получим оценку (9).

Теперь покажем, что при выполнении условия $c_0 \frac{\|f\|}{\nu^2} < 1$, где $c_0 > 0$ - равномерно ограниченная константа, задача (4)-(6) имеет единственное решение

Для этого, предположим, что задача (4)-(6) имеет два решения (Ψ_1, Ω_1) и (Ψ_2, Ω_2) . Для разностей $\Phi = \Psi_1 - \Psi_2$, $Z = \Omega_1 - \Omega_2$ имеем следующую разностную задачу:

$$L_h(\Omega_1) \Phi + L_h(Z) \Psi_2 = \nu \Delta_h Z \quad (10)$$

$$\Delta_h \Phi = Z \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\Phi = 0, Z_{0m} = \frac{2}{h_1} \Phi_{x,0m}, Z_{Nm} = -\frac{2}{h_1} \Phi_{\bar{x},Nm}. \quad (12)$$

Тогда имеем оценку

$$\begin{aligned} \nu \|\Delta_h \Psi\|^2 &\leq |(L_h(Z) \Psi_2, \Phi)| \leq c_0 \|\Delta_h \Phi\|^2 \|\Delta_h \Psi_2\| \\ (\nu - c_0 \|\Delta_h \Psi_2\|) \|\Delta_h \Phi\|^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, если $\nu - c_0 \|\Delta_h \Psi_2\| > 0$, $\|\Delta_h \Phi\|^2 = 0$, т.е. $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$ и рассматриваемая задача имеет единственное решение.

Используя вышеуказанные оценки, покажем, что решение разностной задачи (4)-(6) сходится к решению дифференциальной задачи (1)-(3).

Введем обозначения:

$$\Phi = \Psi_h - \Psi,$$

$$Z = \Omega_h - \Omega,$$

где Ψ, Ω - решения дифференциальной задачи (1)-(3), Ψ_h, Ω_h - решения разностной задачи (4)-(6) в узлах сетки D_h .

Тогда для погрешностей решения имеем следующие уравнения [3]:

$$L_h(\Omega_h) \Phi + L_h(Z) \Psi = \nu \Delta_h Z + R_h, \quad (13)$$

$$\Delta_h \Phi = Z + Q_h, \quad (14)$$

с краевыми условиями $\Phi|_{\partial D_h} = 0$,

$$\begin{aligned} Z_{0m} &= \frac{2}{h_1} \Phi_{x,0m} + r_{0m}, \quad Z_{Nm} = -\frac{2}{h_1} \Phi_{\bar{x},Nm} + r_{Nm}, \\ Z_{k0} &= \frac{2}{h_2} \Phi_{y,k0} + r_{k0}, \quad Z_{kN} = -\frac{2}{h_2} \Phi_{\bar{y},kN} + r_{kN}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $r_{0m} = O(h)$, $r_{Nm} = O(h)$, $r_{k0} = O(h)$, $r_{kN} = O(h)$, $R_h = O(h^2)$, $Q_h = O(h^2)$, $h = \max(h_1, h_2)$.

$$R_h = L_h(\Omega_h) \Psi_h - \nu \Delta_h \Omega_h + f(x, y), \quad (x, y) \in D_h,$$

$$Q_h = \Delta_h \Psi_h - \Omega_h,$$

R_h, Q_h - невязки разностных уравнений (4) и (5) соответственно.

Теперь умножим соотношение (13) на Φ и просуммируем по узлам сетки D_h . Тогда получим следующее основное энергетическое тождество:

$$(\nu \Delta_h Z, \Phi) + (R_h, \Omega) = (L_h(Z) \Psi, \Phi).$$

Учитывая соотношения (14), (15) и используя формулы суммирования по частям имеем:

$$\nu (Z, \Delta_h \Phi) + \nu \sum_{m=1}^{N-1} (Z_{0m} \Phi_{x,0m} - Z_{Nm} \Phi_{\bar{x},Nm}) h_2 + \nu \sum_{k=1}^{N-1} (Z_{k0} \Phi_{y,k0} - Z_{kN} \Phi_{\bar{y},kN}) h_1 + (R_h, \Phi) = (L_h(Z) \Psi, \Phi),$$

$$\nu (\Delta_h \Phi - Q_h, \Delta_h \Phi) + \nu \sum_{m=1}^{N-1} [(\frac{2}{h_1} \Phi_{x,0m} + r_{0m}) \Phi_{x,0m} - (-\frac{2}{h_1} \Phi_{\bar{x},Nm} + r_{Nm}) \Phi_{\bar{x},Nm}] h_2 +$$

$$+ \nu \sum_{k=1}^{N-1} [(\frac{2}{h_2} \Phi_{y,k0} + r_{k0}) \Phi_{y,k0} - (-\frac{2}{h_2} \Phi_{\bar{y},kN} + r_{kN}) \Phi_{\bar{y},kN}] h_1 + (R_h, \Phi) = (L_h(Z) \Psi, \Phi),$$

После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} &\nu \|\Delta_h \Phi\|^2 + \frac{2\nu}{h_1} \sum_{m=1}^{N-1} (|\Phi_{x,0m}|^2 + |\Phi_{\bar{x},Nm}|^2) h_2 + \frac{2\nu}{h_2} \sum_{k=1}^{N-1} (|\Phi_{y,k0}|^2 + |\Phi_{\bar{y},kN}|^2) h_1 = \\ &= \nu |(Q_h, \Delta_h \Phi)| + \nu \sum_{m=1}^{N-1} (|\Phi_{x,0m} r_{0m}|^2 + |\Phi_{\bar{x},Nm} r_{Nm}|^2) h_2 + \nu \sum_{k=1}^{N-1} (|\Phi_{y,k0} r_{k0}|^2 + |\Phi_{\bar{y},kN} r_{kN}|^2) h_1 + \\ &\quad + |(R_h, \Phi)| + |(L_h(Z) \Psi, \Phi)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Слагаемые энергетического тождества (16) оцениваются следующим образом:

$$|(Q_h, \Delta_h \Phi)| \leq \|Q_h\| \|\Delta_h \Phi\| \leq \varepsilon_1 \|\Delta_h \Phi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} \|Q_h\|^2,$$

$$|(R_h, \Phi)| \leq \frac{|(R_h, \Phi)|}{\|\Delta_h \Phi\|} \|\Delta_h \Phi\| \leq \|R_h\|_{W_2(D_h)}^{0,-2} \|\Delta_h \Phi\| \leq \varepsilon_2 \|\Delta_h \Phi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|R_h\|_{W_2(D_h)}^2,$$

$$\begin{aligned} |(L_h(Z) \Psi, \Phi)| &\leq c_0 \|Z\| \|\Delta_h \Psi\| \|\Delta_h \Phi\| \leq c_0 (\|\Delta_h \Phi\| + \|Q_h\|) \|\Delta_h \Psi\| \|\Delta_h \Phi\| = \\ &= c_0 \|\Delta_h \Psi\| \left(\|\Delta_h \Phi\|^2 + \|Q_h\| \|\Delta_h \Phi\| \right) \leq c_0 \|\Delta_h \Psi\| \left[(1 + \varepsilon_3) \|\Delta_h \Phi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3} \|Q_h\|^2 \right], \end{aligned}$$

$$\nu \sum_{m=1}^{N-1} |\Phi_{x,0m} r_{0m}| h_2 = \frac{\nu}{\sqrt{h_1}} \sum_{m=1}^{N-1} |\Phi_{x,0m} r_{0m}| h_2 \sqrt{h_1} \leq \nu \sum_{m=1}^{N-1} \left(\varepsilon_4 \frac{|\Phi_{x,0m}|^2}{h_1} + \frac{1}{4\varepsilon_4} h_1 |r_{0m}|^2 \right) h_2.$$

Используя полученные выше неравенства, оценим тождество (16):

$$\begin{aligned}
(\nu - \nu\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - c_0(1 + \varepsilon_3) \|\Delta_h \Psi\|) \|\Delta_h \Phi\|^2 &\leq \frac{\nu}{4\varepsilon_1} \|Q_h\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|R_h\|^2 + c_0 \frac{\|\Delta_h \Psi\|}{4\varepsilon_3} \|Q_h\|^2 + \\
+ \nu \frac{1}{4\varepsilon_4} \sum_{m=1}^{N-1} (|r_{0m}|^2 + |r_{Nm}|^2) h_2 &+ \nu \frac{h_2}{4\varepsilon_5} \sum_{k=1}^{N-1} (|r_{k0}|^2 + |r_{kN}|^2) h_1.
\end{aligned}$$

Если предположить, что

$$\nu - \nu\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - c_0(1 + \varepsilon_3) \|\Delta_h \Psi\| \geq \delta_0 > 0,$$

где δ_0 некоторая константа, то

$$\delta_0 \|\Delta_h \Phi\|^2 \leq Mh^3,$$

где M равномерно ограниченная константа, следовательно $\|\Delta_h \Phi\| \leq c_0 h^{\frac{3}{2}}$.

Список литературы

- [1] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980.- 616 с.
- [2] Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике.-М.: Энергия, 1964.-208 с.
- [3] Данаев Н.Т., Смагулов Ш.С. Об одной методике численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных // Моделирование в механике. - Новосибирск, 1991, т.5(22), №4.-С. 38-47.

УДК 517.9

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА

Н.Т. Данаев, Ж.Б. Байтуленов

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби

Как известно, разработка и обоснование модификации метода фиктивных областей, обладающих лучшей скоростью сходимости для нелинейных моделей математической физики является актуальным вопросом. В этой работе один из таких модификаций, разработанный Смагуловым Ш.С.[1], с заданными граничными условиями для функции давления, впервые обоснован для нестационарной нелинейной модели Буссинеска движения несжимаемой неоднородной жидкости.

В данной работе рассматривается модификация метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для нестационарной модели Буссинеска течения неоднородной несжимаемой жидкости. Область трехмерная ограниченная. Показаны существование и сходимость обобщенного и сильного решений вспомогательной задачи к соответствующим решениям исходной задачи. Выведены равномерные оценки решений.

Итак, рассмотрим одну модификацию метода фиктивных областей с заданным граничным условием для давления для модели Буссинеска:

$$v_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon = \operatorname{div}(K^\varepsilon(v^\varepsilon)\nabla v^\varepsilon) - \nabla p^\varepsilon + q\rho^\varepsilon, \quad \operatorname{div}v^\varepsilon = 0, \quad (1)$$

$$\rho_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla)\rho^\varepsilon = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times D, \quad D \subset R^3 \quad (2)$$

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0(x), \quad v^\varepsilon \cdot \tau|_{S_1} = 0, \quad p^\varepsilon|_{S_1} = 0, \quad \rho^\varepsilon|_{t=0} = \rho_0(x) \quad (3)$$

$$[v^\varepsilon]_S = 0 \quad \left[K^\varepsilon(v^\varepsilon) \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} \right]_S = 0 - \text{условия согласования на границе исходной области} \quad (4)$$

где $K^\varepsilon(v^\varepsilon) = \nu$, $x \in \Omega$; $K^\varepsilon(v^\varepsilon) = \nu/(\varepsilon\|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta)$, $x \in D_1$, $D_1 = D/\Omega$, $0 < \beta < 1$, Ω - исходная область движения жидкости, D - фиктивная область, S - граница Ω , S_1 - граница D , $S \cap S_1 = \emptyset$.

Теорема 1. Пусть $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M$, $v_0(x) \in J^0(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение вспомогательной задачи (1)-(4), для него имеют оценки:

$$0 < m \leq \rho^\varepsilon(x) \leq M < \infty, \quad \|v^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))}^2 + \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta \leq C < \infty$$

а при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно сходится к обобщенному решению исходной задачи(модели Буссинеска).

Теорема 2. Пусть $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M$, $v_0(x) \in J^{01}(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно сильное решение вспомогательной задачи (1)-(4), а также оно сходится к сильному решению исходной задачи(модели Буссинеска) со скоростью сходимости:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leq C\varepsilon^{\frac{1+\beta}{4(1-\beta)}}$$

Список литературы

- [1] Смагулов Ш.С., Сейлханова Р.Б., Куттыкожаева Ш.Н., Есекеева М. Суперсходимость метода фиктивных областей // Совместный выпуск по материалам международной конференции "Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании"(18-20 сентября). -Новосибирск-Алматы, 2002. -№4(32). - С.135-140.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

М.Т. Дженалиев, К.Б. Иманбердиев, К.А. Айменова

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК
Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. In the paper considers the ill-posed boundary problem for the biharmonic equation in two-dimensional domain. For her study is entered an additional condition on the solution. This

enables us to reduce the considered ill-posed boundary value problem to an optimization problem. In the paper by applying the methods of optimal control theory for linear-quadratic optimization problems are set optimality conditions. A given algorithm for solving the optimization problem.

Keywords: ill-posed problem, biharmonic equation, optimal control.

Аңдатпа. Ұсынылған жұмыста екіөлшемді тікбұрышты обьект бигармоникалық теңдеу үшін корректі емес шекаралық есеп қарастырылған. Есепті зерттеу үшін шешімге белгілі бір қосымша шарт енгізілген. Бұл біз қарастырып отырған корректі емес шекаралық есепті тиімділеу есебіне келтіруге мүмкіндік береді. Мақалада тиімді басқару теориясы әдістерін қолдану арқылы сызықты-квадраттық тиімділеу есептері үшін тиімділік шарттары алынған. Тиімділеу есебін шешу алгоритмі келтірілген.

Кілттік сөздер: корректі емес есеп, бигармоникалық теңдеу, тиімді басқару.

Аннотация. В данной работе рассматривается некорректная граничная задача для бигармонического уравнения в двумерной прямоугольной области. Для ее исследования вводится некоторое дополнительное условие на решение. Это позволяет свести рассматриваемую нами некорректную граничную задачу к задаче оптимизации. В работе с помощью применения методов теории оптимального управления для линейно-квадратичных задач оптимизации установлены условия оптимальности. Приведена алгоритм решения оптимизационной задачи.

Ключевые слова: некорректная задача, бигармоническое уравнение, оптимальное управление.

В последнее время среди специалистов по уравнениям математической физики значительно возрос интерес к задачам, не являющимся корректными по Адамару Ж. [1]. В связи с некорректными задачами можно отметить классические работы Адамару Ж. [1], Тихонова А.Н. [2], Лаврентьева М.М. [3] и много других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

В данной работе изучается некорректная задача [1–7, 11] для бигармонического уравнения в двумерной прямоугольной области. Критерий корректности однородной смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона в прямоугольной области был установлен в работе Кальменова Т.Ш. и Искаковой У.А. [6]. В работе [7] рассматривается некорректная задача для уравнения теплопроводности. Общий метод регуляризации построения приближенного решения некорректных задач математической физики был предложен Тихоновым А.Н.[2]. В работе R. Lattes, J.-L. Lions[4] для регуляризации некорректно поставленных краевых задач предлагается метод квазиобращения. Особенности и вопросы регуляризации задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучают Melnikova I.V. и Anufrieva U.A.[8].

Постановка задачи. В области $Q = \{x, y | 0 < x < 2\pi, 0 < y < 1\}$ рассматривается граничная задача

$$\Delta^2 u = f, \quad \{x, y\} \in Q; \quad (1)$$

$$u(0, y) = u_x(0, y) = 0, \quad u(2\pi, y) = u_x(2\pi, y) = 0; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{yy}(x, 0) = 0, \quad u_{yy}(x, 1) = 0, \quad (3)$$

с дополнительным условием

$$u(x, 1) \in \mathcal{U}_g - \text{выпуклое замкнутое множество из } H_0^{3/2}(0, 2\pi). \quad (4)$$

Предполагается, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяет следующим условиям

$$f \in (\tilde{H}^2(Q))', \varphi_1 \in H_0^{1/2}(0, 2\pi), \psi \in H_0^{3/2}(0, 2\pi) \quad (5)$$

здесь

$$\tilde{H}^2(Q) = \left\{ u \mid u \in L_2(0, 1; H_0^2(0, 2\pi)), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L_2(Q) \right\}$$

В книге R. Lattes, J.-L. Lions [4] указывается, что задача (1)–(3) является некорректно поставленной в пространстве $L_2(Q)$.

Задача оптимизации и ее регуляризация. Для исследования поставленной задачи (1)–(4) сформулируем в соответствие к ней следующую оптимизационную задачу:

$$\Delta^2 u = f(x, y); \quad (6)$$

$$u(0, y) = u_x(0, y) = u(2\pi, y) = u_x(2\pi, y) = 0; \quad (7)$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, 1) = \psi(x), u_{yy}(x, 0) = 0, u_{yy}(x, 1) = 0, \quad (8)$$

с функционалом оптимальности:

$$\mathcal{J}(u, \psi) = \int_0^{2\pi} |u_y(x, 0) - \varphi_1(x)|^2 dx \rightarrow \min_{\psi \in \mathcal{U}_g}. \quad (9)$$

В оптимизационной задаче (6)–(9) функция $\psi(x)$ играет роль функции управления. Кроме того, далее в работе будет показано, что граничная задача (6)–(8) поставлена корректно, т.е. однозначно разрешима для любых заданных функций $\psi \in \mathcal{U}_g \subset H_0^{3/2}(0, 2\pi)$, $f \in (\tilde{H}^2(Q))'$.

Как известно, из теории оптимального управления задача оптимизации (6)–(9) также является некорректной. Для изучения поставленной нами задачи будем применять стабилизатор Тихонова [2].

Эффективным инструментом является метод регуляризации. В нашем случае

$$\alpha \int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2 dx, \quad (\alpha > 0),$$

будет служить стабилизатором.

Рассмотрим следующую регуляризованную задачу оптимизации:

$$\Delta^2 u = f(x, y); \quad (10)$$

$$u(0, y) = u_x(0, y) = u(2\pi, y) = u_x(2\pi, y) = 0; \quad (11)$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, 1) = \psi(x), u_{yy}(x, 0) = 0, u_{yy}(x, 1) = 0, \quad (12)$$

$$\mathcal{J}_\alpha(u, \psi) = \int_0^{2\pi} |u_y(x, 0) - \varphi_1(x)|^2 dx + \alpha \int_0^{2\pi} |\psi(x)|^2 dx \rightarrow \min_{\psi \in \mathcal{U}_g}. \quad (13)$$

Таким образом, мы получили регуляризованную оптимизационную задачу (10)–(13). Она, благодаря наличию стабилизатора, стала строго выпуклой, т.е. корректной задачей оптимизации. Поэтому для каждого значения $\alpha > 0$ эта задача имеет единственное оптимальное решение, доставляющее минимальное значение минимизируемому функционалу (13). Однако, не исключается тот факт, что минимальное значение функционала (13) может быть строго больше нуля.

Для задачи оптимального управления (10)–(13) установим условия оптимальности. Введем понятие оптимального управления.

Определение. Элемент $\bar{\psi} \in H_0^{3/2}(0, 2\pi)$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{J}_\alpha(\bar{\psi}) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}_g} \mathcal{J}_\alpha(\psi),$$

называется оптимальным управлением.

Введем следующие обозначения: $u(x, y; \psi)$ – есть решение задачи (10)–(12), соответствующее заданному управлению $\psi(x) \in \mathcal{U}_g$;

$u(x, y; 0)$ – соответствует решению задачи (10)–(12) при $\psi(x) \equiv 0$;

$$\pi(\psi_1, \psi_2) = \int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi_1) - u_y(x, 0; 0)] \cdot [u_y(x, 0; \psi_2) - u_y(x, 0; 0)] dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \psi_1(x) \cdot \psi_2(x) dx;$$

$$L(\psi_1) = \int_0^{2\pi} [\varphi_1(x) - u_y(x, 0; 0)] [u_y(x, 0; \psi_1) - u_y(x, 0; 0)] dx.$$

Здесь $\pi(\psi_1, \psi_2)$ – билинейный непрерывный функционал на \mathcal{U}_g , а $L(\psi_1)$ – линейный непрерывный функционал на допустимом множестве управлений \mathcal{U}_g , так как ниже будет показано, что решение $u(x, y; \psi)$ задачи (10)–(12) не только непрерывно, но является непрерывно дифференцируемым по управлению ψ . Используя эти обозначения, функционал (13) можно переписать в виде:

$$\mathcal{J}_\alpha(\psi) = \pi(\psi, \psi) - 2L(\psi) + \int_0^{2\pi} |u_y(x, 0; 0) - \varphi_1(x)|^2 dx.$$

Существование решения регуляризованной задачи и вариационное неравенство.

Справедлива следующая теорема [7]:

Теорема 1. Так как $\pi(\psi, \psi)$ – квадратичный непрерывный симметричный функционал на \mathcal{U}_g и удовлетворяет условию

$$\pi(\psi, \psi) \geq c \|\psi\|^2, \quad (c = \text{const} > 0), \quad (14)$$

то для задачи (10)–(13) $\exists! \bar{\psi} \in \mathcal{U}_g$:

$$\mathcal{J}_\alpha(\bar{\psi}) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}_g} \mathcal{J}_\alpha(\psi).$$

Утверждение 1 (вариационное неравенство). *Функция $\bar{\psi} \in \mathcal{U}_g$ является функцией оптимального управления, тогда и только тогда, выполняется следующее неравенство:*

$$\langle \mathcal{J}_{\alpha\psi}(\bar{\psi}), \psi - \bar{\psi} \rangle \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_g,$$

т.е. выполняется

$$\int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi) - \varphi_1] \cdot u_{y\psi}(x, 0; \bar{\psi}) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \bar{\psi}(x) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_g. \quad (15)$$

Теперь проведем необходимые для дальнейшего преобразования вариационного неравенства (15). Для этого граничную задачу (10)–(12) запишем операторном виде: $\mathfrak{A}u = \mathfrak{F} \triangleq \{f, \psi\}$. Так как граничная задача (10)–(12) для любых допустимых управлений однозначно разрешима, то ее решению $u(x, y; \psi)$, используя ее операторную запись, можно придать следующий вид: $u(x, y; \psi) = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1^{-1}f + \mathfrak{A}_2^{-1}\psi$.

Далее, берем производную от этого решения по направлению $\psi - \bar{\psi}$. Будем иметь:

$$u_{\psi}(x, 0; \bar{\psi}) \cdot [\psi - \bar{\psi}] = \mathfrak{A}^{-1}(\psi - \bar{\psi}) = \mathfrak{A}_1^{-1}f + \mathfrak{A}_2^{-1}\psi - [\mathfrak{A}_1^{-1}f + \mathfrak{A}_2^{-1}\bar{\psi}] = u(x, y; \psi) - u(x, y; \bar{\psi}).$$

Таким образом, неравенство (15) принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} [u_y(x, 0; \psi) - \varphi_1] \cdot [u_y(x, 0; \psi) - u_y(x, 0; \bar{\psi})] dx + \alpha \cdot \int_0^{2\pi} \bar{\psi}(x)[\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_g. \quad (16)$$

Сопряженная граничная задача. Для дальнейшего изучения регуляризованной оптимизационной задачи (10)–(13) введем сопряженную граничную задачу:

$$\begin{cases} \Delta^2 w = 0; \\ w(0, y) = w_x(0, y) = 0, \quad w(2\pi, y) = w_x(2\pi, y) = 0; \\ w(x, 0) = 0; \quad w(x, 1) = 0; \\ w_{yy}(x, 0) = u_y(x, 0; \bar{\psi}) - \varphi_1; \quad w_{yy}(x, 1) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Условия оптимальности. Так как

$$\int_0^{2\pi} w_{xxy}(x, 1) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx + \int_0^{2\pi} \tilde{u}_y(x, 0) [u_y(x, 0; \bar{\psi}) - \varphi_1] dx + \int_0^{2\pi} w_{yyy}(x, 1) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx = 0, \quad (18)$$

то из соотношений (18) и (16) получаем окончательно к искомому вариационному неравенству:

$$\int_0^{2\pi} [-w_{xxy}(x, 1) - w_{yyy}(x, 1) + \alpha\bar{\psi}(x)][\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}_g. \quad (19)$$

Таким образом, на основе утверждения 1 мы установили условия оптимальности, которые можно сформулировать в виде следующего утверждения:

Утверждение 2. Чтобы элемент $\bar{\psi}(x)$ был оптимальным решением в задаче (10)–(13), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (10)–(12), (17) и вариационному неравенству (19).

Априорная оценка для граничной задачи (10)–(12) [10]. Далее уравнения (10) умножая скалярно на u в $L_2(Q)$ находим

$$-\int_0^{2\pi} u_{yx}(x, 1)\psi'(x) dx + \int_0^{2\pi} u_{yyy}(x, 1)\psi(x) dx + \int_Q |\Delta u|^2 dQ = \int_Q f u dQ. \quad (20)$$

Класс функции такой:

$$\tilde{H}^2(Q) = \left\{ u \mid u \in L_2(0, 1; H_0^2(0, 2\pi)), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L_2(Q) \right\} \subset \left\{ C([0, 1]; H_0^{3/2}(0, 2\pi)) \cap C^1([0, 1]; H_0^{1/2}(0, 2\pi)) \right\}; \quad (21)$$

Согласно теореме о следах запишем

$$H_0^2(Q) \subset \tilde{H}^2(Q) \subset H^2(Q), \quad (22)$$

$$H_0^2(Q) = \{u \mid u \in L_2(0, 1; H_0^2(0, 2\pi)); u \in L_2(0, 2\pi; H_0^2(0, 1))\},$$

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q)} \asymp \|u\|_{\tilde{H}^2(Q)}. \quad (23)$$

Эквивалентность в (23) играет важную роль для получения априорную оценку.

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L_2(\partial Q)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{H^{1/2}(\partial Q)} \leq C_1 \|u\|_{\tilde{H}^2(Q)}. \quad (24)$$

Используя неравенство (24) получаем неравенства Шварца, т.е. обобщенную неравенству Гельдера.

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{L_2(Q)}^2 &\leq \|u_{yx}(x, 1)\|_{H_0^{-1/2}(0, 2\pi)} \cdot \|\psi'(x)\|_{H_0^{1/2}(0, 2\pi)} + \|u_{yyy}(x, 1)\|_{H^{-3/2}(0, 2\pi)} \cdot \|\psi\|_{H_0^{3/2}(0, 2\pi)} + \\ &+ \|f\|_{(\tilde{H}^2(Q))'} \cdot \|u\|_{\tilde{H}^2(Q)} \leq C_2 \|u\|_{\tilde{H}^2(Q)} \cdot \|\psi\|_{H_0^{3/2}(0, 2\pi)} + \|f\|_{(\tilde{H}^2(Q))'} \cdot \|u\|_{\tilde{H}^2(Q)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем априорную оценку для граничной задачи (10)–(12):

$$\|u\|_{\tilde{H}^2(Q)} \leq C \left[\|f\|_{(\tilde{H}^2(Q))'} + \|\psi\|_{H_0^{3/2}(0, 2\pi)} \right]. \quad (25)$$

Априорная оценка для сопряженной задачи (17) [10]. Умножая уравнение в (17) скалярно на w в $L_2(Q)$ находим

$$\int_Q |\Delta w|^2 dQ = - \int_0^{2\pi} [u_y(x, 0) - \varphi_1(x)] \cdot w_y(x, 0) dx, \quad w \in \tilde{H}^2(Q).$$

Повторяя процесс, получаем априорную оценку для сопряженной задачи (17):

$$\|w\|_{\tilde{H}^2(Q)} \leq C \left[\|f\|_{(\tilde{H}^2(Q))'} + \|\psi\|_{H_0^{3/2}(0, 2\pi)} + \|\varphi_1\|_{H_0^{1/2}(0, 2\pi)} \right]. \quad (26)$$

Теоремы существования и единственности [10]. Из априорных оценок (25)–(26) непосредственно следуют:

Теорема 2 *Граничная задача (10)–(12) при любых заданных $f \in (\tilde{H}^2(Q))'$, $\psi \in H_0^{3/2}(0, 2\pi)$ имеет единственное решение $u(x, y) \in \tilde{H}^2(Q)$.*

Теорема 3 *Сопряженная граничная задача (17) при любых заданных $f \in (\tilde{H}^2(Q))'$, $\psi \in H_0^{3/2}(0, 2\pi)$, $\varphi_1(x) \in H_0^{1/2}(0, 2\pi)$ имеет единственное решение $w(x, y) \in \tilde{H}^2(Q)$.*

К решению граничных задач (10)–(12) и (17).

Обратная задача для решения (10)–(12). Из (27)–(29) найти неизвестные функции

$$\{u(x, y), v(x, y), \varphi_2(y), \varphi_3(y)\},$$

$$\begin{cases} \Delta v = f, v|_{x=0} = \varphi_2(y), v|_{x=2\pi} = \varphi_3(y), \\ v|_{y=0} = 0, v|_{y=1} = \psi''(x), \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \Delta u = v, u|_{x=0} = 0, u|_{x=2\pi} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=1} = \psi(x), \end{cases} \quad (28)$$

дополнительные условия

$$u_x(0, y) = 0, u_x(2\pi, y) = 0. \quad (29)$$

Обратная задача для решения (17). Из (30)–(32) найти неизвестные функции

$$\{w(x, y), \omega(x, y), \varphi_4(y), \varphi_5(y)\},$$

$$\begin{cases} \Delta \omega = 0, \omega|_{x=0} = \varphi_4(y), \omega|_{x=2\pi} = \varphi_5(y), \\ \omega|_{y=0} = u_{y|x=0} - \varphi_1(x), \omega|_{y=1} = 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \Delta w = \omega, w|_{x=0} = 0, w|_{x=2\pi} = 0, \\ w|_{y=0} = 0, w|_{y=1} = 0, \end{cases} \quad (31)$$

дополнительные условия

$$w_x(0, y) = 0, w_x(2\pi, y) = 0. \quad (32)$$

Алгоритм решения оптимизационной задачи (10)–(12) и (13):

1. Задаем начальное приближение управления $\psi_1(x)$;
2. Решая обратные задачи (27)–(29) и (30)–(32), находим $\{u_1(x, y), v_1(x, y), \varphi_{2,1}(y), \varphi_{3,1}(y)\}$ и $\{w_1(x, y), \omega_1(x, y), \varphi_{4,1}(y), \varphi_{5,1}(y)\}$;
3. Определяем значение функционала $\mathcal{J}_\alpha[u_1(x, y), \psi_1(x)]$;
4. Из условия оптимальности (19) определяем новое приближение управления $\psi_2(x)$;
5. Переходим к пункту 2, и так далее.

Список литературы

- [1] Задача Коши для линейных уравнений с частными производными. Адамар Ж. / М.: Наука. 1978.
- [2] Методы решения некорректных задач. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. / М.: Наука. 1979.

- [3] О задаче Коши для уравнения Лапласа. Лаврентьев М.М. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. №20(6). с. 819–842.
- [4] Methode de quasireversibilite et applications. Lattes R., Lions J.-L. / Paris: Dunod. 1967.
- [5] Обратные и некорректные задачи. Кабанихин С.И. / Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009.
- [6] Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. // Докл. РАН. 2007. №414(2). с. 168–171.
- [7] Дженалиев М.Т., Кальменов Т.Ш., Рамазанов М.И. / Материалы "Совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям". Алматы: КазНУ им.аль-Фараби. 2009. с. 162–167.
- [8] Melnikova I.V., Anufrieva U.A. // Journal of Mathematical Sciences. 2008. №148(4). с. 481–632.
- [9] Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Лионс Ж.-Л. / М.: Мир. 1972.
- [10] Неоднородные граничные задачи и их приложения. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. / М.: Наука. 1971.
- [11] Уравнения математической физики. Соболев С.Л. / М.: Наука. 1966.

УДК 512

О БАЗИСТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИИ КОРРЕКТНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А.А. Елеуов, К.Т. Назарбекова

Казахский национальный университет имени Аль-Фараби

Аннотация. Система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса со скобками в пространстве $L_2 [0, b]$. В частности, если краевые условия усиленно-регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в $L_2 [0, b]$.

Ключевые слова: базис Рисса

В работе [1], изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциями дифференциального оператора L порожденного в функциональном пространстве $L_2 [0, b]$ при $b \geq \infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly = \varrho(y) \equiv y^n(x) + p_{n-2}(x)y^{n-2}(x) + \dots + p_0(x)y(x) \quad (1)$$

с единственным ограничением (1) резольвентное множество оператора L непустое множество. Не умаляя общности, полагаем, что комплексное число 0 принадлежит резольвентному множеству оператора L . Коэффициенты выражения $\varrho(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$p_0(x) \in C[0, b], p_1(x) \in C^1[0, b], \dots, p_{n-2}(x) \in C^{n-2}[0, b] \tag{2}$$

Согласно известной теореме М. Отелбаева [2] область определения такого оператора описывается с помощью набора n функций $\sigma_1(\cdot), \dots, \sigma_n(\cdot)$ из пространства $L_2[0, b]$

$$D(L) = \{y(x) \in W_2^n[0, b] : y^\nu(0) = \langle \varrho(y) \rangle; \sigma_{\nu+1} > 0, \nu = 1 \dots n - 1\} \tag{3}$$

где $W_2^n[0, b]$ -пространство С.Л. Соболева, $\langle f, q \rangle$ - скалярное произведение пространства $L_2[0, b]$. Граничные функции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ выбраны из пространства $L_2[0, b]$ таким образом, чтобы граничные формы $U_1(y)$ приняла вид

$$U_j(y) = V_j(y) + \langle \varrho(y); \sigma_j^1(x) \rangle \tag{4}$$

где

$$V_j(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{jk}y^k(0) + \beta_{jk}y^k(b)) \tag{5}$$

Для этого достаточно чтобы $\sigma_1(x)$ имело представление

$$\sigma_j(x) = \sigma_j^0(x) + \sigma_j^1(x) \tag{6}$$

где носитель σ_j^1 лежит строго внутри $[0, b]$, $\sigma_j^0(\cdot)$ -решение однородного уравнения $\varrho^*(y) = 0$. Соответствующее формально сопряженному дифференциальному выражению $\varrho(y) = 0$. В этом случае коэффициенты β_{jk} представляют значения функции $\sigma_j^0(x)$ и её производных в точке $x=0$, либо отличается от них на $+1$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат доклада. Теорема 1 Система собственных и присоединенных функций оператора L с регулярными краевыми условиями (4), (6) образует базис Рисса со скобками в пространстве $L_2[0, b]$. В частности, если краевые условия усиленно-регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в $L_2[0, b]$.

Список литературы

- [1] Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент. Галым. 1996. 270 с.
- [2] Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе – Самарского. Докл.АН СССР.1982.Т.265, с. 815-819

UDC 519.62

ON THE CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN ONE-DIMENSIONAL CASE

B.T. Zhumagulov, A.T. Mukhambetzhanov, A.S. Iskakova, B.S. Abilmazhinova

Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan,
L.N. Gumilyov Eurasian National University,
T. Ryskulov Kazakh Economic University

Abstract. In this paper the convergence of the proposed iterative methods was proved. The bending of a beam, which describes the differential equation of the fourth order was considered as an example. The results are compared with existing well known methods.

Keywords: integral operator, variational method.

Assume Ω is the bounded domain belonging R with smooth boundary $\partial\Omega$. We consider the following problem:

$$\begin{aligned} Lu = -u'' + q(x)u &= f(x), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $f(x) \in L_2(\Omega)$.

We construct solution of the problem using the method presented in [1]. According to [1], we introduce an operator A_0 :

$$\begin{aligned} -u'' &= v, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

or in the operator form it will evolve the following form: $A_0u = v$, where $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ is the operator uniquely solvable in the space $L_2(\Omega)$ with given boundary conditions. Basing on these transformations the equation (1) has the form as follows:

$$Mv = v + q(x)A_0^{-1}v = f(x). \tag{1'}$$

If we v found then u is given by $u = A_0^{-1}v$. We introduce the following functional:

$$J(\omega) = \int_{\Omega} |\omega + q(x)(A_0^{-1})(x) - f(x)|^2 dx. \tag{2}$$

If $\omega = v$, where v is solution (1'), we have $J(\omega) = 0$.

We suppose that equation (1') has an unique solution for any right-hand part $f(x) \in L_2(\Omega)$. Consequently from Banach theorem it follows that

$$\|M^{-1}\| = \|M^{1*}\| \leq c < \infty, \tag{3}$$

where $M = E + q(x)A_0^{-1}$. No we construct an iterative process.

Let ω_n is the n -th is an approximate of solution $J(\omega_n) = 0$. We suppose that $\omega_{n+1} = \omega_n - \varepsilon\omega$, $\|M\|^{-2} \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Therefore:

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) - 2\varepsilon\langle M^*(M\omega_n - f), \omega_n \rangle + \varepsilon^2\|M\omega\|^2.$$

Here we have used the the linearity of the integral operator A_0 .

Let us represent ω as: $\omega = M^*(M\omega_n - f)$. Therefore

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) - 2\varepsilon^2\|\omega\|^2 + \varepsilon^2\|M\omega\|^2 \leq J(\omega_n) - [2\varepsilon - \|M\|^2\varepsilon^2] \|\omega\|^2.$$

According to condition (2) we have

$$\sqrt{\omega_n} = \|M\omega_n - f\| = \|M^{*-1}M^*(M\omega_n - f)\| = \|M^{-1}\omega\| \leq c\|\omega\|. \tag{4}$$

Therefore, from (4) we can produce the following inequality:

$$J(\omega_n) \leq J(\omega_n) - [2\varepsilon\|M\|^2\varepsilon^2] \frac{J(\omega_n)}{c^2} = J(\omega_n) \left[1 - \frac{2\varepsilon - \|M\|^2\varepsilon^2}{c^2} \right].$$

Assume that $\varepsilon = d^{-2} \leq \|M\|^{-2}$, then we have

$$J(\omega_{n+1}) \leq J(\omega_n) \left(1 - \frac{1}{d^2c^2} \right) \tag{5}$$

for the difference $\omega_{n+1} - \omega_n$ we have

$$\|\omega_{n+1} - \omega_n\| = \varepsilon\|\omega\| = \varepsilon\|M^*\|\sqrt{J(\omega_n)} \leq \sqrt{J(\omega_n)}.$$

This inequality and the inequality (5) give us the following result:

Theorem 1. *Let for any $f(x) \in L_2(\Omega)$ equation (1) has the unique solution $u \in W_2^2(\Omega)$, and the operator M , defined by (1'), satisfies the conditions $\|M^{-1}\| \leq c$, $\|M\| \leq d$, and following inequality takes place $cd > 1$. Therefore, for any $\omega_0 \in L_2(\Omega)$ sequence ω_n , determined by the formula*

$$\omega_{n+1} = \omega_n - d^{-2}M^*(M\omega_n - f)$$

converges to the solution ω of equation (1') and following estimates takes place

$$J(\omega_n) \leq \theta^n J(\omega_0), \|\omega_{n+1} - \omega_0\| \leq c\theta^{\frac{n}{2}} \sqrt{J(\omega_0)},$$

where $\theta = 1 - \frac{1}{d^2c^2}$ and the function $u = A^{-1}\omega$ is a solution of (1)

Now we consider a continuous analogue of the discrete case described above.

Assuming ω depends on the parameter $t \in (0, \infty)$, and we have a differentiate $J(\omega)$ with respect to t :

$$\frac{\partial J(\omega)}{\partial t} = 2\langle \omega_t, M^*(M\omega - f) \rangle. \tag{6}$$

Let us choose ω_t from the following equation

$$\omega_t = -\frac{1}{2}M^*(M\omega - f). \tag{7}$$

Then from (6) it follows that $J'_t(\omega) = -\|\omega_t\|^2 = -\|M^*(M\omega - f)\|^2$. Basing on this equation and having limited M^{*-1} we define $J(\omega)$ and M . Now we have $-J_t(\omega) \geq c^{-2}J(\omega)$. We integrate both parts of the inequality by t : $\ln j \leq -c^{-2}t + \ln c_0$, that is $J \leq -ce^{-c^{-2}}$. when ω from (7) $J(\omega)$ decays exponentially. For the solution of (7) we have

$$\omega(t) = e^{-B(t-t_0)} + B^{-1}(E - e^{-B(t-t_0)})\tilde{f}, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (8)$$

where $B = M^*\frac{M}{2}$, $\tilde{f} = M^*f$.

The last formula gives us an exponential convergence of $\omega(t)$ to the limit under $t \rightarrow \infty$. Although abstract formula (8) is written out explicitly, the calculation of values $\omega(t)$ by (8) is not less harder to solve than the original problem, that is there can be a countable set of solutions. However, we do not need all of the values $\omega(t)$ for $t \in (0, \infty)$, it is enough to know its limits under $t \rightarrow \infty$.

Direct transition to the limit in (8) leads us to the original problem, since $\lim_{t \rightarrow \infty} = B^{-1}\tilde{f}$. Thus, equation (8) must be replaced by another formula which is effectively calculated and has the same limit under $t \rightarrow \infty$ with $\omega(t)$.

Remark 1. From Theorem 1 in the calculation ω_n by the recurrence formulas do not always manage to have a good estimate $\|M\|^{-2}$. Therefore, we must proceed as follows:

No we take any $\varepsilon = d^{-2}$ and calculate ω_n and $J(\omega_n)$. In order to use this value d^{-2} has to satisfy to the following condition: $J(\omega_{n+1}) \leq J(\omega_n) \left(1 - \frac{1}{d^2c^2}\right)$. If for some n , this inequality is not satisfied then we change ε to $\frac{\varepsilon}{2}$ and continue the process.

Remark 2. According to (6) we have

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) - 2\varepsilon\|\omega\|^2 + \varepsilon^2\|M\omega\|^2. \quad (9)$$

The right side of this expression is the minimum if

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \|M\omega\|^{-2}\|\omega\|^2. \quad (10)$$

Therefore, in order to determine a sequence ω_n we can use recursive formula $\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\|\omega\|^2}{\|M\omega\|^2}M^*(M\omega - f)$, where $\omega = M^*(M\omega_n - f)$. This formula is more complicated rather the formula proposed in the Theorem 1, however, while employing an iterative process that converges rapidly, there is no need to calculate the norms M and M^{-1} , and it is enough to know their limits.

We also note that if we select ε according to the formula (10), then

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) \left(1 - \frac{\|\omega\|^4}{\|M\omega\|^2 J(\omega_n)}\right),$$

where $\frac{\|\omega\|^4}{\|M\omega\|^2 J(\omega_n)} \leq 1$.

Indeed, if we denote $M\omega_n - f = g$ then we have

$$\frac{\|\omega\|^4}{\|M\omega\|^2 J(\omega_n)} = \frac{\|M^*g\|^4}{\|MM^*g\|^2 \|g\|^2} = \frac{\langle M^*g, M^*g \rangle}{\|MM^*g\|^2 \|g\|^2} = \frac{\langle MM^*g, g \rangle}{\|MM^*g\|^2 \|g\|^2} \leq 1.$$

An equality $\frac{\|\omega\|^4}{\|M\omega\|^2 J(\omega_n)} = 1$ is possible only if $g = \lambda MM^*g$.

Let us consider the following examples.

Example. Assume $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $Lu = f$, $x \in \Omega$, $u(0) = u(1) = 0$, where L is an operator acting as follows $Lu = -u'' + q(t)u$. In this case we can take integral operator A_0 with the kernel $G(x, t)$, where $G(\cdot)$ is Green function of $-u'' = v(t)$, $u(0) = u(1) = 0$. This problem is effectively solvable and $G(\cdot)$ are written explicitly:

$$Av = - \int_0^1 (t - \tau)v(\tau)d\tau - t \int_0^1 (\tau - 1)v(\tau)d\tau,$$

$$L(Av) = v(\tau) + q(t) \int_0^1 (\tau - 1)v(\tau)d\tau + t \int_0^1 (\tau - 1)v(\tau)d\tau.$$

Let's $q(t) = e^t$, $v(t) = -2 + e^t t^2$. Then

$$Mv = v(\tau) + e^t \int_0^t (t - \tau)(-2 + e^\tau \tau^2)d\tau + t \int_0^1 (\tau - 1)v(\tau)d\tau.$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \varepsilon M^*(M\omega_n - f),$$

$$J(\omega_n) = \int_0^1 \left| \left(\omega_n + e^t \int_0^t (t - \tau)(-2 + e^\tau \tau^2)d\tau + t \int_0^1 (\tau - 1)\omega_n d\tau \right) + \right. \\ \left. + 2 - t^2 e^t - f \right|^2 dt,$$

$$M^*v = v(\tau) + e^t \int_\tau^1 e^t (t - \tau)(-2 + e^\tau \tau^2)dt + \int_0^1 t(\tau - 1)v(\tau)d\tau.$$

Since the operator norm M and M^{-1} calculated difficult, and therefore the number ε is chosen as follows.

Now we take the number $\varepsilon = \varepsilon_1$ and check the inequality $J_n > J_{n+1}$. If this inequality in some cases is not satisfied, then the number ε_1 will be replaced by $\frac{\varepsilon_1}{2}$ and we check the inequality $J_n > J_{n+1}$. In this case the condition of the limited $M = LA$ and M^{-1} takes place.

We consider the problem

$$Lu \equiv u^{(4)} + q(x)u = f(x), \tag{11}$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, u''|_{x=0} = 0, u''|_{x=1} = 0.$$

This equation describes, for example, the transverse deflection $u(x)$ of the beam under a distributed transverse load $f(x)$, $f(x) \in L_2(0, 1)$. The beam has a constant flexural rigidity and lies on an elastic foundation, the reaction which defines the term $q(x)u(x)$, $q(x) \geq 0$ on interval $(0, 1)$.

In such a physical sense formulation of the problem, boundary conditions reflect how the ends are fixed. Therefore, for the cantilever beam with rigidly clamped left and right ends of the free boundary, we have the following conditions: $u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$.

If the beam has at the ends some support, allowing (as opposed to of rigid support), rotation of its cross section is proportional to the bending moment of this section, then the boundary conditions have the form: $u(0) = u(1) = 0, u'(0) = \alpha u''(0), u'(1) = \beta u''(1)$. From these equations if $\alpha = \beta = 0$ follow the conditions of rigid support, and if $\alpha \rightarrow \infty$ and $\beta \rightarrow \infty$ - hinged support, conditions take the form specified in (11).

We introduce the operator A_0 : denote $u^{(4)} = v$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, $u''|_{x=0} = 0$, $u''|_{x=1} = 0$. or in the operator form $A_0 u = v$, where $A_0 = -\frac{d^4}{dx^4}$ is the operator having uniquely solving in the space $L_2(0, 1)$ with given boundary conditions. Then the equation (11) have the form:

$$Mv = v + q(x)A_0^{-1}v = f(x). \quad (11')$$

If v is found, then u is calculated as follows

$$u = A_0^{-1}v = \frac{1}{6}x \int_0^1 (1-t)^3 v(t) dt + \frac{1}{3}x^3 \int_0^1 (t-1)^3 v(t) dt + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} v(t) dt.$$

We denote

$$J(\omega) = \int_0^1 |\omega + q(x)(A_0^{-1}\omega - f(x))|^2 dx. \quad (12)$$

The solution $\omega = v$, where v is solution of (11'), if $J(\omega) = 0$.

Let us the equation (11') has an unique solution for any right part of $f(x) \in L_2(0, 1)$.

We construct an iterative process.

Let ω_n is n -th approximately solution for the equation $J(\omega_n) = 0$. Suppose $\omega_{n+1} = \omega_n - \varepsilon\omega$, where $\varepsilon > 0$. Then

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) - 2\varepsilon \langle M^*(M\omega_n - f), \omega \rangle + \varepsilon^2 \|M\omega\|^2.$$

Thus, the used of the linear integral operator A_0 .

We choose $\omega = M^*(M\omega_n - f) = M\omega_n - f + A_0^{-1}(q(x)A(M\omega_n - f))$. Then

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) - 2\varepsilon \|\omega\|^2 + \varepsilon^2 \|M\omega\|^2 \leq J(\omega_n) - [2\varepsilon - \|M\|^2 \varepsilon^2] \|\omega\|^2.$$

List of references

- [1] J. M. Ortega, Introduction to parallel and vector solution of linear systems, Plenum Press, New York, 1982.
- [2] B. K. Kokebaev, M. Otelbaev, A. N. Shynybekov, On problems of extension and restriction of operators, Dokl. Ac. Sci. USSR, 271:6 (1983), 1307 – 1310.
- [3] H. Triefel, Approximation numbers in function spaces and the distribution of eigenvalues of some fractal elliptic operators, J. Approximation Theory, 129 (2004), 1-27.
- [4] V. I. Burenkov, M. Otelbaev, On the singular numbers of correct restrictions of non-selfadjoint elliptic differential operators, Eurasian Mathematical Journal, 2011, V.2, N1, 145-148.

УДК 517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ

Д.А. Искендерова, Г.Т. Мусатаева

Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова,
г. Бишкек

Abstract. The system of differential equations describing one-dimensional nonstationary flow of a reacting gas mixture with spherical waves is considered. An initial-boundary value problem is study. We proved an existence of a unique generalized solution by a method of a priori estimates. We shall consider mass Lagrangean coordinates.

Keywords: differential equation, mass Lagrangean coordinates.

Андатпа. Газдардын елегіш коспасынын сфералык толкындармен бір олшемді стационарлы емес козгалысын сипаттаушы дифференциалдык тендеулер жүйесі зерттеледі. Бастапқы - шекті есеп карастырылады. Жалпыланган шешімнің жалгыз болуынын далелденуі априорлык багалар адісімен жургізілген. Жаппай лагранж айнымалылары карастырылады.

Кілттік создер: дифференциалдык тендеу, жаппай лагранж айнымалылары.

Аннотация. Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное движение реагирующей смеси газов со сферическими волнами. Изучается начально-краевая задача. Доказательство существования единственного обобщенного решения проведено методом априорных оценок. Рассматриваются массовые лагранжевы переменные.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, массовые лагранжевы переменные

Система уравнений, описывающая движение реагирующей смеси газов со сферическими волнами в массовых лагранжевых координатах имеет вид [[1], [2], [3]]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}(x^2 u), \quad v = \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) - cg, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu x^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q}(x^2 u) \right) - x^2 \frac{\partial p}{\partial q}, \quad p = r \frac{\theta}{v} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial q} \left(\lambda_1(\theta) \frac{x^4}{v} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\lambda_2(\theta) \frac{x^4}{v} \theta \frac{\partial c}{\partial q} \right) - p \frac{\partial}{\partial q}(x^2 u) + \\ & + \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q}(x^2 u) \right)^2 - 3\mu \frac{\partial}{\partial q}(xu^2) + \delta cg, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$c = c_1, \quad \theta = c_v T, \quad g = \frac{w}{\rho c}, \quad r = \frac{R}{c_v}, \quad c_v = (c_{v1} - c_{v2})c + c_{v2}, \quad R = (R_1 - R_2)c + R_2,$$

$$\chi = \rho D, \quad D_1 = D_2 = D, \quad w_2 = -w_1 = w \geq 0, \quad \delta = \delta_1 - \delta_2 \geq 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{c_v}, \quad \lambda_2 = \frac{\chi}{c_v} [(c_{v1} - c_{v2}) + (R_1 - R_2) - \lambda].$$

Здесь ρ, v, u, θ, p - плотность, удельный объем, скорость, температура смеси и давление, c_i - массовые концентрации компонент, δ_i - теплота образования i -ой компоненты при стандартных условиях, R_i - газовые постоянные, c_{vi} - удельные теплоемкости при постоянном объеме компонент, w_i - скорости химических реакций; D_i, μ, λ - коэффициенты диффузии, вязкости, теплопроводности; $x \in [a; 1], a > 0$ - эйлерова координата, $r \in [a; 1]$ - лагранжева координата, $q \in [0; b]$ - массовая лагранжева координата, $t \in [0; T], 0 < T < \infty$ - время.

В эйлеровых координатах рассматриваемая область $(x, t) \in Q' = \Omega' \times (0, T), \Omega' = (a, 1), a > 0$ не включает ось симметрии, где уравнения вырождаются. При рассмотрении в массовых лагранжевых координатах область $(q, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \Omega = (0, b)$ также не содержит линии вырождения.

Эйлерову координату следует рассматривать как решение задачи Коши:

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q, t) = u(q, t), \quad x(q, 0) = r(q). \quad (5)$$

Между различными введенными координатами существует связь [1]:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{v}{x^2}, \quad q = \int_a^r r^2 \rho_0(r) dr, \quad (6)$$

где $\rho_0(r)$ - начальное распределение плотности.

Функции u_0, θ_0, v_0, c_0 , задающие начальные данные

$$u|_{t=0} = u_0(q), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(q), \quad c|_{t=0} = c_0(q), \quad v|_{t=0} = v_0(q), \quad (7)$$

предполагаются известными, непрерывными,

$$0 < c_0(q) \leq 1, \quad 0 < m_0 \leq (v_0(q), \theta_0(q)) \leq M_0 < \infty.$$

Область Q при этом не изменится, если принять не ограничивающее общности условие:

$$\int_0^b v_0(q) dq = 1. \quad (8)$$

Граничные условия имеют вид:

$$u|_{q=0} = u|_{q=b} = \frac{\partial \theta}{\partial q} \Big|_{q=0} = \frac{\partial \theta}{\partial q} \Big|_{q=b} = \frac{\partial c}{\partial q} \Big|_{q=0} = \frac{\partial c}{\partial q} \Big|_{q=b} = 0. \quad (9)$$

Основной результат данной статьи заключается в следующем утверждении:

ТЕОРЕМА. Пусть $\lambda_1(\theta) = \lambda\theta, \lambda_2(\theta) = v\theta^{1/2}, \lambda, v = const$ и начальные данные (7) удовлетворяют условиям

$$(u_0, v_0, \theta_0, c_0) \in W_2^1(0, b).$$

Функция $g(\rho, c, \theta)$ является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по $\theta^{1/2}$, кроме того, удовлетворяет условию Липшица.

Тогда в области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, b)$ с произвольной конечной высотой T , $0 < T < \infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(5), (7), (9) такое, что

$$v(q, T) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, b)), \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t} \right) \in L_2(Q),$$

$$(u(q, t), \theta(q, t), c(q, t)) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, b)) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, b)),$$

$0 < c(q, t) \leq 1$, $v(q, t)$, $\theta(q, t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i , N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. На основе полученных априорных оценок локальное решение [2], [3] продолжается на весь промежуток времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

Приступим к выводу глобальных априорных оценок при выполнении условий теоремы. Не нарушая общности, примем положительные постоянные χ , μ , λ_2 , r , δ равными единице.

Из уравнений системы (1) - (4) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(q, t)$, $\theta(q, t)$ неотрицательны и $0 < c(q, t) \leq 1$.

Умножим уравнение (3) на u сложим с уравнениями (2) и (4).

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{ux^2}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2u) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(ux^2 \frac{\theta}{v} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\theta \frac{x^4}{v} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \theta^{3/2} \frac{\partial c}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) - 3 \frac{\partial}{\partial q} (xu^2), \end{aligned} \tag{10}$$

где $w = \frac{1}{2}u^2 + c + \theta$.

Интегрируя (10) по (q, t) с учетом граничных условий (9), находим закон сохранения:

$$\int_0^b \left(\frac{1}{2}u^2 + c + \theta \right) dq = \int_0^b \left(\frac{1}{2}u_0^2 + c_0 + \theta_0 \right) dq \leq N_1. \tag{11}$$

Умножая уравнение (2) на c и интегрируя по (q, t) , имеем оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b c^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left(\frac{1}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 + c^2 g \right) dq dt \leq N_0. \tag{12}$$

Непосредственно из уравнения неразрывности (1) и условия (8) вытекает оценка:

$$\int_0^1 v(q, t) dq = 1. \tag{13}$$

Из (13) следует, $\forall t \in [0, T]$ найдется такая точка $z(t) \in [0, b]$, что $v(z(t), t) = 1$.

Аналогично [3], [4] выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями. Уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial \ln v}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2 u)$$

и подставим в уравнение (3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \ln v}{\partial t} \right) - x^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\theta}{v} \right).$$

Разделим его на x^2 и, преобразовав левую часть, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{x^2} \right) + 2 \frac{u^2}{x^3} = \frac{\partial^2 \ln v}{\partial q \partial t} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\theta}{v} \right).$$

Проинтегрируем полученное равенство по времени от 0 до t и по пространству от $z(t)$ до q , а затем пропотенцируем.

$$\frac{1}{v} \exp \int_0^t \frac{\theta}{v}(q, \tau) d\tau = \frac{1}{v_0} Y(t) B(q, t), \quad (14)$$

где

$$B(x, t) = \exp \left\{ \int_{z(t)}^q \left[\frac{u_0}{r^2} - \frac{u}{x^2} - 2 \int_0^t \frac{u^2}{x^3} d\tau \right] dq \right\},$$

$$Y(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\theta}{v}(z(t), \tau) d\tau \right\}.$$

Умножим (14) на θ и представим левую часть в виде производной по времени. После чего проинтегрируем полученное равенство по времени.

$$\exp \int_0^t \frac{\theta}{v}(q, \tau) d\tau = 1 + \frac{1}{v_0} \int_0^t \theta(q, \tau) Y(\tau) B(q, \tau) d\tau.$$

Подставим его в (14). В итоге имеем

$$v(q, t) = Y^{-1}(t) B^{-1}(q, t) \left[v_0(q) + \int_0^t \theta(q, \tau) Y(\tau) B(q, \tau) d\tau \right]. \quad (15)$$

Аналогично [4] выводятся неравенства:

$$N_2^{-1} \leq B(q, t) \leq N_2, \quad N_3^{-1} \leq Y(t) \leq N_3, \quad \forall (q, t) \in Q. \quad (16)$$

Пусть $h(q, t)$ - непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{0 \leq q \leq b} h(q, t), \quad m_h(t) = \min_{0 \leq q \leq b} h(q, t).$$

Из представления (15) с учетом (16) вытекают оценки:

$$m_v(t) \geq N_4, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (17)$$

$$M_v(t) \leq C_1 \left[1 + \int_0^t M_\theta(\tau) d\tau \right], \quad \forall t \in [0, T]. \quad (18)$$

Умножим уравнение (2) на $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right)$ и проинтегрируем по q и по t .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b \frac{x^4}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) \right]^2 dq = \\ & = \int_0^b \frac{x^2}{v} \frac{\partial c}{\partial q} u \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) dq + \int_0^b cg \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) dq = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценим каждое I_k , $k = 1, 2$, используя неравенства Гельдера, Коши и Юнга с учетом оценок (11), (12), (17). После некоторых преобразований выводим оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^4}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) \right]^2 dq d\tau \leq N_5. \quad (19)$$

Умножим уравнение (1) на $(1 - \frac{1}{v})$, (3) на u , (4) на $(1 - \frac{1}{\theta})$ и сложим их с уравнением (2). Получившееся соотношение проинтегрируем по q .

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^b \left(\frac{1}{2} u^2 + c + (\theta - \ln \theta) + (v - \ln v) \right) dq + \\ & + \int_0^b \left[\frac{x^4 u_q^2}{v\theta} + \frac{vu^2}{\theta x^2} + \frac{x^4 \theta_q^2}{v\theta} + \frac{cg}{\theta} \right] dq = \\ & = \int_0^b \left[2x \frac{uu_q}{\theta} - \frac{x^4 \theta_q c_q}{v\theta^{1/2}} \right] dq. \end{aligned}$$

Применим к правой части неравенства Юнга и Коши. После интегрирования по t , с учетом оценки (19) получим оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{1}{2} u^2 + c + (\theta - \ln \theta) + (v - \ln v) \right) dq + \int_0^T \int_0^b \left[\frac{u_q^2}{v\theta} + \frac{vu^2}{\theta} + \frac{\theta_q^2}{v\theta} + \frac{cg}{\theta} \right] dq d\tau \leq N_6. \quad (20)$$

Из (20) вытекает оценка

$$\int_0^T \int_0^b \frac{1}{v\theta} \left[\frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right]^2 dq d\tau \leq N_7.$$

Из (11) следует, что $\forall t \in [0, T]$ найдется такая точка $z_1(t) \in [0, b]$, что $\theta(z_1(t), t) \leq N_1$. Справедливо представление

$$\theta^{1/2}(q, t) = \theta^{1/2}(z_1(t), t) + \frac{1}{2} \int_{z_1(t)}^q \frac{\theta_q}{\theta^{1/2}} dq.$$

Используя неравенство Коши и оценку (13), получим

$$M_\theta(t) \leq C_2 \left(1 + \int_0^b \frac{\theta_q^2}{v\theta} dq \right).$$

Отсюда и из (20) имеем оценку:

$$\int_0^T M_\theta(t) dt \leq N_8. \quad (21)$$

Из (18) с учетом (21) вытекает ограниченность удельного объема сверху.

$$M_v(t) \leq N_9, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (22)$$

Умножим уравнение импульса (3) на u и проинтегрируем по Q . После некоторых преобразований [4], находим оценку:

$$\int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 dq d\tau \leq N_{10}.$$

Умножим уравнение теплопроводности (4) на θ и проинтегрируем по Q . После некоторых преобразований получим оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \theta^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} \right)^2 dq d\tau \leq N_{11}. \quad (23)$$

Имеет место неравенство [3]:

$$M_\theta^2(t) \leq \eta \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} \right)^2 dq + c_\eta \int_0^t \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} \right)^2 dq d\tau + N_\eta, \quad (24)$$

выполняющемся при любом $\eta > 0$. Постоянные C_η , N_η зависят от η и норм начальных данных. Полученное в [3] для случая движения с плоскими волнами, (24) остается справедливым и для движения со сферическими волнами.

Неравенство (24) с учетом (17) и (23) позволяет вывести

$$\int_0^T M_\theta^2(t) dt \leq N_{12}. \quad (25)$$

Продифференцируем (15) по q .

$$\frac{\partial v}{\partial q} = v(q, t) \cdot A(q, t) + Y^{-1}(t)B^{-1}(q, t) \left[v'_0(q) + \int_0^t \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} + \theta \cdot A \right) Y(\tau)B(q, \tau) d\tau \right],$$

где $A(x, t) = \frac{u_0}{r^2} - \frac{u}{x^2} - 2 \int_0^t \frac{u^2}{x^3} d\tau$. Отсюда, используя неравенство Коши, выводим оценку:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 dq \leq N_{13}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Уравнение (3) умножим на $x^2 \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right]$ и проинтегрируем по Ω . Возникающие при этом производные $\frac{\partial v}{\partial t}$ заменим через уравнение неразрывности (1).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right)^2 dq + \int_0^b x^4 \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right) \right]^2 dq = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right)^3 dq + 2 \int_0^b x u^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right) dq - \\ & - \int_0^b x^4 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right) \cdot \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial q} - \frac{\theta}{v^2} \frac{\partial v}{\partial q} \right] dq = \sum_{k=1}^4 J_k. \end{aligned}$$

Оценим каждое J_k , $k = 1, 2, 3, 4$, используя неравенства Гельдера, Коши и Юнга с учетом полученных выше оценок. После применения леммы Гронуолла, имеем оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b x^4 \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x^2 u) \right) \right]^2 dq d\tau \leq N_{14}.$$

Расписывая производную, приходим к оценке

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \right)^2 dq d\tau \leq N_{15}.$$

Непосредственно из уравнений (1) и (3) получим:

$$\int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dq d\tau \leq N_{16}, \quad \int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dq \leq N_{17}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Аналогично [3], [4] из уравнения теплопроводности (4) следует строгая положительность температуры:

$$m_\theta(t) \geq N_{18}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Умножением (4) на $\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2}$ и интегрированием выводится оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] dq d\tau \leq N_{19}.$$

Отсюда и из (24) вытекает ограниченность температуры.

$$M_\theta \leq N_{20}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Из оценки (19) и уравнения (2) имеем:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 c}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)^2 \right] dq d\tau \leq N_{21}.$$

Итак, получены все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично [4], [5], [6].

Теорема полностью доказана.

Список литературы

- [1] Система квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. // М.: Наука, 1978. - 667с.
- [2] Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов. Петров А.Н. // Динамика сплошной среды. - 1993. - Вып.107. - с.112–123.
- [3] Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. // Новосибирск: Наука, 1983. - 319с.
- [4] Глобальная разрешимость уравнений движения вязкого газа с осевой и сферической симметрией. Николаев В.Б. // Динамика сплошной среды. - 1983. - Вып. 63. - с.136–141.
- [5] Корректность задачи течения реагирующей смеси газов в магнитном поле. Искендерова Д.А. // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. - 1998. - N 11. - с.40–52.
- [6] Движение реагирующей смеси газов с цилиндрическими волнами. Искендерова Д.А., Мустаева Г.Т. // Известия НАН Кыргызской Республики. - Бишкек. 2012. N 2. - с.21–30.

УДК 517.956.4 + 542:61

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЦЕССА ЭКСТРАГИРОВАНИЯ ИЗ ТВЕРДЫХ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Б.Р. Исмаилов, И. Оразов, М.А. Садыбеков

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова
Институт математики и математического моделирования

Abstract. The paper deals with one family of problems that simulates the process of extraction from the solid polydispersed porous materials. At their mathematical formulation there is an inverse problem for the diffusion equation, in which, together with the solution of the equation it is necessary to find the unknown right part, which depends only on the space variable. The initial and final states are the additional data. The specificity of the considered problems is the fact that the boundary conditions on the spatial variable are non strongly regular. It is proved the existence and uniqueness of the solution of the problem.

Keywords: diffusion equations, inverse problems, non strongly regular boundary conditions, process of extraction.

Аңдатпа. Бұл еңбекте полидисперсті қатты кеуек материалдарды экстракциялаудың процесін моделдеуші есептер шоғыры қарастырылды. Бұл есептерді математикалық тұрғыдан зерттегенде диффузия теңдеуіне кері есеп пайда болады. Дәлірек айтсақ есептің шешімі мен қоса оның оң жақтағы бос мүшесін де табу қажет, ол тек кеңістіктің координаталарына тәуелді. Шешімнің бастапқы және соңғы мәндері белгілі. Есептің бір ерекшелігі оның кеңістіктегі шекаралық шарттары онша тұрлаулы емес. Есептің бір ғана шешімі бар екені дәлелденген.

Кілттік сөздер: диффузия теңдеуі, кері есеп, онша тұрлаулы емес шекаралық шарттар, диффузия теңдеуі.

Аннотация. В работе рассматривается одно семейство задач, моделирующих процесс экстрагирования из твердых полидисперсных пористых материалов. При их математической формулировке возникает обратная задача для уравнения диффузии, в которой вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной. Дополнительными данными являются начальное и конечное состояние. Спецификой рассматриваемого семейства задач является то, что краевые условия по пространственной переменной являются не усиленно регулярными. Доказано существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: уравнение диффузии, обратная задача, не усиленно регулярные краевые условия, процесс экстрагирования.

Введение

Процессы экстрагирования из твердых полидисперсных пористых материалов широко распространены в пищевой, химико-фармацевтической и медицинской промышленности. При этом

к качеству экстракта предъявляются повышенные требования. Для эффективного проведения процесса экстрагирования из твердых полидисперсных пористых материалов необходимо использовать аппараты и процессы, позволяющие обеспечивать оптимальные значения гидродинамических и физико-химических параметров, в частности, поверхности контакта фаз, разности концентрации целевого компонента в сырье и экстрагенте, продолжительности экстракции.

Происходящие при экстрагировании массообменные процессы, вообще говоря, являются нелинейными и должны описываться соответствующим механико-математическим аппаратом [1, 2]. Однако учет пористости структуры частиц твердых полидисперсных пористых материалов позволяет существенно упростить математическую модель всего процесса экстракции [3].

Наряду с этим, в настоящее время получили распространение гидродинамические методы интенсификации (вихревое экстрагирование, режим вакуумного кипения экстрагента, механические колебания суспензии, наложение ультразвука на суспензию, пульсация давления, отжим пористого материала), эффект от которых нельзя объяснить положениями только диффузионной теории [4]. Поэтому рядом исследователей [3 - 5] предложено применение в качестве коэффициентов диффузии коэффициентов эффективной диффузии. Данный подход получил название диффузионно-конвективный механизм экстрагирования и его применение для описания экстрагирования из твердых полидисперсных пористых материалов, на наш взгляд, является оправданным.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований показали, что для многих видов твердых полидисперсных пористых материалов (таких как боярышник, корень солодки, цветки бессмертника, травы зверобоя, валерианы, семена аниса, фенкеля и др.) применение модели диффузионно-конвективного механизма экстрагирования приводит к достаточно точным результатам [4].

Таким образом, для разработки новых технологий экстрагирования из твердых полидисперсных пористых материалов оказывается необходимым решение задачи о восстановлении параметров, характеризующих свойства материала или процесса, необходимых для получения финального состояния за конечный промежуток времени. Такие математические задачи называются обратными задачами теории начально-краевых задач для уравнений в частных производных.

Поскольку некоторые параметры, входящие в уравнения, принимаются с большими допущениями, то их можно рассматривать, как неизвестные для конкретно поставленной задачи математического моделирования технологических процессов. Для их определения можно использовать косвенную информацию. Например, данные о решении уравнения, которые экспериментально получить значительно проще. Такие задачи можно рассматривать как обратные и они на первой стадии моделирования формулируются совместными усилиями математика и технолога, которому предстоит доставить нужную косвенную информацию об объекте [5].

В работе рассматривается одно семейство задач, моделирующих процесс экстрагирования из твердых полидисперсных пористых материалов. При их математической формулировке возникает обратная задача для уравнения диффузии, в которой вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной. Дополнительными данными являются начальное и конечное состояние.

Вопросы разрешимости различных обратных задач для параболических уравнений изучались во многих работах (см., например, [6 - 12]). При этом теоретическая математическая наука глубоко продвинулась в решении обратных задач для диффузионных процессов. Однако, как правило, задачи исследуются при простейших самосопряженных краевых условиях по пространственной

переменной. В отличие от предыдущих работ, нами исследуется обратная задача для уравнения диффузии с краевыми условиями по пространственной переменной, которые не являются усиленно регулярными. При этом соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора имеет систему собственных функций, которая может не образовывать базис.

Постановка задачи

Модельное уравнение одномерного процесса экстрагирования целевого компонента из твердых полидисперсных пористых материалов, в одной отдельно взятой макропоре, записываем в следующем виде [13]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) = f(x), \quad (1)$$

где $\Psi(x, t)$ - безразмерная концентрация целевого компонента в макропорах в точке x в момент времени t . Здесь $f(x)$ - влияние внешнего источника, которое в нашей задаче порождается безразмерной концентрацией целевого компонента в микропорах. Это влияние зависит только от расстояния до границы макропоры, то есть только от положения точки x в жидкой фазе, и не зависит от времени t .

Область рассмотрения задачи (в безразмерных величинах длина макропоры взята равной единице) обозначим $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Здесь $t = 0$ - начальный, а $t = T$ - финальный моменты времени.

Естественно предполагать, что (из-за симметрии) значения концентрации на обеих границах макропоры совпадают:

$$\Psi(0, t) = \Psi(1, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Для многих видов твердых полидисперсных пористых материалов этот объем диффузии целевого компонента из микропор в макропору в каждый момент времени t пропорционален скорости изменения средней величины количества целевого компонента в макропорах. Тогда

$$\Psi(0, t) = \Psi(1, t) = \alpha \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \Psi(\xi, t) d\xi \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где α - коэффициент пропорциональности - постоянная величина.

Нашей задачей является нахождение функции влияния внешнего источника $f(x)$ по некоторой дополнительной информации. Знание $f(x)$ позволит в дальнейшем рассчитать необходимую концентрацию целевого компонента в микропорах.

В качестве дополнительной информации выберем значения начального и конечного состояния концентрации целевого компонента в макропорах:

$$\Psi(x, 0) = \varphi(x), \quad \Psi(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Сведение к математической задаче

С учетом уравнения (1) из (3) получаем

$$\Psi(0, t) = \alpha \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\xi, t) d\xi = \alpha \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}(\xi, t) + f(\xi) \right) d\xi. \quad (5)$$

Отсюда

$$\Psi(0, t) = \alpha \int_0^1 f(\xi) d\xi + \alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}(1, t) - \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, t) \right). \quad (6)$$

Введем обозначение

$$u(x, t) = \Psi(x, t) - \alpha \int_0^1 f(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Тогда для новой функции $u(x, t)$ получаем задачу для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x), \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$u(0, t) - u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) + \frac{1}{\alpha} u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

и с условиями начального и финального переопределения

$$u(x, 0) = \varphi(x) - \alpha \int_0^1 f(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

$$u(x, T) = \psi(x) - \alpha \int_0^1 f(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (12)$$

Невозможность прямого применения метода Фурье

Применения метода Фурье для решения задачи (8)-(12) приводит к спектральной задаче для оператора l , заданного дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv -y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (13)$$

и краевыми условиями

$$y'(0) - y'(1) + \frac{1}{\alpha} y(0), \quad y(0) = y(1). \quad (14)$$

Краевые условия в (13) являются регулярными, но не усиленно регулярными [14]. Система корневых функций таких операторов является полной системой, но может не образовывать даже обычного базиса в $L_2(0, 1)$. Поэтому иногда прямое применение метода Фурье для решения такой задачи является не возможным.

Для решения задачи используется методика, предложенная в [15]. При этом задача решается не зависимо от того, образует ли базис система собственных функций, возникающая при использовании метода разделения переменных.

Список литературы

- [1] Моделирование турбулентного течения несжимаемой жидкости в каналах сложной формы. Л.П. Холпанов, Б.Р. Исмаилов, Н.П. Болгов // Теорет. основы хим. технологий. 1990. - Т. 24, no. 4, с. 466.
- [2] Математическое моделирование нелинейных термогазодинамических процессов. / Холпанов Л.П., Запорожец В.П., Зиберт Г.К., Кашицкий Ю.А. - М.: Наука, 1998.
- [3] Влияние пропитки экстрагируемого материала на работу многоступенчатого экстрактора. В.В. Василенко // Сб. тр. "Прогрессивные технологии и оборудование для пищевой промышленности". Ч. 2. Воронеж, 2004. - с. 178.
- [4] Экстрагирование. Система твердое тело-жидкость./Аксельруд Г.А., Лысянский В.М. - Л.: Химия, 1974.
- [5] Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. / Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. - М.: Машиностроение, 1990.
- [6] Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения. Ю.Е. Аниконов, Ю.Я. Белов // Докл. АН СССР. 1989. - Т. 306, no. 6, с. 1289–1293.
- [7] Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения. Ю.Е. Аниконов, Б.А. Бубнов // Докл. АН СССР. 1988. - Т. 298, no. 4, с. 777–779.
- [8] Существование и единственность решения обратных задач для параболических и эллиптических уравнений. Б.А. Бубнов // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1986 - с. 25–29.
- [9] Об обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением А.И. Прилепко, А.Б. Костин // Мат. сб. 1992. - Т. 183, no. 4, с. 49–68.
- [10] Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. А.И. Кожанов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. - Т. 44, no. 4, с. 722–744.
- [11] Обратные задачи для релаксационных моделей гидродинамики. В.Н. Монахов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2003. - Т. 3, вып. 3, с. 72–80.
- [12] Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам. И.А. Калиев, М.М. Сабитова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. - Т.12, no. 1, с. 89–97.
- [13] Моделирование и расчет экстрагирования из полидисперсных пористых материалов. Л.П. Холпанов, Б.Р. Исмаилов, Л.А. Сулейменова // Теоретические основы химической технологии. 2012. - Т. 46, no. 1, с. 102–108.
- [14] Линейные дифференциальные операторы. / Наймарк М. А. - М.: Наука, 1969.
- [15] Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам. И. Оразов, М.А. Садыбеков // Сибирский математический журнал. 2012. - Т. 53, no. 1, с. 180–186.

УДК 681.5.015

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В НАУКЕ, ОБРАЗОВАНИИ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

С.И. Кабанихин

Новосибирский государственный университет

Abstract. This article will summarize the basic concepts and some results on the theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems. The subject of the article is so new compared to traditional areas of mathematics and so deeply connected with other areas of mathematics, as well as the main areas of science, that it can be attributed to one of the most important achievements of the 20th century.

Keywords: inverse and ill-posed problems, regularization techniques.

Аннотация. В данной статье будут кратко изложены основные понятия и некоторые результаты по теории и численным методам решения обратных и некорректных задач [1, 2, 3]. Предмет статьи является настолько новым относительно традиционных направлений математики и настолько глубоко связанным с другими направлениями самой математики, а также основных направлений науки, что его можно отнести к одним из важнейших достижений 20-го века.

Ключевые слова: обратные и некорректные задачи, методы регуляризации.

Обратные и некорректные задачи

Определение некорректных задач широко известно, к ним относятся все те задачи, для которых не выполняется хотя бы одно из условий классической корректности (существование, единственность и устойчивость решения). Единого определения обратных задач нет. Однако, понятно, что «обратное» можно определить лишь по отношению к «прямому». В математической физике под прямыми задачами обычно понимают задачи моделирования какого-либо физического процесса. В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую поведение какого-либо физического поля или процесса (электромагнитного, акустического, сейсмического, теплового и т.п.), в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле не стационарно). Первые публикации по обратным и некорректным задачам появились в первой половине XX века. Они были связаны с исследованиями физиков (обратные задачи квантовой теории рассеяния, электродинамики, акустики), геофизиков (обратные задачи электроразведки, сеймики, теории потенциала), астрономии и других областей естествознания. С появлением мощных ЭВМ область приложений обратных и некорректных задач охватила практически все научные дисциплины, в которых используются математические методы. Главные направления применения — это геофизика, астрономия, визуализация данных, медицинская и промышленная томография, дефектоскопия и дистанционное зондирование и многое другое.

В прямых задачах математической физики исследователи стремятся найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления, например, распространение звука, тепла, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и так далее. При этом свойства среды (коэффициенты уравнений), а также начальное состояние процесса (в нестационарном случае) или его свойства на границе (в случае ограниченной области и/или в стационарном случае) предполагаются известными. Однако именно свойства среды на практике часто являются неизвестными. А это означает, что необходимо ставить и решать обратные задачи, в которых требуется определить либо коэффициенты уравнений, либо неизвестные начальные или граничные условия, либо местоположение, границы и другие свойства области, в которой происходит исследуемый процесс. Эти задачи в большинстве случаев некорректны (т.е. в этих задачах нарушено хотя бы одно из трех свойств корректности — условие существования, единственности и устойчивости решения по отношению к малым вариациям данных задачи). А искомыми коэффициентами уравнений являются, как правило, плотность, электропроводность, теплопроводность и другие важные свойства исследуемой среды. Также очень часто в обратных задачах требуется найти местоположение, форму и структуру включений, дефектов, источников (тепла, колебаний, напряжения, загрязнения) и так далее. Неудивительно, что при таком широком наборе приложений, теория обратных и некорректных задач с момента своего появления стала одной из наиболее стремительно развивающихся областей современной науки.

Основы теории обратных и некорректных задач были заложены в СССР, начиная с середины XX века. Однако в последние десятилетия по известным причинам лидерство российской школы по обратным и некорректным задачам пошатнулось. Очень много способных специалистов, в том числе молодых, уехали из страны. И если за рубежом издано уже более 11 тысяч книг, в названии которых есть слова «обратные задачи», то в России такие книги появляются все реже и реже.

Каждый человек ежеминутно решает обратные и некорректные задачи. И решает их, как правило, быстро и эффективно (если, конечно, находится в добром здравии и ясном сознании). Возьмем, например, зрительное восприятие. Установлено, что за минуту мы фиксируем лишь конечное число точек окружающего мира. А как же тогда мы видим все? Мозг (в этой ситуации — мощный персональный компьютер) по увиденным точкам восполняет (интерполирует и экстраполирует) все, что глаз не успел зафиксировать. Ясно, что восполнить истинную картину (в общем случае — объемную и цветную) по нескольким точкам можно лишь в случае, когда она уже более-менее знакома (большинство предметов и образов мы уже видели, а иногда и касались руками). То есть, несмотря на сильную некорректность (неединственность и неустойчивость решения) задачи (восстановить по нескольким точкам наблюдаемый объект и все, что его окружает), мозг решает эту задачу довольно быстро. Почему? Он использует богатый опыт (априорную информацию). И вообще, если мы хотим понять что-то достаточно сложное, решить задачу, вероятность ошибки в которой достаточно велика, мы, как правило, приходим к неустойчивой (некорректной) задаче.

Можно сказать, что человек (особенно, склонный искать нестандартные пути решения) постоянно сталкивается с некорректными задачами. В самом деле, каждый понимает, как легко ошибиться, пытаясь восстановить прошлое по некоторым фактам настоящего (проследить мотивы и детали преступления по имеющимся уликам, понять причины зарождения и этапы развития болезни по результатам обследования и т.п.). Или заглянуть в будущее (предвидеть жизненный путь ребенка, направление развития страны и вообще какого-либо достаточно сложного процесса). Или проникнуть в зону недоступности и понять, что там происходит (исследовать внутрен-

ние органы человека, обнаружить месторождение полезных ископаемых, узнать что-либо новое о Вселенной и т.д.). В сущности, любая попытка расширить границы непосредственного (чувственного, зрительного, слухового и т.п.) восприятия окружающего мира приводит к некорректным задачам. Казалось бы, можно сказать, что, научившись решать устойчивые (корректные) задачи, математики перешли к более сложным неустойчивым (обратным и некорректным) задачам. Но исторически это совсем не так, поскольку во все века человек был окружен некорректными задачами, и математики пытались решать такие задачи, обходясь без соответствующих терминов.

Обратные и некорректные задачи объединяет одно важное свойство — неустойчивость решения по отношению к малым ошибкам измерений данных. В большинстве интересных случаев обратные задачи являются некорректными, а некорректные задачи, как правило, можно сформулировать как обратные по отношению к некоторым прямым (корректным) задачам. Но поскольку исторически обратные и некорректные задачи формулировались и изучались довольно часто независимо и параллельно, сейчас в научной литературе используются оба этих термина.

Подводя итоги, можно сказать, что специалисты по обратным и некорректным задачам занимаются исследованием свойств и методов регуляризации неустойчивых задач. Иначе говоря, математики пытаются создавать и изучать устойчивые методы приближения неустойчивых отображений. С точки зрения линейной алгебры это означает поиск приближенных методов нахождения нормального псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольными, вырожденными или плохо обусловленными матрицами. В функциональном анализе главным примером некорректных задач является операторное уравнение $Aq = f$, в котором оператор A является компактным (вполне непрерывным). В последнее время появились работы, в которых некоторые задачи математической статистики трактуются как обратные задачи теории вероятностей. С точки зрения теории информации специалисты по обратным и некорректным задачам исследуют свойства отображений компактов с большой энтропией в таблицы с малой энтропией.

Немного об истории

Как известно, многие математические понятия и постановки задач возникали в результате исследования тех или иных физических процессов или явлений. Тем более это справедливо для теории обратных и некорректных задач. Философское утверждение Платона о том, что человечеству в процессе познания доступны только тени на стене пещеры и эхо (данные обратной задачи), явилось предвестником решения Аристотелем задачи восстановления формы Земли по ее тени на Луне (проективная геометрия). Введение физического понятия мгновенной скорости привело Ньютона к открытию производной, а проблема неустойчивости (некорректности) задачи численного дифференцирования функции, заданной приближенно, актуальна и по сей день. Исследования лорда Рэлея по акустике побудили его поставить вопрос о возможности нахождения плотности неоднородной струны по ее звучанию (обратная задача акустики), что предвосхитило развитие сейсморазведки, с одной стороны, и развитие теории спектральных обратных задач, с другой. Изучение движения небесных тел и задачи оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки, привело А. Лежандра и К. Гаусса к переопределенным системам алгебраических уравнений и к созданию метода наименьших квадратов. О. Коши предложил метод наискорейшего спуска для нахождения минимума функции нескольких переменных. В 1948 году Л.В. Канторович обобщил, развил и применил эти идеи к операторным

уравнениям в гильбертовых пространствах. В настоящее время метод наискорейшего спуска, наряду с методом сопряженных градиентов, являются одними из самых популярных при решении некорректных задач. Стоит отметить, что Л.В. Канторович первым обратил внимание на то, что предложенный им метод сходится по функционалу в случае, когда задача некорректна.

Таким образом, отдельные обратные и некорректные задачи с давних пор были объектом исследования ученых в разных областях знания. Тем не менее, математические особенности некорректных задач были сформулированы Адамаром только в начале XX века, а вместе с тем встал вопрос о целесообразности поиска единого подхода к решению таких задач. Тезис о том, что некорректных задач нет, а есть задачи плохо поставленные, одних исследователей охлаждал, а других побуждал искать новые пути к решению этих «неправильных» задач. Р. Куранту убежденность в том, что неустойчивые задачи не имеют физического смысла, не помешала решить сильно некорректную задачу восстановления функции по ее сферическим средним. С.Л. Соболев в 1953-55 гг. был научным консультантом В.К. Иванова по докторской диссертации «Исследования по обратной задаче теории потенциала», давшей теоретическое обоснование ряда обратных задач гравиразведки. Из классической теоремы Коши-Ковалевской следует, что решение широкого круга обратных и некорректных задач существует и единственно, но лишь в классе аналитических функций. Л.В. Овсянников доказал, что требование аналитичности по выводящей переменной можно существенно ослабить. В.Г. Романов, развивая метод шкал банаховых пространств Л.В. Овсянникова и Л. Ниренберга, показал, что для широкого круга обратных задач можно избавиться от условия аналитичности по двум переменным — по выводящей пространственной переменной и по временной переменной. Эти исследования открыли дорогу к изучению многомерных обратных задач геофизики, базовой моделью в которой является горизонтально-слоистая среда.

В одной статье невозможно рассказать обо всех аспектах теории обратных задач и ее приложений. Упомянем лишь два направления, существенный вклад в зарождение и развитие которых внесли ученые, работавшие в новосибирском Академгородке — В.Е. Захаров и А.Б. Шабат (метод обратной задачи рассеяния), А.С. Алексеев и С.В. Гольдин (обратные задачи геофизики). Метод обратной задачи рассеяния был применен для решения нелинейных уравнений математической физики (уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кадомцева-Петвиашвили и др.) и стимулировал новые исследования в различных областях математики и физики (спектральная теория дифференциальных операторов, классическая алгебраическая геометрия, релятивистские струны и др.). Метод обратной задачи рассеяния называют жемчужиной математической физики XX века. Результаты А.С. Алексеева и С.В. Гольдина по применению в геофизике спектральной теории обратных задач и интегральной геометрии стали теоретической основой многих геофизических методов (обратные кинематические и динамические задачи сейсмологии). Отметим, что признанные успехи нынешнего поколения сибирских геофизиков во многом определены их высокой математической подготовкой на геолого-геофизическом факультете НГУ. Автору статьи посчастливилось работать на кафедре геофизики в те годы, когда там был создан творческий союз преподавателей геофизиков (С.В. Гольдин, Л.А. Табаровский, М.И. Эпов, Ю.А. Дашевский и др.) и математиков (М.М. Лаврентьев, А.С. Алексеев, В.Г. Романов, Т.А. Годунова и др.). Обсуждения о том, какую математику и в каком объеме следует давать геофизикам, регулярно проводились на собраниях преподавателей, а споры часто напоминали дискуссии на научных конференциях. Сейчас сотрудники и выпускники этой кафедры руководят научными институтами (ИНГГ, ИВМиМГ, Югорский НИИИТ и др.), активно рабо-

тают в крупных компаниях («Шлюмберже», «Дженерал Электрик», «Интел», «Бейкер Хьюз» и др.).

Список примеров можно было бы продолжить, но отметим лишь, что всемирно признанными основоположниками теории некорректных задач являются А.Н. Тихонов, В.К. Иванов и М.М. Лаврентьев. В работах этих ученых были заложены основы теории обратных и некорректных задач. Одной из главных стала идея о том, что при исследовании некорректных задач необходимо сузить класс возможных решений. При этом важнейшую роль играет выбор множества, в котором ищется приближенное решение (множество корректности). Чаще всего это множество выбирают компактным, что дает возможность обосновать сходимость регуляризирующих алгоритмов, помогает выбрать параметр регуляризации, оценить уклонение приближенного решения от точного решения некорректной задачи. Результаты математических исследований были применены для решения ряда конкретных обратных задач геофизики, радиолокации, астрономии, медицинской томографии. За выдающиеся научные результаты в этом направлении А.Н. Тихонов и В.К. Иванов были удостоены Ленинской премии, а позднее М.М. Лаврентьев, Ю.Е. Аниконов, В.Р. Кирейтов, В.Г. Романов и С.П. Шишатский стали лауреатами Государственной премии.

С конца двадцатого века и по настоящее время в математике и во всех естественных науках наблюдается небывалый рост интереса к обратным и некорректным задачам. За очень короткий исторический отрезок времени были учреждены четыре крупных международных журнала (главным редактором одного из них, а именно «Inverse and Ill-Posed Problems», является автор данной статьи). Активно работают международные организации «Inverse Problems International Association» и «Society on Inverse Problems in Science and Engineering». Ежегодно в мире проходят десятки крупных конференций по различным аспектам теории и приложений обратных задач (подробности о журналах, ассоциациях и конференциях можно найти на интернет-странице автора статьи на сайте Института математики СО РАН <http://www.math.nsc.ru/LBRT/u2/ksrus.html>).

Область применений обратных задач настолько широка, что при наборе слов «обратные задачи», например, в поисковой системе www.google.ru приводится более 692 000 сайтов и ссылок. Поиск на английском языке дает более 8 420 000 ссылок на сочетание слов «inverse problems».

Обратные задачи в образовании

В образовании теория обратных и некорректных задач оказалась одним из наиболее эффективных средств изложения естественно научных дисциплин вследствие ряда причин. Во-первых, эта теория наиболее полно отвечает принципу интеграции наук, объединяя на основе математических уравнений большинство дисциплин. Это позволяет эффективно использовать в образовании междисциплинарный подход, при котором, изучая курс обратных и некорректных задач, студенты повторяют на примерах практически все изучаемые ранее естественно научные дисциплины, глубже понимают их математические особенности, учатся решать возникающие при этом задачи. Во-вторых, изучение теории обратных и некорректных задач приводит к новому пониманию роли математики в обществе, к новому пониманию внутреннего единства и красоты самой математики. В-третьих, именно при изучении этой теории появляется осознание роли математического моделирования, и вообще моделирования человеком окружающего мира.

В образовании теория обратных и некорректных задач оказалась одним из наиболее эффективных средств изложения естественно научных дисциплин вследствие ряда причин. Во-первых, эта теория наиболее полно отвечает принципу интеграции наук, объединяя на основе математиче-

ских уравнений большинство дисциплин. Это позволяет эффективно использовать в образовании междисциплинарный подход, при котором, изучая курс обратных и некорректных задач, студенты повторяют на примерах практически все изучаемые ранее естественно научные дисциплины, глубже понимают их математические особенности, учатся решать возникающие при этом задачи. Во-вторых, изучение теории обратных и некорректных задач приводит к новому пониманию роли математики в обществе, к новому пониманию внутреннего единства и красоты самой математики. В-третьих, именно при изучении этой теории появляется осознание роли математического моделирования, и вообще моделирования человеком окружающего мира.

Изучение обратных и некорректных задач по твердому убеждению автора необходимо начинать на третьем курсе математических и физических факультетов параллельно с уравнениями математической физики, постепенно переходя от простейших примеров (дифференцирование, интерполяция, обращение прямоугольных и плохо обусловленных матриц и т.п.) к наиболее сложным (задача Коши для уравнения Лапласа, коэффициентные обратные задачи и др.). Изучение курса обратных и некорректных задач также необходимо для всех специалистов, изучающих приложения математики, поскольку этот курс охватывает большую и наиболее сложную половину прикладной математики.

Преподавание курса обратных и некорректных задач существенно помогает преодолеть противоречие современной системы образования между стремительно возрастающим объемом информации, необходимой будущему специалисту, и строгой ограниченности по времени обучения.

Характерными особенностями курса обратных и некорректных задач являются:

1. Возможность более глубокого познания сущности изучаемых физических явлений.
2. Исключительная информационная насыщенность курса, в котором объединены практически все разделы математики примеры с примерами из всех областей современной науки, в которых применяется математика. Это обстоятельство позволяет полнее реализовать принцип научности обучения.
3. Большое количество внутрипредметных связей, объединяющих на примерах обратных и некорректных задач различные математические дисциплины.
4. Большое количество межпредметных связей, возникающих в результате проникновения обратных и некорректных задач практически во все разделы науки.

В итоге, при изучении курса с одной стороны происходит углубление и закрепление знаний по всем математическим дисциплинам, с другой стороны, расширяется научный кругозор и улучшается профессиональная подготовка будущего специалиста.

Обратные задачи в промышленности

В промышленности, и особенно в современных высоких технологиях, роль обратных и некорректных задач и численных методов их решения невозможно переоценить. Именно применение вычислительной техники позволяет оптимизировать технологические процессы, прогнозировать развитие различных регионов и отраслей промышленности, восстанавливать историю тех или иных процессов и событий и многое другое.

С появлением ЭВМ математика, как впервые сформулировал А.А. Самарский, приобрела свойство экспериментальной науки. Особенно важным это становится при активном вторжении

в нашу жизнь суперкомпьютерных вычислений и облачных технологий. Уже сейчас можно хранить, а при определенном навыке и обрабатывать, свои файлы в «облаке», имея при себе небольшой персональный компьютер с выходом в интернет, не только покупать авиабилеты и практически любые товары, но и получать любые консультации, включая юридические и медицинские. Можно оперативно решать и большие задачи по математическому моделированию, выходя на суперкомпьютеры через интернет. В перспективе на основе открытого кода будут развиваться виртуальные «облачные лаборатории».

Казалось бы, возможности неограниченно растут. Но растут и возможности ошибок в вычислениях. По выражению С.К. Годунова надвигается «экологическая катастрофа» в компьютерном моделировании и жизненно важно научиться учитывать и контролировать ошибки вычислений. Дело в том, что при выполнении даже элементарных машинных операций (умножения, деления) результат содержит ошибку вычисления, которая возрастает с увеличением количества машинных команд в алгоритме. Специалисты посчитали, что для моделирования образования белка методами молекулярной динамики потребуется около 1025 машинных команд. На одноядерном персональном компьютере с тактовой частотой 3.2 Ghz для этого потребуется 106 веков. Но на подходе эксафлопсные суперкомпьютеры, поэтому уже сейчас ведутся работы по оптимизации моделей, созданию специальных алгоритмов для архитектуры параллельных систем, по учету и анализу ошибок вычислений.

Например, при создании 10-петафлопсного суперкомпьютера одновременно создают петафлопсный компьютер (дублер), на котором должно обрабатываться программное обеспечение.

Появляются возможности решать самые сложные и интересные обратные задачи – задачи поиска уравнений, описывающих сложные физические процессы. Если до появления мощных ЭВМ основные законы и уравнения открывались в результате многолетних наблюдений и опытов (разумеется, плюс гениальность первооткрывателя!), то сейчас опыты можно проводить на суперкомпьютерах. Эти работы, например, проводятся творческим коллективом под руководством С.К. Годунова при изучении сварки взрывом (и многих других нелинейных процессов). С одной стороны, есть экспериментальные данные, с другой стороны, проводится поиск адекватной математической модели на основе законов сохранения и параллельного компьютерного моделирования.

Работа поддержана грантом РФФИ №12-01-00773-а и Президиумом СО РАН (интеграционный проект 14).

Список литературы

- [1] Нелинейные некорректные задачи. / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. М.: Наука, 1995.
- [2] Теория операторов и некорректные задачи. / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. Новосибирск: Наука, 2010.
- [3] Обратные задачи математической физики. / В.Г. Романов. Москва, 1984.
- [4] Обратные и некорректные задачи. / С.И. Кабанихин. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.

УДК 517.95

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Т.Ш. Кальменов, Д. Сураган, Н.Е. Токмагамбетов

Институт математики и математического моделирования МОН РК

Abstract. Problems of finding boundary conditions of classical volume potentials such as Newton, heat and wave potentials are stated. The problems has been solved i.e., find corresponding non-local boundary value problem which is correct and its unique solution coincides with volume potentials.
Keywords: Newton potential, heat potential, wave potential, the Helmholtz operator, fundamental solution.

Андатпа. Осы жумыста Ньютон, жылу және толкын потенциалдарынын шекаралык шарттары табылды.

Кілттік создер: Ньютон потенциалы, жылу потенциалы, толкын потенциалы, Гельмгольц операторы, фундаменталды шешім.

Аннотация. Для Ньютонова, теплового и волновых потенциалов была поставлена задача на оперделение граничных условий. Эта задача была положительно решена, т.е. оказалось что изучаемые потенциалы являются единственными классическими решениями некоторых нелокальных задач, более того имеют приложения в различных сферах науки.

Ключевые слова: Ньютоновы потенциал, тепловой потенциал, волновой потенциал, оператор Гельмгольца, фундаментальное решение.

Эллиптический случай

Объемные потенциалы для уравнений Лапласа и Гельмгольца в силу своей теоретической и прикладной значимости являются одними из ключевых понятий современной теории потенциала и составляют важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Ключевыми этапами развития этой теории явились исследования, проведенные Ньютоном, где наряду с фундаментальными исследованиями целого ряда существенных вопросов данной теории, была также показана практическая значимость проблемы. Различные приложения объемного потенциала в электростатике, теплопроводности, упругости, диффузии и других областях науки хорошо известны и привлекли внимание таких учёных, как Лаплас, Гаусс, Пуассон, Грин, Бельтрами, Кирхгоф, лорд Кельвин, Гобсон, Ляпунов, Соболев, Бизадзе и других [см. например 1, 2], которые внесли значительный вклад в развитие этой теории в течение нескольких столетий. Объемный потенциал широко используется в решении классических задач Дирихле, Неймана и других краевых задач [см. 3,4 и 5].

В работе Т.Ш. Кальменова и Д. Сурагана [6] для произвольной ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с достаточно гладкой границей S впервые было найдено граничное условие объемного потенци-

ала, то есть доказан был тот факт, что для функций $f \in L_2(\Omega)$ объемный потенциал

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y) f(y) dy$$

является единственным решением уравнения

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_S \left[\frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS = 0, \quad x \in S,$$

где $\varepsilon(x, y)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа, а n – внешняя нормаль. И в случае двухмерного круга и трехмерного шара были найдены собственные значения и собственные функции объемного потенциала, то есть собственные значения и собственные функции спектральной задачи

$$\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_S \left[\frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS = 0, \quad x \in S.$$

Эти задачи также в обширной форме представлены в работе [7]. А в статье [8] для ограниченной односвязной области получены граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения. Также, хотелось бы отметить работу [9], где для полипараболического уравнения был изучен аналогичный вопрос в цилиндрической области. В работе [10] для решения неоднородного уравнения Гельмгольца в ограниченной области с достаточно гладкой границей предложена новая постановка граничных условий, обладающих свойством подавлять волны, отраженные от границы. Показано, что внутри ограниченной области это решение совпадает с решением задачи, поставленной в неограниченной области с условием излучения Зоммерфельда. Здесь более подробно остановимся на случае оператора Гельмгольца, объемный потенциал которого исследовался в [10].

Обозначим через $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ ограниченную область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

И нормальную производную обозначим через $\frac{\partial}{\partial n} := \frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + n_n \frac{\partial}{\partial y_n}$, где n_1, \dots, n_n – составляющие внешней единичной нормали к $\partial\Omega$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$.

Будем говорить, что поверхность Ляпунова $\partial\Omega$ достаточно гладкая поверхность, если для нее справедлива формула Грина

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS_y,$$

для функции v, u из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, имеющих правильную нормальную производную на $\partial\Omega$ и $\Delta v, \Delta u \in L_2(\Omega)$ где Δ – оператор Лапласа. К примеру ограниченные замкнутые поверхности класса C^2 – достаточно гладкие поверхности.

Рассмотрим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \hat{k}^2(x)u = f, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $f \in C^1(R^n)$ и $\text{supp} f \subseteq \bar{\Omega}$, решения которого удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(n-1)/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0, \tag{2}$$

требуящим, чтобы на бесконечности волны рассеяния были уходящими в соответствии с физическим смыслом задачи. Здесь функция $\widehat{k}^2(x)$ определяется свойствами среды внутри Ω , k - волновое число и r - радиальная координата.

Обозначим

$$\alpha(x) = 1 - \frac{\text{Re}\{\widehat{k}^2(x)\}}{k^2}, \beta(x) = -\frac{\text{Im}\{\widehat{k}^2(x)\}}{k^2}.$$

Тогда уравнения (1) запишется следующим образом:

$$\Delta u(x) + k^2(1 - \alpha(x) - i\beta(x))u(x) = f, x \in R^n,$$

причем $\text{supp}\alpha, \text{supp}\beta \subseteq \bar{\Omega}$.

Всюду ниже мы будем считать выполненными следующие предположения.

Предположение 1. $\beta(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}$ (среда в Ω имеет поглощающие свойства).

Предположение 2. $\alpha(x), \beta(x) \in C^1(R^n)$ и $\text{supp}\alpha \subseteq \text{supp}\beta \subseteq \bar{\Omega}$.

Имеет место

Теорема 1. (Безменов) Пусть выполнены предположение 1, предположение 2 и $f(x)$ - произвольная функция класса $C^1(R^n)$, причем $\text{supp} f \subseteq \bar{\Omega}$. Тогда классическое решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее условиям излучения (2), существует и единственно.

Постановка задачи: Найти граничные условия для уравнения (1) на $\partial\Omega$ таким образом, чтобы решение полученной внутренней задачи совпадал бы с решением задачи (1)-(2) в $\bar{\Omega}$. На языке физики это означает, что граничные условия должны обладать следующим свойством: волны, приходящие на $\partial\Omega$ из Ω , должны проходить через $\partial\Omega$ без какого-либо отражения.

Пусть $\alpha(x) \equiv 0, \beta(x) \equiv 0, f \in C^1(R^n), \text{supp} f \subseteq \bar{\Omega}$ и $k^2 \neq \lambda^D$ где λ^D -собственный значений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в Ω :

$$-\Delta u = \lambda^D u, x \in \Omega; u(x) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Найти решение уравнения (1) т.е. решить уравнение

$$\Delta u + k^2 u = f, x \in \Omega, \tag{3}$$

с краевым условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y, k)}{\partial n_y} u(y) dS_y - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y, k) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y = 0, x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

Где $\varepsilon_n(x-y, k)$ - фундаментальное решение оператора Гельмгольца $(\Delta + k^2)$, $k \equiv const$, удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда (2).

Теорема 2. При $k^2 \neq \lambda^D$ функция

$$u = \int_{\Omega} \varepsilon_n(x-y, k) f(y) dy, x \in \Omega,$$

является единственным решением задачи (3)-(4).

Случай теплового и волнового потенциала

Оператор теплопроводности в многомерном случае

В этом подразделе дадим обобщение результатов работ [6]–[10] на случай оператора параболического типа в нецилиндрической области. В действительности, для многомерного по пространственному переменному уравнения теплопроводности будет изучена одна нелокальная начально–краевая задача в нецилиндрической области.

Пусть дана нецилиндрическая область $Q \equiv \{x \in \Omega, t \in (0, \gamma(x))\} = \{t \in (0, T), x \in \Omega_t\}$. Здесь $Q \subset R^{n+1}$ – ограниченная, односвязная область с границей S , и $\Omega_t \subset R^n$ усеченная область Q в момент времени t с достаточно гладкой границей S_t . Рассмотрим следующую нелокальную начально–краевую задачу

$$\diamond u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$B_u(x, t) \equiv -\frac{u(x, t)}{2} + \int_0^t \int_{S_\tau} \left[q(x - \xi, t - \tau) u(\xi, \tau) - \varepsilon(x - \xi, t - \tau) \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial n_\xi} \right] dS d\tau = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (7)$$

где $q(x - \xi, t - \tau) = \frac{\partial \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial n_\xi} + \varepsilon(x - \xi, t - \tau) \cos n(\xi)$, $n(\xi)$ – угол между касательной плоскостью в точке $\xi \in S$ и вектором $\overline{O\xi'}$, ξ' – проекция ξ на Ω -плоскость, $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ – производная по внешней нормали боковой границы и $\varepsilon(x, t) = \frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ – фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности [11] и $\diamond_{x,t} = \partial/\partial t - \Delta_x$, $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Известно что [11], если функция $f(x, t) \in C_{x,t}^{\beta, \beta/2}(\overline{Q})$, то $u(x, t) \in C_{x,t}^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{Q})$ где $0 < \beta < 1$.

Теорема 3. Тепловой потенциал

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega_\tau} \varepsilon(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

является единственным классическим решением нелокальной начально–краевой задачи (5)–(7).

Потенциал волнового оператора

В ограниченной области $\Omega \equiv \{(x, t) : (0, l) \times (0, T)\}$ рассмотрим одномерный волновой потенциал

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \varepsilon(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (8)$$

где $\varepsilon(x - \xi, t - \tau) = \frac{1}{2} \theta(t - \tau - |x - \xi|)$ – фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения, т.е.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi, t - \tau),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial \xi^2} = \delta(x - \xi, t - \tau),$$

$$\varepsilon(x - \xi, t - \tau)|_{\tau=t} = \frac{\partial \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial t}|_{\tau=t} = \frac{\partial \varepsilon(x - \xi, t - \tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = 0.$$

Известно что, если функция $f(x, t) \in L_2(\Omega)$, то $u(x, t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ и объемный волновой

потенциал (8) удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), (x, t) \in \Omega, f \in L_2(\Omega) \quad (9)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, 0 < x < l. \quad (10)$$

Волновой потенциал (8) широко используется при решении различных краевых задач для волнового уравнения. Ниже находим боковые граничные условия, порождаемые волновым потенциалом (8).

Теорема 4. Пусть функция $f(x, t) \in L_2(\Omega)$, тогда $u(x, t)$ – волновой потенциал (8) удовлетворяет боковым граничным условиям

$$(u_x - u_t)(0, t) = 0, x = 0, 0 < t < T, (u_x + u_t)(l, t) = 0, x = l, 0 < t < T. \quad (11)$$

Обратно, если функция $u(x, t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ удовлетворяет уравнению (9) и начальным условиям (10), а также боковым граничным условиям (11) то функция $u(x, t)$ однозначно определяет одномерный волновой потенциал (8).

Отметим, что граничное условие (11) волнового потенциала (8) является локальным граничным условием в отличие от граничного условия объемного потенциала Лапласа приведенного в работе [6].

Список литературы

- [1] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. - Москва: Изд-во Наука, 1983. - 336 с.
- [2] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. - Москва: Изд-во Наука, 1983. - 446 с.
- [3] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - Москва: Изд-во Наука, 1966. - 204 с.
- [4] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - Москва: Изд-во Наука, 1981. - 448 с.
- [5] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. - Шымкент: Изд-во "Гылым 1993. - 448 с.
- [6] Кальменов Т.Ш., Сураган Д., К спектральным вопросам объемного потенциала, Доклады Академии наук, 2009, Т. 428, №1, С. 16–19
- [7] Kalmenov T.Sh., Suragan D., A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potentials, Operator Theory: Advances and Applications, 2011, 216, 187–210
- [8] Кальменов Т.Ш., Сураган Д., Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения, Дифференциальные уравнения, 2012, Т. 48, №4, С. 595–599
- [9] Suragan D., Tokmagambetov N., On transparent boundary conditions for the high-order heat equation, Сиб. электрон. матем. изв., 10 (2013), 141–149

- [10] Кальменов Т.Ш., Сураган Д., Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012, Т. 52, №6, 1063–1068
- [11] Krylov N.V., *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.12, Providence: Amer. Math. Soc., 1996

УДК 517.984

ПЕРВЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОКОЛОТОМ ОТРЕЗКЕ ¹

Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. We find formulas for the first regularized trace (sort of an abstract formula of Gel'fand-Levitan) for a double differentiation operator on the punctured segment. Proof of the main result is carried out by contour integration, as amended analytic perturbation theory. Some well-known trace formulas are generalized.

Аңдатпа. Ойылған кесіндіде екі еселі дифференциалдық оператор үшін бірінші регуляризацияланған із табылды. Негізгі нәтижелердің дәлелі контурлық интегралдау арқылы келтірілген. Белгілі кейбір нәтижелер жалпыланды.

Аннотация. Найдены формулы первого регуляризованного следа (типа абстрактной формулы Гельфанда-Левитана) для оператора двукратного дифференцирования на проколоте отрезке. Доказательство основного результата проводится методом контурного интегрирования с учетом поправок аналитической теории возмущений. Некоторые известные формулы следов обобщаются.

В этой работе исследуем первый регуляризованный след оператора L , порожденного дифференциальным выражением

$$\ell(y) \equiv -y''(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \int_0^{\pi/2} (-y''(x)) \overline{\sigma(x)} dx - \int_{\pi/2}^{\pi} (-y''(x)) \overline{\sigma(x)} dx, \quad (3)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + \alpha y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right), \quad (4)$$

¹Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012 г.-2014 г.

$$y(\pi) = 0, \tag{5}$$

где $\sigma(\cdot) \in L_2[0, \pi]$. Заметим, что при $\alpha \neq \frac{4}{\pi}$ оператор L является ограниченно обратимым [1-2].

В случае, когда $\sigma(\cdot) \equiv 0, \alpha = -1$ оператор L эквивалентен оператору Штурма-Лиувилля, порожденному дифференциальным выражением

$$-y''(x) + \delta(x - \frac{\pi}{2})y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{6}$$

с краевыми условиями Дирихле (2), (5) [3].

В работе [4] показано, что первый регуляризованный след задачи (2), (5),(6):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} + (-1)^n \frac{1}{\pi} \right)$$

сходится, а его сумма равна $-\frac{1}{8}$. Практическое приложение таких видов операторов можно найти в работе [5].

В случае гладкого потенциала $q(\cdot) \in C^1[0, \pi]$ для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле хорошо известна классическая формула первого регуляризованного следа (см. [6]-[9]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x)dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x)dx - \frac{q(0) - q(\pi)}{4}.$$

Эта формула следа сохраняется для произвольного потенциала $q(\cdot) \in L_2$, для которого ряд Фурье в точках 0 и π сходится к значениям функции [10].

В случае $q(\cdot) \in L_1$ первый регуляризованный след вычислен В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим [11]. Они показали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 + b_{2n}) = 0,$$

причем ряд сходится для произвольной функции $q(\cdot) \in L_1$. Здесь $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx du(x)$, а $u(\cdot)$ — функция ограниченной вариации на $[0, \pi]$, непрерывная в концах этого отрезка. В случае $q(\cdot) = u'(\cdot)$ (равенство в смысле распределений) для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле в работе [12] доказана формула следа:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - k^2 + b_{2k}) = -\frac{1}{8} \sum h_j^2,$$

где h_j — скачки функции $u'(\cdot)$.

В этой работе для наглядности результата предположим, что

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем под первым регуляризованным следом изучаемого оператора L будем понимать

предел частичных сумм при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{\lambda_k \in \text{int} \gamma_n} \lambda_k - \sum_{(2k+1) \in \text{int} \gamma_n} \left((2k+1)^2 + \frac{4(2-\alpha\pi)}{\pi^2} \right) \quad (8)$$

если существует некоторая неограниченно расширяющаяся последовательность контуров γ_n . Обозначим через γ_n окружность в комплексной плоскости радиуса $n + \frac{1}{2}$.

Теорема. Пусть L — оператор двукратного дифференцирования соответствующий задаче (1)-(5) и граничная функция $\sigma(\cdot)$ представима в виде формулы (7). Тогда существует предел частичных сумм (8) при $n \rightarrow \infty$, а его сумма равна $-\frac{1}{2} \left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi} \right)^2$.

Список литературы

- [1] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271, №6. С. 1307-1311.
- [2] Kanguzhin B.E. and Nurakhmetov D.B. Boundary Value Problems for 2nd Order Non-homogeneous Differential Equations with Variable Coefficients// Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition). 2011. Vol. 28, 28 (Sum.121), №1, P. 47-56.
- [3] Савчук А.М., Шкаликков А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т.66. №6. С.897-912.
- [4] Савчук А.М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ — потенциалом // УМН. Т.55. №6(336). С.155-156.
- [5] Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvabel models in quantum mechanics. New Yourk: Springer, 1988 (Second edition: AMS, 2005)
- [6] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т.88. №4. С. 593-596.
- [7] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. №2. С. 259-262.
- [8] Дикий Л.А. Об одной формуле Гельфанда-Левитана // УМН. 1953. Т.8. №2. С.119-123.
- [9] Левитан Б.М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля // УМН. 1964. Т.19. №1. С.161-165.
- [10] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [11] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Собственное значение и след оператора Штурма-Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала // Докл. РАН. 1999. Т. 365. №3. С.295-297.
- [12] Савчук А.М., Шкаликков А.А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 2001. Т.69. №3. С.427-442.

УДК 681.5.015

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЕОЭЛЕКТРИКИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ СРЕД

А.Л. Карчевский, К.Т. Искаков, Ж.О. Оралбекова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, Казахский национальный педагогический университет им. Абая

Abstract. The paper presents algorithm of definition the dielectric permittivity, conductivity and medium points of discontinuity. The solution of the inverse problem geoelectrics based on minimizing the residual functional. Presented proof of differentiability of the residual functional coordinate breakpoints environment and for this view of derivative.

Keywords: System of Maxwell equations, inverse geoelectric problem, minimization of residual functional, differentiability of residual functional.

Аңдатпа. Бұл мақалада диэлектрлік өтімділікті, өткізгіштікті және ортаның үзіліс нүктелерін анықтау алгоритмі келтірілді. Геоэлектриканың кері есебін шешу ауытқу функционалын минимизациялауға негізделген. Ортаның үзіліс нүктелері бойынша ауытқу функционалының дифференциалдануының дәлелі және осы туынды үшін түрі көрсетілді.

Кілттік сөздер: Максвелл теңдеулер жүйесі, геоэлектриканың кері есебі, ауытқу функционалын минимизациялау, ауытқу функционалының дифференциалдануы.

Аннотация. В статье представлен алгоритм определения диэлектрической проницаемости, проводимости и точек разрыва среды. Решение обратной задачи геоэлектрики основывается на минимизации функционала невязки. Представлено доказательство дифференцируемости функционала невязки по координате точки разрыва среды и вид для этой производной.

Ключевые слова: Система уравнений Максвелла, обратная задача геоэлектрики, минимизация функционала невязки, дифференцируемость функционала невязки.

Из уравнений Максвелла для компоненты $E_2(t, x, z)$ может быть получено дифференциальное уравнение второго порядка [1]:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} \right).$$

Сделаем преобразование Фурье по горизонтальной переменной x и по временной переменной t . Окончательно получим следующее уравнение:

$$u_{zz} - (\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon + i \omega \mu_0 \sigma) u = 0. \quad (1)$$

В точках разрыва среды считаем, что выполняются условия склейки

$$[u]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{0, N_l}. \quad (2)$$

Источник сосредоточен в точке $z_* < 0$, что эквивалентно условиям склейки в этой точке

$$[u]_{z_*} = 0, \quad [u_z]_{z_*} = -g(\omega)\mu_0. \quad (3)$$

Считаем, что имеют место условия затухания на бесконечности

$$u \rightarrow 0(z \rightarrow \pm\infty), \quad (4)$$

и относительно решения прямой задачи (1)-(4) известна дополнительная информация

$$u|_{z=0} = f(\omega, \lambda). \quad (5)$$

Здесь λ и ω – параметры преобразования Фурье по переменным x и t соответственно, обозначение $[\cdot]_z$ используется для склейки, т.е. $[w]_z = w(z+0) - w(z-0)$, и везде ниже черта над комплексной величиной будет обозначать комплексное сопряжение.

Обратная задача заключается в определении кусочно-постоянных функций ε и σ , если о решении прямой задачи (1)-(4) известна дополнительная информация (5).

Теорема: Существует производная функционала невязки по координате точки разрыва среды.

Доказательство дифференцируемости функционала невязки по координате точки разрыва среды заключается в следующем: доказывается, что производные справа и слева существуют и они равны между собой (см. также работы [1-4]).

$$f'(z_s) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_s + \Delta z) - f(z_s)}{\Delta z}.$$

Функционал невязки:

$$J[z_s] = \sum_{\omega} |u^0 - f|^2.$$

χ - кусочно-постоянная, $\chi = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu - i\omega \mu \sigma$, $r^2 = \lambda^2 - \chi$. Введем χ_+ , её разрывы в точках совпадают с χ кроме местоположения разрыва в точке z_s .

$$\chi \sim u,$$

$$\chi_+ \sim u_+$$

$$\frac{J[z_s + h] - J[z_s]}{h} = \frac{1}{h} \sum_{\omega} \left[(u_+^0 - f) (\overline{u_+} - \overline{f}) - (u^0 - f) (\overline{u^0} - \overline{f}) \right]. \quad (6)$$

Здесь и везде ниже черта сверху обозначает комплекснозначное сопряжение.

В выражении (6) добавим и отнимем $\pm (u_+^0 - f) (\overline{u^0} - \overline{f})$. В результате получим:

$$\frac{J[z_s + h] - J[z_s]}{h} = \frac{1}{h} \sum_{\omega} \left[(u_+^0 - f) (\overline{u_+^0} - \overline{u^0}) + (u_+^0 - u^0) (\overline{u^0} - \overline{f}) \right]. \quad (7)$$

Введем обозначение $\frac{u_+^0 - u^0}{h} = w_h$. Для (7) необходимо доказать предельный переход:

$$\begin{aligned} \frac{J[z_s + h] - J[z_s]}{h} &= \sum_{\omega} \left[(u_+^0 - f) \overline{w_h} + w_h (\overline{u^0} - \overline{f}) \right] \xrightarrow{?}_{h \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{?}_{h \rightarrow 0} \sum_{\omega} \left[(u_+^0 - f) \overline{w} + w (\overline{u^0} - \overline{f}) \right] = \\ &= \sum_{\omega} 2Re \left((\overline{u^0} - \overline{f}) w \right) \end{aligned}$$

(когда $h \rightarrow 0$ $\chi_+ \rightarrow \chi$, $u_+ \rightarrow u$).

Нетрудно получить постановку задачи для функции w_h :

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_h)_{zz} - r_+^2 w_h - \frac{\Delta r^2}{h} u = 0, \\ [(w_h)_z]_{z_k} = 0, \quad [w_h]_{z_k} = 0, \\ w_h \xrightarrow{z \rightarrow \pm \infty} 0; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\Delta r^2 = (\lambda^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon + \mu - i\omega \sigma + \mu) - (\lambda^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu - i\omega \sigma \mu) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu [\varepsilon]_{z_s} - i\omega \mu [\sigma]_{z_s}.$$

Введём функцию на рассмотрение

$$\frac{dw_h}{dz} = v.$$

Тогда дифференциальное уравнение из (9) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & r_+^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} = \frac{\Delta r^2}{h} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\frac{d}{dz} U - AU = F.$$

Пусть $U|_{z=z_s-0} = U_s = U|_{z=z_s+0}$, последнее равенство имеет место в силу условий склейки для функций v и w_h .

Используя метод вариации произвольной переменной, напишем решение:

$$U(z) = e^{A(z-z_s)} U_s + e^{A(z-z_s)} \int_{z_s}^z e^{-A(\xi-z_s)} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi, z \in [z_s, z_s + h].$$

Положим $z = z_s + h$, тогда $U|_{z=z_s+h-0} = e^{Ah} U_s + e^{Ah} \int_{z_s}^{z_s+h} e^{-A(\xi-z_s)} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi$.

Так как u, w непрерывны, то получим $U|_{z=z_s+h-0} = U|_{z=z_s+h+0}$.

Запишем разницу $U|_{z=z_s+h+0} - U|_{z=z_s-0} = (e^{Ah} - E) U_s + e^{Ah} \cdot \frac{1}{h} \int_{z_s}^{z_s+h} e^{-A(\xi-z_s)} \Delta r^2 u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi$.

Здесь можно перейти к пределу при $h \rightarrow \infty$. Поскольку под интегралом непрерывная функция,

получим:

$$U|_{z=z_s+h+0} - U|_{z=z_s-0} = (e^{Ah} - E) U_s + e^{Ah} \cdot \frac{1}{h} \int_{z_s}^{z_s+h} e^{-A(\xi-z_s)} \Delta r^2 u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$E \qquad \qquad \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta r^2 u|_{z=z_s}, \quad h \rightarrow 0$$

Таким образом, скачок матрицы U равен:

$$[U]_{z_s} = \Delta r^2 u|_{z=z_s} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[U]_{z_s} = \begin{bmatrix} w_z \\ w \end{bmatrix},$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - r^2 w = 0 \\ \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{s+1, N} \quad (k \neq s) \\ \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_s} = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu [\varepsilon]_{z_s} - i\omega \mu [\sigma]_{z_s}) \cdot u|_{z=z_s} \\ [w]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (9)$$

w - предел $w = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_f - u}{h}$.

Следовательно, доказали существование производной функционала невязки $J' [z_s]$ справа.

Введем функцию $w_h = \frac{u_- - u}{h}$, которая, как нетрудно видеть, удовлетворяет задаче:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w_h}{\partial z^2} - r_-^2 w = \frac{\Delta r^2}{h} \\ \left[\frac{\partial w_h}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w_h]_{z_k} = 0 \\ w_h \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \pm \infty \end{array} \right. \quad (10)$$

Перепишем (10) в виде системы двух уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & r_-^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} = \frac{\Delta r^2}{h} u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} U - AU = F, \quad (11)$$

где $v = \frac{\partial w}{\partial z}$.

Пусть $U|_{z=z_s+0} = U_s = U|_{z=z_s-0}$, как и ранее, последнее равенство имеет место в силу условий склейки для функций v и w_h . Решаем уравнение (12) на интервале $[z_s - h, z_s]$, тогда решение уравнения получим в следующем виде:

$$U(z) = e^{A(z-z_s)}U_s + e^{A(z-z_s)} \int_{z_s}^z e^{-A(\xi-z_s)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) d\xi$$

и

$$U|_{z=z_s-h+0} = e^{-Ah}U_s + e^{-Ah} \int_{z_s}^{z_s-h} e^{-A(\xi-z_s)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) d\xi.$$

В силу условий склейки $U|_{z=z_s-h+0} = U|_{z=z_s-h-0}$. Запишем разность и осуществим предельный переход по h :

$$U|_{z=z_s+0} - U|_{z=z_s-h-0} = \underbrace{(E - e^{-Ah})}_{\downarrow E} U_s + e^{-Ah} \int_{z_s}^{z_s-h} \underbrace{e^{-A(\xi-z_s)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\downarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) d\xi$$

$$- \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta r^2 u|_{z=z_s}, \quad h \rightarrow 0$$

$$[U]_{z_s} = -\Delta r^2 u|_{z=z_s} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По определению $[U]_{z_s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} \\ w \end{bmatrix}$, где

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - r^2 w = 0, \\ [w]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{s+1, N} \quad (k \neq s), \\ \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_s} = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu [\varepsilon]_s - i\omega \mu [\sigma]_s) \cdot u|_{z=z_s}. \end{cases}$$

Следовательно, доказали существование производной функционала невязки $J' [z_s]$ слева.

Очевидно, что производные слева и справа равны, следовательно, производная существует и даётся формулой (8), где функция w есть решение задачи (10).

Работа поддержана грантом МОН РК 1173/ГФ2 №1843 от 28.09.2012 г., №378 от 04.02.2013 г. и грантом РФФИ 12-01-00773 и совместным проектом 12-2013 между СО РАН и НАН Украины.

Список литературы

[1] Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers. A.L. Karchevsky // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2010. - №4, P. 371-388.

[2] Горизонтально-слоистая среда: дифференцирование по координате точки разрыва среды. А.Л.Карчевский // Технологии сейсморазведки. 2011. - № 3, С.17-22.

- [3] Восстановление продольной и поперечной скоростей и границ тонких слоёв в тонкослоистой пачке. А.Л.Карчевский // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. - т. 15, №1, С. 67-82.
- [4] Existence of the residual functional derivative with respect to a coordinate of gap point of medium. Zh.O. Oralbekova, K.T. Iskakov and A.L. Karchevsky // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2013. - V.12, №2 (в печати)

УДК 517.9

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Крыкпаева

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In this work one modification of a method of fictitious domains for non-stationary nonlinear model of non-Newtonian liquid in limited domain is considered. Existence and convergence of the generalized decision are proved. The assessment of speed of convergence of higher order in comparison with known types of a method of fictitious domains is received. Uniform estimates of decisions in norms of functional spaces are removed.

Keywords: generalized decision, estimation, fictitious domains.

Аңдатпа. Бұл жұмыста шенелген аймақта ньютондық емес сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз пішімі үшін жалған аймақтар әдісінің бір модификациясы қарастырылады. Жалпылама және күшті шешімдердің бар болуы мен жинақталуы дәлелденген. Күшті шешімнің жоғары дәрежелі жинақталу бағасы алынған. Шешімдердің функционалдық кеңістіктерде бірқалыпты бағалары алынған.

Кілттік сөздер: жалпылама шешім, бағалау, жалған аймақ.

Аннотация. В данной работе рассматривается одна модификация метода фиктивных областей для нестационарной нелинейной модели неньютоновской жидкости в ограниченной области. Доказано существование и сходимость обобщенного решения. Получена оценка скорости сходимости сильного решения более высокого порядка по сравнению с известными видами метода фиктивных областей. Выведены равномерные оценки решений в нормах функциональных пространств.

Ключевые слова: обобщенное решение, оценка, фиктивная область.

Метод фиктивных областей (МФО) подробно описан в работе [1]. Для нестационарной модели динамики неньютоновской жидкости МФО в классе обобщенных функций исследован в работе [2]. Так как теоретическое обоснование метода фиктивных областей включает в себе, в частности, вывод оценки скорости сходимости решению вспомогательной задачи к соответствующему решению исходной задачи, то разработка новых видов или модификации МФО является актуальным вопросом в данном направлении. Один из таких модификаций МФО был предложен

впервые в работе [3] для задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В работе [3] была получена оценка скорости сходимости более высокого порядка по степени малого параметра, по сравнению с неулучшаемыми оценками скоростей сходимости решений для "классического" вида МФО, описанный в работах [1]-[2]. В данной работе это модификация МФО впервые применяется и обосновывается для нестационарной нелинейной модели неньютоновской жидкости.

Итак, в области $Q = [0, T] \times \Omega$, $R^2 \supset \Omega$ - ограниченная область, рассмотрим нестационарную модель неньютоновской жидкости [4]

$$Re [v_t + (v \cdot \nabla) v] + \nabla P = (1 - \alpha) \Delta v + \nabla S + f, \quad (1)$$

$$S + We [S_t + (v \cdot \nabla) S] = 2\alpha D, \quad div v = 0, \quad (2)$$

где $v(t, x) = (v_1, v_2)$ - вектор-скорости жидкости, $P(t, x)$ - давление, $S(t, x)$ - упругая часть тензора напряжений . Тензорная функция $D = (\nabla v + (\nabla v)^T) / 2$ - тензор скоростей деформации, $Re = UL/\mu$ и $We = \lambda_1 U/L$ - соответственно число Рейнольдса и число Венсенберга, $\alpha = 1 - \lambda_2/\lambda_1$ - числовой параметр, λ_1 - время релаксации, λ_2 - время запаздывания, U , L - характерные скорость и размер модели, μ - вязкость жидкости, f - вектор массовых сил.
с начально-краевыми условиями

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad S|_{t=0} = S_0(x), v|_G = 0 \quad (3)$$

где G - граница области Ω . Далее рассмотрим модификацию метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам, представляющая собой вспомогательную задачу относительно исходной задачи (1)-(3) в области $Q_1 = [0, T] \times D_0$, $D_0 \supset \Omega$

$$Re [v_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) v^\varepsilon] + \nabla P^\varepsilon = div(K(v^\varepsilon) \nabla v^\varepsilon) + \nabla S^\varepsilon + f, \quad (4)$$

$$S^\varepsilon + We [S_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla) S^\varepsilon] = 2\alpha D^\varepsilon, \quad div v^\varepsilon = 0, \quad (5)$$

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0(x), \quad S^\varepsilon|_{t=0} = S_0(x), v^\varepsilon|_{G_1} = 0 \quad (6)$$

где G_1 - граница области D_0 , $G \cap G_1 = \emptyset$. (4)-(6) дополняются условиями согласования на границе

$$[S^\varepsilon]|_G = 0, \quad [v^\varepsilon]|_G = 0, \quad \left[K(v^\varepsilon) \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n} - \delta P^\varepsilon \right] |_G = 0 \quad (7)$$

здесь: δ - метрический тензор с компонентами $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $K^\varepsilon(v^\varepsilon) = 1 - \alpha$ при $x \in \Omega$, $K^\varepsilon(v^\varepsilon) = \frac{1-\alpha}{\varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta}$, $0 < \beta < 1$, при $x \in D_1 = D_0/\Omega$, а функций $f, v_0(x), S_0(x)$ продолжены нулем вне Ω . Кроме того, в дальнейшем будем использовать пространство $V(E)$ - замыкание в норме $W_2^1(E)$ множества бесконечно-дифференцируемых соленоидальных финитных в E вектор-функции [5].

Напомним также, что при $\beta = 0$ задача (4)-(7) представляет собой "классический" вид метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам, который был исследован в классе обобщенных функций в работе [3], где, в частности, было получена неулучшаемая оценка

скорости сходимости:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}^2 + \|S^\varepsilon - S\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}^2 + \|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}^2 \leq C\varepsilon \quad (8)$$

Мы же здесь планируем получить более высокую оценку скорости сходимости решений, по сравнению с (8). Далее приведем определение обобщенного решения вспомогательной задачи.

Определение 1. Функции $v^\varepsilon(t, x)$, $S^\varepsilon(t, x)$ называются обобщенным решением задачи (4)-(7), если $v^\varepsilon(t, x) \in L_\infty(0, T; L_2(D_0))$, $v^\varepsilon(t, x) \in L_2(0, T; V(D_0))$, $S^\varepsilon(t, x) \in L_\infty(0, T; L_2(D_0))$ и выполняются следующие интегральные тождества:

$$\int_0^T \left\{ -Re(v^\varepsilon, \Phi_t + (v^\varepsilon \cdot \nabla)\Phi)_{L_2(D_0)} + (K(v^\varepsilon)\nabla v^\varepsilon, \nabla\Phi)_{L_2(D_0)} + (S^\varepsilon : \nabla\Phi)_{L_2(D)} - (f, \Phi)_{L_2(D_0)} \right\} dt - (v_0, \Phi(0))_{L_2(D_0)} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ (S^\varepsilon : F)_{L_2(D_0)} - We(S^\varepsilon : F_t + (v^\varepsilon \cdot \nabla)F)_{L_2(D_0)} \right\} dt - (S_0 : F(0))_{L_2(D_0)} = \\ & = 2\alpha \int_0^T (D^\varepsilon : F)_{L_2(D_0)} dt \end{aligned} \quad (10)$$

для любых вектор-функций $\Phi(t, x) \in C^1(0, T; V(D_0))$ и тензорной функции $F(t, x) \in C^1(0, T; W_2^1(D_0))$ и таких, что $\Phi(T, x) = 0$, $F(T, x) = 0$. Здесь $(a, b)_{L_2(D_0)}$, $(a : b)_{L_2(D_0)}$ - соответственно скалярное и тензорное умножение в $L_2(D_0)$. Обобщенное решение для исходной задачи (1)-(3) определяется аналогично.

Далее имеет место

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(0, T; L_{\frac{5}{3}}(\Omega))$, $v_0 \in L_2(\Omega)$, $S_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (4)-(7) и при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно сходится к обобщенному решению задачи (1)-(3). Кроме того, имеют место следующие оценки

$$\|v^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|v_x^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} dt + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;W_2^1(D_0))} + \|S^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))} \leq C < \infty \quad (11)$$

здесь и в дальнейшем C - универсальная константа, не зависящая от малого параметра ε и определяющаяся от данных задачи.

Доказательство. Сначала получим необходимые априорные оценки. Умножим (4) скалярно на v^ε в $L_2(D_0)$:

$$\frac{Re}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_0)}^2 + (1-\alpha) \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1-\alpha}{\varepsilon} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} + (S^\varepsilon : \nabla v^\varepsilon)_{L_2(D_0)} + (f, v^\varepsilon)_{L_2(D_0)} = 0, \quad (12)$$

Далее умножим (5) тензорно на S^ε в $L_2(D_0)$:

$$\|S^\varepsilon\|_{L_2(D_0)}^2 + \frac{We}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|S^\varepsilon\|_{L_2(D_0)}^2 - 2\alpha(D^\varepsilon : S^\varepsilon)_{L_2(D_0)} = 0, \tag{13}$$

Теперь разделим (13) на α и сложим с (12), а затем полученное равенство проинтегрируем по t , предварительно оценив стандартно следующее слагаемое [5]:

$$\int_D f v^\varepsilon dx \leq C \|f\|_{L_{\frac{5}{3}}(\Omega)}^2 + \frac{1-\alpha}{2} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2, \tag{14}$$

В результате после несложных преобразований получим оценки (11). Далее имеет место следующая лемма:

Лемма 1. $\forall \delta \in (0, T)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int_0^{T-\delta} \|v^\varepsilon(t+\delta) - v^\varepsilon(t)\|_{L_2(D_0)}^2 dt \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2-\beta}} \right). \tag{15}$$

Доказательство. Зафиксируем значения δ и t и рассмотрим (4) в интервале $\tau \in [t, t+\delta]$. Умножим скалярно данное уравнение на некую функцию $\psi(t)$ в $L_2(D_0)$ и проинтегрируем по τ от t до $t+\delta$:

$$\begin{aligned} & Re \int_t^{t+\delta} (v_\tau^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon, \psi)_{L_2(D_0)} d\tau + \int_t^{t+\delta} (K(v^\varepsilon)\nabla v^\varepsilon, \nabla\psi)_{L_2(D_0)} d\tau + \\ & + \int_t^{t+\delta} (\nabla S^\varepsilon : \nabla\psi)_{L_2(D_0)} d\tau = \int_t^{t+\delta} (f, \psi)_{L_2(D_0)} d\tau \end{aligned} \tag{16}$$

Далее в (16) возьмем $\psi = v^\varepsilon(t+\delta) - v^\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до $T-\delta$, тогда аналогично [5] имеем:

$$Re \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_{D_0} (v_\tau^\varepsilon + (v^\varepsilon(t+\delta) - v^\varepsilon(t))) dx d\tau dt = Re \int_0^{T-\delta} \|v^\varepsilon(t+\delta) - v^\varepsilon(t)\|_{L_2(D_0)}^2 dt,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} (K(v^\varepsilon)\nabla v^\varepsilon, \nabla\psi)_{L_2(D_0)} d\tau dt \\ & = (1-\alpha) \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_\Omega \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla\psi dx d\tau dt - \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \frac{1-\alpha}{\varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta} \int \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla\psi dx d\tau dt, \end{aligned}$$

здесь стандартно показывается [5], что:

$$(1-\alpha) \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \int_\Omega \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla\psi dx d\tau dt \leq C\sqrt{\delta},$$

а 2-ое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \frac{1-\alpha}{\varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta} \int_{D_1} \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \psi dx d\tau dt \leq (1-\alpha) \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \varepsilon^{-1} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{1-\beta} \|\nabla \psi\|_{L_2(D_1)} d\tau dt \leq \\
& \leq (1-\alpha) \int_0^{T-\delta} \varepsilon^{-\frac{1}{2-\beta}} \|\nabla \psi\|_{L_2(D_1)} \int_t^{t+\delta} \varepsilon^{-\frac{1-\beta}{2-\beta}} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{1-\beta} d\tau dt \leq (1-\alpha) \int_0^{T-\delta} \varepsilon^{-\frac{1}{2-\beta}} \|\nabla \psi\|_{L_2(D_1)} \times \\
& \quad \times \left(\int_t^{t+\delta} \varepsilon^{-1} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{1-\beta} d\tau \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \delta^{\frac{1}{2-\beta}} dt \leq \\
& \leq C \delta^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\int_0^T \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2-\beta}} \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)} \right)^{2-\beta} dt \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \leq C \delta^{\frac{1}{2-\beta}},
\end{aligned}$$

остальные слагаемые для (16) оцениваются так же как в [5]. Лемма доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы проводится методом Галеркина. Приближенные решения задачи (4)-(7) будем искать в виде:

$$v_N^\varepsilon(t, x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \omega_j(x), \quad S_N^\varepsilon(t, x) = \sum_{j=1}^N \beta_j(t) \psi_j(x) \quad (17)$$

где $\omega_j(x)$ - базис в пространстве $V(D_0)$, $\psi_j(x)$ - базис в пространстве $W_2^2(D_0)$, а коэффициенты $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$ находятся из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& Re((v_N^\varepsilon)_t + (v_N^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon - \frac{f}{Re}, \omega_j)_{L_2(D_0)} + (1-\alpha) (\nabla v_N^\varepsilon, \nabla \omega_j)_{L_2(\Omega)} + \\
& + \frac{1-\alpha}{\|\nabla v_N^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta} (\nabla v_N^\varepsilon, \nabla \omega_j)_{L_2(D_1)} + (S_N^\varepsilon : \nabla \omega_j) = 0,
\end{aligned} \quad (18)$$

$$We((S_N^\varepsilon)_t + (v_N^\varepsilon \cdot \nabla) S_N^\varepsilon, \psi_j)_{L_2(D_0)} + (S_N^\varepsilon, \psi_j)_{L_2(D_0)} = 2\alpha (\nabla D_N^\varepsilon, \psi_j)_{L_2(D_0)}, \quad (19)$$

$$v_N^\varepsilon|_{t=0} = \sum_{j=1}^N (v_0(x), \omega_j) \omega_j, \quad S_N^\varepsilon|_{t=0} = \sum_{j=1}^N (S_0(x), \psi_j) \psi_j \quad (20)$$

Разрешимость задачи (17)-(19) в малом по времени следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Продолжимость решения в целом следует из равномерных оценок:

$$\|v_N^\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; L_2(D_0))} + \frac{1}{\varepsilon} \|v_N^\varepsilon\|_{L_2(0, T; W_2^1(D_1))}^{2-\beta} + \|v_N^\varepsilon\|_{L_2(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|S_N^\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} \leq C < \infty \quad (21)$$

которая выводится умножением (18) и (19) на $\alpha_j(t)$ и $\beta_j(t)$ соответственно и суммированием по $j = 1, \dots, N$ [5]. Также для $v_N^\varepsilon(t, x)$ из (17) имеет место аналогичная лемма:

Лемма 2. $\forall \delta \in (0, T)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int_0^{T-\delta} \|v_N^\varepsilon(t+\delta) - v_N^\varepsilon(t)\|_{L_2(D_0)}^2 dt \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2-\beta}} \right). \quad (22)$$

Оценки (21) и (22) позволяют из последовательностей $\{v_N^\varepsilon\}$, $\{S_N^\varepsilon\}$ выделить подпоследовательности, для которых имеют место следующие соотношения:

$$v_N^\varepsilon \rightarrow v^\varepsilon \quad * \text{ слабо в } L_\infty(0, T; L_2(D_0)), \quad v_N^\varepsilon \rightarrow v^\varepsilon \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V(D_0)),$$

$$v_N^\varepsilon \rightarrow v^\varepsilon \quad \text{сильно в } L_2(0, T; L_2(D_0)), \quad S_N^\varepsilon \rightarrow S^\varepsilon \quad \text{слабо в } L_\infty(0, T; L_2(D_0))$$

при $N \rightarrow \infty$.

Данные соотношения позволяют, аналогично [5], переходя к пределу в (18)-(20) показать, что предельные функции v^ε , S^ε - есть обобщенное решение задачи (4)-(7).

Надо еще заметить, что для v^ε , S^ε имеют место оценки (11), (15). Тогда из $\{v^\varepsilon\}$, $\{S^\varepsilon\}$ выделить подпоследовательности, для которых имеют место следующие соотношения:

$$v^\varepsilon \rightarrow v \quad * \text{ слабо в } L_\infty(0, T; L_2(D_0)), \quad v^\varepsilon \rightarrow v \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V(\Omega)),$$

$$v^\varepsilon \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_2(0, T; L_2(D_0)), \quad S^\varepsilon \rightarrow S \quad \text{слабо в } L_\infty(0, T; L_2(D_0))$$

$$v^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L_2(0, T; L_2(D_1)), \quad v^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } L_2(0, T; L_2(S)),$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соответствующих интегральных тождествах нетрудно показать, что предельные функции $v(t, x)$, $S(t, x)$ - есть обобщенное решение исходной задачи (1)-(3). Теорема 1 доказана.

Определение 2. Сильным решением задачи (4)-(7) называются функции $v^\varepsilon(t, x)$, $S^\varepsilon(t, x)$, $P^\varepsilon(t, x)$, обладающие квадратично суммируемыми производными, входящими в уравнения (1)-(2) и удовлетворяющие (1)-(2) и краевым условиям (3) почти всюду в D_0 .

Сильное решение для вспомогательной задачи (4)-(7) определяется аналогично.

Теорема 2. Пусть существует сильное решение вспомогательной задачи (4)-(7) и оно при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к сильному решению исходной задачи, тогда имеют место следующие оценки скорости сходимости:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + \|v_x^\varepsilon - v_x\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))} + \|S^\varepsilon - S\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} \leq C\varepsilon^{\frac{1+\beta}{4(1-\beta)}} \quad (23)$$

(Здесь можно сравнить (23) с (8) при $\beta \rightarrow 1$).

Доказательство. Продолжим v и S нулем вне Ω . Затем умножим (1) и (2) скалярно в $L_2(\Omega)$ на некие функции $\varphi \in L_\infty(0, T; V(D_0))$ и $\psi \in L_\infty(0, T; W_2^1(D_0))$ соответственно:

$$Re(v_t + (v \cdot \nabla)v, \varphi)_{L_2(\Omega)} + (1 - \alpha)(\nabla v, \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} + (S : \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} = \quad (24)$$

$$= (f, \varphi)_{L_2(\Omega)} + \int_S \left((1 - \alpha) \frac{\partial v}{\partial n} - P \cdot n, \varphi \right) dS,$$

$$(S + We(S_t + (v \cdot \nabla)S), \psi)_{L_2(\Omega)} = 2\alpha(D : \psi)_{L_2(\Omega)}, \quad (25)$$

Далее (4) и (5) умножим скалярно в $L_2(D_0)$ на φ и ψ соответственно:

$$\begin{aligned} & Re(v_t^\varepsilon + (v \cdot \nabla)v^\varepsilon, \varphi)_{L_2(D_0)} + (1 - \alpha)(\nabla v^\varepsilon, \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} + \\ & + \frac{1 - \alpha}{\varepsilon \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta} \int_{D_1} \nabla v^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx + (S^\varepsilon : \nabla \varphi)_{L_2(D_0)} = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$(S^\varepsilon + We(S_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla)S^\varepsilon), \psi)_{L_2(D_0)} = 2\alpha(D : \psi)_{L_2(\Omega)}, \quad (27)$$

Теперь обозначим $\omega = v^\varepsilon - v$, $T = S^\varepsilon - S$ и возьмем $\varphi = \omega$, $\psi = T$. Далее рассмотрим разность (26) и (24), (27) и (25) соответственно.

$$\begin{aligned} & Re \int_{D_0} (\omega_t \omega + (\omega \cdot \nabla)v^\varepsilon \omega) dx \\ & + (1 - \alpha) \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1 - \alpha}{\varepsilon \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta}} + (T : \nabla \omega)_{L_2(D_0)} + \int_S \left((1 - \alpha) \frac{\partial v}{\partial n} - P \cdot n, \omega \right) dS = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$(T + We(T_t + (\omega \cdot \nabla)S^\varepsilon), T)_{L_2(D_0)} = 2\alpha(D^\varepsilon - D : T)_{L_2(D_0)}. \quad (29)$$

Здесь оценим некоторые члены (28) и (29):

$$\begin{aligned} & We((\omega \cdot \nabla)S^\varepsilon, T)_{L_2(D_0)} = -We((\omega \cdot \nabla)T, T)_{L_2(D_0)} + We((\omega \cdot \nabla)S, T)_{L_2(D_0)} \leq \\ & \leq \delta_1 \|\omega_x\|_{L_2(D_0)}^2 + C_1 \|\nabla S_1\|_{L_4(D_0)}^2 \|T\|_{L_2(D_0)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_S \left((1 - \alpha) \frac{\partial v}{\partial n} - P \cdot n, \omega \right) dS \leq C \left(\|P\|_{L_2(S)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L_2(S)} \right) \|\omega\|_{L_2(S)} \leq \\ & \leq C \left(\|\nabla P\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{W_2^2(\Omega)} \right) \|\nabla \omega\|_{L_2(D_1)}, \end{aligned}$$

$$Re \int_{D_0} ((\omega \cdot \nabla)v^\varepsilon \omega) dx = -Re \int_{D_0} ((\omega \cdot \nabla)v \omega) dx \leq Re \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{L_4(\Omega)}^2 \leq \frac{1 - \alpha}{2} \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\omega\|_{L_2(D)}^2.$$

Учитывая данные неравенства, из (28) - (29) аналогично [3] получим оценки (23). Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1991.

- [2] Жумагулов Б.Т., Куттыкожаева Ш.Н., Крыкпаева А.А. Метод фиктивных областей для уравнений неоднородной жидкости. - Алматы: НИЦ "Ғылым 2002. - 224с.
- [3] Смагулов Ш.С., Сейлханова Р.Б., Куттыкожаева Ш.Н., Есекеева М., Суперсходимость метода фиктивных областей // Совместный выпуск по материалам международной конференции "Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании" (18-20 сентября). -Новосибирск-Алматы, 2002. -№4(32). - С.135-140.
- [4] Турганбаев Е.М. Фильтрация вязкоупругой жидкости типа Олдройда.//Динамика сплошной среды. Вып. 108, 1994, с.80-97.
- [5] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н., Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 318с.

УДК 519.6

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Я.С. Крюкова, В.О. Каледин, Т.В. Бурнышева

Новокузнецкий институт (филиал) ФГБОУ ВПО "Кемеровский государственный университет"

Abstract. The numerical solution of the electrical conductivity for the case of a periodically inhomogeneous medium with the application of the current distribution at the border. A numerical study of the electric field potential of the medium. The comparison of the influence of the distance between the insertion of a periodically inhomogeneous medium on the effective coefficients of conductivity of the medium.

Keywords: electrical problem, periodically inhomogeneous medium, the effective coefficients of the electrical conductivity of the medium.

Аңдатпа. Электрөткізгіштіктің мақсатының сандық шешімі уақиға үшін ауық-ауық аламық сәрсенбінің при бөл- қырманның аддендумінде шекарада ал-. Сәрсенбінің электр әлуетінің даласының сандық зертте- өткіздір-өткізу. Араның ықпалының салыстыр- қосулардың арасында ауық-ауық аламық сәрсенбіде сәрсенбінің электрөткізгіштіктің тиімді еселіктеріне келтір-

Кілттік сөздер: электрөткізгіштіктің мақсаты, ауық-ауық аламық сәрсенбі, сәрсенбінің электрөткізгіштіктің тиімді еселіктері.

Аннотация. Получено численное решение задачи электропроводности для случая периодически неоднородной среды при приложении распределенного тока на границе. Проведено численное исследование поля электрического потенциала среды. Приведено сравнение результатов расчета эффективного удельного сопротивления среды с верхней и нижней оценками по правилу смесей, определено влияние расстояния между включениями в периодически неоднородной среде на эффективные коэффициенты электропроводности среды.

Ключевые слова: задача электропроводности, периодически неоднородная среда, эффективные коэффициенты электропроводности среды.

В настоящее время существуют технологии электровзрывного напыления покрытий и электровзрывного легирования (ЭВЛ) поверхности металлов и сплавов, которые осуществляется с целью изменения структурно-фазовых состояний и функциональных свойств металлов и сплавов [1]. Такого рода технологии используются, например, в электротехнике для формирования покрытий на контактных поверхностях с высокой электроэрозионной стойкостью. Получаемая после применения ЭВЛ среда на макроуровне является анизотропной, требует оценки всех компонент тензора электропроводности и не позволяет непосредственно использовать правило смесей [4]. В данной работе рассматривается задача на микроуровне: исследуется влияние расстояний между включениями в периодически неоднородной среде на эффективное удельное сопротивление среды, для оценки степени анизотропии и дальнейшего моделирования задачи на макроуровне.

Рассматривается среда, состоящая из меди с удельной проводимостью, равной $5,81 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, и содержащая периодическую систему молибденовых включений с объемной долей 22,2%. Схема размещения включений (одно структурное звено) показана на рисунке 1. Удельная проводимость материала включений молибдена принималась равной $1,82 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Поле потенциалов и плотность тока в структурном звене определялись решением трехмерной задачи электропроводности.

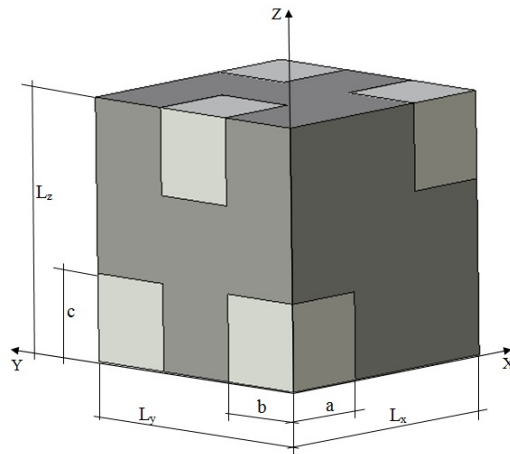


Рисунок 1 Схема одного структурного звена среды

Установившийся ток в сплошной проводящей среде описывается дифференциальным уравнением (закон Киргофа) [5]

$$\operatorname{div} \vec{j} - q = 0, \quad (1)$$

где \vec{j} - вектор плотности тока, q - плотность источника тока. Разобьем границу Γ рассматриваемой среды на три части Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , на которых поставим граничные условия первого рода

$$U|_{\Gamma_1} = 0, U|_{\Gamma_2} = U_{\Gamma}, \quad (2)$$

и второго рода

$$\vec{j}_n|_{\Gamma_1} = \vec{j}_n|_{\Gamma_3} = 0, \vec{j}_n|_{\Gamma_2} = j, \quad (3)$$

где U - потенциал, Γ_1 - левая часть границы моделируемого структурного звена в направлении оси ординат, на которой заданы постоянный потенциал и плотность тока равные 0; \vec{j}_n - вектор

нормали плотности тока, Γ_2 - правая часть границы моделируемого структурного звена в направлении оси ординат заданы постоянный потенциал и плотность тока равные U_Γ и j соответственно, Γ_3 - часть границы, на которой также задана постоянная плотность тока равная 0.

Для замыкания системы уравнений (1)-(3) используем связь между плотностью тока и градиентом потенциала, которая в пределах для структурного звена периодически неоднородной среды для каждой фазы (связующего и наполнителя) имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь J_x, J_y, J_z - координаты вектора плотности тока j ; γ - коэффициент проводимости соответствующей фазы [2].

Численная реализация выполнена на базе разработанного на кафедре математики и математического моделирования НФИ КемГУ пакета прикладных программ "Композит-НК" (ППП) (рисунок 2).

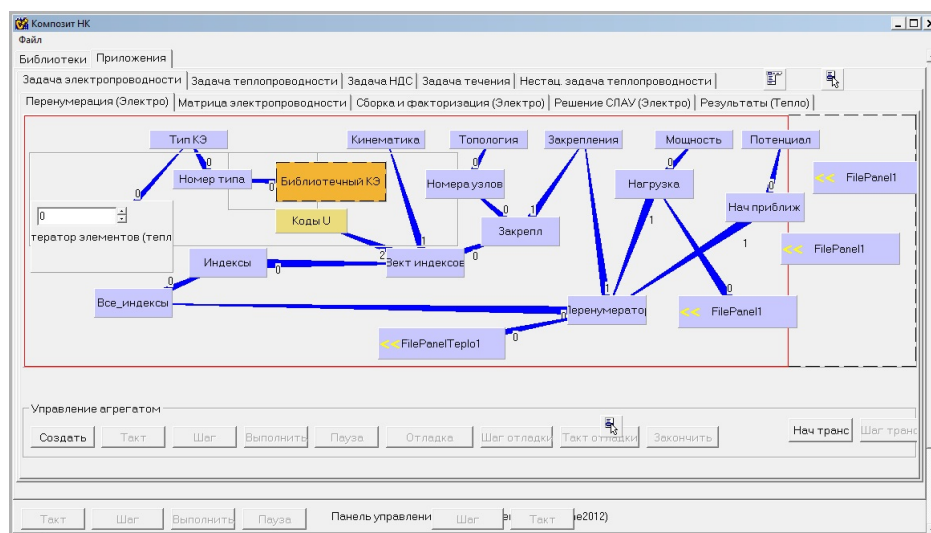


Рисунок 2 Главное окно ППП "Композит-НК"

Назначение ППП заключается в исследовании поведения сплошных сред при физическом воздействии. В основе разработки пакета лежит схожесть алгоритмов численного решения задач механики методом конечных элементов. Вместо сложного программирования вычислений, используется технология визуальной сборки программы из заранее заготовленных объектов. Приложение образовано двумя слоями объектов. Функциональные объекты предназначены для реализации алгоритмов решения прикладной задачи (вычислений). Визуальные объекты образуют графическое (визуальное) представление структуры функциональных объектов [3]. Это обусловило выбор пакета в качестве среды реализации для расчета полей электрического потенциала. Для решения задачи электропроводности в "Композит-НК" были разработаны функциональные классы, визуальные фреймы для библиотечных конечных элементов (БКЭ), визуальные фреймы приложений. Функциональные классы: база материалов с их физическими характеристиками, матрица электропроводности, матрица градиентов потенциалов, кинематика (определение типа материала: изотропный, ортотропный, анизотропный). Визуальные фреймы приложений: перенумерация, сборка матрицы электропроводности, сборка и факторизация, решение СЛАУ для

задачи электропроводности, выгрузка поля потенциала.

Фреймы для библиотечных конечных элементов: 4-х узловой прямоугольный КЭ, 8-ми узловой объемного КЭ. Так же в проект был добавлен визуальный компонент - "Опции при помощи которого можно изменять необходимые параметры, такие как начальную невязку при решении СЛАУ, максимальное количество итераций и т.д.

В приведенной выше задаче, рассматриваемая среда является анизотропной при неравных расстояниях между включениями по разным осям. Требуется исследовать изменение коэффициентов тензора электропроводности при варьировании структурных параметров, что позволит оценить степень анизотропии. Для исследования поля электрического потенциала и проведения численного эксперимента использовался "Композит-НК". Исследовалось влияние расстояний между включениями на изменение эффективного удельного сопротивления периодически неоднородной среды в разных направлениях при неизменном объемном содержании, равном 22.2% (рисунок 3). С увеличением ширины (L_y) структурного звена эффективное удельное сопротивление периодически неоднородной среды по направлению оси абсцисс возрастает.

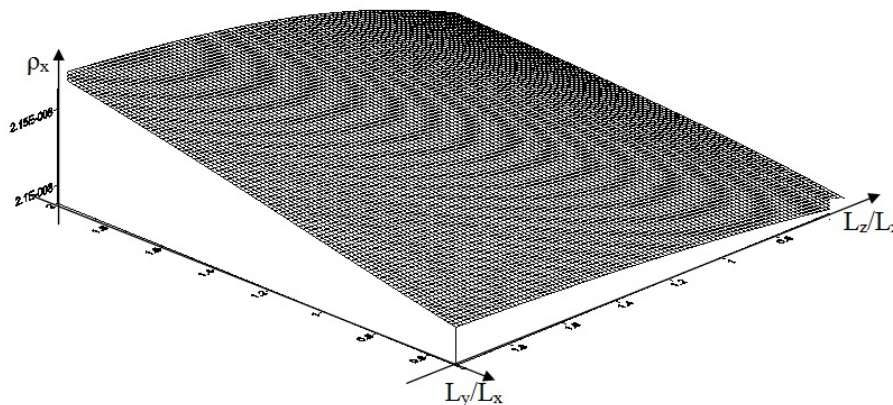


Рисунок 3 Зависимость эффективного удельного сопротивления периодически неоднородной среды от отношения расстояний между включениями

Аналогичная ситуация наблюдается с увеличением высоты (L_z) структурного звена. На рисунке 4 изображены графики зависимости эффективного удельного сопротивления среды от отношения $\frac{L_y}{L_x}$ при $\frac{L_z}{L_x}$, равном 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 1,75 и 2. Получено, что максимальное отличие эффективного удельного сопротивления среды отличается на 89,3% от верхней оценки по правилу смесей при $\frac{L_y}{L_x} = \frac{L_z}{L_x} = 0,5$, а минимальное отличие составляет 84,9% при $\frac{L_y}{L_x} = \frac{L_z}{L_x} = 2$. Однако значение эффективного удельного сопротивления при увеличении ширины и высоты структурного звена в 2 раза незначительно отличается от значения эффективного удельного сопротивления при уменьшении высоты и ширины звена также в два раза. Разность значений составляет $8,502 \cdot 10^{-10} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ (4,08%).

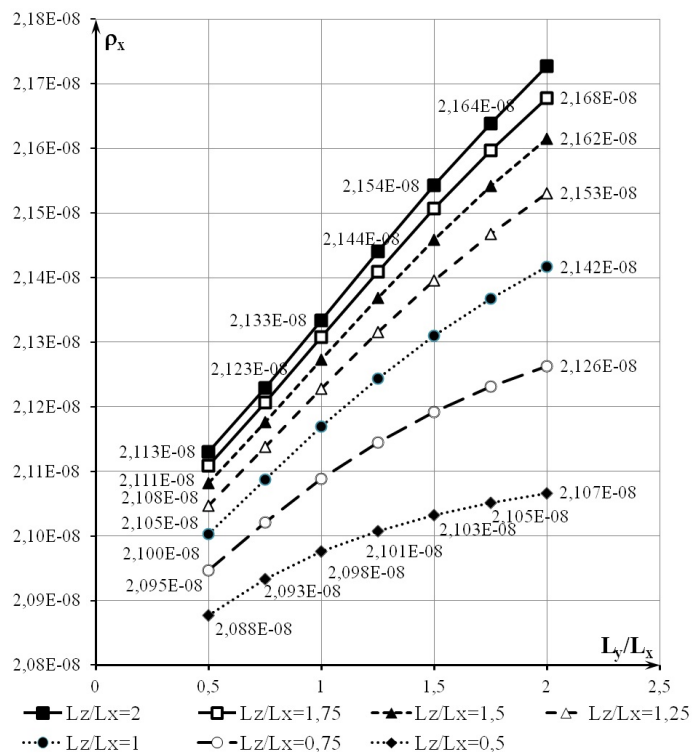


Рисунок 4 Графики зависимости эффективного удельного сопротивления периодически неоднородной среды от отношения $\frac{L_y}{L_x}$

Для более полного анализа был увеличен диапазон изменения факторов варьирования. На рисунке 5 изображены графики зависимости эффективного удельного сопротивления среды от отношения $\frac{L_y}{L_x}$ при $\frac{L_z}{L_x}$ равном 0,5; 2 и 10. Значение эффективного удельного сопротивления при увеличении ширины и высоты структурного звена в 10 раз незначительно отличается от значения эффективного удельного сопротивления при уменьшении высоты и ширины звена в два раза. Разность значений составляет $2,367 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ (11,34%).

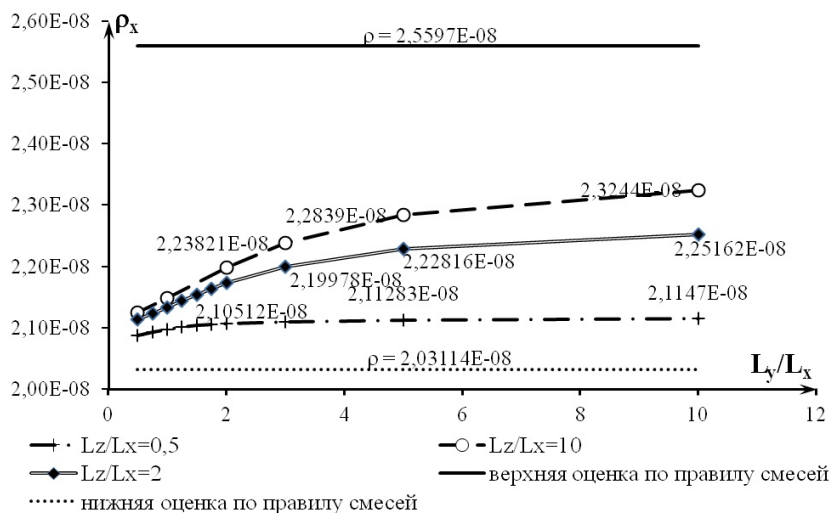


Рисунок 5 Графики зависимости эффективного удельного сопротивления периодически неоднородной среды от отношения $\frac{L_y}{L_x}$

Таким образом, на основе численного решения задачи электропроводности для случая периодически неоднородной среды проведено исследование изменения эффективного удельного сопротивления при варьировании структурных параметров среды. Выявлено, что с увеличением

ширины (L_y) и высоты (L_z) структурного звена при неизменном объемном содержании включений эффективное удельное сопротивление периодически неоднородной среды по направлению оси абсцисс возрастает. Полученные значения эффективного удельного сопротивления попадают в «вилку» между верхней и нижней оценками по правилу смесей [4]. При этом вычисленные компоненты удельного сопротивления в разных направлениях мало чувствительны к изменению отношения расстояний между включениями. При увеличении размеров структурного звена в 10 раз значение эффективного удельного сопротивления отличается на $2,367 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ (11,34%) от значения эффективного удельного сопротивления при уменьшении размеров звена в два раза.

Полученные результаты позволяют решать задачу электропроводности для случая периодически неоднородной среды на макроуровне без учета анизотропии, что значительно облегчает ее решение.

Список литературы

- [1] Формирование поверхностных слоев металлов и сплавов при электровзрывном легировании. / Будовских Е.А., Карпин С.В., Громов В.Е. // Изв. РАН. Сер. Физ. 2009. – Т. 73. -№9. – С. 1324-1327.
- [2] Метод конечных элементов в технике. / Зенкевич О. М.: Мир, 1975. – 541 с.
- [3] Численно-аналитические модели в прочностных расчетах пространственных конструкций. / Каледин В.О. Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2000. – 204 с.
- [4] Композиционные материалы. / Сендечки Дж. В кн: Механика композиционных материалов: В 8 т. М.: Мир, т.2, С. 61-101.
- [5] Моделирование кусочно-неоднородного массива горных пород применительно к задачам электроразведки при помощи метода конечных элементов / Шеметов В.А. Новосибирск: издательство СО РАН НИЦ ОИГГМ СО РАН, т. 39, Геология и геофизика №2, 1998г., С. 250-259.

UDC 519.5+(510.52+.58)

ON SOME COMPLEXITY PROBLEMS I ¹

I.V. Latkin

East-Kazakhstan State Technical University in honour of D.S. Serikbayev

Abstract. We discuss the performance capability of diagonal method for proving the inequality of complexity classes, in particular \mathcal{P} and \mathcal{NP} . For this purpose we offer to divide into two stages the diagonal process producing an example of a language which discern the difference between the

¹The work is supported by MON RK: grant 90-419-13 'Algorithmic problems of the algebraic systems and the analysis of the algorithmical complexity', and grant 0726/GF

classes, namely into the Cantor stage and the Gödel stage. However, there is a strong reason for to be of opinion that the language constructed by this manner will hardly belonging to the class \mathcal{NP} . Therefore it is worthwhile to search a language that belongs to some greater class of polynomial-bounded hierarchy of languages but that does not belong to the class \mathcal{P} . We definite the candidates for the role of such languages, the so-called K -like sets, and study their properties. Our main result is that such an occasion is realizable, so the class \mathcal{P} is not equal to the \mathcal{NP} in actual fact (Part II); though the whole polynomial-bounded hierarchy consists of the five different classes at the most.

Keywords: diagonal (diagonalization) method, computational complexity, relativization, polynomial-bounded computation.

Introduction. The main questions of these papers

We will define the classes \mathcal{P}^X and \mathcal{NP}^X in Section 1. Th. Baker, J. Gill, and R. Solovay [2] have constructed such oracles A and B that $\mathcal{P}^A = \mathcal{NP}^A$, whereas $\mathcal{P}^B \neq \mathcal{NP}^B$. Grounded on these facts, they deduced: "It seems unlikely that ordinary diagonalization methods are adequate for producing an example of a language in \mathcal{NP} but not in \mathcal{P} ; such diagonalizations, we would expect, would apply equally well to the relativized classes, implying a negative answer to all relativized $\mathcal{P}=?\mathcal{NP}$ questions, . . ." ([2], p. 431). Certainly, this supposed negative answer contradicts the existence of oracle A .

However, it is necessary to specify this claim, hereinafter called *a thesis from [2]*, what do 'the ordinary diagonalization methods' mean. The fact of the matter is that the oracle B was constructed in [2] by the same 'ordinary diagonalization method'. In addition, there exist numerous another cases, when this method is employed successfully. For instance, it is proved [6] that the language

$$E \equiv \{ \langle cM, x \rangle \mid \text{a Turing machine with the code } cM \text{ accepts input } x \text{ after at most } 2^{|x|} \text{ steps} \},$$

where $|x|$ is a length of string x , does not belong to a class \mathcal{P} by the use of the same method (remind that " $\mathcal{A} \equiv \mathbf{A}$ " means " \mathcal{A} signifies \mathbf{A} ").

Thus the diagonal methods are perhaps applicable for the establishing of distinction of some complexity classes to some extent. On the other hand, the same arguments by which the thesis from [2] is vindicated (about possibility of relativization for any oracle Y) are applicable to the theorems, of existence of oracles A and B , themselves because in the proofs of these theorems are used the statements which only say about the Turing machines and a complexity of computations made on them.

Will we face a paradox in this way? Indeed, in case of $\mathcal{P}^{X,A} = \mathcal{NP}^{X,A}$ for every X and $\mathcal{P}^{Y,B} \neq \mathcal{NP}^{Y,B}$ for every Y , the substitution of B for X and of A for Y will give $\mathcal{P}^{A,B} \neq \mathcal{P}^{B,A}$ or $\mathcal{NP}^{B,A} \neq \mathcal{NP}^{A,B}$. In other words, does the method of substantiation of the thesis from [2] contradict a presence of equating oracle A and differentiating (splitting) oracle B or not (see Subsection 2.1)?

These reasoning suggest to us that the oracle may be regarded as a *variable* — see Subsection 1.1, and we may attempt using the diagonalization along a list of oracles. Is this procedure feasible? The question remains open for the time being.

Our main results will appear in Part II, one of them is this that the class \mathcal{P} is the proper subclass in the \mathcal{NP} . However our basic theorem (see [8]) implies another effects as well besides this fact and the corollaries given in [8]; in particular, the polynomial-bounded hierarchy of languages contains the five essentially different classes at most: \mathcal{P} , \mathcal{NP} , $\text{co}\mathcal{NP}$, $\Delta_2^{\mathcal{P}}$, and $\Sigma_2^{\mathcal{P}} = \Pi_2^{\mathcal{P}}$.

Some preliminaries, designations, and necessary agreements

Query Turing machines, languages, and classes

Our model for computation with the aid of the oracles is the *query multitape Turing machine* much as described in [2, 3]. Namely, the machine has the special tapes, called the *query tapes*, where the machine may write the inquiries to oracles during its work (run); naturally, they are written on each tape to only their own oracle. However, we do not assign the concrete query tape to any oracle (as we do not write anything an input string), while we are developing a programm of machine; but we will by ourselves appoint the concrete oracle to a some query tape (and will write the input string) before activating of the machine.

Nevertheless we denote by $M^{X,Y,\dots}$ of the query Turing machine, a programm of which is M , and we intend to append the given oracles X, Y, \dots to the first, second, etc., query tape respectively (the list of oracles X, Y, \dots is certainly finite).

A query machine $M^{X,Y,\dots}$ is *polynomial-* (respectively *exponential-*) *bounded* if there is a polynomial $p(n)$ such that every computation of the machine on every input of length n halts within $p(n)$ (respectively $\exp(2, p(n))$) steps. A language is *recognized* by a deterministic query machine with concrete oracles if the machine halts in on all inputs and halts in an accepting state just when the input string belongs to the language. We denote by $\mathcal{P}^{X,Y,\dots}$ (respectively by $\mathcal{EXP}^{X,Y,\dots}$) the family of languages recognized by polynomial- (respectively exponential-) bounded deterministic query machines with given oracles.

A language is said to be *recognizable in polynomial space* with given oracles X, Y, \dots , if there is a polynomial $p(n)$ and a deterministic Turing machine, with these oracles, which recognizes the language and uses no more than $p(n)$ tape squares (memory cells) of every tape (including all query tapes) on any input of length n . We denote by $\mathcal{P}^{X,Y,\dots}$ -*space* the family of languages recognizable in polynomial space with concrete oracles X, Y, \dots .

The language *accepted* by a nondeterministic query machine with given oracles is the set of input strings for which some possible computation of the machine halts in an accepting state. We denote by $\mathcal{NP}^{X,Y,\dots}$ the class of languages accepted by polynomial-bounded nondeterministic query machines with oracles X, Y, \dots . The class of languages whose complements are in $\mathcal{NP}^{X,Y,\dots}$ is denoted by $\text{co}\mathcal{NP}^{X,Y,\dots}$.

A language L is *polynomially transformable* (or *Karp-reducible*) to a language M , if there is a polynomial $p(n)$ and a function F such that for every string x , a value of function $F(x)$ comes out in the time bounded $p(|x|)$ and $F(x) \in M$ iff $x \in L$. The every class \mathbf{C} defined above is *complexity*, namely it is the family of languages which is allocated on a basis of a prospective difference in the complexities of recognition of its elements and *closed under polynomially transformation*, i.e., the Karp-reduction L to M and $M \in \mathbf{C}$ imply $L \in \mathbf{C}$.

Obviously that $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^X \subseteq \mathbf{C}^{X,Y} = \mathbf{C}^{Y,X} = \dots$ holds for all oracles X, Y, \dots and every complexity class \mathbf{C} , although a result of the actions of $M^{X,Y}$ on some input can essentially differ from an effect of $M^{Y,X}$ on the same string in general case.

Polynomial-bounded hierarchy of languages

A.R. Meyer and L.J. Stockmeyer [7] defined the polynomial-bounded analogue of the arithmetic hierarchy, the \mathcal{P} -hierarchy of languages. We give one of the equivalent definitions [2, 4].

At first one can prove that a language L belongs to \mathcal{NP} iff there is a polynomial $p(n)$ and a predicate $R(x, y) \in \mathcal{P}$ such that

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y (|y| \leq p(|x|) \ \& \ R(x, y)).$$

Here and everywhere further, $|x|$ is the length of a word (or string) x .

Thus there is a similarity between classes \mathcal{NP} and $co\mathcal{NP}$, on the one hand, and sets Σ_1^0 and Π_1^0 classical arithmetic hierarchy, on the other. The class \mathcal{P} corresponds to the class of the recursive (computable) sets by that.

Therefore we can define: $\Sigma_0^{\mathcal{P}} = \Pi_0^{\mathcal{P}} = \Delta_0^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, and $L \in \Sigma_{k+1}^{\mathcal{P}}$ iff there is a polynomial $p(n)$ and a predicate $R(x, y_1, \dots, y_{k+1}) \in \mathcal{P}$ such that

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \dots Q y_{k+1} \left(\bigwedge_{1 \leq r \leq k} |y_r| \leq p(|x|) \ \& \ R(x, y_1, \dots, y_{k+1}) \right),$$

where are $k + 1$ alternations of polynomial-bounded quantifiers. The symbols of quantifiers ' \exists ' and ' \forall ' take the place of each other when a class $\Pi_{k+1}^{\mathcal{P}}$ is defined. The class $\Delta_{k+1}^{\mathcal{P}}$ consists of those languages which are recognizable in polynomial time with the aid of an oracle for some language in $\Sigma_k^{\mathcal{P}}$, i.e., $L \in \Delta_{k+1}^{\mathcal{P}} \Leftrightarrow L \in \mathcal{P}^S$, for some $S \in \Sigma_k^{\mathcal{P}}$.

Several of the properties of arithmetic and \mathcal{P} -hierarchy are similar [2, 4, 7]:

- (i) $L \in \Sigma_k^{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \bar{L} \in \Pi_k^{\mathcal{P}}$; (ii) $\Sigma_k^{\mathcal{P}} \cup \Pi_k^{\mathcal{P}} \subseteq \Delta_{k+1}^{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma_{k+1}^{\mathcal{P}} \cap \Pi_{k+1}^{\mathcal{P}}$;
- (iii) the classes $\Sigma_k^{\mathcal{P}}$ and $\Pi_k^{\mathcal{P}}$ are closed under Karp – reduction for every k ,

i.e., each of them is complexity class too. Nevertheless, it was proved in [7] that

- (iv) if $\Sigma_k^{\mathcal{P}} = \Pi_k^{\mathcal{P}}$ for any $k \geq 1$, then $\Sigma_j^{\mathcal{P}} = \Pi_j^{\mathcal{P}} = \Sigma_k^{\mathcal{P}}$ for every $j \geq k$.

In particular, if $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, then $\Sigma_k^{\mathcal{P}} = \Pi_k^{\mathcal{P}} = \Delta_k^{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ for every k . These properties of polynomial-bounded hierarchy are transferred as well to the relativized classes [2]. So for the equating oracle A , the \mathcal{P}^A -hierarchy consists of one class, \mathcal{P}^A .

The features of used Turing machines; the coding of objects

A working (tape) alphabet is finite and concludes three elements at least: 0,1, and the blank symbol Λ . The heads of machine can write and erase these symbols.

1.3.1 But we assume besides that the last square on the left of each tape is always marked by the special additional symbol $*$, which serves for an edge designation of the tape [6]. The read/write heads of Turing machine scan these squares before the beginning of work of machine; and an input string is inscribed on the first work-tape immediately to the right of the starting location. We will only consider such machines that cannot erase or write $*$ symbol.

We do not also allow a presence of 'accident-sensitive' instructions of a kind $q_r \dots, *, \dots \rightarrow q_j \dots, L, \dots$. Here is specified an action, namely a movement of head one tape square to the left, on the only tape, whose head scans the $*$ symbol. Clearly, an attempt of execution of such an instruction will result to an *abnormal termination* of work of machines. It is reckoned that the machine answer is indefinite in this case, although it has stopped.

In addition, there exists other possibility to get to such termination, when an instruction of a kind $\dots \rightarrow q_j \beta_1, \dots, \beta_m$ is available in the program (it is supposed that q_j is an (internal) state that is neither accepting q_{yes} nor rejecting q_{no}), but there is no instruction of the kind $q_j \alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow \dots$ for at least one m -tuple of symbols $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ of the working alphabet of the machine. However we can easy improve the situation, when there exist 'accident-sensitive' instructions or 'suspended' states in a program. Namely, an attempt to move beyond the left end of tape are disabled by replacing the 'accident-sensitive' instructions with instructions of the form $q_r \dots, *, \dots \rightarrow q_r \dots, *, \dots$; the 'pendent' states are eliminated by writing the new, missing instructions of the kind $q_j \alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow q_j \alpha_1, \dots, \alpha_m$.

1.3.2 It stands to reason, a coding of the used objects of a natural mathematical language (namely the programs of Turing machines with oracles, the formulae, and etc.) by strings under tape-alphabet must be fulfilled on any object, which is recorded by n symbols of natural language, in time bounded above by some polynomial $p(n)$. And vice versa we must be able to detect on each string in polynomial time, whether it is a code of a requisite object; and if that is true, then we must be able to recover its record. Such a coding is said the *Cook-Karp coding*.

We need not further to know the comprehensive description of any suchlike coding except for a few details. But we will choose and fix one of the concrete binary Cook-Karp coding in order to make the picture complete, for example, as follows. At first we sort the symbols of the natural alphabet B , which includes a tape-alphabet, in the almost random order: $B = \{0, 1, \dots\}$. Thereupon we replace the k -th symbol of B in given object by the string 01^{k+1} , which consists of zero and $(k + 1)$ units written succession. Clearly, we obtain the Cook-Karp coding.

We designate by $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ the binary string which is obtained from a sequence of binary chains x_1, \dots, x_m by replacing each occurrence of 0,1, and a comma by 00, 01, and 11, respectively. It is obvious that a transition from sequence x_1, \dots, x_m to a string $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ and the back transfer are realizable in polynomial time.

As usual, if x is a string, then x^n denotes concatenated x with itself n times.

The codes and numbers of Turing machines

The symbols $P_i^{X,Y,\dots}$ and $NP_i^{X,Y,\dots}$ denote query deterministic and nondeterministic machines the oracles X, Y, \dots of which are respectively appointed to the first, second, etc., query tape, and usually, i is believed to be a number in some effective lists of such machines. However, it is convenient for us to think that i is a *binary string* which encodes the program of Turing machine under some fixed Cook-Karp coding. One can suggest the follows scheme how the string i may be turned into the number $n(i)$: $n(i)$ is an ordinal number in canonical sequence of all binary chains — $\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots$

Let us pay attention to that the list of machines $NP_i^{X,Y,\dots}$ includes all of the deterministic machines as well, when we used any *natural* Cook-Karp coding, for instance, the coding described in previous item. Furthermore, if it is necessary, then we can discern in polynomial time whether this program is obviously deterministic, i.e., if the program does not contain the alternative instructions. But when convenient, we will allocate them in the separate list of machines $P_i^{X,Y,\dots}$.

In [2], every Turing machine is supplied with a certain clock, or rather, with a timeout counter, or cutoff computer, which terminates every computation of $n(i)$ -th machine P_i^Y (or NP_i^Y) that exceeds $p_i(x) = |x|^{n(i)} + n(i)$ steps on input x . Instead of such machines we will exploit the machines which are about the same, but without the polynomial terminator on an operation-time of machine.

However, a renunciation of application of this clock does not at all mean a refusal of proofs of Theorems 3 from [2] and Proposition 1 below, since it is easy to understand that the classes of the polynomial-bounded hierarchy are independent of presence of terminator. Really, if a language L is in \mathcal{NP} , then there will be a binary chain i such that each input x will be accepted by some computation of machine NP_i at most $p_i(|x|)$ steps just when this string will be in L ; and $p_i(|x|)$ is the upper bound on the length of any computation by NP_i . The similar statements are true as well for other classes.

The Cantor and Gödel stages of diagonal method

Paradox is not present, but there is some phenomenon

In fact, if we repeat almost verbatim the proofs of Theorems 1 and 3, given in [2] (about existence of oracles A and B), replacing the terms 'the Turing machine' by 'the Turing machine with oracle Y ', and 'the machine with oracle X ' by 'the machine with oracles Y and X ', we will obtain a quite acceptable

Proposition 1. *For any oracle Y , there are oracles $A = A(Y)$ and $B = B(Y)$ such that $\mathcal{P}^{Y,A} = \mathcal{NP}^{Y,A}$, whereas $\mathcal{P}^{Y,B} \neq \mathcal{NP}^{Y,B}$.*

Thereby the constructions of equating and differentiating (splitting) oracles are dependent upon an already available oracle substantially, and the contradiction does not thereat arise. But this is a purely formal conclusion; however, if we investigate this proof, we will possibly see the interesting enough things, which we will discuss in another article.

In spite of absence of paradox, author has a reason to formulate the thesis from [2], on the one hand, more cautiously, on the other, rather more generally.

Main thesis (a BGS-alternative). *Let us consider the complexity classes \mathcal{S} and \mathcal{T} such that $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ and $\mathcal{S}^A = \mathcal{T}^A$ for any oracle A . Grounded on reasonings which use the Turing machine and the complexity of their work only (by "machine-elementary" methods), it is impossible simultaneously:*

- 1) to construct a language L and to prove that $L \notin \mathcal{S}$;
- 2) to show that the language L belongs to class \mathcal{T} .

In particular, if it is proved that $L \notin \mathcal{S}$ by diagonalization along the list of machines, then it will hardly be possible to show $L \in \mathcal{T}$ by "machine-elementary" methods. And on the contrary.

The argument for this refined thesis is identical with one mentioned in Introduction for the thesis from [2]: each assertion that is formulated and proved only in terms of Turing machines and complexity of computations made on them can likely be generalized to the machines with any oracle by the same manner as well. And that contradicts the existence of an oracle A such that $\mathcal{S}^A = \mathcal{T}^A$.

What is the way out of this situation?

One of the possible means of overcoming the difficulty seems to be the following. We ought to add the *Gödel* stage of the diagonal method in the proof of inequality $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$ to the *Cantor* stage, which is the building of language L that is not in class \mathcal{S} by diagonalization along the list of machines [11]. Namely we may try to prove that $L \in \mathcal{T}$ by *polynomial transformation* of language L to a language M which belongs to the class \mathcal{T} obviously. It looks plausible that such a transformation will turn out an insuperable hindrance for the machines with oracles in many cases, for instance, when M is a simple enough theory (a set of codes of formulae).

Why do we call this auxiliary stage Gödel's, and why does it endure a relativization badly? The fact is that the Gödel incompleteness theorem can be deduced from the undecidability of arithmetic. The proof of undecidability of the Peano arithmetic can be obtained as follows. First, we can prove that a set

$$K_0 \equiv \{\langle x, y \rangle | x \in W_y\} = \{\langle x, y \rangle | a \text{ Turing machine } P_y \text{ halts on an input } x\}$$

is noncomputable (nonrecursive) by the diagonal method [13]. This is the Cantor stage. Second, we can show a definability of this set in the elementary arithmetic, the Gödel stage. It is well-known [13] that a similar definability for machines with oracle X is possible, generally speaking, in an extended arithmetic only, provided that X is not recursive. More specifically, we need to include either a predicate which represents this oracle, or the special quantifiers of a kind \forall_X, \exists_X in the Peano arithmetic in order that we may prove a definability of set

$$K_0^X \equiv \{\langle x, y \rangle | x \in W_y^X\} = \{\langle x, y \rangle | a \text{ Turing machine } P_y^X \text{ halts on input } x\}.$$

Thus, a simulation of the computational process produced by machines with oracles causes a certain difficulty even for the arithmetic; and it is realizable already in another theory. But the Peano arithmetic is one of the best theories for a modeling of computations [8].

The reason for this effect is that the elementary arithmetic has no means of description of *definite* (asymmetric, or disparate, or from-without-dictated) choice, of branching of computations, which is prescribed by the application in computations of the oracle X , whose description is unknown.

In contrast to this, an *indefinite* (symmetric, or parity, or from-within-generated) choice is modeled rather simply. For example, the actions of nondeterministic Turing machine without oracle can even be simulated by the \exists -formulae of theory of Boolean algebras: the proof of the Cook theorem [3] (Theorem 10.3 in [1]) establishes actually that a language

$$D \equiv \{\langle i, x, 0^n \rangle | \text{some computation of } NP_i \text{ accepts } x \text{ after at most } n \text{ steps}\}$$

is polynomially transformable to the language of satisfiable formulae. The nondeterministic branching of computations corresponds, herein, to an implication whose conclusion (consequent) is of the form of disjunction, because the terms of disjunction are as equal in rights between themselves as the alternative instructions of machine. More exactly, the choice of the concrete computational branch (respectively the concrete term of disjunction) is an accidental event in nondeterministic case; and each of them is equiprobable.

However, this is another affair, when a computation is branched under the influence of an oracle. Therein occurs a choice too, but this choice is more or less predetermined; and, as a rule, it has the unknown description. Surely it is possible to try to include the additional logic connectives (say, a disjunction with the oracle), or the supplementary Boolean operations, or predicates so that we might characterize such a choice. But this will be the other theory already. Moreover, the author has a strong reason for to be of opinion that neither supplementary Boolean operations nor predicates might save the day, if the M is a simple, weak theory in some ways (see Part II or [7]).

A division of diagonal method into two stages is not a new idea. In essence such a partition meets in many different cases when this method is successfully applied to the estimation of lower bounds of computational complexity [5, 11, 12, 7, 8].

The polynomial-bounded analogues of set K_0

Definitions and examples

A computable (recursive) function $F(n)$ is called a *limiting upper boundary* of a class \mathcal{POL} of all *polynomials*, provided that for each $f \in \mathcal{POL}$, there exists an integer x such that $f(n) < F(n)$ for every $n > x$. There are very much such functions, for example, an exponential $\exp(m, n)$ for every $m > 1$; $\exp(m, n/2)$; and $\exp(m, n^{1/2})$; etc.

Definition 1. Let Y be some oracle, F be some limiting upper boundary of a class \mathcal{POL} . A language is called a *K-like² set*, if it is one of the following forms:

$$1) NK^Y(F) \equiv \{ \langle i, x \rangle \mid \text{atime}(NP_i^Y, x) < F(|x|) \} = \\ \{ \langle i, x \rangle \mid \text{some computation of } NP_i^Y \text{ accepts } x \text{ in fewer than } F(|x|) \text{ st.} \};$$

the set characterizes a problem of the 'quick verification of the pure conjectures', or, to be more precise, a problem of testing of hypotheses within indicated time;

$$2) AK^Y(F) \equiv \{ \langle i, x \rangle \mid \text{atime}(P_i^Y, x) < F(|x|) \} = \\ = \{ \langle i, x \rangle \mid \text{a machine } P_i^Y \text{ accepts } x \text{ in fewer than } F(|x|) \text{ st.} \};$$

the language describes a problem of the 'prompt' enumeration, or rather a problem of enumeration within specified time;

$$3) RK^Y(F) \equiv \{ \langle i, x \rangle \mid \text{time}(P_i^Y, x) < F(|x|) \} = \\ = \{ \langle i, x \rangle \mid \text{a machine } P_i^Y \text{ recognizes an input } x \text{ in fewer than } F(|x|) \text{ st.} \};$$

that is a set of problem of 'speedy' halting, or more exactly, a halting problem on the every input within allotted time.

It is natural that $NK_{\leq}^Y(F)$, $AK_{\leq}^Y(F)$, and $RK_{\leq}^Y(F)$ designate the languages, where 'in fewer than' is replaced with 'after at most'; the symbols $NK(F)$, $AK(F)$, and $RK(F)$ are the denotations of the languages whose definitions use the machines without oracle; the situation, when $F(n) = \exp(2, n)$, will be described as NK^Y , AK^Y , and RK^Y .

For example, the language AK_{\leq} coincides with the language E investigated in [6] (see also Introduction). By the way, the proof, that the language E does not belong to \mathcal{P} (Theorem 6.1.2 in [6]), is purposely made highest possibly similar to the classical proof, that the set K_0 is noncomputable [13], and so the estimation of lower bound of the recognition complexity of of this language is not obtained there. Though therein is visualized one of the peculiarities of work with the *complexity* classes, namely, an argument 'shifts': a contradiction takes place only at the long enough codes of the hypothetical algorithm recognizing the language E .

We will see in the sequel that the language E and its updates, the *K-like* sets, play a special role in the research of the complexity classes. Exactly these sets can be used as the languages which make it possible discriminate or superpose the many classes of \mathcal{P} -hierarchy.

²What is the name of inventor of the set K_0 ? It would be very beautiful and fair enough, if such languages were to call 'the Gödel sets', or 'the Kleene sets', or 'the Rogers sets', and suchlike. S.C. Kleene asserts in §60,71 of [6] that A. Church was the first to study *the halting problem* for λ -calculus implicitly. So, are that the *Church-Kleene* sets?

Let us notice that each of the three terms 'simulation', 'transformation' (certainly, which is not sure to be polynomial), and 'definability by formulae' is suited for the set K_0 inherently (when we try to deduce the Gödel incompleteness theorem from the undecidability of arithmetic such as that was described in Subsection 2.2), inasmuch as a question on computational complexity is not putted for them within the bounds of classical theory of computation. The term 'definability' is heavily associated with recursive functions themselves but no with the facilities of their computing. However, a choice of *model of computations* is the enormous importance for the complexity hierarchies, i.e., a sort of concrete computational mechanism is essential. Therefore we imagine that the use of a term *modelling in polynomial time*, which is the special case of polynomial transformation, is more fit for the \mathcal{P} -hierarchy.

The simple properties of K -like sets

First of all, it is clear that the complexity properties of these languages are not dependent of present of symbol " \leq " in their definition.

3.2.1 Moreover, it does not matter what Cook-Karp code is employed in this section, since all of these codings are polynomially transformable to one another. Therefore the complexity properties of the K -like sets are not dependent of the Cook-Karp coding, which uses in their definition, at all.

In what follows, it will sometimes be more convenient for us to work with the machines that will only have one work-tape over and above query tapes. This restriction does not turn outside the framework of polynomial computability, because for converting a multi-tape machine program into a single-tape version is implemented in time polynomial in the length of the program, in which case the running time of the machine also grows polynomially [1, 4, 6]. So for every K -like set, its membership of some class of the polynomial-bounded hierarchy is irrespective of quantity of work-tape.

Every partially recursive function is computable by a Turing machine with a tape alphabet $E_1^\Lambda = \{1; 0(\Lambda)\}$, where 0 denotes also the blank symbol Λ [18]. We show that a conversion of the computations over some finite alphabet A into computations over this alphabet preserves the polynomial-bounded running time. First we mark the three leftmost squares of each tape with 0,1,1; and then re-encode an input string, by associating the k -th symbol of A with 01^{k+2} , much as we did this in Item 1.3.2. Accordingly, the initial program P be rewritten into a program P_1 , which does the same things under E_1^Λ with codes of symbols as P with the symbols proper (meanwhile, each square Λ is replaced with two cell, 0 and 1). Clearly, if we do that exactly and accurately, we will ultimately derive the following: (i) the program P_1 is obtained from P in time polynomial in the length $|P|$; (ii) if the running time of the machine P is polynomial (in the length of input), then the running time of P_1 is polynomial, too; (iii) the machine P recognizes (accepts) any input iff the P_1 recognizes (accepts) its code. Consequently, the complexity properties of the K -like sets are not dependent of that which tape-alphabet is used the Turing machines.

Thus, we do not impose any constraint on a Cook-Karp coding, a quantity of work-tape, and a number of symbols in the tape-alphabet, which are used in the definition of K -like sets, in this section.

3.2.2 We will designate as $G(L) \prec M$ the situation when a language L is *polynomially transformable* (or *Karp-reducible*) to a language M by function G .

Proposition 2. *For every limiting upper boundary F of a class \mathcal{POL} and every oracle Y , there are functions G , H , and I such that: 1) $G(AK^Y(F)) \prec RK^Y(F)$; 2) $H(RK^Y(F)) \prec AK^Y(F)$; and*

3) $l(AK^Y(F)) \prec NK^Y(F)$.

PROOF. Let $\langle i, x \rangle$ be a binary string. All the three functions, G, H , and l , will only exchange the first component of this pair, i.e., $J(\langle i, x \rangle) = \langle J(i), x \rangle$ for appropriate J and $J \in \{l, G, H\}$; and $J(i) = i$, if i is not the Cook-Karp code of nondeterministic Turing machine.

1) We substitute the instruction $q_j\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow q_j\alpha_1, \dots, \alpha_m$ for every instruction of program P_i^Y of a kind $q_j\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow q_{no}\alpha_1, \dots, \alpha_m$. It is easy to see, that the described conversion G of programs of Turing machines transforms polynomially the language $AK^Y(F)$ to the $RK^Y(F)$, namely, for all binary strings i, x , $\langle i, x \rangle \in AK^Y(F)$ iff $\langle G(i), x \rangle \in RK^Y(F)$.

2) If we replace every occurrence of the rejecting internal state q_{no} in the program P_i^Y with the accepting internal state q_{yes} , then we will obtain a program $P_{H(i)}$; obviously, $\langle i, x \rangle \in RK^Y(F)$ iff $\langle H(i), x \rangle \in AK^Y(F)$.

3) Let us notice that the codes of programs of deterministic machines (in an explicit form) are separated from codes of all programs in polynomial time, provided that we use a natural Cook-Karp coding (see Subsection 1.4); therefore a function $l(\langle k, x \rangle) = \langle I(k), x \rangle$ Karp-reduces the language $AK^Y(F)$ to the $NK^Y(F)$, where $I(k) = k$, if k is the code of deterministic machine; and $NP_{I(k)}^Y$ results from NP_k^Y by the replacement of the every instruction of a kind $q_j\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow q_{yes}\alpha_1, \dots, \alpha_m$ by the instruction $q_j\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow q_j\alpha_1, \dots, \alpha_m$ otherwise. Q.E.D.

Nondeterministic K -like sets

Namely, we will study the complexity of recognition of languages of types 1) from Definition 1.

Theorem 1.³ *The language $NK^Y(F)$ does not belong to the class \mathcal{NP}^Y for every oracle Y and every limiting upper boundary F of a class of all polynomials.*

PROOF. Suppose that $NK^Y(F) \in \mathcal{NP}^Y$. Then the language

$$L = \{i \mid \text{some computation of } NP_i^Y \text{ accepts } i \text{ in fewer than } F(|i|) \text{ steps}\}$$

is into this class too. This means that there exists a polynomial-bounded nondeterministic Turing machine M_1 with oracle Y which accepts the language, i.e., there is a polynomial f such that every input string which has the length n more than some t is accepted by some computation of this machine iff this chain belongs to language $NK_0^Y(F)$; and this machine halts always within $f(n)$ steps.

Using M_1 as a procedure, we construct a machine M which will apply 'to itself'. The machine M identifies at the first stage, applying M_1 , whether an input string i is in L . If the answer is affirmative, then M firstly writes $F(|i|)$ unities and next erases them, this is a stage M_2 . The M halts after the stage M_2 or by the negative answer at the stage M_1 , but in the latter case, the M writes the answer 'yes' too.

This machine has some Cook-Karp code j . Consider now what does $M = NP_j^Y$ do when presented with its own description, a string j . What will be the answer at the stage M_1 ?

When some computation of M_1 gives out 'yes', the M will continue its actions further: it will write and erase $F(|j|)$ unities. It takes a twice as much number of steps at least to do that. Hence, the M will make no less than $2F(|j|)$ steps only on the last stage M_2 . But by the definition of language

³We will only give the extensive, detailed proofs of Theorems 1 and 2 for further study some features of diagonal method, when it is employed for a separation of classes by complexity, although author is not sure of that the denoted peculiarities are characteristic. The specialists in the complexity theory know the overwhelming majority of results of this section.

$NK^Y(F)$, this answer means that $NP_j^Y = M$ must halt on an input j in fewer than $F(|j|)$ steps. The contradiction results.

If the M_1 does not accept the string j , it will answer 'no' always. This means by definition that the running time of M on this input will no less than $F(|j|)$ or M will reject it. On the other hand, the work of the stage M_1 will by hypothesis take up no more than $f(|j|)$ steps just as the run of the whole M , which will give the positive answer in this case. Consequently, if j is a long enough chain (we can achieve this goal by the introduction of nonexecutable instructions), then we will obtain that $f(|j|) < F(|j|)$. We have again come to the contradiction, Q.E.D.

Let us notice that in this proof is as well shown the 'shift', of argument, which is noted in Subsection 3.1. Furthermore, the other distinctive feature of the diagonal method at the decision of complexity problems emerges too therein: the machine M_1 , whose existence is denied, does not apply 'to itself' per se, and it only serves as the base for the construction of such a machine M . An application of the usual, traditional diagonal schema is very difficult in this proof, because the assertion " $NK^Y(F) \in \mathcal{NP}^Y$ implies $\{i | \text{any computation of } NP_i^Y \text{ does not accept } i \text{ in fewer than } F(|i|) \text{ steps}\} \in \mathcal{NP}^Y$ " may be false.

Deterministic K -like sets

Let us examine now how the diagonal constructions will change (see the end of the preceding subsection), if we need not only to prove a distinction of any complexity classes, but also to derive a lower boundary of computational complexity of concrete language meanwhile. In the proof of the next theorem, the machine $M^{(k)}$ alike to M apply 'to not exactly itself', but it apply to its own replica multiplied by k . We use with effect here that if F is a limiting upper boundary of the \mathcal{POL} , then the function $F(kn) - F((k-1)n)$ will be exactly the same for every $k > 0$.

Theorem 2. *For every limiting upper boundary F of a class of all polynomials, every natural $k > 0$, and every oracle Y , there is no deterministic Turing machine with oracle Y that can answer for all of the long enough binary strings $\langle i, x \rangle$, whether they belong to language $RK^Y(F)$, within $F((k-1)(|i|+|x|)/(k+1))$ steps.*

PROOF. Suppose that there are natural numbers $k > 0$ and t and a Turing machine M_1 using the oracle Y such that the M_1 recognizes $\langle i, x \rangle \in RK^Y(F)$ in fewer than $F((k-1)n/(k+1))$ steps for all strings $\langle i, x \rangle$, whose length is $n \geq t$.

We construct the machine $M^{(k)}$ in successive steps as before. The stage M_0 : it identifies whether an input string is of the form i^k , where i is a code of some program of Turing machine; if it does, then M_0 records also $\langle i, i^k \rangle$. Clearly, it will take no more than $h(|i|)$ steps to perform M_0 , where h is a suitable polynomial. The stage M_1 : a question is solved of whether a string $\langle i, i^k \rangle$ belongs to $RK^Y(F)$; when the answer is 'yes', $M^{(k)}$ pass to the stage M_2 : it writes and erases $F(k|i|)$ unities. If either an answer is negative at stages M_0 or M_1 , or M_2 completes its work, then $M^{(k)}$ will terminate a computation too. However, the sense of answers is not changed anywhere this time unlike the proof of Theorem 1.

Let be $M^{(k)} = P_j^Y$; adding nonexecutable instructions, we select j such that the inequality $h(j) \leq F(k|j|) - F((k-1)|j|)$ holds. Consider what will occur, when $M^{(k)}$ apply to an input j^k .

The answer of M_0 will be 'yes'. An analysis of case, when M_1 answers in the affirmative, coincides with the former verbatim. Let M_1 gives out 'no'.

Then by definition of language $RK^Y(F)$, $time(P_j^Y, j^k) \geq F(k|j|)$. However, if we scrutinize this situation, then we will see: $time(M_0, j^k) \leq h(|j|)$ and $time(M_1, \langle j, j^k \rangle) < F((k-1)(|j| + k|j|)/(k+1)) =$

$F((k-1)|j|)$, hence $time(M^{(k)}, j^k) < h(|j|) + F((k-1)|j|) \leq F(k|j|)$. The contradiction results, Q.E.D.

Corollary 1. *For every limiting upper boundary F of a class of all polynomials and every oracle Y , if a deterministic Turing machines M^Y recognizes the language $RK^Y(F)$, then $time(M^Y, \langle i, x \rangle) \geq F(|i| + |x|)$ for infinitely many $\langle i, x \rangle$.*

PROOF follows from the theorem immediately because k can be any therein.

Corollary 2. *For every limiting upper boundary F of the class of all polynomials and every oracle Y , the language $RK^Y(F)$ does not belong to the class \mathcal{P}^Y .*

These three statements are true as well for languages $AK^Y_{\leq}(F)$ and $AK^Y(F)$ wherein it will be not difficult to be convinced, if we change their proofs somewhat (see also Subsection 3.2 and the next).

The potential applications of K -like sets

In this subsection, the oracle is applied absolutely formally, since the author cannot conceive how it might solve such a (super)challenge as to simulate the computations of Turing machine that uses an oracle by means of some natural mathematical language, for instance, the language of formulae, or graphs, or matrixes, etc.

Considering Corollary 1, the next definitions make sense.

Definition 2. *A function G is called a lower boundary of the recognition time-(respectively space-) complexity of the K -like set L , if any deterministic Turing machines (with oracle Y) cannot recognize for each sufficiently large binary chain x , whether it is in this language, in fewer than $G(|x|)$ steps (respectively having spent fewer than $G(|x|)$ memory cells on each tape). We designate that as $CR_{time}(L, x) = CR_t(L, x) \geq G(|x|)$, or $CR^Y_{time}(L, x) = CR^Y_t(L, x) \geq G(|x|)$, or $CR_t(L) \geq G$, or $CR_{space}(L, x) = CR_s(L, x) \geq G(|x|)$, or $CR^Y_s(L) \geq G$.*

Our term 'the time-complexity of recognition of the language L ' ($CR_t(L)$) corresponds with 'the inherent complexity of the theory L ' in [5, 11, 12], when L is the theory.

3.5.1 If we can simulate the long enough computations of whatever Turing machine P^Y_i on every input x by the objects of a language L in the time bounded above by a polynomial from $|i|$ and $|x|$, i.e., if we can Karp-reduce some K -like set to the language, then this will allow sometimes to obtain a lower boundary of time- or space-complexity of language L . But for this purpose however, just a length of the modelling object is of decisive importance in both cases, and the transformation time is not significant.

Proposition 3. *Let $MK^Y(F)$ be a K -like set; $T(S)$ be a lower boundary of time-(space-)complexity of its; $G(\tilde{K}^Y(F)) \prec L$, and the inequality (a) $|G(i, x)| \leq D(|i| + |x|)^k$ (or (b) $|G(i, x)| \leq D \cdot |i|^m \cdot |x|^k$) holds for fixed $D, m, k > 0$ and for each sufficiently large string $\langle i, x \rangle$. Then there exist infinitely many strings z such that*

$$\begin{aligned} & \mathbf{1) (a)} \quad CR^Y_{time}(L, z) \geq T(|z|^\delta / (2D)^\delta), \quad \text{where } \delta = k^{-1} \\ & \quad \left(\text{or (b)} \quad CR^Y_t(L, z) \geq T(|z|^\delta / (2D)^\delta) \text{ and } \delta = (m+k)^{-1} \right); \\ & \mathbf{2) (a)} \quad CR^Y_{space}(L, z) \geq S(|z|^\delta / (2D)^\delta), \quad \text{where } \delta = k^{-1} \\ & \quad \left(\text{or (b)} \quad CR^Y_s(L, z) \geq S(|z|^\delta / (2D)^\delta), \quad \text{and } \delta = (m+k)^{-1} \right), \end{aligned}$$

provided that T and S are the limiting upper boundaries of the \mathcal{POL} .

PROOF. 1) Suppose there exists a machine P_j^Y such that recognizes for all of the strings z which are longer some n , if they belong to language L in fewer than $T((|z|/(2D))^\delta)$ steps. By assumption there is a suitable polynomial f and a machine P_l^Y such that P_l^Y computes function $G(i, x)$ within $f(|i|+|x|)$ steps. Hence the algorithm, which consists of the successive use of machines P_l^Y and P_j^Y , recognizes already, whether a string $\langle i, x \rangle$ is in language $MK^Y(F)$, after at most

$$\begin{aligned} (a) T_0(i, x) &\leq f(|i|+|x|) + T((D(|i|+|x|)^k/(2D))^\delta) = \\ &= f(|i|+|x|) + T((|i|+|x|)/2^\delta) \\ \left(\text{or } (b) \right. & T_0(i, x) \leq f(|i|+|x|) + T((D \cdot |i|^m \cdot |x|^k/(2D))^\delta) \leq \\ &\leq \left[\text{for all } x \text{ that } |x| \geq |i| \right] \leq f(2|x|) + T(|x|^{(k+m)\delta}/2^\delta) \end{aligned}$$

steps. Clearly, if x and i are enough long, then $T_0(i, x) < T(|i|+|x|)$ holds, and that contradicts the condition of proposition.

2) That is proved similarly. Q.E.D.

3.5.2 The complexity of theorem-proving procedures. Corollary 1 and Item 1) of Proposition 3 have been implicitly proved for the language $RK(F)$ in [5, 7], providing the inequality (a) holds for $k=1$. M.O. Rabin, M.J. Fisher, and A.R. Meyer have relied on these facts when they have been successfully obtaining the lower bounds of the computational complexity for many theories. The author as well has applied this method for the language AK and the theories of the Boolean algebra which consists of two elements only [12, 7], and Boolean algebras [8] in the presence of inequality (b). We will explain in detail this proof in the second part.

List of references

- [1] The design and analysis of computer algorithms / A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman // Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1976.
- [2] Relativizations of the $\mathcal{P} = ?\mathcal{NP}$ question / Th. Baker, J. Gill, R. Solovay // SIAM J. Comput **V. 4** (1975), 431-442.
- [3] The complexity of theorem-proving procedures / S.A. Cook // Proc. of the 3rd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, Shaker Heights, Ohio. 1971, 151-159.
- [4] Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness / M.R. Garey, D.S. Johnson, // Freeman, New York, 1979.
- [5] Super exponential complexity of Presburger's arithmetic / M.J. Fisher, M.O. Rabin // in Complexity of Computations, Proc. Symp. Appl. Math., New York City 1973 (1974) pp. 27-41.
- [6] Introduction to Metamathematics / S.C. Kleene // Van Nostrand – New York (1952).
- [7] The computational expressiveness of theory of the twoelements Boolean algebra / I.V. Latkin // Proc. of the Intern. Sc. Conf. "Computability and Models," Ust-Kamenogorsk, EKSTU, 2010, 73–82, (in Russian).

- [8] Recognition complexity of theories and their computational expressivity / I.V. Latkin, Algebra and Logic, Vol. 51, No. 2, May, 2012 pp. 144-159; (Russian Original Vol. 51, No. 2, March-April, 2012, pp. 216-238); <http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.1007/s10469-012-9178-5>
- [9] Elements of the theory of computation / H.R. Lewis, C.H. Papadimitriou // Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, 1998.
- [10] The equivalence problem for expressions with squaring requires exponential space / A.R. Meyer, L.J. Stockmeyer // Proc. 13th IEEE Symposium on Switching and Automata Theory, 1972, pp. 125-129.
- [11] The inherent complexity of the theories of ordered sets / A.R. Meyer // Proc. of the Intern. Congress of Mathematics. Vancouver, 1974. Canadian Math. Congress. 1975, pp. 477-482.
- [12] Solvable theories / M.O. Rabin // in Handbook of a mathematical logic. Ed. J. Barwise, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.
- [13] Theory of recursive functions and effective computability / H. Rogers, Jr. // McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

УДК 519.1.015

ДОПОЛНЕННЫЙ СПИСОК СМЕЖНОСТИ ВЕРШИН И АЛГОРИТМ РАЗБИЕНИЯ НА ОРБИТЫ¹

Л.П. Латкина

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Аннотация. Вводятся определения дополненного списка смежности и индексированного дополненного списка смежности, и даётся построение их шаблонов. Приводятся правила построения этих списков, исходя из матрицы смежности графа. Даётся доказательство основного свойства дополненного списка смежности. Пошагово описывается алгоритм классификации вершин простого связного графа G , способствующей разбиению вершин на орбиты. Проверена эффективность алгоритма для графов имеющих не более семи вершин, при наличии только одного класса, доказано, что граф с не более чем с восьмью вершинами имеет одну орбиту.

Ключевые слова: дополненный список смежности, индексированный дополненный список смежности, шаблон, матрица смежности графа, разбиение вершин на орбиты.

Определения и свойства

Приведём рабочие определения, остальные определения можно найти в [1].

¹Работа поддержана грантом МОН РК «Алгоритмические проблемы алгебраических систем и анализ сложности алгоритмов» № 90-419-13

Определение 1. *Дополненный список смежности $D(A)$ вершины A – две колонки из строк упорядоченных по порядку убывания количества составляющих их маркеров вершин графа G . Каждая строка первой колонки состоит из набора маркеров вершин, где первый маркер это маркер вершины из окружения A в графе G (первый столбец таблицы 2), за первым маркером в порядке возрастания записываются маркеры вершин из окружения $N(A)$ вершины A с которыми смежна вершина соответствующая первому маркеру строки в графе G (второй столбец таблицы 2). Каждая строка второй колонки строится также как и строки первой колонки, для вершины A графа в дополнительном графе \overline{G} (третий четвертый столбцы таблицы 2).*

$D(A)$ можно представить матрицей с $\max(\deg(A), |VG| - \deg(A) - 1)$ строками и 4 столбцами, объединёнными в две колонки. Здесь и далее $\deg(A)$ – степень вершины A , $|VG|$ – количество вершин графа G .

Пример 1. Построим $D(2)$ и $D(6)$ (табл. 2) графа G_7 (табл. 1).

Таблица 1								Таблица 2				
Матрица смежности								№	Окружение	Смежность окружения	Окружение в \overline{G}_7	Смежность окр. в \overline{G}_7
	1	2	3	4	5	6	7					
1	0	1	0	1	0	0	0	2	3	5	6	7
2	1	0	1	0	1	0	0		5	3	7	6
3	0	1	0	1	1	0	0		1	—	4	—
4	1	0	1	0	0	1	1	6	4	—	7	1,2,3
5	0	1	1	0	0	1	1		5	—	1	3,7
6	0	0	0	1	1	0	0		—	—	3	1,7
7	0	0	0	1	1	0	0		—	—	2	7

Замечание 1. При рассмотрении дополнительного графа \overline{G} к графу G , дополненный список смежности $D(A)$ вершины A в графе \overline{G} получается из дополненного списка смежности $D(A)$ вершины A в графе G перестановкой колонок.

Для фиксированной вершины A связного графа G величина $e(A)$, равная расстоянию до наиболее удалённой от A вершины, называется эксцентриситетом вершины A .

Замечание 2. Доказано [4], что для любой вершины её эксцентриситет равен двум либо в графе G либо в дополнительном графе \overline{G} , значит информация, содержащаяся в дополненных списках смежности $D(A)$ вершин графа G является достаточно полной.

Лемма. Пусть A и B две вершины графа G ,

а) если A смежна с B и в её дополненном списке смежности в столбце 2 в строке начинающейся маркером вершины B имеется упорядоченный набор S_1, S_2, \dots, S_k ($k \geq 0$) маркеров вершин графа G , тогда у вершины B в её дополненном списке смежности в столбце 2 в строке начинающейся маркером вершины A стоит тот же набор S_1, S_2, \dots, S_k маркеров;

б) если A не смежна с B и в её дополненном списке смежности в столбце 4 в строке начинающейся маркером вершины B имеется упорядоченный набор T_1, T_2, \dots, T_n ($n \geq 0$) маркеров вершин графа G , тогда у вершины B в её дополненном списке смежности в столбце 4 в строке начинающейся маркером вершины A стоит тот же набор T_1, T_2, \dots, T_n маркеров.

Доказательство. а) Пусть вершины A и B графа G смежны. Окружение вершины A , $N(A)$ и окружение вершины B , $N(B)$ имеют общие вершины $N(A) \cap N(B) = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ ($k \geq 0$), тогда в дополненном списке смежности вершины A в колонке 1 имеется строка B : S_1, S_2, \dots, S_k ,

а для вершины B в её дополненном списке смежности обязательно имеется такая же строка для A .

б) Пусть вершины A и B графа G не смежны, тогда они смежны в графе \overline{G} . Дополненный список смежности является симметричной структурой относительно графа G и его дополнения графа \overline{G} . Поменяв местами колонку 1 с колонкой 2 в дополненном списке смежности вершин A и B графа G , получим дополненный список смежности этих же вершин в графе \overline{G} . Рассматривая вершины A и B в графе \overline{G} , приходим к уже доказанному случаю а).

Определение 2. *Шаблон дополненного списка смежности $D(A)$ вершины A — два списка чисел, указывающих количества маркеров вершин в соответствующих строках обоих столбцов дополненного списка смежности $D(A)$ вершины A (пример 2).*

Очевидно, если вершины из одной орбиты, то их шаблоны дополненных списков смежности одинаковые.

Для простых случаев, например для графа G_7 , одно лишь сравнение шаблонов дополненных списков смежности уже разбивает все вершины графа на орбиты.

Пример 2. Продолжим рассматривать граф G_7 (таблица 1). Построим для всех его вершин дополненные списки смежности, представив их в удобном для рассмотрения виде.

$$\begin{array}{l}
 1: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: & 3: 6,7 \\ 4: & 6: 3,7 \\ & 7: 3,6 \\ & 5: \end{array} \right. &
 2: \left\{ \begin{array}{l|l} 3: 5 & 6: 7 \\ 5: 3 & 7: 6 \\ 1: & 4: \end{array} \right. &
 3: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: 5 & 1: 6,7 \\ 5: 2 & 6: 1,7 \\ 4: & 7: 1,6 \end{array} \right. \\
 \\
 4: \left\{ \begin{array}{l|l} 1: & 2: \\ 3: & 5: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. &
 5: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: 3 & 1: \\ 3: 2 & 4: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. &
 6: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 7: 1,2,3 \\ 1: & 3,7 \\ 5: & 3: 1,7 \\ & 2: 7 \end{array} \right. &
 7: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 6: 1,2,3 \\ 5: & 1: 3,6 \\ & 3: 1,6 \\ & 2: 6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Во всех дополненных списках смежности подсчитываем количества строк в первом и втором столбцах.

$$\begin{array}{l}
 1: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: & 3: 6,7 \\ 4: & 6: 3,7 \\ & 7: 3,6 \\ & 5: \end{array} \right. \quad (2,4) &
 2: \left\{ \begin{array}{l|l} 3: 5 & 6: 7 \\ 5: 3 & 7: 6 \\ 1: & 4: \end{array} \right. \quad (3,3) &
 3: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: 5 & 1: 6,7 \\ 5: 2 & 6: 1,7 \\ 4: & 7: 1,6 \end{array} \right. \quad (3,3) \\
 \\
 4: \left\{ \begin{array}{l|l} 1: & 2: \\ 3: & 5: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. \quad (4,2) &
 5: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: 3 & 1: \\ 3: 2 & 4: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. \quad (4,2) &
 6: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 7: 1,2,3 \\ 5: & 1: 3,7 \\ & 3: 1,7 \\ & 2: 7 \end{array} \right. \quad (2,4) &
 7: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 6: 1,2,3 \\ 5: & 1: 3,6 \\ & 3: 1,6 \\ & 2: 6 \end{array} \right. \quad (2,4)
 \end{array}$$

Объединяем в наборы вершины с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах.

В первый набор 1 — с 2 строками первого столбца и 4 строками второго столбца попало три вершины $\{1;6;7\}$.

Во второй набор 2 — с 3 строками первого столбца и 3 строками второго столбца попало две вершины $\{2;3\}$.

В третий набор 3 — с 4 строками первого столбца и 2 строками второго столбца попало две вершины $\{4;5\}$.

Вычисляем длины строк первых столбцов во всех наборах. Если длины строк на соответствующих позициях одинаковые, то вершины оставляем в рассматриваемом наборе, если разные относим к новому набору.

$$\begin{array}{l}
 1: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: & 3:6,7 \\ 4: & 6:3,7 \\ & 7:3,6 \\ & 5: \end{array} \right. & (2\{1;1\},4) & 2: \left\{ \begin{array}{l|l} 3:5 & 6:7 \\ 5:3 & 7:6 \\ 1: & 4: \end{array} \right. & (3\{2;2;1\},3) & 3: \left\{ \begin{array}{l|l} 2:5 & 1:6,7 \\ 5:2 & 6:1,7 \\ 4: & 7:1,6 \end{array} \right. & (3\{2;2;1\},3) \\
 4: \left\{ \begin{array}{l|l} 1: & 2: \\ 3: & 5: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. & (4\{1;1;1;1\},2) & 5: \left\{ \begin{array}{l|l} 2:3 & 1: \\ 3:2 & 4: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. & (4\{2;2;1;1\},2) \\
 6: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 7:1,2,3 \\ 5: & 1:3,7 \\ & 3:1,7 \\ & 2:7 \end{array} \right. & (2\{1;1\},4) & 7: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 6:1,2,3 \\ 5: & 1:3,6 \\ & 3:1,6 \\ & 2:6 \end{array} \right. & (2\{1;1\},4)
 \end{array}$$

Объединяем в наборы вершины с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах и одинаковыми длинами строк первых столбцов.

Получаем четыре набора вершин с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах и длин строк первого столбца. Два первых: $1-(2\{1;1\},4)\|\{1;6;7\}$; $2-(3\{2;2;1\},3)\|\{2;3\}$;

Третий набор 3, в котором находились две вершины 4,5, после сравнения длин строк первых столбцов распался на два набора: $3-(4\{1;1;1;1\},2)\|\{4\}$, $3-1-(4\{2;2;1;1\},2)\|\{5\}$.

Вычисляем длины строк вторых столбцов во всех наборах. Если длины строк одинаковые, то вершины оставляем в рассматриваемом наборе, если разные, относим к новому набору.

$$\begin{array}{l}
 1: \left\{ \begin{array}{l|l} 2: & 3:6,7 \\ 4: & 6:3,7 \\ & 7:3,6 \\ & 5: \end{array} \right. & (2\{1;1\},4\{3;3;3;1\}) & 2: \left\{ \begin{array}{l|l} 3:5 & 6:7 \\ 5:3 & 7:6 \\ 1: & 4: \end{array} \right. & (3\{2;2;1\},3\{2;2;1\}) \\
 3: \left\{ \begin{array}{l|l} 2:5 & 1:6,7 \\ 5:2 & 6:1,7 \\ 4: & 7:1,6 \end{array} \right. & (3\{2;2;1\},3\{3;3;3\}) \\
 4: \left\{ \begin{array}{l|l} 1: & 2: \\ 3: & 5: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. & (4\{1;1;1;1\},2\{1;1\}) & 5: \left\{ \begin{array}{l|l} 2:3 & 1: \\ 3:2 & 4: \\ 6: & \\ 7: & \end{array} \right. & (4\{2;2;1;1\},2\{1;1\}) \\
 6: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 7:1,2,3 \\ 5: & 1:3,7 \\ & 3:1,7 \\ & 2:7 \end{array} \right. & (2\{1;1\},4\{4;3;3;2\}) & 7: \left\{ \begin{array}{l|l} 4: & 6:1,2,3 \\ 5: & 1:3,6 \\ & 3:1,6 \\ & 2:6 \end{array} \right. & (2\{1;1\},4\{4;3;3;2\})
 \end{array}$$

Получаем шесть наборов вершин с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах и длин строк первого и второго столбцов. Первый набор, в котором находились три вершины $\{1;6;7\}$, после сравнения длин строк вторых столбцов распался на два набора: $1-(2\{1;1\},4\{3;3;3;1\})\|\{1\}$; $1-2-(2\{1;1\},4\{4;3;3;2\})\|\{6;7\}$;

Второй набор, в котором находились две вершины $\{2;3\}$, после сравнения длин строк вторых столбцов распался на два набора: $2-(3\{2;2;1\},3\{2;2;1\})||\{2\}$; $2-2-(3\{2;2;1\},3\{3;3;3\})||\{3\}$;

Остальные наборы не изменились: $3-(4\{1;1;1;1\},2\{1;1\})||\{4\}$, $3-1-(4\{2;2;1;1\},2\{1;1\})||\{5\}$.

Для всех вершин, попавших в один и тот же набор, строим шаблоны их дополненных списков смежности.

1: $2\{1;1\},4\{3;3;3;1\}$ 2: $3\{2;2;1\},3\{2;2;1\}$ 3: $3\{2;2;1\},3\{3;3;3\}$ 4: $4\{1;1;1;1\},2\{1;1\}$ 5: $4\{2;2;1;1\},2\{1;1\}$
 6: 7: $2\{1;1\},4\{4;3;3;2\}$.

Либо в компактном виде: 1: $\{1;1\},\{3;3;3;1\}$ 2: $\{2;2;1\},\{2;2;1\}$ 3: $\{2;2;1\},\{3;3;3\}$
 4: $\{1;1;1;1\},\{1;1\}$ 5: $\{2;2;1;1\},\{1;1\}$ 6: 7: $\{1;1\},\{4;3;3;2\}$.

Каждому полученному набору вершин присваиваем номер. Далее такие наборы будем называть классами. Мы получим шесть наборов вершин — шесть классов, которым можно присвоить номера от 1 до 6. №1: $\{1\}$, №2: $\{2\}$, №3: $\{3\}$, №4: $\{4\}$, №5: $\{5\}$, №6: $\{6,7\}$. Первые пять классов вершин совпадают с пятью орбитами графа G_7 . Для вершин 6 и 7, попавших в шестой класс, мы пока не можем однозначно сказать, будут ли они обе составлять шестую орбиту графа, или они принадлежат двум новым орбитам. Относительно каждой из этих вершин все остальные вершины графа G_7 делятся на вершины из их окружения и вершины не смежные с ними. Для уточнения класса вершин 6 и 7 определим классы вершин (из уже выделенных) в окружении вершин 6 и 7 и классы вершин не смежных с ними.

Определение 3. *Индексированный дополненный список смежности $DI(A)$ вершины A — дополненный список смежности $D(A)$ вершины A с указанием в верхних индексах у маркеров вершин номеров их классов, полученных после сравнения шаблонов дополненных списков смежности вершин (рис. 1а) и 1в).*

Определение 4. *Шаблон индексированного дополненного списка смежности $DI(A)$ вершины A — индексированный дополненный список смежности $DI(A)$ вершины A без указания маркеров вершин (пример 3, рис. 1б) и 1г).*

Пример 3. Продолжим рассматривать граф G_7 (таблица 1). Для вершин 6 и 7, попавших в шестой класс, мы теперь построим индексированные дополненные списки смежности и их шаблоны. Используем полученные шесть классов: №1: $\{1\}$, №2: $\{2\}$, №3: $\{3\}$, №4: $\{4\}$, №5: $\{5\}$, №6: $\{6,7\}$.

$$6: \begin{cases} 4^4 : \begin{array}{l} 7^6 : 1^1, 2^2, 3^3 \\ 1^1 : 3^3, 7^6 \\ 3^3 : 1^1, 7^6 \\ 2^2 : 7^6 \end{array} \\ 5^5 : \end{cases} \quad \begin{cases} 4 : \begin{array}{l} 6^1, 2^2, 3^3 \\ 1^1, 3^3, 6^6 \\ 3^3, 1^1, 6^6 \\ 2^2, 6^6 \end{array} \\ 5 : \end{cases} \quad 7: \begin{cases} 4^4 : \begin{array}{l} 6^6 : 1^1, 2^2, 3^3 \\ 1^1 : 3^3, 6^6 \\ 3^3 : 1^1, 6^6 \\ 2^2 : 6^6 \end{array} \\ 5^5 : \end{cases} \quad \begin{cases} 4 : \begin{array}{l} 6^1, 2^2, 3^3 \\ 1^1, 3^3, 6^6 \\ 3^3, 1^1, 6^6 \\ 2^2, 6^6 \end{array} \\ 5 : \end{cases}$$

Рисунок 1— а), б), в), г)

Сравнивая шаблоны индексированных дополненных списков смежности этих вершин, мы видим, что они совпадают. Вершины 6 и 7 относим к одной и той же шестой орбите графа G_7 . В корректности этого можно убедиться, заметив, что отображение $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 5, 6 \mapsto 7, 7 \mapsto 6$ является автоморфизмом графа G_7 .

Построение списков

Дополненный список смежности вершины графа G строим по матрице смежности, используя информацию с единицами для первого столбца и с нулями для второго столбца (пример 4).

Пример 4. Для примера возьмём граф G_9 , заданный матрицей смежности (табл. 3).

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	1	1	0	0
5	0	1	1	0	0	0	0	1	1
6	1	0	0	1	0	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	0	1
9	0	1	0	0	1	1	0	1	0

Для вершины 1 составим дополненный список смежности $D(1)$. Для первой колонки используем информацию с единицами из строк матрицы смежности с номерами 1,3,4,6,8 (рис. 2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	1	1	0	0
6	1	0	0	1	0	0	1	0	1
8	1	0	0	0	1	0	1	0	1

$$1: \left\{ \begin{array}{l} 4:3;6 \\ 3:4 \\ 6:4 \\ 8: \end{array} \right.$$

Рисунок 2

Для колонки 2 используем информацию с нулями из строк матрицы смежности с номерами 1,2,5,7,9 (рис. 3).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	1	0	0	0	0	1	1
7	0	1	0	1	0	1	0	1	0
9	0	1	0	0	1	1	0	1	0

$$1: \left\{ \begin{array}{l|l} 4:3;6 & 7:5;9 \\ 3:4 & 5:7 \\ 6:4 & 9:7 \\ 8: & 2: \end{array} \right.$$

Рисунок 3

Описание алгоритма разбиения вершин на орбиты

Рассмотрим алгоритм разбиения вершин графа на орбиты, использующий дополненный список смежности и индексированный дополненный список смежности вершин.

Для каждой вершины A_i строим дополненный список смежности и его шаблон. По анализу шаблонов полученных дополненных списков смежности проводится предварительная классификация вершин.

$$D(A_i): \begin{cases} A_i : A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \mid A_{m_1}, \dots, A_{m_l} \\ \dots \\ A_k : A_{k_1}, \dots, A_{k_x} \mid A_{n_1}, \dots, A_{n_x} \end{cases} \quad [k_i]$$

По предварительному разбиению вершин на классы у маркеров каждой вершины A_i в этих дополненных списках проставляются верхними индексами номера выделенных классов. Записываем индексированные дополненные списки смежности и их шаблоны.

$$DI(A_i): \begin{cases} A_i^{k_1} : A^{k_2}_{i_1}, \dots, A^{k_n}_{i_n} \mid A^{k_1}_{m_1}, \dots, A^{k_l}_{m_l} \\ \dots \\ A^{k_x}_k : A^{k_2}_{k_1}, \dots, A^{k_x}_{k_x} \mid A^{k_1}_{n_1}, \dots, A^{k_x}_{n_x} \end{cases} \quad [k_i]$$

Проводится новая классификация по анализу полученных шаблонов в дополненных индексированных списках смежности всех вершин. Вершины с одинаковыми шаблонами относят к одному классу. Если вершины, ранее попавшие в один класс, получили после новой классификации разные шаблоны, то они разбиваются на несколько новых классов. Один из новых классов, в котором находятся вершины с меньшими номерами, «наследует» прежний номер класса, а остальные получают номера на единицу больше наибольшего полученного номера. Если новых классов не обнаружено, алгоритм завершает свою работу, иначе стираются старые индексы, на их место устанавливаются новые и выполняется новая классификация, и так далее пока не будет обнаруживаться новых классов.

Опишем алгоритм по шагам.

Шаг 0. Для каждой вершины выписываем дополненный список смежности.

Шаг 1. Предварительно классифицируем вершины.

- Во всех дополненных списках смежности подсчитываем количества строк в первом и втором столбцах. Распределяем вершины с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах в первоначальные наборы.
- Вычисляем длины строк первых столбцов во всех наборах. Если длины строк на соответствующих позициях одинаковые, то вершины оставляем в рассматриваемом наборе, если разные относим к новому набору. Получаем наборы вершин с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах и длин строк первого столбца на одинаковых позициях.
- Вычисляем длины строк вторых столбцов во всех наборах. Если длины строк на соответствующих позициях одинаковые, то вершины оставляем в рассматриваемом наборе, если разные, относим к новому набору. Получаем наборы вершин с одинаковыми значениями количеств строк в обоих столбцах и одинаковыми длинами строк первого и второго столбцов на одинаковых позициях.
- Для всех вершин, попавших в один и тот же набор, строим шаблоны их дополненных списков смежности. Каждому полученному набору вершин присваиваем номер. Далее такие наборы будем называть классами. Вершины с одинаковыми шаблонами дополненных списков смежности

относятся к одному классу. Добавим к их дополненным спискам смежности номера полученных классов (например, указывая в квадратных скобках).

Шаг $t + 2$. Для каждой вершины записываем индексированный дополненный список смежности. Переходим к шаблонам индексированных дополненных списков смежности.

Шаг $t + 3$. Проводим классификацию вершин по полученным шаблонам индексированных дополненных списков смежности, относя вершины с одинаковыми шаблонами к одному классу. Если вершины, ранее попавшие в один класс, получили после новой классификации разные шаблоны индексированных дополненных списков смежности, то они разбиваются на несколько новых классов. Один из новых классов, в котором находятся вершины с меньшими номерами, «наследует» прежний номер класса, а остальные получают номера на единицу больше наибольшего полученного номера.

Шаг $t + 4$. Сопоставляем две последние классификации и если они совпали, алгоритм заканчивает работу, иначе переходим к шагу $t + 2$ и проводим новую классификацию.

После первоначального разбиения вершин по шаблонам дополненных списков смежности, у вершин попавших в один класс, одинаковые шаблоны дополненных списков смежности, у вершин попавших в разные классы разные шаблоны дополненных списков смежности.

Выводы

1. Вершины, попавшие в разные классы после окончания работы вышеописанного алгоритма, не могут принадлежать одной орбите.
2. Вычислениями вручную проверено, что алгоритм даёт правильное разбиение вершин на орбиты для графов порядка n не более 7. Рассматривались густые (плотные) связанные графы, у которых дополнительные графы тоже связаны. Всего было рассмотрено около 350 графов. Алгоритм позволяет определять изоморфизм графов по количеству получаемых в графах орбит и их составу.
3. При наличии только одного класса, доказано, что граф с не более чем восьмью вершинами имеет одну орбиту.

Список литературы

- [1] Дистрибутивная раскраска вершин./Визинг В. Г.//Дискретный анализ и исследования операций. 1995, Т 2, № 4, с. 3-12.
- [2] Алгоритм разбиения вершин графа на орбиты./Назарец Н. А.// Тезисы 44-й МНСК «Студент и научно-технический прогресс», секция «Математика», НГУ, 2006 г., с. 85.
- [3] Алгоритм разбиения вершин супер однородных графов на орбиты./ Латкина Л. П.// Матер. междунар. науч. конф. «Вычислимость и модели», 30 авг.–1 сент. 2009 г., ВКГТУ, с. 150-160.
- [4] Научно-исследовательская работа по изучению некоторых свойств однородных и густых графов/Латкина Л. П.// Матер. междунар. научно-практ. конф. «Роль университетов в создании инновационной экономики», 25-26 сент. 2008 г., ВКГТУ, Т2, с. 184-185.

УДК 512.54 + 510.5

О ВЫЧИСЛИМЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД ПОЛЕМ ¹

М.К. Нуризинов, Р.К. Тюлюбергенов, Н.Г. Хисамиев

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Аннотация. Группа G называется вычислимой, если существует нумерация $\nu : \omega \rightarrow G$ такая, что (G, ν) – конструктивная группа. Основными проблемами здесь являются проблемы существования вычислимого представления, единственности и продолжения таких представлений. Пусть P – поле степени m над Q характеристики 0, а $UT_n(P)$ – группа всех унитарных матриц над P и ν – геделева нумерация группы $UT_n(P)$, т.е. для любого натурального числа $n \in \omega$ эффективно определяются элементы матрицы νn . В работе получен критерий вычислимости подгруппы группы $UT_n(P)$.

Ключевые слова: нумерация, m -сводимость, группа конечной размерности, центральный ряд группы, группа унитарных матриц, нильпотентная группа, факторгруппа, поле степени n характеристики 0, конструктивная (вычислимая) группа, вычислимо устойчивая группа, вычислимое поле.

Пусть ω – множество всех натуральных чисел, G – некоторая группа и $\nu : \omega \rightarrow G$ отображение ω на G . Пара (G, ν) называется конструктивной группой, если существует алгоритм, который по любым натуральным числам n , m и s определяет справедливость равенств $\nu n = \nu m$ и $\nu n \cdot \nu m = \nu s$. Группа G называется вычислимой (или конструктивизируемой), если существует нумерация $\nu : \omega \rightarrow G$ группы G такая, что (G, ν) – конструктивная группа. Подгруппа H нумерованной группы (G, ν) называется вычислимой (вычислимо перечислимой) в (G, ν) если множество $\nu^{-1}H$ вычислимо (вычислимо перечислимо). Если (G, ν) – конструктивная группа, то ν называется вычислимой нумерацией группы G . Основными проблемами здесь являются проблемы существования вычислимой нумерации и единственности, т.е. какие группы вычислимы и если они вычислимы, то сколько допускают неавтоэквивалентных вычислимых нумераций. Данные проблемы были исследованы А.И. Мальцевым, Ю.Л. Ершовым, С.С. Гончаровым, Р. Дауни, Дж. Найт, А.С. Морозовым, В.П. Добрица, А.Т. Нуртазиным, Н.Г. Хисамиевым и другими авторами.

В работе В.А. Романькова, Н.Г. Хисамиева [1] доказано, что группа $UT_n(K)$ всех унитарных матриц степени $n \geq 3$ над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей вычислима тогда и только тогда, когда кольцо K вычислимо. В работе [2] этих же авторов построено кольцо K , которое не вычислимо, а группа $UT_2(K)$ вычислима.

Пусть Q – аддитивная группа рациональных чисел.

В работе [3] А.И. Мальцевым доказано, что подгруппа $G \leq Q^n$ вычислима тогда и только тогда, когда G – вычислимо перечислимая подгруппа в (Q^n, γ) , где γ – геделева нумерация множества n -ок рациональных чисел.

¹Работа выполнена при поддержке грантового финансирования МОН РК, гранты (№0929/ГФЗ, №0726/ГФ)

В данной работе получен критерий вычислимости подгруппы группы всех унитарных матриц $UT_n(P)$ над полем степени n характеристики 0.

Мы придерживаемся терминологии и обозначения по конструктивным моделям монографии [4], по группам [5], а по теории полей [6].

Если в абелевой группе без кручения A существует конечная максимально линейно независимая система элементов, то будем говорить, что размерность группы A конечна.

Если нильпотентная группа G без кручения имеет центральный ряд все факторы которого абелевы группы конечных размерностей, то G называется группой конечной размерности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (G, ν) – конструктивная нильпотентная группа без кручения конечной размерности и

$$e = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G \quad (1)$$

ее центральный ряд. Тогда G_i – вычислимая подгруппа в (G, ν) для любого $i \leq n$. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** проведем индукцией по i . Для $i = 0$ это очевидно. Пусть для i теорема доказана и

$$g_{k1}, g_{k2}, \dots, g_{km_k}$$

такие элементы из G , что последовательность

$$\bar{g}_{k1}, \bar{g}_{k2}, \dots, \bar{g}_{km_k}$$

является максимально линейно независимой системой элементов факторгруппы $\bar{G}_k = G_k/G_{k-1}$, $0 < k \leq n$. Так как (1) центральный ряд группы G , то справедлива эквивалентность

$$g \in G_{i+1} \Leftrightarrow g_{kj} \cdot g = g \cdot g_{kj} \pmod{G_i} \quad (2)$$

т.е. $[g_{kj}, g] \in G_i$ для любых $0 < k \leq n$, $0 < j \leq m_k$.

Пусть числа $m_{kj} \in \omega$ такие, что $\nu m_{kj} = g_{kj}$. Тогда эквивалентность (2) равносильна

$$s \in \nu^{-1}G_{i+1} \Leftrightarrow [\nu m_{kj}, \nu s] \in G_i, 0 < k \leq n, 0 < j \leq m_k. \quad (3)$$

Так как по предположению индукции подгруппа G_i вычислима в конструктивной группе (G, ν) , то правая часть (3) проверяется эффективно. Отсюда множество $\nu^{-1}G_{i+1}$ вычислимо, т.е. подгруппа G_{i+1} вычислима в (G, ν) . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если G – вычислимая нильпотентная группа без кручения конечной размерности, то факторы ее любого центрального ряда вычислимы.

Пусть Q – поле рациональных чисел, а P – поле степени m над Q . Тогда элементами поля P являются все многочлены степени менее m . Операции сложения и умножения производится по модулю некоторого неприводимого над Q многочлена $f(x)$ степени n . Данный многочлен определяет поле P однозначно с точностью до изоморфизма. Тогда существует геделева нумерация γ множества всех многочленов из поля P , т.е. по данному натуральному числу $n \in \omega$ эффективно находится многочлен γn и (P, γ) – конструктивное поле. По нумерации γ можно определить

геделеву нумерацию ν группы $UT_n(P)$ всех унитреугольных матриц над P , т.е. по s эффективно находится матрица νs .

ТЕОРЕМА 2. Подгруппа G группы всех унитреугольных матриц $UT_n(P)$ над полем степени $n > 0$ характеристики 0 вычислима тогда и только тогда, когда G вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(P), \nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – некоторая вычислимая нумерация группы G и

$$e = G_0 < G_1 < \dots < G_m = G$$

ее такой центральный ряд, что факторгруппы $\bar{G}_i = G_i/G_{i-1}$ – абелевы группы конечных размерностей, $0 < i \leq m$. По теореме 1 множества $\mu^{-1}G_i$ – вычисляемые множества. Пусть

$$\bar{g}_{i1}, \bar{g}_{i2}, \dots, \bar{g}_{im_i}$$

– максимально линейно независимая система элементов факторгруппы \bar{G}_i . В каждом классе \bar{g}_{ik} зафиксируем матрицу A_{ik} , $0 < k \leq m_i$. Так как таких матриц конечное число, то можно считать, что элементы этих матриц нам известны.

Индукцией по i докажем, что подгруппы G_i вычислимо перечислимы в $(UT_n(P), \nu)$ и по любому числу $s \in \mu^{-1}G_i$ эффективно находится число t такое, что $\mu s = \nu t$. Для $i = 0$ это очевидно. Допустим для i это доказано, т.е. $\nu^{-1}G_i$ – вычислимо перечислимое множество натуральных чисел и существует частично вычислимая функция f_i такая, что ее область определения $\delta f_i = \mu^{-1}G_i$ и для любого $k \in \mu^{-1}G_i$ верно $\mu k = \nu f_i(k)$.

Из определения матриц A_{i+1k} , $0 < k \leq m_{i+1}$ следует, что справедливо следующая эквивалентность:

Для любого $k \in \omega$ элемент μk принадлежит подгруппе G_{i+1} тогда и только тогда, когда найдутся целые числа $s, t, r_1, r_2, \dots, r_{m_{i+1}}$ такие, что

$$(\mu k)^s = A_{i+11}^{r_1} \cdot \dots \cdot A_{i+1m_{i+1}}^{r_{m_{i+1}}} \cdot \mu t, \quad t \in \mu^{-1}G_i. \tag{4}$$

Допустим (4) справедливо. По индукционному предположению $\mu t = \nu f_i(t)$. Так как ν – геделева нумерации группы $UT_n(P)$, то по $f_i(t)$ эффективно находим матрицу $B = \nu f_i(t)$. Отсюда по числам $r_1, r_2, \dots, r_{m_{i+1}}$ эффективно находим матрицу

$$C = A_{i+11}^{r_1} \cdot \dots \cdot A_{i+1m_{i+1}}^{r_{m_{i+1}}} \cdot B.$$

Так как $UT_n(P)$ – нильпотентная группа без кручения, то в ней извлечение корней – однозначная операция. Поэтому по C эффективно определяется матрица D и число r такие, что $D^s = C$, $\nu r = D$. Отсюда и (4) следует, что существует алгоритм, который перечисляет все матрицы из подгруппы G_{i+1} и по номеру $k \in \mu^{-1}G_{i+1}$ эффективно находит такое число r , что $\mu k = \nu r$ т.е. индукционный шаг доказан.

Таким образом $G_n = G$ – вычислимо перечислимая подгруппа в $(UT_n(P), \nu)$, т.е. необходимость доказана.

Достаточность следует из того, что вычислимо перечислимая подгруппа конструктивной группы вычислима. Теорема доказана.

Пусть ν_1 и ν_2 – две вычислимые нумерации группы G . Говорят, что ν_1 m -сводится к ν_2 , если существует вычислимая функция f такая, что для любого натурального числа n справедливо $\nu_1 n = \nu_2 f(n)$. Если любые вычислимые нумерации ν и μ m -сводятся друг к другу, то группа G называется вычислимо (рекурсивно) устойчивой.

Из доказательства теоремы вытекают

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G – вычислимая подгруппа группы $UT_n(P)$ над полем конечной степени характеристики 0, то любая ее вычислимая нумерация m -сводится к геделевой нумерации ν группы $UT_n(P)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Любая вычислимая подгруппа группы $UT_n(P)$ над полем конечной степени характеристики 0 вычислимо устойчива.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого натурального $n > 0$ подгруппа G группы всех унитарных матриц $UT_n(Q)$ над полем рациональных чисел вычислима тогда и только тогда, когда G вычислимо перечислима подгруппа в $(UT_n(Q), \nu)$, где ν – геделева нумерация группы $UT_n(Q)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если G – вычислимая подгруппа группы всех унитарных матриц $UT_n(Q)$, $n > 0$ над полем рациональных чисел, то любая ее вычислимая нумерация m -сводится к геделевой нумерации группы $UT_n(Q)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Любая вычислимая подгруппа группы всех унитарных матриц $UT_n(Q)$, $n > 0$ над полем рациональных чисел вычислимо устойчива.

Список литературы

- [1] Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, №3. С. 353-363.
- [2] Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивизируемых матричных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, №5. С. 603-613.
- [3] Мальцев А.И. О рекурсивных абелевых группах // Доклад АН СССР 1962. Т46, №5, С.1009-1012.
- [4] Конструктивные модели. / Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Новосибирск, Научная книга, 1999.
- [5] Основы теории групп. / Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И. 4-изд., М.: Наука, 1996.
- [6] Алгебра. / Б.Л. ван дер Варден, Санкт-Петербург, 2004.

УДК 512.54 + 510.5

ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ ПОДГРУППЫ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ¹

В.А. Романьков¹, Н.Г. Хисамиев²Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского¹Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева²

Abstract. Algebraically and logically closed objects play a crucial role in modern algebra, theory of models and mathematical logic. The substructure $A \leq B$ is called existentially closed in B if and only if for any \exists -statement $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ with constants from A if $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ is true in B it is also true in A . In this paper we found a condition of existential closure of subgroups of free nilpotent groups.

Keywords: free nilpotent group, degree of nilpotency, rank of group, existentially closed subgroup, a free factor.

Аңдатпа. Алгебралық және логикалық тұйық нысандардың қазіргі заман алгебрасында, үлгілер теориясында және математикалық логикада атқаратын рөлі ерекше. $A \leq B$ ішкі құрылым B -да экзистенциалды тұйық деп аталады сонда және тек сонда ғана, егер A -дағы константалармен берілген кез келген \exists -сөйлем $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ үшін егер $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ B -да ақиқат болса, онда ол A -да да ақиқат болу шарты орындалса. Жұмыста еркін нильпотентті топтардың ішкі топтарының экзистенциалды тұйық болу шарты алынған.

Кілттік сөздер: еркін нильпотентті топтар, нильпотенттілік дәрежесі, топтар рангі, экзистенциалды тұйық ішкі топтар, еркін көбейткіш.

Аннотация. Алгебраически и логически замкнутые объекты играют исключительную роль в современной алгебре, теории моделей и математической логике. Подструктура $A \leq B$ называется экзистенциально замкнутой в B тогда и только тогда, когда для любого \exists -предложения $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с константами из A , если $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ истинно в B , то она истинна и в A . В работе получено условие экзистенциальной замкнутости подгруппы свободных нильпотентных групп.

Ключевые слова: свободная нильпотентная группа, степень нильпотентности, ранг группы, экзистенциально замкнутая подгруппа, свободный множитель.

Алгебраически и логически замкнутые объекты играют исключительно важную роль в современной алгебре и теории моделей. В настоящей статье исследуется понятие экзистенциальной замкнутости в свободных нильпотентных группах.

Пусть \mathcal{K} – класс алгебраических структур языка \mathbf{L} . Структура $A \in \mathcal{K}$ называется *алгебраически замкнутой* в \mathcal{K} тогда и только тогда, когда для любого позитивного \exists -предложения $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ языка \mathbf{L} с константами из A , если $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ истинно в некоторой структуре $B \in \mathcal{K}$, содержащей A в качестве подструктуры, то $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ истинно в A .

¹Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проекты 14.В37.21.0359/0859 и Министерства образования и науки Республики Казахстан гранты 0726/ГФ и 0929/ГФЗ.

Относительно общих свойств алгебраически замкнутых структур см., например, [1].

Интересный частный случай понятия алгебраической замкнутости возникает, когда в качестве класса \mathcal{K} берется класс $\text{sub}(B)$ всех подструктур данной структуры B . Более того, если в качестве класса \mathcal{K} взять пару $\{A, B\}$, где A – подструктура структуры B , то можно говорить об *алгебраической замкнутости* A в B . Аналогичная терминология используется далее для других понятий замкнутости.

Более общим понятием, чем алгебраическая замкнутость, является естественное понятие Φ -*алгебраической замкнутости* структуры A в классе \mathcal{K} , где Φ – некоторый класс позитивных предложений языка \mathbf{L} .

Если в предыдущем определении в качестве Φ взять не только позитивные, но и произвольные \exists -предложения, то мы приходим к понятию Φ -*экзистенциальной замкнутости* системы A в классе \mathcal{K} , или, соответственно, к понятию Φ -*экзистенциальной замкнутости* подсистемы A в системе B . Если Φ – множество всех \exists -предложений, то говорим об *экзистенциальной замкнутости*, опуская Φ .

Пусть теперь \mathbf{L} – язык теоретико-групповой сигнатуры, \mathcal{K} – некоторый класс групп. В этом случае приведенные выше понятия могут быть представлены в чисто алгебраических терминах. Для групп H и G пишем $H \leq G$, если H – подгруппа группы G , и называем G *расширением* H . Под *уравнением* $w(x_1, \dots, x_n) = 1$ от *переменных (неизвестных)* x_1, \dots, x_n с константами из H подразумеваем указанное выражение, в котором $w(x_1, \dots, x_n)$ – групповое слово от x_1, \dots, x_n и элементов из H . Говорим, что уравнение $w(x_1, \dots, x_n) = 1$ имеет *решение (разрешимо)* в группе H , или, более общо, в расширении $G \geq H$, если существует такой набор элементов g_1, \dots, g_n группы G , что при подстановке их вместо переменных x_1, \dots, x_n , соответственно, получается верное равенство $w(g_1, \dots, g_n) = 1$. Естественным образом вводятся также понятия *системы уравнений* и *решения* системы уравнений.

Понятия алгебраической и экзистенциальной замкнутости для групп переформулируются следующим образом. Подгруппа H группы G *алгебраически замкнута*, если любая конечная система уравнений с константами из H разрешима в G тогда и только тогда, когда она разрешима в H . Подгруппа H *экзистенциально замкнута* в группе G , если любая конечная система уравнений и неравенств с константами из H , имеющая решение в группе G , имеет решение в группе H .

Группы, алгебраически замкнутые в классе всех групп, введены в рассмотрение В.Р. Скоттом [2]. Этот класс групп интенсивно изучался в 1970-80-е годы. См., например, статьи Макинтайра [3], Эклофа и Саббаха [4], Белеградека [5,6], Зиглера [7], книги Ходжеса [1], Хигмана и Э. Скотт [8], обзор [9]. В настоящее время известен ряд результатов об алгебраической и экзистенциальной замкнутости в различных классах групп. См. по этому поводу статью Баумслэга и Левина [10], обзорную статью Лейнена [11]. С другой стороны, не так много известно об алгебраической и экзистенциальной замкнутости подгрупп в конкретных группах.

В работе Мясникова и Романькова [12] введено понятие вербальной замкнутости. Это свойство формально является более слабым, чем свойство алгебраической замкнутости. Тем не менее, в [12] доказано, что подгруппа H свободной группы F конечного ранга будет вербально замкнутой в том и только том случае, если H – ретракт группы F . Отсюда следует, что свойства вербальной замкнутости, алгебраической замкнутости и свойство "быть ретрактом" для подгрупп свободной группы конечного ранга равносильны.

Здесь рассматриваются случаи свободных множителей $N_{m,c}$ относительно многообразия \mathcal{N}_c при $c \geq 4$. Доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Подгруппа N свободной нильпотентной группы $N_{r,c}$ ранга $r \geq 3$ степени нильпотентности $c \geq 3$ экзистенциально замкнута в $N_{r,c}$ тогда и только тогда, когда N является свободным множителем группы $N_{r,c}$ относительно многообразия \mathcal{N}_c всех нильпотентных групп степени $\leq c$, следовательно, $N \simeq N_{m,c}$, $1 \leq m \leq r$, и $m \geq c - 1$. Для $c = 2$ последнее ограничение следует заменить на $m \geq 2$.

Заметим, что экзистенциально замкнутыми подгруппами свободных абелевых групп являются их прямые множители.

Список литературы

- [1] W. Hodges, Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
- [2] W.R. Scott, Algebraically closed groups, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 118-121.
- [3] A. Macintyre, On algebraically closed groups, Ann. Math., 96 (1972), 53-97.
- [4] P.C. Eklof, C. Sabbagh, Model completions and modules, Ann. Math. Logic, 2 (1970/71), 251-295.
- [5] О.В. Белеградск, Об алгебраически замкнутых группах, Алгебра и логика, 13 (1974), 239-255.
- [6] O.V. Belegradsk, Elementary properties of algebraically closed groups, Fund. Math., 98 (1978), 83-101.
- [7] M. Ziegler, Algebraisch abgeschlossene Gruppen, In: Word Problems II (eds. S.I. Adian, W.W. Boone, G. Higman). The Oxford Book, North Holland, Amsterdam, 1980, 449-576.
- [8] G. Higman, E. Scott, Existentially closed groups. Oxford: Clarendon Press, 1988.
- [9] В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков, Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп, в сб. Итоги науки и техн., сер. Алгебра. Топол. Геом. Фундам. направл., 21, М., ВИНТИ, 1983, 3-79.
- [10] G. Baumslag, F. Levin, Algebraically closed torsion-free nilpotent groups of class 2, Comm. Algebra, 4 (1976), 533-560.
- [11] F. Leinen, Existentially closed groups in special classes, In: Finite and Locally finite groups (Istanbul, 1994), 471, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math., Phys. Sci., Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, 285-326.
- [12] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, arXiv: 1201.0497. v2 [math.GR] 10 Jan 2012, 1-12.

УДК 681.5.015

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ШЕСТИМОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

А. Сакабеков, Е. Аужани

Казахстанско-Британский Технический Университет

Abstract. In the paper a numerical method for the one dimensional nonlinear non-stationary six-moment system of the Boltzmann equations is introduced and results of numerical experiments are presented.

Keywords: Boltzmann moment system equations, numerical methods.

Аңдатпа. Мақалада бір өлшемді сызықсыз стационар емес Больцманның алты-моментті теңдеулер жүйесі үшін алғашқы-шеттік есепті сан тәсілімен шешу нәтижелері келтірілген.

Кілттік сөздер: Больцман моменттік теңдеулер жүйесі, сан тәсілдері.

Аннотация. В работе приведены результаты численного решения начально-краевой задачи для одномерной нестационарной нелинейной шестимомента системы уравнений Больцмана.

Ключевые слова: Система моментных уравнений Больцмана, численные методы.

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерной нестационарной нелинейной шестимомента системы уравнений Больцмана при следующих начальных и граничных условиях [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -2.3344\psi_1 \\ -\psi_2 \\ -0.7420\psi_3 \\ 0.7420\psi_4 \\ \psi_5 \\ 2.3344\psi_6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3162J_{03}(\psi, \psi) - 0.3873J_{11}(\psi, \psi) - 0.5502J_{02}(\psi, \psi) \\ 0.5477J_{03}(\psi, \psi) + 0.4472J_{11}(\psi, \psi) - 0.4082J_{02}(\psi, \psi) \\ 0.3162J_{03}(\psi, \psi) - 0.3873J_{11}(\psi, \psi) - 0.1749J_{02}(\psi, \psi) \\ -0.3162J_{03}(\psi, \psi) + 0.3873J_{11}(\psi, \psi) - 0.1749J_{02}(\psi, \psi) \\ 0.5477J_{03}(\psi, \psi) + 0.4472J_{11}(\psi, \psi) + 0.4082J_{02}(\psi, \psi) \\ -0.3162J_{03}(\psi, \psi) + 0.3873J_{11}(\psi, \psi) - 0.5502J_{02}(\psi, \psi) \end{pmatrix},$$

$$x \in [-a, a], t > 0, \quad (1)$$

$$\psi_i(0, x) = \psi_i^0(x), x \in [-a, a], i = 1, 2, \dots, 6, (2) \psi_i(t, -a) = \psi_i(t, a) = 0, t > 0, i = 1, 2, \dots, 6, (2)$$

где $J_{03}(\psi, \psi)$, $J_{11}(\psi, \psi)$, $J_{02}(\psi, \psi)$ – квадратичные формы, $\psi_i^0(x)$ – заданные начальные функции.

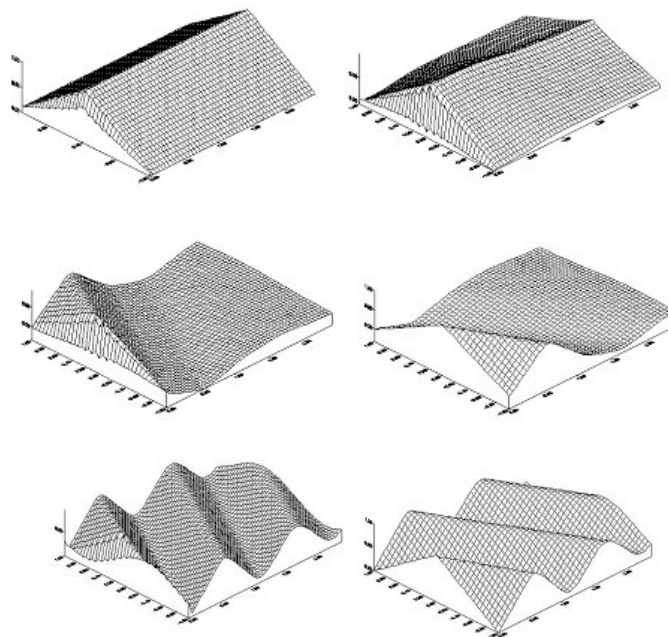


Рисунок 1 Моменты функции распределения при граничных условиях

Список литературы

- [1] Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана./Сакабеков А. Алматы: Гылым, 2002 - 276 с.
- [2] Analogue of the mass conservation law for third approximation of one-dimensional nonlinear Boltzmann's moment system equations. Sakabekov A., Auzhani E.// Journal of Mathematical Physics. 2013. - Vol.54, Issue 5, 053512.

УДК 517.946

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА - ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ж.А. Токибетов, А.Б. Тунгатаров, С.З. Сапакова

Казахский национальный университет имени аль - Фараби, Казахстан

Abstract. One way to construct an analogue of analytic functions of complex variables in the multivariate case is a generalization of the Cauchy-Riemann.

This article proposes a mult-dimensional analogue of the Cauchy-Riemann using quaternions. The experimental value problems for multidimensional analog of the Cauchy-Riemann considered the first time, and obtained scientific results are theoretical and practical importance. Motivating factor for this are numerous applications of the Riemann-Hilbert to current applied problems in the

traditional (hydro - and aerodynamics, the theory of elasticity, etc.) and modern areas.

Keywords: differential equations of first order, the Cauchy- Riemann's system, Riemann- Hilbert's problem, harmonically functions .

Аңдатпа. Коши - Риман шарттарын жалпылау комплексті айнымалыға тәуелді аналитикалық функциялардың көпөлшемді жалпыламасын құрудың бір әдісі болып табылады. Бұл жұмыста Коши - Риман жүйесінің көпөлшемді баламасы кватерниондардың көмегімен құрылған, әрі осы жүйе үшін зерттелген шекаралық есептер алғаш рет қарастырылып отыр, жұмыс нәтижесінің теориялық және практикалық маңызы және мәнділігі мол, оған негізгі әсер етуші фактор, бұл Риман- Гильберт есебінің заманауи өзекті мәселелерді шешуде көптеп қолдануы болып табылады.

Кілттік сөздер: бірінші ретті дифференциальдық теңдеулер, Коши-Риман жүйесі, Риман-Гильберт есебі, кватерниондар, гармоникалық функциялар.

Аннотация. Одним из способов построения аналога аналитических функций комплексной переменной в многомерном случае является обобщение условий Коши-Римана. В данной работе предлагается многомерный аналог системы Коши- Римана с помощью кватернионов. Исследуемые краевые задачи для многомерного аналога системы Коши- Римана рассмотрены впервые, и полученные научные результаты имеют теоретические и прикладные значения, исследованы аналоги задачи Римана- Гильберта для этих систем, которые сводятся к известной задаче о наклонной производной для гармонических функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения первого порядка, система Коши-Римана, задача Римана-Гильберта, кватернионы, гармонические функций.

Как отмечено в [1], одним из способов построения аналога голоморфных функций комплексной переменной в многомерном случае является обобщение условий Коши-Римана. По литературным ссылкам и результатам данного источника известно, что на сегодняшний день существует много таких обобщений, например рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся четырехмерным обобщением системы Коши-Римана и для класса таких систем исследованы возможности постановки нетривиальных краевых задач. В R^4 систему дифференциальных уравнений вида

$$TU = \sum_{j=1}^4 B_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

где $B_j, j = 1, 2, 3, 4$, постоянные комплексные матрицы размерности 2×2 , $U = (u, \vartheta)$ – искомый вектор-столбец из комплекснозначных функций $u = u(x)$, $\vartheta = \vartheta(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ называют четырехмерным аналогом системы Коши-Римана, если компоненты u и v для каждого ее решения U являются гармоническими функциями. В данной работе проведена гомотопическая классификация таких систем. Постановка действительных граничных условий для решений системы (1) делает целесообразным замену системы (1) на эквивалентную ей системе четырех действительных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами. В дальнейшем обозначим через $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ обозначим вектор-столбец, составленный из действительных и мнимых частей компонентов решения U исходной системы (1):

$$u_1 = Reu, \quad u_2 = Imu, \quad u_3 = Re\vartheta, \quad u_4 = Im\vartheta.$$

Таким образом, проведенной гомотопической классификацией о вещественный вариант системы (1) канонического вида записываем в том же виде (1), но теперь уже с матрицами:

$$\begin{aligned}
 B_1 = E, \quad B_2 = \begin{pmatrix} K & \theta \\ \theta & L \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} K & \theta \\ \rho N & \theta \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \theta & R \\ \rho S & \theta \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -b_2 & -b_1 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}, \\
 S = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где E – единичная матрица четвертого порядка, $b = b_1 + ib_2, \rho = \rho(b_1^2 + b_2^2)^{-1}$.

Под понятием регуляризуемостью краевой задачи мы понимаем выполнение необходимого и достаточного условия нетеровости для оператора, отвечающего этой задаче и действующего в определенных банаховых пространствах. В [2], [3] показаны, что система типа (1), когда матрицы имеют вид (2), не имеют ни одной регуляризуемой краевой задачи ни в какой ограниченной области в R^4 .

Система (1) с матрицами (2) в раскрытом виде запишется так:

$$\begin{aligned}
 u_{1x_1} + u_{2x_2} + \rho b_1 u_{3x_3} - \rho b_2 u_{4x_3} - \rho b_2 u_{3x_4} - \rho b_1 u_{4x_4} &= 0, \\
 u_{2x_1} - u_{1x_2} + \rho b_2 u_{3x_3} + \rho b_1 u_{4x_3} + \rho b_1 u_{3x_4} - \rho b_2 u_{4x_4} &= 0, \\
 u_{3x_1} - u_{4x_2} - \rho b_1 u_{1x_3} - \rho b_2 u_{2x_3} + \rho b_2 u_{1x_4} - \rho b_1 u_{2x_4} &= 0, \\
 u_{4x_1} + u_{3x_2} + \rho b_2 u_{1x_3} - \rho b_1 u_{2x_3} + \rho b_1 u_{1x_4} + \rho b_2 u_{2x_4} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Если в этой системе положим $b_1 = 1, b_2 = 0$ и считаем, что u_j ($j = 1, 2, 3, 4$) не зависят от x_4 , то получается система Мойсила- Теодореско [4], [5]:

$$\begin{aligned}
 u_{1x_1} + u_{2x_2} + u_{4x_3} &= 0, \\
 u_{2x_1} - u_{1x_2} + u_{4x_3} &= 0, \\
 u_{3x_1} - u_{4x_2} - u_{1x_3} &= 0, \\
 u_{4x_1} + u_{3x_2} + u_{2x_3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

являющейся естественным трехмерным (обобщенным) аналогом системы Коши-Римана. Решения этой системы в литературе называются голоморфными векторами. Если $b_1 = 1, b_2 = 0$, но u_j ($j = 1, 2, 3, 4$) являются функциями всех четырех $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ аргументов, то получается система, встречающейся в теории голоморфного кватерниона:

$$\begin{aligned}
 u_{1x_4} + u_{4x_1} + u_{3x_2} - u_{2x_3} &= 0, \\
 u_{2x_4} - u_{3x_1} + u_{4x_2} + u_{1x_3} &= 0, \\
 u_{3x_4} + u_{2x_1} - u_{1x_2} + u_{4x_3} &= 0, \\
 u_{4x_4} - u_{1x_1} - u_{2x_2} - u_{3x_3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь построим общее представление решения системы (3) через производные гармонических функций. Для этого в рассмотрение введем две независимые комплексные переменные и две комплексные искомые переменные

$$\xi = x_1 + ix_2, \quad \eta = x_3 + ix_4,$$

а также комплексные искомые функции

$$U = u_1 + iu_2, \quad V = u_3 + iu_4,$$

Тогда систему (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \rho b \frac{\partial V}{\partial \bar{\eta}} = 0, \quad -\rho \bar{b} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \bar{\xi}} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right), & \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right), & \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right). \end{aligned}$$

Если

$$\varphi = \varphi(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta})$$

гармоническая функция относительно всех четырех аргументов, то общее решение второго уравнения системы (6) дается формулами

$$U = b \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}}, \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (7)$$

Подставляя эти формулы (7) в первое уравнение системы (6), для комплексной функции $\varphi(x_1 + ix_2, x_1 - ix_2, x_3 + ix_4, x_3 - ix_4)$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = 0.$$

Левая часть этого уравнения равняется $4^{-1} \Delta \varphi$ следовательно, для того чтобы формулы (7) представляли общее решение системы (6) функция φ должна иметь вид

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) + i\omega(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

где σ и ω произвольные вещественные гармонические функции.

Из формул (7) отделяя действительные и мнимые части, получим представления решения системы (3) через производные гармонических функций σ и ω :

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1(\sigma_{x_1} - \omega_{x_2}) - b_2(\omega_{x_1} + \sigma_{x_2}), & u_3 &= \sigma_{x_3} + \omega_{x_4}, \\ u_2 &= b_1(\omega_{x_1} + \sigma_{x_2}) + b_2(\sigma_{x_1} - \omega_{x_2}), & u_4 &= \omega_{x_3} + \sigma_{x_4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если считать, что решения не зависят от x_4 , то из этого же представления можно легко вывести представление решений через гармонические функции системы:

$$\begin{aligned} u_{1x_1} + u_{2x_2} + \rho b_1 u_{3x_3} - \rho b_2 u_{4x_3} &= 0, \\ u_{2x_1} - u_{1x_2} + \rho b_2 u_{3x_3} + \rho b_1 u_{4x_3} &= 0, \\ u_{3x_1} - u_{4x_2} - \rho b_1 u_{1x_3} - \rho b_2 u_{2x_3} &= 0, \\ u_{4x_1} + u_{3x_2} + \rho b_2 u_{1x_3} - \rho b_1 u_{2x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

в виде

$$\begin{aligned} u_1 - b_1(\sigma_{x_1} - \omega_{x_2}) - b_2(\omega_{x_1} + \sigma_{x_2}), \quad u_3 = \sigma_{x_3}, \\ u_2 - b_1(\omega_{x_1} + \sigma_{x_2}) + b_2(\sigma_{x_1} - \omega_{x_2}), \quad u_4 = \omega_{x_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как отмечено выше, при $b_1 = 1, b_2 = 0$ из системы (9) получим известную систему Мойсила - Теодареску (4), решение которой имеет следующее представление через гармонические функции σ и ω :

$$\begin{aligned} u_1 = \sigma_{x_1} - \omega_{x_2}, \quad u_2 = \omega_{x_1} + \sigma_{x_2}, \\ u_3 = \sigma_{x_3} \quad u_4 = \omega_{x_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, исходя из общей системы дифференциальных уравнений первого порядка в четырехмерном пространстве, мы построим самую общую систему, являющейся обобщением систем Коши - Римана и Мойсила - Теодореску. На самом деле все решения системы, указанные выше (3), (4), (5), (9) являются гармоническими функциями . Теперь рассмотрим аналог задачи Римана - Гильберта для системы (9):

Требуется найти регулярное в области D решение системы (9) $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, удовлетворяющее на границе Γ области D условиям

$$\alpha_j u_1 + \beta_j u_2 + \gamma_j u_3 + \delta_j u_4 = f_j, \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

где $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, f_j$ - заданные на Γ функций.

Эта задача сводится к задаче о наклонной производной для гармонических функций с помощью представления (10):

$$(\bar{A}_j \nabla \sigma) + (\bar{B}_j \nabla \omega) = f_j, \quad j = 1, 2, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (13)$$

где

$$\bar{A}_j = (\alpha_j b_1 + \beta_j b_2 - \alpha_j b_2 + \beta_j b_1, \gamma_j), \quad \bar{B}_j = (\beta_j b_1 - \alpha_j b_2 - \alpha_j b_1 - \beta_j b_2, \delta_j).$$

Точно также аналог задачи Римана - Гильберта (12) для системы (3) сводится к задаче о наклонной производной для гармонических функций с помощью представления (8):

$$(\bar{C}_j \nabla \sigma) + (\bar{D}_j \nabla \omega) = f_j, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

где $\nabla \equiv grad = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right)$, $\bar{C}_j = (\alpha_j b_1 + \beta_j b_2 - \alpha_j b_2 + \beta_j b_1, \gamma_j - \delta_j)$, $\bar{D}_j = (\beta_j b_1 - \alpha_j b_2 - \alpha_j b_1 - \beta_j b_2, \delta_j, \gamma_j)$.

Если в (12) положим

$$\begin{aligned} \alpha_1 = b_1(b_1^2 + b_2^2), \quad \alpha_2 = -b_2(b_1^2 + b_2^2), \\ \beta_1 = b_2(b_1^2 + b_2^2), \quad \beta_2 = -b_1(b_1^2 + b_2^2), \end{aligned} \quad (15)$$

а остальных коэффициентов берем равными нулю, то граничные условия (13) принимают вид:

$$\sigma_{x_1} - \omega_{x_2} = f_1, \quad \sigma_{x_2} + \omega_{x_1} = f_2 \quad \text{на } \Gamma. \quad (16)$$

Пусть область, ограниченная границей Γ , является полупространством $E : \{x_3 > 0\}$, а коэффициенты α_j, β_j в условий определяются по (15) и $\delta_j, \gamma_j, j = 1, 2$, равны нулю. Тогда условия

(13) переходят в (16):

$$(\sigma_{x_1} - \omega_{x_2})|_{x_3=0} = f_1, \quad (\sigma_{x_2} + \omega_{x_1})|_{x_3=0} = f_2.$$

Теперь рассмотрим регулярные в полупространстве гармонические функции F_1 и F_2 , совпадающие при $x_3 = 0$ с f_1 и f_2 соответственно. Следовательно, функций σ и ω определяются из неоднородной системы Коши-Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\tau}} = F(\tau, x_3), \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \tau = x_1 + ix_2, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2, x_3) + i\omega(x_1, x_2, x_3),$$

а $F(\tau, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ – гармоническая функция, такая, что

$$F(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=0} = f_1(x_1, x_2) + if_2(x_1, x_2).$$

Тогда мы можем представить $F(x_1, x_2, x_3)$ через функций f_1 и f_2 :

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) \pi^{\frac{-3}{2}} x^3 \int_{y_3=0} \frac{f_1(y_1, y_2) + if_2(y_1, y_2)}{\sum_{i=1}^2 [(y_i - x_i)^2 + x_3^2]^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2 \quad (18)$$

Таким образом, в полупространстве $E = \{x_3 > 0\}$ в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций σ и ω определяется формулой [7]

$$\sigma + i\omega = -\frac{1}{\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi_1, \xi_2, x_3)}{\zeta - \tau} d\xi_1 d\eta_1, \quad \zeta = \xi_1 + i\eta_1, \quad \tau = x_1 + ix_2. \quad (19)$$

Если

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_1 = 0, \quad \text{а} \quad \gamma_1 = \delta_2 = 1,$$

то граничные условия (12) принимают простой вид [7]:

$$\sigma_{x_3} = f_1, \quad \omega_{x_3} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

и в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций σ и ω выписываются явно [7]

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}},$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}},$$

Причем предполагается, что функции f_1 и f_2 также стремятся к нулю на бесконечности.

Пусть – полупространство $x_5 > 0$ в пятимерном пространстве R^5 переменных $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\Gamma = \partial H = \{x_5 = 0\}$. В H рассмотрим систему уравнений первого порядка, относительно двух

кватернионных функций $(U, V) = (u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4, u_5 + iu_6 + ju_7 + ku_8)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_5} + b\partial V = 0, \\ -\rho\bar{b}\bar{\partial}U + \frac{\partial V}{\partial x_5} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где $b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$, $\bar{b} = b_1 - ib_2 - jb_3 - kb_4$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + j\frac{\partial}{\partial x_3} + k\frac{\partial}{\partial x_4}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} - j\frac{\partial}{\partial x_3} - k\frac{\partial}{\partial x_4}$, b_l ($l = 1, 2, 3, 4$) – действительные числа, $\rho = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^{-1}$ причем $ij = k, ki = j, kj = i, i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

В этой системе каждая из u_1, u_2, \dots, u_8 является гармонической функцией. Если в рассмотрение введем кватернионную гармоническую функцию от $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) + j\varphi_3(x) + k\varphi_4(x),$$

(где все $\varphi_l(x)$ являются гармоническими функциями), то решение системы (20) имеет следующее представление через производные гармонических функций $\varphi_l(x)$, $l = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^5}, \quad u_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x^5}, \quad u_3 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x^5}, \quad u_4 = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x^5}, \\ u_5 &= \rho(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4), \\ u_6 &= \rho(b_1m_2 - b_2m_1 - b_3m_4 - b_4m_3), \\ u_7 &= \rho(b_1m_3 + b_2m_4 - b_3m_1 - b_4m_2), \\ u_8 &= \rho(b_1m_4 - b_2m_3 + b_3m_2 - b_4m_1). \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_4}, \quad m_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4}, \\ m_3 &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4}, \quad m_4 = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4}, \end{aligned}$$

Для системы (20) поставим задачу Римана-Гильберта о нахождении регулярного в полупространстве $H \equiv \{x_5 > 0\}$ решения $W = (U, V) = (u_1, u_2, \dots, u_8)$, удовлетворяющего на границе $\Gamma \equiv \{x_5 = 0\}$ условиям

$$\sum_{l=1}^8 a_{lm}u_l = f_m, \quad m = \overline{1, 8}, \quad (22)$$

где a_{lm}, f_m , ($l = \overline{1, 8}; m = \overline{1, 4}$) – заданные на Γ функции. С помощью представления (21) эта задача сводится, к задаче о наклонной производной для гармонических функций

$$\sum_{s=1}^4 (\alpha_{sr}, \Delta\varphi_r) = f_r, \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (23)$$

где α_{sr} вполне определенные векторы, являющиеся комбинацией α_{lm} и b_l . Например

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= (\alpha, -\beta, \delta, \gamma, a_{11}), & \alpha_{21} &= (\beta, \alpha, \gamma, \delta, a_{21}), \\
\alpha_{31} &= (-\delta, -\gamma, \alpha, -\beta, a_{31}), & \alpha_{41} &= (\gamma, -\delta, \beta, \alpha, a_{41}), \\
\alpha &= \rho(a_{51}b_1 - a_{61}b_2 - a_{71}b_3 - a_{81}b_4), \\
\beta &= \rho(a_{51}b_2 + a_{61}b_1 - a_{71}b_4 + a_{81}b_3), \\
\gamma &= \rho(a_{51}b_4 + a_{61}b_3 + a_{71}b_2 + a_{81}b_1), \\
\delta &= \rho(-a_{51}b_3 + a_{61}b_4 - a_{71}b_1 - a_{81}b_2),
\end{aligned}$$

Как известно, в [5] отмечены проблемы, возникающие при рассмотрении задачи о наклонной производной для гармонических функций. Эти трудности имеют место и здесь. Однако задачу можно рассмотреть для регулярных в произвольной области гармонических функций с постоянными коэффициентами. В частности, подбирая b_s , $s = \overline{1, 4}$ и α_{sr} так, чтобы компоненты векторов α_{sr} были специального вида, а именно (23) имело вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_5} = f_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_5} = f_2, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_5} = f_3, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_5} = f_4, \quad \text{на } \Gamma, \quad (24)$$

что задача распадается на четыре задачи о наклонной производной. Исследуя ее как задачу Римана-Гильберта для (5), в полупространстве $x_5 > 0$, построим решение стремящиеся к нулю на бесконечности, при предположении, что функции f_l ($l = 1, 2, 3, 4$) стремятся также к нулю на бесконечности:

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_l(z) dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - z_i)^2 + x_5^2}}, \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (21), находим решение задачи (20), (22) и оно единственно.

Таким образом, в этом случае задача (23) всегда разрешима в классе стремящихся к нулю на бесконечности функций и имеет единственное решение, следует отметить, что гармоническая функция на бесконечности стремится к нулю в пространстве размерности $n \geq 3$.

Список литературы

- [1] О краевых задачах для четырехмерных аналогов системы Коши-Римана с комплексными коэффициентами. Усс А.Т. // Гомельский госуниверситет. Гомель. Вестник № 1, 2001.
- [2] О линейных эллиптических системах первого порядка. Соломяк М.З. // Доклады АН СССР 1963, Т. 150, № 1, с. 48-51.
- [3] Об одной эллиптической системе, не имеющей нетеровых граничных задач. Виноградов В.С. // Доклады АН СССР, 1971, Т. 199, № 5. с. 1008-1010.
- [4] Задача о наклонной производной теории потенциала. Янушаускас А.И. / Новосибирск, Наука, 1985, 262 с.

- [5] Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Бицадзе А.В. / М: Наука, 1966, 204 с.
- [6] Об одной краевой задаче для голоморфного в полупространстве вектора. Токибетов Ж.А. // Сборник исследования по многомерным эллиптическим системам уравнений в частных производных. Новосибирск, 1986, с. 100-105
- [7] Уравнения с частными производными. Курант Р. / М. "Мир", 1964, 830 с.

УДК 681.5.015

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

А.Н. Тюреходжаев

Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Abstract. The construction of the analytical solutions of nonlinear problems has unconditional priority on the qualitative and numerical considerations. In Department of Theoretical and Applied Mechanics of the Kazakh National Technical University for the past three decades the several analytical methods for solving actual problems of mechanics are constructed. This is the so-called kappa-method of study of elastic wave propagations in the presence of the nonlinear mechanism of energy dissipation. There are also effective method of partial discretization of nonlinear differential equations built by the author. With this method are obtained solutions of the nonlinear dynamical systems of differential L. Euler' equations for the motion of an axially symmetric rigid body with a fixed point. Both of these methods are based on the theory of generalized functions.

Also of interest is indirect operator method for solving linear and nonlinear equations with variable coefficients.

Keywords: nonlinear mechanics, Euler equations, nonlinear differential equations.

Аңдатпа. Сапалық және сандық қарастырулар кезінде сызықтық емес есептердің аналитикалық шешімін алудың ерекше артықшылығы бар. Қазақ ұлттық техникалық университетінің теориялық және қолданбалы механика кафедрасында соңғы үш онжылдықта механиканың өзекті қолданбалы есептерін шешудің бірнеше аналитикалық әдістері тұрғызылды. Ол серпімді толқындардың таралуын, сонымен қатар контактілік құрғақ үйкеліс сияқты энергия диссипациясының сызықтық емес механизмі болғандағы субгармоникалық және супергармоникалық толқындарды зерттеудің қаппа-әдісі. Және де автор тұрғызған сызықтық емес дифференциалдық теңдеулерді ішінара дискретизациялау әдісі де тиімді болып табылады. Соңғы әдістің көмегімен нүктесі бекітілген оське қатысты симметриялы қатты дене қозғалысы үшін Л. Эйлердің дифференциалдық теңдеулерінің сызықтық емес динамикалық жүйесінің шешімдері алынды. Бұл екі әдіс те жалпыланған функция теориясына негізделген.

Сонымен қатар коэффициенттері айнымалы сызықтық емес және сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің тура емес операторлық әдісі де қызығушылық тудырады. Коэффициенттері айнымалы сызықтық дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық шешімін

тұрғызу үшін сызықтық емес математиканың аппаратын қоса қолдану қажет екендігі ескеріледі.

Кілттік сөздер: сызықтық емес механика, Эйлер теңдеуі, сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер.

Аннотация. Построение аналитического решения нелинейных задач имеет безусловное преимущество перед качественными и численными рассмотрениями. На кафедре Теоретической и Прикладной механики Казахского Национального Технического университета за последние три десятилетия построены несколько аналитических методов решения актуальных прикладных задач механики. Это, так называемый, каппа-метод исследования распространения упругих волн, в том числе, субгармонических и супергармонических волн при наличии нелинейного механизма диссипации энергии, каким являются контактное сухое трение.

Эффективным являются также метод частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений, построенный автором статьи. При помощи последнего получены решения нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений Л. Эйлера для движения осесимметричного твердого тела с закрепленной точкой. Оба эти метода основывается на теории обобщенных функций.

Ключевые слова: нелинейная механика, уравнения Эйлера, нелинейные дифференциальные уравнения.

Интерес представляет также непрямой операторный метод решения нелинейных и линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Заметим, что для построения аналитического решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами также требуется привлечение аппарата нелинейной математики.

Рассмотрим ряд прикладных проблем.

Распространение субгармонических волн при наличии нелинейного механизма диссипации энергии

Проблема динамического деформирования механических систем при наличии нелинейного механизма диссипации энергии, представляет существенный интерес для теории и практики нелинейной механики. В общем случае системы с контактным сухим трением – это слоистые среды, в которых в процессах нагружения появляется частичное или полное проскальзывание между слоями.

В качестве примеров деформируемых систем, для которых фрикционный контакт играет важную роль, можно указать на взаимодействие буровых колонн с грунтом в нефтепромысловом деле; на функционирование различных подземных сооружений в строительном деле; оползание горных пород и снежных массивов; взаимодействие при соударении различных тел с мембранами и нитями; работу композитных материалов и др. Подобные ситуации возникают в сейсмогенных процессах, стабилизаторах ракет, электротехнике, авторегулировании и т.д. В таком классе задач сила сухого трения является распределенной. Достаточно широк круг задач о взаимодействии деформируемых тел, для которых область контакта локализована или сосредоточена. Примерами могут служить панели, соединенные внахлест в самолетостроении, ленточные и пластинчатые конвейеры на роlikоопорах, система вал - втулка, шарнирные и другие соединения в робототехнике.

Такого рода задачи сводятся к рассмотрению нелинейной системы уравнений гиперболического типа, описывающей нелинейный волновой процесс, например, в стержне при наличии сухого трения по боковой поверхности:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} + \chi (v/|v|, \partial v/\partial t / |\partial v/\partial t|) \cdot q,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

где σ – напряжение, $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ – скорость, q – величина, пропорциональная трению, a – скорость распространения волны, E – модуль упругости.

Важным моментом является определение выражения нелинейного диссипативного члена χ , связанного с сухим трением и, представляющего нелинейную функцию, претерпевающую разрывы в областях, где скорость обращается в ноль. При этом само значение силы трения в этих областях подлежит определению и решению отдельной задачи. Диссипативный член так же существенно зависит от граничных и начальных условий, а так же закона сухого трения. Таким образом, сухое трение является сложной функцией. В работе рассматривается идеализированный закон сухого трения Кулона. И даже в этом случае все сложности нелинейности полностью сохраняются. Решение такого рода задач связано с определением совокупности областей зависимости решения, на границах которых решения терпят скачок. Для построения решений в этих областях возникает необходимость определения знаков скорости, которые определяются при помощи так называемого метода капша-функции докладчика.

Для стержня с сухим трением, колебания которого описываются системой (1), выберем граничные и начальные условия. В начальный момент времени стержень примем покоящимся и ненапряженным:

$$t = 0: \quad v = 0, \quad \sigma = 0, \quad (2)$$

Конец стержня $x = \ell$ заделан, а на конце $x = 0$ приложено периодическое напряжение, в форме прямоугольного косинуса с частотой в пять раз большей частоты собственных колебаний системы (рисунок 1):

$$\sigma(0, t) = \sigma_0 \left\{ H(t) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H(t - 2\frac{k}{5}\ell/a) \right\}, \quad (3)$$

где, $H(z)$ – единичная функция Хевисайда.

Задача (1) - (3) в силу присутствия функции χ является существенно нелинейной. Учитывая, что в задачах рассматриваемого вида сила трения является пассивной и не может изменить знак скорости, удастся установить совокупность областей зависимости решения и записать нелинейный член χ в виде бесконечных сумм функций Хевисайда со сдвинутыми аргументами.

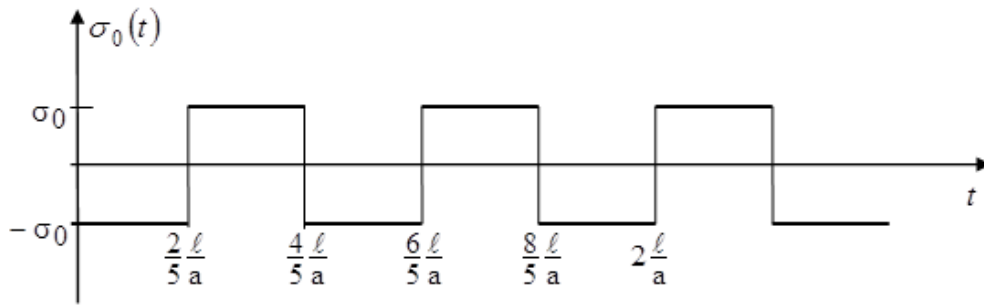


Рисунок 1

В этой задаче функция χ имеет выражение:

$$\begin{aligned}
 \chi(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4k\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{1}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H(x) - H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4k\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 2\left(2k + 1\right)\ell/a\right) \right\} \cdot H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{1}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{1}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H(x) - H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) \right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{1}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 4\left(k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \cdot H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{1}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H(x) - H\left(x - \frac{2}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{1}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 2\left(2k + 1\right)\ell/a\right) \right\} \left(H\left(x - \frac{2}{5}\ell\right) - H\left(x - \frac{3}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t + x/a - 4\left(k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H\left(x - \frac{3}{5}\ell\right) - H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) \right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{2}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H(x) - H\left(x - \frac{2}{5}\ell\right) \right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 2\left(2k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 4\left(k + \frac{4}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \cdot H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t + x/a - 2\left(2k + \frac{7}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{2}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H\left(x - \frac{3}{5}\ell\right) - H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{2}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 2\left(2k + 1\right)\ell/a\right) \right\} \left(H(x) - H\left(x - \frac{1}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{2}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 2\left(2k + \frac{7}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \left(H\left(x - \frac{2}{5}\ell\right) - H\left(x - \frac{3}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t + x/a - 4\left(k + \frac{3}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t - x/a - 2\left(2k + 1\right)\ell/a\right) \right\} \left(H\left(x - \frac{1}{5}\ell\right) - H\left(x - \frac{2}{5}\ell\right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H\left(t - x/a - 4\left(k + \frac{2}{5}\right)\ell/a\right) - H\left(t + x/a - 2\left(2k + \frac{9}{5}\right)\ell/a\right) \right\} \cdot H\left(x - \frac{4}{5}\ell\right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t+x/a - 4 \left(k + \frac{4}{5} \right) \ell/a \right) - H \left(t-x/a - 2(2k+1) \ell/a \right) \right\} \left(H \left(x - \frac{3}{5} \ell \right) - H \left(x - \frac{4}{5} \ell \right) \right) - \\
 & \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t-x/a - 2(2k+1) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 4 \left(k + \frac{3}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(1 - H \left(x - \frac{1}{5} \ell \right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t-x/a - 2(2k+1) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 2 \left(2k + \frac{7}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(H \left(x - \frac{1}{5} \ell \right) - H \left(x - \frac{2}{5} \ell \right) \right) + \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t+x/a - 4 \left(k + \frac{3}{5} \right) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 2 \left(2k + \frac{7}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(1 - H \left(x - \frac{1}{5} \ell \right) \right) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t-x/a - 2(2k+1) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 4 \left(k + \frac{4}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(H \left(x - \frac{2}{5} \ell \right) - H \left(x - \frac{3}{5} \ell \right) \right) - \\
 & \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t+x/a - 2 \left(2k + \frac{7}{5} \right) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 4 \left(k + \frac{4}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(1 - H \left(x - \frac{2}{5} \ell \right) \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t-x/a - 2(2k+1) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 2 \left(2k + \frac{9}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(H \left(x - \frac{3}{5} \ell \right) - H \left(x - \frac{4}{5} \ell \right) \right) + \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t+x/a - 4 \left(k + \frac{4}{5} \right) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 2 \left(2k + \frac{9}{5} \right) \ell/a \right) \right\} \left(1 - H \left(x - \frac{3}{5} \ell \right) \right) - \\
 & \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t-x/a - 2(2k+1) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 4(k+1) \ell/a \right) \right\} H \left(x - \frac{4}{5} \ell \right) - \\
 & \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ H \left(t+x/a - 2 \left(2k + \frac{9}{5} \right) \ell/a \right) - H \left(t+x/a - 4(k+1) \ell/a \right) \right\} \left(1 - H \left(x - \frac{4}{5} \ell \right) \right) \right\},
 \end{aligned}$$

На рисунке 2 приводятся знаки скоростей в областях, ограниченных фронтами волн. После

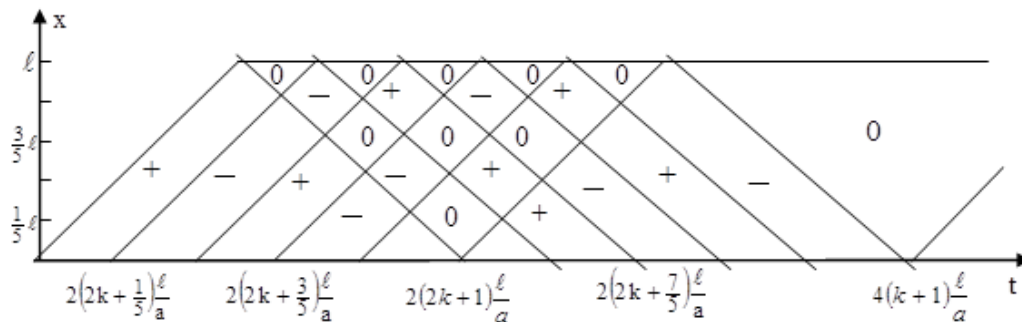


Рисунок 2

подстановки χ в систему (1) задача становится линейной (не линеаризованной) и решается в соответствии с каким-либо аппаратом решения линейных задач.

Будем искать решение задачи с помощью метода χ – функции и интегрального преобразования Лапласа – Карсона, но не будем останавливаться на процедуре решения задачи в изображениях.

Решение задачи связано с громоздкими выражениями. При переходе к оригиналам точное решение этой нелинейной задачи записывается по соответствующим областям, ограниченными

характеристиками. Для этого сначала записываются решения для ряда первых характерных областей, характеризующие три полных колебания – в этой задаче для 111 областей – а затем, пользуясь методом математической индукции, записываются решения для всех областей, покрывающих полубесконечную полосу $0 \leq x \leq \ell$, $t > 0$.

Сначала получим решения, для областей зависимости решений (рис. 1.3) характеризующий одну полную волну колебания системы. Решения задачи по областям зависимости характеризующих две последующие волны колебания, необходимые для записи решения в диапазоне времени $0 < t < \infty$, получаются, хотя и трудоемко, но по аналогии изложенному.

Рассмотрение последующих областей зависимости решений позволяет записать решение для характерных областей с любыми номерами. В общем виде обозначим эти области соответственно через $37k + 1$, $37k + 2$, \dots , $37(k + 1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (рисунок 3).

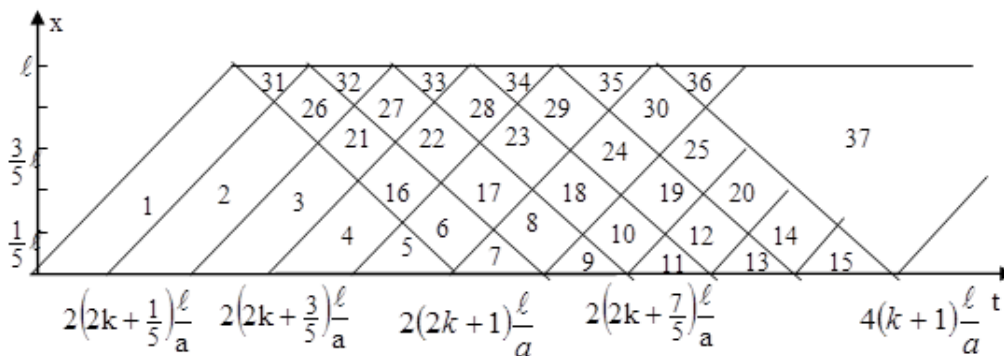


Рисунок 3

Тогда для характерной области $37k + 1$ напряжения и скорости имеют выражения

$$\sigma_{37k+1} = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+1} = \vartheta_0 - \frac{aq}{2E}(at - 4kl).$$

В областях $37k + 2$

$$\sigma_{37k+2} = \sigma_0 - \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+2} = -\vartheta_0 + \frac{aq}{E}\left(\frac{at}{2} - \left(4k + \frac{4}{5}\right)\ell\right).$$

В областях $37k + 3$ решением будет

$$\sigma_{37k+3} = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+3} = \vartheta_0 - \frac{aq}{2E}\left(at - 4\left(k + \frac{1}{5}\right)\ell\right).$$

В областях $37k + 4$ решением будет

$$\sigma_{37k+4} = \sigma_0 - \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+4} = -\vartheta_0 + \frac{aq}{E}\left(\frac{at}{2} - 4\left(k + \frac{1}{5}\right)\ell\right)$$

В областях $37k + 5$ решением будет

$$\sigma_{37k+5} = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+5} = \vartheta_0 - \frac{a^2q}{2E}\left(t - 4\left(k + \frac{1}{5}\right)\ell\right)$$

В областях $37k + 6$ решением будет

$$\sigma_{37k+6} = -2\sigma_0 + \frac{1}{5}q\ell, \quad \vartheta_{37k+6} = 0.$$

В областях $37k + 7$ решением будет

$$\sigma_{37k+7} = \sigma_0 - \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+7} = -3\vartheta_0 + \frac{aq}{2E} \left(at - 4 \left(k + \frac{2}{5} \right) \ell \right). \quad (4)$$

В областях $37k + 8$ имеем

$$\sigma_{37k+8} = -2\sigma_0 + \frac{q}{2} \left(x + \frac{3}{5} \ell \right), \quad \vartheta_{37k+8} = 2\vartheta_0 - \frac{aq}{2E} \left(at - 4 \left(k + \frac{2}{5} \right) \ell \right).$$

В областях $37k + 9$ решением будет

$$\sigma_{37k+9} = -\sigma_0 + \frac{q}{2}x, \quad \vartheta_{37k+9} = 3\vartheta_0 - \frac{aq}{2E} \left(at - 4 \left(k + \frac{2}{5} \right) \ell \right).$$

Далее приведены решения в последующих областях.

Полученное решение нелинейной задачи о распространении волн в рассматриваемой системе под воздействием циклической ступенчатой нагрузки с частотой в пять раз большей собственной частоты колебания стержня, показывает, что исследуемая конструкция с сухим трением совершает установившееся периодическое колебание с периодом $4\ell/a$.

На рисунке 4 приводится кривая колебаний конца стержня $x = 0$.

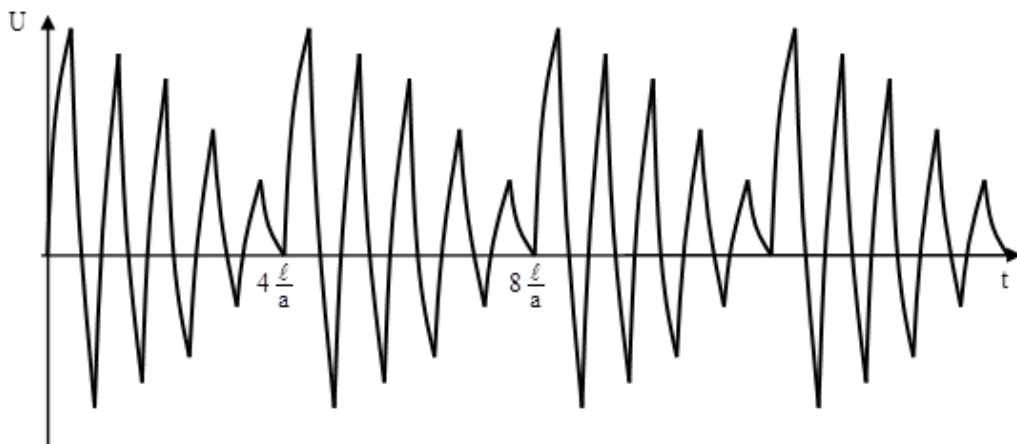


Рисунок 4

Ранее соответствующая задача была исследована для случаев, когда $n = 2, \dots, 4$. Таким образом, выявлен класс циклических нагрузок:

$$\sigma(0, t) = \sigma_0 \left\{ H(t) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H\left(t - 2\frac{k}{n}\ell/a\right) \right\} \quad (5)$$

с частотой в целое число раз превышающей частоту собственных колебаний системы, под действием которых система будет совершать установившиеся субгармонические колебания с двумя частотами. При этом одно колебание совпадает с частотой собственных колебаний системы, другое – с частотой внешней нагрузки.

Анализ полученных для $n = 2, \dots, 5$ результатов на основе методов каппа-функции автора и математической индукции позволяет построить точное решение задачи на всей полосе движения ($0 \leq t < \infty$, $0 \leq x \leq \ell$), когда частота внешней нагрузки в произвольное n целое число раз выше частоты собственных колебаний системы. Каппа-функция при этом выражается через двойную сумму

$$\begin{aligned} \chi = & \sum_{r=1}^n \left[H \left(x - \frac{r-1}{n} \right) - H \left(x - \frac{r}{n} \right) \right] \cdot \left\{ \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s \left[H \left(t - \frac{x}{a} - \frac{2s}{n} \right) - H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(s+r)}{n} \right) \right] + \right. \\ & + \left. \sum_{s=0}^{n-r-1} (-1)^s \left[H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(s+r)}{n} \right) - H \left(t - \frac{x}{a} - \frac{2(s+1)}{n} \right) \right] \right\} + \\ & + \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \left[H \left(x - \frac{r-1}{n} \right) - H \left(x - \frac{r}{n} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{s=n}^{2n-r} (-1)^s \left[H \left(t - \frac{x}{a} - \frac{2s}{n} \right) - H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(s+r)}{n} \right) \right] - \right. \\ & - \left. \sum_{s=1}^{2n-r-1} (-1)^s \left[H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(s+r)}{n} \right) - H \left(t - \frac{x}{a} - \frac{2(s+1)}{n} \right) \right] \right\} + \\ & + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[H \left(x - \frac{2r-1}{n} \right) - H \left(x - \frac{2r}{n} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{s=n}^{n+2r-1} (-1)^s \left[H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2s}{n} \right) - H \left(t - \frac{x}{a} - \frac{2(s-2r+1)}{n} \right) \right] \right\} + \\ & + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[H \left(x - \frac{2r}{n} \right) - H \left(x - \frac{2r+1}{n} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{s=n}^{n+2r-1} (-1)^s \left[H \left(t - \frac{x}{a} - \frac{2(s-2r)}{n} \right) - H \left(t + \frac{x}{a} - \frac{2(s+1)}{n} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Анализ полученного решения и построенных для различных k графиков показывает, что рассматриваемый объект совершает установившиеся колебание с двумя частотами – частотой внешней нагрузки и частотой собственных колебаний.

Аналитическое решение задач о функционировании гироскопов

Методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений автора решены нелинейные динамические уравнения Л.Эйлера для осесимметричного твердого тела с закрепленной точкой для случаев, когда: 1) моменты сил сопротивления имеют выражения $M_x = -\lambda_1 p$, $M_y = -\lambda_2 q$, $M_z = -\lambda_3 r^n$, где n – практически любое натуральное число; 2) к телу наряду с силами сопротивления приложены активные силы и активные силы в определенный момент времени мгновенно разгружаются; 3) моменты инерции могут изменяться практически по любому закону.

Динамическая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение твердого тела с закрепленной точкой впервые была составлена Л. Эйлером в 1750 году [1]. Ими получены первые результаты. Затем появились, как известно, другие частные решения, построенные Якоби, Лагранжем, Пуассоном, С.В. Ковалевской. Изучение движения такого тела проис-

ходит и по настоящее время [2-5].

Гироскопы служат для корректировки траектории движения подводных, надводных, воздушных, космических судов, монорельсовых поездов и т.д.

Метод частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений использован для решения задач о движении осесимметричного твердого тела. В работе обобщен ряд результатов член-корреспондента АН СССР В.Н. Кошлякова о движении гироскопов, изложенные в его монографии [6].

В общем случае движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в сопротивляющейся среде описывается нелинейными уравнениями Л. Эйлера.

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = M_x, \\ B \frac{dq}{dt} + (C - B) rp = M_y, \\ C \frac{dr}{dt} + (C - B) pq = M_z, \end{cases} \quad (6)$$

где $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ – проекции вектора угловой скорости тела $\bar{\omega}$ на оси координат x , y , z , связанные с телом; A , B , C – моменты инерции тела относительно названных осей; M_x , M_y , M_z – моменты внешних сил сопротивления.

Система дифференциальных уравнений (6) рассматривается совместно с начальными условиями

$$t = 0: \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{p}(0) = \dot{p}_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0. \quad (7)$$

Рассмотрим движение твердого осесимметричного тела, на которое наряду с внешними моментами сил $-\lambda_1 p$, $-\lambda_2 q$, $-\lambda_3 r^n$ действуют заданные моменты активных сил $f_1(t)$, $f_2(t)$ так, что

$$M_x = f_1(t) - \lambda_1 p, \quad M_y = f_2(t) - \lambda_2 q, \quad M_z = -\lambda_3 r^n. \quad (8)$$

При этом составляющая угловой скорости $p(t)$ определяется неоднородным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \ddot{p} + \left(k_1 + k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t} \right) \dot{p} + \left[\mu^2 [r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{2}{1-n}} + \right. \\ \left. + k_1 \left(k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t} \right) \right] p = F(t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$F(t) = \frac{1}{A} \left[\dot{f}_1(t) + \left(k_1 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t} \right) f_1(t) - \mu [r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}} f_2(t) \right].$$

Применение метода частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнение да-

ет возможность получить решение задачи (9) и (7) в виде

$$\begin{aligned}
 p(t) = & p_0 - \left[\int \frac{e^{(k_1+k_2)t}}{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}} F(t) dt \right]_{t=0} \int_0^t \frac{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}}{e^{(k_1+k_2)t}} dt + \\
 & + \int_0^t \frac{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}}{e^{(k_1+k_2)t}} \int \frac{e^{(k_1+k_2)t}}{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}} F(t) dt dt - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \left\{ \left[\mu^2 [r_0^{1-n} - k_3(1-n)t_i]^{\frac{2}{1-n}} + k_1 \left(k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t_i} \right) \right] \times \right. \\
 & \times \frac{e^{(k_1+k_2)t_i}}{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t_i]^{\frac{1}{1-n}}} p(t_i) H(t-t_i) \int_{t_i}^t \frac{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}}{e^{(k_1+k_2)t}} dt - \\
 & - \left[\mu^2 [r_0^{1-n} - k_3(1-n)t_{i+1}]^{\frac{2}{1-n}} + k_1 \left(k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t_{i+1}} \right) \right] \times \\
 & \left. \times \frac{e^{(k_1+k_2)t_{i+1}}}{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t_{i+1}]^{\frac{1}{1-n}}} p(t_{i+1}) H(t-t_{i+1}) \int_{t_{i+1}}^t \frac{[r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{\frac{1}{1-n}}}{e^{(k_1+k_2)t}} dt \right\}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $p(t_i)$ определяется в силу (10)

На рисунке 5 приведены кривые колебания угловой скорости $p(t)$, когда $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, $k_1 = k_2 = 0, 1$; $k_3 = 0, 03$; $n = 3; 4; 5$. Из графика видно, что с ростом параметра n тело все больше раскачивается.

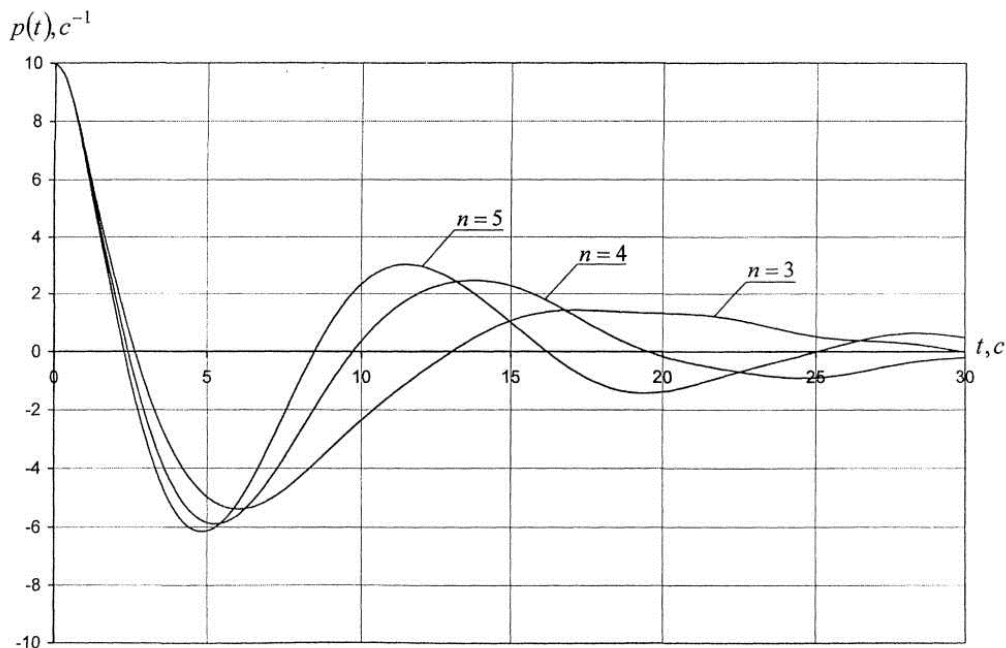


Рисунок 5 Кривые колебания $p(t)$ угловой скорости, соответствующие значениям параметров $A = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $C = 20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $r_0 = 1 \text{ c}^{-1}$, $p_0 = 10 \text{ c}^{-1}$

Анализ решения рассматриваемой задачи, а также приведенные на рисунке кривые показывают, что рост параметра n в целом мало сказывается на изменении закона колебания $p(t)$ угловой скорости тела, хотя с ростом времени это изменение много больше, чем в начальные моменты. Между тем наличие сопротивляющейся среды обуславливает затухание за конечный диапазон

времени колебания.

Исследуем решение задачи о движении твердого тела с закрепленной точкой в сопротивляющейся среде, когда момент относительно оси симметрии пропорционален скорости собственного вращения, а другие моменты, пропорциональны соответствующим проекциям угловой скорости и дополнительно аддитивно могут включать функции, зависящие от времени, которые со временем претерпевают разгрузку.

Функция $p(t)$, определяется дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами с разрывной правой частью:

$$\begin{aligned} \ddot{p} + \left(k_1 + k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t} \right) \dot{p} + \left[\mu^2 [r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{1-\frac{2}{n}} + k_1 \left(k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t} \right) \right] p = \\ = \frac{1}{A} \left\{ \left[\dot{f}_1(t) + \left(k_2 + \frac{k_3}{r_0^{1-n} - k_3(1-n)t} \right) f_1(t) \right] [H(t) - H(t - \tau)] - \mu [r_0^{1-n} - k_3(1-n)t]^{1-\frac{1}{n}} \times \right. \\ \left. \times f_2(t) [H(t) - H(t - \tau)] + f_1(0) \delta(t) - f_1(\tau) \delta(t - \tau) \right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

На рисунке 2 приведена кривая изменения проекции угловой скорости тела $p(t)$ при $n = 2$. В случае одновременной разгрузки внешних возмущений $f_1(t)$ и $f_2(t)$ изменение $p(t)$ подчиняется двум разным законам, которые выполняются в одном случае в диапазоне времени действия этих возмущений, а в другом после мгновенного снятия этих моментов.

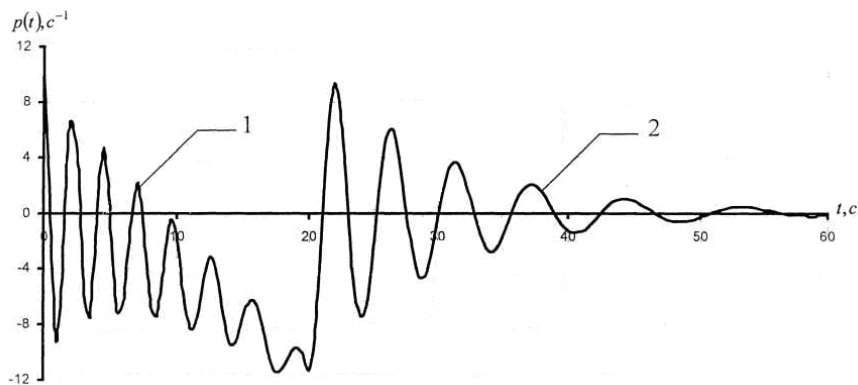


Рисунок 6 График разгрузки возмущающих составляющих $f_1(t)$, $f_2(t)$. 1 – Кривая изменения проекции угловой скорости $p(t)$ до разгрузки; 2 – Кривая изменения проекции $p(t)$ угловой скорости после разгрузки, при $f_1(t) = 0,5t$, $f_2(t) = 10t$, $\tau = 20c$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0,6$, $A = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $C = 20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Решение задачи о движении осесимметричного твердого тела с закрепленной точкой в сопротивляющейся среде с разгрузкой при больших показателях n скорости собственного вращения получается аналитично приведенному выше

Рассмотрим уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой с переменным моментом инерции. Моменты, характеризующие сопротивление, примем изменяющимися по линейным законам.

Тогда нелинейные динамические уравнения Л. Эйлера примут вид

$$\begin{cases} \frac{dA(t)p}{dt} + [C(t) - B(t)]qr = -\lambda_1 p, \\ \frac{dB(t)q}{dt} + [A(t) - C(t)]rp = -\lambda_2 q, \\ \frac{dC(t)r}{dt} + [B(t) - A(t)]pq = -\lambda_3 r. \end{cases} \quad (12)$$

Систему дифференциальных уравнений (6) рассмотрим совместно с начальными условиями (7)

Обратимся к случаю симметричного гироскопа $A(t) = B(t)$. Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений (6) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{p} + \mu(t)rq + \left[k_1(t) + \frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \right] p = 0, \\ \dot{q} - \mu(t)rp + \left[k_2(t) + \frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \right] q = 0, \\ r = r_0 \frac{C(0)}{C(t)} e^{-\int_0^t k_3(t)dt}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\frac{C(t) - A(t)}{A(t)} = \mu(t), \quad \frac{\lambda_1}{A(t)} = k_1(t), \quad \frac{\lambda_2}{A(t)} = k_2(t), \quad \frac{\lambda_3}{C(t)} = k_3(t).$$

Функция $p(t)$ определяется дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \ddot{p} + \left(k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) - \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} + \frac{2}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \right) \dot{p} + \left[\left(\mu(t) r_0 \frac{C(0)}{C(t)} e^{-\int_0^t k_3(t)dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + k_1(t) \left(k_2(t) + k_3(t) - \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \right) + \dot{k}_1(t) + \frac{1}{A(t)} \frac{d^2 A(t)}{dt^2} + \right. \\ \left. + \left(k_1(t) - k_3(t) + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \right) \frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} \right] p = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрируя последнее и воспользовавшись начальным условием (7), получим

$$\begin{aligned} p = p_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i + t_{i+1}) \times \\ \times \left\{ \left[\left(\mu(t_i) r_0 \frac{C(0)}{C(t_i)} e^{-\int_0^{t_i} k_3(t)dt} \right)^2 + k_1(t_i) \left(k_2(t_i) + k_3(t_i) - \frac{\dot{\mu}(t_i)}{\mu(t_i)} \right) + \dot{k}_1(t_i) + \frac{1}{A(t_i)} \left[\frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right]_{t=t_i} \right] \times \right. \\ \times \frac{p(t_i)}{\mu(t_i)} e^{\left[\int (k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + \frac{2}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}) dt \right]_{t=t_i}} H(t - t_i) \int_{t_i}^t \mu(t) e^{-\int (k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + \frac{2}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}) dt} dt \\ \left. - \left[\left(\mu(t_{i+1}) r_0 \frac{! (0)}{!(t_{i+1})} e^{-\int_0^{t_{i+1}} k_3(t)dt} \right)^2 + k_1(t_{i+1}) \left(k_2(t_{i+1}) + k_3(t_{i+1}) - \frac{\dot{\mu}(t_{i+1})}{\mu(t_{i+1})} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{k}_1(t_{i+1}) + \frac{1}{A(t_{i+1})} \left[\frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right]_{t=t_{i+1}} \right] \frac{p(t_{i+1})}{\mu(t_{i+1})} e^{\left[\int (k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + \frac{2}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}) dt \right]_{t=t_{i+1}}} \times \right. \\ \left. \times H(t - t_{i+1}) \int_{t_{i+1}}^t \mu(t) e^{-\int (k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + \frac{2}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}) dt} dt \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Аналитическое решение задачи об изгибе круглых пластин, подвергающихся действию поперечной нагрузки, при изменении температуры по толщине

В механике деформируемого твердого тела особый интерес представляют задачи, связанные с изгибами гибких пластин и различных гибких оболочек, работающих в неравномерном температурном поле. Такого рода задачи широко встречаются в прикладных проблемах строительного, нефтепромыслового дела, машиностроения, водного, воздушного транспорта, космических аппаратов.

При математическом рассмотрении подобного рода задач приходится иметь дело с системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и нелинейными членами, получение аналитического решения которых представляет значительные математические трудности. Аналитические решения таких задач можно получить при помощи метода частичной дискретизации.

В качестве иллюстрации изучим задачу термоупругости неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле с учетом изменения упругих свойств материала пластины по толщине. Сложный изгиб неоднородной гибкой круглой пластины, подвергающейся действию поперечной нагрузки, при изменении температуры по толщине пластины описывается системой связанных дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{aligned} a_{11}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z &= 0, \\ a_{13}r \frac{d}{dr} \nabla^2 F + a_{33}r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} &= - \int q_z r dr + C, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$a_{11} = kD_N, \quad a_{13} = k(D_N D_\nu - D_{N\nu} D), \quad a_{33} = Da_{14} + D_\nu a_{13} - D_M, \quad a_{14} = k(D_N D - D_{N\nu} D_\nu),$$

$$k = \frac{1}{D_N^2 - D_{N\nu}^2}, \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D_N &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} dz, \quad D_{N\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} dz, \quad D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} z dz, \\ D_\nu &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} z dz, \quad D_M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} z^2 dz, \quad D_{M\nu} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} z^2 dz. \end{aligned}$$

F – функция напряжений, u_z – прогиб срединной плоскости пластины, h – толщина пластины, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, q_z – внешняя распределенная поперечная нагрузка, приходящаяся на единицу площади срединной плоскости, C – постоянная интегрирования.

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{d}{dr} \nabla^2 F$ и $\frac{d}{dr} \nabla^2 u_z$ и учитывая выражения (17), получаем

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \nabla^2 F &= \frac{D_{N\nu} D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + \frac{D_{N\nu} D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2} \left(\int q_z r dr - C \right), \\ r \frac{d}{dr} \nabla^2 u_z &= \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{du_z}{dr} + \frac{D_N}{D_N D_M - D^2} \left(\int q_z r dr - C \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим задачу термоупругости неоднородных круглых пластин при осесимметричном температурном поле с учетом влияния растяжения на изгиб и изменения упругих свойств материала пластины по ее толщине.

Принято считать [8], что система уравнений (16) в случае учета влияния растяжения на изгиб не

приводится к несвязанным уравнениям. На самом деле систему разрешающих уравнений (16) можно привести к системе дифференциальных уравнений с нелинейными членами, каждое из которых включает только одну разрешающую функцию:

$$\frac{d^3 u_z}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 u_z}{dr^2} - \left(\frac{BC_1}{2} + \frac{1 + BC_2}{r^2} \right) \frac{du_z}{dr} - \frac{A}{r} \left(\frac{du_z}{dr} \right)^2 = \frac{B}{r} \left(\int q_z r dr - C \right), \quad (19)$$

$$\frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{BC_1}{2} - \frac{1 - BC_2}{r^2} \right) \frac{dF}{dr} - \frac{B}{r} \left(\frac{dF}{dr} \right)^2 = \frac{A}{r} \left(\int q_z r dr - C \right), \quad (20)$$

где

$$A = \frac{D_{N\nu} D - D_N D_\nu}{D_N D_M - D^2}, B = \frac{D_N}{D_N D_M - D^2}$$

Причем функции F и u_z связаны соотношением

$$F = \frac{A}{B} u_z + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln r + C_0. \quad (21)$$

Дифференциальные уравнения третьего порядка (19)-(20) относительно нормального усилия N_r , действующего в цилиндрическом сечении, и угла поворота нормали ϑ_r , определяемых при осесимметричном поле соотношением

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \vartheta_r = -\frac{du_z}{dr},$$

Радиальное усилие и угол прогиба связаны соотношением

$$N_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{A}{B} \cdot \frac{\vartheta_r}{r}. \quad (22)$$

Точное решение таких уравнений существующим математическим аппаратом не представляется возможным. Применяя метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений, определим решение этих уравнений.

Рассмотрим кольцевую пластину постоянной толщины, внешний контур которой жестко заделан, а внутренний – может смещаться в направлении оси пластины, но при этом не поворачивается. Контур пластины свободны от радиальных усилий. Тогда постоянные определяются из следующих граничных условий

$$N_r|_{r=a} = 0, \quad N_r|_{r=b} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=a} = 0, \quad \vartheta_r|_{r=b} = 0. \quad (23)$$

где Q_r – поперечное усилие. Пусть нагрузка равномерно распределена по окружности радиуса r_0 с интенсивностью q_0

$$q_z = q_0 \delta(r - r_0)$$

Тогда постоянная C будет равна нулю.

С учетом граничных условий (23) угол прогиба пластины запишется в виде

$$\begin{aligned} \vartheta_r(r) = & -\frac{Bq_0 r_0}{2} r \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) + \frac{Bq_0 r_0}{4r} (r^2 - r_0^2) H(r - r_0) - \frac{b(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\ & \times [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_0 r_0 b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_0 r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \left. \right\} + \\ & + \frac{A}{4r} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] - \frac{A}{4} r \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \\ & \left. - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

При этом аналитическое выражение угла поворота $\vartheta_r(r_k)$ в точках r_k определяется следующим образом

$$\vartheta_r(r_k) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - A(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k}\right) f(r_k) G}}{\frac{A}{2}(r_{k+1} - r_{k-1}) \left(\frac{r_k}{b} - \frac{b}{r_k}\right) f(r_k)},$$

где

$$\begin{aligned} G = & \left(\frac{Bq_0r_0(b^2 - r_0^2)}{4b} - \frac{Bq_0r_0b}{2} \ln \frac{b}{r_0} \right) f(r_k) - \frac{Bq_0r_0(r_k^2 - r_0^2)}{4r_k} H(r_k - r_0) + \frac{Bq_0r_0r_k}{2} \ln \frac{r_k}{r_0} H(r_k - r_0) + \\ & + \frac{A}{4}(r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{b} - \frac{b}{r_1} \right) f(r_1) \vartheta_r^2(r_1) - \frac{A}{4}(r_1 + r_2) \left(\frac{r_1}{r_k} - \frac{r_k}{r_1} \right) \vartheta_r^2(r_1) + \\ & + \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) f(r_k) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \vartheta_r^2(r_j) - \\ & - \frac{A}{4} \sum_{j=2}^{k-1} (r_{j+1} - r_{j-1}) \left(\frac{r_j}{r_k} - \frac{r_k}{r_j} \right) \vartheta_r^2(r_j), f(r_k) = \frac{b(r_k^2 - a^2)}{r_k(b^2 - a^2)}. \end{aligned}$$

Прогиб срединной плоскости пластины будет равен

$$\begin{aligned} u_z = & -\frac{Bq_0r_0}{4}(r^2 - r_0^2) H(r - r_0) + \frac{Bq_0r_0}{4}(r^2 + r_0^2) \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) - \frac{b}{(b^2 - a^2)} \left(a^2 \ln \frac{r}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2} \right) \times \quad (25) \\ & \times \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \right. \\ & - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_0r_0b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \\ & + \frac{Bq_0r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \left. \right\} + \frac{A}{4} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\ & + \frac{A}{4} \times \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \ln r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \\ & + \frac{A}{8} r^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} H(r - r_k) - \right. \\ & - \left. \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right] + \frac{A}{4} \left(\ln b + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \\ & \times [r_k \ln r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \ln r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{8} b^2 \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] + \\ & + \frac{Bq_0r_0(b^2 - r_0^2)}{4} - \frac{Bq_0r_0(b^2 + r_0^2)}{4} \ln \frac{b}{r_0} \end{aligned}$$

Радиальное усилие в случае пластины, подвергающейся поперечной нагрузке, распределенной равномерно по окружности радиуса r_0 с интенсивностью q_0 , выразится формулой

$$\begin{aligned} N_r(r) = & \frac{Aq_0r_0}{2} \ln \frac{r}{r_0} H(r - r_0) - \frac{Aq_0r_0(r^2 - r_0^2)}{4r^2} H(r - r_0) + \frac{A}{B} \frac{b(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{A}{4b} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \times \right. \\ & \times [r_k \vartheta_r^2(r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1})] - \frac{A}{4} b \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} \right] - \frac{Bq_0r_0b}{2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{Bq_0r_0}{4b} (b^2 - r_0^2) \left. \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A^2}{4Br^2} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) [r_k \vartheta_r^2(r_k) H(r - r_k) - r_{k+1} \vartheta_r^2(r_{k+1}) H(r - r_{k+1})] + \frac{A^2}{4B} \sum_{k=1}^n (r_k + r_{k+1}) \left[\frac{\vartheta_r^2(r_k)}{r_k} \times \right. \\
& \left. \times H(r - r_k) - \frac{\vartheta_r^2(r_{k+1})}{r_{k+1}} H(r - r_{k+1}) \right]
\end{aligned} \tag{26}$$

Выполнив численные расчеты угла поворота и прогиба для кольцевой пластины постоянной толщины, подвергающейся распределенной равномерно по окружности r_0 поперечной нагрузке, при модуле упругости и коэффициенте, изменяющихся по толщине пластины по линейному закону при определенных значениях параметров, построим кривые. На рисунках 7 и 8 даны кривые изменения угла поворота нормали и прогиба для разных случаев распределения поперечной нагрузки [9].

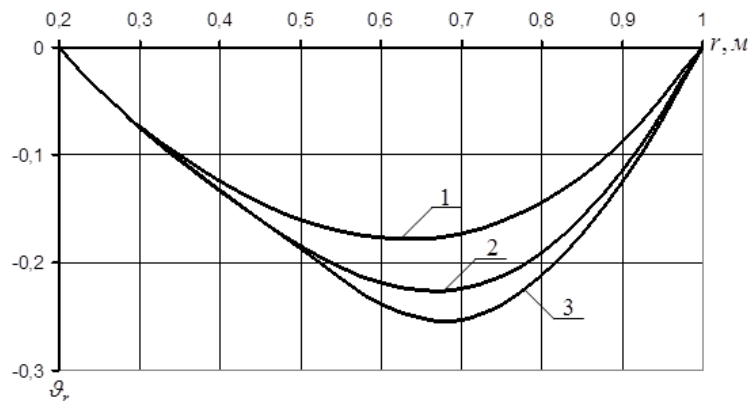


Рисунок 7 Кривые изменения угла поворота для пластины с отверстием, подверженной действию поперечной нагрузки, распределенной: 1 – равномерно по поверхности пластины; 2 – равномерно по площади кольца радиуса c и ширины cd ; 3 – равномерно по окружности радиуса r_0 ($c < r_0 < d$)

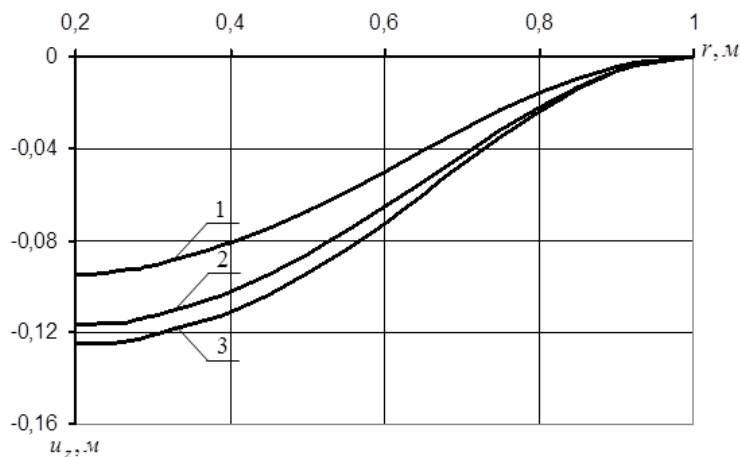


Рисунок 8 Кривые изменения прогиба для пластины с отверстием, подверженной действию поперечной нагрузки, распределенной: 1 – равномерно по поверхности пластины; 2 – равномерно по площади кольца радиуса c и ширины cd ; 3 – равномерно по окружности радиуса r_0 ($c < r_0 < d$)

Если влияние растяжения на изгиб не учитывать, система уравнений (16) становится линейной и получение ее аналитического решения не представляет особого труда. Учет же этого влияния приводит к рассмотрению связанной системы разрешающих уравнений с нелинейными членами (16), получение аналитического решения которой существующим математическим аппаратом не представлялось возможным. В работе удалось расщепить систему (16) на два адекватных ей, несвязанных нелинейных уравне-

ний (19)-(20), и, применяя метод частичной дискретизации, получить решение, удовлетворяющее системе уравнений (16) и граничным условиям (23).

Список литературы

- [1] Euler L. Decouverte d'un nouveau principe de mecanique // Mem. de l'Acad. des sciences de Berlin, 1750, 1752. 6. – P. 185-217.
- [2] Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3.
- [3] Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П. Лекции по теории гироскопов. – М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [4] Ларин В.Б. Науменко К.И. Об определении ориентации твердого тела. – В кн.: Механика гироскопических систем. – Киев: Вища школа, 1982, вып.1.
- [5] Меркин Д.Р. К вопросу о применимости прецессионных уравнений гироскопических систем // ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
- [6] Тюреходжаев А.Н. Берсугир М.А. Движение гироскопа в сопротивляющейся среде при больших скоростях собственного вращения // Вестник КазНУ. – Алматы, 2002. – №1. – С.218-222.
- [7] Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985, – 286 с.
- [8] Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: «Наукова думка», 1970.
- [9] Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Задача об осесимметричном нелинейном изгибе неоднородной гибкой круглой пластины в неравномерном температурном поле // «Доклады НАН РК», №3, 2005. – С. 23-33.