БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (АЗЕРБАЙДЖАН)
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ (МОЛДОВА)
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ЯНКИ КУПАЛЫ (БЕЛАРУСЬ)
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л.М.ГУМИЛЕВА (КАЗАХСТАН)
ИНСТИТУТ ПСИХОТЕРАПИИ И ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ (ГЕРМАНИЯ)
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ (КАЗАХСТАН)
КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОССИЯ)
КИЕВСКИЙ СЛАВИСТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (УКРАИНА)
МИНСКИЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ (БЕЛАРУСЬ)
НЕВИННОМЫССКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ, УПРАВЛЕНИЯ И ПРАВА (РОССИЯ)
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ (РОССИЯ)
УНИВЕРСИТЕТ ЮЖНОЙ КАРОЛИНЫ (США)
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Н. КАРАЗИНА (УКРАИНА)

МОЛОДЕЖЬ И НАУКА:
РЕАЛЬНОСТЬ И БУДУЩЕЕ

Материалы IV Международной
научно-практической
конференции, 2011 г.

ТОМ IV

ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ НАУКИ

АЛМАТЫ • АСТАНА • БАКУ • ГРОДНО • КИЕВ • КИШИНЕВ • КОЛАМБИЯ
ЛЮДЕНШАЙД • МИНСК • НЕВИННОМЫССК • ХАРЬКОВ • ЭЛИСТА

2011

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Байтуленов Ж. Б.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: janibekbb@mail.ru

Метод фиктивных областей в настоящее время широко используется при математическом моделировании прикладных задач. Достаточно широкий обзор работ, посвященных МФО представлен в работе[1]. Для данных МФО неулучшаемая оценка скорости сходимости в классе L_2 имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$. В данной работе обосновывается модификация МФО для модели Буссинеска с более высоким порядком оценки скорости сходимости: показываются существования и сходимость обобщенного и единственного сильного решений в трехмерной ограниченной области.

Итак, рассмотрим модель Буссинеска движения неоднородной жидкости в области $\Omega \subset R^3$ с границей $S \in C^2$ [2]:

$$\mathrm{v}_t + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} = \nu\Delta\mathrm{v} - \nabla p + q\rho, \qquad div\mathrm{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_t + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\rho = 0 \quad (2)$$

с начально-краевыми условиями

$$\mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}\big|_S = 0,\ \ t\in[0,T],\ \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (3)$$

Здесь $0<\nu$ - коэффициент кинетической вязкости, q - ускорение свободного падения, $\mathrm{v}(t,x)$ - вектор скорости жидкости, $\rho(t,x)$, $p(t,x)$ - скалярные функции плотности и давления соответственно.

Далее мы рассмотрим модификацию метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для задачи (1)-(3). Итак, во вспомогательной области $D = \Omega \cup D_1$ с границей S_1: $S_1 \cap S = \emptyset$ рассмотрим начально-краевую задачу с малым параметром:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}^\varepsilon = \nu\Delta\mathrm{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon - \frac{\xi(x)\mathrm{v}^\varepsilon}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^\beta_{L_2(D_1)}} + q\rho^\varepsilon, \qquad 0<\beta<1 \quad (4)$$

$$div\mathrm{v}^\varepsilon = 0 \quad (5)$$

$$\rho^\varepsilon_t + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\rho^\varepsilon = 0 \quad (6)$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}^\varepsilon\big|_{S_1} = 0,\ \ t\in[0,T],\ \rho^\varepsilon\big|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (7)$$

где малый параметр $\varepsilon>0$, $\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega \\ 1, & \text{в } D_1 = \mathrm{D}\setminus\Omega. \end{cases}$ При случае $\beta=0$ задача (4)-(7) представляет собой известный «классический» вид МФО, который исследован в работе [3], где в частности для решений получена неулучшаемая оценка:

$$\left\|\mathrm{v}^\varepsilon - \mathrm{v}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|\rho^\varepsilon - \rho\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C\sqrt{\varepsilon}\ . \quad (8)$$

Напомним, что в работе [4] без доказательств существования решений в классе обобщенных функций, для сильных решений задач (1)-(3) и (4)-(7) выведена лучшая по сравнению с (8) оценка скорости сходимости:

$$\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}-\mathrm{v}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}-\mathrm{v}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)}+\left\|\rho^{\varepsilon}-\rho\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le C\varepsilon^{\frac{3-2\beta}{4-3\beta}},\ \ 0<\beta<1.$$

где, при $\beta\to1$, степень малого параметра стремится к 1.

Пусть пространства $\overset{0}{J}(D)$ и $\overset{0}{J}{}^1(D)$ - замыкание множества бесконечно-дифференцируемых соленоидальных финитных в D вектор-функций в нормах пространств $L_2(D)$ и $W_2^1(D)$ соответственно[5].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (4)-(7) называются функции $\{\mathrm{v}^\varepsilon,\rho^\varepsilon\}$:

$$\mathrm{v}^\varepsilon\in L_\infty\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right)\cap L_2\left(0,T;\overset{0}{J}{}^1(D)\right),\ 0<m\le\rho^\varepsilon\le M<\infty,\ \rho^\varepsilon\in L_\infty\left(0,T;L_\infty(D)\right),$$

удовлетворяющие следующим интегральным тождествам:

$$\int_0^T\int_D\left(-\mathrm{v}^\varepsilon\Phi_t+\left(\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\mathrm{v}^\varepsilon\Phi+\nu(\mathrm{v}_x^\varepsilon,\Phi_x)-q\rho^\varepsilon\Phi\right)dxdt+\int_0^T\int_{D_1}\frac{\mathrm{v}^\varepsilon\Phi}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}}dxdt-\frac{1}{2}\int_D\mathrm{v}_0(x)\Phi_0(x)dx=0$$

$$\int_0^T\left(\rho^\varepsilon,\phi_t+\left(\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\phi\right)_{L_2(D)}dt+\left(\rho_0\phi_0(0)\right)_{L_2(D)}=0,$$

$$\forall\Phi\in L_2\left(0,T;\overset{0}{J}{}^1(D)\right)\cap W_2^1\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right),\ \phi\in W_2^1\left(0,T;W_2^1(D)\right),\ \Phi(T)=0,\ \phi(T)=0.$$

Теорема 1. Пусть $0<m\le\rho_0(x)\le M<\infty$, $\mathrm{v}_0(x)\in\overset{0}{J}(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (4)-(7) и для него справедлива оценка

$$\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_\infty\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right)}+\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{J}{}^1(D)\right)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{T}}\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta}dt\le C_1<\infty \tag{9}$$

$$0<m\le\rho^\varepsilon\le M<\infty,\ \left\|\rho^\varepsilon\right\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(D))}\le C_2<\infty. \tag{10}$$

Доказательство данной теоремы проводится также как в [5] и не вызывает особых затруднений. Также для обобщенного решения справедлива следующая лемма:

Лемма (о компактности). Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда справедлива неравенство:

$$\left\|\mathrm{v}^\varepsilon(t+\delta)-\mathrm{v}^\varepsilon(t)\right\|_{L_2(0,T-\delta;L_2(D))}^2\le C\delta^{1/4},\ \forall\delta\in[0,T-\delta], \tag{11}$$

где постоянная С не зависит от ε. Данная лемма также доказывается аналогично [5].

Определение 2. Сильным решением задачи (4)-(7) называются функции $\mathrm{v}^\varepsilon,\rho^\varepsilon,\ p^\varepsilon$:

$$\mathrm{v}^\varepsilon\in L_2\left(0,T;\overset{0}{J}{}^1(D)\cap W_2^2(D)\right),\mathrm{v}^\varepsilon\in L_\infty\left(0,T;\overset{0}{J}{}^1(D)\right),\ \mathrm{v}_t^\varepsilon\in L_2\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right),$$

$\rho^{\varepsilon} \in L_2\left(0,T;W_2^2(D)\right)$, $\rho_t^{\varepsilon} \in L_2\left(0,T;L_2(D)\right)$, $\rho^{\varepsilon} \in L_{\infty}\left(0,T;L_{\infty}(D)\right)$,

$p^{\varepsilon} \in L_2\left(0,T;W_2^1(D)\right)$, которые квадратично суммируемы вместе с производными, входящими в (4)-(6), а также удовлетворяют почти всюду уравнениям (4)-(6) и начально-краевым условиям (7).

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset R^2$, $0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty$, $\mathrm{v}_0(x) \in \overset{0}{J}{}^1(\Omega)$. Тогда в «целом» по времени интервале $[0,T]$ существует единственное сильное решение вспомогательной задачи (4)-(7) и для него имеют место оценки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\left\|\nabla \mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{2-\beta}\right) + \left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^2(D)\right)} + \left\|\nabla p^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;L_2(D)\right)} \le C < \infty \tag{12}$$

А при $\varepsilon \to 0$ она сходится к сильному решению исходной задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset R^3$, $0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty$, $\mathrm{v}_0(x) \in \overset{0}{J}{}^1(\Omega)$. Тогда в достаточно малом по времени интервале $[0,T_0]$, значение которого определяется через начальные данные задачи, существует единственное сильное решение задачи (4)-(7) и для него имеют место оценки (12). А при $\varepsilon \to 0$ она сходится к сильному решению исходной задачи (1)-(3).

Доказательство существования и сходимости сильных решений в теоремах 2 и 3 проводится, также как в [5], по методу Галеркина с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Покажем единственность сильного решения. Допустим, существуют два разных сильных решений $\left\{\mathrm{v}_1^{\varepsilon}, \rho_1^{\varepsilon}, p_1^{\varepsilon}\right\}$ и $\left\{\mathrm{v}_2^{\varepsilon}, \rho_2^{\varepsilon}, p_2^{\varepsilon}\right\}$. Рассматривая разность уравнений для каждого из решений, получим:

$$\omega_t + (\omega\cdot\nabla)\mathrm{v}_1^{\varepsilon} + \left(\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\omega = \nu\Delta\omega - \nabla\pi + q\theta - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{v}_1^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}} - \frac{\mathrm{v}_2^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}}\right) \tag{13}$$

$$div\omega = 0, \qquad \theta_t + (\omega\cdot\nabla)\rho_1 + \left(\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta = 0 \tag{14}$$

где $\omega = \mathrm{v}_1^{\varepsilon} - \mathrm{v}_2^{\varepsilon},\ \pi = \rho_1^{\varepsilon} - \rho_2^{\varepsilon},\ \theta = p_1^{\varepsilon} - p_2^{\varepsilon}$. Далее, умножая (13) и (14) соответственно на ω и θ скалярно в $L_2(D)$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_D^2 + \nu\|\nabla\omega\|_D^2 + \int_D(\omega\cdot\nabla)\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\omega dx - \int_D q\theta\omega dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{D_1}\left(\frac{\mathrm{v}_1^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}} - \frac{\mathrm{v}_2^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}}\right)\omega dx = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \int_D(\omega\cdot\nabla)\rho_1\theta dx = 0 \tag{16}$$

Схожие слагаемые (15)-(16) оценивается как в [5], нам остается оценить только это слагаемое:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{D_1}\left(\frac{\mathrm{v}_1^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}} - \frac{\mathrm{v}_2^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}}\right)\omega dx = \frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{2-\beta} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{2-\beta} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{D_1}\left(\frac{\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\mathrm{v}_2^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}} + \frac{\mathrm{v}_1^{\varepsilon}\mathrm{v}_2^{\varepsilon}}{\left\|\mathrm{v}_2^{\varepsilon}\right\|_{D_1}^{\beta}}\right)dx$$

Далее сложим (15) и (16) и после некоторых преобразовании, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega\|_D^2+\|\theta\|_D^2\right)+\frac{\nu}{2}\|\nabla\omega\|_D^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}\le$$

$$\le\left(C_1+C_2\|\nabla\rho_1\|_{L_4}^2\right)\left(\|\omega\|_D^2+\|\theta\|_D^2\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^\beta}+\frac{1}{\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^\beta}\right)\int_{D_1}\mathrm{v}_1^\varepsilon\mathrm{v}_2^\varepsilon dx.$$

Отсюда так как

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}-\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}-\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}=\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|\times$$

$$\times\left(\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}-\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}\right)-\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|\left(\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}-\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|-\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|\right)\left(\left\|\mathrm{v}_1^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}-\left\|\mathrm{v}_2^\varepsilon\right\|_{D_1}^{1-\beta}\right)>0$$

Получим: $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega\|_D^2+\|\theta\|_D^2\right)\le\left(C_1+C_2\|\nabla\rho_1\|_{L_4}^2\right)\left(\|\omega\|_D^2+\|\theta\|_D^2\right)$. Тогда по лемме Гроноулла имеем: $\|\omega\|_D^2+\|\theta\|_D^2=0\ \ \forall t\in[0,T]$, т.е. $\omega=0,\ \theta=0$.

Далее из (15) и теорем вложения [5] имеем:

$$\|\pi\|_{L_2(D)}\le C\|\nabla\pi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{-1}(D)}=\sup_{\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}=1}\int_D\nabla\pi\cdot\psi dx=0$$

, т.е. $\pi=0$.

Использованные источники

1. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. - М.: Изд-во МГУ, 1991. - 111с.
2. Кажихов А.В., Смагулов Ш. О корректности краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости // ДАН СССР. – 1977. - Т. 234, №2. - С.330-332.
3. Куттыкожаева Ш.Н. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ. Серия мат., мех., инф. - 1998. - №13. - С.54-59.
4. Байтуленов Ж.Б. Модификация метода фиктивных областей для модели неоднородной жидкости в приближении Буссинеска // Известия НАН РК, серия физико-математическая. -2009. -№5(267). –С.47-49.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 318с.