

Алтайская государственная академия образования имени В. М. Шукшина
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Казахский национальный педагогический университет имени Абая

Фундаментальные науки И образование



Бийск
2012

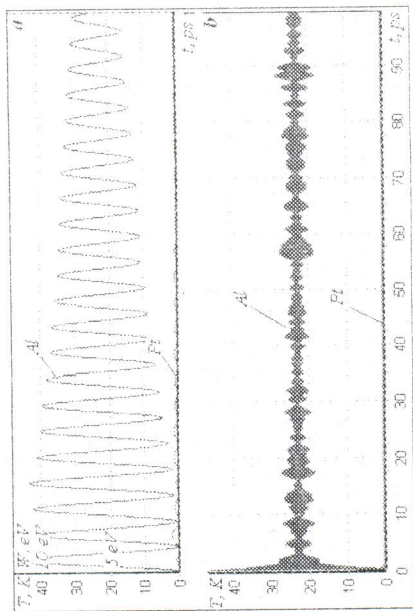


Рис. 4. То же, что и на рис. 3 для шести атомов A_i отклоненных в направлении 1, (см. рис.2).

Благодаря наличию щели в плотности фононных состояний упорядоченного сплава Pt_3Al и, очевидно, любого идеального кристалла стехиометрии A_3B с большой разницей масс атомов сорта A и B , возможны эффекты локализации колебательной энергии. При этом энергия может быть сосредоточена как в дискретных бризерах, когда носителями энергии являются отдельные атомы, совершающие нелинейные локализованные колебания, так и во всей подрешетке легких атомов, когда кинетической энергией обладают все атомы типа B , совершающие линейные малоамплитудные колебания. Иными словами благодаря наличию щели в плотности фононных состояний кристалла его подрешетки могут иметь сильно различающиеся энергии.

Литература

1. Пожидаева, О.В. Локализованная колебательная мода в двумерном упорядоченном сплаве [Текст] / О.В. Пожидаева, С.В. Дмитриев, Н.Н. Медведев, Ю.В. Бебихов, А.В. Самсонов, М.Д. Старостенков // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. - 2006. - т. 34. - № 3. - С. 101-106.
2. Дмитриев, С.В. Локализованные колебательные моды в бездефектном двумерном кристалле A_3B [Текст] / С.В. Дмитриев, Н.Н. Медведев, Р.Р. Мулюков, О.В. Пожидаева, А.И. Потекаев, М.Д. Старостенков // Изв. вузов. Физика. - 2008. - т. 51. - № 8. - С. 73 - 81.

3. Flach, S. Discrete Breathers [Text] / S. Flach, C.R. Willis // Phys. Rep. - 1998. - V. 295. - P. 181-264.
4. Flach, S. Discrete breathers - Advances in theory and applications [Text] / S. Flach, A.V. Gorbach // Phys. Rep. - 2008. - V. 467. - P. 1 - 116.
5. Manley M.E. Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties [Text] / M.E. Man A.B.ley // Acta Mater. - 2010 - V.58. - P. 2926-2935.
6. Campbell D.K., Localizing energy through nonlinearity and discreteness [Text] / D. K. Campbell, S. Flach, Yu. S. Kivshar, // Phys. Today. - 2004. - V. 57(1).-P.43 - 49.

С.Т. Мухамбетжанов,
д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой ДУиТУ
Казахского национального университета имени аль-Фараби
(г. Алматы, Казахстан),
З.М. Абдирахметова,
магистр естественных наук, специалист кафедры информатики
Казахского национального университета имени аль-Фараби
(г. Алматы, Казахстан)

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ТИПА СТЕФАНА

В работе рассматривается движение газированной жидкости в пористой среде. При этом основное внимание уделено разрешимости соответствующей задачи. Подобные математические модели рассматривались многими авторами в [3-5]. Например, в работе [3] рассматривается случай, когда давление в пласте выше давления насыщения, весь газ растворен в жидкости (свободный газ отсутствует) и жидкость вместе с растворенным газом можно рассматривать как однородную.

Давление насыщения является физической константой нефти того или иного района. Оно обычно лежит в пределах 90-150 атмосфер. Если же давление в пласте меньше давления насыщения, то начинается выделение газа из раствора и в пористой среде движутся одновременно жидкость и свободный газ.

В настоящей работе исследуется математическая модель вытеснения газированной нефти, предложенная Монаховым В. Н. в [4]. Основным отличительным параметром, связанным с процессом движения газированной нефти, является давление насыщения - P_n . Если давление газированной жидкости падает ниже давления насыщения, то произ-

ходит выделение газовой фазы из нефти. Характерным параметром для потока парафинистой нефти является температура кристаллизации парафина θ_k при падении пластовой температуры, ниже которой происходит осаждение кристаллизованного парафина на поверхности порового пространства. Оба эти фактора должны учитываться при разработке месторождений газированной парафинистой нефти. В случае добычи газированной нефти необходимо поддерживать пластовое давление P , добываясь того, чтобы $P > P_n$. Для добычи парафинистой нефти основным технологическим моментом является поддержание высокой пластовой температуры, что достигается закачкой в нефтяной пласт пара или горячей воды. Особенно затруднена разработка месторождений парафинистой нефти. При этом в разрабатываемом пласте возникают участки, где обе компоненты, газ и парафин, находятся вблизи критических точек $|P - P_n| \ll 1$ и $|\theta - \theta_k| \ll 1$.

В практике нефтедобычи в условиях такой дважды критической ситуации отмечается наличие физических эффектов, плохо поддающихся теоретическому объяснению. Например, иногда происходит практически полное падение дебитов некоторых эксплуатационных скважин, не реагирующее на повышение пластового давления. При дополнительном разбуривании таких участков в порах выбранных кернов обнаруживается достаточно устойчивая «пена», состоящая из пузырьков газа, закупоренных кристаллизовавшимся парафином.

Становится очевидным, что повышение нефтегазачи в таких условиях может быть достигнуто только за счёт повышения пластовой температуры, т.е. в результате концентрированной закачки пара в пласт. Определение необходимых для этого расходов и температуры пара требует создания адекватной математической модели, учитывающей взаимодействие обоих параметров P и θ . Ниже прилагается простая математическая модель, относительно давления, для описания этого процесса.

Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени давление в пласте меньше давления насыщения, т.е. $P < P_n$ и занимает область $\Omega^+(0) = \{x/\theta < x < x_0\}$, а при $P \geq P_n$ область $\Omega^-(0) = \{x/\theta < x < 1\}$. Как было отмечено выше, в области $\Omega^-(0)$ плотность определяется следующим образом $\rho = f(P) = 1 - \delta(P - P_n)$, где $P_n < \frac{1}{2}$, $\delta > 0$, а в $\Omega^+(0)$ плотность равна 1, т.е. $f(P) = 1$ при $P \geq P_n$.

Тогда в области $\Omega^+_\Gamma = \{(x,t)/0 < x < R(t), 0 \leq t \leq T\}$ плотность $\rho = f(P)$, скорость \vec{v} , давление P удовлетворяют уравнению неразрывности и закону Дарси:

$$m \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (P \theta)}{\partial x} = 0, (x,t) \in \Omega^+_\Gamma \quad (1)$$

$$\vec{v} = -K \frac{\partial P}{\partial x}, (x,t) \in \Omega^+_\Gamma \quad (2)$$

где $K = \frac{\mu(\theta)}{\mu(\theta^*)}$, $\theta^* = \text{const} > 0$

В (1), (2) $m = \text{const} > 0$ — пористость грунта, $\mu(\theta) = \text{const} > 0$ — коэффициент проницаемости грунта, $\mu(\theta^*) = \text{const} > 0$ — вязкость фильтрующей жидкости.

На свободной границе $x = R(t)$:

$$m \frac{\partial P}{\partial t} - \vec{v} \cdot P = P_n = \text{const} > 0 \quad (3)$$

Кроме того, на известной границе $x=0$ при $t \in [0, T]$ задан расход массы:

$$\rho \vec{v} = \varphi(t), \quad (4)$$

а в начальный момент времени известно положение свободной границы и распределение давления:

$$R(0) = x_0 > 0, P(x,0) = P_0(x), x \in \Omega^+_\Gamma \quad (5)$$

Без ограничения общности постоянные m, K, μ, P_n можно положить равными единице и $f(t) = 1$.

Из результатов работы [1] следует, что при определённых условиях гладкости сформулированной задачи имеет единственное классическое решение на достаточно малом интервале времени. Выясним условия на данные задачи, при которых найденное решение продолжимо на произвольный интервал времени.

При этом достаточно показать $P < 1$ в области Ω^+_Γ и установить ограниченность величины

$$J_0(T) = |P|_{\Omega^+_\Gamma}^{(1+\gamma)}, \quad (6)$$

с некоторым $\gamma \in (0, 1)$.

Основными моментами существования классического решения являются следующие факторы:

- а) конечность величины $J_0(T)$, б) невырожденность области Ω^+_Γ , в) ограниченность снизу и сверху модулями градиента решения на свободной границе.

Для одной пространственно-переменной области Ω_T всегда вырожденная, так как $R(t)$ – монотонно убывающая функция. Это следует из того, что $P < 1$ в области Ω_T и условий (3). Ограниченность сверху и снизу модулями градиента решения на свободной границе используется в дальнейшем при получении оценок приближенных решений вблизи свободной границы, не зависящих от номера приближения. Следовательно, единственным условием существования $P < 1$ решения на интервале от (0, T) остаётся конечность величины $J_0(T)$.

Возникает вопрос, что же происходит в другой части области? Как уже отмечалось выше в области $\Omega_T = \{(x,t) | R(t) < x < 1, 0 < t < T\}$ плотность $\rho = 1$. Тогда из (1) и (2) получим:

$$\frac{\partial p^2}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$P(R(t), t) = 1, t \in [0, T] \quad (8)$$

Тем самым получили во второй части области неравновесный режим, т.е. t – участвует как параметр. С помощью преобразования

$$Z = \frac{x - R(t)}{1 - R(t)}$$

в новой переменной решения задачи (7) и (8) выглядят следующим образом:

$$P(Z) = C_1 Z + C_2, \text{ где } C_2 = 1, C_1 = P_1(t) - 1$$

Отсюда окончательно имеем:

$$P(x, t) = (P_1(t) - 1) \frac{x - R(t)}{1 - R(t)} + 1 \quad (9)$$

где $R(t)$ – свободная граница определяется с помощью задачи (1) – (5).

Основной результат. Ниже предлагается метод в случае задачи Стефана. При этом задачу (1)–(5) можно представить в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial p}{\partial x} \right), \text{ где } \rho = f(P) \quad (10)$$

с начальными условиями

$$R(0) = x_0, P|_{t=0} = P_0(x) \quad (11)$$

как свободной границе $x = R(t)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{dR(t)}{dt}, P(R(t), t) = 1 \quad (12)$$

Кроме того на известной границе $x=0$ при $t \in (0, T)$ задан расход

$$\rho \frac{\partial P}{\partial x} = \varphi(t) \quad (13)$$

Интегрируя (10) и используя (11)–(12), получаем:

$$\int_{x_0(t)}^{x(t)} f[P(x, t)] dx + F(t) = \int f[P_0(x)] dx, \quad (14)$$

$$\text{где } F(t) = \int \varphi(\tau) d\tau$$

Для $\lambda > 0$ определим преобразование L. Следующим образом:

Пусть $\delta(t)$ – непрерывно дифференцируемая монотонно возрастающая функция, определённая в интервале $0 \leq t \leq \lambda$ и удовлетворяющая условию:

$$\delta(0) = x_0, \delta(t) > 0, \text{ если } t > 0. \text{ Пусть } u(x, t) - \text{ решение задачи}$$

$$\frac{\partial p(u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\rho(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \text{ при } 0 < x < \delta(t), 0 < t \leq \lambda$$

$$u(\delta(t), t) = 1, \text{ при } x < \delta(t), 0 < t \leq \lambda \quad (15)$$

$$\rho(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(t), \text{ при } x=0, 0 < t \leq \lambda.$$

Тогда положим

$$S(t) = L\delta \quad (16)$$

$$\text{где } \int f(P(x, t)) dx + F(t) = \int_{x_0(t)}^{x(t)} f(P_0(x)) dx$$

Очевидно, что δ является неподвижной точкой оператора L тогда и только тогда, когда (ϑ, δ) образует решение задачи (11). Компактность оператора L следует из результатов работы [2]. Полученная функция $S(t)$ – является непрерывно дифференцируемой и монотонно возрастающей функцией.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Предположим, что $\varphi(t)$ ($0 < t < \infty$) – непрерывная функция. Тогда существует единственное решение задачи (10)–(13).

Доказательство теоремы следует из результатов работы [2].

Для того, чтобы показать свободная граница $x=R(t)$ — неубывающая функция. Введём функцию $u(x,t) = \int_{y_0(x)}^y f(S) dS$, при $p < 1$.

$$\text{где } f(S) \geq 0, f'(S) \leq 0, \forall S \in (0,1)$$

Тогда исходную задачу можно представить в виде

$$u_t = \alpha(P) U_{xx}, \quad u|_{x=0} = \alpha(P), \quad (17)$$

С начальным

$$u(x,0) = U_0(x), \quad (18)$$

и ограниченными условиями

$$u_x(0,t) = -\varphi(t), \quad u(R(t),t) = 0 \quad (19)$$

$$u_x(R(t),t) = \frac{dR}{dt} \quad (20)$$

где $\alpha(P) = \frac{f(P)}{\delta}, U_0(x) = \int_{y_0(x)}^x f(S) dS$.

Для того чтобы узнать какой вариант реализуется, профилируем равенство $U_x(R(t),0) = 0$, по времени:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(R(t)-0,t) \frac{dR}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}(R(t)-0,t) = 0$$

Если выполняются соотношения (20), то из (19) - (20) получаем

$$\left(\frac{dR}{dt} \right) + U_x(R(t)-0,t) = 0$$

Отбрасываем первое слагаемое последнего равенства и получим: $U_x(R(t)-0,t) \leq 0$.

Откуда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(R(t),t) \geq 0$. В силу предполагаемой гладкости $U(x,t) > 0$ в области Ω^+ , а вдоль свободной границы $x=R(t)$ искомая функция $U=U(x,t)$ является неотрицательной, а сама свободная граница $x=R(t)$ является неотрицательной и неубывающей функцией. Далее, введением массовой переменной Лагранжа по формуле

$$y = \int_{R(t)}^x f(S) dS \text{ получим эквивалентную краевую задачу в фиксиро-$$

области. При этом функция $P(y,t) = P(x,t)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((u+1) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(f(u+1) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \text{ при } (y,t) \in G_T \quad (21)$$

$$f(u+1) \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(t), \text{ при } y = Y(t), t \in (0,T) \quad (22)$$

$$u = 0, \text{ при } y = 0, t \in (0,T) \quad (23)$$

$$u(y,0) = u_0(y), \text{ при } y \in G_T(0) \quad (24)$$

$$\text{В (14) - (17) } G = \{(y,t) / y \in G_T, t \in (0,T)\} \quad (25)$$

$$G = \{y / 0 < y < Y(t)\}, \frac{dY}{dt} = \varphi(t), Y(0) = y_0 \quad (26)$$

$Y = \int_{y_0}^{y_1} f(P_0(x)) dx$, а функция $u_0(y)$ определяется из тождеств

$$u_0(y) = P_0(x(y)) - 1, y = \int_{x(y)}^{y_1} f(P_0(S)) dS$$

Для доказательства существования решения в целом по времени достаточно оценить норму решения в $H^{2+\alpha, 1+\alpha, 2}(G_T)$, только через нор-

мы $|\varphi|_{[0,T]^{(2+\alpha)}}, |P_0|_{[0,y_1]^{(2+\alpha)}}$. Исходя из разрешимости квазилинейных пара-

болических уравнений для решения задачи верна следующая:

$$\text{Лемма 1. Пусть } M(T) = |u|_{[0,T]^{(0)}}, M_0 = \max\{|u_0|_{G(0)}, |\varphi|_{[0,T]^{(1+\alpha)/2}}\} \quad (27)$$

$$\text{Тогда } |u|_{[0,T]^{(2+\alpha)}} \leq M_1(M(T), M_0, T) \quad (28)$$

Доказательство. Оценка (27) следует из результатов [2], а (28) из [3], если заметить, что уравнение (21) не вырождается при $|y| \leq u(y,t) \leq M(T) + M_0 + 1$.

Левое неравенство в (29) следует из принципа максимума для функции $P(y,t)$ (либо для функции $p(x,t)$ в исходных переменных), а правое - из предположения леммы.

Надо отметить, что полученная эквивалентная краевая задача (24)-(25), имеет преимущественную особенность для численного расчёта, так как до сегодняшнего дня отсутствует эффективный метод для численного решения задачи Стефана (т.е. эффективный алгоритм для вычисления свободной границы на ПЭВМ).

Литература

1. Мейрманов, А. М. Задача Стефана [Текст] / А. М. Мейрманов. - Новосибирск: Наука, Сиб.отд., 1986 - с. 239
2. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа [Текст] / А. Фридман. - М.: «Мир», 1986 - с. 427
3. Чарный, И. А. Подземная гидродинамика [Текст] / И. А. Чарный - М., Госнефтеиздат, 1963.
4. Монахов, В. Н. Отчёт за 1994 г.: «Новые информационные технологии в нефтедобывающей промышленности и оценка экологической обстановки в регионе с выдачей пакета прикладных программ, карт и предложений по природоохранному мероприятиям» [Текст]. В. Н. Монахов. - МНИИТ, Алматы, 1994.
5. Гиматуллин, Ш. К. Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки [Текст] / Ш. К. Гиматуллин, Ю. П. Борисов, М. Д. Розенберг и др. - М., Недра, 1983 - с. 463.

канд. физ.-мат. наук, доцент ФГБОУ ВПО «Омский государственный университет имени Ф. М. Достоевского» (г. Омск, Россия)

И. М. Строган,

канд. физ.-мат. наук, доцент ФГБОУ ВПО «Омский государственный университет имени Ф. М. Достоевского» (г. Омск, Россия)

С. А. Святлов,

аспирант ФГБОУ ВПО «Омский государственный университет имени Ф. М. Достоевского» (г. Омск, Россия)

Д. В. Федосов,

имени Ф. М. Достоевского» (г. Омск, Россия)

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТОНКИХ УВСО ПЛЕНОК

На сегодняшний день не вызывает больших споров вопрос о влиянии макроструктуры сверхпроводящих тонких пленок $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ на их транспортные свойства, особенно на критический ток пленки [1-3]. Такие дефекты макроструктуры как межзеренные и междислокатные границы, дислокации, границы двойнирования и дру-

142

гие способствуют подавлению критического тока распаривания и удельной проводимости пленок. Сильное влияние на транспортные свойства оказывает ширина межслочатой прослойки, находящейся преимущественно в тетрагональной фазе и угол разориентации блоков.

Однако в литературе пока нет однозначного мнения о влиянии дефектов структуры на транспортные свойства ультратонких пленок УВСО [4]. Нет ясности и о степени влияния на транспортные свойства ультратонких УВСО пленок упругих напряжений, возникающих из-за несогласований параметров кристаллических решеток подложки и пленки [5].

В данной работе исследуется эволюция структуры УВСО пленок с ростом толщины пленки. УВСО пленки выращивались методом лазерного напыления на монокристаллических подложках $SrTiO_3$ (100). Структура исследовалась на атомно-силовом микроскопе. Использовались следующие параметры напыления пленок: температура подложки $T_s=820$ °С, расстояние мишень-подложка $l=3$ см, давление в напылительной камере $P \approx 70$ Па, плотность мощности лазерного излучения $W=4,3 \cdot 10^8$ Вт/см².

Исследования показывают, что после образования сплошной пленки могут наблюдаться высокое совершенство структуры и аномально высокие значения удельной проводимости. На рис. 1 представлено изображение ультратонкой УВСО пленки. Время напыления таких пленок лежит в интервале 5 ± 10 с, а толщина пленок не превышает 10 нм. Профиллограммы поверхности ультратонкой УВСО пленки показывают, что шероховатость находится в пределах одного нанометра.

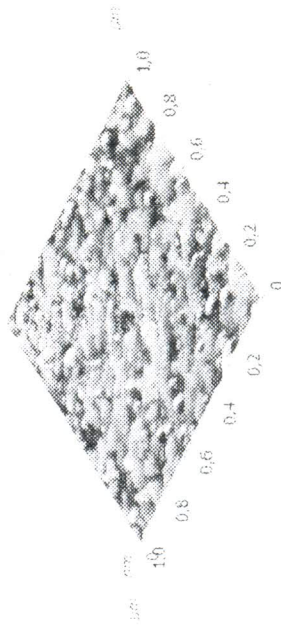


Рис. 1. 3D изображение ультратонкой пленки УВСО

Удельные сопротивления ультратонких пленок при температуре 77 К лежат в диапазоне от $0,8 \cdot 10^{-6}$ до $1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, что на порядок ниже удельного сопротивления монокристаллических пленок УВСО толщиной порядка 100 нм. Аномально низкое значение удельного сопротив-