ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Мамаева В.А.

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУДАН ТӘЖІРИБЕЛІК ЖҰМЫСТАРДЫ ОРЫНДАУҒА АРНАЛҒАН ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУ

2- БӨЛІМ

Оқу құралы

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

Мамаева В.А.
Математикалық талдаудан тәжірибелік жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқау. 2-бөлім: оқу құралы/ Мамаева В.А – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 89 бет.

Математикалық талдаудан тәжірибелік жұмыстарды орындауға әдістемелік нұсқау 2-бөлім «Математикалық талдау» пәнінің бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіліп жазылған.

Мұнда нақты сандар, сандық тізбектер, бір айнымалды функция, оның шектері, функциялардың дифференциалдық есептеулері, функцияны дифференциалдау ережелері, функцияны туындылар арқылы зерттеу тақырыптары бойынша теориялық материалдар, сонымен қатар үлгі-мысалдардың шешу жолдары көрсетіліп, соңында өз бетімен орындау үшін жаттығулар жауаптарымен берілген, Maple бағдарламалық пакеті арқылы кейбір есептер шешіліп көрсетілген.

1 Анықталмаған интеграл

1.1 Анықталмаған интеграл анықтамасы

Егер [a;b] кесіндісінің кез келген нүктесі үшін $F'(x)=f(x)$ немесе $dF(x)=f(x)dx$ теңдігі орындалса, онда осы кесіндіде $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының *алғашқы функциясы* деп аталады.

$f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп $F(x)$+C алғашқы функциялардың жиынтығы аталады және ол былай белгіленеді:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

мұндағы C - тұрақты.

А н ы қ т а л м а ғ а н   и н т е г р а л   қ а с и е т т е р і:

1^0. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

2^0. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$.

3^0. $\int dF(x) = F(x)+C$.

4^0. $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

5^0. $\int kf(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$, мұндағы k - тұрақты.

6^0. Егер $\int f(x)dx = F(x)+C,$ онда $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Н е г і з г і   и н т е г р а л д а р   к е с т е с і

1. $\int dx = x+C$.

2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, x>0, \alpha>-1$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C, x>0$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, a>0, a\neq 1$

$4^/$. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos xdx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

$13^/$. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$.

15′. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

Есеп 1. $\int\left(x^2 - 3x + 2\right)dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\left(x^2 - 3x + 2\right)dx = \int x^2dx - 3\int xdx + 2\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c$

Есеп 2. $\int\left(\frac{1}{x^2}dx - \frac{3}{x^3} - \cos x\right)dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\left(\frac{1}{x^2}dx - \frac{3}{x^3} - \cos x\right)dx = \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{3}{x^3}dx - \int\cos xdx = \int x^{-2}dx -$$

$$-3\int x^{-3}dx - \int\cos xdx = -x^{-1} - 3\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \sin x + c = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \sin x + c$$

Есеп 3. $\int\frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}dx = \int\left(\frac{x^2}{5\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \frac{1}{5}\int\left(x^{2-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int x^{\frac{4}{3}}dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx\right] = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{35}\cdot x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}\cdot x^{\frac{2}{3}} + c =$$

$$= \frac{3}{35}\sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Есеп 4. $\int(2x-1)^4dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int(2x-1)^4dx = \frac{1}{2}\int(2x-1)^4d(2x-1) = \left|d(2x-1) = \frac{1}{2}dx\right| = \frac{(2x-1)^5}{10} + C.$$

Есеп 5. $\int \frac{dx}{4x-3}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x-3)}{4x-3}dx = \frac{1}{4}\ln(4x-3)+C.$

Есеп 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{7-3x}}d(7-3x) = \left| d(7-3x) = -\frac{1}{3}dx \right| = -\frac{2}{3}\sqrt{7-3x}+C.$$

Есеп 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бөлімдегі үшмүшелікте толық квадратты шығарып аламыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Есеп 8. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - arctgx + C.$

Есеп 9. $\int 2^{3x+5}dx$ интегралын табу керек

Шешуі: $\int 2^{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x+5}d(3x+5) = \frac{2^{3x+5}}{3\ln 2}+C.$

Есеп 10. $\int ctg(6x+7)dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int ctg(6x+7)dx = \frac{1}{6}\int ctg(6x+7)d(6x+7) = \frac{1}{6}\ln|\sin(6x+7)|+C.$

Дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы интегралдау

Егер $\int f(x)dx = F(x)+C$ және $u=\varphi(x)$ болса, онда

$$\int f(u)\,u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Есеп 11. $\int t^2\left(2-t^3\right)^3 dt$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int t^2\left(2-t^3\right)^3 dt = -\frac{1}{3}\int(-3)t^2\left(2-t^3\right)^3 dt = \left|-3t^2dt = d\left(2-t^3\right)\right| =$$

$$-\frac{1}{3}\int\left(2-t^3\right)^3 d\left(2-t^3\right) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(2-t^3\right)^4}{4} + c = -\frac{\left(2-t^3\right)^4}{12} + c.$$

Есеп 12. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{1+\cos x} = -\int \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = \ln\left|1+\cos x\right| + C.$$

Есеп 13. $\int e^x \cos e^x dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int e^x \cos e^x dx = \int \cos e^x de^x = \sin e^x + C.$

Есеп 14. $\int \frac{x^2 dx}{\left(5+2x^3\right)^2}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{x^2 dx}{\left(5+2x^3\right)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{d\left(5+2x^3\right)}{\left(5+2x^3\right)^2} = -\frac{1}{6\left(5+2x^3\right)} + c.$

Есеп 15. $\int \frac{5x dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{5x dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 5\int \frac{x dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{5}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{5}{2\left(x^2+1\right)} + c.$

Есеп 16. $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5(x+3)-18}{(x+3)^2-49}dx = 5\int \frac{(x+3)dx}{(x+3)^2-49} - 18\int \frac{dx}{(x+3)^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|(x+3)^2-49\right| -$$

$$-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x+3-7}{x+3+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Есеп 17. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}}dx = \int \frac{3x-9+13}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = 3\int \frac{x-3}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}} =$$
$$= -3\sqrt{16-(x-3)^2} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C = -3\sqrt{7+6x-x^2} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

1.3 Айнымалыны алмастыру.

Егер $\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек, бірақ алғашқы функциясын табу қиын болса, онда $x=\varphi(t)$ алмастыру жасау керек $\Rightarrow$ $dx=\varphi'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Келесі анықталмаған интегралдарды табыңыз:

Есеп 18. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Мұнда $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$ алмастыруын жасау керек. Сонда

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \left|t=\sin x, dt=\cos x dx\right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C.$$

Есеп 19. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \left|\sin x = t, \cos x dx = dt\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$

Есеп 20. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Келесі алмастыру жасаймыз:

$$t = x^2+1; \quad dt = 2xdx, \quad dx = \frac{dt}{2x};.$$

Сонда:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Есеп 21. $\int (2x+1)^{20}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t; \quad dt=2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C = \frac{t^{21}}{42}+C = \frac{(2x+1)^{21}}{42}+C$$

Есеп 22. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$
$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Есеп 23 . $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x}=t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x}+C.$$

Есеп 24. $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u=x+3; \quad du=dx; \\ x=u-3; \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$
$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Есеп 25 . $\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u=x-3; \quad du=dx; \\ x=u+3; \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$
$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Тапсырмалар.

1. Төмендегі анықталмаған интегралдарды есептеу керек:

1.1. $\int a^3x^4dx.$ **1.2.** $\int \left(x^2-2\sin x+1\right)dx.$

1.3. $\int \left(x^2+1\right)\left(2x-1\right)dx.$ **1.4.** $\int \sqrt{1+2x}dx.$

1.5. $\int (3t+2)^3 dt.$

1.6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[n]{x-3}} dx.$

1.7. $\int \dfrac{dx}{x-a}.$

1.8. $\int \dfrac{dx}{a+bx}.$

1.9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$

1.10. $\int \left(\dfrac{1}{(x-2)^4} - \dfrac{2}{(x+1)^3} - \dfrac{4}{(x+3)^2} + \dfrac{3}{x-4} \right) dx.$

1.11. $\int \left(\dfrac{1}{(2x-3)^6} + \dfrac{1}{(4-7x)^9} \right) dx.$

1.12. $\int \dfrac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx.$

1.13. $\int \left(\dfrac{2a}{\sqrt{4-x}} - \dfrac{b}{(x-5)^2} + 3c\sqrt[3]{x^2} \right) dx.$

1.14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-10}} dx.$

1.15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{10-x^2}} dx.$

1.16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+25}}.$

1.17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7+12x-4x^2}}.$

1.18. $\int \dfrac{dx}{x^2-6x+25}.$

1.19. $\int \dfrac{dx}{3x^2+5}.$

1.20. $\int \dfrac{dx}{7x^2-8}.$

1.21. $\int \dfrac{dx}{x^2-5x+6}.$

1.22. $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+9}.$

1.23. $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+4}.$

1.24. $\int \dfrac{dx}{x^2-10}$

1.25. $\int \dfrac{dx}{x^2+10}$

1.26. $\int \dfrac{dx}{x^2+10x}$

1.27. $\int \dfrac{x^4}{x^2+1} dx$

1.28. $\int \dfrac{dx}{4x^2-12x+25}$

1.29. $\int \dfrac{dx}{4x^2-12x+9}$

1.30. $\int \dfrac{dx}{4x^2-12x-7}$

1.31. $\int \dfrac{dx}{20+24x-9x^2}$

1.32. $\int \frac{dx}{3-8x-3x^2}$

1.33. $\int 3^x \cdot e^x dx$

1.34. $\int \frac{dx}{2^{4x+5}}$

1.35. $\int \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) dx$

1.36. $\int 5^{2-3x} dx$

1.37. $\int (2tgx + 3ctgx)^2 dx$

1.38. $\int tg(1-6x)dx$

1.39. $\int (\sin \frac{3\mathrm{x}}{2} + \cos \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{2}})dx$

1.40. $\int (cos5x + \sin 5x)^2 dx$

1.41. $\int ctg(5x-7)dx$

1.42. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2(1-x)}$

1.43. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2(2+3x)}$

1.44. $\int (ctg \frac{x}{5} + tg5x)dx$

1.45. $\int (ch3x + sh4x)dx$

1.46. $\int \left(\frac{1}{ch^2 2x} + \frac{1}{sh^2 \frac{x}{3}} \right) dx$

1.47. $\int tg^2 5xdx$

1.48. $\int ctg^2 2xdx$

1.49. $\int th^2 xdx$

1.50. $\int cth^2 xdx$

2. Төмендегі анықталмаған интегралдарды есептеу керек:

2.1. $\int \frac{xdx}{x^2+a}$

2.2. $\int \frac{xdx}{2-x^2}$

2.3. $\int \frac{\mathrm{e}^t dt}{4-3e^t}$

2.4. $\int \frac{x^2 dx}{2x^3+5}$

2.5. $\int \frac{cosx\, dx}{4-\sin x}$

2.6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\cdot arctgx}$

2.7. $\int \frac{e^{2t}dt}{e^t + 1}$

2.8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}}$

2.9. $\int \frac{(x+b)dx}{\sqrt{x^2 + a}}$

2.10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2.11. $\int \frac{(x+b)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

2.12. $\int \frac{(7+4x)dx}{\sqrt{5 - 7x - 2x^2}}$

2.13. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{3x^2 + 4x + 6}}$

2.14. $\int \frac{(2x+p)dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$

2.15. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 4}}$

2.16. $\int \frac{\ln^2(x + \sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2}}$

2.17. $\int \frac{xdx}{9 - x^4}$

2.18. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

2.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(ctgx + 1)^3}$

2.20. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

2.21. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$

2.22. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$

2.23. $\int \frac{2 + \ln x}{x} dx$

2.24. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

2.25. $\int \frac{\ln x dx}{x}$

2.26. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

2.27. $\int ch^3 x\, shx dx$

2.28. $\int \frac{chx}{sh^4 x} dx$

2.29. $\int tgx \cdot \sec^2 x dx$

2.30. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2.31. $\int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}}$

2.32. $\int \frac{e^{-bx}dx}{1 - e^{-2bx}}$

2.33. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ **2.34.** $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$

2.35. $\int x^2 \sin(x^3+5)dx$ **2.36.** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$

2.37. $\int \frac{\mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt{\mathrm{x}}}dx$ **2.38.** $\int \frac{xdx}{9+x^4}$

2.39. $\int \frac{(x^3-1)dx}{x^4-4x+5}$ **2.40.** $\int \frac{(3-\sqrt{2+3x^2})dx}{2+3x^2}$

2.41. $\int x^3\sqrt{5-x^4}dx$ **2.42.** $\int x^3\sqrt[5]{(x^4+16)^2}\,dx$

2.43. $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^5}dx$ **2.44.** $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$

2.45. $\int \frac{\sin x - cosx}{\sin x+\cos x}dx$ **2.46.** $\int \frac{(3-\sqrt{2+3x^2})dx}{2+3x^2}$

2.47. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}\,dx}{x}$ **2.48.** $\int \frac{e^{arctgx}-x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$

2.49. $\int \frac{2^{\arcsin x}-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **2..50.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

2.51. $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}$ **2.52.** $\int \frac{x-arcctgx}{1+x^2}\mathrm{dx}$

2.53. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

3. Төмендегі анықталмаған интегралдарды есептеу керек:

3.1. $\int \frac{\mathrm{x}+1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+2x}}dx$ Жауабы: $\sqrt{\mathrm{x}^2+2x}+\mathrm{C}$

3.2. $\int(\mathrm{x}-1)e^{x^2-2x}dx$ Жауабы: $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2-2x}+\mathrm{C}$

3.3. $\int \frac{2\mathrm{cosxdx}}{4+\mathrm{sinx}}$ Жауабы: $2\ln|4+\mathrm{sinx}|+\mathrm{C}$

3.4. $\int \frac{2xdx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$ Жауабы: $\frac{3\sqrt[3]{6-5x^2}}{10}+C$

3.5. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C$

3.6. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ Жауабы: $\frac{2\sqrt{(1+\ln x)}}{3}+C$

3.7. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ Жауабы: $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$

3.8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$ Жауабы: $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$

3.9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C$

Ескерту: $x=\frac{1}{t}$ деп алған жөн.

3.10. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ Жауабы: $-\ln(1+e^x)+C$

Ескерту: $x=-\ln t$ деп алған жөн.

3.11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

Ескерту: $x=a\,cht$ деп алған жөн.

3.12. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$ Жауабы: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$

Ескерту: $x=tgt$ деп алған жөн.

3.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ Жауабы: $2\arcsin\sqrt{x}+C$

Ескерту: $x=\sin^2 t$ деп алған жөн.

3.14. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

Ескерту: $x=a\sin t$ деп алған жөн.

3.15. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ Жауабы: $-3\cos\sqrt[3]{x}+C$

Ескерту: $x=t^3$ деп алған жөн.

3.16. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$ Жауабы: $\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+5\right)^3}+C$

Ескерту: $x^3+5=t^2$ деп алған жөн.

3.17. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx$ Жауабы: $-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C$

Ескерту: $\cos^2 x=t$ деп алған жөн.

3.18. $\int x\cdot(2x+5)^{10}dx$ Жауабы: $\frac{(2x+5)^{12}}{48}-\frac{5(2x+5)^{11}}{44}+C$

Ескерту: $2x+5=t$ деп алған жөн.

3.19. $\int x\cdot\sqrt[5]{3x+4}\,dx$ Жауабы: $\frac{5\sqrt[5]{(3x+4)^{11}}}{99}-\frac{10\sqrt[5]{(3x+4)^6}}{27}+C$

Ескерту: $3x+4=t^5$ деп алған жөн.

3.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$

Ескерту: $2x+1=t^2$ деп алған жөн.

3.21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ Жауабы: $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$

Ескерту: $x=\frac{1}{t}$ деп алған жөн.

3.22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ Жауабы: $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$

Ескерту: $x=\frac{1}{t}$ деп алған жөн.

1.4 Бөліктеп интегралдау.

$u=u(x)$, $v=v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын, онда

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бұл формуланы *бөліктеп интегралдау формуласы* деп атайды.

Бұл формулада соңғы интеграл берілген интегралдан оңай болатындай u және dv өрнектерін таңдап алу керек. Көп жағдайда интеграл астындағы функция алгебралық және трансцендентік функциялардың көбейтіндісі түрінде болса, онда бөліктеп интегралдау формуласы қолданылады. Мысалы,

$$\int x^k \cdot e^{mx} dx, \ \int x^k \sin bxdx, \ \int x^k \cos bxdx$$

интегралдарын есептеген кезде $u = x^k$ деп таңдап алу керек.

Ал, $$\int x^k \ln^m xdx, \ \int x^k \arcsin^m xdx, \ \int x^k arctg^m xdx$$

интегралдарын есептеген кезде сәйкес $u = \ln^m x, \ u = \arcsin^m x, \ u = arctg^m x$ деп таңдап алу керек.

Есеп 1. $\int x \ln xdx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int x\ln xdx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Есеп 2. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ интегралын табу керек.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & dv = \frac{1}{x^3}dx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = -\frac{1}{2x^2}; \end{matrix} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Есеп 3. $\int arctgxdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $u = arctgx, \ \mathrm{dv} = \mathrm{dx}$ деп алайық. Онда $du = \frac{dx}{1+x^2}, \ \mathrm{v} = \mathrm{x}$

$$\int arctgxdx = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c.$$

Есеп 4. $\int e^{ax} \sin bxdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$u = e^{ax}, \ \ \mathrm{sinbxdx} = \mathrm{dv} \qquad du = ae^{ax}, \ \ \mathrm{v} = \int \mathrm{sinbxdx} = -\frac{1}{6}\cos bx$$

Сонда $\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx$

$\int e^{ax}\cos bxdx$ интегралына бөлектеп интегралдау әдісін тағы пайдалансақ.

Онда $u = e^{ax}, \ \mathrm{dv} = \mathrm{cosbxdx}, \ \mathrm{du} = \mathrm{ae}^{\mathrm{ax}}, \ \mathrm{v} = \frac{1}{\mathrm{b}}\sin bx$

Сонда

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{ae^{ax}\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{-e^{ax}b\cos bx + ae^{ax}\sin bx}{b^2} + c.$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c.$$

Есеп 5. $\int x^2 \sin xdx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx, \\ du = 2xdx, & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx, \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Есеп 6. $\int x^2 e^{5x}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: Бұл интегралды табу үшін бөлшектеп интегралдау формуласын екі рет қолданамыз:

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx, & v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \frac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Есеп 7. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{(a^2-x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$
$$=a^2\arcsin x\frac{x}{a}-\int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$\int x\cdot\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ интегралын бөлектеп интегралдау арқылы есептейміз

$u=x,\ \ \mathrm{dv}=\frac{\mathrm{xdx}}{\sqrt{\mathrm{a}^2-x^2}}$ деп алайық.

$$du=dx,\ \mathrm{v}=\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-x^2)=-\sqrt{a^2-x^2}$$
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Соңғы интегралды теңдіктің оң жағына көшірсек,

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}$$

Онда

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

1.5 Квадраттық үшмүшесі бар қарапайым интегралдар

$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі квадраттық үшмүшесінен толық квадратты бөліп алу, яғни

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$
$$=a\left(x+\cdot\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

түріне келтіру. Сосын

$$2ax+b=t$$

алмастыруын жасау керек.

Егер $m=0$ болса, онда таблицалық интегралын аламыз (3-беттегі 13-ші формуланы қараңыз).

Есеп 8. $\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)x}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{2}}arctg\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C$$

Егер $m\neq 0$болса, онда алымынан квадраттық үшмүшесінің туындысын, яғни $2ax+b$ бөліп алу керек.

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=\frac{m}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+$$

$$+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx==\frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$$

Мұнда, екінші қошылғыштағы интеграл жоғарыда қарастырылған.

Есеп 9. $\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$$

$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі квадраттық үшмүшесінен толық квадратты бөліп алу арқылы негізгі кестелік интегралын аламыз (3-беттегі 15-ші немесе 16-шы формулаларды қараңыз).

Есеп 10. $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-2x^2}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{49}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{7}+C$

Есеп 11. $\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} =$

$$= \sqrt{x^2-2x+5} + 5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C$$

$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі

$$\frac{1}{mx+n} = t$$

алмастыруын жасау керек.

Есеп 12. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $x+2 = \frac{1}{t}$ алмастыруын жасау керек, онда $dx = -\frac{dt}{t^2}$, осыдан

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+4}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t+8t^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{4}+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+2}-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{8}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{2(x^2+4)}}{x+2}\right| + C.$$

$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ **түріндегі интеграл.** Негізгі есептеу әдісі квадраттық үшмүшесінен толық квадратты бөліп алу арқылы берілген интеграл төмендегі екі интегралдың біреуіне келеді (157-ші және 191-ші есептерге қараңыз).

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c.$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + \mathrm{C}$$

Есеп 13. $\int \sqrt{9+8x-x^2}\,dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int \sqrt{9+8x-x^2}\,dx = \int \sqrt{25-(x-4)^2}\,d(x-4) = \frac{x-4}{2}\sqrt{9+8x-x^2} + \arcsin\frac{x-4}{5} + C.$

Тапсырмалар.

4. Бөлшектеп интегралдау формуласын қолдану арқылы берілген интегралдарды табу керек:

4.1. $\int xe^{ax}dx$ Жауабы: $\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}+C$

4.2. $\int x\cos bxdx$ Жауабы: $\frac{x}{b}\sin bx+\frac{1}{b^2}\cos bx+C$

4.3. $\int x\sin bxdx$ Жауабы: $-\frac{x}{b}\cos bx+\frac{1}{b^2}\sin bx+C$

4.4. $\int x^2e^{ax}dx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}+C$

4.5. $\int x^2\cos bxdx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{b}-\frac{2}{b^3}\right)\sin bx+\frac{2x}{b^2}\cos bx+C$

4.6. $\int x^2\sin bxdx$ Жауабы: $\left(-\frac{x^2}{b}+\frac{2}{b^3}\right)\cos bx+\frac{2x}{b^2}\sin bx+C$

4.7. $\int (x^2+px+q)e^{ax}dx$

Жауабы: $\left(\frac{x^2}{a}+\left(\frac{p}{a}-\frac{2}{a^2}\right)x+\frac{q}{a}-\frac{p}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}+C$

4.8. $\int (x^2+px+q)\cos bxdx$

Жауабы: $\left(\frac{x^2+px}{b}+\frac{q}{b}-\frac{2}{b^3}\right)\sin bx+\frac{2x+p}{b^2}\cos bx+C$

4.9. $\int (x^2+px+q)\sin bxdx$

Жауабы: $\left(-\frac{x^2+px}{b}-\frac{q}{b}+\frac{2}{b^3}\right)\cos bx+\frac{2x+p}{b^2}\sin bx+C$

4.10. $\int \ln xdx$ Жауабы: $x(\ln x-1)+C$

4.11. $\int \log_a xdx$ Жауабы: $\frac{x}{\ln a}(\ln x-1)+C=\mathrm{x}\log_{\mathrm{a}}\left|\frac{x}{a}\right|+C$

4.12. $\int x^2 \ln x dx$ Жауабы: $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$

4.13. $\int x^2 \ln x\, dx$ Жауабы: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n-1}\right) + C$

4.14. $\int x^2 \log_a x\, dx$ Жауабы: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log_a x - \frac{\log_a e}{n-1}\right) + C$

4.15. $\int \ln^2 x dx$ Жауабы: $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

4.16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ Жауабы: $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

4.17. $\int \ln(x^2+1) dx$ Жауабы: $x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C$

4.18. $\int \sqrt{x^2+A}\, dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$

4.19. $\int \arcsin x\, dx$ Жауабы: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

4.20. $\int \arcsin\frac{x}{a} dx$ Жауабы: $x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

4.21. $\int arctg\frac{x}{a} dx$ Жауабы: $x\, arctg\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left|x^2 + a^2\right| + C$

4.22. $\int x\arcsin x\, dx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$

4.23. $\int x\, arctgx\, dx$ Жауабы: $\frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{x}{2} + C$

4.24. $\int x^2 \arcsin x\, dx$

Жауабы: $\frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} + C$

4.25. $\int x^2\, arctgx\, dx$ Жауабы: $\frac{x^3}{3} arctgx - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right| + C$

4.26. $\int x \arcsin\frac{x}{a} dx$ Жауабы: $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin x + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{4} + C$

4.27. $\int x\, arctg\frac{x}{a} dx$ Жауабы: $\frac{x^2+a^2}{2} arctgx - \frac{ax}{2} + C$

4.28. $\int x^2 \arcsin\frac{x}{a} dx$

Жауабы: $\frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{3} - \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{9} + C$

4.29. $\int x^2\, arctg\frac{x}{a} dx$

Жауабы: $\frac{x^3}{3} arctg\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln\left|x^2+a^2\right| + C$

4.30. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ Жауабы: $-xctgx + \ln\left|\sin x\right| + C$

4.31. $\int arctg\sqrt{x} dx$ Жауабы: $(x+1)arctg\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$

4.32. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Жауабы: $\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$

4.33. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$ Жауабы: $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{1}{x}\arcsin x + C$

4.34. $\int e^{ax}\cos bx\, dx$ Жауабы: $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$

4.35. $\int e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)dx$ Жауабы: $e^{ax}\cos bx + C$

4.36. $\int e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)dx$ Жауабы: $e^{ax}\sin bx + C$

5. Берілген интегралдарды есептеу керек:

5.1. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$

5.2. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$

5.3. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$ Жауабы: $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}arctg\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$

5.4. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-7x+13\right|-\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-7}{\sqrt{3}}+C$

5.5. $\int \frac{(x-1)^2dx}{x^2+3x+4}$ Жауабы: $x-\frac{5}{2}\ln\left|x^2+3x+4\right|-\frac{9}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$

5.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ Жауабы: $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C$

5.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$

5.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x+5+\sqrt{36x^2+60x}\right|+C$

5.9. $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$ Жауабы: $2\sqrt{2x^2+5x+3}+C$

5.10. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$

5.11. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ Жауабы: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$

5.12. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$ Жауабы: $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$

5.13. $\int \frac{2(x-4)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ Жауабы: $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$

5.14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$ Жауабы: $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|x\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-2x+1}\right|+C$

5.15. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$ Жауабы: $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}+C, \quad x>\sqrt{2}$

5.16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ Жауабы: $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$

5.17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C.$

5.18. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$ Жауабы: $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{8}{9}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C.$

5.19. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$ Жауабы: $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C.$

5.20. $\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx$ Жауабы: $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$

5.21. $\int \sqrt{x^2+4x+7}\,dx$ Жауабы: $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+7}+\frac{3}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right|+C.$

1.6 Рационал функцияларды интегралдау

Жәй бөлшектерді интегралдау. Келесі берілген төрт бөлшек *жәй бөлшектер* деп аталады:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$

n, m – натурал сандар ($n>2,\ m>2$) және $p^2-4q<0$.

Алғашқы түріндегі интеграл екі жәй бөлшектің интегралы $t=ax+b$ алмастыруы арқылы кестелік интегралға келтіріледі.

I. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C;$

II. $\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$

III.

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B+\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C\,.$$

Есеп 1. $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{4}arctg\,\frac{x-3}{4}+C\,.$

Есеп 2. $\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{14(6x-5)+46}{(6x-5)^2+23}dx=14\int\frac{6x-5}{(6x-5)^2+23}dx+$$

$$+46\int\frac{dx}{(6x-5)^2+23}=\frac{7}{6}\ln\left((6x-5)^2+23\right)+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\,\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C\,.$$

IV. $$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+B}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

Мұнда

$$\int\frac{2x+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{(x^2+px+q)^n}=-\frac{1}{(n-1)\left(x^2px+q\right)^{n-1}},$$

ал

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n}$$

тең болады, мұндағы

$$x+\frac{p}{2},\quad dx=dt,\quad m=q-\frac{p^2}{4}$$

Енді

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n}$$

интегралы үшін келесі рекурентті формуланы қолдану керек.

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^n}=\frac{1}{2m^2(n-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+m^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{m^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Бұл рекурентті формуланы $n-1$ рет қолдану арқылы I_n интегралы

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{t}{m}$$

негізгі кестелік интегралы арқылы есептеуге болады.

Есеп 3. $I_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^3}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $n=3$. Рекурентті формуланы қолдансақ, онда

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^3}=\frac{1}{4m^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+m^2\right)^2}+\frac{3}{4m^2}\cdot I_2.$$

$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^2}$ интегралына рекурентті формуланы тағы бір рет қолдансақ ($n=2$), онда

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^2}=\frac{1}{2m^2}\cdot\frac{x}{\left(t^2+m^2\right)}+\frac{1}{2m^2}\cdot I_1=\frac{1}{2m^2}\cdot\frac{x}{\left(t^2+m^2\right)}+\frac{1}{2m^3}\cdot arctg\frac{x}{m}+C.$$

Сонымен

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+m^2\right)^3}=\frac{1}{4m^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+m^2\right)^2}+\frac{3}{8m^4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+m^2\right)}+\frac{3}{8m^5}\cdot arctg\frac{x}{m}+C.$$

Рационал бөлшектерді интегралдау. Дұрыс рационал бөлшектерді интегралдау үшін оларды төмендегідей жәй бөлшектерге жіктеу керек:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{\left(x^2+rx+s\right)^\mu},$$

мұндағы A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – тұрақты сандар.

A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i шамаларының мәндерін анықтау үшін белгісіз коэффициенттер әдісін қолданыламыз (екі көпмүше тең болуы үшін х-тің бірдей дәрежесіндегі коэффициенттердің тең болуы қажетті және жеткілікті).

Бұрыс рационал бөлшектер үшін алдын ала бүтін бөлігін шығарып алуымыз керек.

Есеп 4. $\int \frac{x-2}{x^2-1}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: Интеграл атындағы өрнек бөлімінің екі нақты түбірі бар дұрыс интеграл бөлшек, олай болса

$$\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}$$

тең екендігін аламыз. Осыдан

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A_1(x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$x-2=A_1(x+1)+A_2(x-1)$$

x айнымалысының бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестірсек.

$$\left.\begin{array}{l} x: A_1+A_2=1 \\ x^0: A_1-A_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-\frac{1}{2} \\ A_2=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Табылған A_1, A_2 коэффициентін орнына қойсақ

$$\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}$$

Сонда

$$\int\frac{x-2}{x^2-1}dx=\int\left[-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x+1)}\right]dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+C.$$

Есеп 5. $\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: $\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Dx+E}{x^2+4}\right)dx$

Ортақ бөлімге келтіре отырып, алымдарын теңестіреміз:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Dx+E)(x-2)(x-4)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$\begin{cases} A+B+D=9 \\ -4A-2B-6D+E=-30 \\ 4A+4B+8D-6E=28 \\ -16A-8D+8E=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=9-A-B \\ E=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4D-3E=14 \\ 2A+B-E=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=9-A-B \\ E=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=9-A-B \\ E=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 5B=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ D=1 \\ E=2 \end{cases}$$

Сонымен,

$$\int \frac{5dx}{x-2}+\int \frac{3dx}{x-4}+\int \frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+arctg\frac{x}{2}+C\,.$$

Есеп 6. $\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: Бөлшек бұрыс болғандықтан, алдын ала бүтін бөлігін шығарып аламыз:

$6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7$	$3x^3-4x^2-17x+6$
$6x^5-8x^4-34x^3+12x^2$	
$9x^3+8x^2-76x-7$	$2x^2+3$
$9x^3-12x^2-51x+18$	
$20x^2-25x-25$	

Сонымен,

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$

$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Алынған бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктейік. $x=3$ болғанда бөлшектің бөлімі нөлге айналатындығы көрініп тұр. Сонда:

$3x^3-4x^2-17x+6$	$x-3$
$3x^3-9x^2$	
$5x^2-17x$	$3x^2+5x-2$
$5x^2-15x$	
$-2x+6$	
$-2x+6$	

0

Сонымен, $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Сонда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5.$$

Анықталмаған коэффициенттерді табу кезінде жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді топтастырып, сосын теңдеулер жүйесін (кейде теңдеулер саны өте көп болуы мүмкін) шешпеу үшін *кез келген мәндер әдісі* деп аталатын әдіс қолдануға болады. Бұл әдістің мәні мынада: жоғарыда алынған өрнекте x-ке (саны анықталмаған коэффициенттер санына тең) кез келген мәндерді біртіндеп береді. Есептеулер оңай болу үшін бұл мәндер ретінде бөлшектің бөлімі нөлге айналатын нүктелерді, яғни 3, -2, 1/3 аламыз. Сонда:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Сонымен:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int\frac{dx}{x+2} + 2\int\frac{dx}{x-3} + 5\int\frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Есеп 7. $\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx = \int\frac{A}{x+3}dx + \int\frac{Bx + C}{(x^2+2)^2}dx + \int\frac{Dx+E}{x^2+2}dx$$

Анықталмаған коэффициенттерді табайық:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx + C)(x+3) + (Dx + E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

Бұдан,

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$

$$= (D + A)x^4 + (3D + E)x^3 + (A + B + 2D + 3E + 4A)x^2 + (3B + C + 6D + 2E)x + (2A + 3C + 6E + 4A)$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 3C+6E+4A=15 \end{cases} \quad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+6-2A-27+9A+4A=14 \\ 3B+C+18-6A-18+6A=7 \\ 3C-54+18A+4A=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+11A=35 \\ 3B+C=7 \\ 3C+22A=69 \end{cases} \quad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ 11A=35-B \\ C=7-3B \\ 21-9B+70-2B=69 \end{cases} \quad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=0 \end{cases}$$

Сонда берілген интегралдың мәні:

$$3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+3}+2\int\frac{x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+$$
$$+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

1.7 Иррационал функцияларды интегралдау

$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$ **интегралы.** Осы интеграл $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмастыруын қолдану арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі, мұндағы k саны $m/n,...,r/s$ бөлшектерінің ортақ бөліміне тең.

Есеп 8. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left|\sqrt{x}=t,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right|=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C$$

Есеп 9. $\int\frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}} = \left| \; 2x+1=t^6, \quad x=\frac{t^6-1}{2}, \quad dx=3t^5dt \; \right| = \int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = .$$

$$= 3\int \frac{t^2dt}{t-1} = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C =$$

$$= \left| \; t=(2x+1)^{1/6} \; \right| = \frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3\,(2x+1)^{1/6}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

Есеп 10. $\int \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{2-x}{1+x}=t^2; \quad \mathrm{x}=\frac{2-\mathrm{t}^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2t(1+t^2)-2t(2-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-2t-2t^3-4t+2t^3}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-6tdt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right| =$$

$$-\int t\cdot\frac{6tdt}{(1+t^2)^2} = -6\int \frac{t^2}{(1+t^2)}dt = \left| \begin{array}{l} u=t, \quad \mathrm{du}=\mathrm{dt} \\ \frac{\mathrm{tdt}}{(1+\mathrm{t}^2)^2}=dv, \; \mathrm{v}=\frac{1}{2(1+\mathrm{t}^2)} \end{array} \right| =$$

$$= -6\cdot\frac{t}{2(1+t^2)} - 3\int\frac{dt}{1+t^2} = -\frac{3t}{1+t^2} - 3arctgt + c = \sqrt{(2-x)(1+x)} - 3arctg\sqrt{\frac{2-x}{1+x}} + c.$$

Тапсырмалар.

6. Берілген интегралдарды есептеу керек:

6.1. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ Жауабы: $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + \mathrm{C}$ $\quad \mathrm{a} \neq \mathrm{b}.$

6.2. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + \mathrm{C}.$

6.3. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ Жауабы: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right| + \mathrm{C}.$

6.4. $\int \frac{(2x^2+41x-91)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + \mathrm{C}.$

6.5. $\int \frac{(x^2+2x+6)dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + \mathrm{C}.$

6.6. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$ Жауабы: $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$

6.7. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ Жауабы: $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|+C.$

6.8. $\int \frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$ Жауабы: $\frac{x^2}{42}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C.$

6.9. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$ Жауабы: $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$

6.10. $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^2}$ Жауабы: $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$

6.11. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ Жауабы: $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C.$

6.12. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$ Жауабы: $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

6.13. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx$ Жауабы: $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|+C.$

6.14. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$

6.15. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ Жауабы: $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

6.16. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$ Жауабы: $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{3/2}}{|x-1|}+\frac{1}{2}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$

6.17. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$ Жауабы: $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\,\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

6.18. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ Жауабы: $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

6.19. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$

Жауабы: $\frac{31}{108}\ln|x-3|+\frac{29}{108}\ln|x+3|+\frac{2}{9}\ln(x^2+9)-\frac{1}{54}arctg\,\frac{x}{3}+C.$

6.20. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

Жауабы: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+9}\right|+\frac{1}{8}arctgx-\frac{1}{24}arctg\,\frac{x}{3}+C.$

6.21. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$

7. Берілген интегралдарды есептеу керек:

7.1. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx.$ Жауабы: $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$

7.2. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{ax+b}}dx.$ Жауабы: $\frac{3}{10a^2}\left[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right]+C.$

7.3. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$ Жауабы: $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

7.4. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx.$ Жауабы: $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C.$

7.5. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx.$ Жауабы: $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|+C.$

7.6. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx.$

Жауабы: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$

$\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$ **(дифференциалдық бином) интегралы,** мұндағы $m, n, p -$ рационал сандар.

Чебышев шарты. Берілген интеграл тек үш жағдайда ғана элементар функциялар арқылы өрнектеледі:

1) $p -$ бүтін сан болғанда;

2) $\frac{m+1}{2} -$ бүтін сан болғанда, бұл жағдайда $a+bx=z^S$ алмастыру жасау керек, мұндағы s – p бөлшегінің бөлімі;

3) $\frac{m+1}{2}+p -$ бүтін сан болғанда бұл жағдайда $ax^{-n}+b=z^S$ алмастыру жасау керек, мұндағы s – p бөлшегінің бөлімі;

Есеп 1. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$ интегралын есептеу керек.

Шешуі: $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}, \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2.$

Осыдан, дифференциалдық биномның екінші жағдайы бойынша

$$1+x^{1/4}=z^3 \qquad x=\left(z^3-1\right)^4, \quad dx=12z^2\left(z^2-1\right)^3dx$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int \frac{z^3\left(z^3-1\right)^3}{\left(z^3-1\right)^2}dz=12\int\left(z^6-z^2\right)dz=\frac{12}{7}z^7-3z^4+C=.$$

$$\frac{12}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+C$$

Берілген интегралдарды есептеу керек:

8.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}dx.$ Жауабы: $-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C.$

8.2. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx.$ Жауабы: $\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^2}+C.$

8.3. $\int x^2\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx.$ Жауабы: $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C.$

8.4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{x^{-4}+1}+$ C.

8.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}dx$. Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^3}}{\left|x^3\right|}+$ C.

$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **интегралы (Эйлер қойылымы).**

Бірінші Эйлер қойылымы. Егер $a>0$ болса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\cdot x+t$$

алмастыру жасау керек.

Есеп 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$. интегралын есептеу керек.

Шешуі: $a=1>0$ $\sqrt{x^2+c}=-x+t$ $x^2+c=x^2-2xt+t^2$

$$x=\frac{t^2-c}{2t},\quad dx=\frac{t^2+c}{2t^2}dt \qquad \sqrt{x^2+c}=-x+t=-\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{t^2+c}{2t}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int\frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C.$$

Екінші Эйлер қойылымы. Егер $c>0$ болса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

алмастыру жасау керек.

Есеп 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Шешуі: $c=1>0$ $\sqrt{1+x-x^2}=xt+1$ $1+x-x^2=x^2t^2+2xt+1$

$$x=\frac{1+2t}{1+t^2},\quad dx=-2\frac{1+t-t^2}{(1+t^2)^2}dt \qquad \sqrt{1+x-x^2}=xt+1=t\frac{1-2t}{1+t^2}+1=\frac{1+t-t^2}{1+t^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-2\,\frac{1+t-t^2}{(1+t^2)^2}dt}{\frac{1+t-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+t^2}=2\,arctgt+C=2arctg\,\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}+C.$$

Үшінші Эйлер қойылымы. Егер квадраттық ax^2+bx+c үшмүшенің α, β – нақты түбірлері болса, онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$$

алмастыру жасау керек.

Есеп 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$. интегралын есептеу керек.

Шешуі: $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$

онда

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)t$$

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2 \qquad (x-1)=(x+4)t^2$$

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2} \qquad dx=\frac{10tdt}{(1-t^2)^2}dt \qquad \sqrt{(x+4)(x-1)}=(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4)t=\frac{5t}{1-t^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)5t}dt=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C=\ln\left|2x+3+\sqrt{x^2+3x-4}\right|+C.$$

8.6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

8.7. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+5x}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x+5+\sqrt{36x^2+60x}\right|+C.$

8.8. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $2\,arctg\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3+2x-x^2}}{x}+C.$

8.9. $\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-4x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $arctg\,\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5+2x-4x^2}}{x}+C.$

8.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\ln\left|\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}\right|+C=\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+C.$

8.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8+3}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-3}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|2x-2+\sqrt{4x^2-8x+3}\right|+C.$

8.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C.$

8.13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. интегралын есептеу керек.

Жауабы: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C.$

1.8 Кейбір тригонометриялық функцияларды интералдау

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

Интегралдың бұл түрін есептеу үшін $t=tg\frac{x}{2}$ *универсал алмастыру* деп аталатын алмастыру қолданылады. Сонда $R(\cos x, \sin x)$ - тригонометриялық функциялардың рационал функциясы жаңа t айнымалысының рационал функциясына түрленеді.

$$x=2arctgt\,, \qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Тригонометриядан белгілі формулалар бойынша:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Сондықтан $\int R(\cos x, \sin x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2},$

мұндағы интегралданатын функция t айнымалысы бойынша рационал функция.

Есеп 1. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Есеп 2. $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{tg\frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$

▲

Кейбір жағдайларда осындай алмастырулар күрделі есептеулерге әкеледі, сондықтан басқа алмастырулар қолдануға болады. Солардың кейбіреулерін қарастырайық:

1) $\int R(\sin x)\cos x dx$ болса, онда $\sin x = t$.

2) $\int R(\cos x)\sin x dx$ болса, онда $\cos x = t$.

3) $\int R(tgx)dx$ болса, онда $tgx = t$.

4) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ интегралында $\sin x, \cos x$ функциялары тек жұп дәрежелерімен берілсе, онда $tgx = t$;

5) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралында егер:

а) m - тақ болса, онда $\cos x = t$;

ә) n - тақ болса, онда $\sin x = t$;

б) n, m - жұп, теріс емес болса, онда $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ формулалары қолданылады;

в) n, m - жұп, ең болмаса біреуі теріс болса, онда $tgx = t$ немесе $ctgx = t$;

6) Әртүрлі аргументтердің синус және косинустарының көбейтіндісінің интегралы берілсе, онда бұл жағдайда төмендегі 3 формуланың біреуін қолданамыз:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right];$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right].$$

Есеп 3. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \left\{\begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{matrix}\right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1 \end{matrix}\right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Есеп 4. $\int \sin 7x \sin 2x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Есеп 5. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{matrix}\right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Есеп 6. $\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \sin 10x\cos 7x\cos 4xdx = \int \sin 10x[\cos 7x\cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x\cos 11xdx + \frac{1}{2}\int \sin 10x\cos 3xdx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin 21xdx - \frac{1}{4}\int \sin xdx + \frac{1}{4}\int \sin 13xdx + \frac{1}{4}\int \sin 7xdx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$
$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Есеп 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left| dctg\,2x = -\frac{2dx}{\sin^2 2x} \right| = -2\int dctg\,2x = -2ctg\,2x + C.$

Кейде тригонометриялық функцияларды интегралдағанда бұрыннан белгілі дәрежені төмендететін формулаларды қолданған жөн.

Есеп 8. $\int \sin^4 xdx$ интегралын табыңыз.

Шешуі:

$$\int \sin^4 xdx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$
$$+\frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4xdx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Тапсырма.

9. Берілген интегралдарды есептеу керек:

9.1. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{acosx} + \mathrm{bsinx}}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ln\left| tg\frac{1}{2}\left(x + arctg\frac{a}{b}\right)\right| + C$

9.2. $\int \frac{\mathrm{dx}}{5 - 3\mathrm{cosx}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + C$

9.3. $\int \frac{\mathrm{dx}}{5 + 3\mathrm{cosx}}$ Жауабы: $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\cdot tg\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}$

9.4. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}}$ Жауабы: $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}} = \ln\left| tg\frac{x}{2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C =$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$

9.5. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{cosx}}$ Жауабы: $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{sinx}} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C =$

$$=\ln\left|\frac{\cos x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$$

9.6. $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$ Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{2tg\frac{x}{2}-1}\right|+C$

9.7. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ Жауабы: $\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+x+C$

9.8. $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ Жауабы: $x-tg\frac{x}{2}+C$

9.9. $\int\frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ Жауабы: $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{6}tg^2\frac{x}{2}+C$

9.10. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$

9.11. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ Жауабы: $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$

9.12. $\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$ Жауабы: $arctg\left(1+tg\frac{x}{2}\right)+C$

9.13. $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$ Жауабы: $\frac{1}{5}\ln\left|5tg\frac{x}{2}+3\right|+C$

9.14. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C$

9.15. $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C$

9.16. $\int\frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{\sqrt{3}\,tgx}{\sqrt{5}}\right)+C$

9.17. $\int\frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$ Жауабы: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tgx-5}{tgx}\right|+C$

9.18. $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^3}$ Жауабы: $-\frac{1}{2\,(1-\cos x)^2}$

9.19. $\int \sin^3 xdx$ Жауабы: $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

9.20. $\int \sin^5 xdx$ Жауабы: $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

9.21. $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$ Жауабы: $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x+3\cos^{-1/3} x+C$

9.22. $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$ Жауабы: $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C$

9.23. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ Жауабы: $\ln(1+\sin^2 x)+C$

9.24. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+6\cos x+5}$ Жауабы: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{5-\cos x}\right|+C$

9.25. $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$ Жауабы: $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$

9.26. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$ Жауабы: $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$

9.27. $\int tg^3 x\,dx$ Жауабы: $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$

9.28. $\int ctg^3 x\,dx$ Жауабы: $-\frac{ctg^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C$

9.29. $\int ctg^5 x\,dx$ Жауабы: $-\frac{ctg^4 x}{4}+\frac{ctg^2 x}{2}+\ln|\sin x|+C$

9.30. $\int tg^4 x\,dx$ Жауабы: $\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+C$

9.31. $\int ctg^6 x\,dx$ Жауабы: $-\frac{ctg^5 x}{5}+\frac{ctg^3 x}{3}-ctgx-x+C$

9.32. $\int tg^2 x\,dx$ Жауабы: $tgx-x+C$

9.33. $\int ctg^2 x\,dx$ Жауабы: $-ctgx - x + C$

9.34. $\int \sin^2 x\,dx$ Жауабы: $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

9.35. $\int \cos^2 x\,dx$ Жауабы: $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

9.36. $\int \cos^4 x\,dx$ Жауабы: $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

9.37. $\int \cos^6 x\,dx$ Жауабы: $\frac{5x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin^3 x}{48} + \frac{3\sin 4x}{64} + C$

9.38. $\int \sin^4 \cos^4 x\,dx$ Жауабы: $\frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C$

9.39. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$ Жауабы: $-\frac{1}{3}ctg^3 x + C$

9.40. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ Жауабы: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$

9.41. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ Жауабы: $-ctgx - \frac{ctg^3 x}{3} + C$

9.42. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ Жауабы: $tgx + \frac{2}{3}tg^3 x + \frac{1}{5}tg^5 x + C$

Тригонометриялық қойылым.

$R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ интегралы берілсе, онда $x = a\sin t$ немесе $x = a\cos t$ алмастыру жасау керек.

Есеп 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}}$ интегралын табу керек

Шешуі: $x = a\sin t \quad dx = a\cos tdt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}} = \int \frac{a\cos tdt}{\sqrt{\left(a^2 - a^2\sin^2 t\right)^3}} = \int \frac{a\cos tdt}{a^3\cos^3 t} = \int \frac{dt}{a^2\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}tgt + c = \frac{\sin t}{a^2\sqrt{1 - \sin^2 t}} + C$$

$$\sin t = \frac{x}{a}, \qquad \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Осыдан $$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

$R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ интегралы берілсе, онда $x=atgt$ немесе $x=actgt$ алмастыру жасау керек.

Есеп 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ интегралын табу керек

Шешуі: $x=atgt,\quad dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int \frac{\frac{adt}{\cos^2 t}}{atgt\sqrt{a^2+a^2tg^2t}}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right|+C$$

$$tgt=\frac{x}{a},\qquad \sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\qquad \cos t=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Осыдан

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1-\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}\right|+C$$

$R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ интегралы берілсе, онда $x=\frac{a}{\cos t}$ немесе $x=\frac{a}{\sin t}$ алмастыру жасау керек.

Есеп 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ интегралын есептеу керек

Шешуі: $x=\frac{a}{\cos t}\quad dx=\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}}=\int \frac{\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}}{\frac{a\cdot\sin t}{\cos t}}=\int \frac{dt}{\cos t}=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$$

$$\cos t=\frac{x}{a},\qquad \sin t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$$

Сонымен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{\frac{a}{x}}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}}{a}\right| + C$$

Берілген интегралдарды есептеу керек.

9.43. $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$ Жауабы: $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$

9.44. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ Жауабы: $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}C$

9.45. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

9.46. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$ Жауабы: $\frac{a}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \sqrt{a^2-x^2} + C$

9.47. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$ Жауабы: $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right| + C$

2 Анықталған интеграл

2.1 Анықталған интегралды есептеу

Анықталған интегралдың анықтамасы. $f(x)$ функциясының $[a;b]$ аралығындағы *анықталған интегралы* деп $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - интегралдық қосындының $(\max \Delta x_i \to 0)$ шегін айтады және былай белгіленеді: $\int_a^b f(x)dx$

мұндағы a - төменгі, $в$ - жоғарғы шегі, x– айнымалы шама, $[a;b]$– интегралдау аралығы.

Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда осы аралықта интегралданады.

А н ы қ т а л ғ а н и н т е г р а л қ а с и е т т е р і:

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

4) егер $[a;b]$-де $m \le f(x) \le M$ болса, онда:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a);$$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

6) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Анықталған интегралды анықталмаған интеграл көмегімен есептеу.

Ж о ғ а р ғ ы ш е г і а й н ы м а л ы а н ы қ т а л ғ а н ин т е г р а л. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болады, яғни

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Н ь ю т о н – Л е й б н и ц ф о р м у л а с ы. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)$ алғашқы функциясын $\int f(x)dx = F(x) + C$ анықталмаған интегралын шешу арқылы есептеледі.

Есеп 1. $\int_{-1}^{3} x^4 dx$ интегралын есептеу керек

Шешуі: $$\int_{-1}^{3} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}$$

Есеп 2. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ интегралын есептеу керек

Шешуі: $$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Берілген интегралды есептеу керек.

10.1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$ Жауабы: $\frac{7}{3}$

10.2. $\int_0^1 e^x dx$ Жауабы: $e-1$

10.3. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ Жауабы: 1

10.4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

10.5. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

10.6. $\int_0^{\pi/3} tgx dx$ Жауабы: $\ln 2$

10.7. $\int_1^e \frac{dx}{x}$ Жауабы: 1

10.8. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

10.9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ Жауабы: $\ln 2$

10.10. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ Жауабы: $-\frac{3}{8}$

10.11. $\int_1^2 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ Жауабы: $33\frac{1}{3}$

10.12. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ Жауабы: $\ln\frac{9}{8}$

10.13. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4x+5}$ Жауабы: $arctg 3 - arctg 2 = arctg\frac{1}{7}$

10.14. $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$ Жауабы: $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

10.15. $\int_2^{3.5} \frac{xdx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{6}$

10.16. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ Жауабы: $\frac{2}{3}$

10.17. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ Жауабы: $\ln 2$

10.18. $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{16}$

2.2 Меншіксіз интегралдар

Шегі ақырсыз интегралдар. Егер $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ шегі бар болса, онда осы шекті $f(x)$ функциясының $[a,\infty)$ интервалындағы *меншіксіз интегралы* дейді және оны былай белгілейді

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Егер осы шек бар болса меншіксіз интеграл *жинақты*, қарсы жағдайда *жинақсыз* дейді. Осы сияқты

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$$

интегралдарын да *меншіксіз интегралдар* дейді.

Үзілісті функцияның интегралы. $x = c$ нүктесінде үзілісті болатын $f(x)$ функциясының $\int\limits_a^c f(x)dx$ интегралы былай анықталады:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Егер осы шек бар болса, онда меншіксіз интеграл *жинақты*, қарсы жағдайда *жинақсыз* дейді.

Осы сияқты

$$\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to c+0}\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \text{ мұндағы } a \prec c \prec b,$$

интегралдарын да *меншіксіз интегралдар* дейді.

Есеп 3. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.

Шешуі: $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim\limits_{b\to\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b =$

$= \lim\limits_{b\to\infty}\left(arctg(b+1) - arctg1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$ Интеграл жинақты.

Есеп 4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ меншіксіз интегралын табыңыз.

Шешуі: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty.$ Интеграл жинақсыз.

Есеп 5. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ меншіксіз интегралын есептеу керек.

Шешуі:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to -0} \int\limits_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} + \lim\limits_{a\to +0} \int\limits_{a}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to -0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{b}\right) + \lim\limits_{a\to +0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{a}^{1}\right) =$$

$$= \lim\limits_{b\to -0}\left(1 - \frac{1}{b}\right) + \lim\limits_{a\to +0}\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \infty.$$ Интеграл жинақсыз.

Берілген меншіксіз интегралды есептеу керек.

11.1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ Жауабы: 2 (жинақты).

11.2. $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ Жауабы: жинақсыз

11.3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ Жауабы: $\frac{1}{1-p}$ (жинақты), егер $p<1$;
жинақсыз, егер $p \ge 1$;

11.4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ Жауабы: жинақсыз.

11.5. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ Жауабы: 1 (жинақты).

11.6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ Жауабы: $\frac{1}{p-1}$ (жинақты), егер $p>1$;
жинақсыз, егер $p \le 1$;

11.7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: $\frac{\pi}{2}$ (жинақты).

11.8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ Жауабы: $\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$ (жинақты).

11.9. $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{x\ln x}$ Жауабы: жинақсыз

11.10. $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ Жауабы: $\frac{1}{\ln 2}$ (жинақты).

11.11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$ Жауабы: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (жинақты).

11.12. $\int\limits_0^{\pi/2} ctgxdx$ Жауабы: жинақсыз

11.13. $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}dx,\ k>0$ Жауабы: $\frac{1}{k}$ (жинақты).

11.14. $\int\limits_0^{\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx$ Жауабы: $\frac{\pi^2}{8}$ (жинақты).

11.15. $\int\limits_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ Жауабы: 1(жинақты).

11.16. $\int\limits_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$ Жауабы: -1(жинақты).

2.3 Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру

Егер $f(x)$ функциясы $a\le x\le b$ аралығында үзіліссіз және $\varphi(x)$ функциясы өзінің $\varphi'(x)$ туындысымен $\alpha\le t\le\beta$ аралығында үзіліссіз , мұнда $a=\varphi(\alpha)$ және $b=\varphi(\beta)$, сонымен қатар $f(\varphi(t))$ функциясы $a\le x\le b$ аралығында анықталған және үзіліссіз болса, онда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Есеп 6. $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Айнымалыны алмастырып, сонан соң Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептейміз:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=\sin x & dx=\cos x dx \\ x=0 & t=0 \\ x=1 & t=\dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

2.4 Бөліктеп интегралдау формуласы

Егер $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары және олардың туындылары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса,онда анықталған интеграл үшін бөліктеп интегралдау формуласы тура болады:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Есеп 7. $\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөліктеп интегралдау формуласын қолданып, сонан соң Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша есептейміз:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = \left| \begin{matrix} x=u; dx=du \\ \sin x dx = dv; \\ -\cos x = v \end{matrix} \right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx = -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

Есеп 8. $\int_1^e x\ln x dx$ интегралын табыңыз.

Шешуі: Бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз:

$$\int_1^e x\ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; & \dfrac{dx}{x} = du \\ xdx = dv; & \dfrac{x^2}{2} = v \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Тапсырмалар.

12. Берілген интегралдарды есептеу керек

12.1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x=t^2$ Жауабы: $4-2\ln 3$

12.2. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx$, $x-2=t^3$ Жауабы: $8-\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

12.3. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 dx$, $\cos x=t$ Жауабы: $\frac{1}{3}$

12.4. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $tg\frac{x}{2}=t$ Жауабы: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

12.5. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$, $\sqrt{2+4x}=t$ Жауабы: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12.6. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$, $\sqrt{x-1}=t$ Жауабы: $2(2-arctg 2)$

12.7. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $x=\frac{1}{t}$ Жауабы: $\ln\frac{3}{2}$

12.8. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$, $\sin x=t$ Жауабы: $\ln\frac{4}{3}$

12.9. Егер $f(x)-$ жұп функция болса, онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a (x)dx$$

теңдігін дәлелдеу керек

12.10. Егер $f(x)-$ тақ функция болса, онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

теңдігін дәлелдеу керек

12.11. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$ Жауабы: $\frac{\pi}{2}-1$

12.12. $\int\limits_1^{e} \ln x dx$ Жауабы: 1

12.13. $\int\limits_0^{1} x^3 \cdot e^{2x}\, dx$ Жауабы: $\frac{e^2+3}{8}$

12.14. $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$ Жауабы: $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

12.15. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$ Жауабы: 1

12.16. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx \quad (a>0)$ Жауабы: $\frac{a}{a^2+b^2}$

12.17. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx \quad (a>0)$ Жауабы: $\frac{a}{a^2+b^2}$

2.5 Жазық фигураның ауданы

Тік бұрышты координатадағы аудан. Егер үзіліссіз қисығы тік бұрышты координатада $y=f(x)$ теңдеуімен берілсе, $y=f(x)$ қисығымен $y=0,\ x=a,\ \ x=b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының ауданы

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 9. $y=4x-x^2$ қисығымен және абсцисса осімен шектелген фигура ауданын есептеу керек.

Шешуі: Қисықтың абсцисса осін қиятын нүктелерін табамыз. Ол үшін $4x-x^2=0$ теңдеуін шешеміз. $x=0,\ \ x=4$ Ендеше

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_0^4(4x-x^2)dx=(2x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}.$$

Есеп 10. $y=\frac{1}{2}x^2$ қисығымен және $y=0,\ x=1,\ \ x=3$ түзулерімен шектелген фигура ауданын есептеу керек.

Шешуі:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = 4\frac{1}{3}.$$

$y = f_1(x)$ және $y = f_2(x)$ қисықтарымен ($f_2(x) > f_1(x)$) және $x = a, x = b$ түзулерімен шектелген жазық фигураның ауданы

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 11. $y = x^3; y = 8$ сызықтарымен және ординат осімен шектелген фигура ауданын табу керек.

Шешуі: Берілген сызықтардың қиылысу нүктесін табамыз.

$$\begin{cases} y = x^3; \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

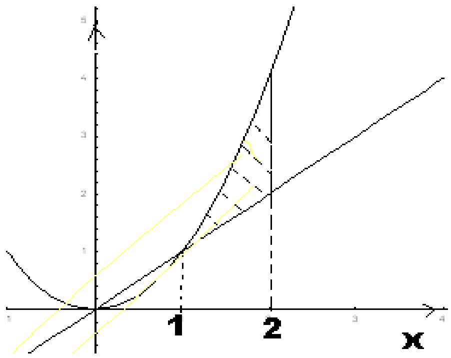
Берілген фигура сол жағынан ордината осімен шектелгендіктен, төменгі шек $x = 0$ болады. Сонымен формула бойынша

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^2 (8 - x^3)dx = (8x - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = 16 - 4 = 12.$$

Есеп 12. $y = x$, $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табу керек (2.1 Сурет).

Шешуі:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$



2.1 Сурет

Параметрлік түрде берілген $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ мұндағы $\alpha\le t\le\beta,\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ қисықпен шектелген жазық фигураның ауданы $S=\int\limits_{\varepsilon}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$ формуласымен есептеледі.

Есеп 13. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ эллипсінің ауданын табу керек.

Шешуі: Эллипстің симмериялығын пайдаланып, оның ширегінің ауданын есептеп, қортындыны төртке көбейту жеткілікті. Осында x айнымалысы $0-$ ден $+a-$ ға дейін өзгереді. Олай болса t айнымалысы $\frac{\pi}{2}-$ден $0-$ ға дейін өзгереді.

$$S=\int\limits_a^b\psi(t)\varphi'(t)dt=4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t\,(-a\sin t)\,dt=4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=$$

$$=2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

Есеп 14. OX өсімен шекталген $\begin{cases} x=a\,(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ циклоидасының ауданын табу керек.

Шешуі: x айнымалысы $0-$ ден $2\pi a-$ ға дейін өзгереді. Олай болса t айнымалысы $0-$ден $2\pi-$ ға дейін өзгереді.

$$S=\int\limits_a^b\psi(t)\varphi'(t)dt=\int\limits_0^{2\pi}a(1-co\,st)\,a\,(1-\cos t)\,dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-co\,st)^2\,dt=$$

$$=a^2\left[\int\limits_0^{2\pi}dt-2\int\limits_0^{2\pi}\cos tdt+\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt\right].$$

мұнда

$$\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi,\qquad \int\limits_0^{2\pi}\cos tdt=0,\qquad \int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=\pi$$

Сонымен

$$S=a^2\,(2\pi+\pi)=3\pi\,a^2.$$

Полярлық координатадағы аудан. Егер үзіліссіз қисығы тік бұрышты координатада $r=f(\varphi)$ теңдеуімен берілсе, $r=f(\varphi)$ қисығымен (доғасымен) $\varphi_1=\alpha,\ \ \varphi_2=\beta$ полярлық сәулелермен шектелген «қисық сызықты» сектордың ауданы

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 15. $r = a(1+\cos\varphi)$ кардиоида қисығымен шектелген ауданды табу керек.

Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның жартысын есептеп, шыққан нәтижені екі есе еселейміз:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= a^2\left[\varphi\Big|_0^\pi + 2\sin\varphi\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2\varphi)d\varphi\right] =$$

$$= a^2\left(\pi + \frac{1}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^\pi\right) = a^2(\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

Есеп 16. $r = a\sqrt{cos 2\varphi}$ лемниската қисығымен шектелген ауданды табу керек.

Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт есе еселейміз:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)d\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} = a^2.$$

2.6 Қисық доғасының ұзындығы

Тік бұрышты координатадағы доғаның ұзындығы. Жазықтықта $y = f(x)$ теңдеуімен өрнектелген АВ доғасының ұзындығы, мұндағы $a \prec x \prec b$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 17 . $x^2 + y^2 = R^2$ теңдеуімен берілген шеңбердің ұзындығын табу керек.

Шешуі: Шеңбердің симметриялылығын ескеріп, берілген ауданның ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт есе еселейміз.

Шеңбердің теңдеуі $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, осыдан

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Сонда

$$L = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4 \cdot \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \arcsin x \Big|_0^R = 2\pi R.$$

Есеп 18. $x = 0 -$ ден $x = 1 -$ ге дейінгі аралықтағы $x^3 = y^2$ $(y \geq 0)$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $y = \sqrt{x^3}$, осыдан

$$y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

Сонда

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}\right)^{3/2} \Bigg|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Есеп 19. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: Астроиданың теңдеуін дифференциалдаймыз:

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ұзындықтың ширегін есептеп, шыққан нәтижені төрт еселейміз:

$$\frac{1}{4} L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Bigg|_0^a = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a.$$

$$L = 6a.$$

Параметрлік түрде берілген $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$ мұндағы $\alpha \leq t \leq \beta,\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b,$ қисықпен шектелген доғасының ұзындығы

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 20. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ циклоиданың бір аркасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $x' = a(1 - \cos t);$ $y' = a \sin t$. Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a.$$

Есеп 21 . $\begin{cases} x=cos^5 t \\ y=\sin^5 t\end{cases}$ $(0\le t\le\frac{\pi}{2})$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $x'=-5\sin t\cos^4 t;\quad y'=5\sin^4 t\cos t$.

Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25\sin^2 t\cos^8 t+25\sin^8 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}\,dt=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=-\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{8}\left[2+\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right].$$

Полярлық координатадағы доғаның ұзындығы. AB қисығы $r=f(\varphi)$ теңдеуімен берілсе, мұндағы $\alpha\le\varphi\le\beta,$ онда AB доғасының ұзындығы

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 22. $r=a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ $(0\le\varphi\le 3\pi)$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: $r'=a\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right).$

Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_{0}^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\left(\frac{\varphi}{3}\right)+a^2\sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}\,d\varphi=\int_{0}^{3\pi}\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{3\pi a}{2}$$

Есеп 23. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$ теңдеуімен берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі: Қисықтың симметриялылығын ескеріп, берілген ұзындықтың жартысын есептеп, шыққан нәтижені екі еселейміз.

$$r'=-a\sin\varphi\,.$$

Сондықтан,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2+2cos\varphi}\,d\varphi=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{0}^{\pi}=8a.$$

2.7 Дененің көлемі.

Қимасының ауданы бойынша дененің көлемі. Егер дененің $S=S(x)-$ OX өсіне перпендикуляр болатын параллель қимасының ауданы болса, онда дененің клемі

$$V=\int_{a}^{b}S(x)dx$$

формуласымен есептеледі, мұндағы $a\le x\le b.$

Есеп 24. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидының көлемін табу керек.

Шешуі: Эллипсоидтың OYZ параллель жүргізілген қималар эллипс болады (OX өсіне перпендикуляр). Оның теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2},\qquad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1.$$

Эллипстің жарты өстері

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Эллипстің ауданы $S(x) = \pi b_1 c_1$ – ге тең (418 есепті қараңыз). Осыдан

$$S(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Енді эллипсоидының көлемін табамыз

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Айналу денесінің көлемі. $y = f(x)$ қисығы және $y = 0,\quad x = a,\quad x = b$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапециясын OX өсімен және OY өсімен айналдырғанда пайда болған денелердің көлемі сәйкес

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \qquad V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx = 2\pi\int_a^b x\, f(x)dx$$

формулаларымен есептеледі, мұндағы $a \le x \le b.$

Есеп 25. $y = \sin x \quad (0 \le x \le \pi)$ синусоидасы және OX өсімен шектелген фигураны а) OX өсі бойынша, б) OY өсі бойынша айналдырғанда пайда болған денелердің көлемін табу керек.

Шешуі:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx = 2\pi\int_0^\pi x\sin x dx = 2\pi(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^\pi = 2\pi^2$$

2.8 Айналу денесінің бетінің ауданы

$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ қисығының доғасын OX өсімен айналдырғанда пайда болған дененің бетінің ауданы

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,$$

формулаларымен есептеледі.

Есеп 26. $9y^2 = x(3-x)^2$ қисығының OX өсі бойынша айналдырғанда пайда болған денелердің бетінің ауданын табу керек.

Шешуі: $\quad 0 \le x \le 3 \qquad y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{3-x}{6\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi\int_0^3 \frac{3-x}{3}\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = 3\pi.$$

Есеп 27. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ қисығының OX өсі бойынша айналдырғанда пайда болған денелердің бетінің ауданын табу керек.

Шешуі: $\quad x' = a(1-\cos t), \; y = a\sin t$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt = x\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= \pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

2.9 Анықталған интегралдың механикада қолдануы

Ауырлық орталығы. $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ теңдеуімен берілген $A(a, f(a))$ мен $B(b, f(b))$ нүктелерін қосатын AB доғасының ауырлық орталығының координаталары

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}$$

формулаларымен есептеледі.

$y = f(x)$ қисығы және $y = 0, \quad x = a, \quad x = b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының ауырлық орталығының координаталары

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

формулаларымен есептеледі.

Есеп 28. $x^2+y^2=a^2, \quad y>0$ жарты шеңберінің ауырлық орталығының координаталарын табу керек.

Шешуі: $y=\sqrt{a^2-x^2} \qquad f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$y_c=\frac{\int\limits_a^b y\, f(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}=\frac{\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int\limits_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a}{\pi},$$

$x_c=0,$ себебі жарты шеңбер OY өсіне қарағанда симметриялы.

Есеп 29. $y=\sqrt{ax}$ параболасы және $x=a$ түзуімен шектелген фигураның ауырлық орталығының координаталарын табу керек.

Шешуі:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\, f(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}=\frac{\int\limits_0^a x\sqrt{ax}dx}{\int\limits_0^a \sqrt{ax}dx}=\frac{2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{3a}{5},$$

$$y_c=\frac{\int\limits_a^b f^2(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}=\frac{\int\limits_0^a axdx}{\int\limits_0^a \sqrt{ax}dx}=\frac{\cdot\frac{1}{2}a\,x^2\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{3a}{8}$$

Инерция моменті. $y=f(x) \quad (a\le x\le b)$ теңдеуімен берілген $A(a, f(a)$ мен $B(b, f(b)$ нүктелерін қосатын AB доғасының OX өсі және OY өсіне қарағанда инерция моменті

$$I_x=\int\limits_a^b y^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx, \qquad I_y=\int\limits_a^b x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,$$

формулаларымен есептеледі.

$y=f(x)$ қисығы және $y=0, \quad x=a, \quad x=b$ түзулерімен шектелген «қисық сызықты» трапециясының OX өсі және OY өсіне қарағанда инерция моменті

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2 f(x)dx$$

формулаларымен есептеледі

Есеп 30. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ асттоида доғасының OX, OY өстеріне қарағандағы инерция моментін табу керек.

Шешуі: $x' = -3a\sin t\cos^2 t, \qquad y' = 3a\sin^2 t\cos t$

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = 3a\sin t\cos t\,dt$$

$$I_x = \int_a^b y^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\,3a\sin t\cos t dt = \frac{3}{8}a^3\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^3}{8}.$$

Осылай $I_y = \dfrac{3a^3}{8}.$

Есеп 31. $y = a^2 - x^2,\quad y = 0$ сызықтарымен шектелген фигураның OX өсінің қарағандағы инерция моментін табу керек

Шешуі:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx = \frac{1}{3}\int_a^b \left(a^2 - x^2\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_a^b \left(a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6\right)dx = \frac{1}{3}\left(a^6x - a^4x^3 + \frac{3}{5}a^2x^4 - \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{32\,a^7}{105}.$$

Тапсырмалар.

Берілген сызықтармен шектелген фигуранын ауданын табу керек.

13.

13.1. $y^2 = 9x,\ \ y = 3x$ Жауабы: $\frac{1}{2}$

13.2. $xy = a^2,\ \ y = 0,\ \ x = a,\ \ x = 2a$ Жауабы: $a^2\ln 2$

13.3. $y = x^2,\ \ y = 0$ Жауабы: $\frac{32}{3}$

13.4. $y^2 = 2px,\ \ 2py = x^2$ Жауабы: $\frac{4p^2}{3}$

13.5. $y = x^3, \quad y = 2x, \quad y = x$ Жауабы: $\frac{3}{2}$

13.6. $y^3 = x, \quad y = 1, \quad x = 8$ Жауабы: $4\frac{1}{4}$

13.7. $y = tgx, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{3}$ Жауабы: $\ln 2$

13.8. $y = ax - x^2, \quad y = 0$ Жауабы: $\frac{a^3}{6}$

13.9. $y = \frac{a^2}{x^2 + a^2}, \quad y = 0$ Жауабы: πa^2

13.10. $y = 2x - x^2, \quad y + x = 0$ Жауабы: $4\frac{1}{2}$

13.11. $y = \frac{x^2}{3}, \quad y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ Жауабы: $10\frac{2}{3}$

13.12. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ Жауабы: $\frac{3}{8}\pi ab$

13.13.. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin - \sin 2t) \end{cases}$ Жауабы: $6\pi a^2$

13.14. $r = a\cos\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi a^2}{4}$

13.15. $r = a\cos 2\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi a^2}{4}$

13.16. $r = a\cos 3\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

13.17. $r = a\cos 4\varphi$ Жауабы: $\frac{\pi}{4}$

14. Берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

14.1. $y = \frac{x^2}{2} \quad 0 \le x \le 1$ Жауабы: $\frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$

14.2. $y^2 = x^3$ (0;0) нүктесінен (4;8) нүктесіне дейін

Жауабы: $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

14.3. $y = 2\sqrt{x} \quad 0 \le x \le 1$ Жауабы: $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

14.4. $y = \ln x \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$ Жауабы: $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

14.5. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 3$ Жауабы: 12

14.6. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, Жауабы: $6a$

14.7. $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, Жауабы: 5π

14.8. $r = a\varphi$ (Архимед спиралі) полюстен бірінші айналымға дейін

Жауабы: $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.

14.9. $r = a\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ Жауабы: $\frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

14.10. $r = e^{a\varphi}$ полюстен (r,φ) нүктесіне дейін.

Жауабы: $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi}$.

15. Берілген сызықтармен шектелген фигураны OX немесе OY өсімен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін табу керек.

15.1. $y = ax - x^2 \quad (a > 0)$

а) OX өсі бойынша Жауабы: а) $V_x = \frac{\pi a^5}{30}$

б) OY өсі бойынша б) $V_y = \frac{\pi a^4}{6}\pi$

15.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

OX өсі бойынша Жауабы: $\frac{4}{3}\pi ab^2$

15.3. $y = \frac{bx}{a}$

OY өсі бойынша Жауабы: $\frac{1}{3}\pi a^2 b$

15.4. $y=\frac{x^2}{2}, \quad y=\frac{x^3}{8}$

OX өсі бойынша Жауабы: $\frac{4\pi}{35}$

15.5. $y^2=2px, \quad x=a$

OY өсі бойынша Жауабы: πpa^2

15.6. $y^2=x^3, \quad y=0, \; x=3$

а) OX өсі бойынша Жауабы: а) $V_x=\frac{\pi}{4}$

б) OY өсі бойынша б) $V_y=\frac{4}{7}\pi$

15.7. $y=e^x, \quad y=0, \; x=0$

а) OX өсі бойынша Жауабы: а) $V_x=\frac{\pi}{2}$

б) OY өсі бойынша б) $V_y=2\pi$

15.8. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$

а) OX өсі бойынша Жауабы: а) $V_x=5\pi^2 a^3$

б) OY өсі бойынша б) $V_y=6\pi^2 a^3$

15.9. $\begin{cases} x=a\,cos^3 t) \\ y=a\sin^3 t) \end{cases}$

а) OX өсі бойынша Жауабы: а) $V_x=\frac{32\pi a^3}{105}$

б) OY өсі бойынша б) $V_y=\frac{32\pi a^3}{105}$

15.10. $r=a(1+\cos\varphi)$

полярлық өсі бойынша Жауабы: $\frac{8}{3}\pi a^3$

15.11. $r=\cos^2\varphi$

полярлық өсі бойынша Жауабы: $\frac{4}{21}\pi a^3$

16. Берілген қисықтың доғасын OX өсімен айналдырғанда пайда болған беттің ауданын табу керек.

16.1. $y=2x \quad 0\le x\le 2$ Жауабы: $8\pi\sqrt{5}$

16.2. $y=\sin x \quad 0\le x\le \pi$ Жауабы: $2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$

16.3. $y=\frac{1}{3}(3-x) \quad 0\le x\le 3$ Жауабы: 3π

16.4. $y^2=4ax \quad 0\le x\le 3a$ Жауабы: $\frac{56\pi a^2}{3}$

16.5. $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$ Жауабы: $\frac{128\pi a^2}{5}$

16.6. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ Жауабы: $\frac{12\pi a^2}{5}$

16.7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$ эллипстің ширегінің ауырлық орталығын табу керек. Жауабы: $x_c=\frac{4a}{3\pi}$; $y_c=\frac{4b}{3\pi}$

16.8. $4y=16-x^2, \quad y=0$ сызықтарымен шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек.

Жауабы: $x_c=0$; $y_c=1.6$

16.9. $y=\sin x, \quad y=0 \ (0\le x\le \pi)$ шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек

Жауабы: $x_c=\pi/2$; $y_c=\pi/8$

16.10. $y^2=20x, \quad x^2=20y$ параболаларымен шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек

Жауабы: $x_c=9$; $y_c=9$

16.11. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ циклоида доғасының ауырлық орталығын табу керек. Жауабы: $x_c=\frac{4a}{3\pi}$; $y_c=\frac{4b}{3\pi}$

16.12. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ циклоида және OX өсімен шектелген фигураның ауырлық орталығын табу керек.

Жауабы: $x_c=\pi a$; $y_c=\frac{5a}{6}$

16.13. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ астроида доғасының $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$ ауырлық орталығын табу керек. Жауабы: $x_c,\ y_c=\frac{2a}{5}$

16.14. $y=a^2-x^2, \quad y=0$ сызықтарымен шектелген фигураның OY өсінің қарағандағы инерция моментін табу керек

Жауабы: $I_y = \frac{4a^5}{15}$

16.15. $x^2 + y^2 = a^2$ а) шеңберінің , б) дөңгелектің $OX,\ OY$ өстеріне қарағандағы инерция моментін табу керек.

Жауабы: а) $I_x = I_x = \pi a^3$

б) $I_x = I_x = \frac{1}{4}\pi a^4$

16.16.. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипстің ауданының $OX,\ OY$ өстеріне қарағандағы инерция моментін табу керек

Жауабы: $I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$, $I_x = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$

3 Көп айнымалыға байланысты функция

3.1 Көп айнымалыға байланысты функцияның анықталу облысы

Көп айнымалды функцияның анықтамасы. Егер *D* облысында бір-бірінен тәуелсіз *x,y* айнымалыларының мәндер жұбына *z* айнымалының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда *z* айнымалы x және у айнымалыларына тәуелді *екі айнымалыды функция* деп аталады және оны

$$z = f(x, y)$$

деп белгілейді.

Егер бір-бірінен тәуелсіз $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ айнымалдыларының әрбір мәніне *u* айнымалысының анықталған бір мәні сәйкес келсе, онда *u* айнымалысы x_1, x_2, … , x_n айнымалыларына байланысты көп айнымалды функция деп аталады және

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

символдарымен белгіленеді.

Есеп 1. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ функциясы берілген. $f(3,-4)$ және $f(1, \frac{y}{x})$ мәндерін табу керек.

Шешуі. $f(3,-4) = \frac{3^2 + (-4)^2}{2 \cdot 3 \cdot (-4)} = -\frac{25}{24}$, $\quad f(1, \frac{y}{x}) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \frac{y}{x}} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$

Функцияның анықталу облысы. $z = f(x, y)$ функциясы анықталатын *x* және *y* қос мәндерінің (x, y) жиынын осы функцияның *анықталу облысы (аймағы)* деп атайды.

$z = f(x, y)$ функциясының анықталу облысы Oxy жазықтығындағы нүктелер жиыны болады. Дербес жағдайда, бүкіл Oxy жазықтығы не Oxy жазықтығының тұйық сызықтармен шектелген бөлігі немесе осы жазықтықтың бірнеше бөліктерінің жиынтығы болады.

Есеп 2. $z = x^2 + y^2$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция x пен y-тің кез келген мәнінде анықталған, яғни анықталу облысы бүкіл Oxy жазықтығы болып табылады.

Есеп 3. $z = \ln(2x - y)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Логарифмдік функция $2x - y > 0$, яғни $y < 2x$ болғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $2x - y = 0$ түзуінен төмен орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болып табылады.

Есеп 4. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Функция нақты мәндерін $x^2 + y^2 - a^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \geq a^2$ болғанда ғана қабылдайды, яғни функцияның анықталу облысы центрі координаттар жүйесінің бас нүктесі, ал радиусы a-ға тең болатын дөңгелектен тыс орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

Есеп 5. $z = \arcsin(y - x)$ функциясының анықталу облысын табу керек.

Шешуі. Берілген функция $-1 \leq y - x \leq 1$ теңсіздігі орындалғанда ғана анықталады. Осыдан функцияның анықталу облысы $y = x + 1$ және $y = x - 1$ түзулерінің арасында орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі болады.

Деңгейлік сызық және деңгейлік бет. Екі айнымалыға байланысты $z = f(x, y)$ функциясының деңгейлік сызығы деп Oxy жазықтығында $f(x, y) = C$ теңдеуімен берілген сызықты айтады.

Үш айнымалды $u = f(x, y, z)$ функциясының деңгейлік беті деп $f(x, y, z) = C$ теңдеуімен берілген бетті айтады.

Есеп 6. $z = \dfrac{y}{x^2}$ функциясының деңгейлік сызығын табу керек.

Шешуі. Деңгейлік сызықтың теңдеуі $\dfrac{y}{x^2} = C$ немесе $y = Cx^2$ теңдеуімен анықталады. $C = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ сандық мәндерін беру арқылы параболалар жиынтығын алуға болады.

3.2 Көп айнымалды функцияның үзіліссіздігі

Функцияның шегі. Егер кезкелген $\forall \varepsilon > 0$ саны үшін $\exists \delta > 0$ саны табылып,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

теңсіздігі орындалғанда,

$$|f(x;y)-A|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $z=f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесінің $M_0(a,b)$ нүктесіне ұмтылғандағы шегі деп A санын айтады және оны былай жазады

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x;y)=A.$$

Егер $z=f(x,y)$ функциясы D облысының кезкелген нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны D облысында үзіліссіз деп атайды.

Есеп 7. $z=\dfrac{xy-2}{x^2+y}$ функциясының үзіліс нүктелерін табу керек.

Шешуі. Егер бөлімі нөлге тең болса, онда функцияның мәні анықталмайды. Бұл жағдайда, $x^2+y=0$ немесе $y=-x^2$ - параболаның теңдеуі. Осыдан, берілген функция $y=-x^2$ параболасында жатқан нүктелерінде үзілісті, яғни үзіліс сызығы $y=-x^2$ параболасы.

Теорема. $f(x,y):\{M\}\to R_1$ M жиынында анықталған және $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)=b$ бар болса, онда $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)=b$

Есеп 8. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ функция $(0{,}0)$нүктесінде үзіледі ме?

Шешуі: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{0}=|y=x|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$, ал $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$. Екеуі тең емес, онда $f(x,y)$функциясы $(0{,}0)$ нүктесінде үзілісті.

3.3 Көп айнымалды функцияның туындылары мен дифференциалдары

Көп айнымалды функцияның дербес, толық өсімшелері және дербес туындылары. $z=f(x,y)$ функциясымен анықталған бетті қарастырайық. Оны $y=const$ жазықтығымен қияйық. Бұл жазықтықта y -тұрақты, x айнымалысына Δx өсімшесін берейік. Сонда *x айнымалысы бойынша z функциясының* $\Delta_x z$ *дербес өсімшесі*

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

формуласымен анықталады.

Сол сияқты, егер $z=f(x,y)$ функциясы үшін x – тұрақты болып, ал y айнымалысы бойынша Δy өсімшесін алса, онда *y айнымалысы бойынша дербес өсімшесі*

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

формуласымен анықталады.

Егер x және y айнымалылары бойынша Δx және Δy өсімшілерін қабылдаса, онда z функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

формуласымен анықталады.

$z = f(x, y)$ функциясының *x айнымалысы бойынша дербес туындысы* деп

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x^{'}(x, y)$$

шегін айтады.

$z = f(x, y)$ функциясының *y айнымалысы бойынша дербес туындысы* деп

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y^{'}(x, y)$$

шегін айтады.

Дербес туындыны есептеу ережесі: $z = f(x, y)$ функциясының x айнымалысы бойынша дербес туындысын есептеу үшін z функциясының y – тұрақты деп алғандағы x бойынша туындысын есептеу керек, және, керісінше, y бойынша дербес туындысын есептеу үшін z функциясының x – тұрақты деп алғандағы y бойынша туындысын есептейді.

Есеп 9. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек.

Шешуі.

$$\begin{aligned}\Delta_x z &= f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot y + 3y^2 + 4(x+\Delta x) - 5y + 6] - \\ &- (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = (x+\Delta x)^2 - x^2 - 2y\Delta x + 4\Delta x = \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta x - 4\Delta x = (2x - 2y - 4 + \Delta x)\cdot \Delta x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y z &= f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \left[x^2 - 2x(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4x - 5(y+\Delta y) + 6\right] = \\ &= (x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 5y + 6) = -2x\Delta y + 3(y+\Delta y)^2 - 3y^2 - 5\Delta y = \\ &= -2x\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5\Delta y = (-2x + 6y - 5 + 3\Delta x)\cdot \Delta x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = [(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 4(x+\Delta x) - \\ &- 5(y+\Delta y) + 6] - (x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 6) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + \\ &+ 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 4\Delta x - 5\Delta y = (2x - 2y + 4)\Delta x + (-2x + 6y - 5)\Delta y + (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y + 3(\Delta y)^2.\end{aligned}$$

Есеп 10. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5x + 6y + 4$ функцияның дербес туындысын табу керек.

Шешуі: y-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 5$ табамыз.

Осы сияқты, x-ті тұрақты деп алып, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 6$ табамыз.

Есеп 11. $z=\arcsin(xy^2)+\dfrac{x}{y^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot y^2+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}}+\frac{1}{y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot 2xy-\frac{2x}{y^3}=\frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}-\frac{2x}{y^3}.$$

Есеп 12. Үш айнымалды $u=e^{x^2+y^2+z^2}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі: $$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}.$$

Эйлер теоремасы. Егер кезкелген λ саны үшін
$$f(\lambda x;\lambda y)\equiv\lambda^n f(x;y)$$
орындалса, онда $f(x;y)$ функциясын n-өлшемді біртекті функция деп айтады.

Егер бүтін рационал функцияның әрбір мүшесі бірдей өлшемді болса, онда ол біртекті болады.

Дифференциалданатын $f(x;y)$ функциясы n-өлшемді біртекті функция болса, онда
$$xf'_x(x;y)+yf'_y(x;y)=nf(x;y)$$
теңдігі орындалады (Эйлер теоремасы).

3.4 Көп айнымалды функцияның толық дифференциалы

$z=f(x,y)$ функциясының толық өсімшесі Δz-ті дербес $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ туындылары арқылы
$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$
түрінде жазуға болады, мұндағы алдыңғы екі қосынды өсімшенің *негізгі бөлігі*, ал кейінгі екі қосынды *қосалқы бөлігі* деп аталады. Δx және Δy шамаларымен салыстырғанда қосалқы бөлігі жоғары ретті шексіз аз шама болғандықтан $\Delta r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ ұмтылғанда $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y\to 0$.

Толық өсімшенің негізгі бөлігі *функцияның толық дифференциалы* деп аталып,
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$
деп белгіленеді. Мұндағы $dx=\Delta x, dy=\Delta y$.

Егер $u = f(x, y, z, ..., t)$ көп айнымалылы функциясы берілсе, онда оның толық дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + ... + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

формуласымен анықталады.

$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ -ң аз мәнінде дифференцианалданатын $z = f(x, y)$ функциясы үшін төмендегі жуықтап есептеу формуласы қолданылады.

$\Delta z \approx dz$, осыдан, $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$

Есеп 13. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. Дербес туындыларын табайық: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \cos y.$

Осыдан $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (2x + y^2)dx + (2xy + \cos y)dy.$$

Есеп 14. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ функциясының толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Осыдан $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Есеп 15. $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2}$ санының жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырайық.

$x + \Delta x = 4{,}03$, осыдан $x = 4,\ \Delta x = 0{,}03;$

$y + \Delta y = 2{,}98$, осыдан $y = 3,\ \Delta y = -0{,}02;$

$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{5},$$

$$\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2} \approx z + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = 5 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}03 + \frac{3}{5} \cdot (-0{,}02) = 5{,}012.$$

3.5 Күрделі функцияны дифференциалдау

Дифференциалданатын $z = F(u, v)$ функциясы берілсін, мұнда $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Z функциясының *дербес туындылары*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

формулаларымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясы берілсін, мұнда $x = x(t), y = y(t)$. Бұл күрделі $z = f(x(t), y(t))$ функциясының t бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

формуласымен есептеледі.

Дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясы берілсін, мұнда $y = y(x)$. Бұл $z = f(x, y(x))$ функциясының x бойынша туындысы

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

формуласымен есептеледі.

Есеп 16. $z = \cos(u^2 + \sqrt{v})$ функциясының, мұндағы $u = e^{xy}, v = x^2 + y^2$. Дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u'_x - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'_x =$

$$= -\left(2uye^{xy} + \frac{x}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot 2u \cdot u'_y - \sin(u^2 + \sqrt{v}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'_y =$$

$$= -\left(2uxe^{xy} + \frac{y}{\sqrt{v}}\right)\sin(u^2 + \sqrt{v}).$$

Есеп 17. $z = x^2 + \sqrt{y}$ функциясы берілген, мұндағы

$x = tgt, \quad y = t^2 + 3t + 5.$ $\frac{dz}{dt}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2t+3}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sin t}{\cos^3 t} + \frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+5}}.$

Есеп 18. $z = x^3 + \sin(xy^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y = \sqrt{x^2+1}$.

$\frac{dz}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2),\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2),\ \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Осыдан $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y^2\cos(xy^2) + \frac{2x^2 y\cos(xy^2)}{\sqrt{x^2+1}}.$

3.6 Айқын емес функциялардың туындысы.

$F(x, y) = 0$ теңдеуі түрінде берілген айқын емес $y = y(x)$ функциясының туындысы

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

формуласымен анықталады, мұндағы $F(x,y)$ функциясы x және y айнымалылары бойынша дифференциалданатын, әрі $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ функция.

$F(x,y,z)=0$ теңдеуі түрінде берілген айқын емес $z = z(x,y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

формулаларымен анықталады, мұндағы $F(x,y,z)$ функциясы x, y және z айнымалылары бойынша дифференциалданатын, әрі $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ функция.

Есеп 19. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6 = 0$ функциясы берілген. $\frac{dy}{dx}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $F(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6,$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y + 4,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 6y + 5,$$

Осыдан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y + 4}{2x + 6y + 5}.$$

Есеп 20. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ функциясы берілген. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ туындыларын табу керек.

Шешуі. $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3xz,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Осыдан

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{y^2 - xz}{xy - z^2}.$$

3.7 Бағыт бойынша туынды. Функция градиенті.

$z = f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесінде $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1}$ векторының *бағыты бойынша туындысы* деп

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \lim_{\left|\overrightarrow{MM_1}\right| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S}$$

шегін айтады, мұндағы $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Егер $f(x,y)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда бағыт бойынша туынды

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы α $-\vec{a}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш.

Үш айнымалылы $u = f(x,y,z)$ функциясының бағыт бойынша туындысы

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары.

$z = f(x,y)$ функциясының $M(x,y)$ нүктесіндегі *градиенті* деп

$$gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{t} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

векторын айтады.

Функция градиенті мен $\vec{a}$ векторы бойынша туындысының арасындағы байланыс

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = n\rho_{\vec{a}}\, gradz$$

формуласымен анықталады.

Үш айнымалылы $u = f(x,y,z)$ функциясының гардиенті

$$gradz = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

векторына тең.

Есеп 21. функциясының $M(1;2)$ нүктесіндегі: а) $grad\ z$, б) $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ векторының бағыты бойынша $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ туындысын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -4$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = 0{,}6 \quad \sin\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = 0{,}8$$

Осыдан $gradz = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 2\cdot 0{,}6 - 4\cdot 0{,}8 = -2.$

Есеп 22. $u = x^3y^2z$ функциясының $M(1,-2,3)$ нүктесінде а) $gradu$, б) $\vec{MN}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек, мұндағы $N(-1,0,2)$.

Шешуі. $\vec{a} = \vec{MN}$ векторы мен бағыттаушы косинустарын табайық.

$$\vec{a} = \{-2; 2; -1\}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 36; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 4;$$

осыдан

$$gradu = \{36; -12; 4\} \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = 36\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 12\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{1}{3} = -30\frac{2}{3}.$$

3.8 Көп айнымалды функциялардың жоғары ретті дербес туындылары мен дифференциалдары.

$z = f(x, y)$ функциясының *екінші ретті дербес туындысы* деп осы функцияның дербес туындысының дербес туындысын айтады және оны былай белгілейді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Осылай үшінші және жоғары ретті дербес туындылары табылады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y).$$

және т.с.с.

$z = f(x, y)$ функциясы және оның $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ дербес туындылары D обылысында анықталған және үзіліссіз болса, онда осы облыста "аралас" туындылары тең болады:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

$z = f(x, y)$ функциясының *екінші ретті дифференциалы* деп осы функцияның дифференциалының дифференциалын айтады:

$$d^2 z = d(dz).$$

Осы сияқты үшінші және жоғары ретті дифференциалдары анықталады:

$$d^3z = d(d^2z),..., d^nz = d(d^{n-1}z).$$

Егер x және y бір-бірінен тәуелсіз айнымалылар, ал $f(x, y)$ функциясының үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда жоғары ретті дифференциалдар

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

....

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

формулаларымен анықталады.

Есеп 23. $z = x^3 + 5x^2y - 4y^3 - x^2 - 6xy + 3y^2$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын және екінші ретті дифференциалын табу керек.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 10xy - 2x - 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12y^2 - 6x + 6y.$$

Енді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 10y - 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -24y + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10x - 6,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= (6x + 10y - 2)dx^2 + 2(10x - 6)dxdy + (-24y + 6)dy^2.$$

3.9 Көп айнымалды функция үшін Тейлор формуласы

(a, b) нүктесінің аймағында жатқан нүктелерде $f(x, y)$ функциясының $(n+1)$-ші ретке дейін үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Онда осы қарастырылып отырған аймақта Тейлор формуласы орындалады:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x,y),$$

мұндағы

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\left[a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)\right],\ (0<\theta<1).$$

Тейлор формуласы дербес жағдайда, яғни $a=b=0$ болғанда Маклорен формуласы деп аталады.

Осы сияқты формулалар үш және одан да көп айнымалылар үшін де орын алады.

Есеп 24 . $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ функциясын $(1;2)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Шешуі

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+R_n(x,y),$$

$$f(1;2)=1^3-2\cdot 2^3+3\cdot 1\cdot 2=-9$$

$f'_x(x,y)=3x^2+3y,$ $\quad f'_x(1;2)=3\cdot 1+3\cdot 2=9,$

$f'_y(x,y)=-6y^2+3x,$ $\quad f'_y(1;2)=-6\cdot 4+3\cdot 1=-21,$

$f''_{xx}(x,y)=6x,$ $\quad f''_{xx}(1;2)=6\cdot 1=6,$

$f''_{xy}(x,y)=3,$ $\quad f''_{xy}(1;2)=3$

$f''_{yy}(x,y)=-12y,$ $\quad f''_{yy}(1;2)=-12\cdot 2=-24,$

$f'''_{xxx}(x,y)=6,$ $\quad f'''_{xxx}(1;2)=6,$

$f'''_{xxy}(x,y)=0,$ $\quad f'''_{xxy}(1;2)=0$

$f'''_{xyy}(x,y)=0,$ $\quad f'''_{xyy}(1;2)=0$

$f'''_{yyy}(x,y)=-12$ $\quad f'''_{yyy}(1;2)=-12.$

Осыдан

$$f(x,y)=x^3-2y^3+3xy=-9+\left[9(x-1)-21(y-2)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[6(x-1)^2+6(x-1)(y-2)-24(y-2)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[6(x-1)^3+0\cdot(x-1)^2(y-2)+0\cdot(x-1)(y-2)^2-12(y-2)^3\right].$$

3.10 Екі айнымалды функцияның экстремумы

Екі айнымалды функцияның экстремумы. *D* облысында анықталған $z = f(x, y)$ функциясы берілсін. Осы облыста жататын $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің маңайындағы барлық $M(x, y)$ нүктелерінде

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y))$$

теңсіздігі орындалса, онда $z = f(x, y)$ функциясы M_0 нүктесінде максимум (минимум) мәнін қабылдайды. "Максимум" және "минимум" мәндері экстремум мәндері деп аталады.

Үш және одан көп айнымалылы функцияларының экстремумдары да осылайша анықталады.

Кез келген дифференциалданатын екі айнымалылы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды. Мұндай нүктелер *стационарлық (тұрақты) нүктелер* деп аталады. Мысалы, дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының стационарлық нүктесі $M_0(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} f_x'(x, y) = 0, \\ f_y'(x, y) = 0 \end{cases}$$

жүйесін шешу арқылы анықталады. Бұл шарт $z = f(x, y)$ функциясының *экстремумының қажетті шарты* делінеді. Стационарлық нүктелердің барлығы бірдей экстремум нүктелері бола бермейді. Сондықтан олардың әрқайсысы экстремум мәндерін қабылдауының жеткілікті шартын қанағаттандыру керек. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының стационар нүктесі болсын.

$$A = f_{xx}''(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}''(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}''(x_0, y_0)$$
$$\Delta = AC - B^2,$$

деп белгілейік. Егер стационарлық $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінде:

а) $\Delta > 0$ және $A > 0$ болса, онда M_0 - минимум нүктесі,

$\Delta > 0$ және $A < 0$ болса, онда M_0 - максимум нүктесі;

б) $\Delta < 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болмайды;

в) $\Delta = 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум болуы да, болмауы да мүмкін.

Есеп 25. $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 5,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 6y + 7$$

болады, осыдан

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі $x = 1,\ y = -1,\ M(1,-1)$ нүктесіндегі екінші ретті дербес туындылары

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

болады. Сонымен

$$\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0,\ A > 0.$$

Яғни $M(1,-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол

$z_{\min} = z(M) = -6$ болады.

Есеп 26. $z = x^3 + y^2 - 3axy$ функциясын экстремумге зерттеу керек $(a > 0)$.

Шешуі.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі: $x_1 = a,\ y_1 = a$ және $x_2 = 0,\ y_2 = 0.$

Екінші ретті дербес туындысын табайық: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3a,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$

$M_1(a,a)$ нүктесінде

$$A = 6a,\ B = -3a,\ C = 6a, \quad \Delta = AC - B^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0,\ A > 0.$$

Яғни $M_1(a,a)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\min} = -a^3$ тең болады. $M_2(0,0)$ нүктесінде

$$A = 0,\ B = -3a,\ C = 0,\ \Delta = AC - B^2 = -9a^2 < 0.$$

Яғни $M_2(0,0)$ нүктесінде экстремум жоқ.

Шартты экстремум. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. $z = f(x,y)$ функциясының *шартты экстремумы* деп осы функцияның, x және y айнымалыларының $\varphi(x,y) = 0$ теңдеуімен байланысты болған жағдайдағы экстремум мәнін айтады. Мұндағы $\varphi(x,y) = 0$ теңдеуі *байланыс теңдеуі* деп аталады.

Шартты экстремумды табу үшін Лагранж функциясы деп аталатын $u(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$ функциясының экстремумын табу жеткілікті, мұндағы λ - анықталмаған тұрақты көбейткіш.

Лагранж функциясының экстремумының бар болуының қажетті шарты:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Осы үш теңдеуден тұратын жүйеден x, y және λ мәндерін табуға болады.

D тұйық облысында $z = f(x, y)$ функцияның ең үлкен M және ең кіші m мәндерін табу үшін:

а) D облысының ішінде жатқан барлық станционарлық нүктелерді тауып, осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек (бұл нүктелерде экстремум мәндерінің болуы не болмауын тексерудің қажеті жоқ);

б) D облысының шекарасында функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек;

в) барлық табылған мәндердің ең кішісін (бұл ең кіші мән) және ең үлкенін (бұл ең үлкен мән) таңдап аламыз.

Есеп. $z = x^2 - y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $2x - y - 6 = 0$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Шешуі. Лагранж функциясын қарастырайық:

$$u = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 6).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \lambda = 0, \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

жүйесінен $\lambda = -4, x = 4, y = 2$ мәндері табылады. Осыдан $M(4, 2)$ нүктесінде $z = x^2 - y^2$ функциясы шартты максимум мәнін қабылдайды және ол $z_{\max} = 12$ болады.

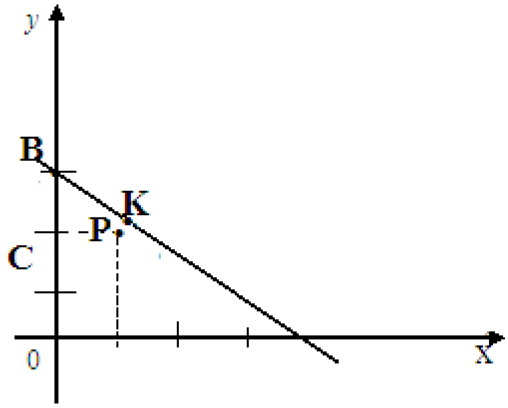
Есеп 27. $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 10$ функциясының $y = 0,\quad x = 0$ және

$3x + 4y = 12$ сызықтарымен шектелген тұйық D облысындағы (аймағындағы) ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. Стационар (тұрақты) M нүктесін табайық.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - y - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеден $x = 1, y = 2, P(1, 2)$ нүктесі D облысының ішінде жатыр (1.1 Сурет). $z(P) = z(1, 2) = 1.$



1.1 Сурет

Енді берілген функцияны D облысының шекарасында зерттейік. Облыс шекарасы *OA, AB* және *OB* кесінділерінен тұрады:

а) *OA* бөлігінде $y = 0, 0 \le x \le 4,$ осыдан $z = 3x^2 - 4x + 10, z_x^{'} = 6x - 4 = 0,$

$$x = \frac{2}{3} \in [0, 4], \ N(\frac{2}{3}, 0), \ z(N) = 8\frac{2}{3};$$

OA кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = z(0, 0) = 10, \ z(A) = z(4, 0) = 42;$

б) *OB* бөлігінде $x = 0, 0 \le y \le 3,$ осыдан

$$z = 2y^2 - 7y + 10, \ z_y^{'} = 4y - 7, \qquad y = \frac{7}{4} \in [0, 3], \ C(0, \frac{7}{4}), \ z(C) = 4\frac{7}{8};$$

OB кесіндісінің шеткі нүктелерінде $z(0) = 10, \ z(B) = z(0, 3) = 7;$

AB бөлігінде $y = \frac{3}{4}(4 - x), \ 0 \le \mathrm{x} \le 4,$

$$z = 3x^2 - \frac{3}{4}x(4 - x) + \frac{9}{8}(4 - x)^2 - 4x - \frac{21}{4}(4 - x) + 10 \quad \text{немесе}$$

$$z = \frac{39}{8}x^2 - \frac{43}{8}x + 7, \ z_x^{'} = \frac{39}{4}x - \frac{43}{4} = 0, \ x = \frac{43}{39} = 1\frac{4}{39} \in [0,4], \ y = 2\frac{9}{52},$$

$$K(1\frac{4}{39}; 2\frac{9}{52}), \ z(K) = 1\frac{23}{312};$$

AB кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі мәндері белгілі.

Табылған $z(P), \ z(N), \ z(K), \ z(C), \ z(0), \ z(A), \ z(B)$ мәндерін салыстыра отырып, z функциясының D облысындағы ең үлкен мәні $M = z(A) = 42,$ ал ең кіші мәні $m = z(P) = 1$ болатындығын анықтаймыз.

Тапсырмалар.

1. Берілген функциялардың анықталу облыстарын табу керек

1.1. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$;

Жауабы: $x^2+y^2\le a^2-$ центрі $O(0,0)$, ал радиусы a болатын шеңберімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

1.2. $z=\arccos\frac{x}{y^2}$;

Жауабы: $y^2=x$ және $y^2=-x$ параболаларының арасында орналасқан, $O(0,0)$ нүктесі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

1.3. $z=2x+5y$;

Жауабы: Бүкіл Oxy жазықтығы.

1.4. $z=\ln(x+y)$;

Жауабы: $y=-x$ түзуінен жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

1.5. $z=\sqrt{y-x^2}$;

Жауабы: $y=x^2$ параболасынан жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

1.6. $z=\ln(xy)$.

Жауабы: $xy>0$ -1 және 3 ширектерінде орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

1.7. $z=x+\frac{3}{y-5}$;

Жауабы: $y=5$ түзуі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

1.8. $z=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{4-y}$;

Жауабы: $y=x^2$ параболасы және $y=4$ түзуімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

1.9. $z=\frac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

Жауабы: $x^2+y^2=1$ шеңберімен шектелген және $O(0,0)$ нүктесі жататын Oxy жазықтығының бөлігі.

1.10. $z=\sqrt{9-x^2-y}+\sqrt{y-x+3}$.

Жауабы: жоғарғы жағынан $y=-x^2+9$ параболасы және төменнен $y=x-3$ түзуімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

1.11. $z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

Жауабы: $x^2 + y^2 < 4 -$ центрі $O(0,0)$, ал радиусы 2 болатын шеңберімен шектелген Oxy жазықтығының бөлігі.

1.12. $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}.$

Жауабы: $x = \pm 1$ және $y = \pm 1$ түзулерімен шектелген квадрат.

1.13. $z = \ln(x^2 + y).$

Жауабы: $y = -x^2$ параболасынан жоғары орналасқан Oxy жазықтығының бөлігі.

1.14. $z = \ln(x^2 + y^2).$

Жауабы: $O(0,0)$ нүктесі тиісті емес Oxy жазықтығының бөлігі.

1.15. $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z.$

Жауабы: $x = \pm 1,$ $y = \pm 1$ және $z = \pm 1$ жазықтықтарымен шектелген куб.

1.16. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$

Жауабы: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 -$ центрі $O(0,0,0)$, ал радиусы a болатын сферамен шектелген $Oxyz$ кеңістігінің бөлігі.

2. Берілген функциялардың деңгейлік сызықтарын табу керек:

2.1. $z = \sin(2x + y).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $y = C - 2x$ түзуі.

2.2. $z = \ln(x^2 + y).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $y = C - x^2$ параболасы.

2.3. $z = arctg(xy).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $xy = C$ гиперболасы.

2.4. $z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}.$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $C(x^2 + y^2) = 2x$ шеңбері.

2.5 $z = f(x^2 + y^2).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $x^2 + y^2 = C^2$ шеңбері.

2.6. $z = f(x^2 - y^2).$

Жауабы: деңгейлік сызығы - $x^2 - y^2 = C^2$ гиперболасы.

Берілген функциялардың деңгейлік беттерін табу керек:

2.7. $u = x + 2y + 3z.$

Жауабы: деңгейлік беті - $x + 2y + 3z = C$ жазықтығы.

2.8. $u = x^2 + y^2 + z^2.$

Жауабы: деңгейлік беті - $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ сферасы.

2.9. $u = x^2 + y^2 - z^2.$

Жауабы: деңгейлік беті - $x^2+y^2-z^2=C$, $C>0$ болса, онда ол бір қуысты параболоид, $C<0$ болса, онда екі қуысты параболоид , ал $C=0$ болса, онда конус.

3. Берілген функциялардың шектерін табу керек.

3.1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$. Жауабы: 0.

3.2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$. Жауабы: 0 .

Нұсқау.Полярлық координаталарға көшу керек.

3.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$. Жауабы: 5 .

3.4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 8}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$ Жауабы: e^8.

3.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\left(1+xy\right)^{\frac{1}{y}}$ Жауабы: e^2.

3.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$. Жауабы:шегі жоқ.

Нұсқау. x пен $y-$тің өзгеруін $y=\alpha x^2$ түзуі бойымен қарап, шектің мәні $\alpha-$ге байланысты әртүлі мәндерге тең болатындығын көрсету керек.

3.7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Жауабы:шегі жоқ.

Нұсқау. x пен $y-$тің өзгеруін $y=\alpha x^2$ түзуі бойымен қарап, шектің мәні $\alpha-$ге байланысты әртүлі мәндерге тең болатындығын көрсету керек.

Берілген функциялардың үзіліс нүктелерін табу керек

3.8. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ Жауабы: $x=0,\ y=0$ үзіліс нүктесі.

3.9. $z=\dfrac{1}{a^2-x^2-y^2}$ Жауабы: үзіліс сызығы - $x^2+y^2=a^2$ шеңбері.

3.10. $z=\dfrac{1}{(2x-y)^2}$ Жауабы: $y=2x$ түзуінің нүктелері (үзіліс сызығы)

3.11. $z=\dfrac{1}{\left(x^2-y^2\right)}$ Жауабы: $y=x$ және $y=-x$ түзулерінің нүктелері (үзіліс сызығы)

3.12. $z=\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ Жауабы: үзіліс сызығы – координаталық өстері.

4. Берілген функциялардың дербес өсімшілерін және толық өсімшесін табу керек:

4.1. $z = 2x^2 + xy + y^2$;

4.2. $z = x^3 - x^2y + y^2$;

4.3. $z = \dfrac{y+4}{x-7}$;

4.4. $z = \dfrac{x+5}{y+8}$;

4.5. $z = \ln\dfrac{y}{x^2}$;

4.6. $z = y\sin x$.

4.7. $z = e^{x+y-4}$

4.8. $z = e^{y-x}$

4.9. $z = x^2 + \sqrt{y}$.

4.10. $z = \sin(x^2 + y) + x$.

Берілген функциялардың дербес туындыларын табу керек:

4.11. $z = x^3 - 2y^5$.

4.12. $z = 7x^3y - 4xy^5$.

4.13. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

4.14. $z = x^4 + 5x^2y + 7x^2y + 7y^2 - 6x - 3y$.

4.15. $z = \dfrac{y+3}{x+7}$;

4.16. $z = \dfrac{x}{y-5}$;

4.17. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$;

4.18. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

4.19. $z = x^2\sin^2 y$;

4.20. $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$;

4.21. $z = x^8y^5 + x^4y^7$;

4.22. $z = x^y$.

4.23. $z = \ln\dfrac{y^3}{x}$;

4.24. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

4.25. $z = \sin(x^2 + y^2)$;

4.26. $z = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

4.27. $z = e^{2x+3y-4}$

4.28. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4}$;

4.29. $z = e^{xy}$;

4.30. $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$;

4.31. $z = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x}{y}$;

4.32. $z = \sqrt{x}e^{x/y}$;

4.33. $z = tg(\dfrac{x}{y})$

4.34. $z = \arcsin(x - 3y)$

4.35. $z = \arccos(2x + y)$

4.36. $z = e^{\sqrt{x+y}}$

4.37. $z = \sin\sqrt{xy}$

4.38. $z = tg(xy^2)$

4.39. $z = \sin(x^2 + y) + x$

4.40. $z = \arccos(2x^2 + y^2)$

4.41. $z = \arcsin(x^2 - 3xy + 2y^2)$

4.42. $u = \ln\left(x + \dfrac{y}{2z}\right)$;

4.43. $u = x^{yz}$;

4.44. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$;

4.45. $u = e^{\frac{xy}{z}}$;

4.46. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.47. Егер $z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ болса, онда $z'_x(2;1)$ және $z'_y(2;1)$ табу керек.

Жауабы: $z'_x(2;1) = \frac{1}{2}$, $z'_y(2;1) = 0$.

4.48. Егер $f(x;y;z) = \ln(xy + z)$ болса, онда $f'_x(1;2;0)$, $f'_y(1;2;0)$, $f'_z(1;2;0)$ табу керек. Жауабы: $f'_x(1;2;0) = 1$, $f'_y(1;2;0) = \frac{1}{2}$, $f'_z(1;2;0) = \frac{1}{2}$..

4.49. $u = \ln\frac{y}{x} + x^2 - y^2$ функциясының $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

4.50. $u = \frac{xy}{x+y}$ функциясының $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

4.51. $u = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

4.52. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. функциясының $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$ теңдеуін қанағаттандыратындығын тексеру керек.

Берілген біртекті функциялар үшін Эйлер теоремасы тексеру керек.

4.53. $f(x;y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$.

4.54. $f(x;y) = \frac{x+y}{x^2 - y^2}$.

4.57. $f(x;y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{2x + 3y}$.

4.58. $f(x;y) = \sin\frac{y}{x}$.

5. Берілген функциялардың толық дифференциалдарын табу керек:

5.1. $z = x^2 + 5xy + 6y^2$;

5.**2.** $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

5.3. $z = \frac{y-4}{x+5}$;

5.4. $z = \ln(xy)$;

5.5. $z = 7x^3y - 4xy^5$;

5.6. $z = \frac{x-1}{y+2}$;

5.7. $z = e^{x^2+y^2}$;

5.8. $z = \arcsin(x^2 - 3xy + 2y^2)$

5.9. $z = \arcsin\frac{x}{y}$;

5.10. $z = arctg\frac{x}{y} + arctg\frac{y}{x}$

5.11. Егер $z = f(x;y) = \frac{x}{y^2}$, $df(1;1)$ табу керек. Жауабы: $df(1;1) = dx - 2dy.$

5.12. $z = \sqrt{3x^2 + 4y^2 + 2x + y}$;

5.13. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$;

5.14. $u = \sqrt{z} \cdot \sin\frac{y}{x}$;

5.15. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot.$

5.16. $u = arctg\frac{xy}{z^2} \cdot.$

5.17. Егер $u = f(x;y;z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $df(3;4;5)$ табу керек.

Жауабы: $df(1;1) = \frac{1}{25}(5dz - 3dx - 4dy).$

5.18. $(1{,}02)^{3{,}01}$ санын жуықтап есептеу керек. Жауабы: 1,06.

5.19. $2{,}03^3 \cdot 3{,}98^2$ санын жуықтап есептеу керек. Жауабы: 132,51.

5.20. $2 \cdot e^{0{,}015} + \cos(1{,}55)$ санын есептеу керек; Жауабы: 0,05.

Ескерту $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ деп алу керек.

5.21. $arctg\frac{1{,}02}{0{,}95}$ санын есептеу керек. Жауабы: 0,82.

5.22. $\sin 32^0 \cos 59^0$ санын есептеу керек. Жауабы: 0,273.
Ескерту $\cos 60^0 = 0.866$ деп алу керек.

5.23. Тік төртбұрыштың бір қабырғасы $a = 10см,$ ал екіншісі $b = 10см.$ Егер a қабырғасын $4мм$ ұзартып, ал b қабырғасын $1мм$ қысқартсақ, тік төртбұрыштың L диагоналы қалай өзгереді. Жуық мәнін есептеп, оны дәл мәнімен салыстыру керек. Жауабы: $dL = 0.062см,$ $\Delta L = 0{,}065см.$

5.24. Конустың биіктігі $H = 30см,$ ал табан радиусы $R = 10см$ тең. Егер H биіктігін $3мм$ ұзартып, ал R радиусы н $1мм$ қысқартсақ, конустың көлемі қалай өзгереді. Жауабы: $\Delta V \approx dV \approx -31.4см^3.$

5.25. Маятниктың тербеліс периоды $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ формуласымен есептеледі, мұндағы l- маятниктің ұзындығы, g- еркін түсу үдеуі. l және g есептеу кезінде $\Delta l = \alpha$ $\Delta g = \beta$ қателіктер кетуіне байланысы T периодының қателігін есептеу керек. Жауабы: $\pi\frac{\alpha g - \beta l}{g\sqrt{gl}}$

6. Берілген функциялардың $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табу керек:

6.1. $z = e^{u-2v}$ функциясы берілген, мұндағы $u = \sin x, v = x^3 - y^2.$

Жауабы: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -4ye^{u-2v}.$

6.2. $z=\sqrt{u^2+v^2}$ функциясы берілген, мұндағы $u=x\cdot\sin y,\quad v=y\cdot\cos x.$

Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{u\sin y-vy\sin x}{\sqrt{u^2+v^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{ux\cos y+v\cos x}{\sqrt{u^2+v^2}}.$

6.3. $z=\ln(u^2+v)$ функциясы берілген, мұндағы $u=y\cdot\arcsin x,\quad v=xe^y.$

Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2uy/\sqrt{1-x^2}+e^y}{u^2+v};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2u\arcsin x+xe^y}{u^2+v}.$

6.4. $z=\sin(uv)$ функциясы берілген, мұндағы $u=2x+3y,\quad v=xy^2.$

Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(2v+uy^2)\cos(uv);\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(3v+2uxy)\cos(uv).$

6.5. $z=arctg(\dfrac{u}{v})$ функциясы берілген, мұндағы $u=x\sin y,\quad v=x\cos y.$

Жауабы: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=1.$

Берілген функциялардың $\dfrac{dz}{dt}$ туындыларын табу керек:

6.6. $z=e^{4x-5y}$ функциясы берілген, мұндағы $x=\sin t,\ y=t^3.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dt}=(4\cos t-15t^2)e^{4x-5y}.$

6.7. $z=x^y$ функциясы берілген, мұндағы $x=arctgt,\ y=t^2+1.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{yx^{y-1}}{1+t^2}+2tx^y\ln x.$

6.8. $z=\arccos\dfrac{x}{y}$ функциясы берілген, мұндағы $x=t^2+1,\ y=t^3+1.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{3xt^2-2yt}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}.$

6.9. $z=\sqrt{x^2+y+5}$ функциясы берілген, мұндағы $x=\ln t,\ y=t^2.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{x+t^2}{t\sqrt{x^2+y+5}}.$

6.10. $z=tg(x^2-y^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y=\sin x.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x-2y\cos x}{\cos^2(x^2-y^2)}.$

6.11. $z=\arcsin(x^2+y^2)$ функциясы берілген, мұндағы $y=x^2+2x+5.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x+4xy+4y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}.$

6.12. $z=e^{x^2+\sqrt{y}}$ функциясы берілген, мұндағы $y=\ln x.$

Жауабы: $\dfrac{dz}{dx}=e^{x^2+\sqrt{y}}\left(2x+\dfrac{1}{2x\sqrt{y}}\right).$

6.13. $z=\sqrt{x^3+y^3}$ функциясы берілген, мұндағы $y=e^x.$

Жауабы: $\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2+3y^2e^x}{2\sqrt{x^3+y^3}}$.

Айқындалмаған $y=y(x)$ функцияларының туындыларын табу керек:

6.14. $x\sin y+y\cos x=0$; Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\sin y}{x\cos y+\cos x}$.

6.15. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

6.16. $x^3+y^3-2xy^2=1$; Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y^2}{4xy-3y^2}$.

6.17. $y^2=2px$; Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$.

6.18. $x^2+y^2-\sin(xy)=0$; Жауабы: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}$.

6.19. $\frac{y}{x}+e^{xy}=0$. Жауабы: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2ye^{xy}}{x+x^3e^{xy}}$.

Айқындалмаған $z=z(x,y)$ функцияларының x және y айнымалылары бойынша дербес туындыларын табу керек:

6.20. $x^2+y^2+z^2+3xy+z=0$;

6.21. $x^2+2y^2+3z^2+x+5yz=0$;.

6.22. $\sqrt{z}\sin xy+x+y=0$;

6.23. $xyz+\ln(x+y+z)=0$;

6.24. $x\sin y+y\sin z+z\sin x=0$;

6.25. $e^z-xyz-x-y=0$.

Берілген функциялардың $M(x,y)$ нүктесіндегі а) градиентін, б) $\vec{a}$ векторының бағыты бойынша туындысын табу керек:

6.26. $z=x^3+y^3-3xy$ $M(2,1)$, $\vec{a}=\{3,4\}$;

Жауабы: $grad\ z=\{9,-3\}$, $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=3$.

6.27. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $M(5,3)$, $\vec{a}=\{12,5\}$;

Жауабы: $grad\ z=\{\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\}$, $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\frac{45}{52}$.

6.28. $z = \ln(x^2 + y^2)$ $\quad M(-3, 4)$, $\quad \vec{a} = \{-1, 2\}$;

Жауабы: $grad\ z = \{-\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{22\sqrt{5}}{125}$.

6.29. $z = \frac{y^2}{x}$ $\quad M(1, 2)$, $\quad \vec{a} = \{-8, 6\}$;

Жауабы: $grad\ z = \{-4, 4\}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 5{,}6$.

6.30. $u = xyz$ $\quad M(1, 2, 3)$, $\quad \vec{a} = \{1, -1, 1\}$;

Жауабы: $grad\ u = \{6, 2, 2\}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

6.31. $u = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad M(1, 1, 1)$, $\quad \vec{a} = \{3, 2, 6\}$.

Жауабы: $grad\ u = \{2, 2, 2\}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 3\frac{1}{7}$.

Берілген функциялардың екінші ретті дербес туындыларын табу керек:

6.32. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 5y^3$; **6.33.** $z = x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4$;

6.34. $z = x^4y^7 + x^5y^8$; **6.35.** $z = \frac{y-2}{x+1}$;

6.36. $z = \sin(x^2 + y^2)$; **6.37.** $z = \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y}$;

6.38. $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; **6.39.** $z = e^{xy}$;

6.40. $z = \ln(2x + 5y)$; **6.41.** $z = \ln\frac{x}{y}$.

Берілген функциялардың екінші ретті дифференциалдарын табу керек:

6.42. $z = x^3 + 5x^2y + 2y^3 + 7xy^2$; **6.43.** $z = x^4y^7$;

6.44. $z = \cos(3x + 4y)$; **6.45.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6.46. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

6.47. Екі рет дифференциалданатын кез келген $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$ функциясының $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

6.48. $u=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ функциясының $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек;

6.49. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ функциясының $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ теңдеуін қанағаттандыратындығын дәлелдеу керек.

7. Тейлор қатарына жіктеңіз.

7.1. $f(x,y)=4x^3-x^2+2xy-y^2+5x+y-8$ функциясын $(1;-1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=-4+13(x-1)+5(y+1)+11(x-1)^2+(x-1)(y+1)-(y+1)^2+4(x-1)^3.$

7.2. $f(x,y)=x^3+3xy-2y^3$ функциясын $(2;1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y)=12+15(x-2)+6(x-1)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+(x-2)^3-2(y-1)^3.$

7.3. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z+4$ функциясын $(1;1;1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1).$

7.4. $f(x,y,z)=e^{x+y}$ функциясын төртінші ретке дейін $(1;-1)$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=1+[(x-1)+(y+1)]+\dfrac{1}{2!}[(x-1)+(y+1)]^2+\dfrac{1}{3!}\left[(x-1)+(y+1)^3\right].$

7.5. $f(x,y,z)=cosx\cdot\cos y$ функциясын бесінші ретке дейін Маклорен формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=1-\dfrac{x^2+y^2}{2!}+\dfrac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}.$

7.6. $f(x,y,z)=e^x\sin y$ функциясын төртінші ретке дейін Маклорен формуласына жіктеу керек.

Жауабы: $f(x,y,z)=y+xy+\dfrac{3x^2y-y^3}{3!}.$

8. Берілген функцияларды экстремумге зерттеу керек:

8.1. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1;$ Жауабы: $z_{\min}=z(-1;1)=0.$

8.2. $z=4x-2y-x^2-y^2;$ Жауабы: $z_{\min}=z(2;-1)=5.$

8.3. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1;$ Жауабы: $z_{\min}=z\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}.$

8.4. $z=2xy-3x^2-2y^2+10;$ Жауабы: $z_{\min}=z(0;0)=10.$

8.5. $z = x^2 - y^2 + 5xy + 6;$ Жауабы: Экстремум жоқ.

8.6. $z = 3xy - x^2 y - xy^2;$ Жауабы: $z_{\min} = z(1;1) = 1.$

8.7. $z = x^2 + y^2$ функциясының байланыс теңдеуі $3x + 4y = 12$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек;

Жауабы: $x = \frac{36}{25},\ y = \frac{48}{25},\ \lambda = -\frac{24}{25}$ болғанда $z_{\min} = \frac{144}{25}.$

8.8. $z = 3x + 4y$ функциясының байланыс теңдеуі $x^2 + y^2 = 25$ берілген жағдайдағы шартты экстремумын табу керек.

Жауабы: $x = -3,\ y = -4,\ \lambda = \frac{1}{2}$ болғанда $z_{\min} = -25;\ x = 3,\ y = -4,\ \lambda = -\frac{1}{2}$ болғанда $z_{\max} = 25.$

9. Берілген $z = f(x, y)$ функциясының берілген сызықтармен шектелген D облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек:

9.1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 4,\quad D: x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0;$

Жауабы: $M = z(-3, 0) = z(0, 3) = 10;\ m = z(-1, -1) = 3.$

9.2. $z = xy - y^2 + 3x + 4y - 2,\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$

Жауабы: $M = z(0{,}5; 0{,}5) = 1{,}5;\ m = z(0, 0) = -2.$

9.3. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 5,\quad D: x = 2, y = 0, y = x + 2;$

Жауабы: $M = z(2, 3) = 14;\ m = z(1, 0) = 4.$

9.4. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 4,\quad D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0;$

Жауабы: $M = z(-3, 2) = 10;\ m = z(-2, 0) = 1.$

4 Қатарлар теориясы

4.1 Сан қатары

Мүшелері оң сан қатарлары. $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ қандай да бір сан тізбегі берілсе, онда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{2.1}$$

шексіз қосындыны *сан қатары* деп атайды.

Мұндағы $u_1, u_2, u_3, ...$ сандары сан қатарларының *мүшелері*, ал u_n саны *жалпы мүшесі* (*немесе n-ші мүшесі)* деп аталады.

Жалпы мүшесі арқылы сан қатарын қысқаша $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ деп жазуға болады.

(2.1)-қатардың алғашқы мүшелерінің қосындыларын қарастырайық.

$$S_1 = u_1,\ \mathrm{S}_2 = u_1 + u_2,\quad \mathrm{S}_3 = u_1 + u_2 + u_3,\quad ...,\quad \mathrm{S_n} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

қатардың *дербес қосындылары* деп аталады.

Егер сан қатарының алғашқы мүшелерінің қосындылар тізбегінің шегі бар болса, яғни

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{2.2}$$

саны бар болса, онда ол қатардың *қосындысы* деп аталады, және қатар *жинақты* делінеді.

Егер (2.2) шегі болмаса, онда берілген сан қатарын *жинақсыз* дейміз, ондай қатардың қосындысы жоқ.

Мысалы,

Сан қатарының негізгі теоремаларын қарастырайық:

а) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары жинақты болса, онда алғашқы m мүшелерін алып тастағанда пайда болған

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + ... \tag{2.3}$$

қатары да жинақты болады. Керісінше алғашқы m мүшелері алынып тасталынған қатар жинақты болса, онда берілген қатарда жинақты болады. (2.3)-қатарды берілген қатардың *m-ші қалдығы* деп атайды;

ә) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$қатары жинақты және қосындысы S-ке тең болса, онда $\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3 + ... + \alpha u_n + ...$ қатары да жинақты және қосындысы $\alpha \cdot S$ -ке тең болады;

б) егер $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ және $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$ қатарлары жинақты және қосындылары сәйкесінше S және δ болса, онда $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + ... + (u_n + v_n) + ...$ қатары да жинақты және қосындысы $(S + \delta)$ -ға тең болады.

Көп жағдайларда қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы арқылы оның жинақты немесе жинақсыз болуын тексеру өте қиын немесе күрделі есептеуді қажет етеді. Сондықтан қатардың жинақтың немесе жинақсыз болуын білу үшін жинақтылық белгілерінқарастырамыз.

Қатар жинақтылығының қажетті белгісі.

Егер қатар жинақты болса, онда $n \to \infty$-да оның жалпы (n-ші) мүшесі нөлге ұмтылады, яғни

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ал егер $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ болса, онда қатар жинақсыз болады.

Қатар жинақтылығының жеткілікті белгілері

а) I салыстыру белгісі.

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (2.4)$$

және

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ... \qquad (2.5)$$

қатарлары берілсін және $u_n \leq v_n \ (n = 1, 2, 3,...)$ болсын.

Егер (2.5)-қатар жинақты болса, онда (2.4)-қатар да жинақты болады.

Егер (2.4)-қатар жинақсыз болса, онда (2.5)-қатар да жинақсыз болады.

ә) II салыстыру белгісі. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ ақырлы шегі бар болса, онда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_n$ және $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_n$ қатарлары екеуі де бірдей жинақты немесе бірдей жинақсыз болады.

б) Даламбер белгісі. Мүшелері оң болатын $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

болса, онда:

1) $\ell > 1$ болғанда, қатар жинақсыз;

2) $\ell < 1$ болғанда, қатар жинақты;

3) $\ell = 1$ болғанда, қатар жинақты да немесе жинақсыз да болуы мүмкін.

в) Коши белгісі. Мүшелері оң болатын $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

болса, онда:

1) $\ell > 1$ болғанда, қатар жинақсыз;

2) $\ell < 1$ болғанда, қатар жинақты;

3) $\ell = 1$ болғанда, қатар жинақты да немесе жинақсыз да болуы мүмкін.

г) Кошидің интегралдық белгісі. Мүшелері оң және өспейтін $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ қатары берілсін (яғни $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ... \geq u_n \geq ...$) және $u_n = f(n),\ n = 1,2,3,...$ болсын. Мұндағы $f(x)$ - өспейтін үзіліссіз функция.

Егер $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақты болады.

Егер $\int_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары да жинақсыз болады.

Есеп 1. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ қатарының жалпы мүшесі берілген. Алғашқы мүшелерін табу керек.

Шешуі. $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{5}$; $u_3 = \dfrac{3}{10}$; $u_4 = \dfrac{4}{17}$; $u_5 = \dfrac{5}{26}$.

Есеп 2. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ қатарының жалпы мүшесі берілген. Алғашқы бес мүшелерін табу керек.

Шешуі. $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{1\cdot 2}{2^2} = \dfrac{1}{2};\ u_3 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3} = \dfrac{3}{4};\ u_4 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^4};\ u_5 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2^5} = \dfrac{15}{4}.$

Есеп 3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dfrac{7}{2^4} + \ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. Алымында 1, 3, 5, ... сандарынан тұратын тізбек арифметикалық прогрессия құрайды, оның n-ші мүшесін $\grave{a}_n = a_1 + d(n-1)$ формуласы бойынша табамыз. Мұнда $a_1 = 1, d = 2,$ сондықтан $a_n = 2n-1.$

Бөліміндегі $2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots$ сандары геометриялық прогрессия құрайды, оның n-ші мүшесі $b_n = 2^n$-ге тең. Осыдан жалпы мүшесі $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Есеп 4. $\dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{4}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{11}\right)^3 + \left(\dfrac{6}{14}\right)^4 + \ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. Әрбір мүшесінің дәрежесі мүшесінің нөмірімен сәйкес келеді. Сондықтан n-ші мүшесінің дәрежесі n-ге тең болады. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{8}, \dfrac{5}{11}, \dfrac{6}{14}$ бөлшектерінің алымы бірінші мүшесі 3-ке, айырмасы 1-ге тең арифметикалық прогрессияны құрайды. Онда n-ші мүшесі $n+2$-ке тең болады, ал бөлімі бірінші мүшесі 5-ке, айырмасы 3-ке тең арифметикалық прогрессияны құрайды, осыдан n-ші мүшесі $3n+2$-ке тең болады. Сонымен қатардың жалпы мүшесі

$$u_n = \left(\frac{n+2}{3n+2}\right)^n.$$

Есеп 5. $1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$ қатарының жалпы мүшесін табу керек.

Шешуі. $u_1 = 1;\ u_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2};\ u_3 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\ u_4 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\ u_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n!} = \dfrac{1}{n!}.$

болады.

Есеп 6. Мүшелері геометриялық прогрессия болатын $b+bq+bq^2+...+bq^{n-1}+...$ сан қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Мектеп бағдарламасынан белгілі: $S_n=\dfrac{b(1-q^n)}{1-q}$. Егер $|q|<1$ болса, онда қосынды $S=\dfrac{b}{1-q}$. Олай болса, қатар жинақты.

Ал егер $|q|>1$ болса, онда берілген қатар жинақсыз, себебі: $bq^{n-1}\to\infty$ сондықтан $S_n\to\infty$.

Егер $q=1$ болса, онда қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы $S_n=\underbrace{b+b+...+b}_{n}=n\cdot b$. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, яғни қатар жинақсыз.

Егер $q=-1$ болса, онда қатарды $b-b+b-b+...$ түрінде жазуға болады. Яғни оның алғашқы n мүшесінің қосындысы

$$S_n=\begin{cases} b, \text{ егер } n-\text{так} \\ 0, \text{ егер } n-\text{жуп} \end{cases}.$$

Бұл жағдайда қатардың қосындысы анықталмаған, яғни қатар жинақсыз.

Сонымен мынадай қорытынды жасауға болады:

Егер $|q|<1$ болса, онда қатар жинақты, ал егер $|q|\geq 1$ болса, онда қатар жинақсыз болады. ▲

Есеп 7. $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}+...+\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}+...$ сан қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін $u_n=\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$ екі бөлшектің жарты айырымы ретінде көрсетуге болады. $\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$, яғни $\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)$; $\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)$; $\dfrac{1}{48}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}\right)$,... олай болса,

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4}\right)+...+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$ деп жазуға болады. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\dfrac{1}{4}$, яғни қатар жинақты.

Есеп 8. $\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{10}+...+\dfrac{5}{8}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатар шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған. Олай болса, қатар жинақты. Оның қосындысын табайық, мұнда

$$b_1 = \frac{5}{8}; \quad q = \frac{2}{5}; \quad S = \frac{b}{1-q} = \frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{25}{24}.$$

Есеп 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 8^n}{40^n}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесін $U_n = \frac{5^n + 8^n}{40^n} = \frac{5^n}{40^n} + \frac{8^n}{40^n} = \frac{1}{8^n} + \frac{1}{5^n}$ түрінде жазсақ, онда қатарды әрқайсысы геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 8^n}{40^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ екі қатардың қосындысы түрінде жазуға болады. Бұл екі қатар да жинақты болады және олардың қосындысы

$$S = \frac{b}{1+q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4};$$

олай болса, $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 8^n}{40^n} \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{11}{28}.$$

Есеп 10. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$

Осыдан қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалмағандықтан, қатар жинақсыз болады.

Есеп 11. $0{,}4 + 0{,}31 + 0{,}301 + \ldots + \left[0{,}3 + (0{,}1)^n\right] + \ldots$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} [0{,}3 + (0{,}1)^n] = 0{,}3 \neq 0,$ онда қатар жинақсыз болады.

Есеп 12. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0,$ яғни қажетті белгісі орындалады. Енді $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ -шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелерінен құралған қатарды қарастырайық. Бұл қатар жинақты болады.

$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}, ..., \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ теңсіздіктері орындалғандықтан, берілген қатар да жинақты болады;

Есеп 13. Жалпы мүшесі $u_n = \frac{1}{3 \cdot 4^n + 5}$ тең болатын қатардың жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Берілген қатарды жалпы мүшесі $v_n = \frac{1}{4^n}$ болатын жинақты қатармен салыстырайық.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3 \cdot 4^n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{5}{4^n}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Яғни II салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақты болады;

Есеп 14. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{n}{2^n} + ...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$; $u_n = \frac{n}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$; Даламбер белгісі бойынша:

$\frac{u_{n+1}}{n_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{n+1}{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, яғни қатар жинақты.

Есеп 15 . $5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + ... + \frac{5^ї}{ї\,!} + ...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} = 0$, $u_n = \frac{5^n}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{5^n}{(n+1)! \cdot 5^n} = \frac{5 \cdot n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{5}{n+1}; \ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1,$$

яғни қатар жинақты болады (Даламбер белгісі бойынша).

Есеп 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n} = 0$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1,$$

қатар жинақты (Даламбер белгісі бойынша).

Есеп 17 . $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0,\;\; \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$ қатар жинақты (Коши белгісі бойынша).

Есеп 18 . $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+...+\frac{n^2}{3^n}+...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^2}=0;\;\; \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\frac{1}{3}<1$ мұндағы $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$ яғни қатар жинақты (Коши белгісі бойынша).

Есеп 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n=0;\;\; \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n+4}=\frac{2}{5}<1,$ яғни қатар жинақты (Коши белгісі бойынша).

Есеп 20. $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$ Дирихле қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}0, & егер\;\; p>0\\ 1, & егер\;\; p=0\\ \infty, & егер\;\; p<0\end{cases}$

олай болса, $p>0$ болғанда қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалады.

Енді жеткілікті белгісін қарастырайық. Даламбер белгісін қолданайық:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)^p}:\frac{1}{n^p}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p;\;\; \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

осыдан Даламбер белгісінің көмегімен қатардың жинақтылығын зерттеу мүмкін еместігін көруге болады. Сол сияқты Коши белгісінің көмегімен тексерсек:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=1$$

болады, яғни бұл жағдайда да қатардың жинақтылығы туралы ешнәрсе айтуға болмайды. Енді Кошидің интегралдық белгісін қолданайық. Ол үшін $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ функциясын қарастырамыз. Себебі $f(n)=\dfrac{1}{n^p}$,

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^N=\dfrac{1}{1-p}\left(N^{1-p}-1\right), \ \text{егер } \ p\neq 1, \\ \ln x\big|_1^N=\ln N, \qquad\qquad\qquad \text{егер } \ p=1. \end{cases}$$

Осыдан, егер $p\neq 1$ болса, онда $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, \ \text{åãåð } p>1, \\ \infty, \quad \text{åãåð } p<1, \end{cases}$ ал егер $p=1$ болса, онда $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\ln N=\infty.$ Сонымен мынадай қорытындыға келуге болады, егер $p>1$ болса, онда $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ қатары жинақты, ал егер $p\le 1$ болса, онда ол жинақсыз болады.

$p=1$ болғанда , яғни $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{ï}+\ldots$ жинақсыз қатары *гармоникалық қатар* деп аталады.

Есеп 21. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$ Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалғанымен, берілген қатар жинақсыз болады. Себебі

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \ \ рет}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n=\sqrt{n},$$

яғни $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty.$

Осыдан қатардың жинақтылығының қажетті белгісі орындалғанымен, оның жинақтылығы немесе жинақсыздығы белгісіз болатындығын байқаймыз. Сондықтан қатардың жинақтылығын зерттеу үшін жеткілікті белгісін қарастыруымыз керек. Дәреже $p=\dfrac{1}{2}\prec 1$ болғандықтан (286 –мысалды қараңыз) қатар жинақсыз.

Есеп 22. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^4+5}{\left(n^2-1\right)\left(n^3+2\right)}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесінің алымының дәрежесі төртке, ал бөлімінің дәрежесі беске тең. Алымы мен бөлімінің дәрежелерінің айырмасы бірге тең. Сондықтан, берілген қатарға екінші салыстыру белгісін қолданып, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатарымен салыстырамыз.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+5}{\left(n^2-1\right)\left(n^3+2\right)} : \frac{1}{n}\right) = 1$$

болғандықтан, берілген қатар да жинақсыз болады.

Есеп 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3+1}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесінің алымының дәрежесі бірге, бөлімінің дәрежесі үшке тең, олай болса айырмасы екіге тең болады. Сондықтан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p=2$$

жинақты қатарымен салыстыра отырып, берілген қатардың жинақты екендігін көреміз. ▲

Есеп 24. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. $u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \to 0,\ n\to\infty$ әрі $u_1 > u_2 > u_3 \ldots$ орындалатындықтан $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ функциясын аламыз.

$$\int_1^N \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int_1^N \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^N = \ln\ln(N+1)-\ln\ln 2\ \ N\to\infty,$$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \infty$, осыдан қатар жинақсыз (Кошидің интегралдық белгісі бойынша).

4.2 Ауыспалы таңбалы қатар. Лейбниц белгісі.

Қатар тұрған мүшелерінің таңбалары әртүрлі болатын қатарларды *ауыспалы таңбалы қатар* дейміз.

Ондай қатарларды

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot u_n+\ldots$$

деп жазамыз, мұндағы $u_n \ge 0,\ n=1,2,\ldots$. Осындай ауыспалы таңбалы қатарлардың жинақтылығы Лейбниц белгісі арқылы анықталады:

Л е й б н и ц б е л г і с і. Егер ауыспалы таңбалы

$u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$, яғни қатар мүшелерінің абсолюттік мәндері кемімелі және

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

болса, онда қатар жинақты (әрі оның қосындысы бірінші мүшесінен кем болады, яғни $S < u_1$).

Қатардың қосындысын $S = S_n + R_n$ түрінде жазуға болады. Мұндағы $R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + ...)$ қатардың *n-ші қалдығы* деп аталады.

Осы қалдықтың да таңбалары ауыспалы қатар болғандықтан, Лейбниц белгісін қолдануға болады, олай болса $|R_n| < u_{n+1}$. Осыдан жуықтап есептеу кезінде $S \approx S_n$, ал R_n - жіберілген қатесі болып табылады.

Таңбалары айнымалы

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

қатары және осы қатардың мүшелерінің абсолют мәні бойынша алынған

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

қатары берілсін.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ -қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -қатары да жинақты болады. Бұл жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - қатары *абсолютті жинақты* дейді.

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ -қатары жинақты, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ -қатары жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - қатары *шартты жинақты* деп аталады.

Есеп 25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ қатарын $\alpha = 0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі. $|S - S_n| = |R_n| < u_{n+1}$ осы қатардың бірнеше мүшелерін есептейік:

$$u_1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333; \qquad u_2 = \frac{1}{8} \approx 0{,}055; \qquad u_3 = \frac{1}{81} \approx 0{,}012;$$

$$u_4 = \frac{1}{324} \approx 0{,}003; \qquad u_5 = \frac{1}{1215} \approx 0{,}001; \qquad u_6 = \frac{1}{4374} < 0{,}001.$$

Осыдан $S \approx S_5 = 0{,}333 - 0{,}055 + 0{,}012 - 0{,}001 = 0{,}288.$

Есеп 26. $\sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + ... + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + ...$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек, мұнда α кез келген сан.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған қатарды қарастырамыз:

$$|\sin\alpha| + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + ... + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + ...$$

қатары жинақты, себебі I салыстыру белгісі бойынша

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

ал

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

қатары жинақты (286-мысалды қараңыз, $p = 2$). Осыдан берілген қатар абсолют жинақты.

Есеп 27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+7}}$ қатарының абсолют немесе шартты жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі. Мүшелерінің абсолютті мәні бойынша құрылған $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+7}}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар жинақты, себебі екінші салыстыру белгісі бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $(p = 3/2)$ қатарымен салыстырайық, онда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+7}} : \frac{1}{\sqrt{n^3}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+7}} = 1 \ne 0.$$

Олай болса, берілген қатар абсолют жинақты болып табылады.

Есеп 28 . $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + ...$ қатарының абсолютті немесе шартты жинақтығын зерттеу керек.

Шешуі. Лейбниц белгісін қолданайық:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > ... ,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Олай болса, қатар жинақты.

Енді мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар гармоникалық қатар, ал ол жинақсыз болғандықтан берілген қатар шартты жинақты болады.

4.3 Функциялық қатарлар

Функциялық қатарлар. Мүшелері нақты х айнымалысының функциясы болатын

$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$

қатарын *функциялық қатар* дейді.

$u_1(x), u_2(x),..., u_n(x),...$ функциялары анықталған және $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары жинақты болатын x айнымалының мәндер жиыны функциялық қатардың *жинақталу облысы* делінеді. Функциялық қатардың жинақталу облысы Ox осінің қандай да бір аралығы болады.

Алғашқы n мүшелерінің қосындысы $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ болса, онда $S(x)=S_n(x)+R_n(x).$ Мұндағы $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ берілген қатардың мүшелерінің *қалдығы* деп аталады.

Дәрежелік қатарлар. $a_0+a_1(x-a)+a^2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$ түрінде берілген функциялық қатар *дәрежелік қатар* деп аталады. Мұндағы $a, a_0, a_1, a_2,..., a_n,...$ - нақты сандар.

А б е л ь т е о р е м а с ы. 1. Егер дәрежелік қатар $x=x_0$ болғанда жинақты болса, онда $|x|<|x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін де қатар жинақты болады.

2. Егер дәрежелік қатар $x=x_1$ болғанда жинақсыз болса, онда $|x|>|x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір х үшін де қатар жинақсыз болады.

Абель теоремасынан мынадай тұжырым жасауға болады: Кез келген дәрежелік қатардың жинақты облысы ретінде $a-R<x<a+R$ интервалы алынады. Мұндағы R-*жинақты радиусы*, ал $(a-R,\ a+R)$ *жинақты интервалы* деп аталады.

$x=a\pm R$ нүктелерінде қатардың жинақтылығын тексеру үшін дәрежелік қатарға $x=a\pm R$ мәндерін қойғанда пайда болатын сандық қатардың тексеру жеткілікті.

Егер $R=0$ болса, онда дәрежелік қатар тек $x=a$ нүктесінде жинақты болады.

Егер $R=\infty$ болса, онда дәрежелік қатар х-тің кез келген мәнінде жинақты болады.

Дәрежелік қатардың жинақты радиусы

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ немесе } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

формулаларымен есептеледі.

Жинақты интервалында дәрежелік қатарды кез келген рет мүшелеп дифференциалдауға және интегралдауға болады.

Есеп 29. $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+...+\frac{1}{n^x}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $x>1$ болса, онда қатар жинақты, ал $x\le 1$ болса,онда қатар жинақсыз болады (Дирихле қатарын қараңыз).

Есеп 30. $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^4}+\frac{1}{2+x^6}+...+\frac{1}{n+x^{2n}}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+x^{2n}}=0$ қажетті белгісі орындалады. $|x|\le 1$ болсын. Жалпы мүшесі $v_n=\frac{1}{n}$ болатын гармоникалық (жинақсыз) қатарын қарастырсақ, онда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x^{2n}}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x^{2n}}=1.$$

Олай болса, екінші салыстырмалы белгі бойынша берілген қатар жинақсыз.

Егер $|x|>1$ болса, енді берілген қатардың мүшелері шексіз кемімелі геометриялық прогрессиясының

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+...+\frac{1}{x^{2n}}+...$$

мүшелерінен кіші болады, яғни берілген қатар жинақты. Сонымен қатар, $|x|>1$ болғанда жинақты, ал $|x|\le 1$ болса, жинақсыз болады.

Есеп 31. $3x+\frac{3^2}{\sqrt{3}}x^2+\frac{3^3}{\sqrt{3}}+x^3+\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{3^n}{\sqrt{n}};a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}};\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{\sqrt{n}}:\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}}=\frac{1}{3};$

яғни $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ жинақты облысы болады. Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=\frac{1}{3}$ болса, онда $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатар жинақсыз (Дирхле қатары).

$x=-\frac{1}{3}$ болса, онда $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ қатар жинақты, себебі

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \text{ және } 1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...$$

Лейбниц белгісі орындалады.

Есеп 32. $\frac{1}{1\cdot 2}x+\frac{1}{2\cdot 3}x^2+...+\frac{1}{n(n+1)}x^n+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі.
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)};\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n(n+1)} : \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = 1;$$
жинақты облысы $(-1;1)$ болады. Енді интервалдың шекараларының нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=1$ болсын. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ қатарын тексерейік. Қажетті белгісі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0,$ ал жеткілікті белгісі бойынша
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^\infty\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_1^\infty\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty}\ln\frac{N}{N+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2,$$
олай болса, қатар жинақты.

Енді $x=-1$ мәнінде қатардың жинақтылығын зерттейік:
$$-\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n(n+1)} + \ldots .$$
Бұл қатар жинақты, себебі мүшелерінің абсолют мәндері бойынша алынған қатар жинақты. Олай болса, жауабы: $-1 \le x \le 1.$

Есеп 33. $1 + x + (2x)^2 + \ldots + (nx)^n + \ldots$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n = n^n;\ R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$ олай болса, қатар тек $x=0$ мәнінде ғана жинақты.

Есеп 34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n = \frac{1}{n!};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!};\ R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty;$ олай болса, қатар x-тің кез келген мәнінде жинақты, яғни $-\infty < x < +\infty.$

Есеп 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^2\cdot 5^n}$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n = \frac{2^n}{n^2\cdot 5^n}; R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2\cdot 5^n}}} = \frac{5}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = \frac{5}{2};$ жинақты облысы $\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ болады. Енді интервалды шекараларының мәндерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x=\frac{5}{2}$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатар жинақты (Дирихле қатары, $p=2$).

$x=-\frac{5}{2}$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ қатары абсолют жинақты болады, себебі мүшелерінің абсолют мәндері бойынша алынған қатар жинақты. Олай болса, жауабы: $-\frac{5}{2}\le x\le\frac{5}{2}$.

Есеп 36. $1+\frac{x}{7}+\frac{x^2}{7^2}+...+\frac{x^n}{7^n}+...$ қатарының жинақты облысын анықтау керек.

Шешуі. $a_n=\frac{1}{7^n}; R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}=7;$ жинақты облысы $(-7;7)$ болады. $x=7$ болғанда $1+1+1+1+...$ қатар, ал $x=-7$ болғанда $-1+1-1+...$ қатар жинақсыз болады.

Сондықтан жауабы $-7<x<7$.

Есеп 37. $\frac{x-5}{1\cdot 8}+\frac{(x-5)^2}{2\cdot 8^2}+...+\frac{(x-5)^n}{n\cdot 8^n}+...$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{1}{n\cdot 8^n}; R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=8;$ олай болса, $-8<x-5<8$ немесе $3<x<13;$ $x=13$ болғанда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ қатары жинақсыз болады.

$x=3$ болғанда $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$ қатары жинақты болады. Себебі Лейбниц белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{0}=0,\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>...$.

Олай болса, $3\le x<13$.

Есеп 38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{3n}}{(n+1)\cdot 8^n}.$ қатарының жинақты облысын табу керек.

Шешуі. $a_n=\frac{n}{(n+1)\cdot 8^n};$ $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3n]{a^n}}=2;$ олай болса, $-2<x<2;$ $x=2$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ қатары жинақсыз, себебі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ne 0;$ $x=-2$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n}{n+1}$ қатары да жинақсыз.

Сондықтан, жауабы: $-2<x<2$.

Есеп 39. $\frac{1}{3}+\frac{2x}{3^2}+\frac{3x^2}{3^3}+...+\frac{nx^{n-1}}{3^n}+...;\ |x|<3$ қатарының қосындысын $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+...+\frac{x^n}{3^n}+...$ қатарының мүшелерін дифференциалдау арқылы табу керек.

Шешуі. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын $\left(S=\frac{a}{1-q}\right)$ қолдансақ, онда $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+...+\frac{x^n}{3^n}+...=\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{3}{3-x}.$

Енді дифференциалдасақ, онда $\frac{1}{3}+\frac{2x}{3^2}+\frac{3x^2}{3^3}+...+\frac{nx^{n-1}}{3^n}+...=\frac{3}{(3-x)^2}$ болады.

Есеп 40. $x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 2^3}+...+\frac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+...\ \ (|x|<2)$ қатарының қосындысын табу керек.

Шешуі. Берілген қатарды дифференциалдағанда пайда болған қатар шексіз геометриялық прогрессия болғандықтан, $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+...+\frac{x^n}{2^n}+...=$

$=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2}{2-x}$ болады. Мұндағы $a=1,\ q=\frac{x}{2}.$ Енді О-ден х аралығында интегралдасақ, онда

$$x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}+...+\frac{x^{n+1}}{n\cdot 2^n}+...=2\int_0^x\frac{dx}{2-x}=2\ln\left|\frac{2}{2-x}\right|.$$

4.4 Мүшелері комплекс сандар болатын қатарлар

Жалпы мүшесі $c_n=a_n+i\cdot b_n,\qquad (i^2=-1)$ болатын

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_n=\ \sum_{i=1}^{\infty}a_n+i\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_n$$

қатар мүшелері нақты сандар болатын $\sum_{i=1}^{\infty}a_n$ және $\sum_{i=1}^{\infty}b_n$ қатарлар бір мезгілде жинақты болғанда ғана жинақты болады.

Егер мүшелері модулімен алынған

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_n|=\ \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

қатар жинақты болса, онда берілген қатарды абсолютті жинақты қатар деп айтады.

Егер $z=x+iy$ комплекс айнымалды болса, онда

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+...$$

$(c_n=a_n+ib_n,\quad z_0=x_0+iy_0)$ дәрежелік қатар үшін центрі $z=z_0$ нүктесі болатын $|z-z_0|<R$ дөңгелегі (жинақталу дөңгелегі) табылып, оның ішінде қатар абсолютті жинақты, ал сыртында жинақсыз болады.

Жинақталу дөңгелегін табу үшін мүшелері модулімен алынған қатарға Даламбер немесе Коши белгісін қолдану жеткілікті.

Тапсырмалар.

10. Қатардың алғашқы бес мүшесін жазу керек.

10.1. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$; Жауабы: $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\ldots$.

10.2. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; Жауабы: $3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}+\frac{243}{120}+\ldots$.

10.3. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^2}$; Жауабы: $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\frac{\ln 6}{36}+\ldots$.

10.4. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; Жауабы: $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{11!}+\ldots$.

10.5. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{n+10^n}$; Жауабы: $\frac{1}{11}+\frac{2}{102}+\frac{3}{1003}+\frac{4}{10004}+\frac{5}{100005}+\ldots$.

10.6. $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; Жауабы: $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{27}{64}+\frac{256}{625}+\frac{3125}{776}+\ldots$.

10.7. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; Жауабы: $1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{5^\rho}+\ldots$.

10.8. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+1}$. Жауабы: $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\frac{13}{26}+\ldots$.

Қатардың жалпы мүшесін жазу керек.

10.9. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{4}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\ldots$; Жауабы: $\frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

10.10. $1-1+1-1+\ldots$; Жауабы: $(-1)^{n+1}$.

10.11. $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots$; Жауабы: $\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

10.12. $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\frac{5}{14}+\ldots$; Жауабы: $\frac{n+1}{3n+2}$.

10.13. $\frac{2}{9}+\frac{4}{17}+\frac{8}{25}+\frac{16}{33}+\ldots$; Жауабы: $\frac{2^n}{8n+1}$.

10.14. $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{38}+\ldots$; Жауабы: $\frac{1}{10n-2}$.

10.15. $\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\frac{10}{5^4}+\ldots$; Жауабы: $\frac{3n-2}{5^n}$.

10.16. $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}+\frac{5}{12}+\frac{7}{20}+\ldots$. Жауабы: $\frac{2n-1}{n(n+1)}$.

11. Берілген қатарлардың жинақтылығын зерттеу керек:

11.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+8)}$; Жауабы: Жинақты.

11.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$; Жауабы: Жинақсыз.

11.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1{,}01)^n$; Жауабы: Жинақсыз.

11.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$; Жауабы: Жинақты.

11.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; Жауабы: Жинақты.

11.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{4^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; Жауабы: Жинақты.

11.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{4^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; Жауабы: Жинақты.

11.13. $\frac{10}{7}+\frac{100}{11}+\frac{1000}{15}+\ldots+\frac{10^n}{4n+3}+\ldots$; Жауабы: Жинақсыз.

11.14. $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{3n+1}+\ldots$; Жауабы: Жинақсыз.

11.15. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$; Жауабы: Жинақсыз.

11.16. $0{,}8+0{,}71+0{,}701+\ldots+[0{,}7+(0{,}1)^n]+\ldots$. Жауабы: Жинақсыз.

11.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n+4}$; Жауабы: Жинақты.

11.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n}{4^n+5}$; Жауабы: Жинақты.

11.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+8^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{6^n+8^n}$; Жауабы: Жинақты.

11.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\cos^2 n}$; Жауабы: Жинақты.

11.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-\sin^2 n}$; Жауабы: Жинақты.

11.23. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.24. $\frac{1}{2!}+\frac{\sqrt{1}}{3!}+\frac{\sqrt{3}}{4!}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(n+1)!}$; Жауабы: Жинақты.

11.25. $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.26. $\frac{1!}{2}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{2^3}+\ldots+\frac{n!}{2^n}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.27. $\frac{2}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.28. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots+\frac{2n-1}{n!}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.29. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^3}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^n}{(2n)!}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.30. $\frac{1}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{27}{3^3}+\ldots+\frac{n^3}{3^n}+\ldots$; Жауабы: Жинақты.

11.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$; Жауабы: Жинақсыз.

11.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; Жауабы: Жинақты.

11.33. $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\,\frac{1}{n}$; Жауабы:Жинақсыз.

11.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$; Жауабы:Жинақты.

11.35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$; Жауабы: Жинақты.

11.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; Жауабы: Жинақты.

11.37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; Жауабы: Жинақты.

11.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$; Жауабы: Жинақсыз.

11.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3+1}$; Жауабы: Жинақты.

11.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)}$; Жауабы: Жинақсыз.

11.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$ қатары кезкелген q мәні мен $p>1$ болғанда және $q>1$, $p=1$ болғанда жинақты, ал кезкелген q мәні мен $p<1$ болғанда және $q\le 1$, $p=1$ болғанда жинақсыз болатындығын дәлелдеу керек.

Ескерту. Кошидің интегралдық белгісін пайдаланған жөн

12. Ауыспалы таңбалы қатардың жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

12.1. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+...;$ Жауабы: Шартты жинақты.

12.2. $1-1+1-...+(-1)^{n+1}+...;$ Жауабы:Жинақсыз.

12.3. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+...;$ Жауабы:Шартты жинақты.

12.4. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}+...;$ Жауабы:Абсолют жинақты.

12.5. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}+...;$ Жауабы: Абсолют жинақты.

12.6. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+...;$ Жауабы:Шартты жинақты.

12.7. $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{19}-...+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n^2+1}+...;$ Жауабы:Жинақсыз.

12.8. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-...+(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}+...;$ Жауабы: Шартты жинақты.

12.9. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n\cdot 5^{n+1}}$; Жауабы:Абсолют жинақты.

12.10. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+8n+4}$; Жауабы:Шартты жинақты.

12.11. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^5+4}$; Жауабы: Абсолют жинақты.

12.12. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{n^2\sqrt{n}}$. Жауабы: Абсолют жинақты.

Берілген қатарларды $\alpha=0{,}001$ дәлдікпен есептеу керек.

12.13. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$; Жауабы: 0,632.

12.14. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$; Жауабы: 0,841.

12.15. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$; Жауабы: 0,459.

12.15. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\cdot 2^n}$. Жауабы: 0,645.

13. Функциялық қатарлардың жинақты облысын табу керек.

13.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$; Жауабы: $x>1$ абс.жинақты, $x\le 1$ жинақсыз.

13.2. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{x}{4^n}$; Жауабы: $-\infty<x<\infty$.

13.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$; Жауабы: $x\neq 0$.

13.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(x^2+1\right)^n}$; Жауабы: $-\infty<x<+\infty$.

13.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$; Жауабы: $x>1,\quad x\le -1$.

13.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$; Жауабы: $x<-1,\quad x>1$.

13.7. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\frac{x}{3^n}$; Жауабы: $-\infty<x<+\infty$.

13.8. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\left(\frac{x}{5^n}\right)$. Жауабы: (-5; 5).

Дәрежелік қатардың жинақты облысын табу керек.

13.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$; Жауабы: (-3; 3).

13.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$; Жауабы: $[-4;4]$.

13.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 5^n}$; Жауабы: $[-5;5]$.

13.12. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n$; Жауабы: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

13.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$; Жауабы: $(-\infty; \infty)$.

13.14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$; Жауабы: $(-2;2]$.

13.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{7}\right)^n$; Жауабы: $(-7;7)$.

13.16. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$; Жауабы: $x = 0$.

13.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{n^n}$; Жауабы: $(-e; e)$.

13.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$; Жауабы: $(-3;3)$.

13.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{3^n}$; Жауабы: $(-\infty; \infty)$.

13.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{4^n (n+1)}$; Жауабы: $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

13.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^n}$; Жауабы: $(-\infty; +\infty)$.

13.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{3^n}$; Жауабы: $x = 0$.

13.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{2^n - 1}$; Жауабы: $[3; 5)$.

13.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n}$; Жауабы: $(-3;7)$.

13.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2 \cdot 5^n}$; Жауабы: $[-6; 4]$.

13.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{4^n}$; Жауабы: $(-3{,}5; 0{,}5)$.

13.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 \cdot 2^n}$; Жауабы: $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

13.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n \cdot 9^n}$; Жауабы: $[2; 8)$.

13.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n} \cdot 4^n}$; Жауабы: $[-2; 2)$.

13.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{3n}}{27^n}$; Жауабы: $(-5;1)$.

13.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; Жауабы: $(-\infty;\infty)$.

13.32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}-1}{(2n-1)!}$. Жауабы: $(-\infty;+\infty)$.

14.Қатардың жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

14.1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$ Жауабы: жинақсыз.

14.2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$ Жауабы: абсолютті жинақты.

14.3. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+(2n-i))^2}$ Жауабы: абсолютті жинақты.

14.4. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ Жауабы: шартты жинақты.