Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті

ҚазҰТУ

ҚАЗ ҰТУ

Ә.У. Қалижанова

ТИІМДІЛЕУ ӘДІСТЕРІ ЖӘНЕ ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ ПӘНІ БОЙЫНША

Оқу құралы

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті

Ә.У. Қалижанова

ТИІМДІЛЕУ ӘДІСТЕРІ ЖӘНЕ ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ ПӘНІ БОЙЫНША

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2014

ЖОК 004 (075.8)
ББК 32.973 м 73
Т 46

Пікір жазғандар:
М. Дауылбаев, физ-матем.ғыл.докт., профессор;
Ш. И. Иманғалиев, техн.ғыл.канд., доценті;
Л. Ш. Балғабаева, техн.ғыл.канд., доценті.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2014 жылғы басылым жоспары бойынша басылады.

Т 46 Қалижанова Ә.У. Тиімділеу әдістері және операцияларды зерттеу пәні бойынша : Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2014 – 117 б. Сурет – 9. Кесте – 15. Библиогр. тізім – 12 атау.
ISBN 978-601-228-726-4

Оқу құралы мамандардың квалификациялық сипаттамасының талабына сай, Мемлекеттік стандарттар мен ұйымдардың педагогика-психологиялық негізіне орай лекциялық, практикалық, зертханалық сабақтар жүргізуге арнап құрастырылған. Оқу құралында жоғары математиканың бір саласы, тиімділеу әдістерінің компьютерге программалауға ыңғайландырылған алгоритмдері, жан-жақты талданған мысалдар, жеке орындауға арналған есептер берілген. Ол студенттерді оқу процесінде өз бетімен жұмыс істеуге және тақырыпты меңгеруге, білім деңгейін қалыптастыруға бағыттайды. Сондай-ақ, олардың өзара байланысын нығайтады.

Оқу құралы "Тиімділеу әдістері және операцияларды зерттеу пәні бойынша" пәнінің 3 кредит көлемінде жазылған жұмыс бағдарламасына сәйкес жазылған. Ұсынылып отырған оқу құралын оқу жоспарында "Операцияларды зерттеу", "Математикалық модельдеу", "Тиімділеу әдістері" пәндері бар әртүрлі оқу формасындағы студенттердің пайдалануына болады.

ЖОК 004 (075.8)
ББК 32.973 м 73

ISBN978-601-228-726-4

КІРІСПЕ

Тиімділеу әдістері және операцияларды зерттеу – халық шаруашылығын тиімді басқару қажеттілігінен туған түрлі экономикалық, инженерлік есептерді шешуге бейімделген курс.

Әдетте экономикалық есептер қандай да болмасын кейбір өнімдерді, шикізаттарды үлестірумен байланысты болып келеді. Өнімдерді түрлі әдістермен бөлуге болады. Әдістер бір-бірінен тиімділігімен ажыратылады. Сондықтан экономикалық есептердің көп шешімдерінің ішінен жақсысын таңдау проблемалары туады. Үлестірудің ең жақсы варианты – *тиімді* деп аталады.

Енді осы халықшаруашылығында кездесетін бірнеше экономикалық есептерге тоқталайық.

1. Өндірістік есеп. Белгілі бір кәсіпорын шикізаттың m түрін пайдаланып, n түрлі өнім шығаратын болсын. Өнімнің бір данасына кететін әр шикізат түрлерінің мөлшері және өнімнің бір данасының бағасы белгілі дейік. Кәсіпорындағы шикізат қорының шектеулілігін ескере отырып, кәсіпорынға ең жоғары пайда келтіретіндей өнім шығару жоспарын жасау керек.

2. Кәсіпорынды шикізатпен қамтамасыз ету есебі. Шикізаттың белгілі бір түрлерін пайдаланатын бірнеше кәсіпорындары бар және осы кәсіпорындарға қажетті шикізаттарды тасып бере алатын шикізат базалары бар екен делік. Базалар кәсіпорындарымен тарифтері белгілі (әуе, автомобиль, темір жол, су) қатынас жолдарымен байланысты.

Кәсіпорынның шикізаттың әр түріне қажеттілігін толық қанағаттандыра отырып, шығын ең аз болатындай тасымалдау жоспарын құру керек.

3. Диета туралы есеп. Құрамындағы нәрлі заттардың мөлшер бағасы белгілі тағам түрлері бойынша, ең аз шығынмен организм қажеттілігін толық қамтамасыз ететін рацион құру керек.

Осы сияқты есептер халықшаруашылығының әр саласында көптеп кездеседі. Химиялық өндіріс қалдықтарын тиімді пайдалану, өндіріс материалдарын тиімді пішу, кадрларды дайындау мен оларды орналастырудың тиімді жоспары және т.б.

Ауылшаруашылығында:

1) егістіктің тиімді құрылымын анықтау;

2) сүрлемді тиімді пайдалану;

3) мал азығының тиімді рационын анықтау;

4) машина-трактор паркінің тиімді құрамы және т.б. осы сияқты экономикалық есептер көптеп кездеседі.

Әдетте экономика есептерінің бәрінде ең тиімді, ең пайдалы жоспар іздеу қарастырылады.

Мұндай есептердің шешіміне әсер ететін факторлардың көптігі, қазіргі уақытта миллиондап саналатындықтан бұл есептерді жай ғана шығару мүмкін емес. Сондықтан соңғы уақытта математиканы экономикада қолдануға қызығушылық артты. Экономиканы математикаландыруға есептеу техникасының дамуы да себеп болды.

Экономикалық есептерді экстремум анықтайтын математикалық есептермен байланыстыруға болады. Математикалық есептің шешімі – экономикалық есептің шешімі болады.

Қоғамдағы экономикалық процестердің математикалық аппарат (теңдеулер, теңсіздіктер) арқылы сипатталуы – *экономика-математикалық модель* деп аталады. Экономикалық процестерді сипаттайтын математикалық есептердің шешіміне талдау жасау арқылы біз экономикалық жүйені зерттейміз.

Есептің шарттарын өзгерте отырып, экономикалық жүйенің түрлі шешімдерін алып, олардың ішінен ең пайдалысын таңдаймыз.

Экстремальды есептер мен оның шығару әдістері қолданбалы математиканың "математикалық программалау" деп аталатын саласында қарастырылады.

Экстремальды есептер математикада төмендегідей тұжырымдалады:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

функциясының

$$\begin{gathered} G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_j \geq 0 \end{gathered} \tag{2}$$

шарттарын қанағаттандыратын экстремумын анықтау керек. Математикадағы әдеттегі дербес туындыларды нөлге теңестіру арқылы экстремумды анықтайтын әдістер мұнда жарамсыз. Ал математикалық программалау саласында жоғарыда аталған есептерді шешу әдістері толық зерттелген.

Математиканың бұл саласындағы есептерді шешу, белгілі бір программаны (жоспар) таңдаумен байланысты болғандықтан, бұл пәнге "Математикалық программалау" деген ат берілген. "Программалау" термині әдетте компьютерге программалау деп түсінілетіндіктен "Математикалық программалау" деп пәнге берілген ат сәтсіз деп есептелінеді. Бірақ бұл термин қалыптасып кеткендіктен, осы саладағы әдебиеттерде көбіне "Математикалық программалау" термині қолданылады. Жалпы, математикалық жоспар құру немесе экстремальды есептерді шешу әдістері деп атаған дұрыс деп саналады.

Көбіне ең пайдалы, ең тиімді шешімдерді табу әдістері қаралатындықтан бұл пәнді соңғы кезде "Тиімділеу әдістері" деп те атайды.

Жіктеу проблемалары

Математикалық программалау есептері мен оның әдістері әртүрлі белгілері бойынша жіктеледі.

Есептің шешімінің сапасы мен шектеулерге байланысты математикалық программалау сызықты және сызықты емес болып бөлінеді.

Сызықты программалауда мақсат функциясы сызықты, ал мақсат функциясының экстремумы ізделіп отырған жиын сызықты теңдеулер мен теңсіздіктер арқылы беріледі.

Сызықты программалаудан арнаулы әдістермен шешілетін транспорт есебі деп аталатын есептер класы бөлінеді.

Сызықты емес программалауда (СЕП), мақсатты функция да, шектеулер де сызықты емес. СЕП өз кезегінде дөңес квадратты программалау болып бөлінеді және дөңес программалуда мақсат функциясы да, оның шектеулері де дөңес жиында беріледі.

Квадраттық программалауда мақсат функциясы квадратты да, шектеулер сызықты теңдеулер немесе теңсіздіктер болады және т.б.

I. ЖҮЙЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

1.1. Сызықты векторлар кеңістігі

1.1.1. n өлшемді векторлар кеңістігі түсінігі

Анықтама. 1. Кез келген n санның реттелген жүйесі n өлшемді вектор деп аталады және төмендегідей белгіленеді:

$$A=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$$

мұнда $a_1,a_2,\ldots,a_n$ A векторының компоненттері, n өлшемі деп аталады. Бірдей өлшемді A және B екі вектор тек $a_j=b_j$, $j=1,2,\ldots,n$ болғанда ғана тең болып саналады.

2. A және B векторларының қосындысы:

$$A+B=\left(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n\right).$$

3. Барлық координаталары 0-ге тең векторлар нөлдік вектор $0=\left(0,0,\ldots,0\right)$ деп аталады.

$$A+0=A.$$

4. A векторына қарама-қарсы вектор болып $-A=\left(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n\right)$ саналады.

5. A векторының k санына көбейтіндісі деп – $kA=\left(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n\right)$ векторын айтамыз.

Бұл анықтамадан, векторлардың төменгідей қасиеттері шығады:

5.1. $k\left(A\pm B\right)=kA\pm kB$ $\quad 0\cdot A=0$

5.2. $\left(k\pm l\right)A=kA\pm lA$ $\quad \left(-1\right)A=-A$

5.3. $k\left(l\right)A=\left(k\cdot l\right)A$ $\quad k\cdot 0=0$.

5.4. $1\cdot A=A$. $\quad kA=0$, егер $k=0$ немесе $A=0$.

A векторды k нақты санына көбейту дегеніміз – A векторын k есе созу, егер $|k| > 0$ болса және k есе қысу, егер $|k| < 0$ болса.

Егер $k < 0$ болса, онда $k \cdot A$ векторының бағыты A векторының бағытына қарама-қарсы.

Анықтама. A, B векторларының скалярлық көбейтіндісі дегеніміз – $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$.

A векторының ұзындығы немесе модулі дегеніміз – $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$.

Анықтама. Векторды векторға қосу, векторды нақты санға көбейту операциялары анықталған n өлшемді векторлар жиыны n өлшемді векторлар кеңістігі деп аталады.

1.1.2. Векторлардың сызықты тәуелділігі

1-анықтама. Егер A, B векторларының компоненттері арасында

$$b_1 = k \cdot a_1;\ \ b_2 = k \cdot a_2;\ \ ...\ \ b_n = k \cdot a_n$$

қатынастары орындалса, A векторы B векторына пропорционал делінеді.

Нөлдік вектор кез келген векторға пропорционал

$$0 = 0 \cdot A.$$

2-анықтама. Егер B мен $A_1, A_2, ..., A_n$ векторлары үшін

$$B = k_1 A_1 + k_2 A_2 + ... + k_n A_n$$

қатынасы орындалатын $k_1, k_2, ..., k_n$ сандары бар болса, онда B векторы $A_1, A_2, ..., A_n$ векторларының сызықты комбинациясы деп аталады. Яғни B векторының j-ші компоненті ($j = 1,2,..n$) $A_1, A_2, ..., A_n$ векторларының j-ші компоненттерін сәйкесінше $k_1, k_2, ..., k_n$ сандарына көбейтіп қосқанға тең.

$k_1, k_2, ..., k_n$ сандары скалярлы көбейтіндінің коэффициенттері деп аталады. Мысалы:

$$2A_1 = (1,0,3,-2);\ 2A_1 - 3A_2 + A_3 = \overbrace{(0,0,-1,-10)}^{B}$$
$$-3A_2 = (-1,1,4,3);\ B = 2A_1 - 3A_2 + A_3$$
$$1A_3 = (-5,3,5,3);$$

B векторы A_1, A_2, A_3 векторларының сызықтық комбинациясы.

1.1.3. Сызықты тәуелділік, тәуелсіздік ұғымдары

3-анықтама. Егер $A_1, A_2, ..., A_r$ $(r \geq 2)$ векторлар жүйесі үшін

$$k_1A_1 + k_2A_2 + ... + k_rA_r = 0$$

қатынасы орындалатындай, барлығы бірдей нөлге тең емес $k_1, k_2, ..., k_n$ сандары табылса, онда $A_1, A_2, ..., A_r$ векторлар жүйесі сызықты тәуелді деп, ал керісінше, яғни бұл қатынас $k_j = 0$ ($j = 1,2,..n$) болғанда ғана орындалса, аталған векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз деп аталады.

1-мысал. $2 \cdot A_1 = (1;\ 2;\ -1)$

$$-1 \cdot A_2 = (2;\ 3;\ 0) \Longrightarrow 2A_1 - A_2 - A_3 - 0 \cdot A_4 = (0,0,0)$$
$$-1 \cdot A_3 = (0;\ 1;\ -2) \qquad 2A_1 - A_2 - A_3 = 0$$
$$0 \cdot A_4 = (3;\ 5;\ 1) \qquad A_3 = 2A_1 - A_2$$

векторлар жүйесі сызықты тәуелді. Себебі $2A_1 - A_2 - A_3 - 0 \cdot A_4 = 0$ қатынасы орындалатын бәрі бірдей нөлге тең емес $k_1 = 2$; $k_2 = -1$; $k_3 = -1$; $k_4 = 0$ сандарын табуға болады.

2-мысал.

$$A_1=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix};\ A_4=\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}$$

векторларының арасында $2A_1-A_2-A_3-0\cdot A_4=0$ қатынасы орындалады.

Шынында да

$$\begin{gathered}2+4-5-1=0\\4+6-3-7=0\\3+2-2-3=0\end{gathered}$$

бәрі бірдей нөлге тең емес $k_1=2$; $k_2=-1$; $k_3=-1$; $k_4=0$ сандары бар.

Кейде сызықты тәуелділік, сызықты тәуелсіздік анықтамаларын былай да айтады.

4-анықтама. Егер $A_1,A_2,...,A_n$ векторлар жүйесінің ең болмаса біреуі басқаларының сызықты комбинациясы болса, жүйе сызықты тәуелді, болмаса сызықты тәуелсіз деп аталады.

Екі анықтама эквивалентті.

Мысалы:

$$B=\begin{pmatrix}8\\5\\11\end{pmatrix};\ A_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

векторлары үшін $B=2A_1-A_2+3A_3$ қатынасы орындалатындай бәрі нөлге тең емес $k_1=2$; $k_2=-1$; $k_3=3$ сандары табылады.

3-мысал. $A_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ сызықты тәуелді.

Дәлелдеуі: Сызықты комбинация құрамыз.

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=0$$

k_i -дің бәрі нөлге тең емес екенін дәлелдеу керек:

$$k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{k}_3 = -k_1 \\ k_3 = -k_2 \end{cases} \Rightarrow \ -k_1 = -k_2 = k$$

k - кез келген сан. k_1, k_2, k_3 бәрі бірдей нөлге тең емес.

4-мысал. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ сызықты тәуелсіз.

Анықтама бойынша:

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{matrix} k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 = 0 \end{matrix},$$

$$k_1 = 0; \ k_2 = 0.$$

5-мысал. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ сызықты тәуелді.

Себебі, $k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = 0$ қатынасы орындалатындай $k_1 = 2$; $k_2 = 1$; $k_3 = -1$ сандары табылады.

Енді осы сызықты тәуелділік, сызықты тәуелсіздік туралы бірнеше теоремаларға тоқталамыз.

1.1-теорема. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_s$ $(s < r)$ ішкі векторлар жүйесі сызықты тәуелді болса, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ толық жүйесі сызықты тәуелді болады.

Дәлелдеуі: $A_1, \ldots, A_s$ тәуелді жүйе болса, анықтама бойынша барлығы нөлге тең емес k_i $(i = \overline{1,s})$ үшін $k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_s A_s = 0$ орындалады. Бұған қалған $r - s$ векторларды нөлге тең коэффициенттерімен қоссақ

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_s A_s + 0 \cdot A_{s+1} + 0 \cdot A_{s+2} + \ldots + 0 \cdot A_r = 0$$

яғни $A_1, A_2, \ldots, A_r$ сызықты тәуелді.

Салдар. Тең, пропорционал немесе нөлдік векторлары бар әрбір жүйе сызықты тәуелді.

Басқаша мынадай қорытынды жасауға болады.

Егер сызықты векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз болса, онда оның кез келген ішкі жүйесі сызықты тәуелсіз болады.

1.1.4. Векторлар жүйесінің рангі мен базисі

1.2-теорема. $A_1, A_2, ..., A_n$ сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі берілсін. Жүйенің бір векторына осы жүйенің басқа бір векторын еселеп қосып түрлендіргеннен шыққан жаңа жүйе де сызықты тәуелсіз болады.

Дәлелдеуі: Жүйенің бір векторын $k \neq 0$ көбейтіп A_n векторына қосамыз. Мысалы үшін A_1-ге $kA_1 + A_n$. Оны A'_n деп белгілейік,

$$A'_n = kA_1 + A_n .$$

Жаңа $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A'_n$ жүйесінің сызықты тәуелсіз екендігін дәлелдеу керек.

Бұл жүйені сызықты тәуелді деп жорыйық. Олай болса, анықтама бойынша барлығы нөлге тең емес l_i-лер үшін $l_1A_1 + l_2A_2 + ... + l_nA'_n = 0$ қатынасы орындалады. A'_n-ты $kA_1 + A_n$-мен алмастырайық

$$l_1A_1 + l_2A_2 + ... + l_nkA_1 + l_nA_n = 0$$
$$\left(l_1 + l_nk\right)A_1 + l_2A_2 + ... + l_{n-1}A_{n-1} + l_nA_n = 0$$

Теореманың шарты бойынша $A_1, A_2, ..., A_n$ сызықты тәуелсіз. Олай болса,

$$l_1 + l_nk = 0 ;\ l_2 = 0 ;\ . . .\ l_{n-1} = 0 ;\ l_n = 0 .$$

Бұдан, яғни түрлендірілгеннен кейінгі жүйе сызықты тәуелсіз.

5-анықтама. $A_1, A_2, ..., A_n$ векторлар жүйесі берілген. Сызықтық тәуелсіздігі бұзылмайтындай етіп құрамына осы жүйенің бірде-бір басқа векторын қосуға болмайтын

$A_1, A_2, ..., A_r$ $(r \leq n)$ векторлар жүйесі берілген жүйенің ең үлкен сызықты тәуелсіз ішкі жүйесі деп аталады.

1.3-теорема. $A_1, A_2, ..., A_n$ (*) векторлар жүйесінің рангісі – осы векторлардың компоненттерінен құрылған матрицаның рангісіне тең.

Дәлелдеуі: Жүйенің векторлары компоненттерінен матрица құрайық:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A-ның сызықты тәуелсіз жолдарының саны (рангісі), яғни сызықты тәуелсіз векторлар саны r-ға тең екендігін дәлелдейміз.

Анықтама бойынша (*) жүйенің ішкі жүйесі $(r \leq n)$ $A_1, A_2, ..., A_r$ ең үлкен сызықты тәуелсіз ішкі жүйе деп аталады, егер төмендегі шарттар орындалса:

1) $A_1, A_2, ..., A_r$ - сызықты тәуелсіз;

2) Жүйенің басқа векторлары осы топ векторларының сызықты комбинациясы.

Матрицаның рангісі r-ға тең болғандықтан r ретті минор $D_r \neq 0$. r-дәрежелі минор $D_r \neq 0$ сол жақ жоғары бұрышта орналасқан болсын. $D_r \neq 0$ болғандықтан осы минорды құрайтын матрицаның алғашқы r жолы сызықты тәуелсіз. Егер сызықты тәуелді десек, онда $D_r = 0$ болар еді.

Енді матрицаның қалған жолдары алғашқы r жолдың сызықты комбинациясы екенін көрсетейік. Шынында да, A-матрицасының $(r+1)$-ретті кез келген минорын қарастырайық.

Мысал үшін D_r минорын қоршап жатқан D_{r+1} минорын алайық,

$$D_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} r < i < m \\ 1 < j < n \end{matrix}$$

r-ді тандауымыз бойынша бұл минор нөлге тең. D_{r+1}-ді j-бағаны бойынша жіктейміз:

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{rj} \cdot A_{rj} + a_{ij} \cdot A_{ij} = 0 .$$

Алгебралық толықтауышпен a_{ij} минорының байланысы бойынша,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} = D_r$$

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{rj} \cdot A_{rj} + D_r \cdot a_{ij} = 0 .$$

$D_r \neq 0$ болғандықтан a_{ij} қатысты шешеміз:

$$a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{D_r} \cdot a_{1j} - -\frac{A_{2j}}{D_r} \cdot a_{2j} - \dots - \frac{A_{rj}}{D_r} \cdot a_{rj}$$

Мұнда $-\frac{A_{1j}}{D_r} = k_1, \dots, -\frac{A_{rj}}{D_r} = k_r$ деп белгілеулер жасасақ a_{ij} төмендегідей жазылады:

$$a_{ij} = k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \dots + k_r a_{rj}$$

j-ға $1, 2, \dots, n$ мәндерін берсек,

$$a_{i1} = k_1 \cdot a_{11} + k_2 \cdot a_{21} + \dots + k_r \cdot a_{r1}$$

$$a_{i2} = k_1 \cdot a_{12} + k_2 \cdot a_{22} + \dots + k_r \cdot a_{r2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{in} = k_1 \cdot a_{1n} + k_2 \cdot a_{2n} + \dots + k_r \cdot a_{rn}$$

(бұл матрицаның i -шы жолының элементтері, $i = r+1,...,n$).

Бұдан матрицаның 1-ші жолы алғашқы r жолдың сызықтық комбинациясы екендігі көрініп тұр. r - матрицаның рангісі.

Мысал.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

векторлар жүйесін сызықты тәуелді етуге бола ма? Егер ол сызықты тәуелді болса, оның ең үлкен ретті сызықты тәуелсіз ішкі жүйесін анықтау керек.

Шешімі. Матрица құрамыз,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минорларды есептейміз,

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;\ \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0\ \ r = 2$$

Векторлар жүйесі сызықты тәуелді.

1.4-теорема. n өлшемді векторлар кеңістігінің кез келген $(n+1)$-векторлар жиынтығы сызықты тәуелді. Шынында да, А-ның әр жолын екі индекспен нөмірленген векторлар компоненті деп есептейміз,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \dots & a_{n+1n} \end{pmatrix},$$

Марицаның реті $(n+1)\times n$. Бұл матрицаның рангісі $n+1$-ге тең бола алмайды. Себебі анықтама бойынша $r \le n$. Олай болса $n+1$-ден тіпті де кіші $(r << n+1)$. Сондықтан $n+1$ векторлар жүйесі сызықты тәуелді.

Салдар. Бұл теоремадан n өлшемді векторлар кеңістігінде ең үлкен сызықты тәуелсіз векторлар жүйесіндегі векторлар саны n-нен аспайды.

Не болмаса, кез келген $n+1$ вектордан тұратын векторлар жиыны сызықты тәуелді.

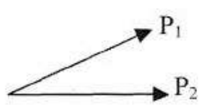
Мысал үшін жазықтықта бір түзудің бойында жатпайтын екі вектор (яғни сызықты тәуелсіз) болса, онда кез келген үшінші вектор (A_0) олардың сызықты комбинациясы болады.

Бұл теоремадан n өлшемді векторлар кеңістігінде n-нен артық сызықты тәуелсіз векторлар топшасы болмайды немесе n өлшемді векторлар кеңістігінде кез келген n-нен артық векторлардан тұратын жүйелер сызықты тәуелді болады деген қорытынды жасалады.

1.1.5. n өлшемді векторлар кеңістігінің базисі

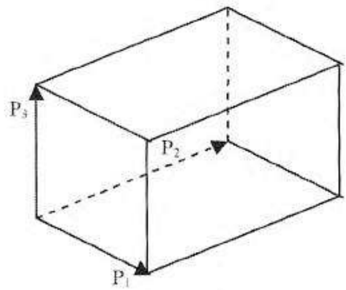
Анықтама. Өзара сызықты тәуелсіз кез келген n векторлар тобы n өлшемді векторлар кеңістігінің базисі деп аталады.

Екі өлшемді кеңістік болып саналатын жазықтықта екі коллинеар емес вектор, үш өлшемді кеңістікте үш компланар емес векторлар тобы базис бола алады.



1-сурет

– P_1, P_2 - базис те, кез келген үшінші вектор бұлардың сызықтық комбинациясы.



2-сурет

– P_1, P_2, P_3 - компланар емес үш вектор базис бола алады. Төртіншісі сызықтық комбинация,

$$P_0 = k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3$$

$m > 3$ өлшемді кеңістіктің базисі, яғни ең үлкен сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі m вектордан тұрады.

1.5-теорема. n өлшемді векторлар кеңістігінің кез келген векторын тек бір ғана жолмен базис векторының сызықты комбинациясы түрінде жіктеуге болады.

$$A,\ B_1, B_2, \ldots, B_n$$

Дәлелдеуі: $B_1, B_2, \ldots, B_n$ векторлар жүйесі n өлшемді кеңістіктің базисі болсын. Кеңістіктен басқа бір кез келген A векторын базис векторының қатарына қосамыз. Енді мына $A,\ B_1, B_2, \ldots, B_n$ жүйе $n+1$ вектордан тұрады. Дәлелденген белгілі 1.4-теорема бойынша бұл жүйе сызықты тәуелді, демек анықтама бойынша мынаны:

$$K_0A + K_1B_1 + K_2B_2 + \ldots + K_nB_n = 0 \qquad (3)$$

жазуға болады.

Мұндағы K_j-лардың бәрі бірдей нөлге тең емес $(j = 1,2,\ldots,n)$. K_0-тіпті де нөлге тең бола алмайды, себебі $K_0 = 0$ болса, $K_1, \ldots, K_n$ ішінен нөлге тең емес $B_1, B_2, \ldots, B_n$ сандары табылып, сызықты тәуелді болып кетер еді де, базис болмай қалар еді (базис анықтамасына қайшы).

(3)-ті A-ға қатысты шешеміз:

$$A = -\frac{K_1}{K_0}B_1 - \ldots - \frac{K_n}{K_0}B_n$$

мұндағы $-\dfrac{K_1}{K_0}=a_1;\quad -\dfrac{K_2}{K_0}=a_2;\quad -\dfrac{K_n}{K_0}=a_n$

демек

$$A=a_1B_1+a_2B_2+\ldots+a_nB_n \tag{4}$$

Яғни, A векторы $B_1,B_2,\ldots,B_n$ базис векторларының сызықты комбинациясы болып шықты.

$a_1,a_2,\ldots,a_n$ - A-ның базис векторларына *жіктеу коэффициенттері* деп аталады.

Ескерту. Базис өзгергенде жіктеу координаттары да өзгереді.

Енді бұл жіктеудің жалғыз екенін көрсетейік.

Айталық, A - $B_1,B_2,\ldots,B_n$ тағы бір жіктеуі бар екен делік:

$$A=a_1'B_1+a_2'B_2+\ldots+a_n'B_{n\text{-}} \tag{5}$$

(5)-ті (4)-тен алсақ

$$(a_1-a_1')B_1+(a_2-a_2')B_2+\ldots+(a_n-a_n')B_n=0$$

$B_1,B_2,\ldots,B_n$ базис боғандықтан

$$a_j-a_j'=0\ \Rightarrow\ a_j=a_j'\qquad j=1,2,\ldots,n.$$

1.1.6. n өлшемді векторлар кеңістігінің бірлік векторлар жүйесі

Анықтама. j - ші координаттары 1-ге, қалғандары 0-ге тең E_j ($j=1,2,\ldots,n$) векторлар жүйесі n өлшемді векторлар кеңістігінің *бірлік векторлар жүйесі* деп аталады.

$$\begin{aligned}E_1&=(1,0,0,\ldots,0)\\E_2&=(0,1,0,\ldots,0)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\E_n&=(0,,0,\ldots,1)\end{aligned}$$

Әр j-ші вектордың j-ші координатасы 1-ге, басқалары нөлге тең.

1.6-теорема. Бірлік векторлар жүйесі сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін, яғни базис құрайды.

Дәлелдеуі: $K_1E_1 + K_2E_2 + \ldots + K_nE_n = 0$ E_j***-нің орнына координаттармен жазып шықсақ,***

$$\left(K_1, 0, \ldots, 0\right) + \left(0, K_2, 0, \ldots, 0\right) + \ldots + \left(0, 0, \ldots, K_n\right) = 0$$

бұдан

$$\left(K_1, K_2, \ldots, K_n\right) = \left(0, 0, \ldots, 0\right)$$

$K_i = 0$, яғни $E_1, E_2, \ldots, E_n$ - сызықты тәуелсіз.

Екінші жағынан, n өлшемді кеңістіктің кез келген векторы базиске жіктелетіндіктен, $A = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ векторы $E_1, E_2, \ldots, E_n$ векторларының сызықты комбинациясы бола алады:

$$A = a_1E_1 + a_2E_2 + \ldots + a_nE_n$$

Сөйтіп, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ бірлік жүйесі n өлшемді жүйенің бір базисі болады. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ A-ның бірлік базистегі координаталары.

1-мысал: $A = \left(3, -2, 4, -5\right)$ векторын бірлік векторлардың сызықты комбинациясы түрінде жазу керек болсын,

$$A = 3E_1 - 2E_2 + 4E_3 - 5E_4 = \left(3, -2, 4, -5\right).$$

2-мысал: $X\left(1, -6\right)$ векторының $L_1 = \left(2, 3\right)$, $L_2 = \left(1, -1\right)$ базисіндегі координаталарын табу керек болсын.

Шешімі:

$$X = x_1'L_1 + x_2'L_2 = x_1'\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1' + x_2' \\ 3x_1' - x_2' \end{pmatrix}.$$

Векторлар теңсіздігінің анықтамасын пайдаланып,

$$\begin{cases} 2x_1' + x_2' = 1 \\ 3x_1' - x_2' - 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1' = -1 \\ x_2' = 3 \end{matrix}\bigg\}$$

X векторының L_1, L_2 базисіндегі координаттары.

$X = -L_1 + 3L_2 \rightarrow X$ -тің L_1, L_2 -ге жіктелуі.

3-мысал: $X = (4,3)$ - векторын $L_1 = (2,1)$; $L_2 = (1,1)$ базисіне жіктеу керек.

Шешімі:

$$X = x_1L_1 + x_2L_2 = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2$$

X -ң L_1, L_2 базисіндегі жіктеуі былай жазылады:

$$X = L_1 + 2L_2 .$$

1.2. Алгебралық сызықты теңдеулер жүйесін шешу

Сызықты теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6}$$

(6)-шы жүйені матрица түрінде жазайық,

$$AX = B \tag{7}$$

мұндағы $A = (a_{ij})$ - белгісіздердің коэффициенттерінен құралған матрица, $X = (x_j)$ - белгісіздерден тұратын вектор, $B = (b_i)$ - бос мүшеден құралған вектор.

Егер А квадрат $(m = n)$ және ерекше емес матрица $(|A| \neq 0)$ болса, жүйенің шешімі X төмендегідей анықталады,

$$X = A^{-1}B$$

Матрицалық (7) теңдеудің екі жағын да A^{-1} көбейтсек,

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

X кері матрица A^{-1} арқылы анықталып тұр.

Кері матрицаны алгебралық толықтауыштар арқылы есептеу процесі күрделі болып келеді.

Кез келген ерекше емес жүйені шешетін және кері матрицаны анықтайтын қарапайым есептеу схемасы бар. Ол Жордан-Гаусстың белгісіздерді толық жою әдісі деп аталады.

1.2.1. Сызықты теңдеулер жүйесін Жордан-Гаусс әдісімен шешу

Бұл әдіс бойынша белгілі бір итерациялар жүргізілгеннен кейін есептің шешімі анықталады, болмаса жүйенің шешімінің жоқтығы дәлелденеді. Әдістің негізгі идеясы мынадай:

алдымен 1-ші теңдеуден коэффициенті нөлге тең емес белгісіз таңдалады. Бұл таңдалған элемент бұдан былай *шешуші элемент* деп аталады.

Белгілі бір амалдар арқылы шешуші элемент бірінші теңдеуден басқа барлық теңдеулерден жойылады. Содан кейін екінші теңдеуден коэффициенті нөлге тең емес белгісіз таңдалып, ол да екінші теңдеуден басқа теңдеулердің барлығынан жойылады. Осылайша бұл процесс барлық теңдеулер үшін қайталанады. Белгісіздерді жою барысында төмендегі жағдайлар болуы мүмкін:

1. Белгісіздерді жою барысында бірінші теңдеудің сол жағы нөлге тең, ал оң жағы бір сан болуы мүмкін, яғни $0 = b_i \neq 0$. Бұл жүйенің шешімінің жоқ екендігін білдіреді, себебі бірінші теңдеуді белгісіздердің ешқандай мәні қанағаттандырмайды.

2. Бірінші теңдеудің оң жағы да, сол жағы да нөлге айналады. Бұл бірінші теңдеу басқа теңдеулердің сызықты

комбинациясы екендігін көрсетеді. Демек, бұл теңдеуді жүйенің құрамынан алып тастауға болады.

3. Белгісіздерді жою процесі барлық теңдеулерге қолданылып болғаннан кейін, жүйенің шешімі табылады немесе жүйенің үйлесімсіз екендігі дәлелденеді.

1-мысал:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Шешімі:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Жүйені $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B$ түрінде жазуға болады.

Бұдан жүйені шешу үшін, B векторының A_1, A_2, A_3 векторларына жіктелу коэффициенттерін табу керек.

Жіктеу коэффициенттерін анықтау үшін Жордан-Гаусс әдісін пайдаланамыз.

1-қадам. Бірінші теңдеуде $a_{11} = 2 \neq 0$, a_{11}-ді шешуші элемент ретінде аламыз. Бірінші теңдеуді 2-ге бөліп шығамыз да, x_1-ді біріншіден басқа барлық теңдеулерден жоямыз. Жаңадан алынған бірінші теңдеуді 2-ге көбейтіп екінші теңдеуден, 4-ке көбейтіп үшінші теңдеуден аламыз. Сонда,

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 = \frac{1}{2}$$

$$-x_2 - x_3 = 2$$

$$-8x_2 + 10x_3 = -1.$$

Егер x_1-дің коэффициенті нөлге тең болса, оның орнына x_1-дің коэффициенті нөлге тең емес кез келген басқа теңдеуді алуға болады.

2-қадам. $a'_{22} = -1 \neq 0$ болғандықтан, оны шешуші элемент ретінде таңдаймыз да, екінші теңдеуді 2-ге бөлеміз және x_2-ні екіншіден басқа барлық теңдеуден шығарамыз. Ол үшін түрленген екінші теңдеуді $\dfrac{3}{2}$-ке көбейтіп бірінші теңдеуден аламыз, екінші теңдеуді 8-ге көбейтіп үшінші теңдеумен қосамыз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2})x_2 - (2 + \frac{3}{2})x_3 = \frac{4}{2} + \frac{3}{2} \\ x_2 + x_3 = -2 \\ (8-8)x_2 + (8+10)x_3 = -16-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 0 - \frac{7}{2}x_3 = \frac{7}{2} \\ 0 + x_2 + x_3 = -2 \\ 0 + 0 + 18x_3 = -17. \end{array}$$

3-қадам. Енді $a_{33} = 18 \neq 0$-ті шешуші элемент ретінде таңдаймыз да, x_3-ті үшіншіден басқа теңдеулерден жоямыз. Ол үшін үшінші теңдеуді 18-ге бөліп екінші теңдеуден аламыз, үшінші теңдеуді $\dfrac{7}{2}$-ге көбейтіп, бірінші теңдеуге қосамыз. Сонда,

$$x_1 + 0 + (\frac{7}{2} - \frac{7}{2})x_3 = \frac{7}{2} - \frac{17}{18}\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{2}(1 - \frac{17}{18}) = \frac{7}{36};$$

$$0 + x_2 + 0 = -2 + \frac{17}{18} = -\frac{19}{18};$$

$$0 + 0 + x_3 = -\frac{17}{18}.$$

Қарастырылған жүйе үшін A_1, A_2, A_3 сызықты тәуелсіз болғандықтан (базис), бір ғана жіктеу болады,

$$\frac{7}{36}A_1 - \frac{19}{18}A_2 - \frac{17}{18} = B$$

Демек, A_1, A_2, A_3 векторлары үш өлшемді векторлар кеңістігінің базисі бола алады.

Сызықты теңдеулер жүйесіндегі белгісіздер коэффициенттері мен бос мүшелерді түрлендіру жеңіл болу үшін, Жордан-Гаусс әдісін кесте арқылы жүргізген көрнекі болады. Жүйенің коэффициенттері мен бос мүшелерін кестеге жазып Жордан-Гаусс түрлендіруін жасайық:

1-кесте

A_1	A_2	A_3	$\dots$	A_s	$\dots$	A_n
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1s}	$\dots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2s}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{r1}	a_{r2}	a_{r3}	$\dots$	a_{rs}	$\dots$	a_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{ms}	$\dots$	a_{mn}

Жордан-Гаусс әдісінің әр қадамында айнымалылардың бірі базистік айнымалыға түрлендіріліп, теңдеулердің бірінде ғана бірге тең коэффициентпен қалдырылып отырады.

Енді осы процесті сипаттайық:

Айталық x_s айнымалының r-ші теңдеудегі коэффициенті $a_{rs} \neq 0$ болсын. x_s-ті базистік айнымалыға түрлену үшін r-ші теңдеудің коэффициенттерін a_{rs}-ке бөліп (x_s-тің коэффициенттері бірге тең болу үшін), нәтижені сәйкес a_{is}-ке көбейтіп, қалған теңдеулердің коэффициенттерінен азайтып шығамыз (x_s-тің коэффициенттері нөлге айналып отырады). Жордан-Гаусс әдісінің бір қадамындағы операциялар Жордан-Гаусс түрлендірулері деп аталады.

a_{rs} - коэффициенттері шешуші (жетекші, бас) элемент деп, ал кестедегі оған сәйкес r-ші жол мен s-ші баған сәйкесінше шешуші жол, шешуші баған деп аталады.

Жордан-Гаусс түрлендіруінің әр қадамында алынған жаңа жүйенің коэффициенттері a'_{ij}, b'_i мына формулалармен есептеледі:

$$\begin{cases} a'_{rj} = \dfrac{1}{a_{rs}} \cdot a_{rj}, j = 1,2,...,n \\ b'_r = \dfrac{1}{a_{rs}} \cdot b_r \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{is}}{a_{rs}} \cdot a_{ij} \\ b'_i = b_i - \dfrac{a_{is}}{a_{rs}} \cdot b_r, i = \overline{1,m}, i \neq r. \end{cases} \tag{9}$$

Бұл формулалармен есептеуді тіктөртбұрыштар ережесі деп аталатын ережемен де жүргізуге болады.

Түрленген a'_{ij} элементін табу үшін a_{ij}-ге карама-карсы жетекші баған мен жетекші жолдағы элементтердің көбейтіндісін жетекші элементке бөліп, a_{ij}-ден алып тастау керек. Сонда жетекші баған элементі нөлге тең болады,

$$a'_{is} = 0, \ i = 1,2,...,m, \ i \neq r;$$
$$a'_{rs} = 1.$$

Сонымен, Жордан-Гаусс түрлендіруінің 1-ші қадамында төмендегі амалдар орындалады:

1. Бас элемент 1-ге ауыстырылады. Жетекші жолдың қалған элементтері жетекші элементке бөлінеді.

2. Жетекші жолдың қалған элементі нөлге (толтырылады) ауыстырылады.

3. Жетекші жол мен бағанға жатпайтындары тіктөртбұрыштар ережесі бойынша есептелінеді.

Мысал.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

жүйесін шешу керек немесе $A_0 = (1;4;-2)$ векторының A_1, A_2, A_3, A_4 векторларына жіктелу коэффициенттерін табу керек:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = A_0 .$$

Шешімі: Белгісіздер коэффициенттері мен бос мүшелерді кестеге толтырамыз да, осы кесте элементтеріне Жордан-Гаусстың толық жою әдісін қолданамыз.

2- кесте

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	
5	2	3	3	1	
2	-2	5	2	4	
3	4	2	2	-2	1-ші итерация
1	2/5	3/5	3/5	1/5	
0	-14/5	19/5	4/5	18/5	
0	14/5	1/5	1/5	-13/5	
1	0	8/7	5/7	5/7	2-ші итерация
0	1	19/14	-2/7	-9/7	
0	0	4	1	1	
1	0	0	3/7	3/7	
0	1	0	3/56	-53/56	3-ші итерация
0	0	1	1/4	1/4	

Жүйенің соңғы түрі:

$$x_1 + 3,7x_4 = 317$$

$$x_2 - \frac{1}{56}x_4 = -\frac{53}{56}$$

$$x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{4}.$$

Бұдан жүйенің жалпы шешімі:

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4; \quad x_2 = -\frac{53}{56} + \frac{1}{56}x_4; \quad x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

A_1, A_2, A_3 векторлары сызықты тәуелсіз және үш өлшемді кеңістіктің базисі бола алады, оларға сәйкес x_1, x_2, x_3 белгісіздері базистік, A_4-ке сәйкес белгісіз x_4 бос айнымалы (кез келген мән беруге болады) болады.

Сызықты тәуелсіз теңдеулерде базистік белгісіздерден құралған минор – *базистік минор* деп аталады. Жүйенің жалпы шешіміндегі бос айнымалыларды нөлге теңестіргеннен кейінгі алынған шешім – *базистік* деп аталады. Демек, қарастырған жүйенің базистік шешімі:

$$x_1 = \frac{3}{7}; \quad x_2 = -\frac{53}{56}; \quad x_3 = \frac{1}{4}; \quad x_4 = 0.$$

Базистік шешім үшін A_0-нің A_1, A_2, A_3 векторлары бойынша жіктелуі:

$$A_0 = \frac{3}{7}A_1 - \frac{53}{56}A_2 + \frac{1}{4}A_3.$$

Сонымен базистік шешімде бос айнымалылар нөлге тең де, негізгі айнымалылар нөлге тең емес болады. Бірақ, кейде базистік шешімде негізгі айнымалылардың да кейбіреулері нөлге тең болуы мүмкін. Мұндай шешім *нұқсанды* шешім деп аталады. m теңдеуден тұратын сызықты тәуелсіз теңдеулер жүйесінің нөлге тең емес m белгісізі бар базистік шешімі *нұқсансыз* деп аталады.

Шынында да, егер жоғарыдағы мысалдың шешімінің соңғы қадамында x_3-тің орнына x_4 жойылса, төмендегі нәтиже алынған болар еді:

3-кесте

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
1	0	8/7	5/7	5/7
0	1	-19/14	-3/7	-3/7
0	0	4	1	1
1	0	-12/7	0	0
0	1	-3/14	0	-1
0	0	4	1	1

3-ші итерация

A_1, A_2, A_4 векторлары базис, x_1, x_2, x_4 базистік белгісіздер, ал x_3 бос айнымалы болар еді. Бос айнымалы $x_3 = 0$ деп алсақ, базистік шешімі,

$$1.\ \ x_1 = \frac{12}{7}x_3; \quad x_2 = -1 + \frac{3}{17}x_3; \quad x_3 = 1 - 4x_3;$$

бұдан $x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 4$.

Базистік белгісіз x_1 нөлге тең болғандықтан, жүйенің шешімі нұқсанды болып тұр. A_0 базис бойынша жіктелуі,

$$-A_2 + A_4 = A_0.$$

Нұқсандылықтың геометриялық мағынасы. Біз қарастырған мысалда A_0 векторы A_2, A_4 векторларымен бір жазықтықта жатыр, және ешқайсысына пропорционал болмағандықтан, сол векторлардың сызықты комбинациясы болады.

Кез келген өлшемді кеңістік үшін нұқсандылықтың мағынасы –қарастырылып отырған кеңістіктің векторы, базистің барлық векторларының кейбіреулерінің ғана сызықты комбинациясы болып табылады.

Жордан-Гаусс әдісімен кері матрицаны анықтау үшін, кестеге өлшемі берілген жүйе матрицасының өлшемімен бірдей бірлік матрицаны қоса толтырады да, Жордан-Гаусс түрлендірулерін оған да қолданып отырады. Жүйенің матрицасы бірлік, ал бірлік матрица кері матрицаға түрленеді. Мысалы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

сызықты теңдеулер жүйесін Жордан-Гаусс әдісімен шешіп, базистік матрицаға кері матрица табу керек.

4-кесте

A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3	B
2	-1	2	1	1	0	0	1
1	1	-1	3	0	1	0	5
3	-1	3	-1	0	0	1	5
1	-1/2	1	¥	¥	0	0	1/2
0	**3/2**	**-2**	**5/2**	**-1/2**	**1**	**0**	**9/2**
0	1/2	0	-5/2	-3/2	0	1	7/2
1	0	1/3	4/3	1/3	1/3	0	2
0	1	-4/3	5/3	-1/3	2/3	0	3
0	0	2/3	-10/3	-4/3	-1/3	1	2
1 0	0	3	1	1	1/2	-1/2	1
0 1	0	-5	-3	-3	0	2	7
0 0	1	-5	-2	-2	-1/2	3/2	3

Базистік формадағы эквивалентті жүйе:

$$x_1 + \ 3x_4 = 1$$
$$x_2 - 5x_4 = 7$$
$$x_3 - 5x_4 = 3\,.$$

Жүйенің жалпы шешімі:

$$x_1 = 1 - 3x_4; \quad x_2 = 7 + 5x_4; \quad x_3 = 3 + 5x_4\,.$$

Бұдан $x_1 = 1; \ \ x_2 = 7; \ \ x_3 = 3.$

1.2.2. Векторларды базистерге жіктеу.

Базистен базиске көшу

Айталық, n өлшемді векторлар кеңістігінде $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_{n+m}$ векторлар жүйесі берілсін. Базис құрайтын жүйені анықтап, жүйенің басқа n өлшемді векторларын базис векторларына жіктеу керек. Егер базис болатын бірнеше ішкі жүйелер болса, базистен базиске көшіп, жіктеу коэффициенттерін анықтау керек болсын.

Мұндай есеп Жордан-Гаусс әдісі арқылы оңай шешіледі. Есепті мысал арқылы шешейік. Төмендегідей векторлар жүйесі берілсін:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Кеңістік үш өлшемді, ал векторлар саны бесеу болғандықтан жүйе сызықты тәуелді. Базис құрайтын үш векторды алып, басқа векторларды базис векторларына жіктейміз.

Векторларды кестеге жазып, Жордан-Гаусс түрлендірулерін орындайық.

5-кесте

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\boxed{1}$	2	-1	2	3
-2	-1	2	1	-6
3	-2	4	-3	2
1	2	-1	2	3
0	$\boxed{3}$	0	5	0
0	-8	7	-9	-7
1	0	-1	-4/3	3
0	1	0	5/3	0
0	0	$\boxed{7}$	13/3	-7
1	0	0	-5/7	2
0	1	0	5/3	0
0	0	1	13/21	-1

A_1, A_2, A_3 сызықтық тәуелсіз, сондықтан базис құрайды, оның үстіне соңғы итерацияда A_4, A_5 бағандарында A_4 пен A_5 базис векторлары бойынша жіктелу коэффициенттері табылған:

$$A_4 = -\frac{5}{7}A_1 + \frac{5}{3}A_2 + \frac{13}{21}A_3$$
$$A_5 = 2A_1 + 0A_2 - A_3.$$

A_5 векторы базистің екі ғана векторының сызықты комбинациясы болып тұр, яғни A_5 үшін базистің A_1, A_2, A_3 векторлары бойынша сызықты комбинациясы нұқсанды болып тұр.

Жалпы соңғы итерация нәтижесінде алынған сандар A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 векторларының базистің A_1, A_2, A_3 векторлары бойынша жіктелу коэффициенттері болып табылады. Шынында да,

$$A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3$$
$$A_2 = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3$$
$$A_3 = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3$$
$$A_4 = -\frac{5}{7} \cdot A_1 + \frac{5}{3} \cdot A_2 + \frac{13}{21} \cdot A_3$$
$$A_5 = 2 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 - A_3.$$

A_4' векторының базис векторлары бойынша жіктелу коэффициенттері нөлге тең емес болғандықтан, шешуші элемент ретінде кез келген коэффициентті таңдап толық бір жою жасалады. Нәтижесінде A_4 векторы бірлік векторға түрлендіріліп базис құрамына кіреді. Шешуші элементіне сәйкес келген бір базис векторы базистің құрамынан шығады. Соңында жаңа базис және векторлардың жаңа базис векторлары бойынша жіктелу коэффициенттері анықталады.

II. СЫЗЫҚТЫ ПРОГРАММАЛАУ ЕСЕПТЕРІ

2.1. Сызықты программалаудың жалпы есебі және оның әр түрлі жазылу формалары

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{10}$$

сызықты функция және сызықты теңдеулер жүйесі,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{11}$$

мен

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots n \tag{12}$$

теңіздігі берілсін. Мұндағы $a_{ij},\ c_j,\ b_i$ берілген сандар.

(11), (12) шарттарын қанағаттандыратын және (10) сызықты функцияға ең кіші немесе ең үлкен мән қабылдататын $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оң мәндерін табу керек.

Сызықты функция таңдалған параметрлердің сапа көрсеткіші болғандықтан сызықты форма деп, ал (11), (12) теңдіктер мен теңсіздіктер жүйесін *шарттар* немесе *шектеулер жүйесі* деп атайды.

$A = \{a_{ij}\}$ $\left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right)$ *шарттар матрицасы* деп аталады. Әрбір $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ жоспары сызықты $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ форманың белгілі бір мәнімен байланысты. Z - тің мәні неғұрлым үлкен болса (сызықты форманың ең үлкен мәнімен байланысты есептерде), жоспар жақсы болып есептеледі.

Сызықты программалау есебінің (СПЕ) бірнеше жазылу формалары бар.

СПЕ векторлық формада жазылуы:

$$Z = CX \qquad (13)$$

Сызықты функциясы:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, \quad x \geq 0 \qquad (14)$$

шектеулері берілген. Мұндағы

$$C = (c_1, c_2 \ldots, c_n);$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

CX - скалярлық көбейтінді.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad ,\ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

векторлары белгісіздердің коэффициенттерінен және бос мүшеден құралған. Z сызықты функцияның (14) шектеулермен ең кіші мәнін табу керек.

СПЕ матрицалық түрде жазылуы:

$$Z = CX$$

сызықты функциясы мен

$$AX = A_0; \qquad X \geq 0$$

шектеулері берілген.

Мұндағы $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – матрица-жол, $A = \{a_{ij}\}$ – жүйенің матрицасы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – матрица-баған, } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – матрица-баған.}$$

СПЕ қосынды белгісімен жазылуы:

Сызықты функцияның $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_j \geq 0$$

шектеулеріндегі ең кіші мәнін табу керек.

Негізгі анықтамалар

1-анықтама. СПЕ-нің (11), (12) шектеулер жүйесін қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторы СПЕ-нің *үйлесімді жоспары* деп аталады.

2-анықтама. Барлық үйлесімді жоспарлар жиынтығы СПЕ-нің *үйлесімді жоспарлар аймағы* деп аталады да, W таңбасымен белгіленеді.

3-анықтама. Мақсат функцияның экстремумын тексеретін үйлесімді жоспар *тиімді жоспар* немесе *тиімді шешім* деп аталады.

4-анықтама. Үйлесімді жоспардың оң компоненттеріне сәйкес A_i $(i = \overline{1,m})$ векторлары сызықты тәуелсіз болса, ондай үйлесімді жоспар *тірек жоспар* деп аталады.

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B \qquad (15)$$

жіктеуіндегі оң x_i-ге $i = 1,\ldots,m$ сәйкес келетін A_i векторлары сызықты тәуелсіз болса, онда $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *тірек жоспары* деп аталады.

5-анықтама. Егер үйлесімді жоспардың саны m-ге тең, нөлге тең емес базистік айнымалылары болса *нұқсансыз жоспар* деп, ал керісінше болса *нұқсанды жоспар* деп аталады.

2.2. Сызықты программалау (СП) әдістерімен шешілетін экономикалық есептер

1. Шикізатты тиімді пайдалану туралы есеп. Айталық өндіріс орны n түрлі $A_1, A_2, ..., A_n$ бұйым өндіреді. Оларға m түрлі $l_1, l_2, ..., l_m$ шикізат керек. Шикізаттардың қоры шектеулі және олар жоспарланған уақытта $b_1, b_2, ..., b_m$. Бұйымның j-ші түріне жұмсалатын i-ші шикізат бірлігін көрсететін технологиялық коэффициенттер a_{ij} $i = 1,2,...,m;$ $j = 1,2,...,n$. Бұйымның j-ші түрінің бір данасының бағасы C_j $j = 1,2,...,n$ белгілі.

Кәсіпорынға ең көп пайда түсіретін өнім өндірудің жоспарын жасау керек. Берілгендерді төмендегі кестеге толтырайық:

6-кесте

Ресурс Түрлері	Ресурстар коры	Технологиялық коэффициенттер			
		P_1	P_2	...	P_n
l_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
l_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
.	.	.	.	.	.
:	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
l_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{nm}
	Пайда	C_1	C_2	...	C_n

Есептің математикалык моделін құрайық, яғни экономикалық талаптарға сәйкес математикалық байланыстар яғни теңдеу, теңсіздіктер арқылы жазайық.

x_1 арқылы шығарылатын бұйымдардың біріншісінің санын, x_2 - екіншісін т.б. белгілейік. Өнім бірлігіне жұмсалатын шикізат бірлігін және шикізат қорын ескеріп төмендегідей шектеулер жазуға болады:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Барлық өнімнің бағасы $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ функциясымен анықталады.

Қойылған шектеулерді қанағаттандыратын және өндіріс өнімдерінің бағасы Z ең көп болатындай өндіріске тиімді жоспар $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ құру керек.

Z функциясы тиімді жоспарлаудың негізгі мақсаты болғандықтан, оны мақсат функциясы деп атайды.

$x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалылар мақсат функциясына да, шектеулер жүйесіне де бірінші дәрежемен қатысады және $a_{ij}, b_i, c_j \ (i = 1, m; j = 1, n)$ $(i = 1, m; j = 1, n)$ көрсеткіштері тұрақты болғандықтан есеп СП типтік есебі, сондықтан мақсат функциясын сызықты форма деп те атайды.

Диета туралы есеп. Әр адам денсаулығымен жұмыс жасау қабілетін сақтау үшін тәулігіне белоктар, майлар, көміртегі, су, витаминдер сияқты нәрлі заттардың белгілі бір мөлшерін қабылдап тұруы керек.

Тағамдардың әр түрінде бұл ингридиенттердің қоры әртүрлі n_i $i = 1,2,...n$ болады. Қарапайымдылық үшін тағамның 2 түрін, ингридиенттердің 4 түрін қарастырайық.

7-кесте

Нәрлі заттар	Нормасы	Тағам түрлері	
		n_1	n_2
B_1-майлар	b_1	a_{11}	A_{12}
B_2-белоктар	b_2	a_{21}	A_{22}
B_3-көмертегі	b_3	a_{31}	A_{32}
B_4-су	b_4	a_{41}	A_{42}
Бағасы		C_1	C_2

C_1 - n_1 тағамындағы майлардың қоры; қалғандарының мағынасы осығын ұқсас. C_j - j-тағам бірлігінің бағасы.

Организм нәрлі заттардың барлық түрінің тәуліктік нормасынан кем қабылдамайтындай, бірақ бағасы ең арзан болатын тамақтану жүйесін құру керек. x_1 мен x_2 адам организмі қабылдайтын n_1, n_2 тағамдарының шамасы болсын. Олай болса, бұл екі тағамдағы майлардың шамасы $a_{11}x_1 + a_{22}x_2$ -ге тең және бұл майдың нормасы b_1 - ден кем болмауы керек.

Бұл талапты $a_{11}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_1$ теңсіздігі түрінде жазуға болады.

Теңсіздік белгісі (тура тең емес) таңдалған тамақтану жүйесінде қабылдайтын тағамның мөлшері нормадан көп болуы да мүмкін. Қалған,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \qquad i = \overline{2,5}$$

теңсіздіктер де осыған ұқсас.

Тамақтанудың жалпы бағасы $Z = c_1x_1 + c_2x_2$. Сонымен СПЕ төмендегідей түрде қойылады:

$$a_{11}x + a_{12}x_2 \geq b_i$$
$$i = 1,2,\ldots,5$$

теңсіздіктер жүйесі және $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ сызықты формасы берілген.

Жүйенің барлық теріс емес шешімдерінің ішінен сызықты Z формаға ең кіші мән беретінін табу керек.

Тамақтану туралы есепті жалпылауға болады.

Тағамдардың n түрі, b_1-ден кем емес нәрлі заттардың m түрі берілсін. a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ – тағамның j-ші түріндегі i-ші нәрлі заттың бірлігі болсын, c_j – j-ші тағамның бағасы.

x_j – рациондағы j-ші тағамның шамасы сызықты $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ функциясының

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \geq b_{ij}, \qquad i = 1,\overline{m}$$

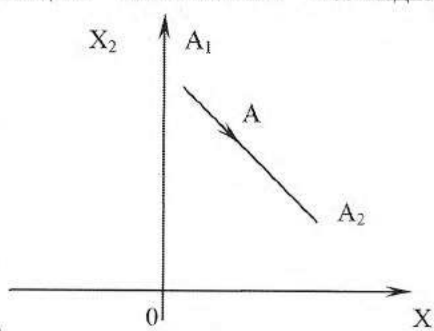
$$x_j \geq 0, \qquad (j = 1,\overline{n})$$

шектеулеріндегі ең кіші мәнін табу керек.

2.3 Дөңес жиындар

Сызықтық комбинацияның дөңес жиыны туралы түсінік.

Жазықтықта түзу сызықты бағытталған кескіндіні анықтайтын $A_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$, $A_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$ нүктелерін қарастырамыз. Кесіндінің ұштарының координаттары арқылы кесіндінің кез келген ішкі $A(x_1, x_2)$ нүктесінің координаталарын анықтаймыз.



3-сурет

$$\overline{A_1A} = \left(x_1 - x_1^{(1)}, x_2 - x_2^{(1)}\right)$$

және

$$\overline{A_1A_2} = \left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right)$$

векторлары параллель және бірдей бағытталған, сондықтан

$$\overline{A_1A} = t\left(\overline{A_1A_2}\right), \text{ мұндағы } 0 \leq t \leq 1$$

немесе

$$\begin{matrix} x_1 - x_1^{(1)} = t\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right) \\ x_2 - x_2^{(1)} = t\left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_1^{(1)} + t\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right) \\ x_2 = x_2^{(1)} + t\left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right) \end{matrix}$$

$$x_1 = x_1^{(1)} + tx_1^{(2)} - tx_1^{(1)} = (1-t)x_1^{(1)} + tx_1^{(2)}$$

$$x_2 = x_2^{(1)} + tx_2^{(2)} - tx_2^{(1)} = (1-t)x_2^{(1)} + tx_2^{(2)}$$

$1-t=\lambda_1;\ t=\lambda_2$ белгілеулерін жасап

$$x_1=\lambda_1 x_1^{(1)}+\lambda_2 x_1^{(2)};$$

$$x_2=\lambda_1 x_2^{(1)}+\lambda_2 x_2^{(2)};\ \lambda_1\ge 0;\ \lambda_2\ge 0; \lambda_1+\lambda_2=1$$

аламыз.

A нүктесінің координаталары A_1 мен A_2 нүктелерінің аттас координаталарын сәйкесінше A_1, A_2 сандарына көбейтінділерінің қосындысы екендігін ескерсек,

$$A=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2 \tag{16}$$

$$\lambda_1\ge 0;\ \lambda_2\ge 0;\ \lambda_1+\lambda_2=1 \tag{17}$$

екендігін аламыз.

(16), (17) шарттарын қанағаттандыратын *A* нүктесі A_1 мен A_2 нүктелерінің дөңес сызықты комбинациясы деп аталады.

$\lambda_1=1$ және $\lambda_2=0$ болғанда *A* нүктесі кесіндінің A_1 ұшымен сәйкес, ал $\lambda_1=0$ және $\lambda_2=1$ болғанда A_2 ұшымен сәйкес келеді. Яғни *t* айнымалысы 0-ден 1-ге дейінгі мәндерді қабылдағанда, *A* нүктесі $\overline{A_1A_2}$ кесіндісін сызып шығады. A_1 және A_2 нүктелері бұрыштық немесе $\overline{A_1A_2}$ кесіндісінің шеткі нүктелері деп аталады.

Сызықты дөңес комбинацияның анықтамасынан бұрыштық нүкте кесіндінің басқа екі нүктесінің дөңес сызықтық комбинациясы бола алмайтындығын байқаймыз. (16), (17) қатынас кеңестіктің өлшемінен тәуелсіз.

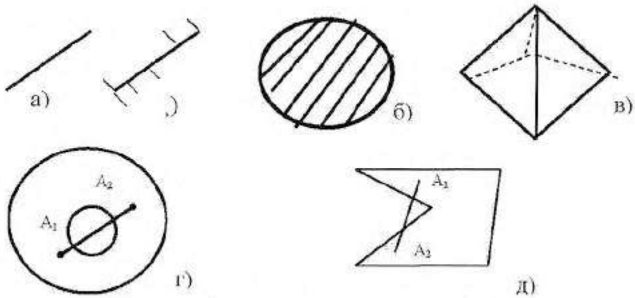
Анықтама. Айталық $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нүктелері берілсін. Егер

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i,\lambda_j\ge 0\ \ (j=1,2,\ldots,n),\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$$

шарты орындалса, *A* нүктесі дөңес сызықты комбинация деп аталады.

Анықтама. Кез келген екі нүктемен қатар, олардың кез келген дөңес сызықты комбинациясы да, өзіне жататын дөңес жиын деп аталады.

Бұл анықтаманың геометриялық мағынасы. Кез келген екі нүктемен қатар, осы нүктелерді қосатын түзу сызықты кесінді де толығымен жиынға жатады. Жазықтықта түзу сызықты кесінді түзу, жарты жазықтық, дөңгелек, үшбұрыш, трапеция және тағы басқалар, ал кеңістікте шар, куб, жарты кеңістік және тағы басқалар дөңес жиындардың мысалы бола алады.



4-сурет. *а), ә), б), в) – дөңес жиындар;*
г), д) – дөңес емес жиындар.

Дөңес жиынға байланысты анықтамалар

1-анықтама. Жиынға жататын нүктелер де, жатпайтын нүктелер де ішкі нүктесі болып саналатын шардың центрі болатын жиын нүктесі – шеткі нүкте деп аталады. Шеткі нүктелердің жиынтығы жиынның шекарасын құрайды.

2-анықтама. Барлық шекаралық нүктелері өзінде жататын жиын – тұйық жиын деп аталады. Тұйық жиындар шектелген, шектелмеген болуы мүмкін.

3-анықтама. Егер жиынның барлық нүктелері центрі осы жиынның кез келген нүктесі, ал радиусы ақырлы сан болатын шардың ішінде жатса, жиын шектелген жиын деп, әйтпесе – шектелмеген жиын деп аталады.

4-анықтама. Екі немесе бірнеше жиынның ортақ нүктелерінен тұратын жиын – қи ылысу деп аталады.

5-анықтама. Дөңес сызықты комбинация ретінде өрнектелмейтін жиынның нүктесі оның бұрыштық немесе шеткі нүктесі деп аталады.

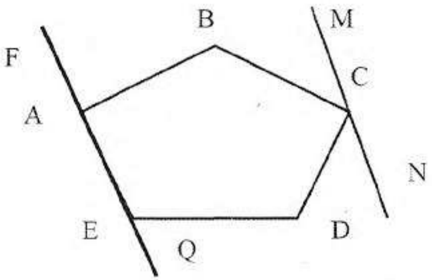
Бұл анықтаманың геометриялық мағынасы: бұрыштық нүктелер арқылы барлық нүктесі жиында жататын кесінді жүргізуге болмайды.

Үшбұрыштың бұрыштық нүктелері – төбелері, дөңгелектің бұрыштық нүктелері оны қоршайтын шеңбердің нүктелері болады. Сонымен дөңес жиындардың бұрыштық нүктелерінің саны ақырлы да, ақырсыз да болуы мүмкін.

Түзудің, жазықтықтың, жарты жазықтықтың, жарты кеңістіктің бұрыштық нүктелері жоқ.

6-анықтама. Жазықтықта саны ақырлы бұрыштық нүктелері бар дөңес, тұйық шектелген жиын – дөңес көпбұрыш деп аталады. Көпбұрыштың бұрыштық нүктелері оның төбелері деп, ал екі бұрыштық нүктені қосатын және шекара құрайтын кесінділер –көпбұрыштың қырлары деп аталады.

7-анықтама. Көпбұрыштың бір жағында орналасқан, көпбұрышпен ең болмаса бір ортақ нүктесі бар түзу тірек түзуі деп аталады.

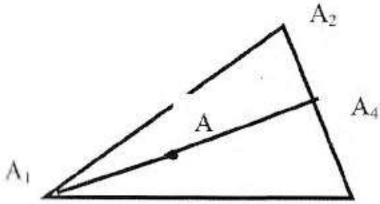


5-сурет. FQ, MN түзулері ABCDE көпбұрышына тірек түзулер болады.

Анықтама. Үш өлшемді кеңістіктің саны ақырлы тұйық, бұрыштық нүктелері бар, шектелген дөңес жиыны – дөңес көпжақ деп аталады. Көпжақтың бұрыштық нүктелері оның төбелері деп аталады. Көпжақты шектейтін көпбұрыштар оның жақтары, олардың қиылысу кесінділері қырлары деп аталады.

Анықтама. Көпжақтың бір жағында орналасқан, көпжақпен ең болмаса бір ортақ нүктесі бар жазықтық тірек жазықтығы деп аталады.

Теорема. Тұйық, шектелген, дөңес көпжақ өзінің бұрыштық нүктелерінің сызықты комбинациясы болады.



6-сурет

Дәлелдеуі. n төбесі бар көпжақты қарастырамыз. Алдымен кез келген нүкте теореманы қанағаттандыратынын дәлелдейміз.

$A_1A_2A_3$ үшбұрышынан кез келген нүктені аламыз және осы нүкте арқылы A_1A_4 кесіндісін жүргіземіз. A нүктесі $\overline{A_1A_4}$ кесіндісінде жатқандықтан ол кесіндінің шеткі нүктелерінің сызықтық комбинациясы, яғни

$$A = t_1A_1 + t_4A_4,\ t_1 \ge 0;\ t_4 \ge 0;\quad t_1 + t_4 = 1.$$

$A_4 \in \overline{A_2A_3}$, демек A_4 $\overline{A_1A_3}$ кесіндісінің шеткі нүктелерінің сызықты комбинациясы

$$A_4 = t_2A_2 + t_3A_3,\ t_2 \ge 0;\ t_3 \ge 0;\ t_2 + t_3 = 1$$

Енді A_4 үшін алған өрнекті алдыңғы өрнекке қойсақ,

$$A = t_1A_1 + t_4\left(t_2A_2 + t_3A_3\right) = t_1A_1 + t_4t_2A_2 + t_4t_3A_3,$$
$$t_1 = \lambda_1;\ t_2t_4 = \lambda_2;\quad t_4t_3 = \lambda_3$$

белгілеулерін енгізсек,

$$A = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3,$$
$$\lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 \ge 0;\ \lambda_3 \ge 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

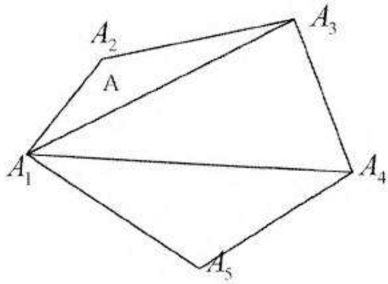
Яғни A – A_1, A_2, A_3 төбелерінің бұрыштық комбинациясы.

Егер $\lambda_1 = 0$ десек, бұл A нүктесінің A_4 -пен бірігетіндігін және $\overline{A_2A_3}$ жағында жататындығын көрсетеді. Бұл жағдайда A үшін сызықты комбинация төмендегідей:

$$A = 0A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 = \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3$$
$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = 0;\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

n төбесі бар (n>3).

Дөңес көпбұрыштан кез келген A нүктесін аламыз.



7-сурет

Диагональдардың көмегімен көпбұрышты n үшбұрышқа бөлеміз.

A үшбұрыштардың біріне түседі. Айталық ол $A_1A_2A_3$ үшбұрышында екен делік. Олай болса, жоғарыда дәлелдегеніміздей $A - A_1, A_2, A_3$ төбелерінің сызықты комбинациясы болады.

2.4. СП есептерінің қасиеттері. Негізгі теоремалары

1-теорема. СП есебінің шешімдер жиыны дөңес жиын болады.

Дәлелдеуі : Егер $\overline{X}_1$ және $\overline{X}_2$ СПЕ жоспарлары болса, олардың дөңес сызықты комбинациясы да,

$$\overline{X} = \lambda_1 \overline{X}_1 + \lambda_2 \overline{X}_2,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (18)$$

есептің жоспары болатындығын дәлелдеу керек.

X_1 мен X_2 жоспар болса, олар үшін

$$AX_1 = A_0 \quad X_1 \geq 0$$
$$AX_2 = A_0 \quad X_2 \geq 0$$

(18)-дің екі жағында A -ға көбейтсек,

$$AX = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = A\lambda_1 X_1 + A\lambda_1 X_1 =$$
$$= \lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_0 = (\lambda_1 + \lambda_2) A_0 = A_0$$

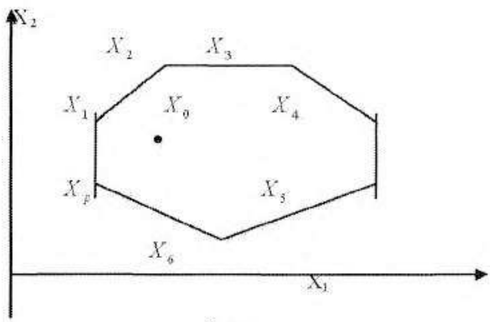
$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $\lambda_1 \geq 0$; $\lambda_2 \geq 0$; болғандықтан $X \geq 0$

Ендеше (СПЕ шарттары орындалады) X -жоспар.

2-теорема. СПЕ мақсат функциясы өзінің тиімді шешімін шешімдер көпжағының бұрыштық нүктесінде қабылдайды. Егер мақсат функциясы өзінің тиімді мәнін бірнеше бұрыштық нүктеде қабылдаса, онда сол бұрыштық нүктелердің дөңес сызықтық комбинациясы да тиімді шешім болады.

Теореманың дәлелденуі 2 бөлімнен тұрады.

1-ші бөлімді дәлелдеу үшін программадан тыс материал қолданылатындықтан, біз оны қарастырмаймыз.



8-сурет

2-ші бөлімін дәлелдеу үшін $Z(X)$ өзінің ең кіші мәнін бірнеше бұрыштық нүктеде қабылдайды деп жоримыз. Айталық,

$$X_1, X_2, ..., X_q \quad 1 < q < p$$

нүктелерінде ең кіші мән қабылдансын. Олай болса,

$$Z(X_1) = Z(X_2) = ...Z(X_q) = m\ .$$

Егер X осы нүктелердің дөңес сызықты комбинациясы десек,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_q X_q; \ \ \lambda_i \ge 0, \ i = \overline{1,q}, \ \ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1,$$

онда

$$Z(X) = Z(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \cdot Z(X_i) = m \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = m,$$

яғни, Z мақсат функциясы $X_1, X_2, ..., X_q$ бұрыштық нүктелердің дөңес сызықты комбинациясы болатын кез келген X нүктесінде өзінің ең кіші мәнін қабылдайды. Теорема дәлелденді.

Қорытынды. Бұл теоремадан СПЕ тиімді жоспарын табу үшін шешімдер көпжағының бұрыштық нүктелерін (тірек жоспарларын) зерттеу жеткілікті.

Ескерту. СП есебінің үйлесімді жоспары деп $A_1x_1 + A_2x_2 + .. + A_nx_n = A_0 = B$ шартын қанағаттандыратын компнент- тері оң $(x_1, x_2, ..., x_n)$ векторын айтамыз.

Айталық, коэффициенттері теріс емес сызықтық комбинациясы B мен бірдей болатын $A_1, A_2, ..., A_k$ векторлар жүйесі табылсын.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B$$

Осындай жүйе үшін мына теореманы тұжырымдауға болады.

3-теорема. Егер $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,k}$ үшін $A_1x_1 + A_2x_2 + .. + A_nx_n = A_0 = B$ теңдігін қанағаттандыратын өзара сызықты тәуелсіз $A_1, A_2, ..., A_k$ векторлар жүйесі белгілі болса, онда $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ..., 0)$ векторы шешімдер көпжағының бұрыштық нүктесі болады. Яғни, әрбір базистік шешімге шешімдер көпжағының бір бұрыштық нүктесі сәйкес келеді.

Базистік шешімнің анықтамасы бойынша $A_1, A_2, ..., A_k$ сызықты тәуелсіз және m өлшемді кеңістіктің базисін құрайды.

Дәлелдеуі. Айталық, X бұрыштық нүкте емес. Олай болса белгілі теорема бойынша X шешімдер көпжағының кез келген басқа екі нүктесінің дөңес сызықты комбинациясы болады

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

X_1 мен X_2 компоненттері және λ_1, λ_2 теріс емес және X-тің соңғы $n-k$ компоненті нөлдер болғандықтан, X_1 мен X_2-нің де сәйкес компоненттері 0 болады. Яғни,

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_k^{(1)}, 0, 0, .., 0)$$
$$X_1 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_k^{(2)}, 0, 0, .., 0)$$

X_1 мен X_2 СПЕ жоспарлары болғандықтан

$$AX_1 = B$$
$$AX_2 = B$$

Бұларды векторлық түрде қайта жазсақ,

$$A_1 x_1^{(1)} + A_2 x_2^{(1)} + ... + A_k x_k^{(1)} = B$$
$$A_1 x_1^{(2)} + A_2 x_2^{(2)} + ... + A_k x_k^{(2)} = B.$$

Бірінші теңдеуден екінші теңдеуді алсақ,

$$(x_i^{(1)} - x_i^{(2)})A = 0 \quad i = 1, 2, ..., k$$

бұдан

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$$

Яғни, X-ті шешімдер көпжағының басқа екі нүктесінің дөңес сызықты комбинация түрінде өрнектеуге болмайды.

Теорема дәлелденді.

4-теорема (3-теоремаға кері теорема). Егер $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ..., 0)$ шешімдер көпжағының бұрыштық нүктесі болса, онда X тірек жоспары болады.

Яғни

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x_i = A_0$$

жіктеуіндегі барлық оң x_i-ге сәйкес $A_1, A_2, ..., A_k$ векторлары сызықты тәуелсіз болады.

Яғни шешімдер көпжағының әрбір бұрыштық нүктесіне базистік (тірек) жоспар сәйкес келеді.

Дәлелдеуі: X -ң алғашқы k компоненті 0-ге тең болмасын

$$\sum_{i=1}^{k} x_i A_i = B,\ X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ..., 0).$$

Теореманы дәлелдеу үшін қарсы жоримыз.

Айталық, $A_1, A_2, ..., A_k$ сызықты тәуелді болсын. Олай болса,

$$l_1 A_1 + l_2 A_2 + ... + l_k A_k = 0 \tag{19}$$

жіктеуіндегі l_i барлығы бірдей 0-ге тең емес.

Теореманың шарты бойынша,

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_k x_k = B \tag{20}$$

(19)-дың екі жағында $d > 0$ санына көбейтіп, (20)-ға қосамыз және аламыз,

$$(x_1 + dl_1)A_1 + (x_2 + dl_2)A_2 + ... + (x_k + dl_k)A_k = B$$
$$(x_1 - dl_1)A_1 + (x_2 - dl_2)A_2 + ... + (x_k - dl_k)A_k = B.$$

Бұдан $\sum_{i=1}^{k} x_i A_i = B$ жүйесінің е к і шешімі бар екендігі көрінеді, бірақ олар СПЕ жоспары болмауы да мүмкін. $x_i \geq 0$ болғандықтан, $d > 0$ санын X_1 мен X_2 векторларының алғашқы k компоненті оң болатындай өте кішкентай етіп таңдауға болады. Ондай сан табылса, X_1 мен X_2 жоспар болғаны. X_1, X_2 жоспар болса, $X = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ де жоспар, ал бұл теореманың X бұрыштық нүктесі деген шартына қайшы келеді. Бұдан $A_1, A_2, ..., A_k$ сызықты тәуелсіз деген қорытындыға келеміз.

m өлшемді кеңістікте әрбір $(m+1)$ вектор сызықты тәуелді болғандықтан k бұрыштық нүктесінің компоненттерінің ішінде m-нен көп оң компоненттер болуы мүмкін емес.

1-салдар. $A_1, A_2, ..., A_k$ векторының өлшемі m болғандықтан, бұрыштық нүктелердің m-нен артық оң $x_i > 0$, **Ошибка! Ошибка связи.** компоненті болмайды..

2-салдар. Шешімдер көпжағының әрбір бұрыштық нүктесіне $k \leq m$ $A_1, A_2, ..., A_n$ жүйесінің $k \leq m$ сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі сәйкес келеді.

Қорытынды.

1. Шешімдер көпжағының сызықтық функциясы өзінің экстремум мәнін қабылдайтын бұрыштық нүкте болады.
2. Әрбір тірек жоспары шешімдер көпжағының бұрыштық нүктесіне сәйкес келеді.
3. Әрбір бұрыштық нүктемен берілген жүйе m сызықты тәуелсіз векторына байланысты болады.

Осыдан, шешімдер көпжағының тік бұрыштық нүктелерін, яғни тірек жоспарларын ғана зерттеу керектігін көреміз.

III. СЫЗЫҚТЫ ПРОГРАММАЛАУ ЕСЕПТЕРІН ШЕШУДІҢ ӘДІСТЕРІ

3.1. Сызықты программалау (СП) есептерін шешудің графикалық әдісі

Графикалық әдіс n=2 немесе n=3 болғандағы СП есептеріне және сонымен қатар n-m=2 қатынасымен байланысқан n белгісіз , m сызықты тәуелсіз теңдеулерден тұратын шектеулер жүйесі бар СП есептеріне қолданылады. СП есебінің екі өлшемді кеңістіктегі есебі ең көрнекі болып табылады.

Осы жағдай үшін есеп құрастырайық:

$$L(x)=c_1x_1+c_2x_2 \tag{21}$$

мақсат функциясының экстремумын келесі шектеулерде табу керек:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \le b_n \end{cases} \tag{22}$$

$$x_i \ge 0,\ i=1,2 \tag{23}$$

3.1.1. Графикалық әдістің алгоритмі

1. Барлық нүктелері алғашқы шектеулер жүйесін (22)-(23)

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

қанағаттандыратын үйлесімді шешімдер көпбұрышын (шектелмеген аймақ болуыда мүмкін) тұрғызамыз. Бұл үшін (22) және (23) теңсіздіктер жүйесіне сәйкес шекаралық түзулердің теңдеулерін жазып, оларды x_1Ox_2 жазықтығында жүргіземіз.

Әрбір шекаралық түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Шешімнің жарты жазықтығын анықтау үшін жазықтықтың кез-келген нүктесінің координатын сәйкес теңсіздікке қою керек. Егер бұл нүкте теңсіздікті қанағаттандырса, онда шешімнің жарты жазықтығы деп жазықтықтың нүкте жатқан бөлігін алу керек.

Шешімнің жарты жазықтығын бағдаршалармен белгілейміз. Осы жолмен барлық теңсіздіктердің шешімдер аймағы құрылады және олардың ортақ бөлігі анықталады.

2. Параллель түзулер тобына жататын L_0 - бастапқы түзуін және сызықтық форманың өсу бағытын көрсететін градиент $\nabla(c_1,c_2)$ жүргіземіз.

3. Бастапқы түзу L_0-ді тірек жағдайға келгенше, яғни шешімдер көпбұрышы оның бір жағында ғана жататындай және онымен ең аз дегенде бір ортақ нүктесі болатындай күйге келгенше өзіне-өзін параллель жылжытамыз. Сонда L_0 бастапқы түзуінің $\nabla(c_1, c_2)$ бағытында қабылдайтын бірінші тірек күйі L_{min}, ал екінші L_{max} болады.

4. Экстремум нүктелерінің координаттарын анықтаймыз, ол үшін қиылысуы нәтижесінде осы нүктелер пайда болған шекаралық түзулердің теңдеуін бірге шешіп, осы нүктелердегі мақсат функциясының мәнін есептейміз.

Ескерту. Тірек түзу шешімдер көпбұрышының бір қырымен сәйкес келген жағдайда, мақсат функциясы бір мезгілде екі бұрыштық X_1^0 және X_2^0 нүктелерде экстремалдық мән қабылдайды. Сонда тиімді жоспарлар жиыны туралы теорема негізінде (21) сызықты форма X_1^0 және X_2^0 нүктелерінің дөңес комбинациялары болатын барлық нүктелерде, яғни

$$X = lx_1^0 + (1-l)x_2^0, \quad 0 \le l \le 1$$

нүктелерде бірдей экстремалды мәндер қабылдайды.

Мысалы.

$$L(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \text{экстремум}$$

мақсат функциясының ең үлкен және ең кіші мәнін келесі шектеулерде табу керек:

$$x_1 - 2x_2 \le 6; \ (I)$$
$$x_1 + x_2 \le 15; \ (II)$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 10; \ (III)$$
$$2x_1 - x_2 \ge 0; \ (IV)$$
$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0$$

Шешімдер көпбұрышын саламыз. Шекаралық түзулер теңдеулерін жазамыз (бұл түзулердің теңдеуін құру ыңғайлы болу үшін, мүмкін болған жерде кесіндінің теңдеулері түрінде береміз, яғни $\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}=1$):

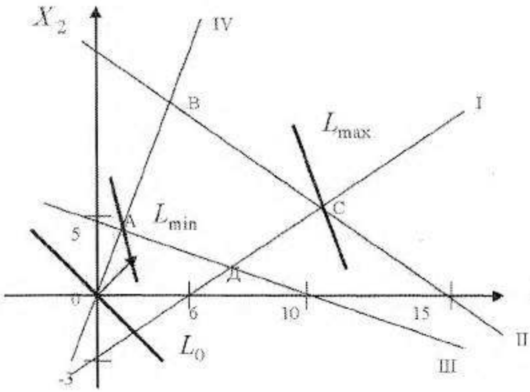
$$\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{-3}=1;\ (I)$$

$$\frac{x_1}{15}+\frac{x_2}{15}=1;\ (II)$$

$$\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{5}=1;\ (III)$$

$$2x_1-x_2=0;\ (IV)$$

$$x_1=0;\ x_2=0.$$



9-сурет

Ox_1 өсінде 6-ға, ал Ox_2 өсінде (-3)-ке тең кесінді қиып түсіретін (I) шекаралық түзуді жүргіземіз. Шешімдер жарты жазықтығын анықтаймыз. Ол үшін O(0,0) нүктесінің координаттарын сәйкес (I) теңсіздігіне қоямыз. Бұл теңсіздік дұрыс, сондықтан O(0,0) нүктесі жатқан жарты жазықтықты аламыз, оны бағдаршалармен белгілейміз. Осы жолмен қалған теңсіздіктер ішінде шешімдер жарты жазықтықтары анықталады. Нәтижесінде АВСД шешімдер көпбұрышы алынады.

2. L_0 бастапқы түзуін жүргіземіз, яғни $3x_1 + 3x_2 = 0$. Бұл координат өсінің басынан өтетін түзудің теңдеуі. Мақсат функциясының градиентін құру үшін оның дербес туындыларын есептейміз:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3;\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2.$$

Бұдан мақсат функциясының ең жылдам өсу бағыты $\nabla(3,2)$ векторымен анықталады.

3. Бастапқы түзуді $\nabla(3,2)$ градиентінің бағытында өзіне-өзін параллель қозғалтамыз. L(X) тобының тірек түзулері А және С төбелері арқылы өтеді. С нүктесінде мақсат функциясы ең үлкен мәнді, ал А нүктесінде ең кіші мәнді қабылдайды.

4. Экстремалдық нүктелердің координаттарын анықтаймыз. А төбесінің координаттарын табу үшін III және IV шекаралық түзулерінің теңдеулерінен құралған жүйені шешу керек,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 4.$$

Бұдан шығатыны, А нүктесінің координаттары (2,4), ал бұл нүктедегі мақсат функциясының мәні: $L_{\min} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$.

Осыған ұқсас С(12,3) нүктесінің координаттары анықталады және

$$L_{\max} = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 42.$$

Сонымен есептің жауабы: мақсат функциясы ең кіші $L_{\min} = 14$ мәнін $A(2,4)$ нүктесінде, ең үлкен $L_{\max} = 42$ мәнін $C(12,3)$ нүктесінде қабылдайды.

ТАПСЫРМА ВАРИАНТТАРЫ

Сызықты L(X) формасы экстремум мәнін қабылдайтындай және сәйкес шектеулерді қанағаттандыратын X(x_1, x_2) тиімді шешімді табу керек:

$$1.\ L = 3x_1 - 2x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 4; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$2.\ L = 3x_1 - 2x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ -x_1 + x_2 \leq 2; \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6; \\ x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$3.\ L = 2x_1 + 3x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 5x_2 \geq 4. \end{cases}$$
$$0 \leq x_1 \leq 3; 0 \leq x_2 \leq 3.$$

$$4.\ L = 3x_1 + 4x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ -5x_1 + 6x_2 \leq 30; \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$5.\ L = 3x_1 + 3x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq -3; \\ -2x_1 + x_2 \geq -6; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ 3x_1 - 5x_2 \geq -15. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$6.\ L = 3x_1 + 5x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 - x_2 \leq 3; \\ 7x_1 - 3x_2 \geq 0. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$7.\ L = 10x_1 + 30x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \leq 25; \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 + x_2 \leq 14; \\ x_2 \leq 8. \end{cases}$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 14;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

$$8.\ L = 2x_1 + 3x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \geq 24; \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24; \\ -x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 + x_2 \geq 5. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$9.\ L = 3x_1 + 2x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12; \\ -x_1 + x_2 \leq 1; \\ -x_1 + x_2 \geq -4; \\ x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

$$10.\ L = 3x_1 + 2x_2 \to \textit{экстремум}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \geq 14; \\ 3x_1 - 4x_2 \geq -12; \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 48. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

11. $L = 5x_1 + 2x_2 \to$ *экстремум*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3; \\ 4x_1 + 5x_2 \le 51; \\ 2x_1 - 5x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \ge 5. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

12. $L = 6x_1 + 9x_2 \to$ *экстремум*

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 \le 3; \\ x_1 - x_2 \ge -3; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24; \\ 2x_1 + x_2 \ge 9. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

13. $L = 4x_1 + 2x_2 \to$ *экстремум*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 1; \\ x_1 - x_2 \le -1; \\ 2x_1 + x_2 \ge 1. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

14. $L = 3x_1 + 3x_2 \to$ *экстремум*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0; \\ x_1 - x_2 \ge -1; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

15. $L = 2x_1 + 3x_2 \to$ *экстремум*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 + 3x_2 \ge 1; \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12; \\ x_1 - x_2 \ge -1. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

16. $L = 5x_1 + 2x_2 \to$ *экстремум*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -4; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42; \\ -x_1 + x_2 \ge -4; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

17. $L = 10x_1 + 5x_2 \to$ *экстремум*;

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10; \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6; \\ x_2 \le 3; \\ 1 \le x_1 \le 4; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

18. $L = 5x_1 + 5x_2 \to$ *экстремум*;

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \ge 58; \\ x_1 + x_2 \ge -5; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 2x_1 - x_2 \ge -6; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

19. $L = 6x_1 + 4x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \\ -x_1 + 2x_2 \le 1; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

20. $L = 3x_1 - 2x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2; \\ -x_1 + x_2 \le 2; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6; \\ x_1 - x_2 \le 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

21. $L = 12x_1 + 4x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 10; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 30; \\ 2x_1 - x_2 \le 6; \\ 3x_1 + x_2 \ge 14; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

22. $L = 6x_1 + 4x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 25; \\ x_1 - 3x_2 \le 0; \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 11; \\ -3x_1 + 2x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

23. $L = 12x_1 + 3x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1; \\ -x_1 + x_2 \le 7; \\ 4x_1 + x_2 \ge 5; \\ -2x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

24. $L = x_1 + 2x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge -6; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 22; \\ -x_1 + 2x_2 \ge -2; \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

25. $L = 2x_1 + 3x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \ge 24; \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24; \\ -x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \ge 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

26. $L = 6x_1 + 9x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 \le 18; \\ x_1 - x_2 \ge -3; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24; \\ 2x_1 + x_2 \ge 9; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

27. $L = 10x_1 + 5x_2 \to$ *экстремум*
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10; \\ 2x_1 + 3x_2 \ge -6; \\ x_2 \le 3; \\ 1 \le x_1 \le 4; \\ x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

28. $L = 6x_1 + 4x_2 \to$ *экстремум*;
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \\ -x_1 + 2x_2 \le 1; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

3.2. Сызықты программалау есебін Симплекс әдісімен шешу

СП есебінің тиімді шешімі шешімдер көпжағының бұрыштық нүктелерімен, яғни әрқайсысы $A_1, A_2, \dots, A_n$ векторлар жүйесінің m сызықты тәуелсіз векторларымен анықталатын тірек жоспарлармен байланысты екендігі дәлелденген. Бұл есептегі тірек жоспарларының саны C_n^m анықталады. m мен n үлкен сандар болғанда тірек жоспарларының бәрін тексеріп шығу өте қиын. Сондықтан тірек жоспарларының бірінен екіншісіне белгілі бір тәртіппен ауысып отыратын схема құру қажет. Симплекс әдісі осындай белгілі бір тірек жоспарынан бастап, ақырлы есептеу қадамдарынан кейін тиімді жоспарға әкелетін схема болып табылады. Әр қадам сызықты функцияға оның алдыңғы жоспардағы мәніне қарағанда кіші (үлкен) мән беретін жоспарды анықтау болып табылады. Есептеу процесі тиімді жоспар табылғанға дейін жалғаса береді. Есепті шешу барысында симплекс әдісі есептің шешімі жоқ екендігін немесе шешімдер көпбұрышында сызықты функцияның шектелмегендігін де анықтап береді.

3.2.1. Тірек жоспарлар құру

СПЕ берілсін. Сызықты $Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ функциясының

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (24)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\dots,n)$$

ең кіші мәнін табу керек. Мұндағы $b_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\dots,n)$.

Алдымен есептің шектеулер жүйесінің алдыңғы m векторы бірлік векторлар деп есептейміз. Олай болса сызықты функцияның

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{25}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

шектеулеріндегі ең кіші мәнін табу керек.

(25) жүйенің векторлық түрде жазылуы:

$$x_1A_1 + x_1A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \ldots + x_nA_n = A_0 \tag{26}$$

мұндағы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ векторлары m өлшемді кеңістіктің сызықты тәуелсіз бірлік векторлары. Сондықтан базистік айнымалылар ретінде $x_1, x_2, \ldots, x_m$ таңдап, $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ бос айнымалыларын нөлге теңестіреміз. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ бірлік векторлар, $b_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,n)$ екендігін ескерсек, алғашқы

$$X_0 = \left(x_1 = b_1;\ x_2 = b_2;\ \ldots;\ x_m = b_m;\ x_{m+1} = 0;\ \ldots;\ x_n = 0\right) \quad (27)$$

жоспарын аламыз. Бұл жоспарға,

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = A_0 \quad (28)$$

жіктеуі сәйкес келеді.

Мұндағы, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сызықты тәуелсіз, демек құрылған алғашқы жоспар тірек жоспар болып саналады.

Енді алғашқы (27) тірек жоспарынан қалай екінші тірек жоспарды алатындығын көрейік. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторлары m өлшемді кеңістікте базис құрайды, сондыктан (26) жүйедегі әр векторды базис векторларына бір ғана жолмен жіктеуге болады:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Базиске кірмейтін қандай да болмасын бір вектор үшін, мысалы A_{m+1} векторы үшін,

$$x_{1,m+1} A_1 + x_{2,m+1} A_2 + \ldots + x_{m,m+1} A_m = A_{m+1} \quad (29)$$

жіктеуіндегі $x_{i,m+1}$ коэффициенттерінің ең болмаса біреуі оң болсын. (29) жіктеудің екі жағын да қандай да болмасын бір $\theta > 0$ (әзірше белгісіз) санына көбейтіп нәтижені (28) теңдіктен мүшелеп алып тастасақ:

$$\left(x_1 - \theta x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \theta x_{2,m+1}\right) A_2 + \ldots + \left(x_m - \theta x_{m,m+1}\right) A_m + \theta A_{m+1} = A_0 \quad (30)$$

аламыз.

Егер компоненттері теріс болмаса

$$X_1 = \left(x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1};\ \ldots;\ x_m - \theta x_{m1,m+1};\ \theta;\ 0;\ \ldots;\ 0\right)$$

векторы жоспар болады.

Құрамына $x_{i,m+1}$ теріс таңбамен енетін X_1 векторының компоненттері $\theta > 0$ болғандықтан, оң сандар болады.

Сондықтан, бұдан әрі құрамында тек оң $x_{i,m+1}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ бар компоненттерді ғана қарастыруымыз керек, яғни барлық $x_{i,m+1}\geq 0$ үшін

$$x_i-\theta x_{i,m+1}\geq 0 \tag{31}$$

орындалатындай $\theta>0$ санын анықтау керек. (31)-ден $\theta\leq\dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$ екендігін аламыз. Демек, X_1

$$0\leq\theta\leq\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}} \tag{32}$$

шартын қанағаттандыратын кез келген θ үшін есептің жоспары болады. Мұндағы минимум $x_{i,m+1}\geq 0$ орындалатын i бойынша алынады.

Тірек жоспарында $m+1$ оң компонент болмайтындықтан, X_1 жоспарындағы компоненттердің ең болмаса біреуін нөлге айналдыру керек. (32) теңсіздіктен,

$$\theta=\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}} \tag{33}$$

деп алсақ, X_1 жоспарының θ ең кіші мәніндегі бір компоненті нөлге айналады. Айталық ол бірінші орында тұрған компонент болсын, яғни

$$\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}}=\frac{x_i}{x_{i,m+1}}.$$

θ_0 мәнін (30)-ға қойсақ, төмендегідей жіктеу аламыз:

$$x_2'A_2+x_3'A_3+\ldots+x_m'A_m+x_{m+1}'A_{m+1}=A_0,$$

бұл жіктеуге жаңа $X_1=(0;\ x_2';\ x_3';\ \ldots;\ x_m';\ x_{m+1}';\ 0;\ \ldots;\ 0)$, тірек жоспары п, мұндағы $x_i'=x_i-\theta x_{i,m+1}$ $(i=1,2,3,\ldots,m)$, $x_{m+1}'=\theta_0$ сәйкес келеді.

Базистен бір векторды шығарып, оған θ_0 көмегімен басқа векторды енгізу базистен базиске көшетін Жордан-Гаусс әдісіне сәйкес келетіндіктен, $A_2, A_3, \ldots A_m, A_{m+1}$ сызықты m тәуелсіз және ол жаңа базис болып табылады.

Келесі тірек жоспарын табу үшін, $A_2, A_3, \ldots A_m, A_{m+1}$ базисіне енбейтін кез келген векторды осы базис векторларына жіктеу керек те, содан кейін векторлардың бірі базистен шығатындай етіп $\theta_0 > 0$ анықтау керек.

Сөйтіп, жаңа тірек жоспарын алу процесі базиске енетін векторды таңдап, базистен шығарылатын векторды анықтау болып табылады. Базиске енгізетін векторды анықтау үшін қолданылатын критерий симплекс әдісінің негізгі элементі болып саналады. Егер A_{m+1} векторы базиске енгізілетін болып анықталса, бірақ оның жіктелуінде (29) барлық $x_{i,m+1} \le 0$ болып тұрса, онда (30) жіктеудегі векторлардың бірін шығаратындай етіп $\theta > 0$ таңдалынбайды. Бұл жағдайда X_1 жоспарында $m+1$ оң компонент болады, ал $A_2, A_3, \ldots A_m, A_{m+1}$ векторлар жүйесі сызықты тәуелді, олай болса бұл вектор бұрыштық нүкте емес, шешімдер көпжағының ішкі нүктесін анықтайды. Ал ішкі нүктеде сызықты форма өзінің ең кіші мәнін қабылдамайды.

Бұл сызықты формаға сәйкес гипержазықтық N векторына қарама-қарсы бағытта қанша алысқа жылжытылса да шешімдер көпжағына тірек жазықтық бола алмайды, яғни сызықты форма шешімдер көпжағында шектеусіз.

Сөйтіп, егер СПЕ бос мүшелері теріс емес болатын шектеулер жүйесінде бірлік базис болса, онда қосымша есептеулерсіз алғашқы тірек жоспарын және векторлардың базиске жіктелуін алуға болады.

3.2.2. Тиімді жоспар іздеу. Тиімділік шарты

Айталық, СП (24)-(26) есебінің жоспарлары бар және оның әр жоспары нұқсансыз болсын. Онда (27) тірек жоспары үшін

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0 \tag{34}$$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_mc_m = Z(X_0) \tag{35}$$

барлық $x_i > 0$, ал $Z(X_0)$ осы жоспарға сәйкес сызықты форма.

Кез келген A_j векторының $A_1, \ldots, A_m$ базис векторларына жалғыз ғана жіктелуі бар:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \cdots + x_{mj}A_m = A_j,\ (j = 1,2,\ldots,n). \tag{36}$$

Сондықтан A_j векторының базистегі жіктелуіне сызықты функцияның жалғыз ғана мәні сәйкес келеді:

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \cdots + x_{mj}c_m = Z_j,\ (j = 1,2,\ldots,n), \tag{37}$$

мұндағы Z_j белгісіздердің орнына j-вектордың базис векторларына жіктелуіндегі сәйкес коэффициенттерді қойғаннан кейінгі сызықтық функцияның мәні.

C_j арқылы A_j векторына сәйкес сызықты функцияның коэффициентін белгілесек, мына теореманың дұрыстығына көз жеткізуге болады:

Егер қандай да бір A_j векторы үшін $z_j - c_j > 0$ болса, онда X_0 жоспары тиімді емес және $Z(x) < Z(x_0)$ шарты орындалатындай X жоспарын құруға болады.

Дәлелдеуі: (36) және (37) $\theta > 0$ санына көбейтіп нәтижені сәйкесінше (34) мен (35) алсақ:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0 \tag{38}$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})C_1 + (x_2 - \theta x_{2j})C_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})C_m + \theta C_j = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j) \tag{39}$$

аламыз. (39) теңдігінің екі жағына да θC_j, $(j = 1,2,\ldots,n)$ қосылып тұр. (38) теңдікте $x_1, x_2, \ldots, x_m$ оң сандар, сондықтан

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ векторларының коэффициенттері теріс емес болатындай $\theta > 0$ санын әрқашан таңдауға болады, яғни есептің жаңа жоспарын,

$$X = \left(x_1 - \theta x_{1j}, x_2 - \theta x_{2j}, \ldots, x_m - \theta x_{mj}, \theta, 0, \ldots, 0\right)$$

алуға болады. Бұл жоспарға (39) сәйкес сызықты функцияның

$$Z(x) = Z(x_0) - \theta\left(Z_j - C_j\right) \tag{40}$$

мәні сәйкес келеді. Теореманың шарты бойынша $Z_j - C_j > 0$ және $\theta > 0$ болғандықтан

$$Z(X) < Z(X_0).$$

Салдар: Егер қандай да бір X_0 жоспары үшін барлық A_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ осы базистегі жіктеулері

$$Z_j - C_j \le 0 \tag{41}$$

шартын қанағаттандырса, X_0 тиімді жоспар болады.

(41) шарт сызықты функцияның ең кіші мәнін іздеу есебінде жоспардың тиімді болу шарты, ал $Z_j - C_j$ жоспардың бағалары деп аталады.

Сонымен есеп сызықты функцияның ең кіші мәнін іздеуге қойылғанда, жоспар тиімді болу үшін оның бағаларының оң емес болуы қажетті және жеткілікті.

СП (24)–(26) есебі сызықты форманың ең үлкен мәнін табуға қойылса, келесі теореманың дұрыстығын дәлелдеуге болады.

Теорема. Егер қандай да бір A_j векторы үшін $Z_j - C_j < 0$ болса, X_0 жоспары тиімді емес, онда $Z(X) > Z(X_0)$ шарты орындалатындай X жоспарын құруға болады. Дәлелденуі алдыңғы теоремаға ұқсас.

Салдар: Егер қандай да бір X_0 жоспары үшін барлық $A_j, (j = 1,2,\dots,n)$ векторларының осы базистегі жіктеулері үшін

$$Z_j - C_j \geq 0 \tag{42}$$

шарттары орындалса X_0 тиімді жоспар болады.

(42) теңсіздік сызықты функцияның ең үлкен мәнін іздеу есебінде жоспардың тиімді болу шарты болып табылады. Сөйтіп сызықты функцияның ең үлкен мәнін іздеу есебінде, жоспар тиімді болу үшін оның бағаларының теріс емес болуы қажетті және жеткілікті.

3.2.3. Симплекс әдісінің алгоритмі

Есептің қойылымы

Шектеулер жүйесі "$\leq$" мағынасындағы теңсіздік түрінде берілген СП есебін қарастырамыз:

функциясының төменде берілген шектеулердегі

$$L(X) = C_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow экстремум$$

экстремумдарын табу қажет:

Симплекс-әдісті пайдаланғанда шешу процесі симплекстік

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = \overline{1,m}); \tag{43}$$

$$x_j \geq 0; (j = \overline{1,n}). \tag{44}$$

кестелерде оңайырақ орындалады.

8-кесте

№	Базис	C базисі	A_0	C_1	C_2	C_3	…	C_l	C_m	C_{m+1}	…	C_j
				A_1	A_2	A_3	…	A_l	A_m	A_{m+1}	…	A_j
1	A_1	C_1	X_1	1	0	0		0	0	$X_{1j,m+1}$		X_{1j}
2	A_2	C_2	X_2	0	1	0		0		$X_{2j,m+1}$		X_{2j}
1	A_l	C_l	X_l	0	0							
M	A_m	C_m	X_m	0	0				1			
m+1	Z_j-C_j	Z_0	0	0	0				0	$Z_{m+1}-C_{m+1}$		Z_j-C_j

1. Бастапқы тірек (немесе базистік) жоспарын құрамыз. Қосымша теріс емес айнымалылар енгізіп, (43) теңсіздіктер жүйесінен теңдіктер жүйесіне көшеміз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i \qquad (i=\overline{1,m}) \tag{45}$$

$x_{n+1} \geq 0$.

Қосымша теріс емес x_{n+i} $(i=\overline{1,m})$ айнымалылары базистік болып табылады, себебі (45) теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен құрылған матрицаның соңғы m бағанда сызықты тәуелсіз бірлік матрица, демек, осы бағандарға сәйкес келетін теріс емес айнымалылар x_{n+1} $(i=\overline{1,m})$ базистік айнымалылар болып табылады.

Базистік айнымалылар бағандарынан, бақылау қосындыларынан және θ-дан тұратын симплекстік кесте құрамыз. Индекстік деп аталатын симплекс-кестенің соңғы жолы қарама-қарсы таңбалармен алынған (C_0 -дан басқалары) сызықты форма коэффициенттерімен толтырылады.

2.Құрылған жоспарға тиімділік шартының орындалуын тексереміз. $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ жоспары тиімді болуы үшін индекстік жолдың барлық коэффициенттері (C_0 -дан басқалары) СП есебін максимумға шешкенде теріс емес, минимумға шешкенде оң емес болса жеткілікті.

Егер тиімділік шарты орындалса, есеп шешіледі. Базистік айнымалылар және бос мүшелер бағандарында сәйкесінше құрылған тиімді жоспардың компоненттері, индекстік жол мен бос мүшелер бағанының қиылысында – L(X) сызықты формасының экстремалдық мәні орналасқан.

3. Егер тиімділік шарты орындалмаса, онда есепті максимумға шешкенде индекстік жолдың теріс коэффициенттерінің абсолюттік шамаларының үлкенін, ал минимумға шешкенде индекс жолдың оң коэффициенттерінің ең кішісін таңдаймыз.

Таңдалған ең үлкен коэффициентке сәйкес бағанды шешуші деп атаймыз. Шешуші баған қандай айнымалының базиске кіретіндігін көрсетеді.

4. Бос мүшелер бағаны элементтерінің шешуші бағанның тек оң элементтеріне қатынасын есептейміз. Егер ондай элементтер жоқ болса, СП есебінің шешімі жоқ және оларды θ бағанына жазамыз. θ бағанының барлық элементтерінің ішінен ең кішісін таңдаймыз. θ-ның ең кіші мәніне ие симплекс кестесінің жолын шешуші деп атаймыз. Шешуші жол қандай айнымалының базистен шығатынын көрсетеді. Шешуші баған мен шешуші жолдың қиылысында бас элемент тұрады.

5.Келесі симплекс кестені құруға көшеміз. Кесте төмендегі тәртіппен толтырылады:

а)шешуші бағанға сәйкес бос айнымалыны базистік айнымалыларға енгіземіз, ал шешуші жолға сәйкес базистік айнымалыны бос айнымалыларға ауыстырамыз;

ә) жаңа кестенің бағыттауыш жолын толтырамыз, ол алдыңғы кестенің шешуші жолының элементтерін бас элементке бөлу арқылы құралады;

б) шешуші бағанға сәйкес келетін бос айнымалыны базистікке көшіру үшін, оны бағыттаушы жолдан басқа барлық жолдардан алып тастау қажет. Ол үшін алдыңғы кестенің шешуші бағанына сәйкес бағанның қалған барлық ұяшықтарына Жордан-Гаусс әдісімен нөлдер жинақтаймыз.

Симплекс кестелеріндегі есептеулерді тиімділік белгісі орындалғанша жалғастырамыз.

Ескерту. Егер тиімді жоспардың индекстік жолында нөлге тең элемент бар болса, ал оған сәйкес келетін бағанның ең болмаса біреуі оң, бірақ екеуден кем емес нөлден өзгеше элементтері болса, онда СП есебінің бірнеше тиімді жоспары болады. Шынында да, индекстік жолдағы нөлге сәйкес баған шешуші деп алынады да, баска базистік айнымалылардан L(X) бұрынғы мәнімен жаңа тиімді жоспар құрылады. Сонда СП-ның негізгі теоремасы бойынша бұл жоспарлардың дөңес комбинациясы да тиімді болады, сондықтан СП есебінің бірнеше тиімді жоспарлары бар.

Мысалы.

$L(X) = 2x_1 + 3x_2$ функциясының,

$2x_1 + 3x_2 \le 15;$

$x_1 + 2x_2 \le 8;$

$x_1 \le 7;$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

шектеулеріндегі ең үлкен мәнін табу керек.

1. x_3, x_4, x_5 косымша теріс емес айнымалыларын енгізіп, теңдеулер жүйесіне көшеміз:

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15;$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8;$

$x_1 + x_5 = 7.$

x_3, x_4, x_5 базистік айнымалылары бар бірінші симплекс – кесте құрамыз.

Алғашқы тірек жоспар $X_1(0, 0, 15, 8, 7)$ және $L(X_1)=0$ болады.

2. Алынған жоспарды тиімділікке тексереміз. Есеп максимумға қойылғандықтан тиімді жоспардың индекстік жолында теріс сан болмауы тиіс. 1-ші кестенің индекстік жолында екі теріс коэффициент бар.

3.Индекстік жолдың теріс коэффициенттерінің ішінен абсолюттік мәні бойынша ең үлкенін аламыз: max{/-2/, /-3/}=/-3/ демек, x_2 айнымалысы тұрған баған шешуші болады. Оны бағдаршамен белгілейміз, бұл x_2-нің бос айнымалыдан базистікке көшуі керектігін көрсетеді.

4.Шешуші жолды табу үшін θ мәндерін есептейміз: бос мүшелер бағанының элементтерін x_2 шешуші бағанының тек оң элементтеріне бөліп θ(5,4,-) бағанын аламыз. Одан $min\{5,4\}=4$. Демек, мұнда x_4 базистік айнымалыға сәйкес жол шешуші болады. Бұл жолды бағдаршамен белгілейміз, ол x_4 базистіктен бос айнымалыға ауысуы қажеттігін көрсетеді.

Шешуші жол мен баған қиылысында тұрған (2) элементті шеңбермен ерекшелейміз.

5.Бұдан кейін келесі симплекс – кестені құруға көшеміз. Алдымен x_2 бағыттауыш жолын толтырамыз, ол алдыңғы кестенің x_4 шешуші жолын бас элементке бөлуден алынады. 2 – кестенің бағанының қалған ұяшықтарында бағыттаушы жол элементтерімен белгілі бір амалдар орындалып, нөлдер жинақталуы керек. Мәселен осы бағанның x_3 жолында нөл алу үшін 2 – кестенің бағыттауыш жолының барлық элементтерін 1 – кестенің бағыттауыш бағанының қарама-қарсы таңбамен алынған элементіне, яғни (-3)-ке көбейтеміз және 1 – кестенің

$$4(-3)+15=3;$$
$$\frac{1}{2}(-3)+2=\frac{1}{2};$$
$$1(-3)+3=0;$$
$$0(-3)+1=1;$$

x_3 жолының сәйкес элементтеріне қосамыз:

$$\frac{1}{2}(-3)+0=-\frac{3}{2};$$
$$0\cdot(-3)+0=0;$$
$$6\cdot(-3)+21=3.$$

Бұл жолдың барлық элементтерінің қосындысы 3-ке тең, демек, x_3 жолының барлық элементтері дұрыс есептелген. x_5

жолын 2 – кестеге өзгеріссіз көшіреміз, себебі оның шешуші бағанында нөл саны бар. x_2 бағанының қалған ұяшықтарын нөлге айналдыру үшін, бағыттауыш жолды 3-ке көбейтеміз де 1–ші кестенің L(X) жолының сәйкес элементтерімен қосамыз.

2–ші кестені толтыру нәтижесінде екінші базистік шешім аламыз, $X_2(0,4,3,0,7)$ және $L(x_2)=12$ аламыз.

Сызықтық форманың мәні жақсартылған, бірақ тиімді емес, себебі 2-ші кестенің индекстік жолында теріс сан бар. Есепті шешуді 2-ші қадамнан қайта жалғастыру қажет.

3-ші кестеде индекстік жолда барлық коэффициенттер оң, сондықтан $X_3(6, 1, 0, 0, 1)$ тиімді шешім болып табылады және $L(x_3)=L_{\max}=15$. Алайда индекс жолына жасалған талдау алынған тиімді жоспардың жалғыз еместігін көрсетеді.

Егер 3-ші кестенің шешуші бағанын x_4 деп алып, барлық қажетті симплекс-процедураны орындап шықса, сызықтық $x_4(7,\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},0)$ форманың дәл сондай мәнімен $L(x_4)=15$ жоспарын аламыз.

Екі тиімді шешімнен олардың жиынын құруға болады:

$$X = lx_3 + (1-l)x_4,\quad 0 \le l \le 1.$$

Бұл мысалдың толық шешімі төмендегі кестеде келтірілген.

9-кесте

№	Базистік айнымалылар	Бос мүшелер	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Σ	θ
1.	X_3	15	2	3	1	0	0	21	5
	$\leftarrow X_4$	8	1	**2**	0	1	0	12	4
	X_5	7	1	0	0	0	1	9	-
	L(X)	0	-2	-3↑	0	0	0	-5	*max*
2.	$\leftarrow X_3$	3	**1/2**	0	1	3/2	0	3	6
	X_2	4	12	1	0	1/2	0	6	8
	X_5	7	1	0	0	0	1	9	7
	L(X)	12	-1/2 ↑	0	0	3/2	0	13	*max*

9-кестенің жалғасы

3.	X_1	6	1	0	23	-3	0	6	-
	X_2	1	0	1	-1	2	0	3	¥
	X_5	1	0	0	-2	**3**	1	3	1/3
	L(X)	15	0	0	1	0↑	0	16	*max*
4.	X_1	7	1	0	0	0	1	9	
	X_2	1/3	0	1	1/3	0	-2/3	1	
	X_4	1/3	0	0	-2/3	1	1/3	1	
	L(X)	15	0	0	1	0	0	16	*max*

ТАПСЫРМА ВАРИАНТТАРЫ

Сызықты L(X) формасы экстремум мәнін қабылдайтындай және сәйкес шектеулерді қанағаттандыратын $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тиімді шешімді табу керек:

$$1. L = 50 + x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 \le 9; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 2; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 20. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,4}).$$

$$2. L = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 \le 10; \\ -18x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 \le 12; \\ -8x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 2. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,4}).$$

$$3. L = 6x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \le 24; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 8; \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \le 30. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,4}).$$

$$4. L = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 22x_3 \le 22; \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 6; \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \le 2; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \le 1. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,3}).$$

$$5. L = 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2; \\ x_2 + x_3 \le 2; \\ x_1 + x_3 \le 2. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,3}).$$

$$6. L = 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 5; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 4; \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 4; \\ x_2 + x_3 \le 1. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,3}).$$

$$7. L = 21 + 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4; \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \le 5. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, (i = \overline{1,4}).$$

$$8. L = 300 - 12x_1 - 7x_2 - 8x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 15x_2 + 38x_3 + 4x_4 \le 26; \\ 6x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 3x_4 \le 24; \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 56; \end{cases}$$
$$x_i \le 0 (i = \overline{1,4}).$$

$$9. L = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 5; \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 12; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8; \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 \le 11. \end{cases}$$
$$x_i \le 0 (i = \overline{1,4}).$$

$$10. L = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 12; \\ x_1 + x_4 \le 15; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \le 20; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 10; \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \le 24. \end{cases}$$
$$x_i \le 0 (i = \overline{1,5}).$$

$$11.\ L = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \le 2; \\ x_2 + x_3 \le 2; \\ x_1 + x_3 \le 2; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,4}).$$

$$12.\ L = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 1; \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 1; \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \le 2; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,4}).$$

$$13.\ L = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 10; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 15; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 10; \\ 200x_1 + 100x_2 + 100x_3 + 100x_4 \le 10. \end{cases}$$
$$x_i \le 0(i = \overline{1,4}).$$

$$14.\ L = 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 \le 20; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 20; \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 44; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \le 44. \end{cases}$$
$$x_i \le 0(i = \overline{1,4}).$$

$$15.\ L = 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} -3x_2 - x_4 \le 0; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 18; \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15; \\ x_3 \le 5. \end{cases}$$
$$x_i \le 0(i = \overline{1,4}).$$

$$16.\ L = 7x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 9x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 38; \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 12; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 225; \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,4}\right)$$

$$17.\ L = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 8; \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le 12; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,4}\right)$$

$$18.\ L = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 15; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 20; \\ 3x_1 \ldots\ldots + 2x_3 \le 16; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$$

$$19.\ L = 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 21x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \le 540; \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 840; \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 \le 310; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,4}\right)$$

$$20.\ L = 3x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 15x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 15x_4 \le 300, \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \le 360, \\ 6x_1 + 7{,}8x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 240. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,4}\right)$$

21. $L = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ldots\ldots \le 12; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8; \\ 4x_1 + 2x_2 \ldots\ldots \le 16; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

22. $L = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 8; \\ \ldots\ldots 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 16; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,4}\right)$

23. $L = 15 + x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7; \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12; \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

24. $L = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 12; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 16; \\ 6x_1 + 8x_2 \ldots\ldots\ldots \le 24; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

25. $L = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 90; \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 \le 60; \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 30; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

26. $L = 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 \ldots\ldots + 4x_3 + 2x_4 \le 20; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 20; \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 44; \\ x_1 + 2x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + x_4 \le 20; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,4}\right)$

27. $L = 6x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \le 24; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 8; \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \le 30; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,4}\right)$

28. $L = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 22x_3 \le 22; \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 6; \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \le 2; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \le 1; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

29. $L = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 5; \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 12; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8; \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 \le 11; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

30. $L = 15 + x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7; \\ -2x_1 + 4x_2 \ldots\ldots \le 12; \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10; \end{cases}$$
$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$

3.3. СП есептерін шешудің жасанды базис әдісі (М – әдісі)

Біз осы уақытқа дейінгі қарастырылған СП есептерінің алғашқы базис жоспарлары және m ретті бірлік матрицасы бар деп есептеп келдік.

Бірлік матрица СПЕ-нің барлығында бола бермейді. Мұндай есептерді шешу үшін жасанды базис әдісі қолданылады. Бұл әдісте есептің екі этапы біріктірілген.

Есептің қойылуы:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \text{экстремум} \tag{46}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad b_i \geq 0; \quad i = \overline{1,m} \tag{47}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n} \tag{48}$$

шектеулер жүйесіне $x_{n+i} \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$ жасанды айнымалы енгізіліп, кеңейтілген $n+m$ айнымалысы бар есепті қарастырамыз. Бұл айнымалылар мақсат функциясына бірдей M-ге тең коэффициенттермен енгізіледі (егер есеп минимум табуға қойылса M-нің мәні мейлінше үлкен, ал есеп максимумға қойылса мейлінше кіші теріс сан деп жорамалданады). Әдетте M-ге нақтылы мән берілмейді.

Сонымен кеңейтілген есептің қойылуы:

Сызықты форманың

$$Z(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \pm M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0; \qquad j = 1,2,\ldots,n+m$$

шектеулеріндегі экстремумын табу керек.

Жасанды базиске сәйкес бірлік векторлар $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ жасанды базис құрайды, ал оған алғашқы

$$\overline{X}(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)$$

тірек жоспары сәйкес келеді.

Ал берілген алғашқы есептің тиімді жоспарын табу үшін мына теореманы қолдануға болады.

Теорема. Егер кеңейтілген есептің тиімді $\overline{X}(x_1,x_2,\ldots,x_n;0,0,\ldots,0)$ жоспарындағы x_{n+i} $(i=1,2,\ldots,m)$ айнымалылары нөлге тең болса $(x_{n+i}=0)$, онда $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ алғашқы берілген есептің тиімді жоспары

$$X=(0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m})=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$$

кеңейтілген есептің алғашқы жоспары болады. Бұл жоспардағы сызықты форма

$$Z=\pm M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}=\pm M\sum_{i=1}^{m}b_i$$

("+" – минимум іздегенде, "-" – максимум іздегенде).

Базис бірлік матрица болғандықтан

$$X_j=(x_{1j},x_{2j},\ldots,x_{mj})=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})$$

және

$$Z_j=M\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$$

Базисте жасанды векторлар болса Z_j-C_j айырымы әрқашан M-нің сызықты функциясы болады. Алғашқы тірек жоспары үшін

$$\Delta_j=Z_j-C_j=M\sum_{i=1}^{m}x_{ij}-c_j$$

Z_j-C_j айырымдарының әрқайсысы бір-бірінен тәуелсіз екі бөліктен тұрады, олардың біреуі M-ге тәуелді, екіншісі M-нен тәуелсіз. Енді нәтижені симплекс кестеге жазамыз.

10-кесте

i	$Б$	C	A_0	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n	M	…	M	…	M
				A_1	A_2	…	A_k	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+2}	…	A_{n+m}
1	A_{n+1}	M	X_{n+1}	X_{11}	X_{12}	…	X_{1k}	…	X_{1n}	1	…	0	…	0
2	A_{n+2}	M	X_{n+2}	X_{21}	X_{22}	…	X_{2k}	…	X_{2n}	0	1	…	…	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	A_{n+m}	M	X_{n+m}	X_{m1}	X_{m2}	…	X_{mk}	…	X_{mn}	0	…	0	…	1
$m+1$			0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_k$	…	$-c_n$	0	…	0	…	0
$m+2$			$\sum_{n+i}$	$\sum X_{i1}$	$\sum X_{i2}$	…	$\sum X_{ik}$	•	$\sum X_{in}$	0	…	0	…	0

Бұл симплекс кестеде әдеттегі симплекс кестеден бір жол артық. Әрбір j - бағанның бағасы екі жолға толтырылады. $(m+1)$ - жолға коэффициенттері M - нен тәуелсіз коэффициенттер, ал $(m+2)$ - жолға M -нің коэффициенттері жазылады.

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \pm M \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - C_j = \pm \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \cdot M - C_j \cdot 1$$

Бұл кесте толық ($(m+2)$ - жолды қоса алғанда) әдеттегі симплекс кесте сияқты орындалады. Айырмашылығы, тиімділік шарты $(m+2)$ - жол бойынша анықталады.

$(m+2)$-ші жол бойынша тексеруді тиімділік шарты орындалғанға дейін тексереді. Мұнда екі түрлі жағдай болуы мүмкін:

1) базистен барлық жасанды векторлар шығарылады;

2) базистен жасанды базистердің бәрі шығарылып болған жоқ, бірақ $m+2$ жол бойынша тиімділік шарты орындалады.

Бірінші жағдайда $(m+2)$ жолдың барлық элементі нөлге тең, ал базис алғашқы есептің бір жоспары бола алады.

Бұдан әрі тиімді жоспар іздеу процесі $(m+1)$ - жол бойынша жүргізіледі. Бұл жолға да әдеттегі симплекс алгоритмі қолданылады.

Екінші жағдайда, егер $(m+2)$-ші жол мен 0-ші бағанның қиылысуында тұрған элемент (элемент $(m+2,0)$) нөлден үлкен болса (максимум ізделсе нөлден кіші), онда алғашқы есептің шешімі болмайды; ал егер бұл элемент $(m+2,0)$ нөлге тең болса, алғашқы есептің бұл алынған тірек жоспары нұқсанды, олай болса базисте жасанды векторлардың әлі ең болмаса біреуі бар. Олай болса жасанды векторға сәйкес жоспардың компоненттері нөлге тең. Алынған жоспар тиімді емес (нұқсандылық жеке қарастырылады).

Бұдан кейінгі итерацияларда $(m+2)$-ші жолды ескермеуге болады.

Сонымен СП есебін жасанды базис әдісімен шешу процесі мына этаптардан тұрады:

1. кеңейтілген есеп құрастырылады;
2. кеңейтілген есептің тірек жоспары құрылады;
3. базистен симплекс әдісімен жасанды векторлар шығарылады. Нәтижесінде берілген есептің алғашқы тірек жоспары құрылады, не болмаса есептің шешімі жоқ екендігі анықталады;
4. табылған тірек жоспары негізінде симплекс әдіспен берілген алғашқы есептің тиімді жоспары құрылады немесе оның шешімінің жоқтығы дәлелденеді.

3.3.1. Жасанды базис әдісінің ("М" әдісі) алгоритмі

Есептің қойылымы

Жасанды базис әдісі (немесе "М" әдісі) СП есебінің шектеулер жүйесінде "$\leq$" мағынасындағы теңсіздіктермен қатар "$\geq$" мағынасын- дағы теңсіздіктер немесе қатаң теңсіздіктер бар болған жағдайларда қолданылады .

Жалпы түрде берілген СП есебін қарастырайық:

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ функциясының}$$

шектеулердегі эстремумын табу керек

1. Теңсіздіктер жүйесіне қосымша теріс емес айнымалылар, енгізе отырып теңдеулер жүйесіне көшеміз.

2.Қосымша теріс емес айнымалылар теріс таңбамен кірген

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = \overline{1,l}); \qquad (49^а)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i (i = \overline{l+1,p}); \qquad (49^б)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{p+1,m}); \qquad (49^в)$$

$$x_j \ge 0 (j = \overline{1,n}) \qquad (50)$$

(49б) немесе тіпті кірмей қалған (49в) шектеулерге жасанды айнымалылар $y_1, y_2, ..., y_{m-1}$ енгізіледі.

$$x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+l}, x_{n+l+1}, ..., x_{n+p}$$

3.(46) сызықтық формаға коэффициенті $M > 0$ жасанды айнымалылар $\sum y_k \quad (k = \overline{1, m-l})$ қосындысы енгізіледі.

Бастапқы есептің тиімді жоспарында жасанды айнымалылар болмау үшін, М коэффициентіне (46) сызықтық форманың $c_j \, (j = \overline{1,n})$ коэффициенттерімен салыстырғанда өте үлкен кез келген сан беріледі.

Бұл жағдайда (46) мақсат функциясының максимумын тапқанда (-М) деп аламыз, ал минимумын іздегенде (+М) деп аламыз.

4. СП-ның кеңейтілген М есебін құрамыз.

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \pm M \sum_{k=1}^{m-1} y_k$$

сызықтық форманың келесі шектеулердегі

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \ \left(i=\overline{1,l}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + y_k = b_i \ \left(i=\overline{l+1,p};\ \overline{k=1,p-l}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_k = b_i \ \left(i=\overline{p+1,m};\ k=\overline{p-l+1,m-l}\right);$$

$$x_j \geq 0;\ y_k \geq 0;\ \left(j=\overline{1,n+p};\ k=\overline{1,m-l}\right).$$

экстремумын табу керек.

5. М-есептің бастапқы тірек жоспарын табамыз. Қосымша теріс емес x_{n+1} $(i=\overline{1,l})$ айнымалылар мен жасанды y_k $(k=\overline{1,m-l})$ айнымалылар бірлік матрицаның бағандары түрінде сызықты тәуелсіз векторлар жүйесін құрайтын оң бірлік коэффициенттермен шектеулерге кіретіндіктен, аталған айнымалылар базистік болады да, ал қалғандарының барлығы бос айнымалылар болады, яғни

$$x_j = 0\left(j=\overline{1,n},\overline{n+l+1,n+p}\right).$$

Сонда бастапқы тірек жоспар мына түрде болады:

$$X_1\left(\overbrace{0,...,0}^{n},\overbrace{x_{n+1},x_{n+2},...,x_{n+l}}^{l},\overbrace{0,...,0}^{p-l}\overbrace{y_1,y_2,...,y_{m-l}}^{m-l}\right)=$$

$$= X_1\left(0,...,0,b_1,b_2,...,b_l,0,...,0,b_{l+1},b_{l+2},...,b_m\right).$$

6. Кеңейтілген М-есептің тиімді жоспарын табу үшін қарапайым кестеден бір жолы артық симплекс – кесте құрылады. Бұл (m+2) индекстік жолға мақсат функциясына кіретін М-нің сәйкес коэффициенттері теріс таңбалармен жазылады. (m+2)-ші жол бойынша тиімділік белгісі тексеріледі және базиске кіргізілетін айнымалы анықталады. (m+2) индекс жолы бойынша симплекс процедураны осы жол бойынша тиімділік белгісі орындалғанша жүргізеді. Одан кейін тиімді

жоспар табу процесін (m+1) индекс жолы бойынша жалғастырады.

7. М-есептің тиімді жоспарын талдаймыз. Егер бұл жоспарда барлық жасанды айнымалылар нөлге тең болса $y_j = 0(j = \overline{1, m-l})$, яғни $X(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}, 0, ...0)$, онда $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ бастапқы есептің тиімді жоспары болып табылады.

Егер М-есептің тиімді жоспарында жасанды айнымалылардың біреуі ғана нөлге тең емес болса да, яғни $y_j \geq 0 \ (j = \overline{1, m-1})$, онда есептің шешімі жоқ болады.

Егер М-есепті шешу барысында оның шешімі жоқ екендігі анықталса, онда бастапқы есептің де шешімі жоқ болғаны.

Мысалы.

$$L(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$$

функциясының минимумын келесі шектеулерде табу керек,

$$\begin{gathered} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 6; \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 12; \\ x_1 + 2x_3 = 12; \\ x_j \geq 0; \ j = \overline{1,3}. \end{gathered}$$

1. Теңсіздіктер жүйесіндегі 1-ші және 2-ші теңсіздіктерге қосымша теріс емес x_4 және x_5 айнымалыларын енгізу арқылы теңдеулер жүйесіне көшеміз:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6; \\ &-x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_5 = 12; \\ &x_1 + 2x_3 = 12. \end{aligned}$$

2.2-ші және 3-ші теңдеулерге y_1 және y_2 жасанды айнымалыларын енгіземіз,

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6; \\ &-x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_5 + y_1 = 12; \\ &x_1 + 2x_3 + y_2 = 12. \end{aligned}$$

3.L(X) сызықтық формасына M көбейткішімен $y_1 + y_2$ қосындысын енгіземіз. Есеп минимумға қойылғандықтан, M көбейткішін «+ң таңбасымен аламыз.

4. M-есебін құрамыз:

$\overline{L}(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + M(y_1 + y_2) \to \min$ сызықтық форманың,

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 6; \\ &-x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_5 + y_1 = 12; \\ &x_1 + 2x_3 + y_2 = 12; \\ &x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}); y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

шектеулердегі минимумын табу керек.

5. Бұл есепті симплекс әдісімен шешеміз. x_4, y_1, y_2 базистік айнымалылар болғандықтан, оларды бос айнымалылар арқылы өрнектеп, L(X) функциясына қоямыз:

6. Екі индекстік жолы бар симплекс – кесте құрамыз:

$$\begin{aligned} &y_1 = 12 + x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5; \\ &y_2 = 12 - x_1 - 2x_3; \\ &\overline{L}(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + M(24 - 4x_2 + x_5). \end{aligned}$$

біріншіге әдеттегідей қарама-карсы таңбамен c_j коэффициенттері, ал екіншісіне M көбейткішінің сәйкес коэффициенттері (бұл да бос мүшеден басқасы қарама-карсы таңбамен) жазылады.

Тиімділік белгісін (m+2) индекстік жолы бойынша тексереміз. Есеп минимумға қойылғандықтан тиімділік шарты орындалмайды, себебі x_2 бағанында 4-ке тең оң элемент тұр:

$$x_4 : 3, \frac{3}{2}, 1, -2, \frac{1}{2}, 0$$

$$y_1 : 3, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{2}{4}, 0, -\frac{1}{4}.$$

Бұл шешуші бағанды бағдаршамен белгілейміз және әдеттегідей шешуші жолды таңдаймыз. Шешуші жолды таңдағанда бірдей екі ең кіші θ мәнін алдық. Шексіз қайталанудың алдын алу үшін Креко ережесін пайдаланамыз. x_1 және y_1 жолдарын шешуші бағанның сәйкес элементтері 2 және 4-ке бөлеміз. Бөлу нәтижелерін солдан оңға қарай оқимыз да, ең кіші сан бірінші кездескен жолды шешуші деп аламыз.

y_1 жолын бағдаршамен белгілеп бас элементті табамыз (0 – 4-ке тең). Одан кейін қарапайым симплекс процедурасын орындап 2-ші кестені аламыз, онда тағы да (m+2) индекстік жолды талдаймыз. Одан x_3 бағанын шешуші деп таңдаймыз.

3-ші кестені құрудың нәтижесінде екі индекстік жол бойынша да тиімділік шарты орындалып тұрғандықтан, $\overline{X}(0,6,8,18,0,0,0)$ кеңейтілген есептің тиімді жоспары болады.

Жасанды айнымалылардың барлығы да базистен шығарылған- дықтан $X(0,6,6)$ бастапқы есептің тиімді жоспары болады, ал сызықтық форманың мәні $L(X_1) = L_{\min} = 24$.

Қарастырылып отырған есеп үшін сызықтық форманың мәні алынған мәнімен бірдей екінші минимум шешімін құруға болады:

$$x_2(18/5, 8, 21/5), \text{ ал } L_{\min} = 24.$$

Бұдан есептің тиімді жоспарлар жиынына ие екендігі

$$x = \ell x_1 + (1-\ell)x_2,$$

шығады:

мұндағы $0 \le l \le 1$.

11-кесте

№	Базистік айнымалылар	Бос мүшелер	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Σ	Θ
1	X_4	6	3	2	-4	1	0	8	3
	$\leftarrow Y_1$	12	-1	4	-2	0	-1	12	3
	Y_2	12	1	0	2	0	0	15	-
	L(X)	0	-1	-2	-2	0	0	-5	Min
		24	0	$4\uparrow$	0	0	-1	27	-
2	X_4	0	7/2	0	-3	1	1/2	2	-
	X_2	3	-1/4	1	-1/4	0	-1/4	3	-
	$\leftarrow Y_2$	12	1	0	8	0	0	15	6
	L(X)	6	-3/2	0	-3	0	-1/2	1	Min
		12	1	0	$2\uparrow$	0	0	15	
3	X_3	6	1/2	0	0	1	0	15/2	12
	X_2	6	0	1	0	0	-1/4	27/4	-
	$\leftarrow X_4$	18	5	0	1	0	1/2	49/2	18/5
	L(X)	24	0	0	0	0	-1/2	47/2	Min
		0	0	0	0	0	0	0	
4	X_3	21/5	0	0	-1/10	1	-1/20	101/20	
	X_2	6	0	1	0	0	-1/4	27/4	
	$\leftarrow X_4$	18/5	1	0	1/5	0	-1/10	49/10	
	L(X)	24	0	0	0	0	-1/2	47/2	min

ТАПСЫРМА ВАРИАНТТАРЫ

Сызықты L(X) формасы экстремум мәнін қабылдайтындай және сәйкес шектеулерді қанағаттандыратын $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тиімді шешімді табу керек:

$$1.L = x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \le 6; \\ x_1 + 2x_3 - 5x_4 \le 3; \\ -3x_2 + x_3 + x_4 \ge 2. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,4}).$$

$$2.L = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,4}).$$

$$3.L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 \le 1; \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 1; \\ x_2 + x_3 - x_4 \ge 1. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,4}).$$

$$4.L = 192x_1 + 210x_2 + 234x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 24; \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 181. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,3}).$$

$$5.L = 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 \le 24; \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 11; \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 20. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,3}).$$

$$6.L = 8x_1 + 48x_2 + 16x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 16x_1 + 16x_2 - 32x_3 \ge 48; \\ -8x_1 + 32x_2 + 16x_3 = 96; \\ -8x_1 + 16x_2 + 8x_3 \le 16. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,3}).$$

$$7.L = 90x_1 + 150x_2 + 120x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 24; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16; \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 20. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,3}).$$

$$8.L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 10. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,3}).$$

$$9.L = 12x_1 + 11x_2 + 18x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 30; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 51; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 57. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,3}).$$

$$10.L = 36x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 5x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + x_4 \ge 1; \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0(i = \overline{1,4}).$$

$$11. L = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 16; \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 \ge 16. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 (i = \overline{1,4}).$$

$$12. L = x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 - x_4 = 16; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_4 \ge 12; \\ 2x_1 + 4x_3 \le 10. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 (i = \overline{1,3}).$$

$$13. L = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 \le 8; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 22; \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 18. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 (i = \overline{1,3}).$$

$$14. L = 24x_1 + 12x_2 + 30x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge 4; \\ 2x_1 + 5x_{23} \ge 2; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 18; \\ 8x_1 + x_3 \ge 8. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 (i = \overline{1,3}).$$

$$15. L = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 (i = \overline{1,4}).$$

$$16. L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 2; \\ 2x_1 \ldots\ldots - x_3 + 3x_4 \ge 4; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,4}\right)$$

$$17. L = 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 18; \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 16; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 24; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$$

$$18. L = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \ldots\ldots \le 7; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ -2x_1 \ldots\ldots + x_3 \ldots\ldots \ge 6; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,4}\right)$$

$$19. L = 90x_1 + 150x_2 + 120x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 240; \\ 10x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 260; \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \ge 200; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$$

$$20. L = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 - 15x_3 \ge 4; \\ 7x_1 - x_2 + 5x_3 \ge 32; \\ 4x_1 + 10x_2 - 3x_3 \ge 50; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right)$$

$21. L = 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 156; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 112; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 168; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$22. L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 \le 1; \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 1; \\ 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 1; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,4}\right)$

$23. L = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 30; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 30; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 20; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$24. L = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \ge 36; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 32; \\ x_1 - x_3 \le 16; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$25. L = 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 156; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 112; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 168; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$26. L = 8x_1 + 8x_2 + 14x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6; \\ 3x_1 + x_2 \le 15; \\ x_2 + 2x_3 = 6; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$27. L = 2x_1 + 14x_2 + 16x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 30; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 51; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 57; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$28. L = 192x_1 + 210x_2 + 234x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 24; \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$29. L = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 \le 9; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 22; \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 18; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,3}\right)$

$30. L = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 7; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ -2x_1 + x_3 \ge 6; \end{cases}$$
$x_i \ge 0\left(i = \overline{1,4}\right)$

3.4. СП есептерін шешудің қосжақты симплекс әдісі

СП қосжақтылық ұғымы. СП теориясында оның әрбір есебіне сызықтық программалаудың толық анықталған басқа бір есебін сәйкестендіруге болады. Бұл есептердің біреуінің шешімі арқылы екіншісінің шешімін алуға болады. Мұндай есептер өзара қосалқы (немесе өзара түйіндес) есептер деп аталады. Бірінші қойылған есеп алғашқы, екіншісі қосалқы (түйіндес) есеп болып саналады. Шикізатты пайдалану туралы есепті қарастырайық.

Өндірісте n түрлі бұйым шығару үшін қолданылатын, әрқайсысының саны $B_i \ (i=\overline{1,m})$ бірліктен тұратын шикізаттың m түрі бар. j-ші бұйымның бір бірлігін шығару үшін i-ші шикізаттың a_{ij} бірлігі жұмсалады. Шикізат бірлігінің бағасы c_j-ге тең. Өндіріске ең көп түсім қамтамасыз ететін бұйым шығарудың жоспарын жасау керек. Алғашқы математикалық есептің қойылуы мынадай болады.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{51}$$

сызықты форманың

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_x + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_n \end{cases} \tag{52}$$

$$x_j \le 0, \ j = 1,2\ldots \tag{53}$$

шектеулерімен ең үлкен мән беретін $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторын құру керек.

Есепке тағы бір шарт енгізілсін. Айталық, өндірістің шикізатты басқа бір өндіріс орнына сатуға мүмкіндігі бар екен делік. Шикізаты бар өндіріс орнының алдына шикізаттан бұйым өндіріп сатқан пайдалы ма, әлде шикізатты сатқан пайдалы ма деген сұрақ туады?

Шикізаттың барлық қорын сатудан алынған түсім, шикізатты түгел жұмсап жасаған бұйымдарды сатудан алынған түсімнен кем болмау үшін, шикізаттың әр түрінің j бірлігіне қандай баға қою керек?

Шикізаттың i-ші түрінің ізделінді бағасын $y_i \geq 0$ арқылы белгілейік.

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad j = 1,2,...,n$ бұйымның j түріне жұмсалатын шикізатты сатқаннан алынатын түсім; $\sum_{i=1}^{m} b_1 y_i$ – барлық шикізаттың бағасы.

Өндіріс орны шикізатты, одан жасалған бұйымның бағасынан аз түсім болатындай сатпайтындығы белгілі, демек

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq C_j \quad j = \overline{1,n}$$

шарты орындалуы керек. Екінші жағынан, барлық шикізаттың бағасы $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ -ге тең. Сатып алушы өндіріс шикізатын барынша арзан бағаға алуға тырысады, яғни $b_i y_i + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min$. Сонымен қосалқы есепті төмендегідей тұжырымдауға болады:

$$Z^* = b_1 y_i + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \tag{54}$$

функциясына ең кіші мән беріп,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq C_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{55}$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,m} \tag{56}$$

шарттарын қанағаттандыратындай $Y = (y_1 y_2,..., y_{m})$ векторын анықтау керек. (54)-(56) есептері (51)-(53) есептеріне қосалқы (түйіндес) есеп деп аталады. Қосалқы есептерді салыстыра келе алғашқы есептен қосалқы есепке және керісінше түрлендіретін ережені тұжырымдауға болады:

1.(54)-(56) есептердегі y_i айнымалыларының саны (51)-(53) есептің шектеулерінің санына тең;

2.(54)-(56) есебіндегі шарттар матрицасы (51)-(53) шарттар матрицасының транспонирленген матрицасы;

3. Максимум есебі минимум есебіне ауыстырылады;

4.Теңсіздіктердің "<= " түрі карама карсыға, яғни ">=" теңсіздіктеріне ауыстырылады;

5.Алғашқы есептегі мақсат функциясының коэффиценттері қосалқы (түйіндес) (54)-(56) есептің шектеулер векторына айналады, ал шектеулер векторы қосалқы есептің мақсат функциясының коэффициенттеріне айналады. Есептердің бірі стандартты болса, екіншісі де стандартты. Екі есепте де шектеулер жүйесі теңсіздіктермен берілген. Сондықтан (51)-(53) және (54)-(56) есептер симметриялы деп аталады.

Ескерту. Қосалқы есепті құру алдында алғашқы есептің шектеулер жүйесі бір мағынаға келтіріледі. Егер есеп максимумға қойылса, шектеулерді "$\leq$" түріне, ал есеп минимумға қойылса шектеулерді "$\geq$" түріне келтіру керек деп келісілген.

Симметриялы емес қосжақты есептер. Симметриялы емес қосжақты есептерде алғашқы есептің шектеулер жүйесі теңдіктер түрінде, ал қосалқы есептің шектеулер жүйесі теңсіздіктер түрінде беріледі. Оның үстіне қосалқы есепте айнымалылар теріс те болуы мүмкін.

Қосжақты есептің негізгі теоремасы. Қосалқы есептерді матрицалық түрде жазайық.

Алғашқы есеп:

$$Z = CX \tag{57}$$

сызықты функциясына ең кіші мән беретін,

$$AX = A_0 \tag{58}$$

$$X \geq 0 \tag{59}$$

шарттарын қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, ...x_n)$ матрица бағанды табу керек.

Қосалқы есеп:

$$Y = YA_0 \tag{60}$$

сызықты функцияға ең үлкен мән беретін,

$$YA \leq C \tag{61}$$

шартын қанағаттандыратын $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ матрица жолды табу керек. Екі есепте де $A_0 = (b_1, b_2, ..., b_m)$ – матрица баған. $A = (a_{ij})$ – шектеулер жүйесінің коэффициенттері. Қосжақты есептердің негізгі теоремасы олардың тиімді жоспарларының арасындағы байланысты көрсетеді.

Теорема (қосалқылық теоремасы). Егер қосалқы есептердің біреуінің тиімді жоспары бар болса, екіншісінің де тиімді жоспары бар және мақсат функцияларының тиімді жоспардағы мәндері тең, яғни

$$F_{\max} = F_{\min}$$

Егер қосалқы есептердің біреуінің мақсат функциясы шектелмеген болса, екінші есептің шешімі жоқ.

Симметриялы қосалқы есептер. СП қосалқы есебінің тағы бір түрі алғашқы есептің де, қосалқы есептің де шектеулер жүйесі теңсіздіктермен беріледі, оған қоса қосалқы айнымалыларға теріс болмау шарты қойылады.

Алғашқы есептің қойылымы. Сызықты $Z = CX$ функциясына,

$AX \geq A_0, x_0 \geq 0$ шектеулерімен ең кіші мән беретін $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – матрица– бағанды табу керек.

Қосалқы есептің қойылымы. Сызықты $f = YA_0$ функциясына $YA \leq C;\ Y \geq 0$ шектеулерімен ең үлкен мән беретін $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – матрица – жолды табу керек.

Қосалқы есептердің математикалық модельдері:

Симметриялы емес есептер

1. Алғашқы есеп — Қосалқы есеп

$$Z_{\min} = CX; \quad AX = A_0; \quad X \geq 0.$$

$$f_{\max} = YA_0; \quad YA \leq C.$$

2. Алғашқы есеп — Қосалқы есеп

$$Z_{\max} = CX; \quad AX = A_0; \quad X \geq 0.$$

$$f_{\min} = YA_0; \quad YA \geq C.$$

Симметриялы есептер

3. Алғашқы есеп — Қосалқы есеп

$$Z_{\min} = CX; \quad AX \geq A_0; \quad X \geq 0.$$

$$f_{\max} = YA_0; \quad YA \leq C; \quad Y \geq 0.$$

4. Алғашқы есеп — Қосалқы есеп

$$Z_{\max} = CX; \quad AX \leq A_0; \quad X \geq 0.$$

$$f_{\min} = YA_0; \quad YA \geq C; \quad Y \geq 0.$$

Мысалдар:

1-мысал. Максимумға қойылған алғашқы есепке қосалқы есеп құру керек.

$$F_{\max} = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Шешімі:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

1.Қосалқы есептің айнымалыларының саны алғашқы есептің шектеулер жүйесіндегі теңдеулер санына тең.

2.Қосалқы есеп шектеулерінің шарттар матрицасы,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

ал мақсат функциясының коэффициенттері 12, 24, 18.

3.Алғашқы есептің мақсат функциясы максимумға қойылса, қосалқы есептің мақсат функциясы минимумға қойылады.

4.Алғашқы есепте шектеулер жүйесі теңдеулер, ал қосалқы есепте теңсіздіктер, оған қоса алғашқы есептегі айнымалылар теріс емес болса, қосалқы есептің шектеулер жүйесінде $\geq$ түрінде үш теңсіздік болуы керек.

5. Қосалқы есептің мақсат функциясының коэффициенттері 12, 24, 18 болғандықтан,

$$F_{\min}^{*} = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$$
$$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$
$$-5y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 3$$

$y_i, \quad i = 1,3$ кез келген мәндер қабылдай алады.

2-мысал.

$$F_{\min} = x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + 7x_2 \leq 1$$
$$2x_2 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Шешімі:

Теңсіздіктерді бір мағынаға келтіреміз. Ол үшін 2-ші теңдікті (-1)-ге көбейтеміз:

$$F_{\min} = x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + 7x_2 \leq -1$$
$$2x_2 + 3x_2 \geq 6.$$

Қосалқы есеп:

$$Z_{\max} = 3y_1 - y_2 + 6y_3$$
$$2y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$
$$y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 2.$$

3.4.1. Қосжақты симплекс әдісінің алгоритмі

Есептің қойылымы

Қосжақты симплекс әдісі СП есептерінің қосжақтылық теориясына негізделген және шектеулер жүйесі оң базисте кез-келген таңбалы бос мүшелерден тұратын есептерді шығарады.

Бұл әдіс шектеулер жүйесін түрлендіру санын азайтуға және симплекс кестені кішірейтуге мүмкіндік береді.

Келесі СП есебін карастырайық:

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to экстремум \qquad (62)$$

сызықтық формасының келесі шектеулерде экстремумын табу керек,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \quad (i = \overline{1, l}) \qquad (63)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j \quad (i = \overline{l+1, m}) \qquad (64)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \qquad (65)$$

Индекс жолы бойынша тиімділік шарты орындалсын, онда базистік компоненттерінің арасында терістері бар

$X(x_1, x_2, ..., x_n)$ жоспары шартты-тиімді немесе псевдо жоспар деп аталады.

Егер базистік жоспардың барлық компоненттері теріс болмаса (индекстік жол бойынша тиімділік шарты орындалса), онда алынған жоспар тиімді болады.

1. (64)-ші шектеулер жүйесін (-1)-ге көбейту арқылы "≤" түрге келтіреміз,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j \quad (i = \overline{l+1, m}).$$

2. Есептің бастапқы тірек жоспарын құрамыз. Ол үшін базистік болып табылатын қосымша айнымалылар енгізе отырып, теңсіздіктер жүйесінен теңдеулер жүйесіне көшеміз. Бірінші симплекс кестені толтырып, индекстік жол коэффициенттеріне талдау жасаймыз:

а) егер есепті максимумға шешкенде, индекстік жолдың барлық коэффициенттері теріс емес, ал есепті минимумға шешкенде оң емес болса, онда келесі кадамға көшеміз; ә) егер а) шарты орындалмаса, онда симплекс әдіспен осы шарттың орындалуын камтамасыз етеміз. Мұнда Θ бағанының элементтері келесі ереже бойынша толтырылады: бос мүшелер бағанының оң емес элементтері шешуші бағанның теріс коэффициенттеріне бөлінеді, ал теріс еместері – оңдарға бөлінеді.

3. Бос мүшелер бағанының элементтерін қараймыз:

а) егер барлық коэффициент оң болса, онда жоспар тиімді және есеп шешілді;

б) егер коэффициенттердің арасында ең болмаса біреуі теріс болса, онда псевдо жоспар алынады.

1. Бос мүшелер бағанының теріс коэффициенттерінің ішінен абсолюттік мәні бойынша ең үлкенін аламыз. Бұл коэффициент қандай элементтің базистен шығатындығын көрсететін шешуші жолды анықтайды.

2. Индекстік жолдың коэффициенттерін шешуші жолдың тек теріс элементтеріне бөлеміз және Θ жолын толтырамыз. Егер СП есебі максимумға қойылған болса, онда Θ жолының элементтері кері таңбамен алынады.

3. Θ жолының барлық мәндерінің ішінен ең кішісін таңдаймыз, ол шешуші бағанды анықтайды. Шешуші баған қандай айнымалы базиске кіру керектігін көрсетеді. Шешуші жол мен бағанның қиылысынан бас элементті табамыз.

4. Келесі кестеге көшудің қарапайым симплекс–процедурасын орындаймыз да, 3-ші қадамға ораламыз.

Мысалы.

Сызықты $L(x) = 4x_1 - 9x_2 \to \max$ функциясының келесі шектеулерде ең үлкен мәнін табу керек:

$$
\begin{aligned}
&-4x_1 + 3x_2 \le 12; \\
&2x_1 + 3x_2 \ge 30; \\
&x_1 + 2x_2 \ge -8; \\
&x_1 + x_2 \le 32; \\
&x_1 \le 20; \\
&x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

1. Шектеулер жүйесін "≤" түріне келтіреміз:

$$
\begin{aligned}
&-4x_1 + 3x_2 \le 12; \\
&-2x_1 - 3x_2 \le -30; \\
&-x_1 - 2x_2 \le 8; \\
&x_1 + x_2 \le 32; \\
&x_1 \le 20.
\end{aligned}
$$

2. Теңсіздіктер жүйесінен теңдеулер жүйесіне көшеміз:

$$
\begin{aligned}
&-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\
&-2x_1 - 3x_2 + x_4 = -30; \\
&-x_1 - 2x_2 + x_5 = 8; \\
&x_1 + x_2 + x_6 = 32; \\
&x_1 + x_7 = 20.
\end{aligned}
$$

1-ші симплекс кестесін толтырып, индекстік жолға талдау жасаймыз. Индекстік жолдың X_1 бағанында теріс (-4) коэффициенті бар болғандықтан, а) шарты орындалмайды. X_1 бағанын шешуші деп аламыз да, Θ бағанын толтырамыз,

$$\Theta = \min\left\{\frac{-30}{-2}, \frac{8}{1}, \frac{32}{1}, \frac{20}{1}\right\} = \min\{15,8,32,20\} = 8$$

X_5 жолы – шешуші. Бас элемент 1-ге тең. Қарапайым симплекс–процедурасы аркылы 2-ші кестеге көшеміз.

3. 2-ші кестеде индекстік жолда барлық коэффициенттер теріс емес, яғни а) шарты орындалған, бірақ бос мүшелер арасында теріс (-14) элемент бар, яғни псевдо жоспар алдық.

4. x_4 жолын шешуші деп аламыз.

5. Θ жолын толтырамыз.

6. Бұл жағдайда 1/7-ге тең жалғыз қатынас бар. x_2-сі бар бағанды шешуші деп аламыз да, оның шешуші жолмен қиылысынан бас элементті (-7)-ні табамыз.

7. Әдеттегі ереже бойынша келесі кестені толтырып, 3-ші қадамға көшеміз. 3-ші кестеде бос мүшелер бағанының барлық коэффициенттері теріс емес, яғни есеп шешілді және тиімді жоспар алынды:

$$X(12,2,5,4,0,0,18,8),\ L_{max}=30.$$

12-кесте

№	Базис-тік Айны-малы	Бос мүше	X_1	X_1	X_1	X_1	X_1	X_1	X_1	$\sum$	Θ
1	X_3	12	-4	3	1	0	0	0	0	12	-
	X_4	-30	-2	-3	0	1	0	0	0	-34	15
	$\leftarrow X_5$	8	1	-2	0	0	1	0	0	8	8
	X_6	32	1	1	0	0	0	1	0	35	32
	X_7	20	1	0	0	0	0	0	1	22	20
	L(X)	0	-4↑	9	0	0	0	0	0	5	Max

12-кестенің жалғасы

2	X_3	14	0	-5	1	0	4	0	0	44	-
	X_4	-14	0	-7	0	1	2	0	0	-18	-
	X_1	8	1	-2	0	0	1	0	0	8	-
	X_6	24	0	3	0	0	-1	1	0	27	-
	X_7	12	0	2	0	0	-1	0	1	14	-
	L(X)	32	0	1	0	0	4	0	0	37	-
	Θ	Max		1/7↑	-	-	-	-	-	-	Max
3	X_3	54	0	0	1	-5/7	18/7	0	0	396/7	-
	X_2	2	0	1	0	-1/7	-2/7	0	0	18/7	-
	X_1	12	1	0	0	-2/7	3/7	0	0	92/7	-
	X_6	18	0	0	0	3/7	-1/7	1	0	135/7	-
	X_7	8	0	0	0	2/7	-3/7	0	1	62/7	-
	L(X)	30	0	0	0	1/7	30/7	0	0	241/7	Max

ТАПСЫРМА ВАРИАНТТАРЫ

Сызықты L(X) формасы экстремум мәнін қабылдайтындай және сәйкес шектеулерді қанағаттандыратын $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ тиімді шешімді табу керек:

1. $L = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 9; \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 6; \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 5. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

2. $L = 5x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 11x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 \geq 6; \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 \geq -7. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

3. $L = 520 - 22x_1 - 6x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 6; \\ 7x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 4; \\ 22x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 2. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

4. $L = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \geq 6; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 9; \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 12. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

5. $L = 300 - 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7; \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 8; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 4. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

6. $L = 15 - 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 6x_4 \leq 7; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq -2; \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 \leq 7 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

7. $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 1; \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1; \\ x_2 + x_3 - x_4 \geq 1. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

8. $L = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 6; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 4 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

9. $L = 9x_1 + 8x_2 + 11x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 8{,}4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 75; \\ 2x_1 + 2{,}6x_2 + 3x_3 \leq 79; \\ 2{,}4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 71; \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 95. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,3}).$

10. $L = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 9. \end{cases}$$

$x_i \geq 0 (i = \overline{1,4}).$

11. $L = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \geq 12; \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_4 \geq 24; \\ -8x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq -12. \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

12. $L = 54x_1 + 46x_2 + 44x_3 + 64x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 300; \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 860; \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 256. \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

13. $L = 58x_1 + 48x_2 + 52x_3 + 64x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 100; \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 340; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 118. \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

14. $L = 15 - 2x_1 - x_2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 3; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 1; \\ 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 4; \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 6. \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,3}).$

15. $L = 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 90; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 72; \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 26. \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

16. $L = 34_1 + 48x_2 + 56x_3 + 36x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 460; \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 136; \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 160; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}.)$

17. $L = 72x_1 + 58x_2 + 56x_3 + 52x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 \geq 160; \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 188; \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 540; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

18 $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2; \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,3}).$

19. $L = 5x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1; \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,3}).$

20. $L = 93 - 8x_1 - 12x_2 - 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 \leq 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 0; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 3; \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3})$

21. $L = 10 - 7x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 1; \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 \geq -5; \\ 2x_1 - 3x_3 - 3x_4 \geq -12; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

22. $L = 300 - 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 8; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 4; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

23. $L = 16x_1 + 24x_2 + 14x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 \geq 2; \\ .3x_2 + 2x_3 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3; \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 1; \end{cases}$$

$3x_2 + x_3 \geq 2;$

$x \geq 0(i = \overline{1,3}).$

24. $L = 35 - 12x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 7x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq 4; \\ 3x_1 + x_3 + x_4 \geq 3; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

25. $L = 9x_1 + 15x_2 + 12x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 24; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 16; \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 10; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 12; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

26. $L = 45x_1 + 30x_2 + 50x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 8; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 12; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = 1,3).$

27. $L = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \geq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = 1,4).$

28. $L = 58x_1 + 48x_2 + 52x_3 + 64x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ 5x_1 = 3x_2 + -x_3 + 5x_4 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4 \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,4}).$

29. $L = 15 - 2x_1 - x2 - x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \to \max; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2; \\ x_1 + 3x_2 = 2x_3 \geq 1; \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 1; \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 4; \end{cases}$$

$x_i \geq 0, (i = \overline{1,3}).$

30. $L = 16x_1 + 24x_2 + 14x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 \geq 2; \\ 2x_2 + 2x_3 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3; \\ 3x_2 + x_3 \geq 2; \end{cases}$$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,3}).$

3.5. СП транспорт есебін потенциалдар әдісімен шешу

СП транспорт есебі келесі түрде тұжырымдалады:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \qquad (66)$$

мақсат функциясы және төмендегі шарттар берілген,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (67)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (68)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}).$$

Мұндағы C_{ij}–i-ші өндірушіден j-ші тұтынушыға жүк бірлігін жеткізу бағасы; a_i–i-ші өндірушінің ресурстары; b_j– j-ші тұтынушының қажеттілігі.

Кез келген i-ші ($i = \overline{1,m}$) өндірушіден кез келген j-ші ($j = \overline{1,n}$) тұтынушыға (67), (68) шарттары орындалып, мақсат функциясы экстремум мәнін қабылдайтындай бір текті жүкті тасымалдаудың жоспарын

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

құру қажет.

13-кесте

Тұтынушылар / Жіберушілер	B_1	B_2	…	B_n	Ресурстар
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	
- - -	--- ---	--- ---	---	--- ---	---
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	
Қажеттіліктер	B_1	B_2	…	B_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

3.5.1. Потенциалдар әдісінің алгоритмі

1. Транспорт есебінің шешімі бар болу шартын тексереміз,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

яғни

Егер бұл шарт орындалмаса, онда екі жағдай болуы мүмкін:

$$a)\ \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

болса, қажеттіліктері,

$$B_{\phi} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

болатын $B_Ф = B_{n+1}$ жасанды тұтынушы енгіземіз.

$$б)\ \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

болса, ресурстары

$$A_ф = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

болатын $A_Ф = A_{m+1}$ жасанды өндірушіні енгіземіз.

Бірінші жағдайда тарату кестесіне қосымша баған енгізіледі, ал екіншіде – қосымша жол енгізіледі. Жасанды тұтынушылар немесе өндірушілердің бағасы көбінесе нөлге тең деп алынады.

2. Алғашқы тірек жоспарын құрамыз. Оны құрудың бірқатар әдістері бар: "солтүстік-батыс бұрыш" әдісі, матрицаның ең жақсы элемент әдісі, қатардың ең жақсы элемент әдісі, аппроксимация және т.б.

Матрицаның ең жақсы элемент әдісін қарастырайық:

а) $C_{ij}\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ бағалар матрицасының ең жақсы элементін таңдаймыз (егер есеп минимумға қойылса, ең кішісі, егер есеп максимумға қойылса, ең үлкені);

ә) Ең жақсы элементі бар тарату кестесінің торына жол және баған бойынша шектеулерді ескере отырып, ең үлкен болатын тасымалдау шамасын жазамыз. Нәтижесінде, жол немесе баған бойынша шектеу бітеді, бұдан әрі шектеу біткен бағыттағы сәйкес қатар одан ары есеп шешу барысында қарастырылмайды (яғни сызылып тасталады);

б) а) қадамына көшеміз. Процесті барлық ресурстар таратылып, барлық қажеттілік қанағаттандырылғанша жалғастырамыз.

1-ескерту. Өнімдерді таратқанда бір уақытта жол да, баған да сызылып тасталса, онда жоспар нұқсанды (вырожденный) болады. Сондықтан бір уақытта сызылып тасталатын жол және бағандағы ең жақсы C_{ij} баға бар бос торлардың біріне (жасандыға жатпайтын) жіберілетін өнімнің шамасын нөл деп қоямыз, яғни бос емес торлар санын (m+n-1) санына жеткіземіз.

3.Жоспардың нұқсанды еместігін тексереміз: толтырылған ұяшықтар саны m+n-1-ге тең болуы керек. Егер жоспар нұқсанды болса – нұқсандылықты жоямыз (1 және 2 ескерту).

4. L(X) сызықтық формасының мәнін есептейміз.

5. Жоспардың тиімділік шартын тексереміз:

а) барлық бос емес ұяшықтар үшін (яғни $X_{ij}>0$) (m+n)

$$U_i \quad (i=\overline{1,m})$$

белгісіздері бар теңдеулер жүйесін құрамыз және

$$V_j \quad (j=\overline{1,n})$$

$$-U_i+V_j=C_{ij}.$$

Бұл жүйе анықталмаған жүйе болғандықтан, айнымалылардың біріне кез келген мән беруге болады. Есептеуге оңай болу үшін $U_i=0$ деп аламыз. Алынған U_i және V_j -ді қосымша баған мен жолға енгіземіз;

ә) барлық бос ұяшықтар үшін (яғни $X_{ij}=0$) келесі формула бойынша бағалау жүргіземіз,

$$\Delta_{ij}=-U_i+V_j-C_{ij}$$

Есепті минимумға шешкенде барлық $\Delta_{ij}\leq 0$ болса (есепті максимумға шешкенде барлық $\Delta_{ij}\geq 0$ болса), онда алынған жоспар тиімді болып табылады.

Тасымалдау жоспары $X=(x_{ij})$ және оған сәйкес сызықты форманың мәні $L(x)$ болады.

Есепті минимумға шешкенде ең болмаса бір $\Delta_{ij}>0$ бағасы бар болса (есепті максимумға шешкенде $\Delta_{ij}<0$), онда жоспар тиімді емес, онда келесі қадамға көшеміз.

6. Барлық оң бағалар (есеп минимумға) ішінен ең үлкенін таңдаймыз. Есепті максимумға шешкенде барлық Δ_{ij} теріс бағалар ішінен абсолюттік мәні бойынша ең үлкені таңдалады. Таңдалған бағаны – $\Delta_{i_0 j_0}$ деп белгілейміз.

7. Таңдалған $\Delta_{i_0 j_0}$ бағасы бар ұяшық үшін тікбұрышты контур құрамыз, ол тік бұрыш жасап қиылысатын горизонталь және вертикал кесінділерден тұрады. Контурдың бір төбесі (i_0, j_0) нөмірлі бос ұяшықта, ал қалғандарының барлығы толтырылған ұяшықтарда болуы керек.

8. (i_0, j_0)-ден бастап контур төбелеріне "плюс" және "минус" таңбаларын меншіктейміз.

9. Контур төбелеріндегі "минус" таңбалы мәндер ішінен ең кішісін таңдап, оны θ деп белгілейміз.

10. θ мәнін контур бойынша жылжыта отырып, оны "минус" таңбалы төбелердегі мәндерден аламыз да, "плюс" таңбалы төбелердегі мәндерге қосамыз.

Жаңа тірек жоспар алып, 3-ші қадамға қайта ораламыз.

2-ескерту. Егер "минус" таңбалы контур төбелерінде екі (немесе бірнеше) бірдей ең кіші θ мәні болса, онда мәндерді контур бойынша қайта бөлгенде (жоспардың нұқсанды болу жағдайларын болдырмау үшін), бұл төбелердің біріне (немесе бірнешеуіне) нөл қою керек (ең жақсы C_{ij} бар ұяшыққа сәйкес келетін, бірақ жалған ұяшықтарға жатпайтын төбелерге артықшылық беріледі).

3-ескерту. Бастапқы тірек жоспар үшін сызықтық форма мәнін

$$L(X_1) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

формуласымен есептеп, ал L(X)-тің келесі мәндерін төменде берілген формуламен есептеуге болады,

$$L(X_2) = L(X_1) \pm \Delta L$$

мұнда есеп максимумға шешілсе "плюс", ал минимумға болса "минус", мұндағы $\Delta L = \Delta i_0 j_0 \cdot \Theta$.

4-ескерту. Егер алынған тиімді жоспар бағаларының нөлге тең бос ұяшықтары бар болса, онда есептің тиімді жоспарлар жиыны бар болғаны.

Бағасы нөлге тең ұяшық үшін контур құру керек және $X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$ $(0 \le \alpha \le 1)$ өнімді қайта бөлу керек. Жаңадан алынған жоспар тағы да тиімді болады. Олай болса СП теоремасы бойынша кез келген жоспар тиімді болады.

Мысалы. Төмендегі берілгендер бойынша жалпы бағасы ең аз болатындай тасымалдау жоспарын құру керек,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$a_1=4$; $a_2=8$; $a_3=8$;
$b_1=7$; $b_2=3$; $b_3=6$; $b_4=6$.

1. Шешім бар болу шартын тексереміз:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 20;$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 22.$$

Ресурстары $A_ф=22-20=2$ болатын $A_ф$ жалған жеткізуші енгіземіз.

2. Матрицаның ең жақсы элемент әдісі бойынша бастапқы тірек жоспарын құрамыз (1-кесте). Бағасы ең төмен $C_{41}=0$, (4,1) ұяшығына $X_{41}=\min(2,7)=2$ өнім жібереміз. $A_ф$-тың барлық ресурстары таусылды, сондықтан бұл жолды сызып тастаймыз. Қалған бағалар ішінде ең кішісі $C_{14}=1$, олай болса $X_{14}=\min(8,4)=4$ т.с.с. Процесс ресурстар толықтай таратылып біткенше жалғасады. Келесі жоспарды аламыз,

3. Алынған жоспар нұқсанды емес, себебі $m+n-1=7$ және кестеде толтырылған ұяшықтар саны 7-ге тең.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $L(x) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 57$.

5. Жоспардың тиімді болу шартын тексереміз. Ол үшін толтырылған ұяшықтар үшін жүйе құрамыз,

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

$$(1,4): -U_1 + V_4 = 1;$$

$$(2,2): -U_2 + V_2 = 3;$$

$$(2,3): -U_2 + V_3 = 2;$$

$$(3,1): -U_3 + V_1 = 4;$$

$$(3,2): -U_3 + V_2 = 3;$$

$$(3,4): -U_3 + V_4 = 6;$$

$$(4,1): -U_4 + V_1 = 0.$$

$U_1=0$ деп алып, барлық мәндерді табамыз:

$$U_1=0;\ U_2=-5;\ U_3=-5;\ U_4=-1;$$
$$V_1=-1;\ V_2=-2;\ V_3=3;\ V_4=1.$$

Кестеде U_i бағанын және V_j жолын толтырамыз. Бос ұяшықтардың бағаларын табамыз,

$$\Delta_{11}=-U_1+V_1-C_{11}=0-1-5=-6<0$$
$$\Delta_{12}=-U_1+V_2-C_{12}=0-2-4=-6<0$$
$$\Delta_{13}=-U_1+V_3-C_{13}=0-3-2=-5<0$$
$$\Delta_{21}=-U_2+V_1-C_{21}=5-1-4=0$$
$$\Delta_{24}=-U_2+V_4-C_{24}=5+1-3=3>0$$
$$\Delta_{33}=-U_3+V_3-C_{33}=5-3-3=-1<0$$
$$\Delta_{42}=-U_4+V_2-C_{42}=1-2-0=-1<0$$
$$\Delta_{43}=-U_4+V_3-C_{43}=1-3-0=-2<0$$
$$\Delta_{44}=-U_4+V_4-C_{44}=1+1-0=2>0.$$

6. X_1 жоспары тиімді емес, себебі бос ұяшықтардың оң бағалары бар. Олардың ішінен ең үлкенін $\Delta_{24}=3$-ті таңдап аламыз.

7. (2,4) нөмірлі ұяшық үшін контур құрамыз. Контурдың төбелері: (2,4), (3,4), (3,2), (2,2).

8. (2,4)-тен бастап төбелерге таңбалар қоямыз.

9. (2,2) және (3,4) ұяшықтарында тұрған жеткізулер ішінен ең кішісін таңдаймыз: θ=min{2,2}=2.

10. θ=2-ні контур бойынша жылжыта отырып, оны (2,4) және (3,2) ұяшықтарындағы өнімдерге косамыз, (2,2) және (3,4) ұяшықтардағы өнімдерден аламыз. Жаңа жеткізулер аламыз: (3,2) ұяшығында – 3, (2,4) ұяшығында – 2, ал (2,2) және (3,4) ұяшықтары босайды. Нұқсандылық жағдайына келеміз (2-ескерту). (2,2) нөмірлі ұяшыққа (себебі $C_{22}<C_{34}$) нөлді қоямыз. Жаңа тірек жоспарды 2-кестеге жазамыз да, 3-ші қадамға көшеміз.

3. Жаңа жоспар алдық,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $L(X_2) = L(X_1) - \Delta_{i_0 j_0} \cdot \Theta = 57 - 3 \cdot 2 = 51$.

5. Жоспардың тиімділігін тексереміз.

Толтырылған ұяшықтар үшін:

$$(1,4): -U_1 + V_4 = 1$$
$$(2,4): -U_2 + V_4 = 3$$
$$(2,3): -U_2 + V_3 = 2$$
$$(2,2): -U_2 + V_2 = 3$$
$$(3,2): -U_3 + V_2 = 3$$
$$(3,1): -U_3 + V_1 = 4$$
$$(4,1): -U_4 + V_1 = 0.$$

Бұдан шығатыны:

$$U_1=0;\ U_2=-2;\ U_3=-2;\ U_4=2;$$
$$V_1=2;\ V_2=1;\ V_3=0;\ V_4=1.$$

Бос ұяшықтар үшін:

$$\Delta_{11}=2-0-5=-3<0$$

$$\Delta_{12}=1-0-4=-3<0$$
$$\Delta_{13}=-2<0$$
$$\Delta_{24}=2+2-4=0$$
$$\Delta_{33}=0+2-3=-1<0$$
$$\Delta_{34}=1+2-6=-3<0$$
$$\Delta_{42}=1-2-0=-1<0$$
$$\Delta_{43}=-2<0$$
$$\Delta_{44}=1-2=-1<0.$$

Яғни, X_2 жоспары тиімді.

Тиімді жоспар

$$X_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

сызықты форма $L(X_2)=51$.

$\Delta_{21}=0$ болғандықтан, есептің тиімді жоспарлар жиыны бар. (2,1) ұяшығы үшін контур құруға және жеткізулерді қайта бөлуді жүргізуге болады. X_3 -ті аламыз, ол да тиімді болып табылады $L(X_3)=51$. Онда СП-ның негізгі теоремасы бойынша кез-келген $X=\alpha X_2+(1-\alpha)X_3 \quad (0\le\alpha\le 1)$ жоспар да есептің тиімді жоспары болып табылады.

14-кесте

B_j / A_i		B_1		B_2		B_3		B_4		Ресурстар
	V_j / U_i	$V_1=-1$		$V_2=-2$		$V_3=-3$		$V_4=1$		
A_1	$U_1=0$	X	5	X	4	X	2	4	1	4
A_2	$U_2=-5$	X	4	- 2	3	6	2	+ X	3	8
A_3	$U_3=-5$	5	4	+ 1	3	X	3	- 2	6	8
A_4	$U_4=-1$	2	0	X	0	X	0	X	0	2
Қажеттіліктер		7		3		6		6		22 / 22

15-кесте

B_j / A_i		B_1		B_2		B_3		B_4		Ресурс-тар
	V_j / U_i	$V_1=2$		$V_2=1$		$V_3=0$		$V_4=1$		
A_1	$U_1=0$	X	5	X	4	X	2	4	1	4
A_2	$U_2=-5$	X	4	0	3	6	2	2	3	8
A_3	$U_3=-5$	5	4	3	3	X	3	X	6	8
A_4	$U_4=-1$	2	0	X	0	X	0	X	0	2
Қажеттіліктер		7		3		6		6		22 / 22

ТАПСЫРМА ВАРИАНТТАРЫ

Егер сәйкес матрицаның $C=(c_{ij})$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ бағасы, ресурстардың көлемі – a_i $(i=\overline{1,m})$ және қажеттіліктердің көлемі – b_j $(j=\overline{1,n})$ берілсе, онда тасымалдаудың жалпы бағасы ең аз болатындай тасымалдаудың $X=(x_{ij})$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ тиімді жоспарын табу керек:

$$1.C=\begin{pmatrix}16 & 13 & 19 & 9\\ 18 & 20 & 23 & 27\\ 10 & 24 & 17 & 21\\ 22 & 28 & 11 & 25\\ 12 & 15 & 28 & 14\end{pmatrix}$$

$a_1=125; a_2=327; a_3=100;$
$a_4=215; a_5=180; b_1=350;$
$b_2=220; b_3=127; b_4=300.$

$$2.C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 12 & 7\\ 8 & 14 & 5 & 16\\ 4 & 9 & 18 & 13\\ 15 & 17 & 10 & 18\\ 8 & 11 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

$a_1=20; a_2=18; a_3=13;$
$a_4=22; a_5=33; b_1=27;$
$b_2=25; b_3=21; b_4=24.$

$$3.C=\begin{pmatrix}3 & 11 & 8 & 5 & 5\\ 3 & 2 & 9 & 8 & 12\\ 7 & 13 & 7 & 10 & 8\\ 9 & 8 & 4 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

$a_1=300; a_2=400; a_3=500;$
$a_4=200; b_1=200; b_2=200;$
$b_3=450; b_4=275; b_5=275.$

$$4.C=\begin{pmatrix}2 & 9 & 4 & 10 & 6\\ 7 & 3 & 0 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 1 & 7 & 8\\ 11 & 6 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$a_1=28; a_2=32; a_3=24;$
$a_4=16; b_1=13; b_2=25;$
$b_3=17; b_4=10; b_5=30.$

$$5.C=\begin{pmatrix}20 & 7 & 8\\ 17 & 19 & 4\\ 8 & 18 & 17\\ 10 & 15 & 5\end{pmatrix}$$

$a_1=175; a_2=300; a_3=345;$
$a_4=300; b_1=300; b_2=410;$
$b_3=390.$

$$6.C=\begin{pmatrix}27 & 23 & 19\\ 25 & 15 & 18\\ 13 & 21 & 18\\ 20 & 17 & 14\end{pmatrix}$$

$a_1=1000; a_2=4500; a_3=3300;$
$a_4=2200; b_1=1950; b_2=5000;$
$b_3=3330.$

$$7.C=\begin{pmatrix}12 & 18 & 14 & 21 & 24\\17 & 22 & 13 & 14 & 26\\16 & 25 & 11 & 10 & 13\\15 & 20 & 23 & 8 & 19\end{pmatrix}$$

$a_1=128; a_2=323; a_3=151;$
$a_4=272; b_1=253; b_2=120;$
$b_3=180; b_4=174; b_5=111.$

$$8.C=\begin{pmatrix}23 & 15 & 21\\20 & 20 & 17\\14 & 19 & 17\\13 & 26 & 28\end{pmatrix}$$

$a_1=3500; a_2=4000; a_3=1900;$
$a_4=3550; b_1=3000; b_2=4600;$
$b_3=3550.$

$$9.C=\begin{pmatrix}16 & 4 & 7\\4 & 8 & 3\\8 & 10 & 12\\5 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

$a_1=340; a_2=180; a_3=315;$
$a_4=220; b_1=400; b_2=330;$
$b_3=300.$

$$10.C=\begin{pmatrix}12 & 14 & 5\\8 & 13 & 7\\7 & 15 & 5\\4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

$a_1=410; a_2=190; a_3=300;$
$a_4=200; b_1=290; b_2=380;$
$b_3=350.$

$$11.C=\begin{pmatrix}12 & 14 & 32 & 20 & 3\\8 & 10 & 12 & 24 & 12\\6 & 8 & 12 & 24 & 18\\10 & 18 & 4 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$a_1=54; a_2=32; a_3=85;$
$a_4=162; b_1=100; b_2=70;$
$b_3=30; b_4=45; b_5=50.$

$$12.C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 3\\2 & 2 & 3 & 1\\1 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$a_1=100; a_2=60; a_3=40;$
$b_1=60; b_2=55; b_3=50;$
$b_4=35.$

$$13.C=\begin{pmatrix}5 & 10 & 11 & 15\\22 & 11 & 4 & 2\\8 & 1 & 7 & 15\\12 & 14 & 8 & 5\end{pmatrix}$$

$a_1=560; a_2=420; a_3=520;$
$a_4=100; b_1=300; b_2=380;$
$b_3=450; b_4=370.$

$$14.C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\2 & 3 & 3 & 1\\3 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$a_1=90; a_2=70; a_3=50;$
$b_1=80; b_2=60; b_3=40; b_4=30.$

$$15.C=\begin{pmatrix}12 & 9 & 7 & 11\\4 & 3 & 12 & 2\\5 & 17 & 9 & 4\end{pmatrix}$$

$a_1=105; a_2=165; a_3=180;$
$b_1=90; b_2=120; b_3=110; b_4=130.$

$$16C=\begin{pmatrix}7 & 20 & 3 & 15 & 35\\3 & 14 & 10 & 20 & 46\\15 & 25 & 11 & 19 & 48\end{pmatrix}$$

$a_1=200; a_2=100; a_3=200$
$b_1=80; b_2=100; b_3=70; b_4=130; b_5=120;$
$Z=9330.$

$$17. C=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \\ 10 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$a_1=400; a_2=500; a_3=300; a_4=100;$

$b_1=450; b_2=240; b_3=200; b_4=310;$

$Z=5630$

$$18. C=\begin{pmatrix} 20 & 36 & 6 & 27 & 5 \\ 30 & 40 & 3 & 30 & 9 \\ 10 & 28 & 5 & 47 & 7 \\ 20 & 32 & 7 & 42 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_1=72; a_2=72; a_3=68; a_4=60;$

$b_1=30; b_2=10; b_3=80; b_4=40; b_5=100;$

$Z=2312.$

$$19. C=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

$a_1=250; a_2=300; a_3=150;$

$b_1=140; b_2=160; b_3=100; b_4 120; b_5=180;$

$Z=7840.$

$$20. C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$a_1=90; a_2=30; a_3=40; a_4=50;$

$b_1=70; b_2=30; b_3=20; b_4=40;$

$Z=290.$

$$21. C=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}$$

$a_1=300; a_2=150; a_3=250;$

$b_1=400; b_2=60; b_3=90; b_4=70; b_5=80;$

$Z=8670.$

$$22. C=\begin{pmatrix} 16 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$a_1=340; a_2=180; a_3=315; a_4=220;$

$b_1=400; b_2=330; b_3=300;$

$Z=5790.$

$$23. C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 14 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1=60; a_2=36; a_3=90; a_4=84;$

$b_1 20; b_2=10; b_3=60; b_4=30; b_5=70;$

$Z=294.$

$$24. C=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 3 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 10 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 11 & 19 \end{pmatrix}$$

$a_1=225; a_2=250; a_3=125;$

$b_1=120; b_2=150; b_3=110; b_4=135; b_5=85;$

$Z=5650.$

$$25. C=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 10 & 8 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$a_1=20; a_2=90; a_3 100; a_4=50;$

$b_1=20; b_2=10; b_3=30; b_4=50; b_5=45;$

$Z=215.$

$$26. C=\begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 9 & 15 \\ 3 & 14 & 10 & 12 & 20 \\ 15 & 25 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

$a_1=210; a_2=140; a_3=150;$

$b_1=80; b_2=120; b_3=90; b_4=110; b_5=100;$

$Z=5670.$

$$27. C=\begin{pmatrix} 27 & 23 & 19 \\ 25 & 15 & 18 \\ 13 & 21 & 18 \\ 20 & 17 & 14 \end{pmatrix}$$

$a_1=1000; a_2=4500; a_3=3300; a_4=2200;$

$b_1=1950; b_2=5000; b_3=3330;$

$Z=23698.$

$$28. C=\begin{pmatrix} 12 & 9 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 12 & 2 \\ 5 & 17 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_1=105; a_2=165; a_3=180;$

$b_1=90; b_2=120; b_3=110; b_4=130;$

$Z=2020.$

$$29. C=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

$a_1=250; a_2=300; a_3=150;$

$b_1=140; b_2=160; b_3=100; b_4=120; b_5=180;$

$Z=7840.$

$$30. C=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 3 & 15 \\ 12 & 3 & 4 & 10 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 11 & 19 \end{pmatrix}$$

$a_1=225; a_2=250; a_3=125;$

$b_1=120; b_2=150; b_3=110; b_4=135; b_5=85;$

$Z=565.$

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. *Гасс С.* Линейное пограммирование. – М.: Физматгиз, 1961.

2. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Новые направления в линейном пограммировании. – М.: Сов. радио, 1966.

3. *Дж. Данциг.* Линейное пограммирование, его обобщения и применение. – М.:Прогресс, 1966.

4. *Калихман И.Л.* Линейная алгебра и линейное пограммирование. – М.: Высшая школа, 1967.

5. *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.

6. *Карпелевич Ф.И., Садовский А.Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Физматгиз, 1963.

7. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В.* Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.

8. *Солодовников А.С.* Введение в линейную алгебру и линейное программирование. - М.: Просвещение, 1966.

9. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Задачи и методы линейного программирования. – М.: Сов. радио, 1964.

10. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1969.

11. *Каримов А.К., Серовайский С.Я.* Математикалық модельдеудің өмірдегі орны: Оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2001.

12. *Ахметов Қ.* Есептеу техникасы және программалау. – Алматы: Қайнар, 1996.

ҚОСЫМША

1. Ақырлы – конечный
2. Қорлар – ресурсы
3. Қосжақты, қосалқы – двойственный
4. Нұқсанды – вырожденный
5. Нұқсансыз – невырожденный
6. Үйлесімді – совместный
7. Ұяшық – клетка
8. Тасымалдау – перевозка
9. Тірек жоспар – опорный план
10. Тиімді – оптимальный

МАЗМҰНЫ

Оқу басылымы

Қалижанова Әлия Уәлиқызы

ТИІМДІЛЕУ ӘДІСТЕРІ ЖӘНЕ ОПЕРАЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ ПӘНІ БОЙЫНША

Оқу құралы

РБ бастығы *З.А. Ғұбайдулина*
Редакторы *Г.Қ. Оңкебаева*
Компьютерде беттеген *А.Б. Аршова*

Басуға қол қойылды 12.07.2014 ж.
Таралымы 300 дана. Пішімі 60x84x 1/16. № 1 баспаханалық қағаз.
Шартты б.т.6,8. Көлемі 7,3 есепті б.т. Тапсырыс № 303.
Бағасы келісімді.

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы
Оқу-баспа орталығы,
Алматы, Сәтбаев көшесі, 22

ISBN 978-601-228-726-4

050013, Алматы қ., Сәтбаев көшесі, 22
Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ
Оқу-баспа орталығы
Тел.: 257 70 54