УДК 517.977.1

Ш. А. ДЖОМАРТОВА, Т. Ж. МАЗАКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ К АНАЛИЗУ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ

Статья посвящена актуальной проблеме математической теории управляемости. В ней исследована математическая модель управления, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями, учитывающая ограничения на управление. Как известно, проблема нахождения управляемости динамических систем с фазовыми ограничениями и ограничениями на управление до сих пор остается актуальной. Существует множество подходов к решению названной задачи. В ходе исследования управляемости динамической системы авторы применили интервальную математику, которая позволила получить эффективный критерий.

Введение

Рассматривается система управления, описываемая линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

где $A - n \times n$-постоянная матрица, $B - n$-мерный постоянный вектор, $x - n$-мерный вектор состояния системы, u - скалярное управление. На управление накладывается следующее ограничение

$$l_1 \leq u(t) \leq l_2, t \in [0, T]. \tag{2}$$

Ставится задача, определить существует ли управление, удовлетворяющее ограничению (2) и переводящее систему (1) из начального состояния

$$x\,(0) = x_0 \tag{3}$$

в конечное заданное состояние

$$x\,(T) = x_1 \tag{4}$$

за фиксированное время T. Введем $n \times n$-матрицу R

$$R = \left(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right). \tag{5}$$

Для поставленной задачи при отсутствии ограничений на управление имеется следующий критерий управляемости.

Теорема [1]. Стационарная линейная система (1) управляема, если и только если матрица R, определяемая выражением (5), имеет ранг n.

Исследование поставленной задачи при наличии ограничений на управление вида (2) представляет определенный интерес, так как до сих пор не существуют эффективных критериев. Кроме того, результаты могут быть использованы при решении практических задач оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями с закрепленными концами и ограничениями на управляющие воздействия. В частности, уравнениями вида (1) могут описываться робототехнические, электроэнергетические системы или системы организационного управления, где коэффициенты матрицы A и вектора B определяются через параметры (такие как вес, метрические характеристики, инерционность и т.п.), которые обычно вычисляются с некоторой погрешностью. Кроме того, ошибки проведения арифметических вычислений на ЭВМ также могут привести к несовместности получаемых моделей. Для учета этих особенностей можно использовать новое направление вычислительной математики – интервальный анализ, основная идея которого состоит в замене арифметических операций и вещественных функций над вещественными числами интервальными операциями и функциями, преобразующими интервалы, содержащие эти числа.

Первая публикация, посвященная интервальному анализу, была сделана Р.Е. Муром в 1966 г. Ю.И. Шокиным в 1981 г. систематически были изложены основы и методы интервального анализа. Затем в 1982 г. изданы учебное пособие Т.И. Назаренко, Л.В. Марченко по интервальным методам, а в 1986 г. – монография обзорного плана С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина, З.Х. Юлдашева. В этих работах были систематически изложены основы и методы интервального анализа, рассмотрены интервальные методы решения задач линейной алгебры, методы прогонки для решения дифференциальных уравнений, методы решения систем нелинейных уравнений. В данной работе применим результаты интервальной математики [2] к исследуемой задаче управляемости.

Критерий управляемости

Пусть $\Phi(t,\tau) = \Theta(t) \cdot \Theta^{-1}(\tau)$, где $\Theta(t) = \exp(At)$ - фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$u = \nu + \frac{l_1 + l_2}{2}, L = \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

Тогда систему (1) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + B + \frac{l_1 + l_2}{2} + B\nu, \tag{7}$$

где

$$-L \leq \nu(t) \leq L, \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x(t_0) + \frac{l_1 + l_2}{2} \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, B d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\, B\nu(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$y_1 = x_1 - \Phi(T, 0)\, x_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} \int_{0}^{T} \Phi(T,\tau)\, B d\tau, f(\tau) = \Phi(T,\tau)\, B.$$

Тогда задача управляемости сводится к существованию решения интегрального уравнения

$$y_1 = \int_0^T f_1(\tau)\nu(\tau) d\tau \tag{10}$$

удовлетворяющего условию (8). Для решения поставленной задачи применим результаты интервального анализа [2]. Заменим интеграл в правой части (10) рядом

$$h \sum_{i=1}^{n} f_i \nu_i,$$

где

$$n = \frac{T}{h}, h \geq 0, -L \leq \nu_i \leq L, i = \bar{1,} n.$$

Обозначим через $\bar{f_i} = (f_i, 0)$ - интервал с центром в f_i и радиусом 0, $\bar{\nu_i} = (0, L)$ - интервал от $-L$ до L. Пусть $i = 1$. Вычислим $\bar{f_1 \nu_1} = (0, \|f_1 L\|)$ - интервал с центром в точке 0 и радиуса $|f_1 L|$, здесь все арифметические операции выполняются по правилам определенных для интервальных вычислений [2]. Очевидно множество

$$\{hf_1\nu_1|\forall\nu_1 \in (-L, L)\}$$

совпадает с интервалом $h(0, |f_1L|)$ для $\forall h \geq 0$.

Методом математической индукции можно показать, что множество

$$\left\{h\sum_{i=1}^{n} f_i\nu_i|\forall\nu_i \in (-L, L), i = \bar{1,n}\right\}$$

совпадает с интервалом

$$h(0, \sum_{i=1}^{n} |f_iL|)$$

для $\forall h \geq 0$.

Отсюда видно, что множество

$$\left\{\int_0^T f(\tau)\nu(\tau)d\tau|\nu(t) \in (-L, L), \in [0, T]\right\}$$

совпадает с интервалом

$$y_2 = \int_0^T f(\tau)\bar{\nu}d\tau,$$

где все арифметические операции выполняются с помощью интервальных вычислений [2]. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы система (7)-(8) была управляемой необходимо и достаточно, чтобы вектор y_1 принадлежал интервальному вектору y_2. Для численного моделирования разработано программное обеспечение, реализующее вычисления предложенного критерия и использующее библиотеку интервального вычисления [3].

Лемма (Гронуолла-Белмана) [4]. Пусть скалярные непрерывные функции $x(t)$ и $g(t) \geq 0$ удовлетворяют неравенству

$$x(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t g(s)x(s)ds, t \geq 0,$$

где $\alpha(t)$ - некоторая неубывающая функция. Тогда

$$x(t) \leq \alpha(t)\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

Применяя лемму Гронуолла-Белмана к задаче (1) и (4) получим следующее неравенство

$$\|x(t_1)\| \leq \left(\|x(t_0)\| + \int_0^{t_1} \|B(\tau)\|u(\tau)d\tau \exp\left(\int_0^{t_1} \|A(\tau)\|d\tau\right)\right). \tag{11}$$

Выберем в качестве нормы вектора

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

и нормы матрицы

$$\|A\| = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right), j = \bar{1,n}$$

.

Примеры использования полученного критерия управляемости

Пример 1. В качестве примера рассматривается система второго порядка

$$\dot{x_1} = 3x_1 + 2x_2 + u, \tag{12}$$

$$\dot{x_2} = x_1 - x_2 - u$$

при частичных условиях

$$x_0 = (1.1), \tag{13}$$

$$t_0 = 0, t_1 = 1.$$

Условия на управление и конечную точку будут варьироваться.

а) пусть

$$-1.5(t) \leq 1.0, t \in [0,1]. \tag{14}$$

Вычислим значение интервального вектора

$$y_2 = \begin{pmatrix} (39.97, 17.99) \\ \\ (9.33, 7.50) \end{pmatrix}.$$

Подставляя значения параметров примера в (11) получим $\|x(t_1)\| \leq 4\exp(4) \approx 218,3$.

Следовательно, при $x_1 = (109, 110)^*$ по лемме Гроноулла-Белмана система (12)-(14) не управляема, т.е. не существует управление, удовлетворяющее ограничению $-1.5(t) \leq 1.0$ и переводящее систему за время 1 из точки $x_0 = (1,1)^*$ в точку $x_1 = (109, 110)^*$. Применяя предложенный критерий, получим, что вектор $x_1 = (109, 110)^*$ не принадлежит интервальному вектору y_2, так как $109 > 39.97 + 17.99$ и $110 > 9.33 + 7.5$, т.е. отсутствует управляемость по обеим переменным.

б) в качестве точки x_1 возьмем решение задачи Коши (12)-(13) в момент времени t_1 при управлении $u \equiv 0$, которая удовлетворяет ограничению (14): $x_1 = (41.13, 9.43)$. Применяя предложенный критерий, получим, что вектор x_1 принадлежит интервальному вектору y_2, так как $39.97 - 17.99 < 41.13 < 39.97 + 17.99$ и $9.33 - 7.50 < 9.43 < 9.33 + 7.50$, т.е. система управляема.

Пример 2. Рассматривается система уравнений третьего порядка вида (15), описывающая состояние цепей электромеханической следящей системы автоматического манипулятора [5], где $x = x(t) = (i_\epsilon(t), \Omega(t), \Theta(t))^*$ - вектор состояния системы,$u = u(t) = (\Omega_0(t), \Theta_0(t))^*$ - управляющий входной вектор-сигнал системы, с ограничениями

$$l_i^1 \leq u_i \leq l_i^2, i = \bar{1,2}, t \in [t_0, t_1], \tag{15}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{T_\epsilon} + \frac{k_{oc}k_yR_{sh}}{L_\epsilon}\right) & -\left(\frac{k_e}{L_\epsilon} + \frac{k_1k_yk_m}{L_\epsilon}\right) & -\frac{k_1k_yk_n}{L_\epsilon} \\ \frac{k_v}{J} & -\frac{1}{T_v} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{k_1k_ykg}{L_\epsilon} & \frac{k_1k_yk_n}{L_\epsilon} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Численные значения коэффициентов матриц A и B зависят от параметров и структуры следящей системы. Пусть

$$x_0 = (1,1,1), \tag{16}$$

$T = 1, T_\epsilon = 2, L_\epsilon = 3, k_{oc} = 1, k_y = 1.5, R_{sh} = 1.1, k_e = 2.1, k_1 = 0.1, k_m = 2, k_n = 4, k_g = 6, J = 5, T_v = 4.$

Тогда система уравнений (1) представляется в виде

$$\dot{i_\epsilon} = -1.05i_\epsilon - 0.8\Omega - 3.0\Theta - 3.0\Omega_0 + 2.0\Theta_0,$$

$$\dot{\Omega} = 0.4i_\epsilon - 0.25\Omega,$$

$$\dot{\Theta} = \Omega + \Theta.$$

Зададим ограничение на управляющий вектор $u = (\Omega_0(t), \Theta_0(t))^*$ в виде

$$0.4 \le \Omega_0 \le 0.6, t \in [0,1], \tag{17}$$

$$-0.25 \le \Theta_0 \le 1.25, t \in [0,1].$$

Вычислим значение интервального вектора

$$y_2 = \left(\begin{array}{cc} (4.94 & 12.29) \\ (0.14 & 1.62) \\ (4.33 & 5.87) \end{array} \right).$$

Подставляя значения параметров примера в (11) получим

$$\|x(1)\| \le (3 + 3 * 1.85)\exp(4) \approx 466.6.$$

Тогда при $x(1) = (160, 160, 150)^*$ система не управляема, т.е. не существует управление переводящее систему за время $T = 1$ из точки $(1,1,1)^*$ в точку $x(1) = (160, 160, 150)^*$. Применяя предложенный критерий, получим, что вектор $x(1) = (160, 160, 150)^*$ не принадлежит интервальному вектору y_2, так как $160 > 4.94 + 12.29, 160 > 0.14 + 1.62$ и $150 > 4.33 + 5.87$, т.е. отсутствует управляемость по трем переменным.

В качестве точки $x(1)$ возьмем решение задачи Коши (1) в момент времени T при управлении $u \equiv 0$, которая удовлетворяет ограничению (17), тогда $x(1) = (-4.87, 0.12, 4.1)^*$. Применяя предложенный критерий, получим, что вектор $x(1)$ принадлежит интервальному вектору y_2, так как $4.94 - 12.29 < -4.87 < 4.94 + 12.29, 0.14 - 1.62 < 0.12 < 0.14 + 1.62$ и $4.33 - 5.87 < 4.1 < 4.33 + 5.87$, т.е. система управляема. Результаты численных расчетов показывают эффективность предложенного критерия управляемости и возможность их применения в практических приложениях.

Список литературы

1. Ройтенберг, Я. Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396 с.
2. Шокин, Ю. И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1986. – 281 с.
3. Джомартова, Ш. А. Практические интервальные вычисления // Вестник НАН РК. – 2002. – №2. – С. 41–46.
4. Колмановский, В. Б., Носов, В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. Черноруцкий, Г. С., Сибрин, А. П., Жабреев, В. С. Следящие системы автоматических манипуляторов. – М.: Наука, 1987. – 272 с.

Джомартова Шолпан Абдразаковна, профессор кафедры информационные системы Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук, доцент, jomartova@mail.ru.

Мазаков Талгат Жакупович, профессор кафедры информационные системы Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математиченских наук, профессор, mtj61@mail.ru.