ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы
және механика-математика факультеті
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**Республиканской научно-методической конференции
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,
посвященной 20-летию Евразийского национального университета
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»
механико-математического факультета
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

9. Тюлепбердинова Г.А., Унайбаева Р.К. Особенности подготовки специалистов технического образования // Материалы научно-практической конференции «информационно-коммуникационные технологии в образовании взрослых» Алматы 19-20 мая 2011 года, С. 72-73;

УДК 517.538

АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ ЛАНДВЕБЕРА ДЛЯ СЕТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Тюлепбердинова Г.А., Адилжанова С.А., Газиз Г.Г.,Сакыпбекова М.Ж.
asaltanat81@mail.ru
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

Аннотация: В данной статье рассматривается подход при численном решении обратной задачи акустики методом итераций Ландвебера. Рассматриваемый подход заключается в следующем: для восстановления неизвестного коэффициента в дифференциальном уравнении имеем постановку прямой задачи и дополнительную информации о решении прямой задачи. Выписываем функционал невязки, получаем постановку сопряженной задачи. Далее при помощи решений прямой и сопряженной задачи получаем градиент функционала невязки. После чего для численного решения обратной задачи от постановки прямой задачи переходим к задаче, которую будем решать численно на компьютере.

Abstract: This article discusses the approach to numerical solution of inverse acoustic problem by iteration Landweber. This approach is as follows: to restore the unknown factor in the differential equation have a direct problem statement and additional information about the solution of the direct problem. We write the residual functional, we obtain the statement of the dual problem. Next, using the solution of direct and adjoint problem we obtain the gradient of the residual functional. Then for the numerical solution of the inverse problem of the formulation of the direct problem of transition to a problem that will be solved numerically on a computer.

Ключевые слова: обратная задача, задача акустики, формула Даламбера, итерация Ландвебера, дискретный аналог, градиент, сопряженная задача.

Keywords: inverse problem , the problem of acoustics , Dalembert's formula , iteration Landweber , discrete analog , gradient, conjugate problem .

1. Введение*:* Рассмотрим обратную задачу акустики:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\frac{s'(x)}{s(x)}u_x, \quad t > x > 0$$

$$u_x\,|_{x=0} = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, x+0) = s(x), \quad x > 0,$$

$$u\,|_{x=+0} = g(t), \quad t > 0.$$

где по заданной функции g(t) требуется найти функцию s(x).

Введем сетку *x = ih, t = kh,* где $i = \overline{0, N}$, $k = \overline{i, 2N-i}$, N - размер сетки, h = *l*/N - шаг сетки. Введем следующие обозначения для сеточных функций:

$$q(i,k) = (q_1[i,k], q_2[i], q_3[i]),$$

$$q_1(i,k) := q_1(ih, kh), \quad q_2(i) := q_2(ih), \quad q_3(i) := q_3(ih),$$

$$f(i,k) = (f_1[i,k], f_2[i], f_3[i]),$$

$$f_1(i,k) := f_1(ih, kh), \quad f_2(i) := f_2(ih), \quad f_3(i) := q_3(ih).$$

2. Объекты и методы исследований:

Рассматриваемый подход заключается в следующем: для восстановления неизвестного коэффициента в дифференциальном уравнении имеем постановку прямой задачи и дополнительную информации о решении прямой задачи. Выписываем функционал невязки, получаем постановку сопряженной задачи. Далее при помощи решений прямой и сопряженной задачи получаем градиент функционала невязки. После чего для численного решения обратной задачи от постановки прямой задачи переходим к задаче, которую будем решать численно на компьютере. Далее выписываем функционал невязки Φ[*p*], который аппроксимирует функционал невязки J[q], от постановки сопряженной задачи $L_q^*\psi = 0$ переходим к задаче $\widetilde{\Lambda}_p\phi = 0,$ где $\widetilde{\Lambda}_p$ - оператор численного решения сопряженной задачи, а функция ϕ является приближением функции ψ; получаем соотношение, которое аппроксимирует выражение градиента функционала невязки и далее для производства минимизационной последовательности используется какой-нибудь градиентный метод.

Для описания схемы воспользуемся методом математической индукции.

Зададим начальное приближение $q^0[i,k] = \left(q_1^0[i,k], q_2^0[i], q_3^0[i]\right)$.

Предположим, что $q^n[i, k]$ уже известно, тогда вычисляем значения

$$Aq^n[i,k]:\ A_1q^n[i,k] = q_1^n[i,k] - \frac{h}{4}\Big(q_3^n[0]\big(q_1^n[0,k+i] + q_1^n[0,k-i]\big) + 2q_3^n[i]q_1^n[i,k]\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j]\Big(q_1^n[j,k+i-j] + q_1^n[j,k-i+j]\Big)h,$$

$$A_2q^n[i] = q_2^n[i] + \frac{h}{4}\Big(q_3^n[0]q_2^n[0] + q_3^n[i]q_2^n[i]\Big) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j]q_2^n[j]h,$$

$$A_3q^n[i] = q_3^n[i] + \Big(0.5h\big(q_3^n[0]q_2^n[0] + q_3^n[i]q_2^n[i]\big) + \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j]q_2^n[j]h$$

$$\times\Big(0.5h\big(q_3^n[0]q_1^n[0,2i] + q_3^n[i]q_1^n[i,i]\big) + \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j]q_1^n[j,2i-j]h - 0.5\gamma\, f_3[i]\Big)$$

$$+2/\gamma\Big(0.5h\big(q_3^n[0]q_1^n[0,2i] + q_3^n[i]q_1^n[i,i]\big) + \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j]q_1^n[j,2i-j]h\Big).$$

Вычисляем значения функционалов

$$J_1(q^n) = \|r_1\|_{L_2}^2 \|A_1q^n - f_1\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=i}^{2N-i}(A_1q^n[i,k] - f_1[i,k])^2 h^2,$$

$$J_2(q^n) = \|r_2\|_{L_2}^2 + \|A_2q^n - f_2\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^{N}(A_2q^n[i] - f_2[i])^2 h,$$

$$J_3(q^n) = \|r_3\|_{L_2}^2 = \|A_3q^n - f_3\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^{N}(A_3q^n[i] - f_3[i])^2 h,$$

и если $J_1(q^n), J_2(q^n), J_3(q^n)$ достаточно малы, то останавливаем процесс, принимая q^n за приближенное решение обратной задачи.

Если функционалы $J_1(q^n), J_2(q^n), J_3(q^n)$ недостаточно малы, то вычисляем градиенты функционалов

$$J_1'(q^n)[i,k] = 2[A_1'q^n]^* r[i,k] = r_1[i,k] - 0.5q_3^n[i]\Bigg(\sum_{j=i}^{(i+k)/2} r_1[j,k+i-j]h$$

$$+\sum_{j=1}^{N-(k-i)/2} r_1[j,k-i+j]h - 2(B_2 q[(k+i)/2]+1/\gamma)r_3[(k+i)/2]\Bigg),$$

$$J_2'(q^n)[i] = 2[A_2' q^n]^* r[i] = r_2[i]$$

$$+0.5 q_3^n[i]\sum_{j=i}^{N}\{r_2[j]+2r_3[j](B_4 q[j]-0.5\gamma\, f_3[j])\}h,$$

$$J_3'(q^n)[i] = 2[A_3' q^n]^* r[i] = r_3[i]$$

$$-0.5\sum_{j=i}^{N}\left(\sum_{p=j}^{2N-j}(q_1^n[i,p+j-i]+q_1^n[i,p-j+i])r_1[j,p]h\right.$$

$$-q_2^n[i]r_2[j]-2q_2^n[i]r_3[j](B_4 q[j]-0.5\gamma\, f_3[j])$$

$$-4q_1^n[i,2j-i](B_2 q[j]+1/\gamma)r_3[j])h,$$

где $B_2 q[i] = \dfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{i} q_3^n[j]q_2^n[j]h$,

$$B_4 q[i] = \sum_{j=0}^{i} q_3^n[j]q_1^n[j,2i-j]h.$$

3. Результаты и их обсуждение :

Вычисляем следующее приближение q^{n+1}

$$q_1^{n+1} = q_1^n - \alpha_1 J_1'(q^n),$$
$$q_2^{n+1} = q_2^n - \alpha_2 J_2'(q^n),$$
$$q_3^{n+1} = q_3^n - \alpha_3 J_3'(q^n).$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \left(0, \left\|[A'q]^*\right\|^{-2}\right)$.

4. Выводы*:* Проводим конечно-разностную аппроксимацию. Имеем сеточную область Ω_h, тем или иным способом аппроксимируем оператор L_q - разностным оператором. Далее тем или иным способом аппроксимируем оператор А, разностным оператором A_h, и соответствующей сопряженной задаче $L_p^*\psi = 0$ - заменяем разностным аналогом $\widetilde{\Lambda}^*\psi_h = 0$. Из этой схемы расчетов получения аппроксимации сопряженной задачи, т.е. нет гарантии, что $\widetilde{\Lambda}^*$ совпадает с $\widetilde{\Lambda}^*$, в случае их не совпадения как следствие изменится и дискретный аналог градиента, т.е.. $B \neq A_h$.

С точки зрения теории разностных схем, используя произвольный выбор конечной аппроксимации сопряженной задачи, можно подобрать точную аппроксимацию сопряженной задачи, чтобы градиенты им соответствующие совпали.

Список использованных источников

1. Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсеитов Д. Б. Начально-краевая задача для уравнения эллиптического типа // Вестник КазНУ. - 2006. - Т. 2. - С. 33-47.

2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.- М.: Наука, 1971. - С. 553.

3. Нурсеитова А.Т., Тюлепбердинова Г.А. Сходимость метода итераций Ландвебера для решения задачи определения акустической жесткости //Вестник КазНПУ им. Абая. Алматы - 2008. Т. 21, №1.- С.215-217. - Серия «Физико-математические науки».