

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (АЗЕРБАЙДЖАН)
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ (МОЛДОВА)
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ЯНКИ КУПАЛЫ (БЕЛАРУСЬ)
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л.М.ГУМИЛЕВА (КАЗАХСТАН)
ИНСТИТУТ ПСИХОТЕРАПИИ И ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ (ГЕРМАНИЯ)
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ (КАЗАХСТАН)
КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОССИЯ)
КИЕВСКИЙ СЛАВИСТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (УКРАИНА)
МИНСКИЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ (БЕЛАРУСЬ)
НЕВИННОМЫССКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ, УПРАВЛЕНИЯ И ПРАВА (РОССИЯ)
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ (РОССИЯ)
УНИВЕРСИТЕТ ЮЖНОЙ КАРОЛИНЫ (США)
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Н. КАРАЗИНА (УКРАИНА)

МОЛОДЕЖЬ И НАУКА:

РЕАЛЬНОСТЬ И БУДУЩЕЕ

Материалы IV Международной
научно-практической
конференции, 2011 г.

ТОМ IV

ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ

НАУКИ

АЛМАТЫ • АСТАНА • БАКУ • ГРОДНО • КИЕВ • КИШИНЕВ •
КОЛАМБИЯ
ЛЮДЕНШАЙД • МИНСК • НЕВИННОМЫССК • ХАРЬКОВ • ЭЛИСТА

2011

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

RELAXATION-SPECTRAL APPROACH TO THE EVALUATION OF THE CHEMICAL HETEROGENEITY OF TIMBER POLYMERS Pen O. V., Levchenko S. I., Maslova E. S. (Russia)	406
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ Абдраманова М. Б. (Казахстан)	408
МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОГАЩЕНИЯ СОЛНЕЧНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ СВЕРХТЯЖЕЛЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ Авдонин В. В., Орищенко А. В. (Россия)	410
МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ Байтуленов Ж. Б. (Казахстан)	413
ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В СРЕДЕ ППП EXCEL Бельченкова Ю. В. (Беларусь)	416
ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ НА ПРЕДПРИЯТИИ «МАЛОРИТСКИЙ КОСК» Битулина Е. С. (Беларусь)	418
ЦИФРОВАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТРАКТРИСЫ Булатникова И. Н., Булатников А. А. (Россия)	420
АРИФМЕТИКА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НАД ПРОСТЫМИ ПОЛЯМИ Волгина Е. В. (Россия)	422
ВЫДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СИТУАЦИЙ НАЛИЧИЯ ИЗЛИШНИХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ Воробьев И. Ю., Степанова Т. В. (Беларусь)	423
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ШКОЛЕ Евдокимова А. А. (Россия)	426
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ Иванычев Д. А. (Россия)	427
ОПТИМИЗАЦИЯ ВВЕДЕНИЯ В ЭКСПЛУАТАЦИЮ ОСНОВНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФОНДОВ Кирдик Т. В. (Беларусь)	429
ПОСТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БАЗЫ ДАННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ УЧЕБНОЙ НАГРУЗКОЙ ППС Клинцевич М. Л. (Беларусь)	431
РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНДИКАТОРА ДЛЯ ТРЕХВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЛИОТА Козячая М. А. (Беларусь)	433
МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ МОДЕЛЕЙ АПК Левченко Ю. И. (Украина)	436
О ПРИМЕНИМОСТИ ЦЕПОЧЕК ПРЕОБРАЗОВАНИЙ Ложкин А. Г., Киришина Г. А. (Россия)	439

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Байтуленов Ж. Б.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: janibekbb@mail.ru

Метод фиктивных областей в настоящее время широко используется при математическом моделировании прикладных задач. Достаточно широкий обзор работ, посвященных МФО представлен в работе [1]. Для данных МФО неулучшаемая оценка скорости сходимости в классе L_2 имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$. В данной работе обосновывается модификация МФО для модели Буссинеска с более высоким порядком оценки скорости сходимости: показывается существование и сходимость обобщенного и единственного сильного решений в трехмерной ограниченной области.

Итак, рассмотрим модель Буссинеска движения неоднородной жидкости в области $\Omega \subset R^3$ с границей $S \in C^2$ [2]:

$$v_t + (v \cdot \nabla)v = \nu \Delta v - \nabla p + q\rho, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad (1)$$

$$\rho_t + (v \cdot \nabla)\rho = 0 \quad (2)$$

с начально-краевыми условиями

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad v|_S = 0, \quad t \in [0, T], \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (3)$$

Здесь $0 < \nu$ - коэффициент кинетической вязкости, q - ускорение свободного падения, $v(t, x)$ - вектор скорости жидкости, $\rho(t, x)$, $p(t, x)$ - скалярные функции плотности и давления соответственно.

Далее мы рассмотрим модификацию метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для задачи (1)-(3). Итак, во вспомогательной области $D = \Omega \cup D_1$ с границей S_1 : $S_1 \cap S = \emptyset$ рассмотрим начально-краевую задачу с малым параметром:

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + (v^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon = \nu \Delta v^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon - \frac{\xi(x)v^\varepsilon}{\varepsilon \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta} + q\rho^\varepsilon, \quad 0 < \beta < 1 \quad (4)$$

$$\operatorname{div} v^\varepsilon = 0 \quad (5)$$

$$\rho_t^\varepsilon + (v^\varepsilon \cdot \nabla)\rho^\varepsilon = 0 \quad (6)$$

$$v^\varepsilon|_{t=0} = v_0(x), \quad v^\varepsilon|_{S_1} = 0, \quad t \in [0, T], \quad \rho^\varepsilon|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (7)$$

где малый параметр $\varepsilon > 0$, $\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega \\ 1, & \text{в } D_1 = D \setminus \Omega. \end{cases}$ При случае $\beta = 0$ задача (4)-(7) представляет собой известный «классический» вид МФО, который исследован в работе [3], где в частности для решений получена неулучшаемая оценка:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))} + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (8)$$

Напомним, что в работе [4] без доказательств существования решений в классе обобщенных функций, для сильных решений задач (1)-(3) и (4)-(7) выведена лучшая по сравнению с (8) оценка скорости сходимости:

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leq C\varepsilon^{\frac{3-2\beta}{4-3\beta}}, \quad 0 < \beta < 1.$$

где, при $\beta \rightarrow 1$, степень малого параметра стремится к 1.

Пусть пространства $\overset{0}{J}(D)$ и $\overset{0}{J}^1(D)$ - замыкание множества бесконечно-дифференцируемых соленоидальных финитных в D вектор-функций в нормах пространств $L_2(D)$ и $W_2^1(D)$ соответственно[5].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (4)-(7) называются функции $\{v^\varepsilon, \rho^\varepsilon\}$:

$$v^\varepsilon \in L_\infty\left(0, T; \overset{0}{J}(D)\right) \cap L_2\left(0, T; \overset{0}{J}^1(D)\right), \quad 0 < m \leq \rho^\varepsilon \leq M < \infty, \quad \rho^\varepsilon \in L_\infty(0, T; L_\infty(D)),$$

удовлетворяющие следующим интегральным тождествам:

$$\int_0^T \int_D (-v^\varepsilon \Phi_t + (v^\varepsilon \cdot \nabla)v^\varepsilon \Phi + v(v_x^\varepsilon, \Phi_x) - q\rho^\varepsilon \Phi) dx dt + \int_0^T \int_{D_1} \frac{v^\varepsilon \Phi}{\varepsilon \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^\beta} dx dt - \frac{1}{2} \int_D v_0(x) \Phi_0(x) dx = 0$$

$$\int_0^T (\rho^\varepsilon, \phi_t + (v^\varepsilon \cdot \nabla)\phi)_{L_2(D)} dt + (\rho_0 \phi_0(0))_{L_2(D)} = 0,$$

$$\nabla \Phi \in L_2\left(0, T; \overset{0}{J}^1(D)\right) \cap W_2^1\left(0, T; \overset{0}{J}(D)\right), \quad \phi \in W_2^1(0, T; W_2^1(D)), \quad \Phi(T) = 0, \quad \phi(T) = 0.$$

Теорема 1. Пусть $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M < \infty$, $v_0(x) \in \overset{0}{J}(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (4)-(7) и для него справедлива оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;\overset{0}{J}(D))} + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\overset{0}{J}^1(D))} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|v^\varepsilon\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} dt \leq C_1 < \infty \quad (9)$$

$$0 < m \leq \rho^\varepsilon \leq M < \infty, \quad \|\rho^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(D))} \leq C_2 < \infty. \quad (10)$$

Доказательство данной теоремы проводится также как в [5] и не вызывает особых затруднений. Также для обобщенного решения справедлива следующая лемма:

Лемма (о компактности). Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда справедлива неравенство:

$$\|v^\varepsilon(t + \delta) - v^\varepsilon(t)\|_{L_2(0,T-\delta;L_2(D))}^2 \leq C\delta^{1/4}, \quad \forall \delta \in [0, T - \delta], \quad (11)$$

где постоянная C не зависит от ε . Данная лемма также доказывается аналогично [5].

Определение 2. Сильным решением задачи (4)-(7) называются функции $v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, p^\varepsilon$:

$$v^\varepsilon \in L_2\left(0, T; \overset{0}{J}^1(D) \cap W_2^2(D)\right), \quad v^\varepsilon \in L_\infty\left(0, T; \overset{0}{J}^1(D)\right), \quad v_t^\varepsilon \in L_2\left(0, T; \overset{0}{J}(D)\right),$$

$\rho^\varepsilon \in L_2(0, T; W_2^2(D))$, $\rho_t^\varepsilon \in L_2(0, T; L_2(D))$, $\rho^\varepsilon \in L_\infty(0, T; L_\infty(D))$,
 $p^\varepsilon \in L_2(0, T; W_2^1(D))$, которые квадратично суммируемы вместе с производными, входящими в (4)-(6), а также удовлетворяют почти всюду уравнениям (4)-(6) и начально-краевым условиям (7).

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset R^2$, $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M < \infty$, $v_0(x) \in J^1(\Omega)$. Тогда в «целом» по времени интервале $[0, T]$ существует единственное сильное решение вспомогательной задачи (4)-(7) и для него имеют место оценки:

$$\max_{t \in [0, T]} \left(\|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{D_1}^{2-\beta} \right) + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0, T; W_2^2(D))} + \|\nabla p^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_2(D))} \leq C < \infty \quad (12)$$

А при $\varepsilon \rightarrow 0$ она сходится к сильному решению исходной задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset R^3$, $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M < \infty$, $v_0(x) \in J^1(\Omega)$. Тогда в достаточно малом по времени интервале $[0, T_0]$, значение которого определяется через начальные данные задачи, существует единственное сильное решение задачи (4)-(7) и для него имеют место оценки (12). А при $\varepsilon \rightarrow 0$ она сходится к сильному решению исходной задачи (1)-(3).

Доказательство существования и сходимости сильных решений в теоремах 2 и 3 проводится, также как в [5], по методу Галеркина с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Покажем единственность сильного решения. Допустим, существуют два разных сильных решений $\{v_1^\varepsilon, \rho_1^\varepsilon, p_1^\varepsilon\}$ и $\{v_2^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, p_2^\varepsilon\}$. Рассматривая разность уравнений для каждого из решений, получим:

$$\omega_t + (\omega \cdot \nabla) v_1^\varepsilon + (v_2^\varepsilon \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega - \nabla \pi + q \theta - \frac{\xi(x)}{\varepsilon} \left(\frac{v_1^\varepsilon}{\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} - \frac{v_2^\varepsilon}{\|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} \right) \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \omega = 0, \quad \theta_t + (\omega \cdot \nabla) \rho_1 + (v_2^\varepsilon \cdot \nabla) \theta = 0 \quad (14)$$

где $\omega = v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon$, $\pi = \rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon$, $\theta = p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon$. Далее, умножая (13) и (14) соответственно на ω и θ скалярно в $L_2(D)$, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_D^2 + \nu \|\nabla \omega\|_D^2 + \int_D (\omega \cdot \nabla) v_1^\varepsilon \omega dx - \int_D q \theta \omega dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{D_1} \left(\frac{v_1^\varepsilon}{\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} - \frac{v_2^\varepsilon}{\|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} \right) \omega dx = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \int_D (\omega \cdot \nabla) \rho_1 \theta dx = 0 \quad (16)$$

Схожие слагаемые (15)-(16) оцениваются как в [5], нам остается оценить только это слагаемое:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{D_1} \left(\frac{v_1^\varepsilon}{\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} - \frac{v_2^\varepsilon}{\|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} \right) \omega dx = \frac{1}{\varepsilon} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{2-\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{2-\beta} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{D_1} \left(\frac{v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon}{\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} + \frac{v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon}{\|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} \right) dx$$

Далее сложим (15) и (16) и после некоторых преобразований, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\omega\|_D^2 + \|\theta\|_D^2 \right) + \frac{\nu}{2} \|\nabla \omega\|_D^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} \leq \\ & \leq \left(C_1 + C_2 \|\nabla \rho_1\|_{L_4}^2 \right) \left(\|\omega\|_D^2 + \|\theta\|_D^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} + \frac{1}{\|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^\beta} \right) \int_{D_1} v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Отсюда так как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} - \frac{1}{\varepsilon} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} - \frac{1}{\varepsilon} \|v_2^\varepsilon\|_{D_1} \|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} = \frac{1}{\varepsilon} \|v_1^\varepsilon\| \times \\ & \times \left(\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} - \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \|v_2^\varepsilon\| \left(\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} - \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\|v_1^\varepsilon\| - \|v_2^\varepsilon\| \right) \left(\|v_1^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} - \|v_2^\varepsilon\|_{D_1}^{1-\beta} \right) > 0 \end{aligned}$$

Получим: $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\omega\|_D^2 + \|\theta\|_D^2 \right) \leq \left(C_1 + C_2 \|\nabla \rho_1\|_{L_4}^2 \right) \left(\|\omega\|_D^2 + \|\theta\|_D^2 \right)$. Тогда по лемме Гронуолла имеем:

$$\|\omega\|_D^2 + \|\theta\|_D^2 = 0 \quad \forall t \in [0, T], \text{ т.е. } \omega = 0, \theta = 0.$$

Далее из (15) и теорем вложения [5] имеем:

$$\|\pi\|_{L_2(D)} \leq C \|\nabla \pi\|_{W_2^{-1}(D)}^0 = \sup_{\|\psi\|_{W_2^1(D)}^0 = 1} \int \nabla \pi \cdot \psi dx = 0, \text{ т.е. } \pi = 0.$$

Использованные источники

1. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. - М.: Изд-во МГУ, 1991. - 111с.
2. Кажихов А.В., Смагулов Ш. О корректности краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости // ДАН СССР. - 1977. - Т. 234, №2. - С.330-332.
3. Куттыкожаева Ш.Н. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ. Серия мат., мех., инф. - 1998. - №13. - С.54-59.
4. Байтуленов Ж.Б. Модификация метода фиктивных областей для модели неоднородной жидкости в приближении Буссинеска // Известия НАН РК, серия физико-математическая. -2009. -№5(267). -С.47-49.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 318с.